让你开窍的数学

有趣的图形

覆盖

周春荔

河南科学技术出版社

责任编辑/袁　元
美术设计/剑　樯
版式设计/栾亚平

让你开窍的数学

有趣的图形覆盖

让你开窍的数学

数学的领悟
解析几何方法漫谈
数学解题中的物理方法
数学解题中的动态思维
极端原理与解题
[illegible]
趣味题与简捷解
从毕达哥拉斯到费尔马

ISBN 7-5349-1806-5

9 787534 918063 >

ISBN 7-5349-1806-5/G・465
定价：7.90 元

让你开窍的数学

有趣的图形覆盖

周春荔

河南科学技术出版社

内 容 提 要

图形覆盖是组合几何中的内容，问题直观简明易懂，构思精巧方法新颖．本书构造了一种与中学数学教育密切结合的体系，用较为通俗的语言直观形象而又不失严格性地介绍了图形覆盖的基本知识，并结合例题从不同角度讲述了证明覆盖问题的基本技巧．在内容叙述上循序渐进，逐步深入，直到面积重叠原理、维他利型问题、凸图形和海莱定理，最后介绍了有趣的盖莱"钉圆"、"果园问题"、"圆盘填装问题"，以及至今尚未解决的著名的"勒贝格问题"．为读者系统研究图形覆盖问题在知识与方法方面提供了较为充实的资料．

本书可作为中学生的课外读物（其中大部分内容初中生就能看懂），也可作为中学数学教师开展数学课外活动或进行数学奥林匹克培训的材料，并可供初等数学研究人员参考．

让你开窍的数学

有趣的图形覆盖

周春荔

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版

（郑州市农业路73号）

河南第一新华印刷厂印刷

全 国 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米 32开本 7.25印张 140千字

1997年1月第1版 1998年4月第2次印刷

印数：4 001—7 000册

ISBN 7-5349-1806-5/G・463

定 价：7.90元

序

如果我们打开科学史，研究一些卓越人物成功的经验，就会发现一个重要的事实：他们所研究的正是他们从小就喜欢的．少年时代的达尔文数学成绩不佳，但热爱生物，结果他成为最伟大的生物学家．反之，如果强迫他研究数学，他未必能如此成功．由此可见，兴趣与工作一致，二者形成良性循环，是成功的重要因素．然而兴趣又是怎样形成的呢？这固然与天赋有关，但后天的启发和培养更为重要．数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣，这等于给了他们长久钻研数学的动力．优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘，就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰．

讲一些名人轶事有助于启发兴趣，但这远远不够．如果在传授知识的同时，分析重要的数学思想，阐明发展概况，指出各种应用，使学生

不仅知其然，而且知其所以然，不仅看到定理的结论，而且了解它的演变过程，不仅看到逻辑之美，而且欣赏到形象之美、直观之美，这才是难能可贵的. 在许多情况下，直观走在逻辑思维的前面，起了领路作用. 直觉思维大都是顿悟的，很难把握，却极富兴趣，正是精华所在. M. 克莱因写了一部大书《古今数学思想》，对数学发展的主导思想有精彩的论述，可惜篇幅太大，内容过深，不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷，必须深入数学本身：不仅是学者，而且是作者；不仅是观众，而且是演员. 他必须克服一个又一个的困难，不断地有新的发现、新的创造. 其入也愈深，所见也愈奇，观前人所未观，发前人所未发，这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界. 为此，他应具备很强的研究能力；而这种能力，必须从中学时代起便开始锻炼，经过长期积累，方可成为巨匠.

于是我们看到"兴趣"、"思维"和"能力"三者在数学教学中的重要作用. 近年来我国出版了多种数学课外读物，包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解. 这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同，其宗旨是"引起兴趣、启发思维、训练能力"，风格近似于美国数学教育家 G. Polya（波利亚）的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，但更切合我国的实际. 本丛书共 8 本，可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广. 作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平，而且大都出版过多种数学著作. 因此，他们必能得心应手，写得趣味盎然，富于启发性. 这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学，我们希望它能收到宗旨中确定的效果，为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996. 7.

目录

引 子

先请读者看看下面的问题：

“任意面积为1的凸多边形一定可以被某个面积为2的平行四边形纸片所盖住”；

“一个直径等于1的圆不可能被两个直径小于1的圆纸片所盖住”；

“桌子可被100张正方形的台布完全盖住，现知每一张台布上都有一个火烧的圆洞. 证明：只需用其中的3张台布就可完全盖住桌子”.

对这些问题你一定会感到新奇而有趣，或许你会真地动手剪纸试验一番. 这类问题就是平面图形覆盖问题. 只要你熟悉平面几何的基础知识和反证法，经过精巧的构思，正确严谨的推理，就能解决一大批关于平面图形覆盖的问题. 在这个过程中，你会发现，自己分析问题和解决问题的能力会大有长进——课本上的知识巩固了，头脑灵活了，解题的“胃口”增强了，对

数学的兴趣浓烈了！从这个意义上说，妙趣横生的图形覆盖问题不正是一种启智益人的“思维体操”吗？

1

什么是图形覆盖?

考虑到读者的情况,在本节,我们只是从几何直观意义上对一些图形覆盖的基本概念作些初步的介绍.

剪一张边长为1的正方形纸板甲,在桌面上画一个边长为0.8的正方形乙.你能用单位

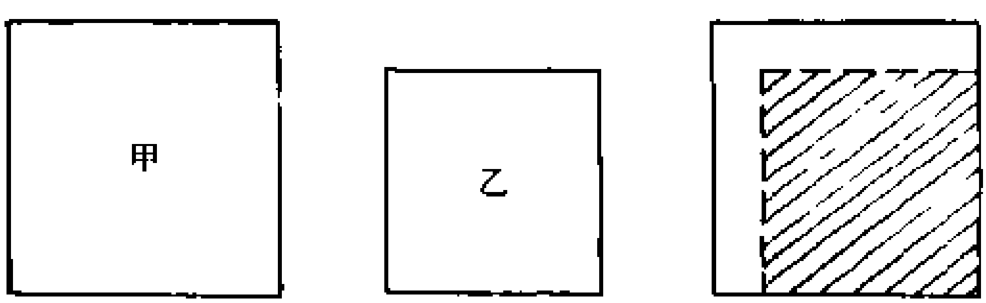

图1.1

正方形纸板甲盖住边长为0.8的正方形乙吗?

结论是显然的.图1.1给出了一种实现用甲盖住乙的方法.这时,我们看到:乙的每一点都在甲的覆盖之下,即正方形乙的每一点都与

一个正方形甲的点重叠.

通过上面这个简单例子的操作与分析，什么叫做图形的覆盖，其意义就比较清楚了.

定义 1.1 若 G 是一张纸片，F 是一个平面图形，如果把纸片 G 放在平面上某个适当的位置，使 F 的每一点都与 G 的点重叠，则称纸片 G 覆盖了平面图形 F.

容易想到，G 放在平面上的某个适当的位置并不一定是唯一的位置. 例如用单位正方形纸片甲去覆盖边长为 0.8 的正方形乙，就可以有许多种不同的覆盖方式.

由于我们经常要判定一张硬纸片 G 能不能盖住一个平面图形 F，所以我们约定，G 经过运动放在平面上的过程中，其形状大小均不改变. 换句话说，G 经过的运动是"合同"变换. 凡是下文中说到的纸片，都是指在运动中保持形状大小不变的"硬纸板".

定义 1.2 如果无论纸片 G 放在平面上什么位置，平面图形 F 中都至少有一点不能被 G 盖住，则称 G 不能覆盖 F.

在我们所考察的问题中，用来覆盖的纸片形状可以各异，但我们要求它必须是个平面区域(例如图 1.2 所示的由一条封闭不自交的曲线 l 所包围的平面部分(含 l 在内))；而被盖的图形可以是一个平面区域，也可以是一条平面曲线，或者是离散分布的若干个点，总之，被盖的图形是一个平面点集.

有时我们要用多张纸片去覆盖一个平面点集，因此，对多张纸片覆盖的概念也要有所限定.

定义 1.3 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 共 n 张纸片，F 是一个平面点

集.若存在一种放置 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的方法,使 F 中每一点都至少被某个 G_i 所盖住,则称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 能覆盖点集 F.

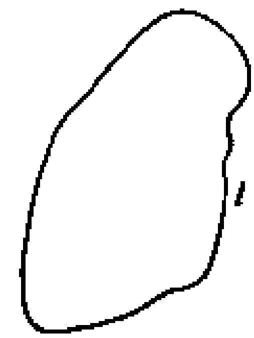

图 1.2

如果无论怎样放置这 n 张纸片,都至少有 F 中一个点不能被这 n 张纸片中任一个盖住,就称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 不能覆盖 F.

显然,图形覆盖有下列性质:

性质 1 纸片 G 可以覆盖住与它全等的平面区域.

性质 2 若纸片 G 能覆盖 G_1, G_1 能覆盖 G_2,则纸片 G 能覆盖 G_2.

性质 3 若纸片 G_1 能覆盖 F,纸片 G_2 也能覆盖 F,则 G_1 与 G_2 的公共部分必能覆盖 F.

性质 2 与性质 3 对研究图形覆盖是非常有用的.

性质 4 G 与 F 都是平面区域.若 G 能覆盖 F,则 G 的面积一定不小于 F 的面积.

2

圆圆覆圆

用一张圆纸片覆盖一个点集 F，则该圆纸片称为点集 F 的覆盖圆. 由覆盖定义可得

定理 2.1 如果能在点集 F 所在平面上找到一点 O，使得点集 F 中的每一点与 O 的距离都不大于 r(定长)，则 F 必可被一个半径为 r 的圆纸片 G 所覆盖(图 2.1).

例 2.1 有两张圆纸片 $\odot(O_1,r_1)$，$\odot(O_2,r_2)$，如果 $r_1 \geqslant r_2$(图 2.2)，则圆纸片 $\odot(O_1,r_1)$ 一定能盖住圆纸片 $\odot(O_2,r_2)$.

证 将圆心 O_1 与 O_2 重合为点 O，则 $\odot(O,r_2)$ 上任一点到 O 的距离 r_2 均不超过 r_1. 所以，根据定理 2.1，$\odot(O,r_2)$ 必可被一个半径为 r_1 的圆纸片 $\odot(O_1,r_1)$ 所覆盖.

例 2.1 告诉我们这样一个事实：半径较小

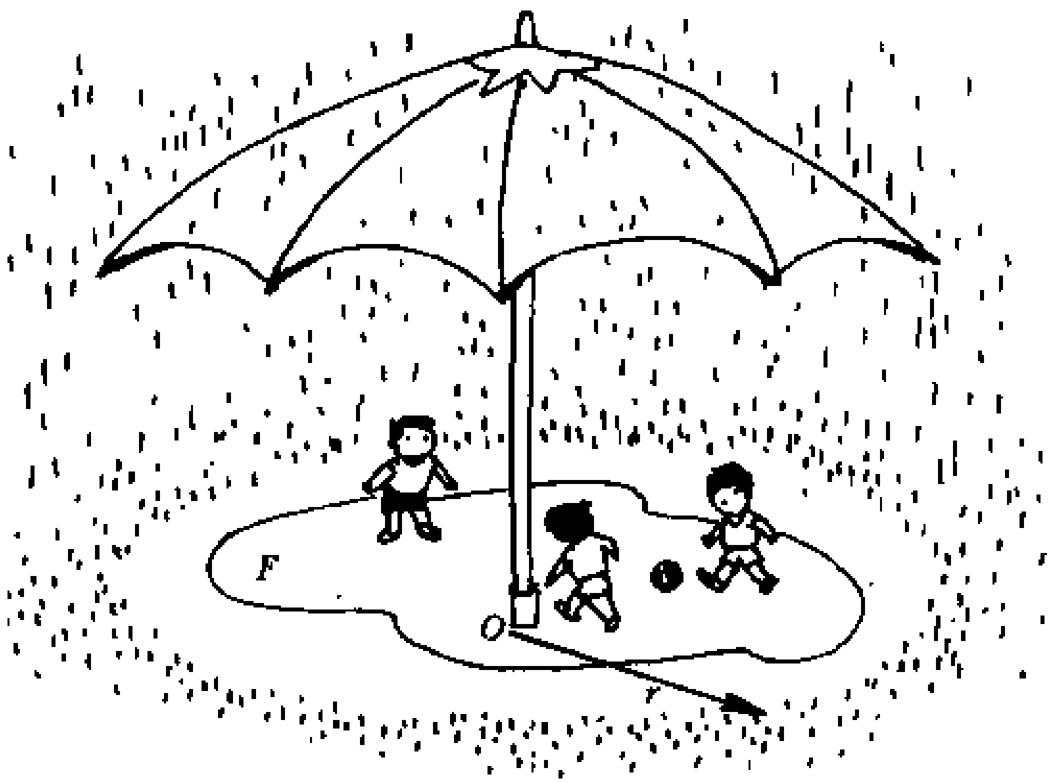

图 2.1

的圆纸片一定能被半径较大的圆纸片所覆盖.

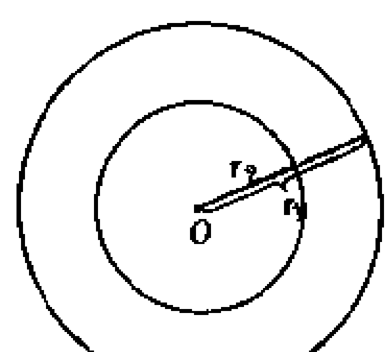

图 2.2

例 2.2 若$\odot(O,r)$盖住两个点 A 与 B,则$\odot(O,r)$必能盖住连结 A,B 两点的线段 AB.

证 若 O,A,B 三点共线,容易想到,线段 AB 上任一点到 O 的距离都不超过 r. 所以线段 AB 可被$\odot(O,r)$盖住.

若 O,A,B 不共线,则连结 OA,OB,AB 可得$\triangle OAB$,不妨设 $OA\leqslant OB\leqslant r$. 设 P 为线段 AB 上任一点,连结 OP(图

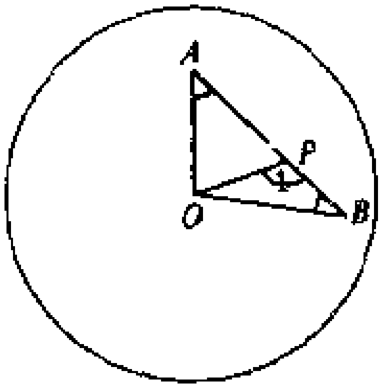

图 2.3

2.3)，

$\because \quad OB \geqslant OA, \therefore \angle A \geqslant \angle B.$

又 $\angle 1 \geqslant \angle A$， $\therefore \quad \angle 1 \geqslant \angle B$.

在$\triangle OBP$中，由$\angle 1 \geqslant \angle B$ 可得 $OB \geqslant OP$. 即有 $OP \leqslant OB \leqslant r$. 根据定理 2.1，线段 AB 必可被$\odot(O,r)$所覆盖.

例 2.3 若$\odot(O,r)$盖住 n 个点 $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}, A_n$，则$\odot(O,r)$必能盖住连结这 n 个点的折线 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$.

这是例 2.2 的直接推广，其结论是显然的.

由例 2.3 可以得出下面的结论：

若圆纸片$\odot(O,r)$盖住了 n 边形的 n 个顶点 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}, A_n$，则这圆纸片$\odot(O,r)$必可盖住这个 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$.

例 2.4 单位正方形可以被半径不小于$\sqrt{2}/2$的圆纸片所覆盖.

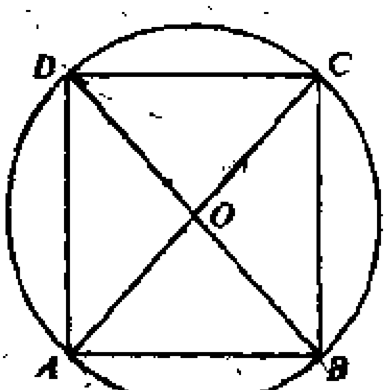

图 2.4

证 设 $ABCD$ 为单位正方形. 连结 AC，BD 交于 O，容易由勾股定理计算得

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此，以 O 为圆心，$\sqrt{2}/2$ 为半径画圆过 A,B,C,D 四点(图 2.4)，依例 2.2 的结论可知，圆纸片$\odot(O,\sqrt{2}/2)$可

盖住单位正方形 $ABCD$. 由例 2.1 知，任何半径不小于 $\sqrt{2}/2$的圆纸片必可盖住半径为$\sqrt{2}/2$的圆纸片，再根据性质 2(传递性)即知，单位正方形可以被半径不小于 $\sqrt{2}/2$ 的圆纸片所覆盖.

例 2.5 证明：平行四边形能够被直径不小于较长对角线的圆纸片所覆盖. 即已知▱$ABCD$，$BD\geqslant AC$(图 2.5)，求证：直径不小于 BD 的圆纸片必可覆盖▱$ABCD$.

证 设对角线 AC，BD 交于点 O. 由于 O 为 BD，AC 的中点，又 $BD\geqslant AC$，所以

$$OA=OC\leqslant OB=OD.$$

因此，A，C 均在以 BD 为直径的圆内. 所以 A，B，C，D 四点均被以 BD 为直径的圆纸片盖住，从而平行四边形 $ABCD$ 被以 BD 为直径的圆纸片盖住. 再根据性质 2 知，直径不小于 BD 的圆纸片必可盖住▱$ABCD$.

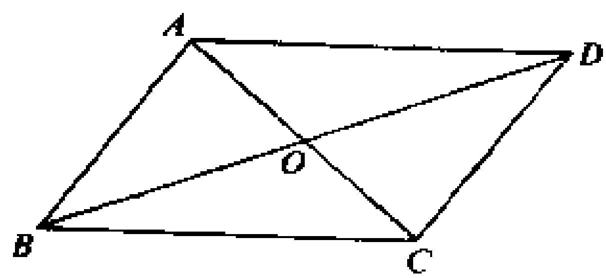

图 2.5

例 2.6 证明：周长为 $2l$ 的平行四边形能够被半径为$\frac{l}{2}$的圆纸片所覆盖.

证 设图 2.4 中▱$ABCD$ 周长为 $2l$，立刻推出 $BD<AB+AD=l$，$OD<\frac{l}{2}$. 由例 2.5 的结论即得证.

例 2.7 桌面上放有一个丝线做成的线圈，它的周长为

$2l$. 求证：不管线圈形状如何，都可以被一个半径为$\frac{l}{2}$的圆纸片所覆盖.

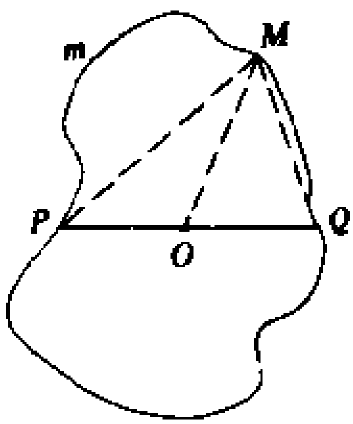

图 2.6

分析 由于线圈可以构成任意形状的曲线 m，当 m 是平行四边形时，就是例 2.6 的情形，因此可以依据例 2.6 的证明找到证题的线索. 其实，这正是将 B,D 两点平分$\square ABCD$ 的周长，圆心 O 取在 BD 中点的性质加以拓广.

证 在曲线圈 m 上取一点 P 及另一点 Q，使 P 和 Q 将曲线 m 分为等长的两段，每段各长为 l. 连结 PQ(图 2.6). 设 O 是线段 PQ 的中点，在 m 上任取一点 M，连结 MO,MP，MQ，则

$$\begin{aligned} OM &\leqslant \frac{1}{2}(MP+MQ) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MP}+\overset{\frown}{MQ}) \\ &= \frac{1}{2}l. \end{aligned}$$

因此，以 O 为中心，$\frac{l}{2}$为半径的圆纸片一定能覆盖整个曲线圈 m.

例 2.8 $\triangle ABC$ 中，$\angle C \geqslant 90°$，求证：$\triangle ABC$ 必能被一个半径为$\frac{1}{2}AB$ 的圆纸片所覆盖，并且这个圆是所有能覆盖 $\triangle ABC$ 的圆中半径最小的.

证 我们以 AB 的中点 O 为圆心，$\frac{1}{2}AB$ 为半径画圆(图 2.7)，则 AB 为$\odot O$ 的直径. 由于$\angle C \geqslant 90°$，由与圆有关的角

的性质可知，点 C 落在圆的内部（当 $\angle C>90°$ 时）或圆周上（当 $\angle C=90°$ 时）.

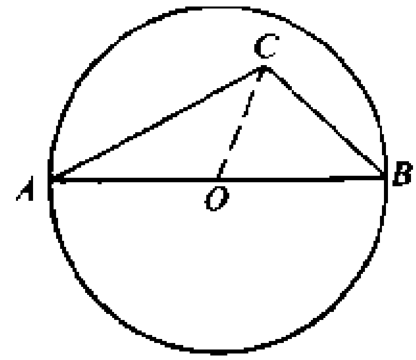

图 2.7

可见，$\triangle ABC$ 的三个顶点 A，B，C 被圆纸片 $\odot(O,\frac{1}{2}AB)$ 所覆盖，根据例 2.3 的结论知，$\triangle ABC$ 必被圆纸片 $\odot(O,\frac{1}{2}AB)$ 所覆盖.

若覆盖 $\triangle ABC$ 的圆的直径小于 AB，则 A，B 两点中至少有一点将不能被这个直径小于 AB 的圆盖住，所以 $\triangle ABC$ 覆盖圆的直径不小于 AB. 因此，$\odot\left(O,\frac{1}{2}AB\right)$ 是所有覆盖圆中最小的一个.

定义 2.1 覆盖点集 F 的圆中半径最小的一个叫做 F 的最小覆盖圆. 最小覆盖圆的半径叫做点集 F 的覆盖半径.

由例 2.8 可知，一个钝角或直角三角形的最长边为 a，那么这个三角形的覆盖半径为 $\frac{a}{2}$. 然而，对于锐角三角形，其最大边长为 a，它的覆盖半径是否也等于 $\frac{a}{2}$ 呢？请看例 2.9.

例 2.9 锐角 $\triangle ABC$ 的最大边长是 a，证明：这个三角形必可被一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 的圆纸片所覆盖.

证 锐角 $\triangle ABC$ 的最大边 a 所对的角 $\angle A$ 也是最大角，则

$$60°\leqslant\angle A<90°.$$

以 $BC=a$ 为弦在点 A 所在的一侧作含 $60°$ 角的弓形弧，

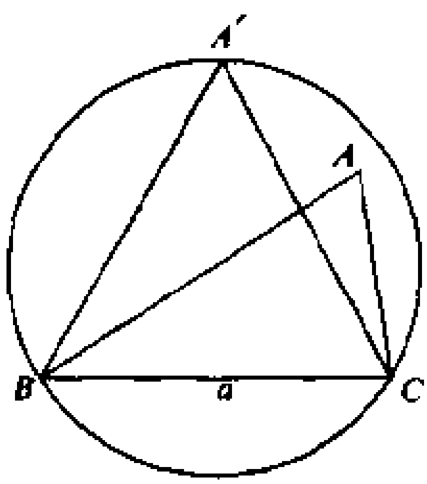

图 2.8

取该弓形弧的中点 A'（图 2.8），则 $A'B=A'C$，$\angle BA'C=60°$. 所以 $\triangle A'BC$ 为正三角形.

由于 $\angle A \geqslant 60° = \angle BA'C$。点 A 在以 BC 为弦的弓形 $BA'C$ 内. 但此弓形恰是正三角形 $A'BC$ 外接圆的一部分. 所以 $\triangle ABC$ 被 $\triangle A'BC$ 的外接圆面所覆盖. 容易算得边长为 a 的正三角形 $A'BC$ 的外接圆半径

$$R=\frac{a}{2\sin 60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

因此，$\triangle ABC$ 可以被半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 的圆纸片所覆盖.

综合例 2.8，例 2.9 不难得出：若 $\triangle ABC$ 的最大边长为 a，则 $\triangle ABC$ 的覆盖圆半径 r 满足

$$\frac{a}{2} \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

例 2.9 中作弓形的方法具有典型性与一般性. 为了今后应用方便，兹概括为如下定理.

定理 2.2 A，B 为二定点，α 为定角（$0°<\alpha<180°$）. 若点集 F 中的每个点 P_k 都在 AB 同侧（图 2.9），且与 A，B 所成视角 $\angle AP_kB \geqslant \alpha$，则点集 F 被以 AB 为弦含定角 α 为弓形角的一个弓形纸片 G 所覆盖. 当然，F 更可以被弓形纸片 G 的生成圆纸片所覆盖.

本定理依据圆周角知识极易证明，它对证明圆面覆盖离

散点集的问题很有用.

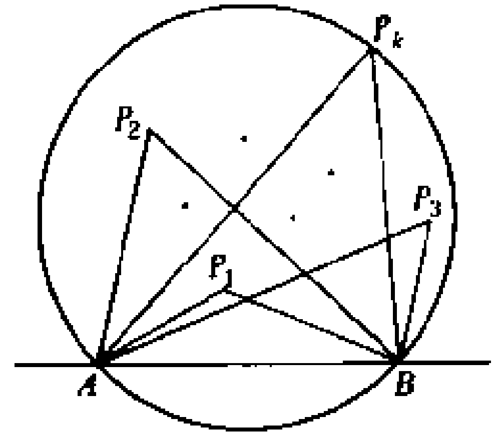

图 2.9

细心的读者一定会发现,定理 2.2 的图形与几何课本中的一个图形(图 2.10)非常相像.图 2.10 是说:临近暗礁的海岸上,可以建立两个灯塔 A,B,使暗礁包围在以 AB 为弦的弓形 AMB 内.那么只要航船 S 能从所收到的信号中知道弓形角 α 的大小,在航行中保持对两个灯塔的视角$\angle ASB<\alpha$,航船就不会触礁.换言之,暗礁区被一个含 α 角为弓形角的弓形域所覆盖,只要航船对两灯塔的视角小于 α,就不会进入覆盖区,从而得以安全行驶.这可看作是覆盖知识的一个简单应用.

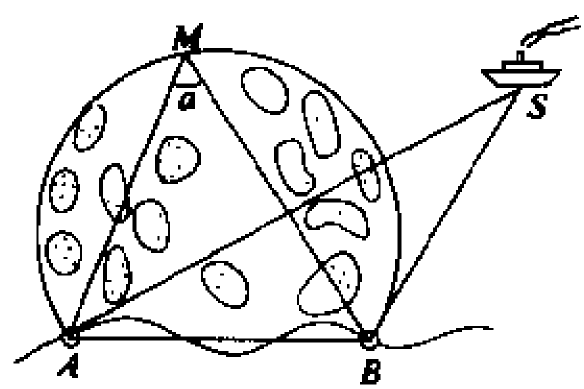

图 2.10

例 2.10 把两个半径为 5 和一个半径为 8 的圆纸片放在桌面上,使它们两两外切(图 2.11).若要用一个大圆纸片把这三个圆纸片完全盖住,问这个大圆纸片的最小半径是多少?

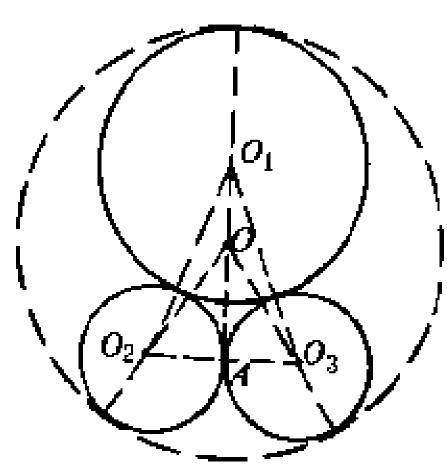

图 2.11

解 设$\odot O_1$的半径是8，$\odot O_2$，$\odot O_3$的半径是5，切点是A. 由对称性可知，能盖住这三个圆的最小圆纸片的圆心O必在对称轴O_1A上，且与三个圆相内切. 若设这个圆纸片半径为r，则

$$O_1A=\sqrt{O_1O_2^2-O_2A^2}$$
$$=\sqrt{(8+5)^2-5^2}=12.$$

在$\mathrm{Rt}\triangle OO_2A$中，

$$(r-5)^2=5^2+(12+8-r)^2.$$

由此解得$r=13\frac{1}{3}$. 即大圆纸片的最小半径是$13\frac{1}{3}$.

3

多边形覆盖

前面我们已经看到，边长较大的正方形纸片能覆盖住边长较小的正方形.

同样，不难证明，边长较大的正三角形纸片能盖住边长较小的正三角形.

由于正方形彼此相似，正三角形也彼此相似，我们自然会想到，两个相似的凸 n 边形纸片，是否也有类似的情况(即面积较大者能盖住面积较小者)呢?

我们有如下定理.

定理 3.1 若甲、乙两个凸 n 边形相似，且对应点依顺时针方向排列次序一致，则其中边长较大的那个凸 n 边形纸片一定能盖住边长较小的那个凸 n 边形.

我们只就凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 与

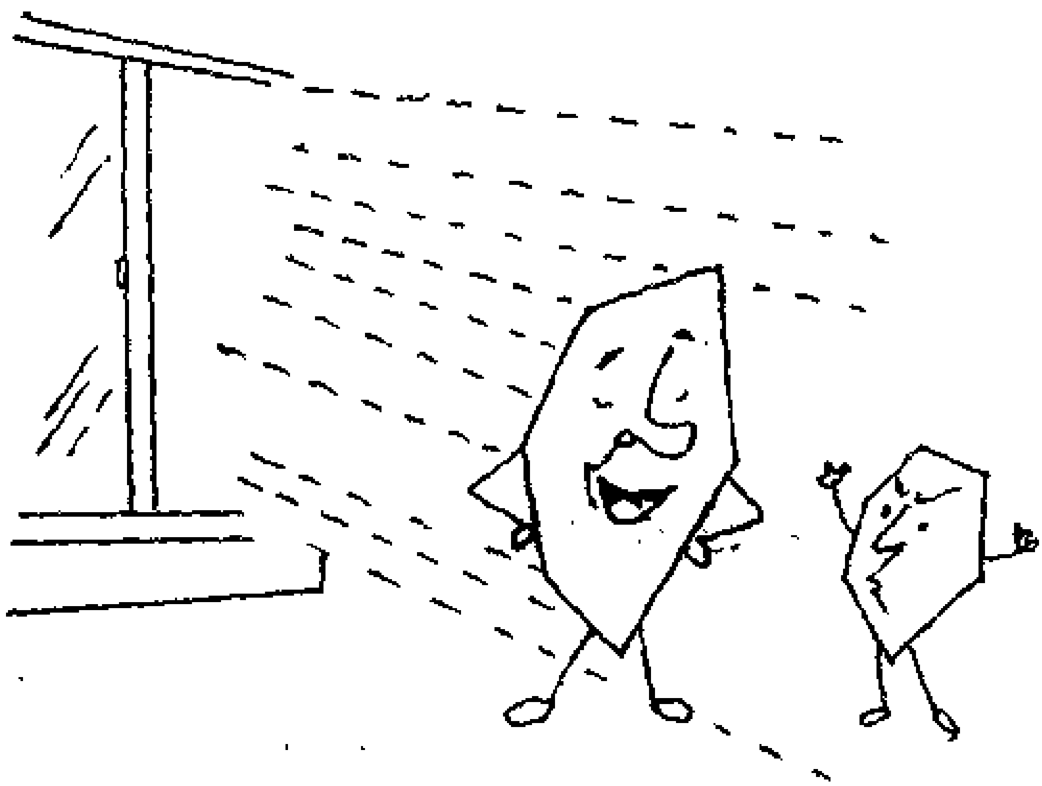

图 3.1

$B_1B_2B_3B_4B_5$ 为例略作说明，凸 n 边形的情况与此类同.

设两个相似凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 与 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 中，A_1 对应 B_1，A_2 对应 B_2，A_3 对应 B_3，A_4 对应 B_4，A_5 对应 B_5，且依顺时针方向排列顺序相同. 设 $A_1A_2>B_1B_2$，即相似比

$$k=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}>1.$$

我们以 B_1 为位似中心将五边形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 放大 k 倍，成为 $B_1C_2C_3C_4C_5$（图 3.2）. 容易证明，五边形 $B_1C_2C_3C_4C_5\cong$五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$.

由于 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 完全被五边形纸片 $B_1C_2C_3C_4C_5$ 覆盖住，所以它也可以被五边形纸片 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 覆盖住.

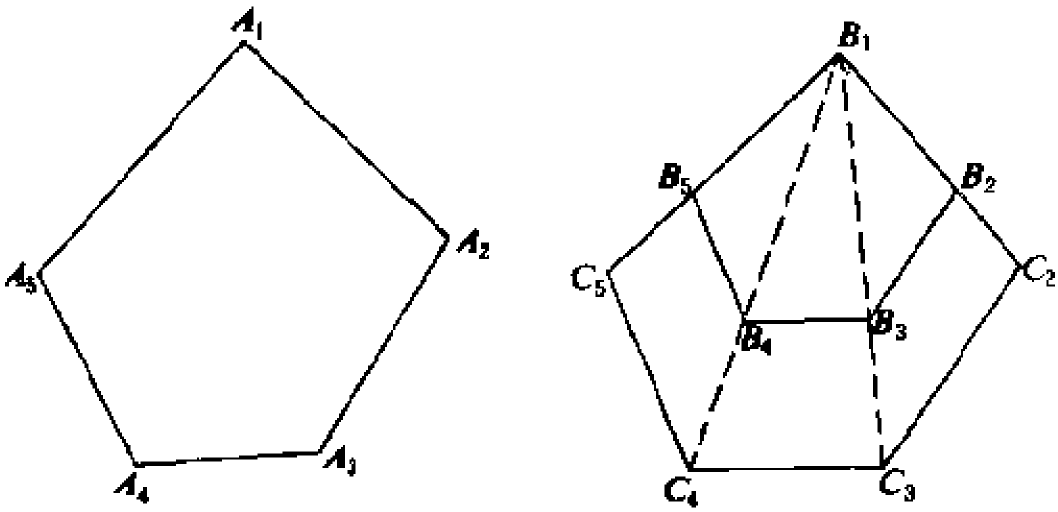

图 3.2

例 3.1 已知三角形纸片 ABC 中，$\angle B=20°$，$\angle C=60°$，$BC=8\text{cm}$. 三角形纸片 $A_1B_1C_1$ 中，$\angle A_1=120°$，$\angle C_1=45°$，$B_1C_1=7.5\text{cm}$. 求证：三角形纸片 ABC 可以盖住三角形纸片 $A_1B_1C_1$.

证 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，由于$\angle A_1=120°$，$\angle C_1=45°$，所以$\angle B_1=15°$.

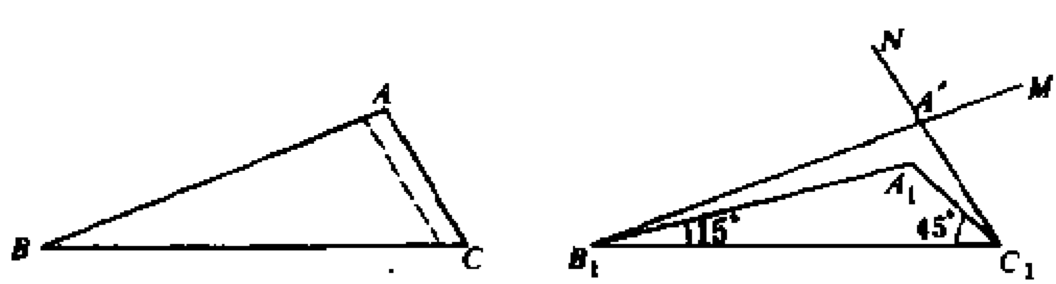

图 3.3

以 B_1 为顶点，B_1C_1 为一边在 A_1 一侧作$\angle MB_1C_1=20°$. 由于$\angle A_1B_1C_1=15°$，线段 B_1A_1 落在$\angle C_1B_1M$ 内部.

以 C_1 为顶点，C_1B_1 为一边在 A_1 一侧作 $\angle NC_1B_1=60°$. 由于 $\angle A_1C_1B_1=45°<60°$. 线段 C_1A_1 落在 $\angle B_1C_1N$ 的内部.

由于 B_1M，C_1N 交于 A'，B_1A_1，C_1A_1 交于 A_1，所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 落在 $\triangle A'B_1C_1$ 的内部，即 $\triangle A_1B_1C_1$ 可被三角形纸片 $A'B_1C_1$ 覆盖住.

由于 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B_1C_1$，$\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{8}{7.5}>1$，根据定理 3.1，三角形纸片 ABC 能盖住三角形纸片 $A'B_1C_1$.

根据性质 2，三角形纸片 ABC 能盖住三角形纸片 $A_1B_1C_1$.

例 3.2 证明：一个单位正方形纸片必可覆盖一个边长为 1 的正三角形.

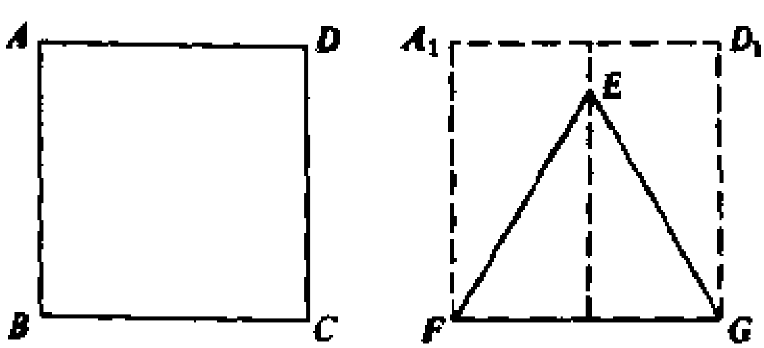

图 3.4

证 1 我们使单位正方形 $ABCD$ 的边 BC 与单位正三角形 EFG 的边 FG 重合(图 3.4). 设 E 与 AD 都在 FG 同一侧，正方形 $ABCD$ 落在正方形 A_1FGD_1 的位置. 这时，

$$\angle EFG=60°<90°=\angle A_1FG,$$

所以 EF 落在 $\angle A_1FG$ 的内部.

同理可证 EG 也落在 $\angle D_1GF$ 的内部. 另外 E 到 FG 的距

离$=\sqrt{3}/2<1$，所以点 E 也在正方形 A_1FGD_1 内部. 这时我们看到，$\triangle EFG$ 的周界上的点都在正方形 A_1FGD_1 内部，所以区域$\triangle EFG$ 完全被正方形区域 A_1FGD_1 盖住，即$\triangle EFG$ 可以被正方形 $ABCD$ 覆盖.

证 2 如图 3.5 所示，设 FG 所在直线为 d，过 E 作直线 c，使 $c/\!/d$. 则 c,d 二平行线间形成宽度为 $\sqrt{3}/2$ 的带形域 G_1. $\triangle EFG$ 被带形域 G_1 所覆盖.

过 F,G 分别作直线 FG 的垂线 a 与 b. 则 a,b 二平行线间形成宽度为 1 的带形域 G_2，$\triangle EFG$ 被 G_2 所覆盖.

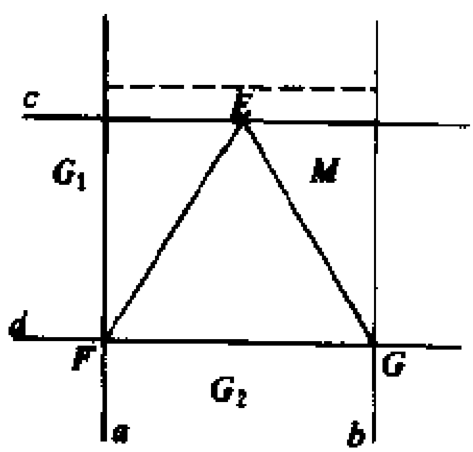

图 3.5

根据覆盖性质 3，$\triangle EFG$ 被 G_1 与 G_2 的公共部分 M 所覆盖. M 是一个长为 1 宽为 $\sqrt{3}/2$ 的矩形，它显然可被边长为 1 的正方形纸片所覆盖. 根据性质 2，$\triangle EFG$ 可被单位正方形纸片 $ABCD$ 所覆盖.

本例集中反映了证明覆盖问题的基本思路. 证 1 是依据定义，证 2 是依据性质. 其共同点都是要构造一种图形来实现覆盖. 读者可能已经发现，用单位正方形纸片可以盖住边长比 1 更大一些的正三角形.

例 3.3 证明：边长为 1 的正方形纸片一定可以覆盖面积为 0.46 的正三角形.

分析 我们如果能求出单位正方形中内接正三角形的最大面积不小于 0.46，问题就解决了. 因此问题转化为求边长

为 1 的正方形中内接正三角形的最大面积.

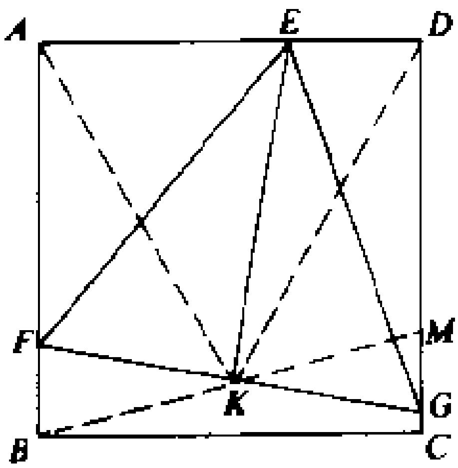

图 3.6

证 假设$\triangle EFG$是正方形$ABCD$的任一内接正三角形. 由于正三角形的三个顶点至少必落在正方形的二边上，所以不妨设其中F、G是在正方形的一组对边上(图 3.6).

作$\triangle EFG$边FG上的高线EK，则E，K，G，D四点共圆. 连结KD，有$\angle KDE=\angle EGK=60°$. 同理，连结$AK$，由于$E$，$K$，$F$，$A$四点共圆，有$\angle KAE=\angle EFK=60°$. 所以$\triangle KDA$是一个边长为 1 的正三角形，其中$K$是它的一个顶点.

由此可知，内接正三角形EFG的边FG的中点必是不动点K.

又因为正三角形面积是由边长所决定的，故当边FG在直线BK(或CK)上时，取得内接正三角形的最大边长BM.

由K到BC距离为$1-\sqrt{3}/2$，所以$CM=2-\sqrt{3}$. 所以，

$$BM=\sqrt{1^2+(2-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

这时，内接于正方形$ABCD$的面积最大的正三角形的面积为

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2\sqrt{3}-3.$$

因此，单位正方形纸片可以盖住面积为 $2\sqrt{3}-3$ 的正三角形. 但 $2\sqrt{3}-3>2\times 1.732-3=0.464>0.46$，根据定理 3.1，面积为 $2\sqrt{3}-3$ 的正三角形纸片可以盖住面积为 0.46 的正三角形. 再依据性质 2 可得，单位正方形纸片可以盖住面积为 0.46 的正三角形.

例 3.3 说明覆盖问题与图形内接某类图形有着一定联系. 此例的实质就是计算单位正方形中内接面积(或边长)最大的正三角形，其边长为 $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$，面积为 $2\sqrt{3}-3$. 因此凡面积不超过 $2\sqrt{3}-3$ 的正三角形都可以被单位正方形纸片所覆盖，凡面积大于 $2\sqrt{3}-3$ 的正三角形都不能被单位正方形纸片所覆盖.

例 3.4 求证：一个边长为 1 的正三角形可以盖住一个边长为 0.46 的正方形.

证 如图 3.7 所示，我们求边长为 1 的正三角形 ABC 中内接的正方形 $DEFG$ 的边长. 设其边长为 x. 作 $AH\perp BC$ 于 H，AH 交 DG 于 K.

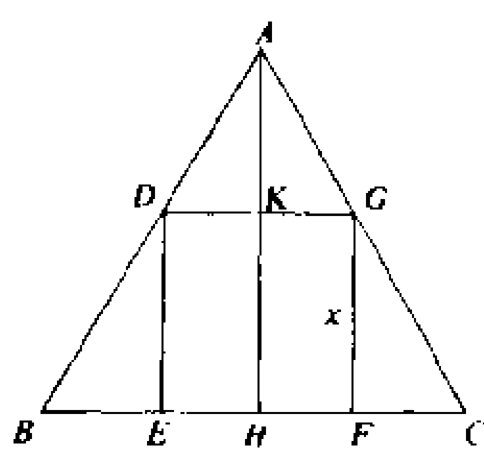

图 3.7

由于 $AB=BC=AC=1$，则 $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AK=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$，$KG=\frac{x}{2}$.

由 $\triangle AKG\backsim\triangle AHC$ 得

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-x=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

解得 $x=2\sqrt{3}-3$. 即单位正三角形中内接正方形边长为 $2\sqrt{3}-3$. 由于

$$2\sqrt{3}-3>2\times1.732-3=3.464-3=0.464>0.46,$$

所以边长为 $2\sqrt{3}-3$ 的正方形可以盖住边长为 0.46 的正方形. 但单位正三角形 ABC 又可盖住边长为 $2\sqrt{3}-3$ 的正方形 $DEFG$, 由性质 2 可知, 边长为 1 的正三角形一定可以盖住边长为 0.46 的正方形.

大家从例 3.4 已经看到, 覆盖问题与初中平面几何内容有着密切联系. 例 3.4 实质上就是相似三角形中的计算问题与图形覆盖知识相结合的产物.

例 3.5 能够用一个边长为 $2\sqrt[4]{11}$ 的正六边形纸片盖住一个半径为 $\sqrt[4]{17}$ 的圆纸片吗?

解 设边长为 $2\sqrt[4]{11}$ 的正六边形纸片为 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, O 是它的内切圆圆心(图 3.8). 这个内切圆半径 r 等于边长为 $2\sqrt[4]{11}$ 的正三角形 OA_1A_2 的高.

显然, 正六边形纸片 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 可以盖住它的内切圆. 若这个内切圆能盖住半径为 $\sqrt[4]{17}$ 的圆, 问题就解决了. 因此, 只须证明这个内切圆半径 $r\geqslant\sqrt[4]{17}$ 即可.

事实上，$r=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt[6]{11}$

$=\sqrt{3}\times\sqrt[6]{11}=\sqrt[6]{297}$，而 $\sqrt[3]{17}=\sqrt[6]{289}$. 又 $297>289\Rightarrow\sqrt[6]{297}>\sqrt[6]{289}$，即 $r\geqslant\sqrt[3]{17}$. 所以边长为 $2\sqrt[6]{11}$ 的正六边形纸片可以盖住一个半径为 $\sqrt[3]{17}$ 的圆纸片.

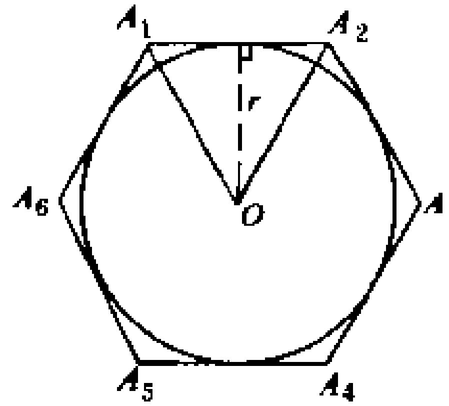

图 3.8

例 3.6 证明：用面积为 S，周长为 p 的凸四边形纸片一定可以覆盖一个半径为 S/p 的圆.

分析 这是直线形覆盖圆的类型题. 由于一个三角形可以盖住它的内切圆，而三角形内切圆半径等于

$$\frac{\text{三角形面积}}{\text{三角形周长之半}},$$

与本题条件很相似，这诱使我们考虑可否将本题转化为三角形覆盖内切圆的问题来研究.

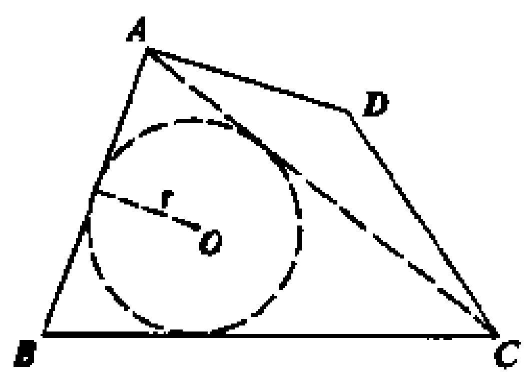

图 3.9

证 设 $ABCD$ 是周长为 p 面积为 S 的任意凸四边形. 连结对角线 AC，分四边形 $ABCD$ 为两个三角形，其中至少有一个三角形面积不小于 $S/2$(图 3.9)，不妨设 $S_{\triangle ABC}\geqslant S/2$.

下面我们估算 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r 之值：

$$r=\frac{S_{\triangle ABC}}{(AB+BC+CA)/2}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+CA}$$

$$>\frac{S}{AB+BC+CD+DA}=\frac{S}{p}.$$

这表明，$\triangle ABC$ 的内切圆半径大于 S/p，即纸片$\triangle ABC$ 可以盖住一个半径为 S/p 的圆，当然，四边形 $ABCD$ 更可以盖住一个半径为 S/p 的圆了.

例 3.7 在边长为 12 的正方形中分布着 1993 个点. 证明：可以用一个边长为 11 的等边三角形纸片盖住其中至少 499 个点.

分析 由于 $1993=489\times4+1$，只要我们将边长为 12 的正方形适当分成 4 等份，则至少有"1 份"中含有 499 个点. 我们只要证明边长为 11 的正三角形纸片可以盖住这"1 份"就可以了.

证 如图 3.10 所示，过正方形 $ABCD$ 的中心 O，作直线 MN 交 DC 于 M，交 AB 于 N，且使$\angle MNA=60°$. 过 O 作 MN 的垂线交 AD 于 P 交 BC 于 Q. 这样正方形 $ABCD$ 被 MN、PQ 分成了全等的四块.

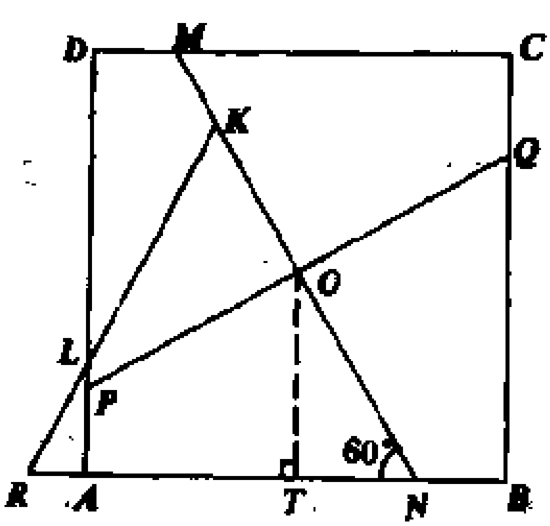

图 3.10

根据抽屉原则，其中至少有一块(不妨设其为 $APON$)至少含有 499 个点.

我们只须证明，边长为 11 的正三角形可以盖住 $APON$

即可.

使边长为 11 的正三角形纸片的一个顶点与 N 重合，角的两边与 NA，NO 重合，落在正三角形 NKR 的位置. 过 O 作 $OT \perp AB$ 于 T，则 T 为 AB 中点.

$$NB=TB-TN=6-6/\sqrt{3}=6-2\sqrt{3},$$

$$\therefore \quad NA=AB-NB=12-(6-2\sqrt{3})=6+2\sqrt{3}<11.$$

因此 A 在线段 RN 上. 又

$$RA=11-AN=11-(6+2\sqrt{3})=5-2\sqrt{3},$$

求得 $LA=\sqrt{3}RA=5\sqrt{3}-6$.

$$\begin{aligned} LA-PA &= LA-NB \\ &= (5\sqrt{3}-6)-(6-2\sqrt{3}) \\ &= 7\sqrt{13}-12>0, \end{aligned}$$

即点 P 在 $\triangle RNK$ 内. 进而可知，PA，PO 都在正三角形 RNK 内.

所以，边长为 11 的正三角形纸片可以盖住区域 $APON$，也即至少盖住了 499 个点.

例 3.8 正三角形 ABC 可以被五个全等的边长较小的正三角形纸片所覆盖. 证明：用其中四个小正三角形纸片就可以完全盖住正三角形 ABC.

证 取 AB，BC，CA 的中点分别为 P，Q，R，连结 PQ，QR，PR，正三角形 ABC 被分为四个全等的小正三角形(图 3.11).

设正三角形 ABC 边长为 a，则 $AP=BP=BQ=QC=CR=RA=RQ=PQ=PR=a/2$.

又设小正三角形边长为 x. 由于五个小正三角形纸片可覆盖$\triangle ABC$，则 A,B,C,P,Q,R 也要被这五个边长为 x 的小正三角形所覆盖，且其中至少有两个点要被边长为 x 的一个小正三角形所覆盖. 不妨设这两点为 P,R，于是可得

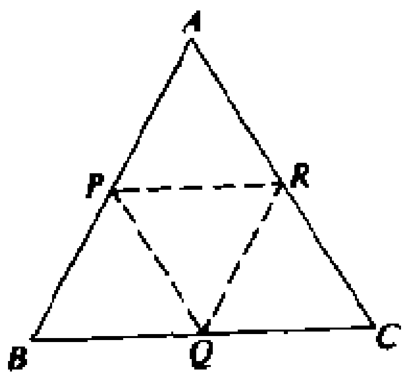

图 3.11

$$x \geqslant PR = a/2.$$

事实上，如图 3.12 所示，延长 PR 交 MN 于 D，交 MK 于 E，连结 DK. 由于$\triangle MNK$ 是边长为 x 的正三角形，则

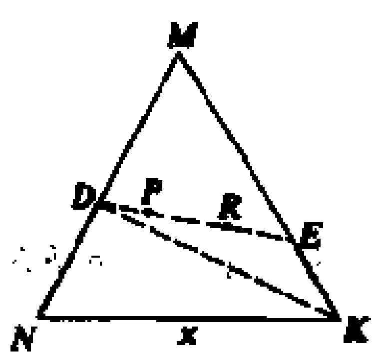

图 3.12

$$\angle DEK > \angle M = 60^\circ$$

$$= \angle MKN > \angle MKD,$$

$$\therefore \quad DK \geqslant DE \geqslant PR.$$

又 $\angle KDN \geqslant \angle M = 60^\circ = \angle N$,

$$\therefore \quad x = NK \geqslant DK \geqslant PR = a/2.$$

因此，五个小正三角形纸片的边长都不小于 $a/2$. 其中可以取出四个(不妨设为$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$ 和$\triangle_4$)，分别盖住正三角形 APR，BPQ，CQR，RQP，但这四个正三角形恰好盖住正三角形 ABC，也即在五个小正三角形纸片中，用其中四个纸片$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$，$\triangle_4$ 就可以完全盖住正三角形 ABC.

说明 例 3.8 是多张多边形纸片覆盖问题. 其中用到了"抽屉原则"(例 3.7 中也用到了). 需要指出的是，"抽屉原则"在覆盖证题中是经常要用到的.

例 3.9 证明：任意不等边三角形总可以被两个相似于它的较小的三角形纸片所覆盖.

分析 本题是已知被覆盖的图形为不等边三角形，而与它相似的较小的三角形有无穷多个.并不是其中任两个都能盖住它，而是可以找到某两个能够盖住它.因此本题的证明实质上就是要给出那两个较小的与原三角形相似的三角形的找法.

证 $\triangle ABC$ 中，设 $AC<AB$. 在 AC 延长线上取一点 B_1，使 $AC<AB_1<AB$. 作 $\angle AB_1C_1=\angle ABC$，$B_1C_1$ 交 AB 于 C_1（图 3.13），则 $\triangle ABC\backsim\triangle AB_1C_1$，

$$\frac{AC_1}{AC}=\frac{AB_1}{AB}<1,$$

所以 $AC_1<AC<AB$.

即点 C_1 落在线段 AB 内部.连线 C_1B_1 应交线段 BC 于点 K.

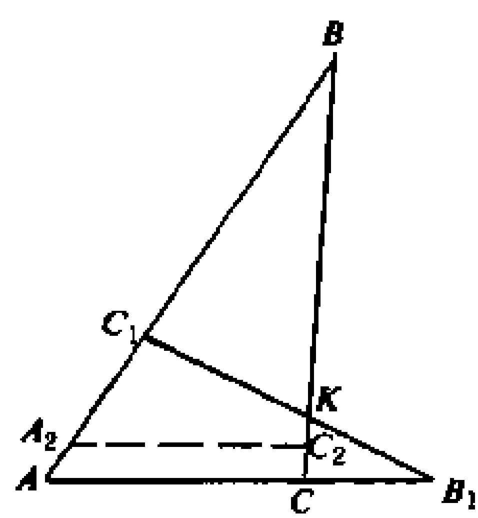

图 3.13

在线段 CK 上取一点 C_2，过 C_2 作 AC 的平行线交 AB 于 A_2，易知 A_2 应在线段 AC_1 上. $\triangle A_2BC_2\backsim\triangle ABC$.

这样，有两个与 $\triangle ABC$ 相似且较小的三角形纸片：$\triangle AB_1C_1$ 与 $\triangle A_2BC_2$，它们可以完全覆盖 $\triangle ABC$.

4

怎样证明“盖不住”?

为了证明不能覆盖的问题，我们先引入点集直径的概念.

定义 4.1 所谓点集的直径是这样的一个正数 d，点集中任意两点的距离都不超过它. 而对于比 d 小的任意正数 d'，点集中至少有两点的距离要超过 d'.

上述定义虽然精确，但使用起来并不方便. 由于我们现在所考察的点集通常是有限个点组成的集合，或者是包括边界在内的平面区域. 对上述这样的点集 F，其中任意两点之间距离的最大值是 d，如果 d 是一个有限数，则称 d 是点集 F 的直径.

容易看到，单位正方形的直径是 $\sqrt{2}$，边长为 1 的正三角形的直径是 1，边长为 4，5，6

的三角形所确定的平面区域的直径是 6. 一般地，一个凸多边形的直径等于它的诸顶点之间距离的最大值(即各边及各对角线中的最大长度).

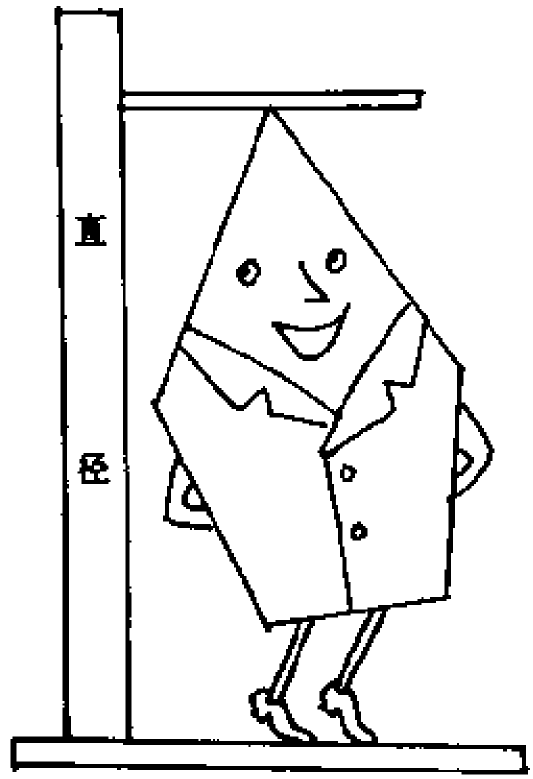

图 4.1

定理 4.1 如果 G 与 F 都是平面区域，且 F 的面积大于 G 的面积，则 G 必不能覆盖 F.

定理 4.1 是性质 4 的逆否命题，为我们提供了用图形面积证明不能覆盖的手段.

定理 4.2 一个直径为 d 的点集 F 不能被直径小于 d 的点集 G 所覆盖.

定理 4.2 为我们提供了用图形直径来证明不能覆盖的途径.

例 4.1 证明，边长为 1 的正方形纸片不能盖住长为 $\sqrt{2}$，宽为 $\sqrt{2}/2$ 的矩形纸片.

分析 单位正方形面积为 1. 长为 $\sqrt{2}$，宽为 $\sqrt{2}/2$ 的矩形面积也为 1. 因此用面积大小的比较来证不能覆盖的手段失效，应考虑用图形直径来比较.

证 单位正方形的直径是 $\sqrt{2}$ (对角线长)，边长为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2}/2$ 的矩形的直径等于其对角线之长，为

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2+\frac{1}{2}}>\sqrt{2}.$$

所以用单位正方形纸片不能盖住长为$\sqrt{2}$，宽为$\sqrt{2}/2$的矩形纸片.

例4.2 证明：两个边长为0.99的正三角形纸片不能盖住一个边长为1的正三角形.

证 设边长为1的正三角形为$\triangle ABC$. 边长为0.99的两个正三角形分别记为$\triangle_1$与$\triangle_2$，则$\triangle_1$与$\triangle_2$的直径都是0.99.

如若$\triangle_1$与$\triangle_2$能够盖住正三角形ABC，则A,B,C三个顶点被$\triangle_1$与$\triangle_2$所覆盖. 其中至少有一个小三角形，不妨设为$\triangle_1$，要盖住A,B,C中的两个点，不妨设$\triangle_1$盖住了A,B两点. 这样一来，可知$\triangle_1$的直径d不小于$AB=1$；而另一方面已知$\triangle_1$的直径$d=0.99<1$，矛盾. 所以两个边长为0.99的正三角形纸片不能盖住一个边长为1的正三角形.

说明： 本例是比较图形直径与反证法相结合的典型例题，从中可以体会证题的思路.

例4.3 证明：面积为1的三角形不能被面积小于2的平行四边形纸片所覆盖.

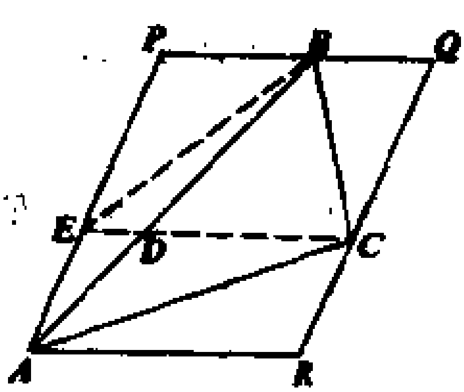

图4.2

证 假设面积为1的$\triangle ABC$可以被一个面积小于2的平行四边形纸片所覆盖，则$\triangle ABC$必在这个平行四边形内部. 我们采取平移该平行四边形的各边的方法，使平行四边形缩小为$\triangle ABC$的外接平行四边形. 不失一般性，如图4.2所

示，$\triangle ABC$ 内接于平行四边形 $ARQP$.

过 C 作 $CE /\!/ AR$ 交 PA 于 E，交 AB 于 D，连结 BE，则

$$S_{\triangle CBD} \leqslant S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} S_{\square CQPE},$$

$$S_{\triangle CAD} \leqslant S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} S_{\square CRAE},$$

上式两边分别相加，得

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBD} + S_{\triangle CAD} \leqslant \frac{1}{2} S_{\square CQPE} + \frac{1}{2} S_{\square CRAE}$$

$$= \frac{1}{2} S_{\square APQR},$$

即
$$S_{\square APQR} \geqslant 2 S_{\triangle ABC} = 2.$$

与 $S_{\square APQR} < 2$ 矛盾. 所以，面积为 1 的三角形不能被面积小于 2 的平行四边形纸片所覆盖.

说明 本例为面积比较与反证法相结合证明不能覆盖的一个典型例题，其中作外接平行四边形是一个很重要的技巧.

例 4.4 小明做纸板剪拼游戏，得出了“64＝65”的荒唐结论. 其做法如下：

将一个 8×8 的正方形纸片沿如图 4.3(a)中的粗实线剪为四个部分，然后拼成了一个长为 13 宽为 5 的长方形(图4.3(b)). 因此，两个图形的面积应该相等，所以“64＝65”.

请你指出，错误在哪里？

解 正方形面积为 64，所以它剪成四块绝不能覆盖面积为 65 的长方形，即中间必存在面积为 1 的空隙. 事实上，沿着矩形对角线有个微小的缝隙，即平行四边形 $APCQ$. 也就是说，P，Q 两点并不在对角线 AC 上(图 4.3(c)).

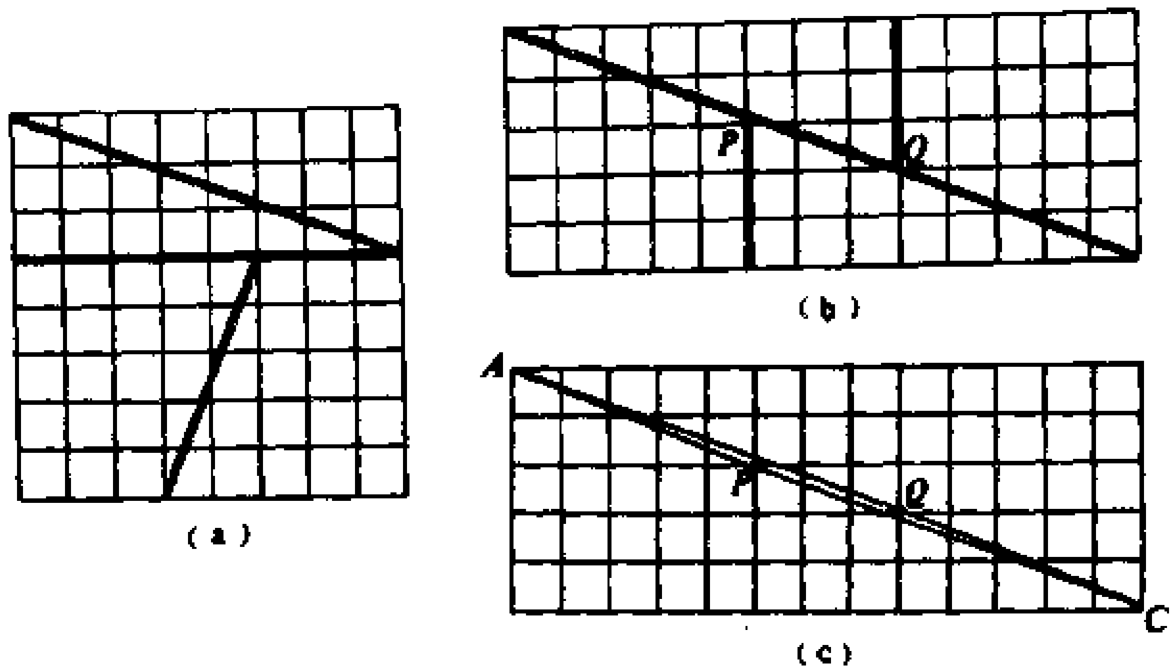

图 4.3

说明 本题是定理 4.1 的直接应用．如果 8×8 的正方形纸片剪成四块，能拼成图 4.2(b)那样的矩形，则表明总面积为 64 的图形可以覆盖一个面积为 65 的矩形，与定理 4.1 矛盾．这是用面积比较法证明不能覆盖的一道典型例题．

例 4.5 设$\odot O$是一个半径为 1 的圆纸片，若有 2000 张半径不超过 0.99 的圆纸片被限定放在$\odot O$内，试证：这 2000 个圆纸片不能覆盖$\odot O$.

分析 要抓"盖不住的点"，并且只须找到一个即可．这种点的最佳选法是在$\odot O$的周界上去找．

证 这 2000 个半径不超过 0.99 的圆纸片放在$\odot O$内，其中每个圆纸片至多与$\odot O$的周界在相切时有一个公共点，即每个小圆纸片至多盖住大圆周上的一个点，2000 个小圆纸片至多盖住大圆周上 2000 个点，而大圆周有无穷多个点，所

以总存在没被这 2000 个小圆纸片盖住的点. 因此,这 2000 个小圆纸片一定盖不住⊙O.

通过以上五个例题,我们可以体会到:证明不能覆盖最基本的方法是依据定义,设法证明"无论纸片 G 放在平面上什么位置,F 中都至少有一点不能被 G 盖住."简言之,"攻其一点"是证明不能覆盖问题的基本原则.

例 4.6 证明:三个直径为 0.99 的圆纸片一定不能盖住一个单位正方形纸片.

证 记边长为 1 的正方形的四个顶点为 A,B,C,D. 假设三个直径为 0.99 的圆纸片能覆盖单位正方形 $ABCD$,则这四个顶点就要被三张圆纸片盖住. 根据抽屉原则,其中必有一个圆纸片盖住正方形的两个顶点. 由此可知,这圆纸片的直径应不小于 1,这与圆纸片的直径为 0.99 矛盾. 所以,三个直径为 0.99 的圆纸片一定盖不住一个单位正方形纸片.

例 4.7 一个边长分别为 3,4,5 的三角形一定不能被面积为 15 的正方形纸片所覆盖.

分析 我们设法求边长为 3,4,5 的三角形的外接正方形的边长的最小值. 这时该三角形的三个顶点应在正方形的边上,三角形的斜边应尽可能地接近正方形的对角线.

证 设边长为 3,4,5 的三角形的外接正方形边长为 x. 易知$\angle DEF=90^\circ$(图 4.4). 于是有

$$\angle 1+\angle 2=90^\circ=\angle 1+\angle 3,$$

即
$$\angle 2=\angle 3,$$

$\therefore\quad \mathrm{Rt}\triangle DAE\backsim\mathrm{Rt}\triangle EBF.$

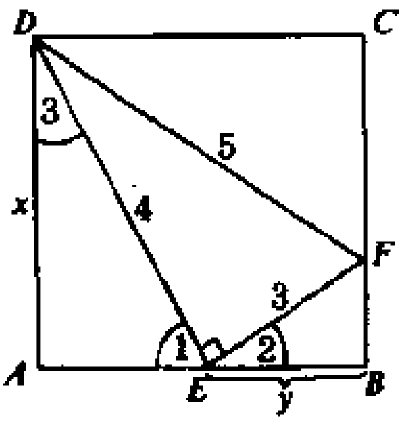

图 4.4

设 $EB=y$，则有

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}\Rightarrow y=\frac{3}{4}x.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad AE&=AB-BE\\&=x-\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x.\end{aligned}$$

在$\triangle DAE$中，由勾股定理得

$$x^2+\left(\frac{1}{4}x\right)^2=4^2,$$

$$\frac{17}{16}x^2=16,$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{256}{17}>\frac{255}{17}=15.$$

所以，能覆盖边长为 3，4，5 的三角形的面积最小的正方形是面积为$\frac{256}{17}$的正方形. 而 $15<\frac{256}{17}$，所以面积为 15 的正方形纸片一定不能覆盖边长为 3，4，5 的三角形.

说明 例 4.7 表明，不能覆盖问题与极值问题存在着内在联系，这样就形成了很有特色的“极值面积比较法”，这是证明不能覆盖问题的一种重要思路.

一般说来，如果一个确定的图形 G 中的内接某种类型的图形的最大面积为 S_0，则纸片 G 一定不能覆盖面积大于 S_0 的这种类型的图形.

例 4.8 试证：一个单位圆纸片一定不能覆盖面积大于 2 的矩形.

证 直观地说，单位圆的内接矩形 $ABCD$ 是由两个全等的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 合成的(图 4.5). 而

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BE\times AC$$

$$= \frac{1}{2} BE \times 2$$

$= BE.$

如 BE 愈大，则 $S_{\triangle ABC}$ 也愈大. 易知当 BE 等于半径时，即 BE 变到 $B'O$ 位置时，$\triangle ABC$ 变为 $\triangle AB'C$，其面积达到最大值 1.

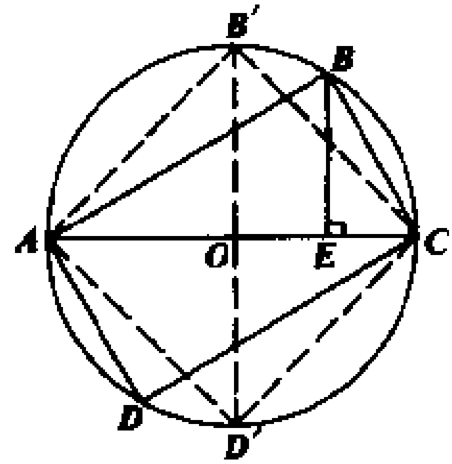

图 4.5

因此，单位圆内接矩形 $ABCD$ 的最大面积为 2. 所以，一个单位圆纸片一定不能盖住面积大于 2 的矩形.

例 3.9 证明：平面上有两个边长为$\sqrt{\frac{2}{3}}$的正三角形纸片. 只要这两张正三角形纸片没有公共点(即点不互相重叠)，就一定不能被一个边长为 1 的正方形纸片所覆盖.

分析 这个问题可以等价为下面的问题：一个边长为 1 的正方形中不能这样放入两个边长为$\sqrt{\frac{2}{3}}$的正三角形，使得这两个正三角形没有公共点(即点不互相重叠).

因此，我们只须证明：若边长为 1 的正方形中放入两个边长为$\sqrt{\frac{2}{3}}$的正三角形，则正方形的中心 O 必是这两个正三角形的一个公共点.

证 假设两个边长为$\sqrt{\frac{2}{3}}$的正三角形纸片嵌入边长为 1 的正方形内以后，正方形的中心(正方形两对角线的交点)O

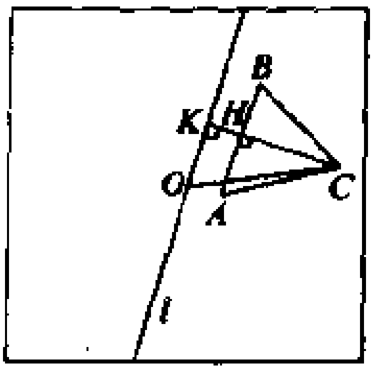

图 4.6

不是这两个正三角形的公共点，则存在正三角形的这样的边，比如 AB 边，使 O 点与顶点 C 在直线 AB 的不同侧(图 4.6)．

过 O 作 AB 的平行线 l，由点 C 向 l 引垂线 CK．设 H 是 CK 同 AB 边的交点，则

$$CH<CK\leqslant CO.$$

但 CO 显然不超过正方形对角线长的一半(因为点 C 位于正方形内部)，而 CH 是正三角形 ABC 的高 $\left(CH=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以正三角形的边长满足

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}CH<\frac{2}{\sqrt{3}}CO\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

矛盾．因此，单位正方形中不能无公共点地放入两个边长为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 的正方形纸片．换言之，无论两个边长为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 的正三角形在平面上怎样无公共点地摆放，都不能被边长为 1 的正方形纸片所覆盖．

说明 本例表明了覆盖问题与我们后面即将讲到的“图形嵌入”问题的相互联系．题设条件中“两个正三角形没有公共点”的条件是非常重要的．因为两个边长为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 的正三角形只要有两条边重合，就可如图 4.7 所示嵌入一个单位正方

形中.

例 4.10 证明:有限多个带形不能覆盖整个平面.

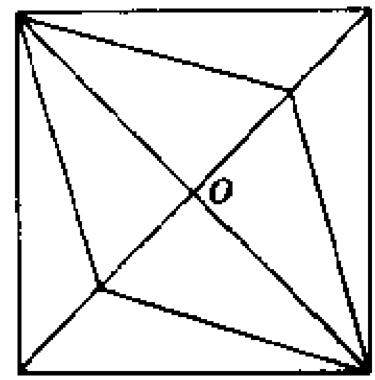

图 4.7

分析 所谓带形是指两条平行直线间所夹的平面部分.本题的意思是,无论这有限多个带形在平面上如何放置(未必按两个带形的边平行的位置放置),总可以在平面上找到一点,它不属于这些带形中的任意一个.

证 设这些带形 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的宽度分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$. 任意作一个半径为 R 的圆,考虑每个带形 B_i 与这个圆的公共部分的面积 S_i(图 4.8 中阴影部分的面积).

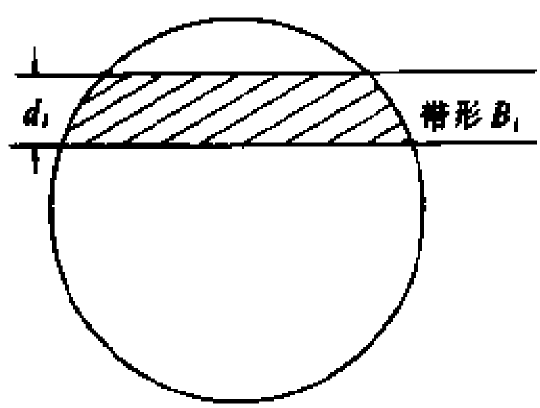

图 4.8

由于直径是所在圆中最大的弦,所以 S_i 不超过这样一个长方形的面积:其一边是 $2R$,另一边是 d_i. 即

$$S_i \leqslant 2Rd_i.$$

因此有

$$S_1+S_2+\cdots+S_n \leqslant 2Rd_1+2Rd_2+\cdots+2Rd_n.$$

如果我们取 $R>\frac{2}{\pi}(d_1+d_2+\cdots+d_n)$,

那么 $$S_1+S_2+\cdots+S_n$$

$$\leqslant 2R(d_1+d_2+\cdots+d_n)<R\cdot\pi R=\pi R^2,$$

即带形 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 不能把上面所作的圆完全覆盖(否则 $S_1+S_2+\cdots+S_n$ 应当不小于圆的面积). 当然带形 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 更不能覆盖整个平面了.

例 4.11 有甲、乙、丙三张纸片. 甲是边长为 1 的正三角形,乙是边长为 1 的正方形,丙是边长为 1 的正五边形. 求证:把这三张纸片合在一起(不准剪开拼接)不能盖住一个半径为 1 的圆面.

分析 这是多张纸片不能覆盖问题. 只须证明圆周上的点无论如何不能全被盖住即可.

证 记半径为 1 的圆面为⊙O. 当我们用乙去盖⊙O 时,

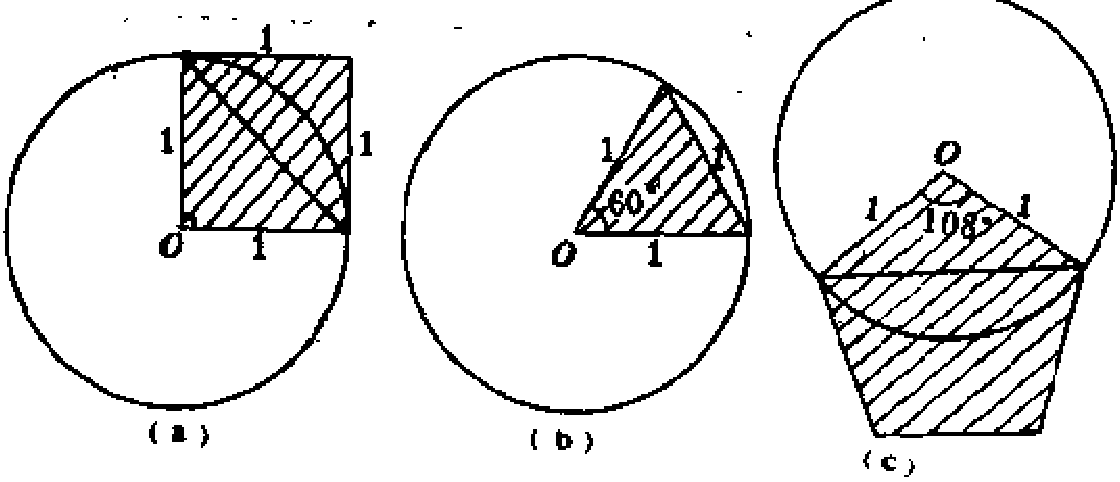

图 4.9

至多能盖住圆周上 90°的弧段(见图 4.9(a),想一想为什么);同理,当用甲去盖⊙O 时,至多能盖住圆周上不超过 60°的弧段(见图 4.9(b));当用丙去盖⊙O 时,至多能盖住圆周上不超过 108°的弧段(见图 4.9(c)).

因此,甲、乙、丙合在一起至多只能盖住⊙O 圆周上 $60°+90°+108°=258°$的弧段,无论如何盖不住整个圆周,因而也就

更盖不住整个半径为 1 的圆面了.

例 4.12 一个等边凸五边形(不一定是正五边形)的花园植满了玫瑰. 今在各边中点处安装了一个喷灌器,每个喷灌器只能喷湿以一个边长为直径的圆面. 求证:这五个喷灌器同时喷水,花园中必存在没被喷湿的玫瑰(假设玫瑰种得非常稠密).

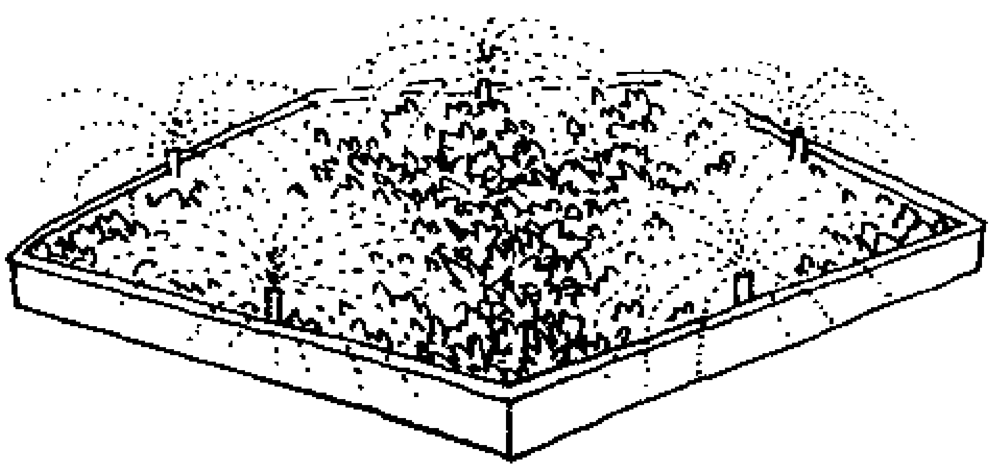

图 4.10

分析 我们将这个问题抽象为纯数学形式:凸五边形的所有边长都相等,证明:以它的各边为直径所作的圆不能完全盖住这个五边形. 我们只需证明,这个五边形中至少有一点,落在以各边为直径所画的五个圆的外面,即这个点对各边的视角都小于 90°.

证 设 AD 是等边五边形 $ABCDE$ 中最长的对角线,K 为 AD 的中点(见图 4.11).

$\because \quad AE=DE$,

$\therefore \quad \angle AKE=\angle DKE=90°$.

连对角线 AC,有 $AC\leqslant AD$.

在两对边对应相等的两个三角形 ABC 与 AED 中，由

$$AC\leqslant AD \Rightarrow \angle ABC\leqslant\angle AED,$$

更有 $$\angle BAK>\angle EAK. \tag{1}$$

由此可知，A，B 位于直线 EK 的同一侧. 因为如若不然，直线 EK 与线段 AB 要相交于 T(T 位于线段 AB 中的某一点，图 4.11 中未画出)，$AE\geqslant AT$，$\angle ATE\geqslant\angle AET$，进而 $\angle TAK\leqslant\angle EAK$，即 $\angle BAK\leqslant\angle EAK$，与(1)矛盾.

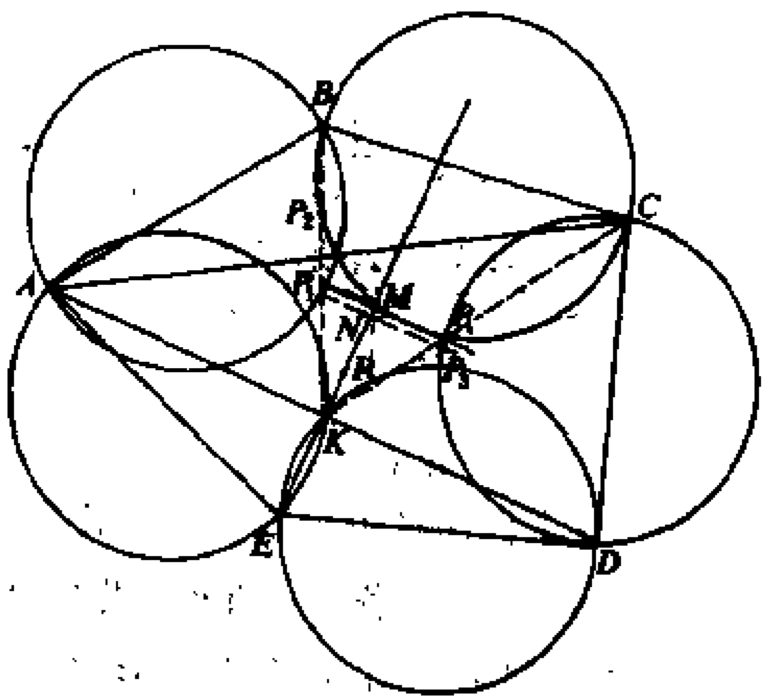

图 4.11

同理可证，点 C，D 位于直线 EK 的与 A，B 不同的另一侧.

连结 BK，CK，若 $\angle BKC\geqslant 90°$，则 $BC=a$ 是 $\triangle BCK$ 中的最大边，$BK<a$ 且 $CK<a$. 又因 $AK<a$，$DK<a$，从而，在 $\triangle ABK$ 中 AB 是最大边，在 $\triangle CDK$ 中 CD 是最大边，从而 $\angle AKB>60°$ 且 $\angle CKD>60°$.

此时，$\angle AKB+\angle BKC+\angle CKD>60^\circ+90^\circ+60^\circ=210^\circ$，但$\angle AKB+\angle BKC+\angle CKD$是平角，即$\angle AKD$为$180^\circ$，得出矛盾，所以$\angle BKC<90^\circ$.

又因A，B在直线EK的同侧，所以$\angle AKB<90^\circ$.

又因C，D在直线EK的另一侧，所以$\angle DKC<90^\circ$.

以AB为直径画圆. 因$\angle AKB<90^\circ$. 所以K在该圆外，设该圆交BK于P_1. 同理以CD为直径画圆，K也在圆外，该圆交CK设为P_3. 又K也在以BC为直径的圆外，设该圆交BK于P_2，交CK于P_4. 不妨设P_1在K，P_2之间，P_3在K，P_4之间.

延长EK交以BC为直径的在五边形内的半圆于点M. 作直径为BC的圆的平行于P_1P_3的切线，交线段KM于N. 在KN上非常接近K的地方取一点P，则P必在上述以五条边为直径所画的五个圆的外面，即点P不能被这五个圆所覆盖. 也就是说，当五个喷灌器同时喷水时，花园中在点P的玫瑰就不会被喷湿.

5

嵌几

图形嵌入问题可以说是覆盖问题的一种变形.

定义 5.1 如果点集 G 能覆盖点集 F,那么我们就说点集 F 能嵌入点集 G 中.

例如一个边长较大的正三角形纸片能覆盖边长较小的正三角形纸片,反过来可以说,边长较小的正三角形纸片能完全放入(嵌入)边长较大的正三角形纸片之中.

不难理解,小正方形纸片能嵌入大正方形纸片之中;半径较小的圆能嵌入半径较大的圆中;两个凸 n 边形相似,则周长较小的凸 n 边形能嵌入周长较大的凸 n 边形之中.至于不同类图形的嵌入问题就复杂多了.

例 5.1 如果$\odot(O,r)$能嵌入$\triangle ABC$ 中,

问 r 最大为多少?

解 直观上不难看到，在能嵌入$\triangle ABC$的圆中，以$\triangle ABC$的内切圆的半径为最大. 下面我们证明这一事实.

设$\odot(O,r)$是嵌入$\triangle ABC$中的任一个圆，则O到$\triangle ABC$三边的距离均不小于r. 所以由图5.1可知，

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAB}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc$$
$$=\frac{1}{2}r(a+b+c),$$
$$r\leqslant\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}.$$

式中等号当且仅当$\odot(O,r)$为内切圆时成立.

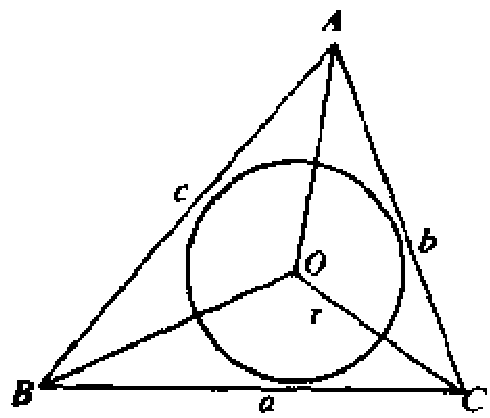

图 5.1

例5.1告诉我们，一个三角形的内切圆是这个三角形纸片所能覆盖的最大圆. 当一个圆的半径大于三角形内切圆半径时，这个三角形纸片就盖不住这个圆了. 这一结论是很有用的.

例5.2 在$2.15\times4\text{cm}^2$的矩形中，最多可以不重叠地放置多少个半径为1cm的圆的$\frac{1}{4}$的扇形?

解 每个放入的扇形面积为

$$\frac{1}{4}\times\pi\times1^2=0.25\pi(\text{cm}^2).$$

已知矩形面积$=2.15\times4=8.6(\text{cm}^2)$.

如果n为所求的放入扇形的个数，则依据放入的扇形互不重

叠的约定，应成立不等式

$$0.25\pi\times n\leqslant 8.6,$$

由此得 $$n\leqslant\left[\frac{8.6\times 4}{\pi}\right],$$

即 $n=10$.

下面我们证明 $n=10$ 即为所求，也就是设计一种在 $2.15\times 4\text{cm}^2$ 的矩形中不重叠地放入 10 个扇形的方案. 或者说，我们只须设计一种在 $2.15\times 2\text{cm}^2$ 的矩形中不重叠地放入五个扇形的方案即可.

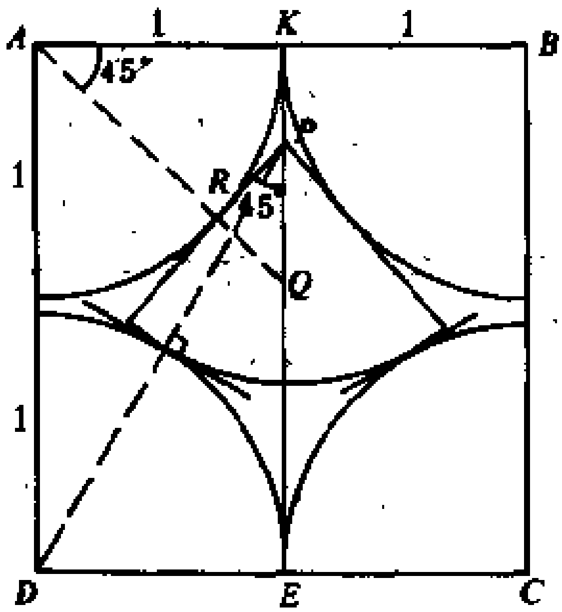

图 5.2

如图 5.2 所示，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2\text{cm}$，我们已经放好五个扇形. 其中四个扇形的直角恰为矩形 $ABCD$ 的四个直角，另一个扇形关于 AB 的中垂线对称地放在中间. 这时我们求矩形 $ABCD$ 的宽.

设 $RP=PK=x$，则 $PQ=x\sqrt{2}$. 由 $AK=KQ$ 得

$$x+x\sqrt{2}=1,$$

即 $$x=\sqrt{2}-1.$$

因为 $DP=2$ （两个单位圆的半径），则 $PE=\sqrt{3}$，$EK=\sqrt{3}+x=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$.

注意到 $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1<1.733+1.415-1$

$=3.148-1<2.15$,

所以在 $2.15\times 2\text{cm}^2$ 的矩形中能不重叠地放入五个扇形. 因此,在 $2.15\times 4\text{cm}^2$ 的矩形中可以不重叠地放入 10 个扇形.

在下面的例题中大家可以看到,证明嵌入与证明覆盖问题是相互联系的,二者可以互相转化.

例 5.3 试证:用面积为 S,周长为 p 的凸五边形纸片一定可以盖住一个半径为 $\frac{S}{p}$ 的圆.

分析 反过来思考,证明一个面积为 S 周长为 p 的凸五边形内一定可以放入一个半径为 $\frac{S}{p}$ 的圆. 因此关键在确定圆心的位置,使圆心到五边形各边的距离 $\geqslant\frac{S}{p}$.

证 设凸五边形 $ABCDE$ 的边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5(图 5.3),以 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 为边长,$\frac{S}{p}$ 为宽,向五边形内部作五个长方形. 设这五个长方形的总面积为 S^*,则

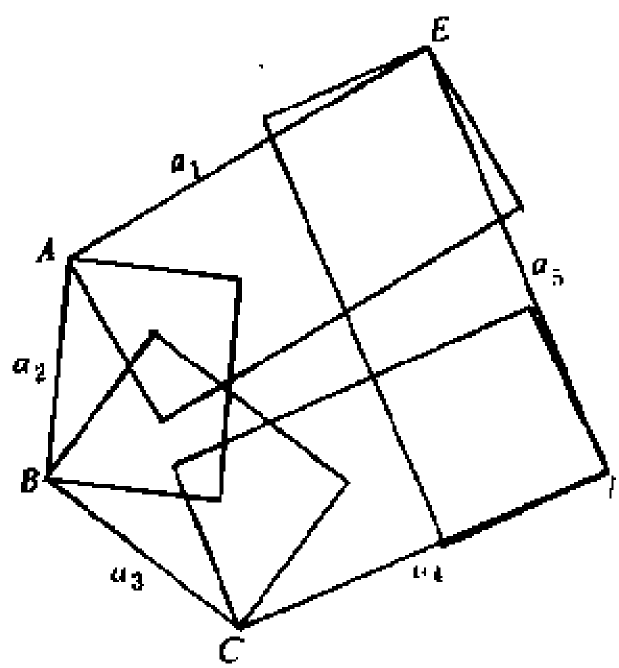

图 5.3

$$S^*=a_1\frac{S}{p}+a_2\frac{S}{p}+a_3\frac{S}{p}+a_4\frac{S}{p}+a_5\frac{S}{p}=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\frac{S}{p}=p\cdot\frac{S}{p}=S.$$

即这五个矩形面积的总和等于五边形 $ABCDE$ 的面积. 由于凸 n 边形每个内角都小于 $180°$，角的两边各盖一个矩形的直角，于是在各顶点都有面积重叠. 因此这五个矩形覆盖的面积小于 S. 所以，这五个矩形不能铺满，或者说不能覆盖凸五边形 $ABCDE$(根据定理 4.1)，也即五边形 $ABCDE$ 内至少有一点 O 未被这五个矩形所覆盖. 而 O 到五边形五条边的距离均不小于矩形的宽 $\frac{S}{p}$，因此，以 O 为中心，$\frac{S}{p}$ 为半径的圆纸片可以放入凸五边形 $ABCDE$ 内，亦即这个凸五边形纸片可以覆盖半径为 $\frac{S}{p}$ 的圆.

说明 图形嵌入为证明图形覆盖开辟了一条新思路. 本例就是用证嵌入来证覆盖的典型例子. 本例可以推广为"面积为 S，周长为 p 的凸 n 边形一定可以覆盖一个半径为 $\frac{S}{p}$ 的圆". 在证明过程中向形内作矩形的技巧也很有代表性. 建议大家用本题证法写出本书第三节例 3.6 的证明.

例 5.4 能在半径为 2 的圆中放入八个边长为 1 的不相重叠的正方形吗?

分析 这个问题表面上看不像覆盖问题. 但仔细分析，仍是覆盖问题：即请你设计一种将八个边长为 1 的正方形纸片彼此不重叠地边挨边地放在一起的方法，使它们能被一个半径为 2 的圆纸片盖住.

由于圆纸片的对称性，这八个小正方形纸片也应对称放置. 如图 5.4所示，八个单位正方形不相重叠且关于 l 轴对称. 所以要想用圆纸片盖这个图形，圆心 O 应在对称轴 l 上，且

OA,OE,OB 都应不超过 2,问题就解决了.因此得出如下解法.

解 如图 5.4 所示,关于 l 对称地放置八个单位正方形.等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆圆心 O 在 l 上.

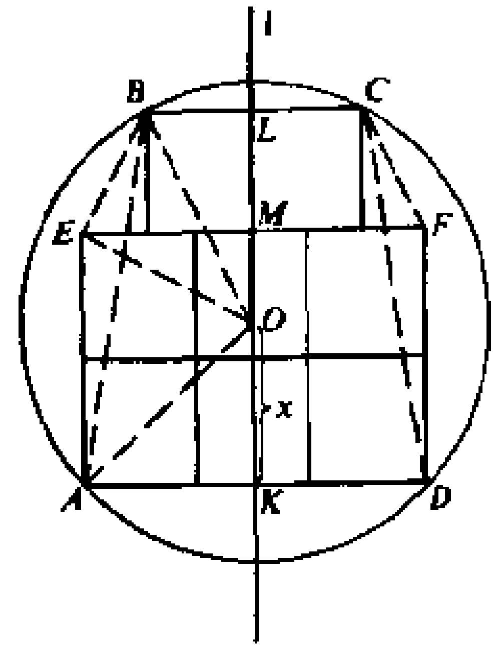

图 5.4

设 $OK=x$,则 $LO=3-x$.

$$AO^2=AK^2+KO^2=\frac{9}{4}+x^2,$$

$$BO^2=BL^2+LO^2=1+(3-x)^2.$$

由于 $OA=OB$,故有

$$\frac{9}{4}+x^2=1+(3-x)^2,$$

解得 $$x=\frac{31}{24}.$$

$$AO=\sqrt{\frac{9}{4}+\left(\frac{31}{24}\right)^2}=\sqrt{\frac{2257}{576}}<\sqrt{\frac{2304}{576}}=2.$$

进而 $$MO=2-x=\frac{17}{24}<OK,$$

所以 $OE<AO$,即 A,E,B 均在以 O 为圆心、半径为 2 的圆内.由对称性可知,C,F,D 也在此圆内.根据例 2.2 的结论可知,AD,DF,FC,CB,BE,EA 均在以 O 为圆心、半径为 2 的圆内.所以,半径为 2 的圆中能够放入八个边长为 1 的不相重叠的正方形.

例 5.5 证明:边长为 1 的正三角形纸片可以被任何边

长均为 1 的凸五边形(不一定是正五边形)纸片所覆盖.

分析 边长均为 1 的凸五边形是等边凸五边形，其形状随角度而变化，这就为直接证明覆盖造成了困难. 我们可以从反面思考，只须证明，在任意边长为 1 的等边凸五边形中都可以放入(嵌入)一个边长是 1 的正三角形就可以了.

证 在凸五边形 $ABCDE$(图 5.5)中，

$$AB=BC=CD=DE=EA=1.$$

设 AD 为这个五边形中最长的对角线. 在$\triangle ADE$ 中，

$$AD<AE+ED=2.$$

又 $\quad AD\geqslant BD,\quad AD\geqslant AC,$

则 $\quad 2AD\geqslant BD+AC>AD+BC,$

$\therefore \quad AD>BC=1.$

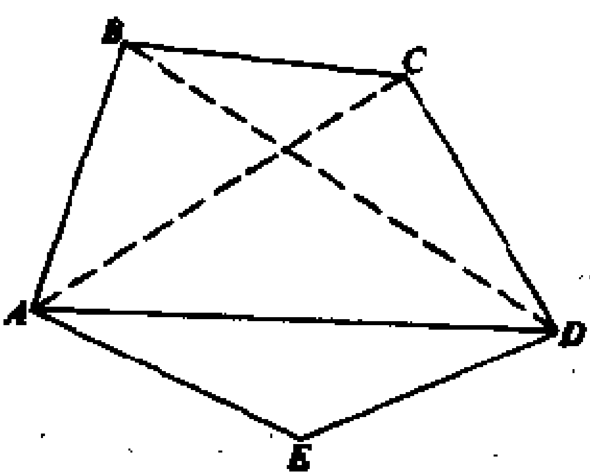

图 5.5

在$\triangle ABD$ 与$\triangle ADC$ 中，AD 都是最大边. 所以$\angle ABD$ 是$\triangle ABD$ 中的最大角，$\angle ACD$ 是$\triangle ACD$ 中的最大角.

$\therefore \quad \angle ABD\geqslant 60^\circ,$

$\angle ACD\geqslant 60^\circ.$

下面我们只要证明$\angle BAD$，$\angle CDA$ 中至少有一个不小于 60°就可以了.

我们用反证法：假设$\angle BAD$ 与$\angle CDA$ 都小于 60°，我们以 AD 为边作正三角形 ADF，使 F 与 BC 在 AD 的同一侧(图 5.6).

$\because\quad \angle BAD<60^\circ, \angle CDA<60^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 被 $\triangle AFD$ 所覆盖.

延长 AB, DC 相交于 G, G 也在 $\triangle ADF$ 内部. 显然, $\angle AGD>60^\circ$, AD 为 $\triangle AGD$ 中的最大边.

$\therefore\quad AG<AD<2$,

$DG<AD<2$.

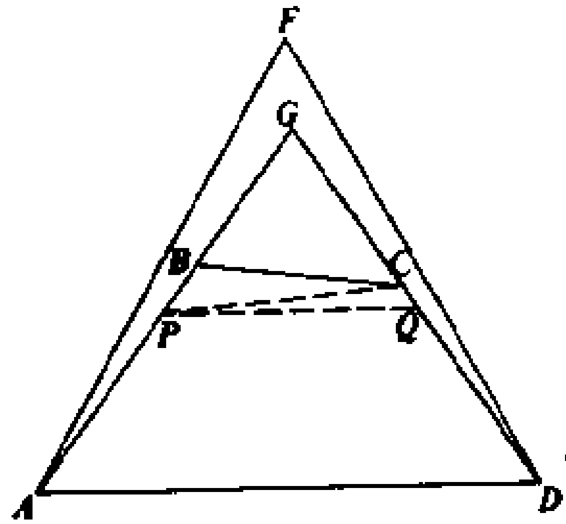

图 5.6

取 AG 中点 P, DG 中点 Q, 由 $AP=\frac{1}{2}AG<1$, $DQ=\frac{1}{2}DG<1$ 知点 P 在 AB 上, Q 在 DC 上.

由三角形中位线定理,得

$$PQ=\frac{1}{2}AD<1,\quad PQ/\!/AD.$$

所以有 $\angle GPQ=\angle GAD<60^\circ$,

$\angle GQP=\angle GDA<60^\circ$.

连结 PC, 则有

$$\angle PBC>\angle G>60^\circ>\angle GPQ>\angle GPC,$$

$\therefore\quad PC>BC$.

又 $\angle PCQ>\angle G>60^\circ>\angle GQP$,

$\therefore\quad PQ>PC$.

$\therefore\quad PQ>PC>BC=1$.

但这与 $PQ<1$ 矛盾, 因此, $\angle BAD$ 与 $\angle CDA$ 中, 至少有一个

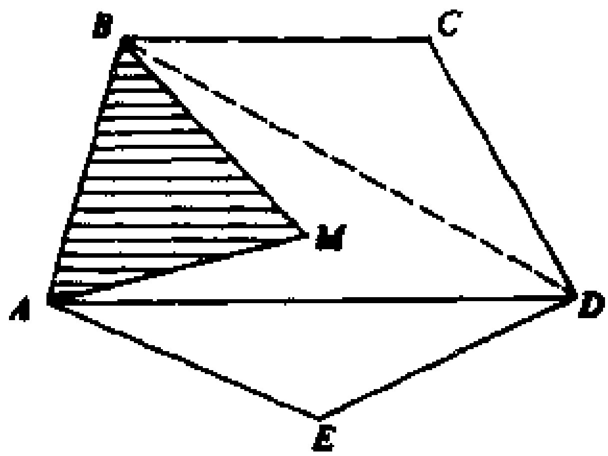

图 5.7

不小于 60°. 为确定起见，不妨设$\angle BAD \geqslant 60°$. 易知，以 $BA=1$ 为边在$\triangle ABD$ 内可以作一个正三角形 ABM(图 5.7). 这时，边长为 1 的正三角形 ABM 可以放入$\triangle ABD$ 中，当然更可以放入边长为 1 的等边凸五边形 $ABCDE$ 中了. 也就是说，边长为 1 的正三角形纸片可以被任何边长均为 1 的凸五边形纸片所覆盖.

例 5.6 证明：正 n 边形 M 能嵌入$\odot(O,r)$中的充分必要条件是

$$a \leqslant a_n.$$

其中，a 是正 n 边形 M 的边长，a_n 是$\odot(O,r)$的内接正 n 边形 M_n 的边长.

证 (1)先证充分性. 设 $a \leqslant a_n$，以 O 为位似中心，作一个相似比为 $k=\dfrac{a}{a_n}\leqslant 1$ 的位似变换，那么 M_n 就变成在 M_n 中的正 n 边形 M'，且 $M' \cong M$(图 5.8). 因为 M_n 内接于$\odot(O,r)$中，所以 M' 在$\odot(O,r)$中，即 M 能嵌入$\odot(O,r)$中.

(2)再证必要性. 设正 n 边形 M 已嵌入$\odot(O,r)$中，自它的顶点 $A_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 向 M 外作 $A_iA'_i$, $A_iA''_i$, 分别与 A_iA_{i-1}, A_iA_{i+1}垂直(约定 A_0 即 A_n, A_1 即 A_{n+1})，交圆周于 A'_n

A''_i(图 5.9).

$\because\ \angle A_{i-1}A_iA'_i+\angle A''_iA_iA_{i+1}+\angle A_{i+1}A_iA_{i-1}$
$=180^\circ+\angle A_{i+1}A_iA_{i-1}<360^\circ$,

$\therefore\ \overparen{A''_{i-1}A'_i}$ 与 $\overparen{A''_iA'_{i+1}}$不相重叠($i=1,2,\cdots,n$). 从而 $\overparen{A''_iA'_{i+1}}(i=1,2,\cdots,n)$中必有一个不大于$\odot(O,r)$的圆周的$\frac{1}{n}$,相应的弦 $A''_iA'_{i+1}$不大于 a_n. 而 $a=A_iA_{i+1}$是 $A''_iA'_{i+1}$的射影,所以 $a=A_iA_{i+1}\leqslant A''_iA'_{i+1}\leqslant a_n$.

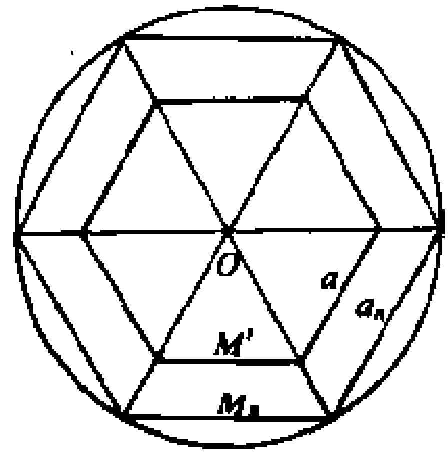

图 5.8

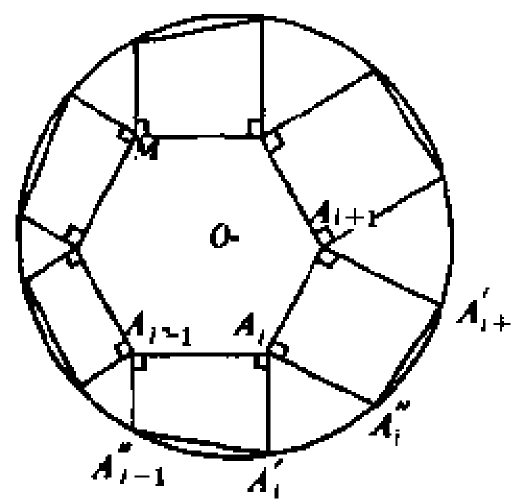

图 5.9

例 5.7 试证:在面积为 1 的矩形内,可以放入半径之和为 1995 的若干个两两不相重叠的圆纸片.

证 本题是构造性问题,其解法很多,仅举一例.

用平行于底边的直线将矩形对分,在其中的一份里作一个半径为 r 的圆;将另一份同样对等分,再在其中一份里作两个半径为$\frac{r}{2}$的圆,这两个圆互不相交;又将另一份同样等分,又再在其中一份中作 4 个半径为$\frac{r}{4}$的两两互不相交的圆;

……第 k 次对分后，在其一份中作 2^{k-1} 个半径为 $\frac{r}{2^{k-1}}$ 的两两互不相交的圆. 每次对分后，所作圆的半径之和均为 r. 这样，所有已经作出的圆都不相交，它们的半径总和为 kr. 若 kr 满足

$$1995 \leqslant kr < 1996,$$

手续终止；如果 $kr > 1995$，把 r 缩小为 $\frac{1995}{k}$. 至此，我们已经在此矩形内作出了半径之和为 1995 的两两互不相交的圆.

例 5.8 平面上的点集 S 有 100 个点，这些点中任两点间的距离都不小于 1. 我们用一个内半径为 1，外半径为 $\sqrt{2}$ 的圆环面去盖点集 S，问这个圆环面至多能盖住 S 中的几个点？

分析 我们改变一下问题的提法：在内半径为 1，外半径为 $\sqrt{2}$ 的圆环面中最多能放入几个点，使这些点中任两点间的距离都不小于 1？于是我们得到如下解法.

解 首先不难发现，可以在内半径为 1，外半径为 $\sqrt{2}$ 的圆环面中放入合于要求的八个点，只要这八个点是半径为 $\sqrt{2}$ 的圆的内接正八边形的八个顶点就可以了.

理由是，若设这个内接于半径为 $\sqrt{2}$ 的圆中的正八边形的边长为 a_8，则

$$\begin{aligned} a_8^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot(\sqrt{2})(\sqrt{2})\cos 45^\circ \\ &= 4 - 2\sqrt{2} = 2(2-\sqrt{2}) > \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_8 > \sqrt{2} > 1.$$

下面我们证明，在圆环面中不能放入九个合于条件的点.

实际上，我们考察放在环中的九个点. 这九个点与圆心 O 连结形成九个角，这九个角的和为 360°. 因此，根据平均数原理，必存在两个点 A 和 B，使得 $\angle AOB$ 不超过 40°(图 5.10).

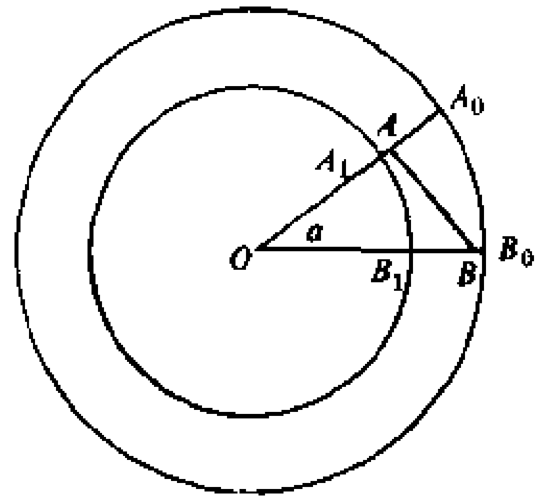

图5.10

设 $\angle AOB=\alpha, OA=x, OB=y$，则

$$AB^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha.$$

易知，上式在边界点 $x=1, y=\sqrt{2}$ 时取得最大值，则

$$AB^2\leqslant 3-2\sqrt{2}\cos\alpha<3-2\sqrt{2}\cos 45°=1.$$

如果 $x=y=\sqrt{2}$，则 AB 小于弧 $\overset{\frown}{A_0B_0}$，即

$$\overset{\frown}{A_0B_0}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{9}<\frac{2\times1.42\times3.15}{9}<1.$$

总之，在图 5.10 中的小曲边形 $A_1B_1B_0A_0$ 中两点间的最大距离<1，即 $AB<1$. 这与放入的点任两点间距离不小于 1 的条件矛盾. 所以，在内半径为 1，外半径为 $\sqrt{2}$ 的环面中至多能放入八个合于条件(任两点距离不小于 1)的点，也就是用内半径为 1，外半径为 $\sqrt{2}$ 的环面至多能盖住 S 中的八个点.

嵌入又一次帮我们解决了覆盖问题！

6

[illegible]离散点集

我们考察用圆纸片覆盖离散点集的情况.

例 6.1 平面上给定 n 个不同的点. 试证：一定可以找到一个圆纸片恰好覆盖其中的 k 个点，而使其余的 $n-k$ 个点都没有被这个圆纸片覆盖住(其中 $k\leqslant n$).

证 设这 n 个点是 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，又设 l_{ij} 是线段 P_iP_j 的垂直平分线. 显然，所有的垂直平分线是有限条$\left(\frac{n(n-1)}{2}\text{条}\right)$.

在平面上任取一点 O 不在所画的这些垂直平分线上. 根据中垂线的性质知，$OP_1, OP_2, \cdots, OP_n$ 两两不等. 这样我们将它们由小到大排序，不妨设此顺序为

$$OP_1<OP_2<\cdots<OP_k<OP_{k+1}<\cdots<OP_n.$$

取 $$r=\frac{OP_k+OP_{k+1}}{2},$$
则 $$OP_1<OP_2<OP_3<\cdots<OP_k<r.$$
即 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_k$ 都在$\odot(O,r)$内. 而
$$r<OP_{k+1}<OP_{k+2}<\cdots<OP_n,$$
即 $P_{k+1},P_{k+2},\cdots,P_n$ 这 $n-k$ 个点均在$\odot(O,r)$外.

上述操作过程，即是确定覆盖圆$\odot(O,r)$的过程，从而命题得证.

例 6.2 平面上有 100 个点，任意两点间的距离都不超过 1，且其中任意三个点均构成钝角三角形. 求证：可以用一个半径为 1/2 的圆纸片将这 100 个点完全盖住.

证 这是一个用圆纸片覆盖点集的问题. 由于这 100 个点两两之间的距离都是有限值，故一定存在一个最大值(即点集的直径). 不妨设点 A_1,A_2 间的距离 $|A_1A_2|=d$ 为最大值，显然，依条件有 $d\leqslant 1$.

我们以 A_1A_2 为直径画圆，该圆就是一个直径不超过 1，从而半径不超过 1/2 的圆. 我们只须证明，其余的 98 个点均在这个圆内即可.

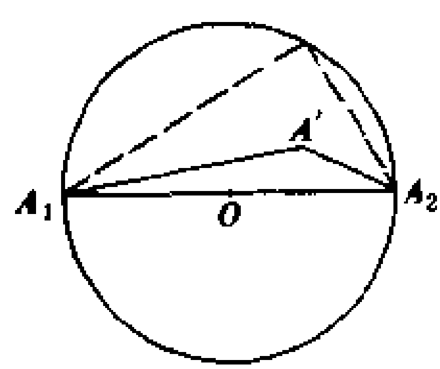

图 6.1

设 A' 是其余 98 个点中的任一点(图 6.1)，依题意，$\triangle A_1A'A_2$ 为钝角三角形. 因 A_1A_2 为最大边，所以$\angle A_1A'A_2$ 为钝角，由于直径 A_1A_2 上的圆周角为直角，所以 A' 必在以 A_1A_2 为直径的圆内. 因此，这 100 个点均可被直径$|A_1A_2|\leqslant 1$

的圆纸片盖住. 当然更可以被一个直径＝1(半径为 1/2)的圆纸片所覆盖了.

例 6.3 在平面上有 $2n+3(n\geqslant 1)$个点，其中没有三个点共线，也没有四个点共圆. 证明：一定存在这样的覆盖圆，使得圆周上恰盖住三个点，圆内部恰盖住 n 个点，而圆外部也恰有 n 个点.

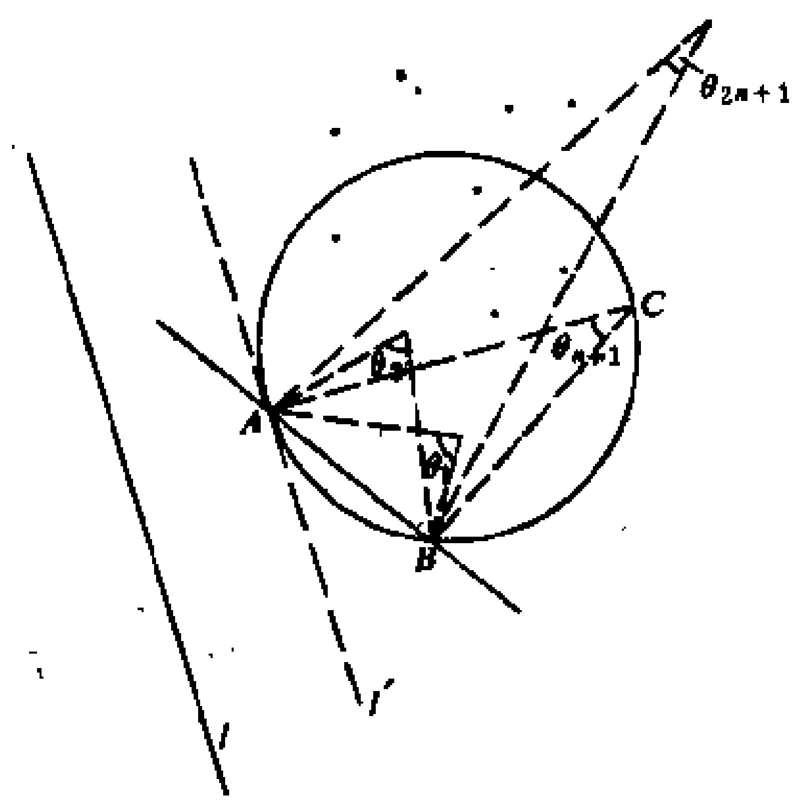

图 6.2

证 作直线 l，使得这 $2n+3$ 个点均在直线 l 的同侧. 再从 $2n+3$ 个点中找出与直线 l 距离最近的一点，记为 A，过点 A 作直线 l 的平行线 l'，若 l' 还过点集中的 B 点，操作停止；若 l' 只过 A 一个点，再将 l' 绕点 A 旋转，最先碰到的点设为 B，操作停止，则其余 $2n+1$ 个点均在直线 AB 的同侧.

因为其中没有四点共圆，故这 $2n+1$ 个点对线段 AB 的视角各不相等. 将这 $2n+1$ 个视角从大到小排列起来：

$$\theta_1>\theta_2>\theta_3>\cdots>\theta_n>\theta_{n+1}>\theta_{n+2}>\cdots>\theta_{2n}>\theta_{2n+1}.$$

设对应于角 θ_{n+1} 的点是 C，则过 A,B,C 三点(不共线)可画一个圆. 因为 $\theta_1>\theta_2>\cdots>\theta_n>\theta_{n+1}$，所以对应角 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 的 n 个点均在所画的圆内，而 $\theta_{n+1}>\theta_{n+2}>\cdots>\theta_{2n}>\theta_{2n+1}$，所以对应角 $\theta_{n+2},\theta_{n+3},\cdots,\theta_{2n+1}$ 的 n 个点均在所画的圆外.

因此，过 A,B,C 三点的圆就是所求的覆盖圆.

例 6.4 点集 M 由 25 个点组成，每三个点中都有两个点的距离小于 1. 证明：用半径为 1 的圆纸片能覆盖 M 中至少 13 个点.

证 设点 A 是点集 M 中的一个点，如果其余 24 个点与 A 的距离均不超过 1，则这 25 个点均在以 A 为圆心，1 为半径的圆中，结论显然成立.

如果其余 24 个点中存在点 B，B 与 A 的距离大于 1. 这时我们作$\odot(A,1)$及$\odot(B,1)$. 对其余 23 个点中的任一点 C，依条件，AB,AC,BC 中有一个小于 1，但已知 $AB>1$，所以要么 $AC<1$，要么 $BC<1$. 因此，点 C 要么被$\odot(A,1)$盖住，要么被$\odot(B,1)$盖住，即这 23 个点都分布在$\odot(A,1)$与$\odot(B,1)$中. 由抽屉原则，至少有一个圆中不少于 12 个点，不妨设$\odot(A,1)$中不少于 12 个点，再加上点 A，可知$\odot(A,1)$中分布有 M 中的至少 13 个点. 所以用半径为 1 的圆纸片能覆盖 M 中至少 13 个点.

例 6.5 平面上有 1992 个点，其中任意 12 个点中必有

两点的距离小于 1. 证明:存在半径为 1 的圆纸片,它至少可盖住 182 个点.

证 从平面上 1992 个点中任选一点 O_1,以 O_1 为圆心画一个半径为 1 的$\odot(O_1,1)$,如果$\odot(O_1,1)$的圆面已盖住 1992 个点,问题得证. 若不然,则一定有一点 O_2 在$\odot(O_1,1)$外面. 此时 $O_1O_2>1$. 再画$\odot(O_2,1)$,如果$\odot(O_1,1)$,$\odot(O_2,1)$已完全盖住这 1992 个点,则根据抽屉原则,必有一圆面盖住不少于 996 个点,当然更能盖住 182 个点. 如果$\odot(O_1,1)$,$\odot(O_2,1)$没完全盖住这 1992 个点,则继续按上述步骤,画$\odot(O_3,1)$,$\odot(O_4,1)$,$\odot(O_5,1)$,$\odot(O_6,1)$,$\odot(O_7,1)$,$\odot(O_8,1)$,$\odot(O_9,1)$,$\odot(O_{10},1)$,$\odot(O_{11},1)$. 至此,这 11 个半径为 1 的圆面一定能完全盖住这 1992 个点. 因为如若不然,还有一个点 O_{12}在这 11 个圆之外,这时 $O_1,O_2,\cdots,O_{11},O_{12}$这 12 个点中将不存在两点的距离小于 1,与任意 12 个点中必有两点的距离小于 1 的条件相矛盾. 所以这 11 个半径为 1 的圆面完全盖住了这 1992 个点.

由于 $1992=11\times181+1$,根据抽屉原则,这 11 个圆中至少有一个圆面盖住了不少于 182 个点. 所以存在半径为 1 的圆纸片,它至少可盖住 182 个已知点.

例 6.6 平面点集 M 分布在一个边长为 a 的正三角形内部,M 中每一点向正三角形三边引垂线段,其中任一条垂线段都小于另外两条垂线段之和. 试证:点集 M 必定能被一个半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 的圆纸片所覆盖.

分析 用来覆盖的对象是形状大小完全确定的图形——半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$的圆纸片.被覆盖的点集M的形状大小未直接给出,只知道该点集中的点都分布在一个给定的正三角形(设为$\triangle ABC$)内,且每一点到这个正三角形三边的距离x,y,z满足$x<y+z,z<x+y,y<x+z$.因此,我们应首先利用上述条件来判定点集M在$\triangle ABC$中大体的分布区域,也就是研究满足上述条件的点的轨迹图形.设这个轨迹图形为Q,则点集M一定含于Q中,即可以被Q覆盖.如果我们能证明Q可以被一个半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$的圆纸片所覆盖,这时根据覆盖的性质2,即可得到要证的结论.

证 如图6.3所示,$\triangle ABC$为边长是a的正三角形,P为$\triangle ABC$内的一点,P到三边AB,BC,AC的距离分别为z,x,y.设$\triangle ABC$的高为h,则根据正三角形内任一点到三边距离之和等于这个正三角形的高①,得

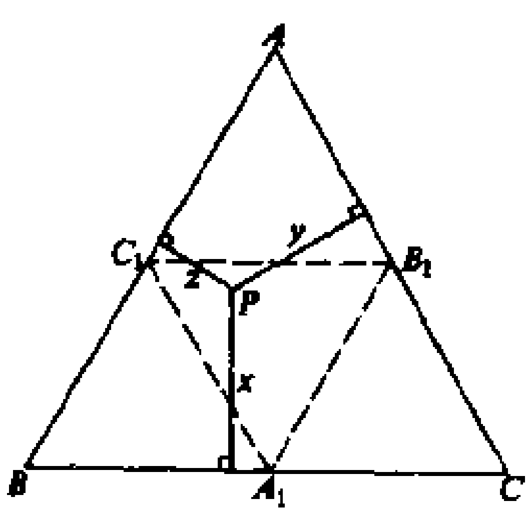

图 6.3

$$x+y+z=h.$$

---

① 设正三角形ABC边长为a,形内点P到三边距离分别为h_1,h_2,h_3,高为h.由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle CPA}$化简即可证得"正三角形内一点到三边距离之和等于正三角形的高".这个结论也叫做维维阿尼(Viviani)定理.

设 P 为点集 M 中的任一点，则有

$$y+z>x,\quad z+x>y,\quad x+y>z,$$

所以 $x+y+z>2x,\quad x+y+z>2y,\quad x+y+z>2z,$

即 $$x<\frac{h}{2},\quad y<\frac{h}{2},\quad z<\frac{h}{2}.$$

所以，由 $x<\frac{h}{2}$ 知 P 在 AB,AC 中点连线与 BC 之间，即梯形 BCB_1C_1 中；由 $y<\frac{h}{2}$ 知 P 在 BC,AB 中点连线与 AC 之间，即梯形 CAC_1A_1 中；由 $z<\frac{h}{2}$ 知 P 在 CA,CB 中点连线与 AB 之间，即梯形 ABA_1B_1 中.

由于点 P 同时满足 $x<\frac{h}{2},y<\frac{h}{2},z<\frac{h}{2}$，可知 P 位于梯形 BCB_1C_1，梯形 CAC_1A_1，梯形 ABA_1B_1 的公共部分——$\triangle A_1B_1C_1$ 中. 由于 P 是 M 中任意一点，所以可以断定点集 M 包含于 $\triangle A_1B_1C_1$ 中.

由于 A_1,B_1,C_1 分别是 BC,CA,AB 的中点，所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 是边长为 $\frac{a}{2}$ 的正三角形. 因此点集 M 可以被边长为 $\frac{a}{2}$ 的正三角形纸片 $A_1B_1C_1$ 所覆盖. 而这个正三角形的外接圆半径，通过勾股定理或正弦定理可算得为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$. 所以一个边长为 $\frac{a}{2}$ 的正三角形必定可被其外接圆（一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 的圆）纸片所覆盖. 根据覆盖性质 2 可知，点集 M 一定

可被一个半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$的圆纸片所覆盖.

例 6.7 平面上给定一有限点组 $P_1, P_2, \cdots, P_n (n \geqslant 3)$，已知其中每三点都可以被一个半径为 r 的圆纸片覆盖. 求证：存在一个半径为 r 的圆(纸片)可以盖住这 n 个点.

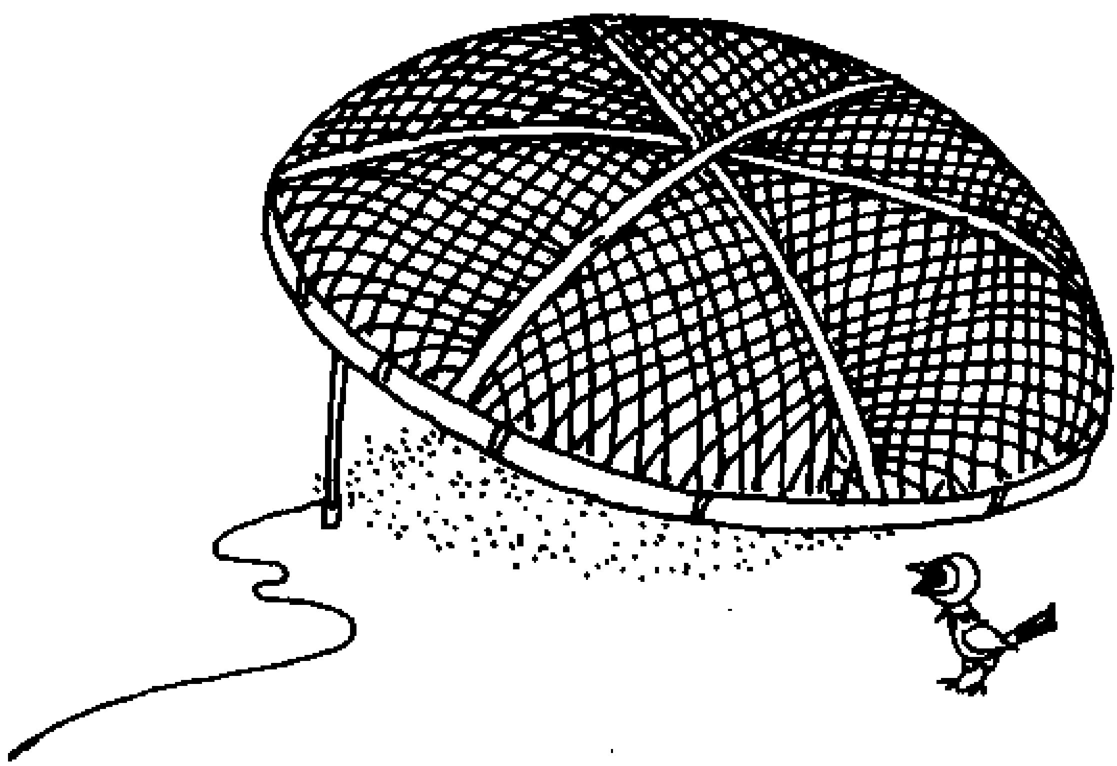

图 6.4

证 有限 n 点组是个有界点集，故可用一个半径充分大的圆纸片盖住这 n 个点(按例 6.1 的方法就可以作出这个圆). 然后再把该圆尽可能地逐渐缩小，则有下述两种情形：

(1)有某两点位于该圆的某直径的两端，根据题设条件，每三点都可被一个半径为 r 的圆所覆盖，此时该覆盖圆的半径显然不超过 r.

(2)有三点位于该圆周上，那么根据假设该圆的半径不会

超过 r.

总之，存在一个半径为 r 的圆纸片可覆盖这全部 n 个点.

例 6.8 已知在⊙(O,r)中嵌入一个点集 M. M 由 n 个点组成，这 n 个点间的最小距离为 a. 在 a 分别为(1) $\sqrt{3}r$，(2) $\sqrt{2}r$，(3)r 时，求 n 的最大值.

解 (1)$n>1$ 时，这 n 个点都不会是圆心 O，否则 $a\leqslant r<\sqrt{3}r$，与已知矛盾. 根据同样的道理，这 n 个点中每两个点不在同一条半径上.

设这 n 个点为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，把其中每一点 A_i 与圆心 O 相连，再延长 OA_i 交圆周于 A_i' $(i=1,2,\cdots,n)$. 在 $i\neq j$ 时，我们设法证明$\angle A_iOA_j\geqslant 120°$.

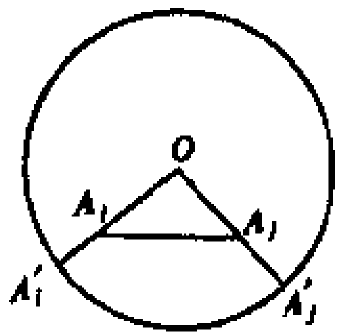

图 6.5

如果$\angle A_iOA_j<120°$，则

$$A_i'A_j'=2OA_i'\sin\frac{\angle A_iOA_j}{2}<\sqrt{3}r.$$

因为三角形中任一线段不大于三角形的最长边(即三角形的直径)，所以

$$A_iA_j\leqslant\max(A_i'A_j',OA_i',OA_j')<\max(\sqrt{3}r,r,r)=\sqrt{3}r.$$

但是由已知 $A_iA_j\geqslant a=\sqrt{3}r$，矛盾. 所以$\angle A_iOA_j\geqslant 120°$. 由此得出

$$n\leqslant\frac{360°}{120°}=3.$$

即至多能嵌入三个点，这些点之间的距离$\geqslant\sqrt{3}r$.

能嵌入三个相互间距离不小于 $\sqrt{3}r$ 的点是显然的，只

要使这三个点构成$\odot(O,r)$的内接正三角形的三个顶点就可以了.

(2)仿照(1)的解法，易知 n 的最大值为 4(四个点构成$\odot(O,r)$内接正方形的四个顶点).

(3)易知 $n\leqslant 7$. 当 $n=7$ 时，有一点与圆心 O 重合，其余六个点构成$\odot(O,r)$内接正六边形的六个顶点. 这七个点每两点间距离不小于 r.

例 6.9 点集 M 的直径为 1，证明：半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的圆纸片能盖住点集 M.

证 因点集 M 的直径为 1，故存在 M 中的两个点 A，B，使得 $AB=1$. 现在画$\odot(A,1)$，$\odot(B,1)$，则 M 既被$\odot(A,1)$盖住，也被$\odot(B,1)$盖住. 因此 M 被$\odot(A,1)$与$\odot(B,1)$的公共部分(图 6.6 中的阴影部分)所覆盖.

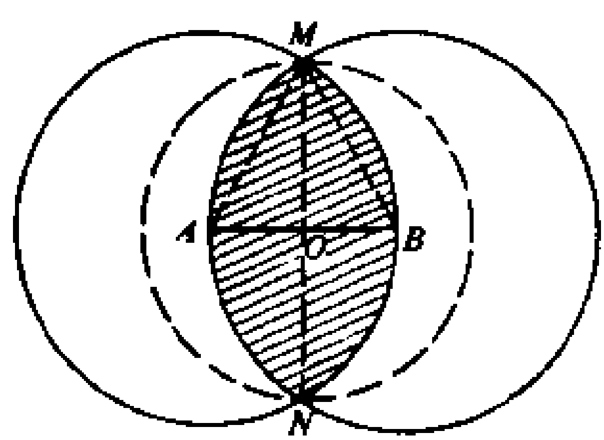

图 6.6

设两圆的公共弦为 MN，则 MN 垂直平分 AB 于 O. 容易算得 $OA=OB=\frac{1}{2}$，$OM=ON=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以以 O 为圆心$\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径画圆，可以盖住图中阴影部分，当然更可以盖住点集 M.

说明 例 6.9 中用两个圆面盖一个点集，从而其公共部分可以盖住该点集，这是性质 3 的一个具体实现途径. 当然本题的$\frac{\sqrt{3}}{2}$并不是最佳结果，实际上，“M 的直径为 1，则半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的圆纸片可以盖住 M.”这个证明留给读者思考.

例 6.10 点集 M 的直径为 1，问直径为 1 的圆纸片一定能盖住 M 吗？

解 直径为 1 的圆纸片不一定能盖住直径为 1 的点集. 例如，边长为 1 的正三角形的三个顶点 A，B，C，组成一个三点集，其直径为 1. 而直径为 1 的圆只能盖住其中的两点 B 与 C，却盖不住 A（图 6.7）.

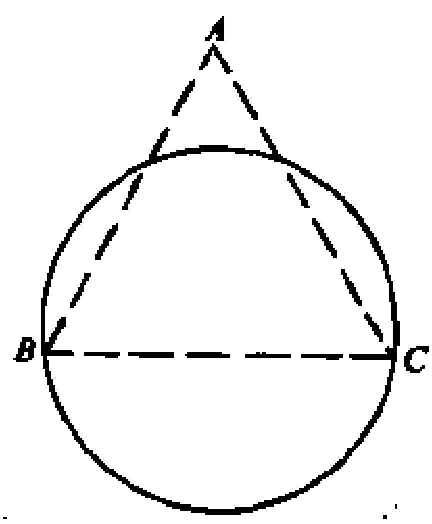

图 6.7

说明 例 6.10 告诉我们，边长为 1 的正三角形作为点集的直径等于 1，而这个正三角形外接圆的直径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 点集直径与圆的直径这两个概念是有区别的. 在证明覆盖问题时特别要警惕，不要混淆这两个概念.

7

多张纸片覆盖

在覆盖问题中，经常大量的是用多张纸片去覆盖一个平面图形，比如用 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 共 n 张纸片，去覆盖图形 F. 此时，依定义 1.3，只须找到一种放置方法，使 F 中的每一点都至少与某个 A_i 中的点重叠即可. 下面我们通过例题展示其中的证明技巧.

例 7.1 $ABCD$ 是个凸四边形. 求证：这个四边形一定可以被以 AB, BC, CD, DA 为直径的四个半圆纸片所覆盖.

证 以 AB, BC, CD, DA 为直径向形内作四个半圆. 对 $ABCD$ 内任一点 P，我们证明 P 至少属于这四个半圆之一.

如若不然，P 不属于这四个半圆的任一个，则 P 将在这四个半圆之外(图 7.1). 连结 PA,

PB,PC,PD，则有

$$\angle DPA<90°，\angle APB<90°，$$
$$\angle BPC<90°，\angle CPD<90°.$$

于是可得

$$\angle DPA+\angle APB+\angle BPC+\angle CPD<360°，$$

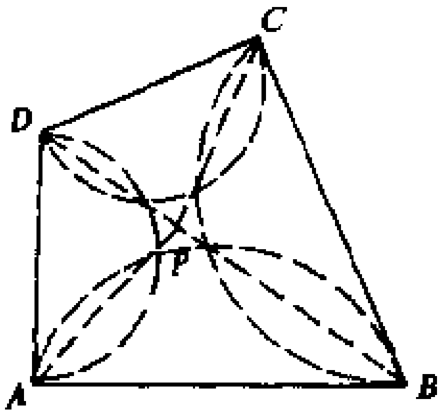

图 7.1

这与四个角之和为周角（360°）矛盾. 所以 P 至少属于一个半圆，即我们所作的四个半圆纸片可以覆盖凸四边形 $ABCD$.

例 7.2 已知$\triangle ABC$ 与三个矩形 R_1,R_2,R_3. 矩形的边平行于两个固定的方向，三个矩形完全盖住了 AB,BC,CA 三条边（即$\triangle ABC$ 周界上每一点至少在一个矩形的内部或边上）. 证明：这三个矩形纸片可以覆盖$\triangle ABC$.

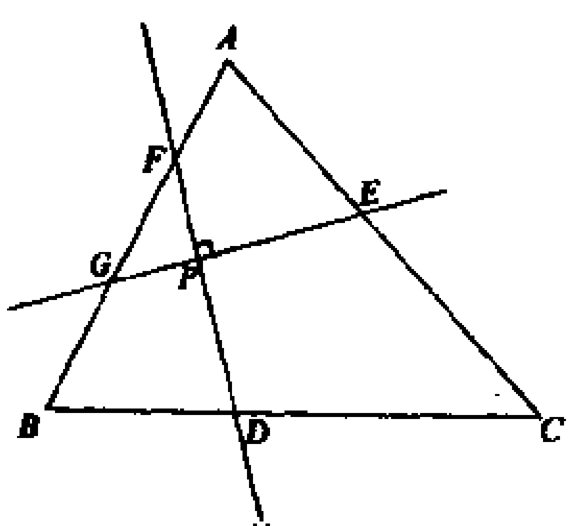

图 7.2

证 设 P 为$\triangle ABC$ 内部任一点，过 P 作与矩形 R_1 的边平行的两条互相垂直的直线，交$\triangle ABC$ 的周界于 D,E,F,G 四点（图 7.2）. 因这四点被三个矩形 R_1,R_2,R_3 所覆盖，根据抽屉原则，其中至少有两个点属于同一矩形. 为确定起见，不妨设至少有两点同属于 R_1.

如果 D,F 或 E,G 同属于 R_1，则显然有 P 属于 R_1；如果

D,E 同属于 R_1，那么由于 PD,PE 与 R_1 的边平行，所以 P 也属于 R_1. 对 D,G；G,F；F,E 同属于 R_1 的情况可作类似讨论，得到 P 也属于 R_1.

这样，我们证明了 $\triangle ABC$ 内任一点都至少属于三个矩形中的一个，即这三个矩形纸片可以覆盖 $\triangle ABC$.

例 7.3 证明：三个边长为 1 的正方形纸片一定可以覆盖一个边长为 5/4 的正方形纸片.

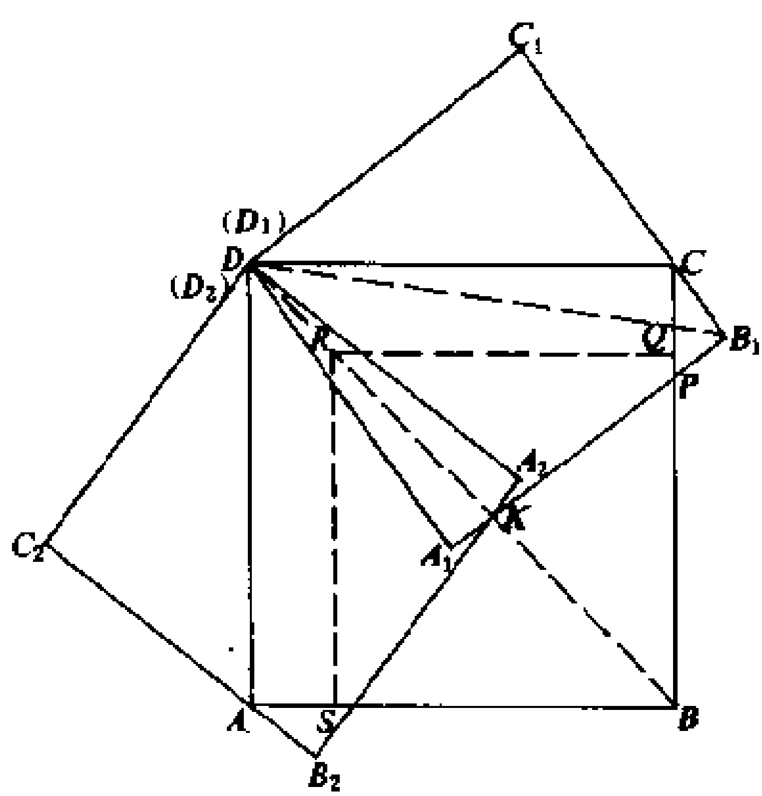

图 7.3

分析 本题是用三张单位正方形纸片去覆盖一个边长为 5/4 的正方形区域，依定义 1.3，关键在于找到这三个单位正方形的放置方法. 为此，我们取第一个单位正方形如图 7.3 所示放在 $BQRS$ 的位置. 经验告诉我们，这样的放置方法不但

使这个单位正方形纸片利用得最充分，而且使未被盖住的部分相对集中，便于用后两个单位正方形纸片去覆盖.

注意到所余部分即折角形 $QCDASRQ$ 关于正方形对角线 BD 对称，所以只要能用一个单位正方形盖住梯形 $QCDR$ 即可. 由此我们找到了证明的途径.

证 如图 7.3 所示，将第一个单位正方形纸片盖在 $BQRS$ 的位置，则 $CQ=AS=1/4$. 再将单位正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D_1 与 D 重合，使边 C_1B_1 过顶点 C. $DC=5/4$，$DC_1=1$，由勾股定理可算得 $C_1C=3/4$，$CB_1=1/4$.

$\because$ $CP>CB_1=1/4=CQ$，

$\therefore$ Q 点被纸片 $A_1B_1C_1D_1$ 盖住.

另外，由 $\angle CDB=45°=\angle B_1DA_1$ 可知，DC 在 $\angle C_1DB_1$ 内部，则有 DB 在 $\angle A_1DB_1$ 内部. 所以梯形 $QCDR$ 被正方形纸片 $A_1B_1C_1D_1$ 盖住.

由关于 BD 的对称性可知，梯形 $ASRD$ 也可被另一个单位正方形纸片 $A_2B_2C_2D_2$ 盖住.

因此，三个边长为 1 的正方形纸片可以覆盖一个边长为 5/4 的正方形纸片.

说明 本题是直接应用定义证明覆盖问题的一个典型例子，寻找三个单位正方形适当的放置位置是解法的关键，从思想方法上本题又具有构造性思维的特征，这也正是直接应用定义证明覆盖问题的难点之所在.

例 7.4 有甲、乙、丙、丁四张纸片：甲是边长为 1 的正三角形，乙是边长为 1 的正方形，丙是边长为 1 的正五边形，丁

是边长为 1 的正六边形. 证明:甲、乙、丙、丁合在一起能盖住半径为 1 的圆面(纸片盖圆面时可以重叠,但不准剪开).

证 这是证明能够盖住的问题,需要构造一种放置纸片甲、乙、丙、丁覆盖半径为 1 的圆面的方法.

$\odot O$ 表示半径为 1 的圆面(图 7.4),MN 与 PQ 是 $\odot O$ 的互相垂直的两条直径.

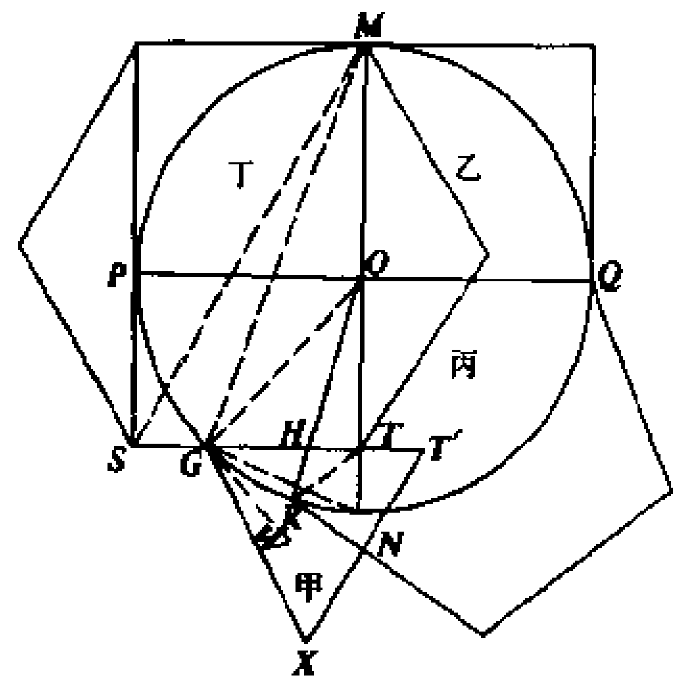

图 7.4

我们将乙、丙、丁按图示位置放好. 其中乙的相邻两边与 OM,OQ 重合,因此乙盖住了 1/4 圆面 OMQ. 丙的相邻两边中一边与 OQ 重合,另一边 OR 的顶点在 $\overset{\frown}{PN}$ 上,即丙盖住了含圆心角为 108°的圆扇形 QOR. 丁的一个顶点在 M,且过点 M 的一边垂直于直径 MN,设这边所对的边为 ST,T 在 MN 上. 由于 $ST \parallel PO$,故可设 ST 与半圆弧 $\overset{\frown}{MPN}$ 交于 G,与 OR 交于 H,即丁盖住了 $\odot O$ 中的 $MPGHO$ 这部分图形.

此时 $\odot O$ 中未被盖住的部分仅剩下图形 GHR,其中 $\overset{\frown}{GR}$ 是弧段. 这时我们设法用甲去盖 GHR.

让甲的一个顶点与 G 重合,一边与 GT 重合延长至 T'.

甲的另一顶点为 X. 过 G 沿$\overset{\frown}{GN}$的方向作$\odot O$ 的切线 GW，由于$\angle GMT<\angle SMT=30^\circ$，所以

$$\angle TGW=\angle GOT=2\angle GMT<2\times 30^\circ=60^\circ,$$

即
$$\angle TGW<\angle TGX.$$

故$\overset{\frown}{GR}$不能与 GX 相交.

我们再证 N 在甲的内部. 事实上，

$$\begin{aligned}GT^2&=OG^2-OT^2=OG^2-(MT-MO)^2\\&=1-(\sqrt{3}-1)^2=2\sqrt{3}-3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}GN^2&=GT^2+TN^2=GT^2+(MN-MT)^2\\&=2\sqrt{3}-3+(2-\sqrt{3})^2=4-2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

G 点到 XT' 的最短距离为 $\sqrt{3}/2$，而

$$\begin{aligned}GN^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2&=4-2\sqrt{3}-3/4\\&=3.25-2\sqrt{3}\\&<3.25-2\times 1.7=-0.15<0,\end{aligned}$$

故 $GN<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 N 在甲的内部，GRH 被甲完全盖住.

综上所述，甲、乙、丙、丁合在一起可以盖住半径为 1 的圆面.

本题是 1988 年全国理科班招生试题的一部分，其所用知识不超过初中课程，但构造、构思与证明的表述是相当综合的，对训练能力与开发智力极有益处.

例 7.5 三个圆两两外切于 X,Y,Z，然后使这些圆的半径扩大到$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$倍而圆心不变. 求证：$\triangle XYZ$ 的每一点至少被

扩大后的一个圆面所覆盖.

证 对$\triangle XYZ$内的任一点O(图 7.5),$\angle AOB$,$\angle BOC$,$\angle COA$中至少有一个不小于$120°$.

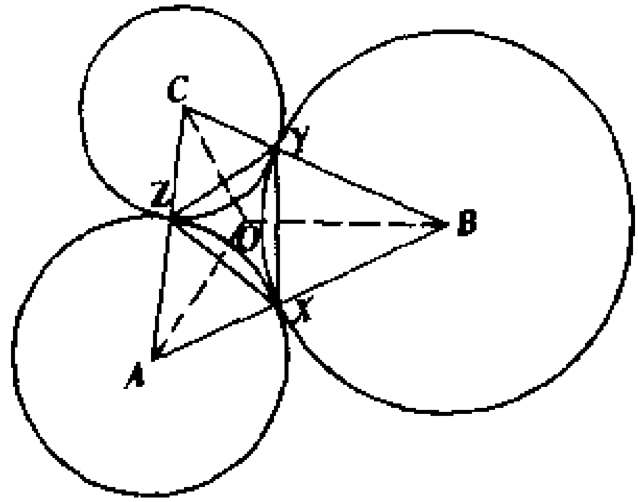

图 7.5

设$\angle AOB\geqslant 120°$,于是只须证明

$$AO+OB\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}AX+\frac{2}{\sqrt{3}}BX$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}AB$$

即可. 事实上,由余弦定理有

$$\begin{aligned}AB^2&=AO^2+OB^2-2AO\cdot OB\cos\angle AOB\\&\geqslant AO^2+OB^2+AO\cdot OB\\&=(AO+OB)^2-AO\cdot OB\\&\geqslant(AO+OB)^2-\frac{1}{4}(AO+OB)^2\\&=\frac{3}{4}(AO+OB)^2,\end{aligned}$$

也即 $$AO+OB\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}AB=\frac{2}{\sqrt{3}}AX+\frac{2}{\sqrt{3}}XB.$$

若$AO>\frac{2}{\sqrt{3}}AX$且$OB>\frac{2}{\sqrt{3}}XB$,则有

$$AO+OB>\frac{2}{\sqrt{3}}AB.$$

因此，$AO\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}AX$，$OB\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}XB$ 至少有一个成立. 设 $AO\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}AX$ 成立，即点 O 被以 A 为中心、$\frac{2}{\sqrt{3}}AX$ 为半径的圆面所覆盖.

例 7.6 已知一个凸多边形（纸片）不能覆盖任何面积为 1 的三角形. 证明：这个多边形可以被面积为 4 的三角形（纸片）所覆盖.

证 凸多边形设为 Q，则 Q 的内接三角形中必能找到面积最大的一个，不妨设其为 $\triangle ABC$. 显然 $S_{\triangle ABC}<1$.

如图 7.6 所示，过 A 作直线 $l\parallel BC$，过 B 作直线 $m\parallel AC$，过 C 作直线 $n\parallel AB$，则直线 l,m,n 交得 $\triangle A'B'C'$. 易知

$$S_{\triangle A'B'C'}=4S_{\triangle ABC}<4.$$

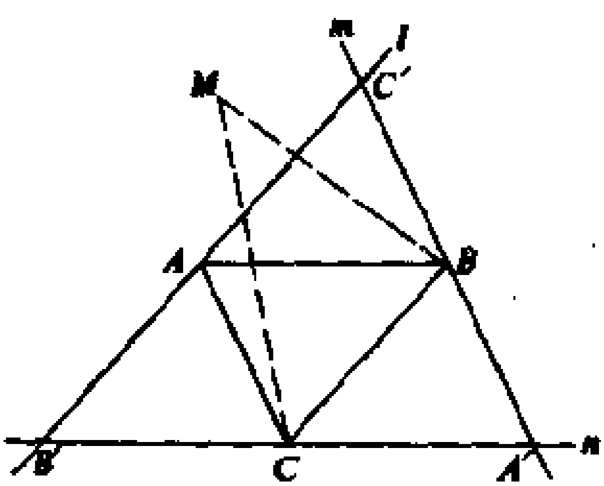

图 7.6

我们证明，$\triangle A'B'C'$ 必能覆盖多边形 Q. 如若不然，将存在一点 M，它是多边形 Q 的点，同时又在 $\triangle A'B'C'$ 外面. 不妨设点 M 在 l 关于 BC 的异侧. 连结 MC，MB 得 $S_{\triangle MBC}>S_{\triangle ABC}$. 这与 $\triangle ABC$ 为 Q 的最大面积的内接三角形矛盾.

同理可证：点 M 也不能在 m 关于 AC 的异侧或 n 关于 AB 的异侧. 因此，点 M 在 $\triangle A'B'C'$ 外部的假设不能成立，

即多边形 Q 的任一点都必在$\triangle A'B'C'$之中，也即$\triangle A'B'C'$完全覆盖了多边形 Q. 当然，更有与$\triangle A'B'C'$相似且面积为 4 的三角形纸片可以覆盖 Q.

例 7.7 在$\square ABCD$中，已知$\triangle ABD$是锐角三角形，$AB=a$，$AD=1$，$\angle BAD=\alpha$. 证明：以 A,B,C,D 为圆心，半径为 1 的圆(纸片)K_A,K_B,K_C,K_D 能覆盖$\square ABCD$的充要条件是

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

证 作$\triangle ABD$的外接圆(图7.7). 因为$\triangle ABD$是锐角三角形，故圆心 O 在形内. 易知点 C 在$\triangle ABD$外部. 假设外接圆的半径 $R\leqslant1$，连结 AO,BO,DO 的线段及所作三边的中垂线，将$\triangle ABD$分为六个直角三角形.

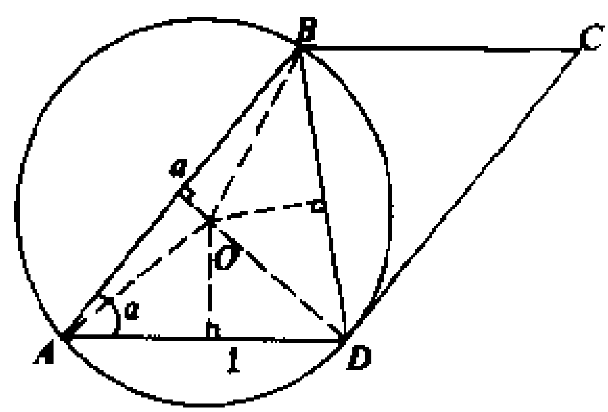

图 7.7

于是$\triangle ABD$中的任一点必在某一个直角三角形中，它与相应顶点的距离$\leqslant R\leqslant 1$. 所以$\triangle ABD$能被圆 K_A,K_B,K_D 覆盖.

由对称性可知，$\triangle BCD$ 能被圆 K_B,K_C,K_D 覆盖.

反之，若 $R>1$，则 K_A,K_B,K_D 不能盖住圆心 O，又因为 $OC>R>1$，K_C 也盖不住点 O.

所以，$R\leqslant1$ 是 K_A,K_B,K_C,K_D 覆盖$\square ABCD$的充要条件.

因此，我们只须再证明

$$R\leqslant 1\Leftrightarrow a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

即可.

事实上,在等腰$\triangle AOD$中,

腰长$R\leqslant AD=1\Leftrightarrow\angle AOD\geqslant 60°\Leftrightarrow\angle ABD\geqslant 30°$.

但
$$\operatorname{ctg}\angle ABD=\frac{a-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

所以
$$\angle ABD\geqslant 30°\Leftrightarrow\operatorname{ctg}\angle ABD\leqslant\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{a-\cos\alpha}{\sin\alpha}\leqslant\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

这样,就完成了我们的证明.

8

覆盖技巧例谈

在证明覆盖问题时，往往要经过精巧的构思. 在这一节里，我们举例介绍“万能覆盖”与“切角术”.

例 8.1 一个凸多边形 M 的直径是 1. 证明：M 的面积小于 1.

证 1 设 A，B 是凸多边形 M 中距离最大的两个点(直径)，$AB=1$. 所以纸片$\odot(A,1)$覆盖 M，$\odot(B,1)$也覆盖 M，从而多边形 M 被这两个圆的公共部分，也就是图 8.1 中的“叶形”所覆盖.

设这两圆的公共弦为 CD，易知 $CD=\sqrt{3}>1$. 因此 C，D 中至少有一点不属于 M. 为确定起见，不妨设 D 不属于 M. 这时过 C 作直线 $l\parallel AB$，若 C 也不是 M 中的点，则向下平移 l，

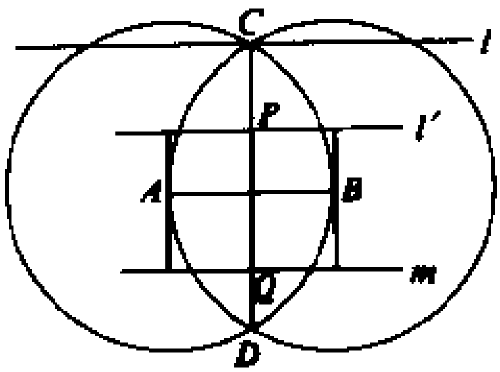

图 8.1

直到遇到 M 中的点为止，设这时 l'（即下移后的 l）交 CD 于 P；若 C 属于 M，则 l 不再移动，这时 l 就是 l'，点 C 就是点 P. 在 PD 上取点 Q，使 $PQ=1$，过 Q 作直线 $m /\!/ AB$. 这样，直线 l'，m 交圆弧成一“鼓形”（在 C 属于 M 的情况下，两直线交圆弧成一“弹头形”），M 被包含在“鼓形”（成“弹头形”）内. 但这“鼓形”（或“弹头形”）可被单位正方形覆盖，“鼓形”（成“弹头形”）面积小于单位正方形面积 1，所以凸多边形 M 的面积小于 1.

证 2 M 可被两条平行直线 l_1，l_2 形成的带形域盖住. 相向平移 l_1 与 l_2，直到它们遇到 M 中的点为止. 这时 l_1 与 l_2 都变为 M 的承托直线，l_1 与 l_2 间的距离 $h_1 \leqslant 1$（图 8.2）.

同理，垂直于 l_1，l_2 的直线 m_1，m_2 组成的带形域也可盖住 M. 适当相向平移 m_1 与 m_2，直到它们遇到 M 中的点为止，即 m_1，m_2 也成为 M 的承托直线，m_1 与 m_2 间的距离 $h_2 \leqslant 1$.

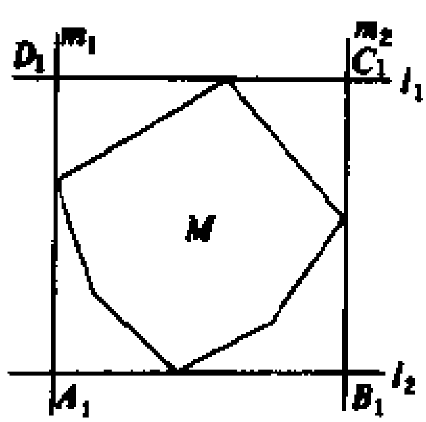

图 8.2

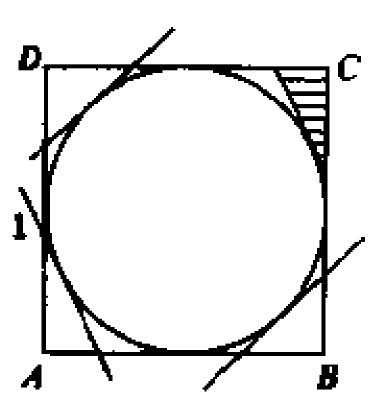

图 8.3

两带形域交成矩形 $A_1B_1C_1D_1$（其边长均$\leqslant 1$）. 由于 M 被 $A_1B_1C_1D_1$ 覆盖，可知，M 必可被一个单位正方形 $ABCD$ 覆盖.

作单位正方形的内切圆，内切圆的直径为 1（图 8.3）. 在 A，C 两个对角内作圆的一组平行切线，我们把以 A，C 为直角顶点、切线段为斜边的两个小直角三角形称做“可切三角形

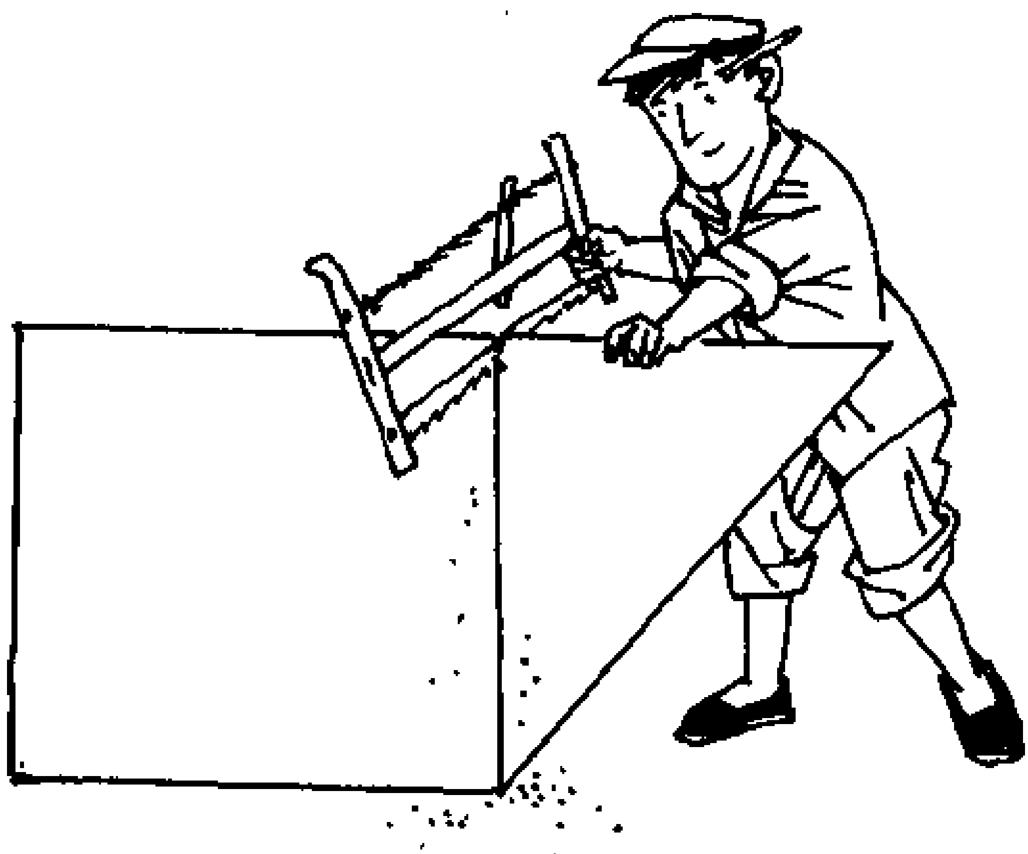

图 8.4

A”及“可切三角形 C”. 因此，这两个可切三角形中至少有一个里边不能有 M 中的点. 为确定起见，不妨设可切三角形 C 中不含 M 中的点. 这样，就切去“可切三角形 C”（阴影部分），剩下的“缺角单位正方形”仍可覆盖 M. 但缺角正方形面积小于 1，当然更有凸多边形 M 面积小于 1.

说明 证 1 与证 2 反映了覆盖问题中应用性质 3 的两种技巧：用两圆交覆盖与用两带形域之交覆盖. 同时，证 2 中的"切角术"也是很精美的. 请想一想，能不能再切去一个角？

例 8.2 已知直径为 1 的点集 M 被一个边长为 $1/\sqrt{3}$ 的正六边形 $ABCDEF$ 覆盖. 证明：适当截去六边形的某两个不相邻的角，剩下的部分(缺两个角的六边形)仍可覆盖点集 M.

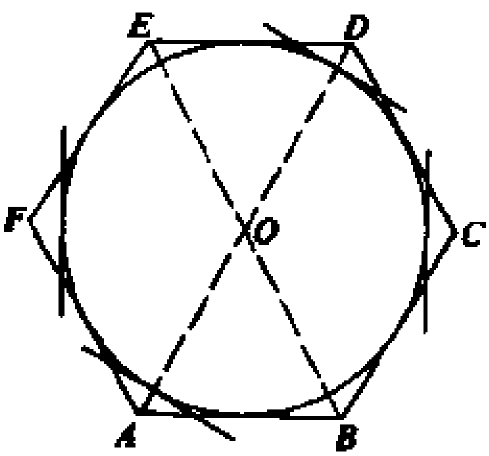

图 8.5

证 如图 8.5 所示，取正六边形的中心为 O. 由于正六边形边长为 $1/\sqrt{3}$，容易算出它的内切圆⊙O 的半径 $r=\frac{1}{2}$，所以⊙O 直径为 1，也就是正六边形平行对边之间的距离为 1.

而今点集 M 的直径为 1，并且已知 M 被正六边形 $ABCDEF$ 所覆盖. 作垂直于 AD 的⊙O 的两条平行的切线，形成可切三角形 A 与可切三角形 D. 这两个可切三角形中不能都有点集 M 中的点，即至少有一个中没有 M 的点. 因此可以切去一个角.

同法，在 B，E 两个可切三角形中也可以切去一个，在 C，F 两个可切三角形中也可以切去一个.

在可以切去的三个可切三角形中，一定有两个是不相邻的. 这样，把不相邻的这两个可切三角形切掉，就合于题设要求.

例 8.3 证明：直径为 1 的平面点集 S，可以被一个边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形纸片所覆盖.

分析 由于所给点集 S 的直径为 1，我们总可以作两条平行的直线将 S 夹在中间. 相向平移这两条平行线，直到它们遇到 S 中的某个点为止. 这时，两平行线间的距离不大于 1，并把 S 夹在这两条平行线之间.

用上述方法可以作出三组平行线 a, a'；b, b'；c, c'；使每两组线之间的倾角为 60°. 这样一来，点集 S 包含于三个带形域的交集——一个六边形区域中(图 8.6)，并且交得两个正三角形 $A_1B_1C_1$ 与 $A_2B_2C_2$.

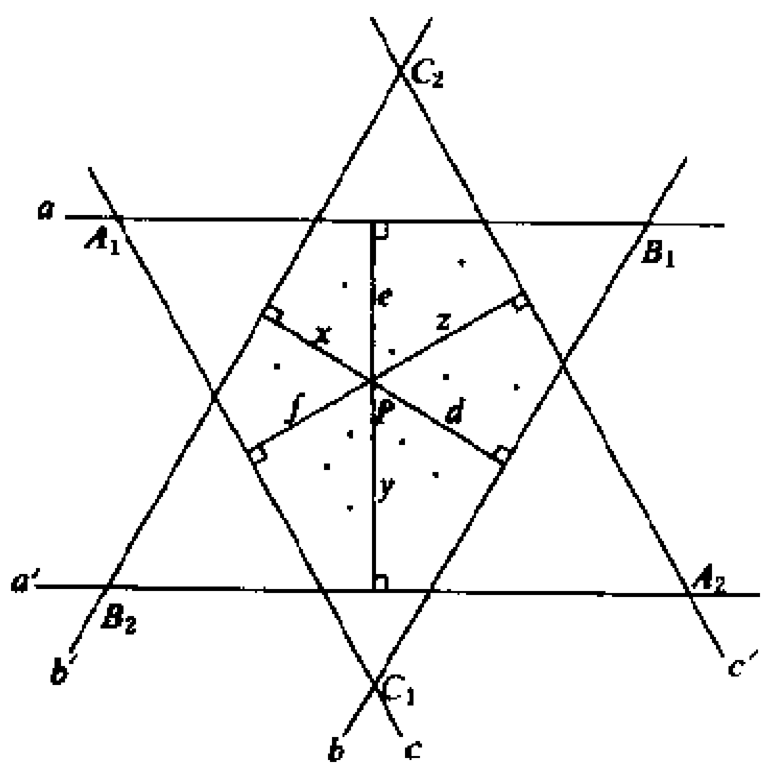

图 8.6

从点集 S 中的任一点 P 向六边形的六条边分别引垂线. 垂线段分别记为 d, e, f；x, y, z.

又设$\triangle A_1B_1C_1$的高为h_1，$\triangle A_2B_2C_2$的高为h_2. 因为正三角形内一点到三边距离之和等于正三角形之高，故有

$$d+e+f=h_1, \quad x+y+z=h_2,$$

相加得

$$(x+d)+(y+e)+(z+f)=h_1+h_2.$$

但 $\qquad x+d\leqslant 1, \quad y+e\leqslant 1, \quad z+f\leqslant 1,$

因此

$$h_1+h_2\leqslant 3.$$

根据抽屉原则，可以断定h_1，h_2中至少有一个不大于 3/2. 为确定起见，不妨设$h_2\leqslant 3/2$.

经计算知，正三角形$A_2B_2C_2$的边长不大于$\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}=\sqrt{3}$. 由于点集$S$可以被一个边长不大于$\sqrt{3}$的正三角形$A_2B_2C_2$覆盖，当然$S$更可以被边长为$\sqrt{3}$的正三角形覆盖.

说明 如果点集N能覆盖任意一个直径为 1 的点集S，我们称N为**万能覆盖点集**. 因此，例 8.3 常被称为万能覆盖问题.

观察图 8.6，两个正三角形$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$都盖住了直径为 1 的点集S，其中一个三角形边长不超过$\sqrt{3}$. 不妨设$\triangle A_2B_2C_2$的边长不超过$\sqrt{3}$. 我们注意到，这两个正三角形重叠的部分是一个等角六边形，它可以盖住点集S.

由于点集S的直径为 1，因此存在S中的两个点A_0，B_0使得$A_0B_0=1$. 过A_0，B_0分别作A_0B_0的垂线作为S的承托直线a与a'. 其余按例 8.3 可得图 8.6. 设a交$\triangle A_2B_2C_2$于

PQ，$\triangle A_2B_2C_2$ 的高线 C_2H 交 PQ 于 M（图 8.7）. 设 MH 的中点为 O，则 $MH=1$，$PQ\leqslant\sqrt{3}/3$. $OM=OH=\frac{1}{2}$. 在 PQ 上以 M 为中点作线段 $AB=\sqrt{3}/3$，则 A，B 在正三角形 $A_2B_2C_2$ 的边上或外部. 自 A，B 作 A_2B_2 的垂线，垂足设为 E，D，则 $\triangle ABO$，$\triangle ODE$ 都是边长为 $\sqrt{3}/3$ 的正三角形，且点 D 到 C_2B_2 的距离 $\geqslant 1$，点 E 到 A_2C_2 的距离 $\geqslant 1$. 再完成菱形 $AOEF$ 与 $BODC$，则边长为 $\sqrt{3}/3$ 的正六边形 $ABCDEF$ 覆盖 S. 因此得出，**每一个直径为 1 的点集能用一个边长为 $\sqrt{3}/3$ 的正六边形纸片覆盖住.**

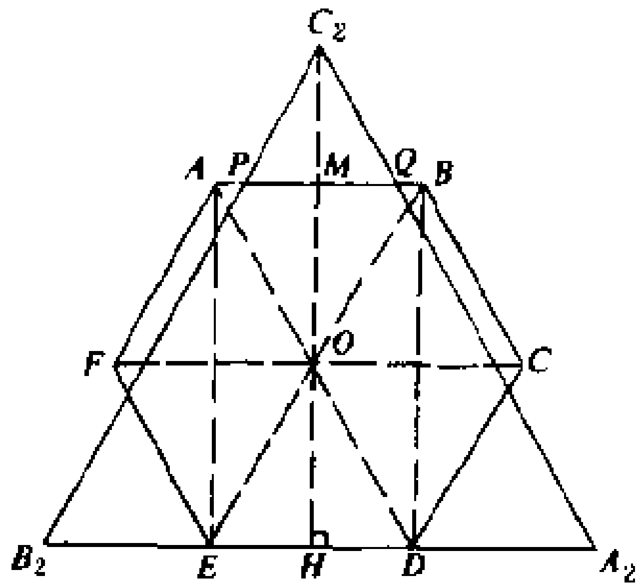

图 8.7

例 8.4 S 是平面上 1980 个点组成的集合，它的任意两点间的距离不小于 1. 证明：S 中必能找出一个由 220 个点组成的子集合 T，T 中任意两点间的距离不小于 $\sqrt{3}$.

分析 220 个点恰是 1980 个点的 1/9. 你可能会猜想，S 中每 9 个点中可以找到 T 中的一个点. 其实我们证明的基本思路正是这样展开的，但细节上要精心处理.

证 集合 S 共有 1980 个点，所以在平面上可以画一条直线，使点集 S 均在这直线的同一侧. 平移这条直线，直到遇到

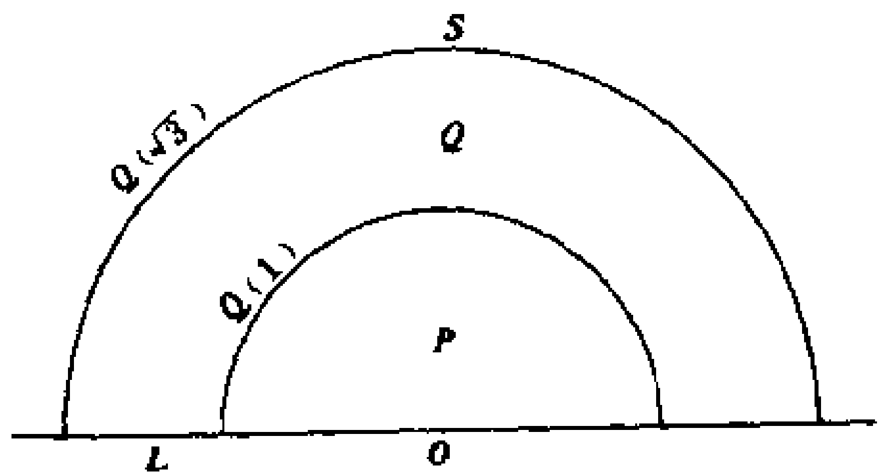

图 8.8

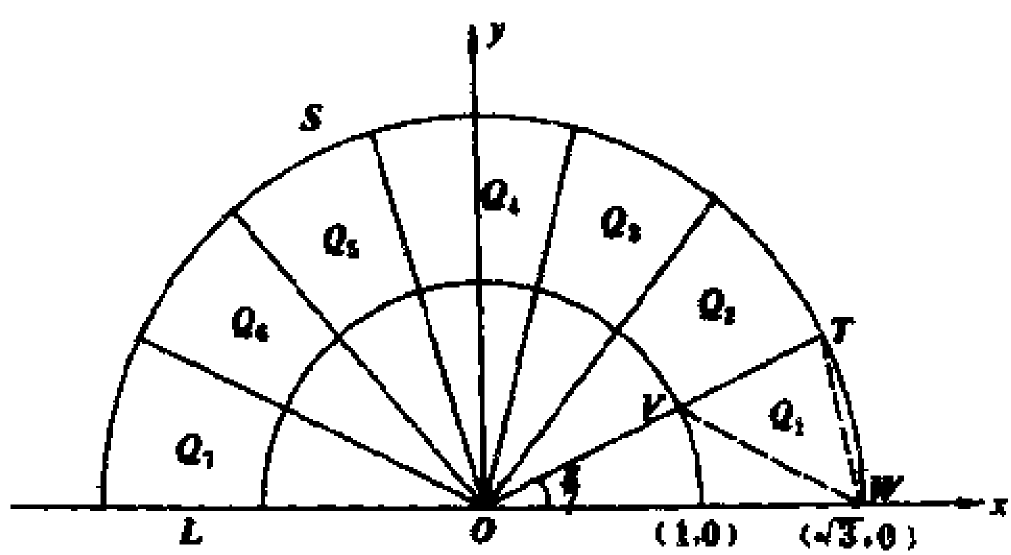

图 8.9

点集 S 中的点为止. 这时,直线为 L,所遇到的点设为 O. L 成为点集 S 的一条承托直线.

以 O 为圆心 1 为半径画半圆⊙$(O,1)$,⊙$(O,1)$与 L 所围成的区域称为 P(图 8.8). 以 O 为圆心 $\sqrt{3}$ 为半径画半圆⊙$(O,\sqrt{3})$,⊙$(O,1)$与⊙$(O,\sqrt{3})$及 L 所围成的半圆环区域称为 Q.

我们从点集 S 中取 9 个点，设 O 就是这 9 个点所组成的凸包边界上的一点. 这时我们可以断言，其余 8 个点都不能分布在区域 P 中，并且至多有 7 个点分布在半环域 Q 中.

事实上，我们从 O 作射线，与 Ox 轴所成角依次为 $\frac{\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{7}$，…，$\frac{6\pi}{7}$，$\frac{7\pi}{7}$，这样将半圆环等分为 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_7$ 七个区域(图 8.9). 我们估算 Q_i 中两点间的距离($i=1,2,3,4,5,6,7$).

$$WT<\overset{\frown}{WT}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{14}<0.778<1, \tag{1}$$

且

$$\begin{aligned} VW &=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{7}} \\ &=\sqrt{3-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}} \\ &=\sqrt{4-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{7}} \\ &<\sqrt{4-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}} \quad \left(因为 \cos\frac{\pi}{6}<\cos\frac{\pi}{7}\right) \\ &=\sqrt{4-2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &=1, \end{aligned}$$

可见，每个 Q_i 中任两点间的最大距离都小于 1，所以每个 Q_i 中至多分布前述 8 个点中的一个点. 半圆环域 Q 中至多分布 7 个点. 因此这 8 个点中至少有一个要分布在$\odot(O, \sqrt{3})$之外. 设这个点为 A_1，则

$$OA_1\geqslant\sqrt{3}.$$

对一般情况.我们可以用数学归纳法来证明.

当 S 有 18 个点时,根据上述证明,易知存在两个点,它们的距离不小于 $\sqrt{3}$,命题成立.

设当 S 有 $9k$ 个点时,其中有 k 个点,两两距离 $\geqslant\sqrt{3}$ 成立.

我们对 $9k+9$ 个点时的集合 S 证明问题也成立.

在 $9k+9$ 个点的集合 S 中按开始时的方式,找到承托直线 L 及与 L 距离最近的 9 个点,其中一点 O 在 L 上.设这个集合为 N.则其余的 $9k$ 点集为 $S-N$.依归纳假设,存在其中的 k 个点,它们两两之间距离不小于 $\sqrt{3}$.这时再加上点 O,因为点 O 与这些点之间的距离均 $\geqslant\sqrt{3}$,所以这 $k+1$ 个点为 S 中的满足条件的子集 T.

这样我们就一般地证明了:若平面上由 $9k$ 个点组成的集合 $S(k\geqslant 1)$ 任意两点间的距离不小于 1,则 S 中必存在由 k 个点组成的子集 T,T 中任意两点间的距离不小于 $\sqrt{3}$.

特别地,当 $k=220$ 时,S 有 1980 个点,命题也成立,即可找到由 220 个点组成的子集 T,T 中任意两点间的距离不小于 $\sqrt{3}$.

说明 有时候你要解决的问题不好入手时,往往可以考虑更为一般的问题或一般的情况,而一般的问题却可能是易于解决的.这时你要研究的问题只是一般问题的一个特例,自然也就迎刃而解了.正如例 8.4,命题对 $9k$ 个点的集合一般地证明以后,对 1980 个点的集合只是一个特例而已.

例 8.5 在平面上给出 100 个点,证明:可以用某些互不

相交，直径的和小于 100 且任何两个的距离都大于 1 的圆（纸片）覆盖这 100 个点（两个不相交的圆之间的距离，是指两个圆最近的两点之间的距离）.

证 以这 100 个点为圆心，1/2 为半径画出 100 个直径为 1 的圆，将这 100 个点盖住，其直径之和等于 100.

如果其中有两个圆相交，如图 8.10 所示，$\odot(O_1,1)$与$\odot(O_2,1)$相交，我们添画连心线 O_1O_2 交两圆周于 A，B，则以 AB 为直径的圆$\odot(O)$是包含$\odot(O_1,1)$，$\odot(O_2,1)$的最小的圆. 这时，我们以$\odot(O)$代替$\odot(O_1,1)$，$\odot(O_2,1)$，而$\odot(O)$的直径小于$\odot(O_1)$与$\odot(O_2)$的直径之和.

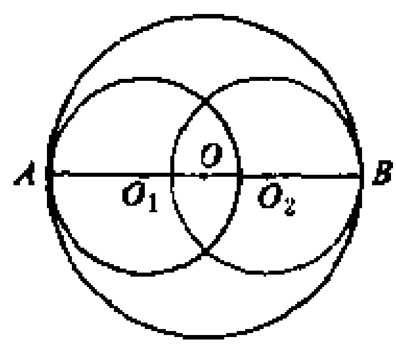

图 8.10

依上述手续，我们可以得到一组两两不相交的圆，它们可盖住已知的 100 个点，而其直径之和不超过 100，且从每一点到盖住它的圆的圆周的距离不小于 1/2.

设 r 是这些圆两两之间距离的最小值. 如果 $r>1$，则命题得证.

若 $r\leqslant 1$，可以用一些与它们同心且半径比原来小$\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)$的圆来代替它们中的每一个圆. 如图 8.11 所示，$\odot(O_i,r_i)$与$\odot(O_j,r_j)$之间的距离 $CD=r\leqslant 1$，于是$\frac{r}{3}\leqslant\frac{1}{3}$，而$r_i\geqslant\frac{1}{2}$，$r_j\geqslant\frac{1}{2}$. 所以

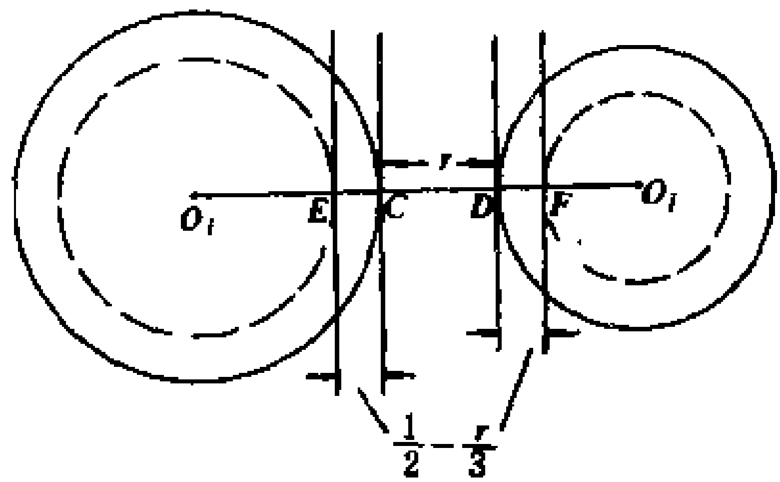

图 8.11

$$\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>0,$$

$$r_i-\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)=\frac{r}{3}>0,$$

$$r_j-\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)=\frac{r}{3}>0.$$

这样，以两个半径较原来小$\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)$的小圆来替代大圆，原来被盖住的点仍被小圆所覆盖，这是由于原来被盖住的点到所盖圆圆周的距离不小于$\frac{1}{2}$，而新的覆盖圆间的距离 EF 变大.

$$\begin{aligned}EF=CD+EC+DF&=r+\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)\\&=1+\frac{r}{3}>1.\end{aligned}$$

通过这样的调整，可以使作出的两两不相交的覆盖圆间的距离满足大于 1 的要求. 因此命题得证.

说明 本题的思想方法很有代表性. 按照一定方向的要

求去寻求解答、构造对象时，可以先满足部分条件，然后再逐步修正、调整以满足其他条件，直到最后满足题设的全部条件. 这种逐步修正、调整、逼近的思想应当很好地加以把握.

9

■■■■再谈

用一个大圆面去盖一个小圆，自然不成问题；而两个半径相等的圆面可以互相覆盖对方，这已由性质 1 陈述过了；但若用一张小圆纸片去盖一张大圆纸片，由性质 4 及定理 4.1，可以证明是盖不住的.

我们自然会提出这样的问题：用几张小圆纸片去盖一张大圆纸片，情况如何？如果圆的半径都是确定的，用 n 张小圆纸片可以盖住一个大圆面，那么，n 的最小值是多少？

有了问题，我们就可以进行探索研究了，而提出问题是重要的.

我们还是从两个小圆纸片盖一个大圆纸片的简单情况说起.

例 9.1 证明：两个半径小于 1 的圆纸片，

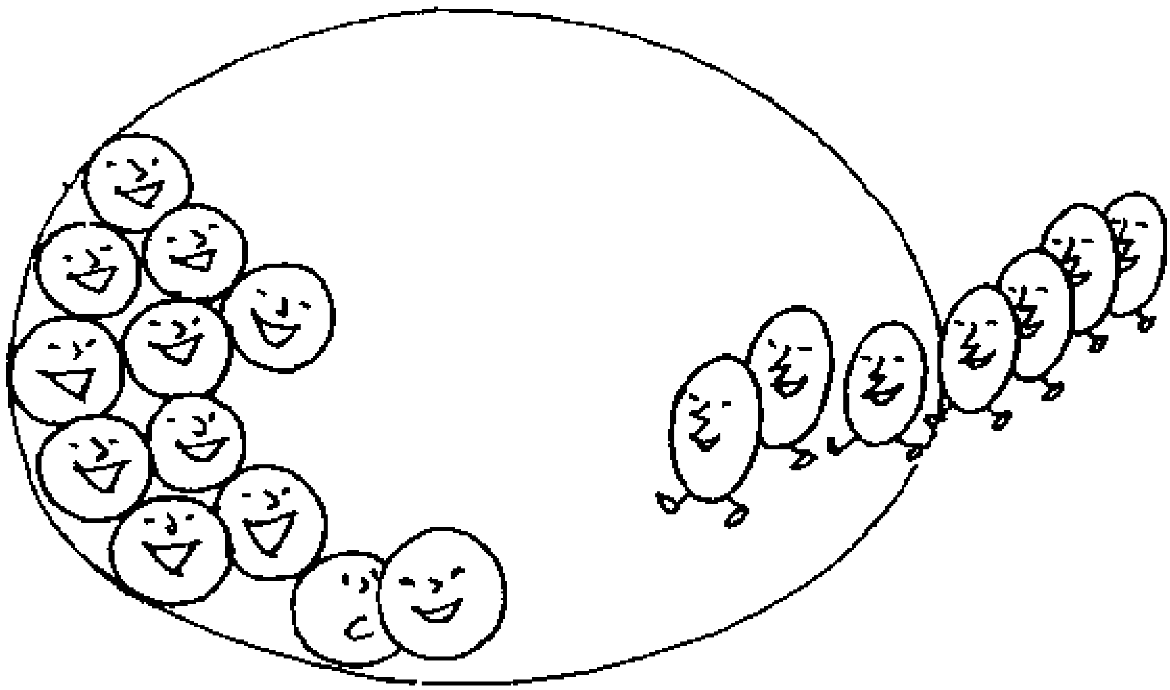

图 9.1

不能覆盖半径为 1 的圆纸片.

证 设两个半径小于 1 的圆纸片为$\odot O_1$及$\odot O_2$,半径为 1 的圆纸片为$\odot O$. 设$\odot O_1$已如图 9.2(a)所示覆盖了$\odot O$的

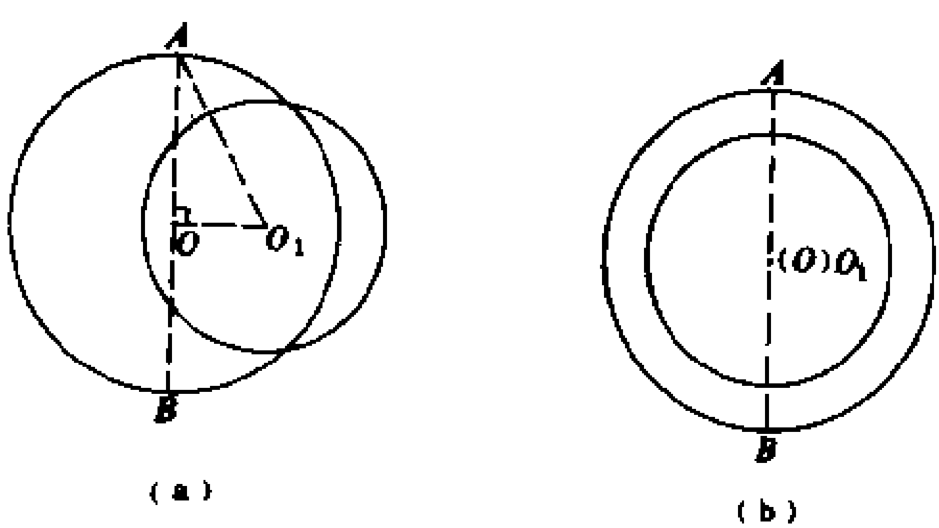

图 9.2

一部分,连结 OO_1,作$\odot O$ 的一条直径 AB 垂直于连心线 OO_1,则 A,B 两点均未被$\odot O_1$ 盖住(因 $O_1A \geqslant OA=1>r_1$,r_1 为$\odot O_1$ 的半径). 若 O_1 与 O 重合时,$\odot O$ 的任一条直径的两个端点 A,B 均未被$\odot O_1$ 盖住(图 9.2(b)). 由于 $AB=2$,因此,另一半径小于 1 的圆纸片$\odot O_2$ 不可能同时盖住 A,B 两点,即至少存在 A,B 中一个点不能被$\odot O_2$ 盖住. 所以两个半径小于 1 的圆纸片不可能盖住一个半径为 1 的圆纸片.

例 9.2 证明:三个半径为 $\sqrt{3}/2$ 的圆纸片,可以盖住一个半径为 1 的圆纸片.

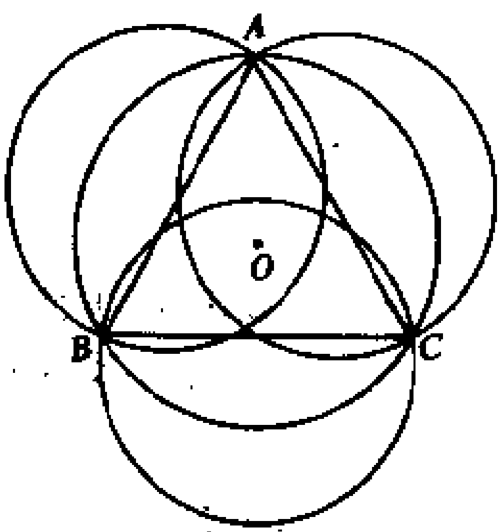

图 9.3

证 作$\odot(O,1)$的内接正三角形 ABC(图 9.3),则 $AB=BC=CA=\sqrt{3}$. 以 AB, BC, CA 三边为直径的三个圆面可以盖住$\odot O$(想一想,如何写出证明),而这三个圆的半径均为 $\sqrt{3}/2$,题目得证.

说明 我们将例 9.1 与例 9.2 结合在一起,可以完整地表述为如下的命题:

一个半径为 1 的圆至少要用三个半径小于 1 的圆纸片才能盖住.

通过例 9.1 与例 9.2,我们可以体会到证明"至少要 k 个"这类问题的思维方法:①证明 $n=k-1$ 时命题必定不成立,②举例示证 $n=k$ 时命题可以成立. 其结构是

当 $n<k$ 时，$P(n)$不存在
当 $n=k$ 时，有使 $P(n)$存在的例 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{使 } P(n) \text{ 存在的 } n \text{ 的最小值为 } k}$

例 9.3 请你研究，用半径为 1/2 的圆纸片覆盖半径为 1 的圆面，至少要用几个？

分析 我们不妨这样想，要把圆面盖住，必须得把边界——圆周盖住. 要盖住半径为 1 的圆周，至少要用几个半径为 1/2 的圆面呢？试一试，用六个就可以了. 但六个小圆盖不住大圆的圆心，因此可以猜到，至少还应再加一个半径为 1/2 的圆去盖圆心. 这样，至少要用七个圆纸片.

解 至少要用七个圆纸片.

首先，我们证明，6 个半径为 1/2 的圆纸片不能覆盖半径为 1 的圆面. 因为每个半径为 1/2 的圆面至多能覆盖半径为 1 的$\odot O$ 的圆周的1/6（只要作出$\odot(O,1)$的内接正六边形，即可得知此结论），故若六个$\odot(O_i,1/2)$能覆盖$\odot(O,1)$，则每个$\odot(O_i,1/2)$必须恰好覆盖$\odot(O,1)$的圆周的1/6. 因而每个$\odot(O_i,1/2)$的圆心 O_i 恰在一条长度为 1 的弦的中点（图 9.4）. 容易计算 $O_iO=\sqrt{3}/2>1/2$，所以 O 不属于每个小圆. 因而$\odot(O,1)$不能被 6 个半径为 1/2 的小圆纸片所覆盖.

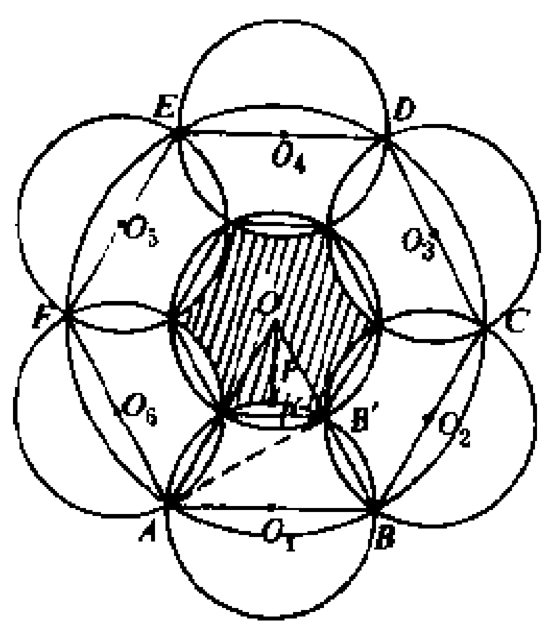

图 9.4

其次，作$\odot(O,1)$的内接正六边形$ABCDEF$，以各边为直径作圆可得六个半径为1/2的圆$\odot(O_i,1/2)$ $(i=1,2,3,4,5,6)$. 设P是$\odot(O,1)$中的一点，它不属于六个小圆中的任一个. 不妨设P落在扇形OAB中(图9.4)，记$\odot(O_1,1/2)$与$\odot(O_2,1/2)$的交点为B,B'，则$\triangle OAB$为等边三角形. AB'为OB上的高，它亦为OB上的中线，因而$OB'=1/2$. 连结OP并延长交$\odot(O_1,1/2)$于P'，则$OP<OP'\leqslant OB'=1/2$，即点P在以O为圆心以1/2为半径的圆内. 故此圆连同原来所作的$\odot(O_i,1/2)$ $(i=1,2,3,4,5,6)$共七个半径为1/2的圆覆盖了半径为1的圆面.

我们再讨论更为一般的情况.

例 9.4 用半径为R_1,R_2,R_3的三张圆纸片能盖住的圆的最大半径是多少?

解 我们还从最简单的情况入手. 先探索用三个半径为R的圆纸片能盖住的圆的最大半径是多少?

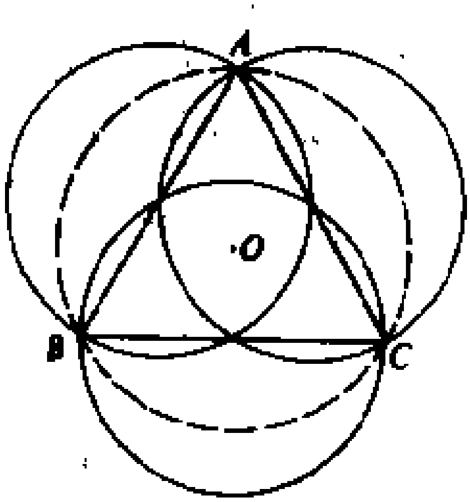

图9.5

作以$2R$为边的正三角形ABC，以三边为直径作三个半径为R的圆，再作$\triangle ABC$的外接圆$\odot(O)$，其半径为$2R/\sqrt{3}$(图9.5). 易知三个半径为R的圆盖住了$\triangle ABC$的外接圆$\odot(0,2R/\sqrt{3})$.

我们来证明，三个半径为R

的圆所能盖住的最大圆的半径为 $2R/\sqrt{3}$. 假设三个半径为 R 的圆能盖住一个半径更大的圆面，设其为$\odot(Q,m)$其中 $m>2R/\sqrt{3}$，则从此圆上可以找到一段不小于 $120°$的圆弧，至少被一个半径为 R 的圆盖住(图 9.6，其中角 $\alpha\geqslant 120°$). 由余弦定理可算得这段圆弧所对的弦 $l>2R$；但由图 9.6 可见，$l\leqslant 2R$，矛盾. 所以三张半径为 R 的圆纸片可以盖住的圆的最大半径为 $2R/\sqrt{3}$.

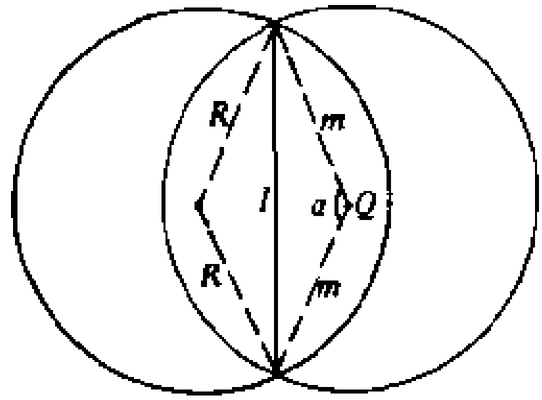

图 9.6

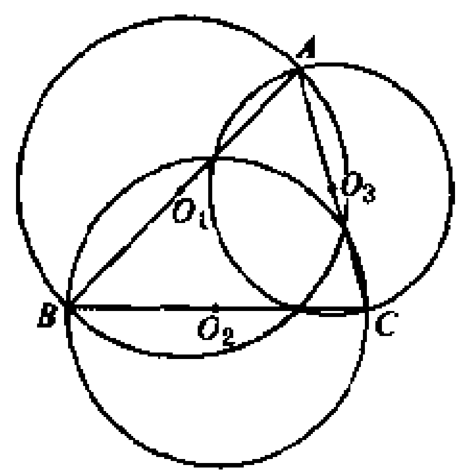

图 9.7

对三个圆半径不等的情况，我们作如下讨论：设三个覆盖圆纸片的半径分别为 R_1,R_2,R_3，且 $R_1\geqslant R_2\geqslant R_3$.

(1)如果 $2R_1,2R_2,2R_3$ 可以构成一个三角形的三边，我们以 $2R_1,2R_2,2R_3$ 为边作$\triangle ABC$. 以 AB,BC,AC 为直径画三个圆，则这三个圆$\odot(O_1,2R_1)$，$\odot(O_2,2R_2)$，$\odot(O_3,2R_3)$必可盖住$\triangle ABC$ 的外接圆(图 9.7). 我们来计算这个外接圆的半径.

$\triangle ABC$ 的半周长 $p=R_1+R_2+R_3$，所以

$$S_{\triangle ABC}=[(R_1+R_2+R_3)(R_1+R_2-R_3)(R_1-R_2+R_3)(R_2+R_3-R_1)]^{1/2},$$

设$\triangle ABC$外接圆半径为R，则有

$$R=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{\triangle ABC}}=$$

$$\frac{2R_1R_2R_3}{\sqrt{(R_1+R_2+R_3)(R_1+R_2-R_3)(R_1-R_2+R_3)(R_2+R_3-R_1)}}.$$

1)当$\triangle ABC$为锐角三角形时，$\odot(O_1,R_1)$，$\odot(O_2,R_2)$，$\odot(O_3,R_3)$所能覆盖的最大圆的半径为

$$\frac{2R_1R_2R_3}{\sqrt{(R_1+R_2+R_3)(R_1+R_2-R_3)(R_1-R_2+R_3)(R_2+R_3-R_1)}}.$$

2)当$\triangle ABC$为直角三角形或钝角三角形时，三圆所能覆盖的最大圆的半径为三个圆中最大者的半径R_1.

(2)如果R_1,R_2,R_3不能构成三角形(也即$R_1>R_2$，$R_1>R_3$且$R_1\geqslant R_2+R_3$)时，$\odot(O_1,R_1)$，$\odot(O_2,R_2)$，$\odot(O_3,R_3)$所能盖住的最大的圆的半径是R_1.

有了上述讨论的基础，对若干个圆纸片盖多边形的问题就很容易解决了.

我们已经看到，以三角形的各边为直径作圆，则这三个圆一定能盖住整个三角形.

前面我们也已证明过(见例7.1)，以凸四边形各边为直径作圆，这四个圆面也必定可以盖住该四边形. 于是自然会提出如下问题：

例9.5 以凸n边形的各边为直径作圆，当n为什么值时，凸n边形必定能被这n个圆纸片所覆盖？

解 当$n=3,4$时，如上所述，三角形、凸四边形中，以各

边为直径的圆面可以盖住三角形、凸四边形.

当 $n>4$,即 $n\geqslant5$ 时,结论可能不成立. 事实上,对 $n\geqslant5$ 时的正 n 边形,设它的中心为 O,则其一条边所对的圆心角为 $\frac{2\pi}{n}<\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. 可见,该圆心 O 在以边长为直径的圆的外面(图 9.8). 所以对正 n 边形而言,当 $n\geqslant5$ 时,以其边长为直径的 n 个圆纸片就不能盖住这个正 n 边形.

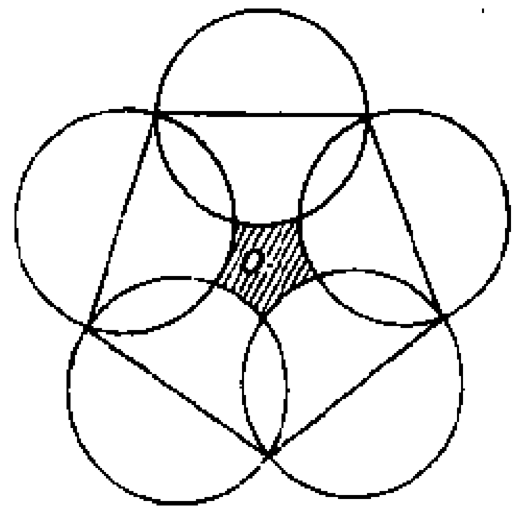

图 9.8

所以当且仅当 $n=3,4$ 时,凸 n 边形才必能被以各边长为直径的 n 个圆纸片所覆盖.

例 9.6 已知凸五边形的内角都是钝角. 证明:在此五边形中能够找到两条对角线,分别以这两条对角线为直径的两个圆纸片可以盖住这个五边形.

分析 设这个五边形的最大边为 AB,过 A,B 分别作 AB 的垂线 l_1 及 l_2,形成一个带形域(图 9.9). 由于 $\angle EAB,\angle ABC$ 均为钝角,所以 E,C 都落在带形域外面:一个在左侧(点 E),另一个在右侧(点 C). 点 D 必

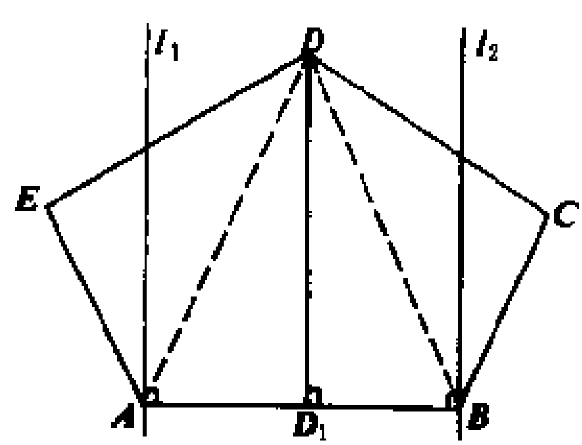

图 9.9

落在带形域内. 如若不然，设 D 落在与 E 相同的外侧，这时 DC 将大于带形域之宽 AB，与 AB 是五边形中最大边的假设相矛盾. 因此点 D 必落在带形域之内. 这样，我们以对角线 AD，BD 为直径画圆，由 D 作 $DD_1\perp AB$ 于 D_1，则 D_1 恰为这两圆之交点. 由于$\angle AED$，$\angle BCD$ 都是钝角，可知 E，C 分别被两圆之一所覆盖. 因此，以 AD，BD 为直径的两个圆纸片覆盖了整个凸五边形 $ABCDE$.

证 从略，见以上分析.

说明 通过一点对圆的直径的视角为非锐角来判定这点一定在圆内，是圆覆盖中常用的一种技巧.

例 9.7 平面上一任意形状的纸片 P 可以被一个半径等于 R 的圆面覆盖，但不能被半径小于 R 的任何圆面所覆盖. 证明：用半径等于 R 的圆面覆盖 P 时，圆心所在的位置是唯一的.

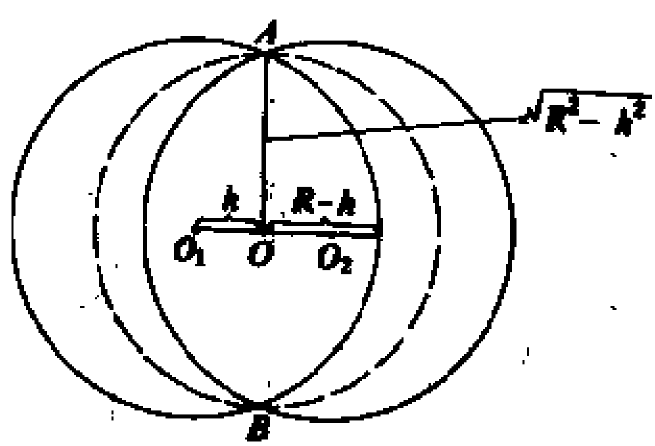

图 9.10

证 如若不然，设有两个不同位置的 O_1 和 O_2 作为覆盖圆的中心，可以放置两个半径为 R 的圆$\odot O_1$ 与$\odot O_2$，且二者都可以独立覆盖纸片 P，那么 P 必包含于两圆的公共部分之中. 这时，以两圆公共弦为直径作$\odot O$(图 9.10).

设 $O_1O_2=2h$，则 $R>h$.

$\therefore \quad R+h>R-h>0.$

则有 $\quad R^2-h^2=(R+h)(R-h)>(R-h)^2,$

$\therefore \quad \sqrt{R^2-h^2}>R-h.$

即半径为$\sqrt{R^2-h^2}$的$\odot O$可以盖住$\odot O_1$与$\odot O_2$的公共部分，当然更可以完全盖住P.

但是$\sqrt{R^2-h^2}<R$,即存在半径小于R的$\odot O$可以盖住纸片P.这与已知条件“P不能被半径小于R的任何圆面覆盖”相矛盾.

所以，当用半径为R的圆面覆盖P时，圆心的位置是唯一的.

例 9.8 证明:边长为2的正六边形$H=ABCDEF$能被六个半径为1的圆纸片所覆盖，但不能被五个半径为1的圆纸片所覆盖.

证 正六边形H的中心O与六个顶点的连线OA,OB,OC,OD,OE,OF分正六边形为六个边长为2的正三角形；再取OA,OB,OC,OD,OE,OF的中点及各边中点，连线后将正六边形H分为24个边长为1的正三角形(图9.11).

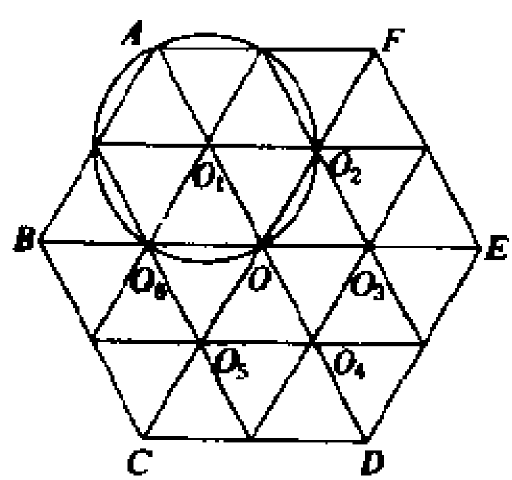

图 9.11

显然，以OA中点O_1为圆心，1为半径的圆可以盖住六个小正三角形.这样的圆可以作出六个(这六个圆依次以O_1,O_2,O_3,O_4,O_5,O_6为圆心，1为半径)，它们一起完全盖住了正六

边形 $ABCDEF$.

下面我们证明：用五个半径为 1 的圆纸片不能盖住正六边形 H.

事实上，因正六边形的周长为 12，若五个圆纸片能盖住它，则至少有一个圆纸片要盖住周长的 12/5. 如果我们能证明，没有一个圆纸片能盖住 H 周长的 12/5，问题就解决了.

如果一个单位圆只能盖住 H 的一个边长，那么它将无法覆盖直径为 2 的圆以外的部分. 显然，这个直径为 2 的圆无法同时与 H 的三条边相交，它只能盖住 H 的相邻两边各一部分. 假设覆盖圆与 H 的顶角 V 的两边相交，那么依顶点 V 的位置可分为两种情况：

(1)假设圆将点 V 覆盖，我们知道，H 的每个顶角是 $60°+60°=120°$. 令圆 K 通过顶点 V，交 V 相邻的二边于 X，Y. Z 是 $\overset{\frown}{XY}$ 的中点，R 是以 Z 为圆心半径为 $XZ=ZY$ 的圆，W 是 XV 的延长线与圆 R 的交点(图 9.12).

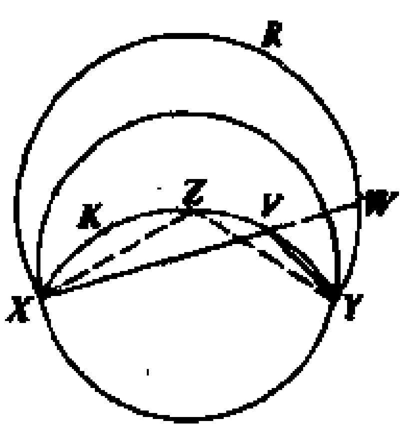

图 9.12

在圆 K 中，弦 XY 对的角 $\angle XZY=120°$. 但 Z 是圆 R 的中心，因此弦 XY 对的圆周角 $\angle XWY=60°$. 又 $\angle XVY$ 是 $\triangle VYW$ 的外角，

$$\angle XVY=\angle XWY+\angle VYW,$$

$$\angle VYW=\angle XVY-\angle XWY$$
$$=120°-60°=60°,$$

$\therefore\quad VY=VW.$

因此，　　$XV+VY=XV+VW=XW.$

XW 为圆 R 的弦，而直径是最大弦，因此，

$$XV+VY=XW\leqslant 2XZ.$$

我们在顶角 Z 为 $120°$的等腰三角形中，应用余弦定理得

$$XY^2=XZ^2+YZ^2-2XZ\cdot YZ\cos 120°$$

$$=2XZ^2-2XZ^2\left(-\frac{1}{2}\right)=3XZ^2.$$

因为 XY 是单位圆的弦，则有

$$XY\leqslant 2.$$

$$\therefore\quad 3XZ^2=XY^2\leqslant 4.$$

故有　　$XZ\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}},$

$$2XZ\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$<\frac{4\times 1.74}{3}<2.33<2.4=\frac{12}{5}.$$

(2)假设圆未覆盖点 V. 设覆盖圆与 H 的两边交截于 PX 和 QY，PZ 为平行于 VY 的直线，与圆交于 Z(图 9.13). 此时有

$$\angle XPZ=\angle XVY=120°,$$

$$\therefore\quad XP+QY<XP+VY<XP+PZ.$$

根据(1)的结论，应有

$$XP+PZ<12/5,$$

所以　　$XP+QY<12/5.$

综合(1),(2)可知，半径为 1 的圆纸片，无论如何放置，它所盖住的六边形周界长度总小于 12/5. 所以，五个半径为 1

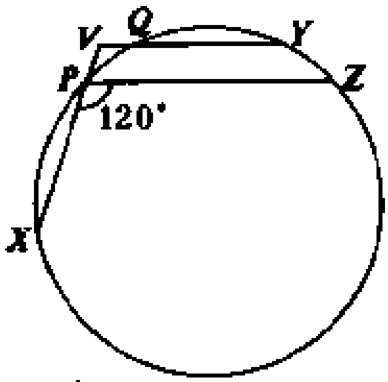

图 9.13

的圆纸片所盖住的 H 的周界长小于 12. 因此,五个半径为 1 的圆纸片无论如何放置都不能盖住边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$.

10

面积重叠原理

前面我们研究了多个图形的覆盖以及嵌入问题.

若把 n 个纸片放入一个区域中,可能会发生纸片的重叠.在什么情况下必定会发生纸片重叠呢?

定理 10.1 假定有 n 张纸片,它们的面积分别是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.把这 n 张纸片嵌入一个面积为 A 的平面区域中,若

$$A_1+A_2+\cdots+A_n>A,$$

则至少有两张纸片发生重叠(即存在面积不为零的公共部分).

这个定理又称**面积重叠原理**.它很容易用反证法证明,留给读者自己完成.

例 10.1 在一块面积为 1 的桌布上有九

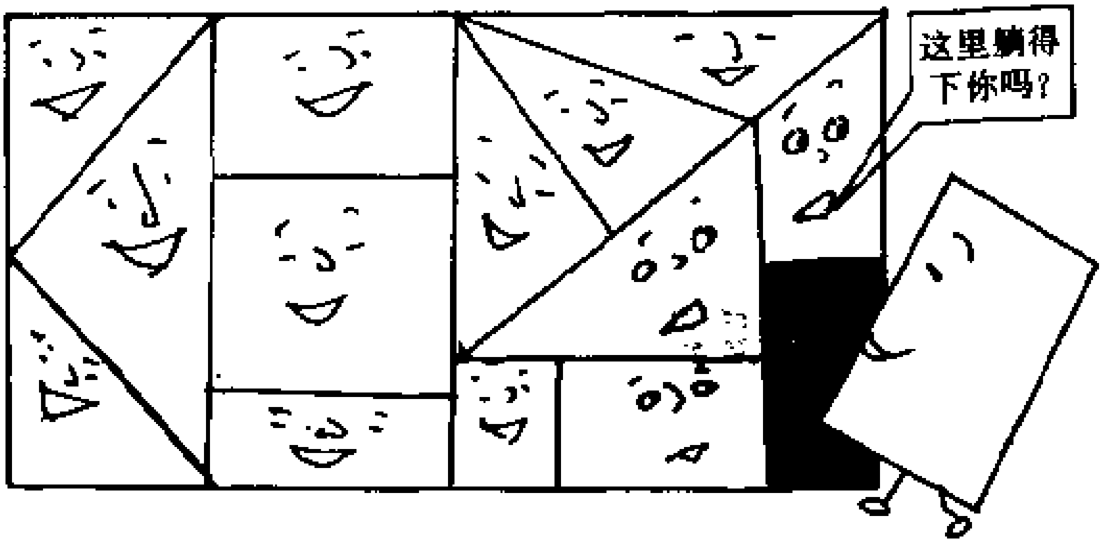

图 10.1

块面积各为 1/5 的补丁.证明:可以找到两块补丁,它们重叠部分的面积不小于 1/45.

分析 九块补丁的总面积为$\frac{1}{5}\times9=\frac{9}{5}>1$.根据面积重叠原理,补丁必定发生重叠.

今假设任意两块补丁重叠部分的面积都小于 1/45.把九块补丁分别编号为①,②,③,④,⑤,⑥,⑦,⑧,⑨,估算它们所覆盖的面积.

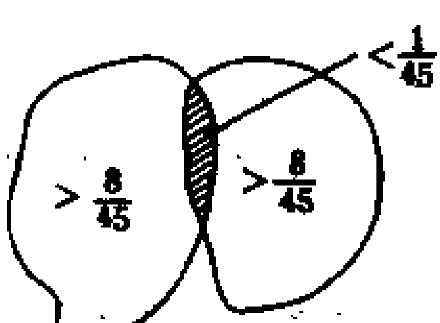

图 10.2

②与①覆盖面积总和大于$\frac{1}{5}+\frac{8}{45}$(图 10.2).③与①,②每一个重叠部分的面积都小于$\frac{1}{45}$,所以③与①,②的重叠面积总计小于$\frac{2}{45}$.因此③在①,②之外占据的面积大于$\frac{7}{45}$.

于是①,②,③覆盖的总面积大于$\frac{1}{5}+\frac{8}{45}+\frac{7}{45}$.

依此类推得

①,②,③,④覆盖总面积大于$\frac{1}{5}+\frac{8}{45}+\frac{7}{45}+\frac{6}{45}$;

①,②,③,④,⑤覆盖总面积大于$\frac{1}{5}+\frac{8}{45}+\frac{7}{45}+\frac{6}{45}+\frac{5}{45}$;

①,②,③,④,⑤,⑥覆盖总面积大于$\frac{1}{5}+\frac{8}{45}+\frac{7}{45}+\frac{6}{45}+\frac{5}{45}+\frac{4}{45}$;

……………………………………

最后,①,②,③,④,⑤,⑥,⑦,⑧,⑨覆盖总面积为S,有

$$S>\frac{1}{5}+\frac{8}{45}+\frac{7}{45}+\frac{6}{45}+\frac{5}{45}+\frac{4}{45}+\frac{3}{45}+\frac{2}{45}+\frac{1}{45}=1.$$

但由题设条件,这九块补丁覆盖的总面积不超过桌布的面积1,出现矛盾.所以必有两块补丁重叠部分的面积不小于$\frac{1}{45}$.

证 从略,以上分析实际上就是证明.

例 10.2 在一个半径等于6的圆内任意放入六个半径为1的小圆.证明:其中总还有一块空位置,可以完整地、无重叠地放入一个半径为1的小圆.

证 大圆中放入半径为1的小圆,则小圆的中心应在半径为$6-1=5$的圆内.而放入的第七个小圆若与前已放入的小圆不重叠,则其圆心O_7应在以前面每个小圆圆心为中心,半径为$1+1=2$的一组圆的外面(图10.3).

这样一来,当已放入六个半径为1的小圆以后,假设再也不能完整地放入第七个半径为1的小圆时,便意味着在半径

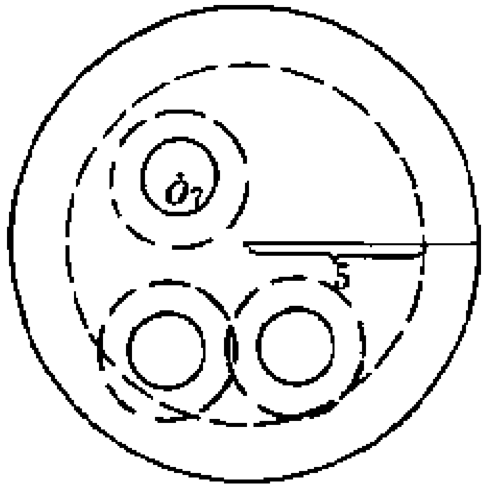

图 10.3

为 $6-1=5$ 的圆内找不到放入 O_7 这一点的"立锥之地". 也就是说,半径为 $6-1=5$ 的圆面已完全被六个半径为 $1+1=2$ 的圆所覆盖. 因此应有六个半径为 2 的圆的面积不小于半径为 5 的圆的面积. 但事实上,

$$6\pi\times2^2=24\pi<25\pi=\pi\times5^2,$$

得出矛盾. 于是可以断言,在一个半径为 6 的圆内先随意放入六个半径为 1 的小圆之后,还可以完整地、无重叠地放入第七个半径为 1 的小圆.

说明 上述证明中,小圆半径膨胀为 2,表明中心在这个范围之外,半径为 1 的圆才不会与此小圆重叠. 大圆半径缩小为 5,表明中心在半径为 5 的圆内的半径为 1 的小圆才不会脱出半径为 6 的大圆范围. 这种把圆放大、缩小的构想是非常巧妙也是极为重要的.

例 10.3 在半径为 R 的圆桌面上摆放同样大小的半径为 r 的硬币,要求硬币不准露出圆桌面边缘,并且所摆硬币彼此不能重叠. 当摆放 n 枚硬币之后,圆桌面上不能再多摆放一枚这种硬币了. 求证: $\sqrt{n}\,r<R<(2\sqrt{n}+1)r$.

证 由于 n 枚半径为 r 的硬币无重叠地摆放在半径为 R 的圆桌面内,所以这 n 枚硬币覆盖的总面积小于半径为 R 的圆面积. 即有

$$n\pi r^2<\pi R^2,$$

可得

$$\sqrt{n}\,r<R.$$

现设想把 n 枚硬币的半径都扩大一倍，成为半径为 $2r$ 的"镶边硬币"，则这 n 枚"镶边硬币"必可覆盖半径为 $(R-r)$ 的圆面(图 10.4).

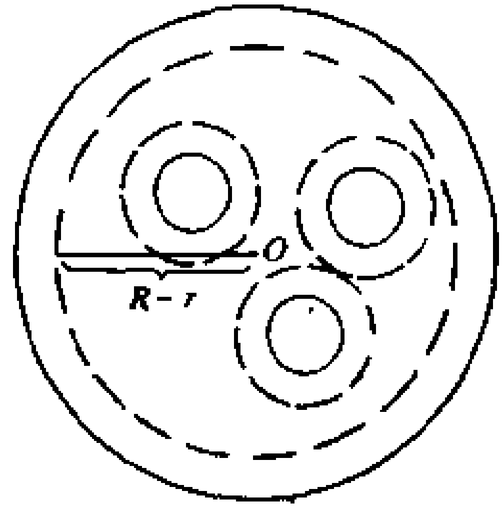

图 10.4

如若不然，设在 $R-r$ 为半径的圆面上至少有一点 P 没被这 n 个半径为 $2r$ 的"镶边硬币"盖住，则点 P 到诸半径为 r 的硬币之间的距离均大于 r. 所以以 P 为中心 r 为半径的圆面可以与其他硬币无重叠地放入半径为 R 的圆桌面内. 这与题设条件相矛盾. 所以有

$$n\pi(2r)^2>\pi(R-r)^2,$$

$$4nr^2>(R-r)^2,$$

因此，$$R<(2\sqrt{n}+1)r.$$

综上所证，有

$$\sqrt{n}\,r<R<(2\sqrt{n}+1)r.$$

例 10.4 在边长为 20×25 的长方形内，任意投放 120 个边长为 1 的正方形纸片. 证明：在长方形内还可以放入一个直径为 1 的圆纸片，它与这 120 个小正方形纸片中的任何一个都不重叠.

证 若直径为 1 的小圆纸片放入矩形 $ABCD$，则圆心 O 应在边长为 19×24 的矩形 $A'B'C'D'$ 内(即从矩形 $ABCD$ 每一边向形内缩进一个宽为 1/2 的长条，见图 10.5).

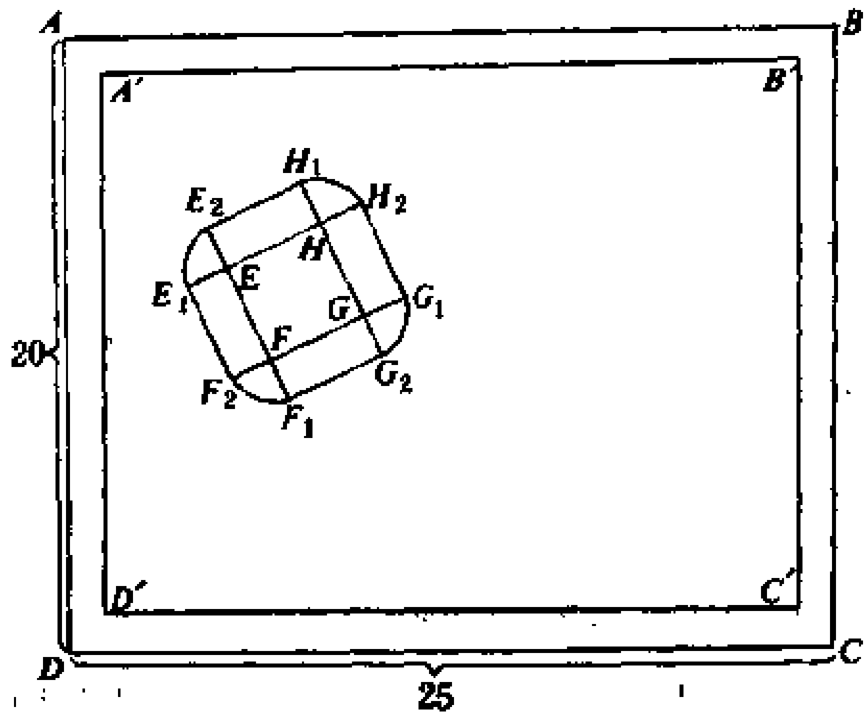

图 10.5

若放入的小圆纸片不与某个正方形 $EHGF$ 重叠，则我们在这个小正方形外镶上宽为 1/2 的边，再在它的四角装上半径为 1/2 的圆弧，这圆弧的圆心角为 90°，这样就得到了一个镶边图形 $E_1E_2H_1H_2G_1G_2F_1F_2$(图 10.4)．这个图形的面积是

$$1+4\times\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{12+\pi}{4}.$$

由于圆纸片不与小正方形重叠，则圆心 O 应在这镶边图形之外．

我们把放入的 120 个单位正方形都按上法镶上边，这时，如果 $ABCD$ 中放不进一个直径为 1 的圆纸片，则表明 $A'B'C'D'$ 已被这 120 个镶边小正方形所覆盖．因此，这 120 个镶边小正方形的面积总和 $S\geqslant 19\times 24$．

但事实上，

$$S=120\times\left(\frac{12+\pi}{4}\right)<120\times\left(\frac{12+3.2}{4}\right)=456=19\times 24,$$

得出矛盾.

所以,在边长为 20×25 的矩形内,当放入 120 个单位正方形之后,还可以无重叠地放入一个直径为 1 的圆纸片.

例 10.5 一条折线包含在边长为 50 的正方形中,正方形的每一点都与折线上某点的距离不大于 1. 求证:折线总长度大于 1248.

证 设折线段为 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$. 对每个线段 A_iA_{i+1} ($i=1,2,\cdots,n-1$),可以如图 10.6 所示,在 A_i,A_{i+1} 处分别以这两点为圆心作半径为 1 的圆,再作这两圆的两条外公切线,形成阴影图形. 其面积为

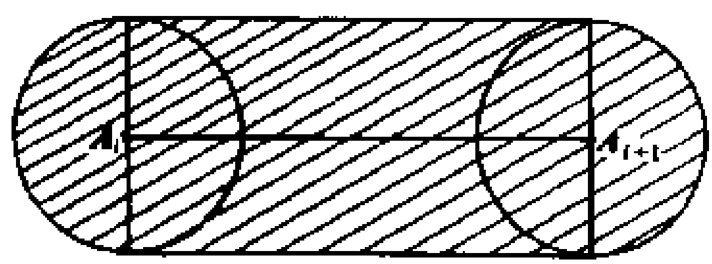

图 10.6

$$2A_iA_{i+1}+\pi.$$

到线段 A_iA_{i+1} 上各点距离不超过 1 的点都在这个阴影图形内.

对每个线段都这样作图,注意,在 A_iA_{i+1} 右端的圆与在 A_iA_{i+1} 左端的圆是重合的.

这样一来,正方形的每一点都要属于对某一线段所作的图形中,即我们对折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 完成上述作图后所形成的"折线带"将覆盖边长为 50 的正方形. 所以,

$$\text{“折线带”的总面积}\geqslant 50^2=2500,$$

即

$$2A_1A_2+2A_2A_3+2A_3A_4+\cdots+2A_{n-1}A_n+\pi\geqslant 2500.$$

但　　　　折线长 $=A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n$，

而　　　　折线长 $\times 2\geqslant 2500-\pi>2496$，

因此　　　折线长 >1248.

说明　本题是应用覆盖来估计折线长的一个应用，其中在每个线段上如图 10.6 构作图形的技巧是很有用的.

例 10.6　设 M 为凸多边形. 用 s 表示可完全覆盖 M 的半径为 1 的圆面的最小个数，用 t 表示直径为 1 的圆心属于 M 的互不相交的圆面的最大个数. 试比较 s 和 t 的大小.

解　取 t 个圆心都在 M 内、直径为 1 的两两不相交的圆面 $K_1,K_2,\cdots,K_t$，将每个圆面的半径增加 1/2，变成半径为 1 的同心圆面 $K_1',K_2',\cdots,K_t'$（图 10.7）. 我们证明：$K_1',K_2',\cdots,K_t'$ 这 t 个半径为 1 的圆面必能盖住多边形 M.

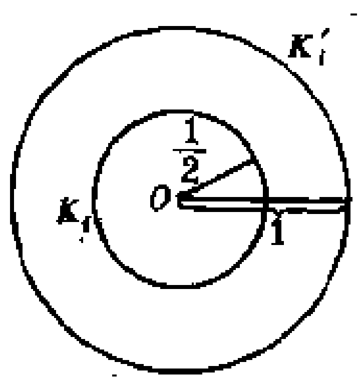

图 10.7

事实上，如若不然，这 t 个半径为 1 的圆面的并 $\bigcup_{i=1}^{t}K_i'$ 不能覆盖 M，则必存在 M 中的某个点 X 不能被 $\bigcup_{i=1}^{t}K_i'$ 盖住，即 $X\notin K_i'$　$(i=1,2,\cdots,t)$.

由于点 X 离 K_i 的距离都大于 1/2，则以 X 为圆心 1 为直径所作的圆 K_0 必不与 K_i 之中的任何一个相交. 这样一

来，直径为1圆心属于 M 的互不相交的圆就有 $t+1$ 个了，与 t 表示直径为1圆心属于 M 的互不相交的圆面的最大个数的条件相矛盾. 因此，$M\subseteq\bigcup_{i=1}^{t}K_i'$ 成立.

但 s 表示可完全覆盖 M 的半径为1的圆面的最小个数，所以 $s\leqslant t$.

例 10.7 在1000米×1000米的广场上有一片松树林，共有4500棵直径为50厘米的松树. 证明：在这个正方形广场上，可以圈出50个10米×20米的矩形，在它们中间没有种一棵松树.

分析 本题与例10.4非常相似，但若照猫画虎，生搬该例的证法却会产生困难. 问题在于，边长为10×20的矩形无法像圆那样各方向等距收缩成一个点. 因此我们要从圆的角度去思索.

证 将松树看成半径为0.25米的圆，则圆心分布在一个999.5米×999.5米的正方形 $A'B'C'D'$ 内，设想用10.5米×20.5米的镶边小矩形去铺满它(图10.8).

设横向共铺 n 个镶边小矩形，则

$$n\times20.5=999.5(\text{米}),$$

解得 $n=48.756\cdots$，取 $n=48$.

设纵向共铺 m 个镶边小矩形，则

$$m\times10.5=999.5(\text{米}),$$

解得 $m=95.19\cdots$，取 $m=95$.

这样，我们在1000米×1000米的正方形中铺满了48×95=4560个镶边小矩形. 松树截面圆心在999.5×999.5

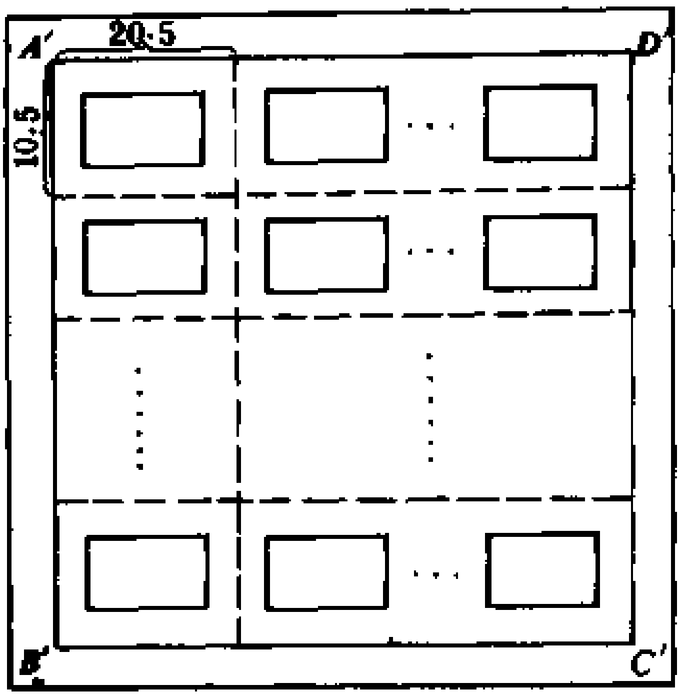

图 10.8

的长方形 $A'B'C'D'$ 内时，每个截面圆顶多占有一个 10 米×20 米的小矩形．因此，这 4500 棵松树至多占有 4500 个小矩形，尚至少有 60 个小矩形中没有树．只要从中选出 50 个 10 米×20 米的小矩形就符合题设要求．

例 10.8 平面上由 $3n$ 个点组成点集 M，其中任两点间的最大距离是 1．证明：在点集 M 中必有两点，它们之间的距离不超过 $\dfrac{4}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$．

证 我们已经证明过(见例 6.9)，一个直径是 1 的有限点集，可以被一个半径为 $\sqrt{3}/2$ 的圆纸片盖住．如图 10.9 所示，点集 M 被包围在 $XAYBX$ 这个“叶形”之中，而这个“叶

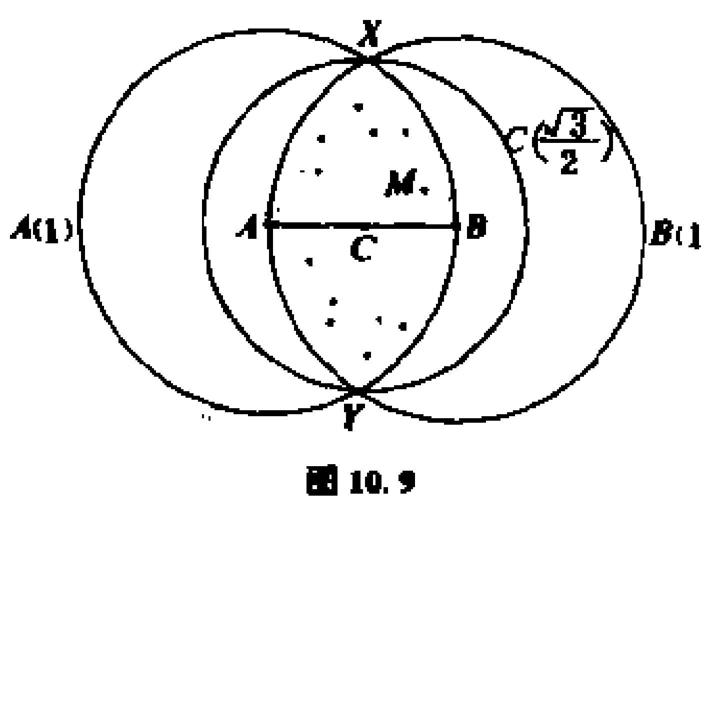

图 10.9

形"又被圆$C(\sqrt{3}/2)$盖住.

在这个基础上,我们应用覆盖的技巧研究本题.令

$$r=\frac{2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}},$$

对M中每一点都作一个半径为r的圆,对圆$C(\sqrt{3}/2)$将半径增加r(图10.10).这样,就变成了$3n$个半径为r的小圆纸片去覆盖圆$C(\sqrt{3}/2+r)$的问题.

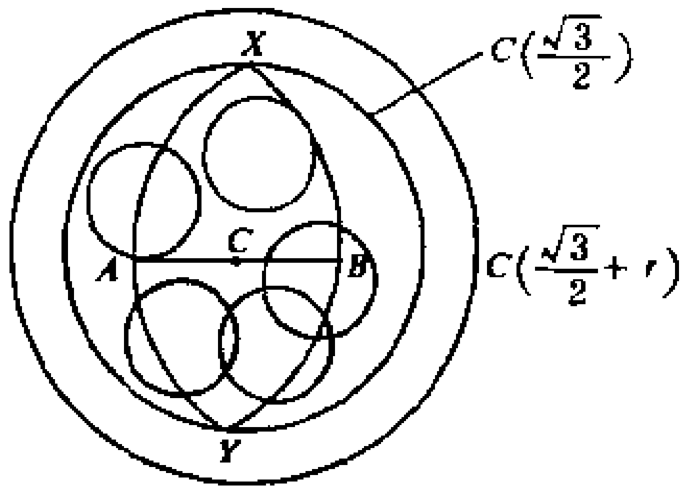

图10.10

易知这$3n$个小圆纸片都在圆$C(\sqrt{3}/2+r)$之中,如果这$3n$个小圆的面积大于圆$C(\sqrt{3}/2+r)$的面积,则至少有两个小圆纸片要发生重叠.如图10.11所示,设圆$P(r)$与$Q(r)$重

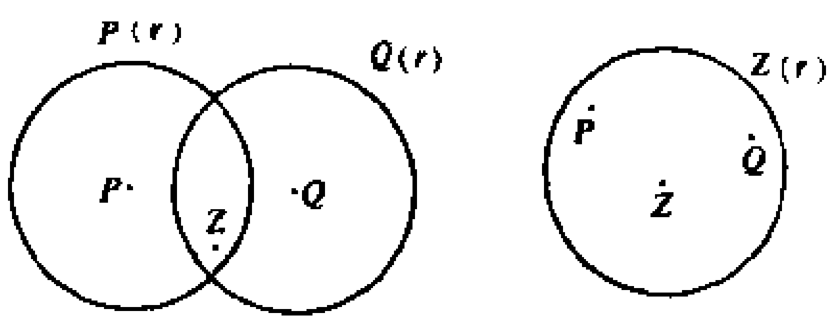

图10.11

叠,Z是重叠处的一点,则$PZ\leqslant r$,$QZ\leqslant r$.这时以Z为圆心半径为r的圆纸片可以盖住P,Q两点.换言之,

$$PQ\leqslant 2r=\frac{4}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}.$$

这样就找到了 M 中的两点 P 和 Q，而这两点的距离不超过 $\dfrac{4}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$.

剩下的问题就是要验证，对任意自然数 n，$3n$ 个半径为 $\dfrac{2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$ 的圆的面积总是大于圆 $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}\right)$ 的面积就可以了. 即验证 $3n\pi r^2>\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+r\right)^2$ 恒成立，其中 n 为自然数，$r=\dfrac{2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$.

事实上，当 n 为自然数，即 $n\geqslant 1$ 时，要使

$$3n\pi r^2>\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+r\right)^2,$$

即

$$3nr^2>r^2+\sqrt{3}r+\frac{3}{4}$$

成立，只须

$$(3n-1)r^2-\sqrt{3}r-\frac{3}{4}>0,$$

$$4(3n-1)r^2-4\sqrt{3}r-3>0,$$

$$r[4(3n-1)r-4\sqrt{3}]-3>0.$$

代入 r 值，即

$$\frac{2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}\left[\frac{4(3n-1)\times 2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}-4\sqrt{3}\right]-3>0,$$

化简得

$$21n-1-6\sqrt{3}\cdot\sqrt{n}>0,$$

即

$$21(\sqrt{n})^2-6\sqrt{3}(\sqrt{n})-1>0\quad(n\geqslant 1).$$

因为 $21(\sqrt{n})^2-6\sqrt{3}(\sqrt{n})-1=0$ 的正根

$$\sqrt{n}=\frac{6\sqrt{3}+\sqrt{108+84}}{42}<\frac{12+14}{42}<1,$$

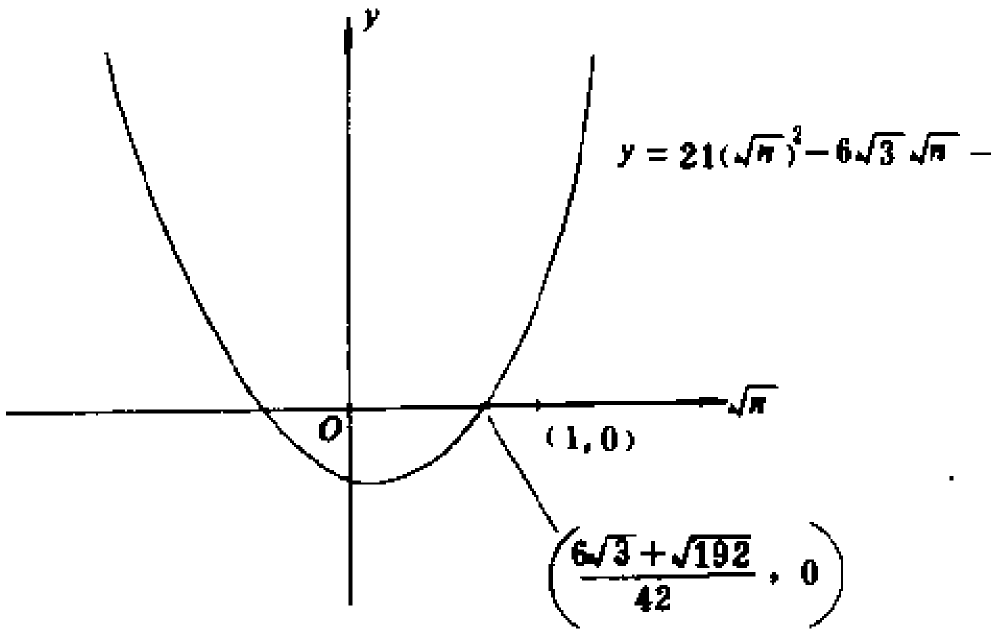

图 10.12

由图 10.12 易知,对 $\sqrt{n}\geqslant 1$,

$$21(\sqrt{n})^2-6\sqrt{3}(\sqrt{n})-1>0$$

恒成立.所以对任意自然数 n,当 $r=\dfrac{2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$ 时,

$$3n\pi r^2>\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+r\right)^2$$

恒成立.这样,就完成了我们的证明.

11

维他利型问题

作为面积重叠原理的应用，本节我们来研究维他利(Vitali)型问题. 在给出定义之前，先看几个例子.

例 11.1 设平面上有有限个圆纸片覆盖了面积为 S 的区域. 求证：从中可以选出若干个互不相交的圆纸片，使之覆盖面积不小于 $S/9$.

证 若这有限个圆纸片彼此互不重叠，则命题显然成立.

现在讨论这有限个圆纸片有重叠的情况. 由于只有有限个圆纸片，从中可以选取一个半径最大的圆纸片(若半径最大的圆纸片不只一个，任取其中一个即可). 设其圆心为 O_1，半径为 r_1，则所有与$\odot O_1$ 重叠的圆纸片必在以 O_1

为中心 $3r_1$ 为半径的圆内. 换言之，设$\odot O_1$ 及所有与$\odot O_1$ 相重叠的圆纸片盖住的面积为 S_1(图 11.1 中的阴影部分)，则有 $S_1\leqslant 9\pi r_1^2$，即

$$\pi r_1^2\geqslant S_1/9.$$

剩下的圆纸片都与$\odot O_1$ 不相重叠. 从中再取一个半径最大的圆纸片$\odot O_2$，设其半径为 r_2，同理可以估算，$\odot O_2$ 和与它相重叠的圆纸片所覆盖的面积 $S_2\leqslant 9\pi r_2^2$，即

$$\pi r_2^2\geqslant S_2/9.$$

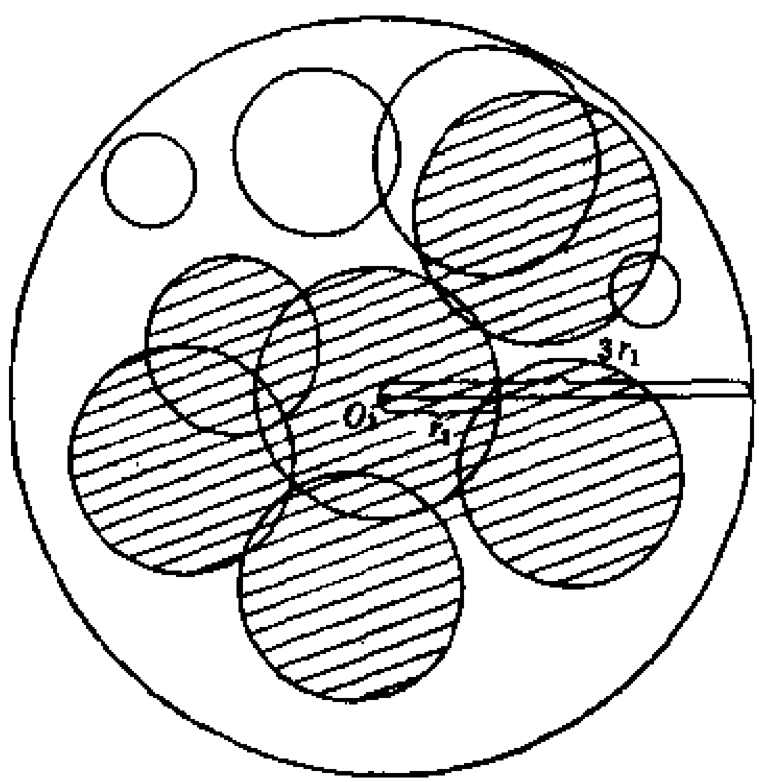

图 11.1

依此步骤进行下去，直到每个圆纸片都取到某一类为止. 由于是有限张圆纸片，这个过程总会到第 k 步停止. 记这样可以依次取到的圆纸片为$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$，…，$\odot O_k$.

由于$\odot O_i$ 和与$\odot O_i$ 重叠的圆覆盖的面积为 S_i，则 S_i

$\leqslant 9\pi r_i^2$ 或

$$\pi r_i^2 \geqslant S_i/9 \quad (i=1,2,\cdots,k).$$

显然，$\odot O_1, \odot O_2, \cdots, \odot O_k$ 彼此两两不相重叠，且

$$\pi r_1^2 \geqslant \frac{S_1}{9}, \pi r_2^2 \geqslant \frac{S_2}{9}, \pi r_3^2 \geqslant \frac{S_3}{9}, \cdots\cdots, \pi r_k^2 \geqslant \frac{S_k}{9},$$

两边分别相加得

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \cdots + \pi r_k^2 \geqslant \frac{1}{9}(S_1 + S_2 + \cdots + S_k).$$

显然有 $\qquad S_1 + S_2 + \cdots + S_k \geqslant S,$

所以 $\qquad \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \cdots + \pi r_k^2 \geqslant \frac{1}{9}S.$

这就证明了我们的结论.

说明 在本题的证明中，选取半径最大的圆 O_1（其半径为 r_1），作一个半径为 $3r_1$ 的圆，从而把凡与$\odot O_1$ 相交的圆都囊括在这个半径为 $3r_1$ 的圆内. 这种技巧实际上相当于在初始的半径为 r_1 的圆外加了厚为 $2r_1$ 的一个"保护层". 如果初始的图形不是圆，那么它添加"保护层"后的形状也会因题而异，大不相同.

例 11.2 设平而上有有限个正三角形纸片覆盖了面积为 S 的区域. 求证：可以从中取出若干个互不重叠的正三角形纸片，使其覆盖的而积不小于

$$\frac{S}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}.$$

分析 题型与例 11.1 类似(都是维他利型问题)，因此可以按例 11.1 的思路去思考，这是共性；但由于图形不同，因此添加的"保护层"也不同.

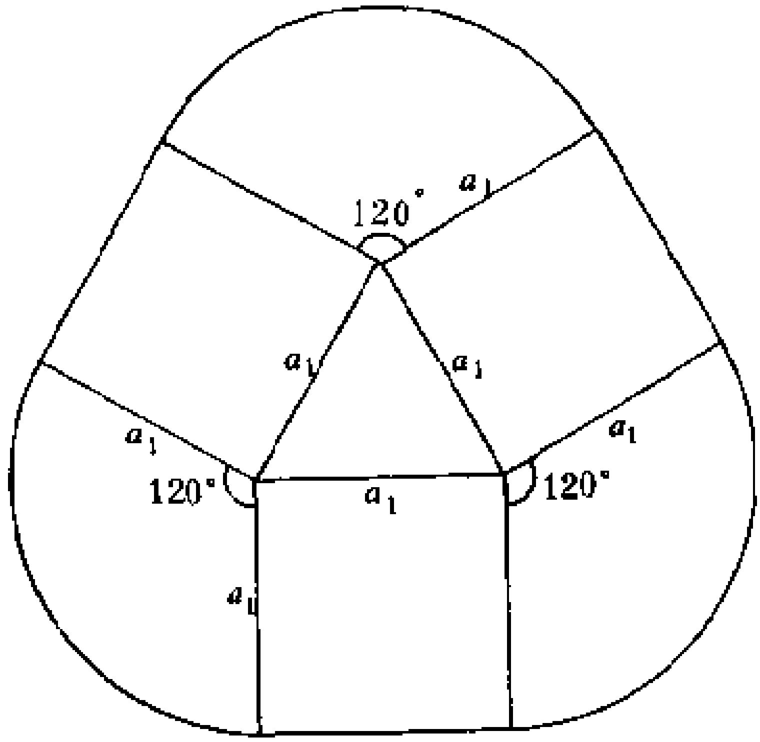

图 11.2

证 在这有限个正三角形纸片中，一定存在一个边长最大(即面积最大)的正三角形纸片$\triangle_1$，设$\triangle_1$的边长为a_1，如图11.2所示，与$\triangle_1$相重叠的所有正三角形纸片都在图中所画的范围内. 这个加“保护层”后的图形的面积为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2+3a_1^2+\pi a_1^2.$$

设$\triangle_1$及与$\triangle_1$重叠的正三角形纸片覆盖的总面积为S_1，则

$$S_1\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2+3a_1^2+\pi a_1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2\left(1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi\right),$$

$$\therefore\quad S_{\triangle_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2\geqslant\frac{S_1}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}.$$

除去$\triangle_1$及与$\triangle_1$重叠的正三角形纸片，在所余的正三角

形纸片中取边长最大的一个为$\triangle_2$，依同样做法可得

$$S_{\triangle_2} \geqslant \frac{S_2}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi},$$

其中S_2是$\triangle_2$及与$\triangle_2$重叠的正三角形纸片覆盖的总面积.

如此继续下去，至第k步全部取完，这样便取出彼此不相交的k个正三角形纸片系列：

$$\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \cdots, \triangle_k.$$

其中$\triangle_i$及与$\triangle_i$重叠的所有正三角形纸片覆盖的总面积为S_i $(i=1,2,\cdots,k)$. 由不等式组

$$S_{\triangle_1} \geqslant \frac{S_1}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi},$$

$$S_{\triangle_2} \geqslant \frac{S_2}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{\triangle_k} \geqslant \frac{S_k}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}$$

相加得

$$S_{\triangle_1}+S_{\triangle_2}+\cdots+S_{\triangle_k} \geqslant \frac{S_1+S_2+\cdots+S_k}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi},$$

但$S_1+S_2+\cdots+S_k \geqslant S$，故有

$$S_{\triangle_1}+S_{\triangle_2}+\cdots+S_{\triangle_k} \geqslant \frac{S}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}.$$

例 11.3 设平面上有有限个正三角形纸片覆盖了面积

为 S 的区域. 求证：可以从中取出若干个互不重叠的正三角形纸片，使其覆盖面积大于 $S/16$.

证 本题是例 11.2 的直接推论. 依例 11.2 的方法，可以挑出互不重叠的正三角形纸片系列：

$$\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_k,$$

使得

$$S_{\triangle_1}+S_{\triangle_2}+\cdots+S_{\triangle_k} \geqslant \frac{S}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}.$$

但 $1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi<16$,

$$\therefore \quad S_{\triangle_1}+S_{\triangle_2}+\cdots+S_{\triangle_k} \geqslant \frac{S}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}>\frac{S}{16}.$$

例 11.4 设平面上有有限个正方形纸片覆盖了面积为 S 的区域. 求证：可以从中取出若干个互不相交的正方形纸片，使其覆盖总面积不小于

$$\frac{S}{1+2\pi+4\sqrt{2}}.$$

证 在这有限个正方形纸片中，可以取出一个边长最大的（当有几个正方形都达到最大边长时，任取其中之一即可）.

设此正方形边长为 a_1，其面积 $A_1=a_1^2$. 其余的与 A_1 相交的正方形一定在图 11.3 所画的范围内.

设在这个范围内所有与 A_1 相交的正方形纸片以及 A_1 所覆盖的面积为 S_1，则

$$S_1 \leqslant (1+2\pi+4\sqrt{2})a_1^2=(1+2\pi+4\sqrt{2})A_1.$$

取出正方形 A_1 以后，采用上述相同的办法再取所余正

方形纸片中边长最大者.设其面积 $A_2=a_2^2$. 设 A_2 及与 A_2 相交的正方形覆盖的面积为 S_2，则

$$S_2\leqslant(1+2\pi+4\sqrt{2})A_2.$$

如此继续下去，至第 k 步将全部正方形纸片取毕，得到一个彼此不相重叠的正方形纸片序列：

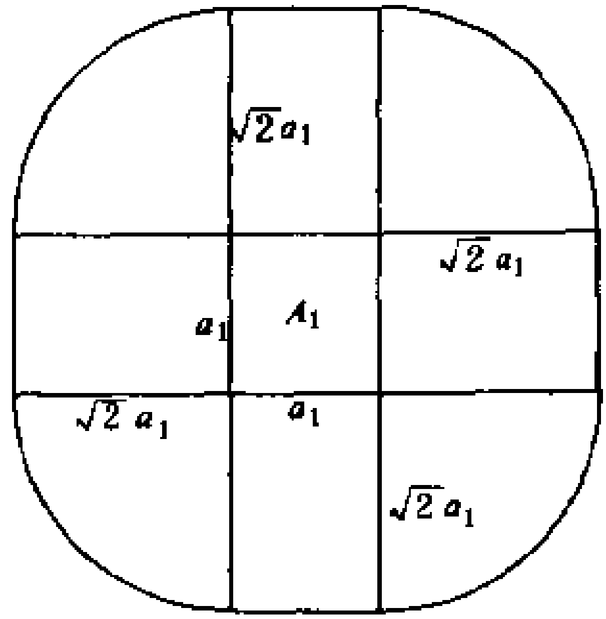

图 11.3

$$A_1,A_2,\cdots,A_k.$$

设 A_k 及与 A_k 重叠的正方形纸片覆盖的面积为 S_k，显然，

$$S_1+S_2+\cdots+S_k\geqslant S,$$

$$\therefore\quad A_1+A_2+\cdots+A_k\geqslant\frac{S_1+S_2+\cdots+S_k}{1+2\pi+4\sqrt{2}}$$

$$\geqslant\frac{S}{1+2\pi+4\sqrt{2}}.$$

说明 本题结果也可适当简化. 因为 $1+2\pi+4\sqrt{2}<12$，所以本题可以简化为：在平面上有有限个正方形纸片覆盖了面积为 S 的区域. 求证：可以从中取出若干个互不相交的正方形纸片，使其覆盖的总面积大于 $S/12$.

上面诸例都属"维他利型"问题. 因为圆、正三角形、正方形等每类都是相似图形，所以问题的提法可以更一般化.

维他利型问题 平面上有有限多个形状相似的图形，它

们覆盖了面积为 S 的区域.求证:存在实数 $\alpha(0<\alpha<1$,它仅与相似形的形状有关),使得总可以从上述覆盖图形中选出若干个互不相交的图形,其覆盖面积 $\geqslant \alpha S$.

显见,对例 11.1 而言,$\alpha=\frac{1}{9}$;

对例 11.2 而言,$\alpha=\dfrac{1}{1+4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}$;

对例 11.4 而言,$\alpha=\dfrac{1}{1+2\pi+4\sqrt{2}}$.

下面的问题留给读者思索:

在平面上有有限个正六边形覆盖了面积为 S 的区域.求证:存在 $0<\alpha<1$,使得可以从上述的正六边形中选出若干个互不相交的正六边形来,其覆盖面积 $\geqslant \alpha S$.并试确定 α 的值.

$$\left(答:\alpha=\frac{1}{\frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}+1}.\right)$$

作为面积重叠原理的应用,可以对例 11.1 作更强条件的研究.

例 11.5 平面上给出一个由有限多个单位圆所组成的集合,这些圆的并集的面积为 S.证明:存在一个由互不相交的圆组成的子集,这个子集中圆的并集的面积大于 $2S/9$.

本题是第 22 届国际数学奥林匹克的预选试题,它的证明需要较高的技巧.先证如下的引理.

引理 对于一个平面区域 S(其面积也用 S 表示),如果自然数 k 适合 $k-1<\frac{S}{14}<k$,那么一定可在 S 中找到 k 个点,

使得其中任意两点间的距离都大于 4.

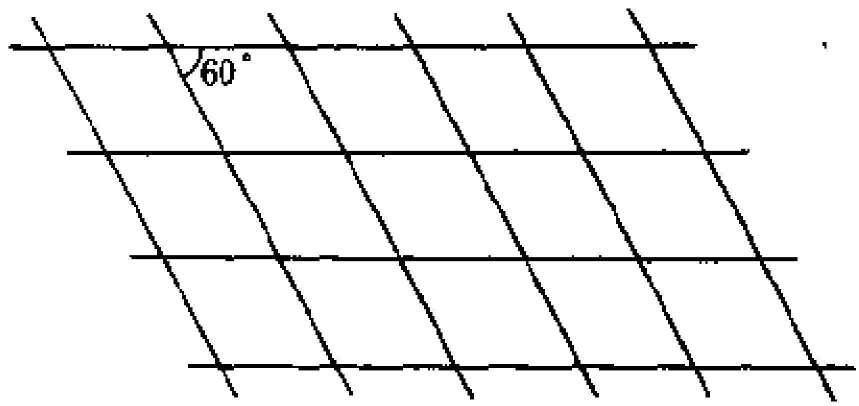

图 11.4

引理的证明 用两组夹角为 60°,相距都是 $\sqrt[4]{147}$ 个单位的平行线去分割 S 所在的平面,把平面分成无穷多个面积为 14 个单位的全等菱形(图 11.4). 把所有菱形的每一个顶点称为格点,显然,任何两个格点间的距离都不小于菱形的边长. 而菱形的边长为

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{147}=\sqrt[4]{\frac{16\times49}{3}}>\sqrt[4]{\frac{16\times48}{3}}=\sqrt[4]{16\times16}=4.$$

总有若干个菱形其中含有区域 S 中的点. 我们把一切含有 S 中的点的菱形剪下来平行移动,让它们重叠在一起,成为一个菱形. 实际上,这个菱形是由若干层的菱形堆起来的. 在这个菱形的每一点上,作一直线与菱形的表面垂直,这直线必然同每一层的菱形有一个交点. 这些交点中,有的可能是原来 S 中的点,有的可能不是. 但是,我们一定能在菱形上至少找出一点来,使得过这一点所作垂线与各层的交点中,至少有 k 个交点是 S 中的点. 不然的话,若在菱形的每一点上作垂线,它们与各层菱形的交点中至多只有 $k-1$ 个点属于 S,那

么会有$S\leqslant(k-1)\times$菱形的面积$=14(k-1)$，而这与所取菱形时k的取法不合.

现在再把叠起来的菱形平行推移，让它们重新回到原来的位置上，区域S又重新被拼起来了.前面所断言的存在k个S中的点，现在回到了k个不同的菱形中，并且很显然，它们在各自的菱形中的相对位置是相同的，而且其中任何两点之间的距离都大于4.这是因为只要我们平行移动原来的两组平行线，使其中某一格点落在这k个点中的一个上面，那么其余的点必然会落在格点上.前面已经指出，任何两个格点间的距离都大于4.这样就证明了上述引理.

有了上述预备知识，我们就可以介绍例11.5的证明了.

证 设所给单位圆的并集为S，其面积也记为S.由上述引理可知，对于适合$k-1<\frac{S}{14}\leqslant k$的正整数，总可以在$S$中找到$k$个点，其任何两点间的距离均大于4.这$k$个点既然属于$S$，因此，每一点必属于某一个单位圆.很明显，这些单位圆是不会彼此相交的，否则与k个点两两之间的距离大于4矛盾.这k个不相交的单位圆的总面积是$k\pi$.按照k的定义，我们有

$$k\pi\geqslant\frac{S}{14}\pi>\frac{3.14S}{14}>0.224S>0.\dot{2}S=\frac{2}{9}S.$$

这就是我们所要证明的结论.

说明 如果在引理证明中，改用边长为4夹角为60°的菱形(其面积为$8\sqrt{3}$)，则例11.5的结果$\frac{2S}{9}$将变为$\frac{\pi S}{8\sqrt{3}}$.

在例11.5引理的证明中，我们实际上已经研究了多层重

叠的问题.

定理 11.1 设面积为 S 的图形 G 中,包含有图形 G_1, $G_2,G_3,\cdots,G_n$,它们的面积分别为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$. 如果 G 的每一点都至多被 G_i 中的 k 个所覆盖,则

$$S_1+S_2+\cdots+S_n\leqslant kS.$$

推论 将面积为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的 n 张纸片 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 放入面积为 S 的区域 G 内,若 $S_1+S_2+\cdots+S_n>kS$,则 G 中至少存在一点被 $k+1$ 个 G_i 所覆盖.

例 11.6 在半径为 16 的圆中有 650 个点. 证明:能找到内半径为 2 外半径为 3 的一个圆环,在环中覆盖了不少于 10 个已知点.

分析 在每个已知点都作一个内半径为 2,外半径为 3 的圆环. 这样总计可画出 650 个圆环. 我们证明,它们之中必定能找到不少于 10 个是相交于同一点的.

显然,这 650 个圆环面分布在半径为 16+3=19 的圆内. 这个圆的面积为 $19^2\pi=361\pi$. 每个圆环面面积为 5π,650 个圆环面面积为 $650\times5\pi=3250\pi$.

如果半径为 19 的大圆内的每一个点被不多于 9 个圆环面所覆盖,则依定理 11.1,有

$$3250\pi\leqslant9\times361\pi=3249\pi,$$

得出矛盾. 因此,至少存在一个点 M 被不少于 10 个圆环面所覆盖.

不妨设点 M 正是以 $O_1,O_2,\cdots,O_{10}$这 10 个点为中心的内半径为 2,外半径为 3 的 10 个圆环面的公共点,则有

$$2\leqslant MO_1\leqslant 3,\quad 2\leqslant MO_2\leqslant 3,$$
$$2\leqslant MO_3\leqslant 3,\quad 2\leqslant MO_4\leqslant 3,$$
$$2\leqslant MO_5\leqslant 3,\quad 2\leqslant MO_6\leqslant 3,$$
$$2\leqslant MO_7\leqslant 3,\quad 2\leqslant MO_8\leqslant 3,$$
$$2\leqslant MO_9\leqslant 3,\quad 2\leqslant MO_{10}\leqslant 3.$$

这 10 个式子表明，$O_1,O_2,\cdots,O_{10}$这 10 个点恰分布在以 M 为中心，内半径为 2 外半径为 3 的圆环面内. 这样，我们就找到了一个位置，放置内半径为 2 外半径为 3 的圆环面 M，它覆盖了已知的 650 个点中的不少于 10 个点.

证 见以上分析，此处从略.

上述各例中的证明技巧的构思十分精美. 下面，应用例 11.5 中引理的证明方法再证明一个重要的结论.

例 11.7 假设有一个平面区域 R，其面积大于 n 个单位（n 是正整数）. 试证：不论 R 是在平面上什么位置，总可以把它平移到一个位置，使其至少盖住 $n+1$ 个格点.

证 如果 a 和 b 是整数，则 $x=a$ 和 $y=b$ 所表示的直线称为“格子线”，因为它们的交点是格子点. 我们沿每条格子线把平面剪开，分为单位正方形，从而区域 R 也被剪成了若干块.

假设区域 R 是涂上红色以示区别的，而平面的其余部分均未涂色. 这样，有些单位正方形是全红色的，也有的可能是部分红色的，而另一些则是完全未涂色的.

让我们把凡是带上一点红色的所有正方形不加转动地、一个叠一个地堆在某个远处的正方形 T 处. 现在考虑底面 T

的任一点 K(图 11.5). 因为在正方形 T 上是一层一层堆叠起来的，所以每一层都有一点盖住点 K：有时 K 出现在该层的红点下，有时出现在未涂色的点下. 我们关心的是：在 K 上方的“点柱”中，有多少个点是红色的？

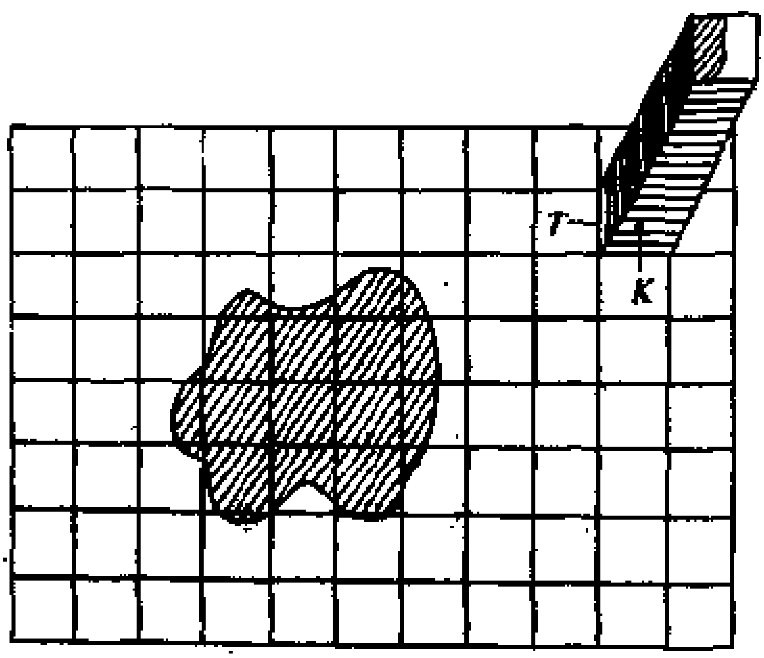

图 11.5

我们断言，底面 T 中必定有一点至少被 $n+1$ 个不同层的红点盖住. 如若不然，底面 T 中每一点都至多被 n 个不同层的红点盖住. 这时红点的总面积不会超过 n 个单位，与已知区域 R 面积大于 n 个单位的条件相矛盾. 因此，T 上必有一点 X，至少被红点盖住了 $n+1$ 次.

现在拿一根针垂直扎穿点 X 上所有各层，这就在每一层中标出了一个点，这种点中至少有 $n+1$ 个红点. 记它们为 $X_1, X_2, \cdots, X_m$，这里的 m 至少是 $n+1$. 最后把所有的小正方形移回原来的位置，重新拼成区域 R.

既然各点 X_i 在其正方形中都出现在同样的相对位置上，

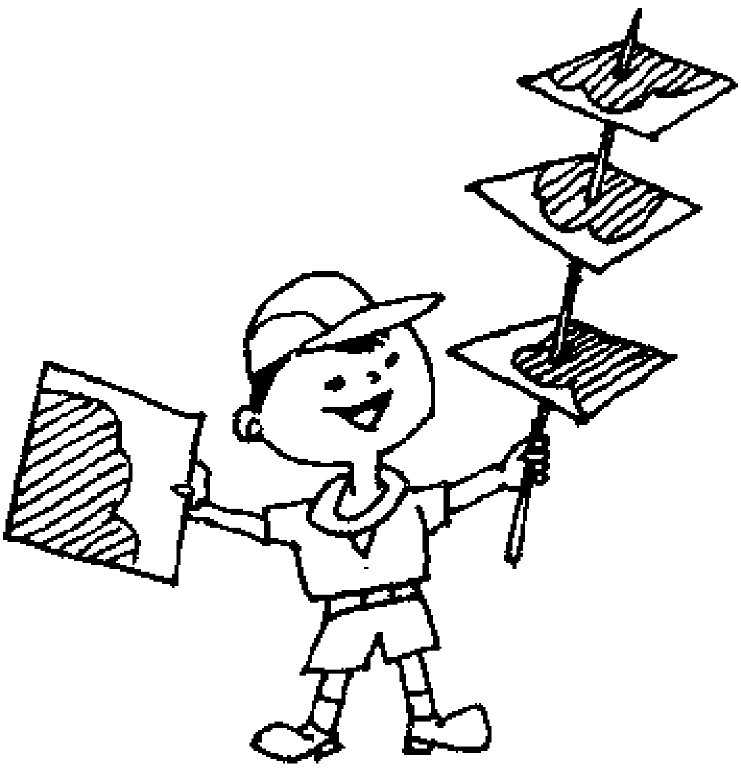

图 11.6

所以 R 的任何平移，如果使一个 X_i 移动到一个格子点，也将使其余的 X_i 移到相应的格子点．但是各 X_i 都是红点，因而是 R 的点，它们至少有 $n+1$ 个．

因此，这样的平移就把 R 变到一个至少盖住 $n+1$ 个格子点的位置上．证毕．

说明 这个例题告诉我们，如果区域 G 面积为 π 个单位，则 G 至少盖住四个格子点．特别是平移重叠的构思技巧，很值得认真体会、过细研究．

12

再谈[illegible]

用若干个纸片嵌入一个图形中，可能发生重叠，引出了面积重叠原理．同样，用若干条线段覆盖在一条确定的线段上，用半径相同的弧段覆盖在相同半径的圆周上，都可能发生重叠．因此也有相应的重叠原理．

线段重叠原理　如果在长为 1 的线段上放置某些线段，它们的长度之和大于 1，则至少有两条线段具有公共点．

圆弧段重叠原理　如果在半径为 1 的圆上放置某些小段圆弧，它们长度之和大于 2π，则至少有两段弧有公共点．

在应用上述重叠原理时，投影、坐标分解是常用的技巧．下面我们通过一些例题来介绍这些原理的有趣的应用．

例 12.1 在长为 1 的线段上用颜色染出某些小线段，使得任两个染色点之间的距离不等于 0.1. 证明：这些染色小线段的长度总和不超过 0.5.

证 我们分长为 1 的线段为 10 个长为 0.1 的线段，因为两个着色点的距离不能等于 0.1，则在将这 10 个小线段依次序重叠在一起时(见图 12.1，其中"•"代表色点，"×"代表非色点)，相邻两个线段不能投影于同一点. 所以任一点不能是多于五个着色点的投影. 因此着色线段总和不会超过五个长为 0.1 的小线段，即不会超过 0.5.

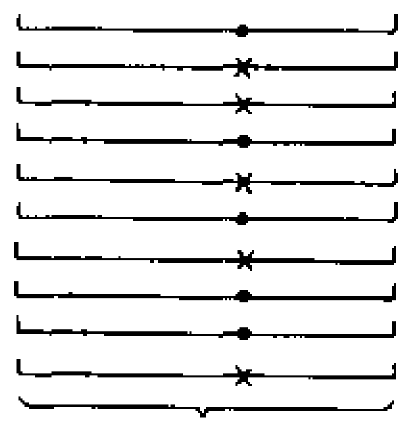
0.1

图 12.1

例 12.2 在长度为 1 的线段上，放置若干条线段，把它完全覆盖住. 证明：在这些线段中总可以选出某些线段，使得它们仍能覆盖原来的线段，且它们的长度之和不超过 2.

分析 在若干条线段覆盖了长度为 1 的线段时，可能产生重叠. 这样，我们若能设计一种办法，从中挑出这些线段的一个子部分，仍能覆盖长为 1 的线段，且子部分中线段总长度不超过 2，问题即得证. 因此，关键在于设计一种选择这个子部分线段的办法.

证 在所有盖住长为 1 的线段 AB 左端点 A 的线段中，选取其右端点在最右边的线段，并且用 I_1 表示这个线段(图 12.2). 在所有盖住 I_1 右端点的线段中，选其右端点在最右边的线段，记为 I_2. 如此选下去，在选取线段 I_k 之后，在所有盖

住 I_k 右端点的线段中选出其右端点在最右边的线段 I_{k+1} 来，……直到选出的 I_n 盖住 B 点时停止. 这样一来，所选出的 n 个线段完全覆盖了原来的线段 AB.

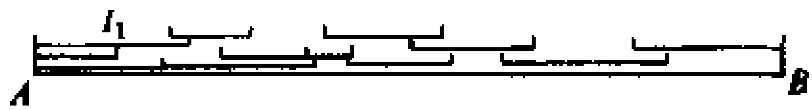

图 12.2

下面证明，所选出的 n 条线段长度之和不超过 2. 线段 I_{k+2} 与 I_k 一定没有公共点，如若不然，设 I_{k+2} 与 I_k 有公共点时，我们将选择 I_{k+2} 来代替 I_{k+1}，这与 I_{k+1} 的选法相矛盾. 因此，原来长度为 1 的线段 AB 的每一点被不多于两条小线段 I_k 所覆盖，所以所选取的这些小线段的长度总和不会超过 AB 长的 2 倍，即不超过 2.

例 12.3 在边长为 1 的正方形内放置了某些圆，它们的周长之和等于 10. 证明：可以找到一条直线至少与这些圆中的四个相交.

分析 要找与至少四个圆相交的直线，可以在任意方向去找. 由于题设给出边长为 1 的正方形，所以可以在垂直正方形边的特殊方向上去找，这样就变成了圆在正方形一边上投影的问题. 进一步也就是长为 1 的线段被若干条小线段覆盖的问题，故可利用线段重叠原理求解.

证 作所有已知圆中平行于 AB 边的直径，将所有已知圆都向正方形 $ABCD$ 的边 AB 上投影(图 12.3). 长为 l 的圆周，其投影为 l/π 的线段. 所以全部已知圆直径投影的长度总和等于 $10/\pi$.

这就相当于总长度为$10/\pi$的若干条小线段覆盖在长为1的线段 AB 上. 因为 $10/\pi>3=3AB$，所以，在线段 AB 上至少有一点属于至少四个圆的直径的投影. 通过这个点引 AB 的垂线，则这条垂线至少与四个圆的直径相交，因而这条垂线与至少四个圆相交.

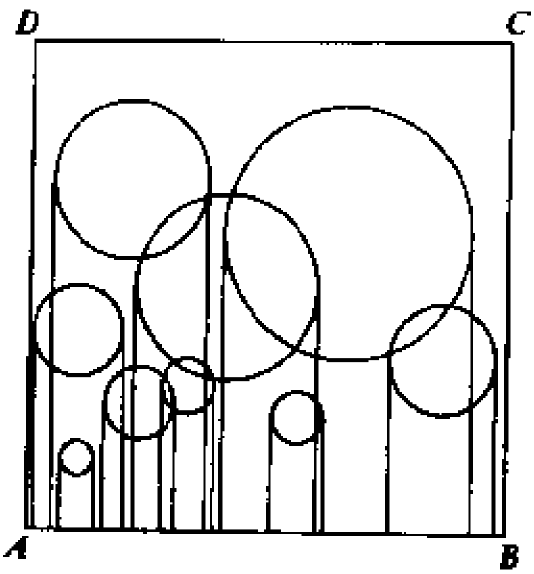

图 12.3

例 12.4 半径为 n 的圆内放置了 $4n$ 条长为 1 的线段. 证明：可以引与给定的直线 l 平行或者垂直的直线，它至少与两条已知线段相交.

证 设 l_1 是垂直于 l 的任意直线. 我们记第 i 个长为 1 的线段 m_i 在直线 l_1 和 l 上的射影长分别为 a_i 与 b_i(图12.4). 因为每条小线段长为 1，则 $a_i+b_i\geqslant 1$. 所以

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{4n})+(b_1+b_2+b_3\cdots+b_{4n})\geqslant 4n.$$

为确定起见，不妨设

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{4n}\geqslant b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{4n},$$

则 $$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{4n}\geqslant 2n.$$

因为全部已知线段都在半径为 n 的圆的内部，它们在 l_1 上的投影都落在长为 $2n$ 的开线段上. 如果这些线段在直线 l_1 上的射影没有重叠，则成立不等式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{4n}<2n.$$

但现在

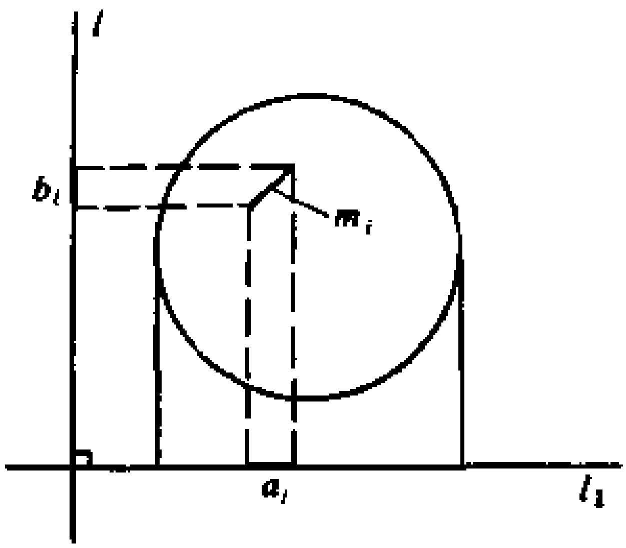

图 12.4

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{4n}\geqslant 2n$，

所以这些小线段 m_i 在 l_1 上的投影线段有重叠，即在 l_1 上存在一点，它至少是两个已知线段上点的投影. 通过这个点作 l_1 的垂线，它至少与两条已知的小线段相交.

例 12.5 两个同心圆盘的每一个都分为 1985 个相等的扇形. 在每个圆盘上以任意方式在 200 个扇形上染上同一种颜色. 一个圆盘叠在另一个上旋转角度为 $\frac{360°}{1985}$ 的倍数. 证明：至少存在 80 个位置，在这些位置上重合的染色扇形不多于 20 组.

证 为了表示所有可能的位置，我们取 1985 个像第二个圆盘那样染色的圆盘，把它们都当成两个圆盘中的第二个，并假设它们放在第一个圆盘上边，使得它们取到所有可能的位置. 这时，在第一个圆盘的每一个染色扇形上面都分布着 200 个染色扇形，总计有 200^2 组重合的染色扇形。假设第二个圆盘有 n 个位置，在这些位置上相重合的染色扇形不少于 21 组. 这时染色扇形重合数不少于 $21n$. 因此 $21n\leqslant 200^2$，即 $n\leqslant 1904.8$，因为 n 是整数，则 $n\leqslant 1904$. 因而至少有 $1985-1904=81$ 个位置，在这些位置上重合的染色扇形不超过 20 组.

例 12.6 半径为 1 的圆中画了某些弦，证明：如果每条

直径都与不多于 k 条弦相交，则所画的这些弦长之和小于 $k\pi$.

证 假设这些弦长之和不小于 $k\pi$，我们证明：能找到一条直径，至少交 $k+1$ 条弦.

因为系着弦的弧长大于此弦长，则系着所有已知弦的弧长总和大于 $k\pi$.

如果我们对这些弧再添加上它们关于圆心呈中心对称的那些弧，则所考察的弧长之和将大于 $2k\pi$. 由重叠原理知，可以找到一点，它至少被这些弧中的 $k+1$ 条所覆盖. 这时通过这点引直径，它至少要交 $k+1$ 条弦.

这便导致与题设条件的矛盾，所以所画的这些弦长之和小于 $k\pi$.

例 12.7 给出两个圆周，每个圆周长为 100cm. 在其中一个圆周上标出 100 个点，在另一个圆周上标出若干段弧，弧长的和小于 1cm. 证明：这两个圆能够这样重合，使得标出的点一个也不落在标出的弧上.

证 我们把两圆周重合，让标定弧的圆周固定不动，转动标定点的圆周. 涂色笔固定在不动圆的某一定点处，用它在转动圆周上涂色. 设标定的弧为 n 段，分别记为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$. 我们规定：当点 P_1 进入弧 l_1 至离开弧 l_1 的过程中，落下色笔涂色，…，当 P_1 进入弧 l_n 并离开弧 l_n 的过程中涂色. 这样操作完毕，在动圆周上将有 n 段涂色的弧，其长度之和小于 1cm. 其次，再考虑点 P_2. 当 P_2 进入弧 l_1 至离开弧 l_1 时，色笔在动圆周上涂色，…，直至第 n 段弧都是如此涂色. 接着对 P_3, P_4,

$\cdots, P_{100}$诸点都进行如上的同样操作．其最终结果如下：在动圆周上有 100 组涂色圆弧，每组弧长之和小于 1cm．因此，在动圆周上全部涂色圆弧长之和小于 100cm．所以，在动圆周上必有没着色的地方．在动圆周上，弧被着色意味着：若任意标定点进入标定弧内，该标定点一定进入某段涂色弧内；而有未着色点存在，则意味着相应情况下任何标定点不在任何标定弧上．

例 12.8 给出两个同样的圆周，在它们的每一个上均标出 k 条弧，使每一条弧所对的角小于$\dfrac{180^\circ}{k^2-k+1}$．并且圆周能够这样重合：一个圆周上的标出弧与另一个圆周的标出弧重合．证明：这二圆周也可以这样重合：全部标出的弧落在没有标出弧的地方．

证 像例 12.7 的构想一样，仍设想一圆周固定，另一圆周沿顺时针方向转动．开始位置这样选择：动圆圆周上的第 1 段弧与定圆圆周的第 1 段弧首尾相连，且没有公共内点．这时开始转动，并按下面的规定进行涂色操作：先考虑动圆的第 1 段弧 φ_1，从动圆弧 φ_1 进入定圆弧 φ_2 直到离开定圆弧 φ_2 的过程中，就落笔在动圆上涂色，其涂色弧的角度值为 $\varphi_1+\varphi_2$，动圆弧 φ_1 进入定圆弧 $\varphi_3, \varphi_4, \cdots, \varphi_k$ 直到离开它们时都同样涂色．所有涂色弧的角度值之和为

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_1+\varphi_2)+(\varphi_1+\varphi_3)+\cdots+(\varphi_1+\varphi_k)\\
&=(k-2)\varphi_1+(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k).
\end{aligned}
$$

接着，考虑动圆的第 2 段弧，第 3 段弧，…，直到第 k 段弧的情形，都按上述操作处理．于是，每一情形涂色弧的角度值

之和分别为下列各值：

$$(k-2)\varphi_2+(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(k-2)\varphi_k+(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k),$$

那么动圆的 k 段弧都进行涂色操作之后，在动圆上被涂色的弧的角度值之和为

$$\begin{aligned}&(k-2)(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k)+k(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k)\\&=2(k-1)(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k)\\&<2(k-1)\cdot k\cdot\frac{180^\circ}{k^2-k+1}\\&=\frac{k^2-k}{k^2-k+1}\times 360^\circ<360^\circ.\end{aligned}$$

因此，动圆周上还有没涂色的地方．这就意味着还有这样的情况出现：动圆上任何标定弧不与定圆上的任何标定弧相交．

13

覆盖极值问题

在覆盖问题中，经常会遇到一些极值性的问题. 我们举例讨论如下.

例 13.1 用三个半径相同的圆纸片完全覆盖一个单位正方形纸片，求所用圆纸片的半径最小是多少？

分析 如图 13.1 所示，要用三个半径相等的圆纸片覆盖单位正方形 $ABCD$，那么至少有一个圆纸片要盖住这个正方形四个顶点 A，B，C，D 中的两个. 因要求圆纸片的半径最小，所以盖住的两个顶点不取正方形对角线上的两个顶点，而应取正方形相邻的两个顶点. 不妨设圆纸片半径最小，AB 应为圆中的弦，圆心 E 应在 AB 的中垂线上.

设 $EF=x$，连 AE 交 BC 于 H. 过 H 作

$HG /\!/ AB$ 交 AD 于 G. 则$\odot E$ 应盖住矩形 $ABHG$. 又作 EF 的反向延长线交 GH 于 N, 交 CD 于 M. 这样, 只要使其他两个圆分别盖住矩形 $NGDM$ 和矩形 $HCMN$ 即可. 显然, 这两个圆的圆心分别为 MH 的中点 P 及 MG 的中点 Q. 要使三个等圆半径最小, 只须在 $AH = MH = MG$ 的条件下, 计算出半径 AE 的值就可以了.

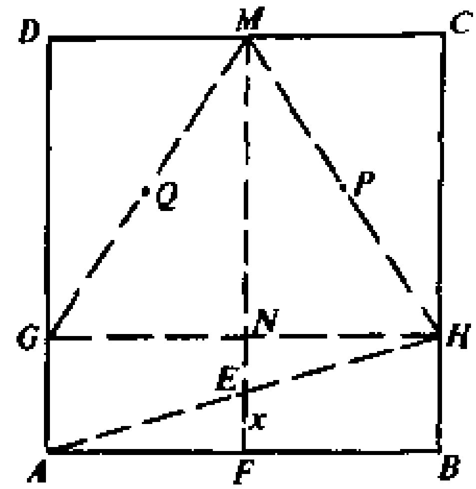

图 13.1

解 根据上述分析, 我们进行有关的计算.

$$AH = \sqrt{1+(2x)^2},$$

$$MG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-2x)^2},$$

由 $AH = MG$ 得

$$\sqrt{1+(2x)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-2x)^2},$$

解得 $$x = \frac{1}{16}.$$

$$\therefore \quad AE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{\sqrt{65}}{16}.$$

即这三个半径为 $\frac{\sqrt{65}}{16}$ 的等圆纸片, 分别盖住了矩形 $ABHG$, $GNMD$, $NHCM$, 从而盖住了整个正方形 $ABCD$.

不难验证, $\frac{\sqrt{65}}{16}$ 是能够盖住单位正方形纸片的三个等圆半径的最小值.

例 13.2 一个边长为 a 的正三角形 EFG 覆盖一个边长为 1 的正方形 $ABCD$，求 a 的最小值.

解 我们可以假定$\triangle EFG$ 的每一条边上至少有正方形 $ABCD$ 的一个顶点. 否则就可以将这条边向三角形内平移，使得它含有正方形 $ABCD$ 的一个顶点，从而得到一个更小的正三角形. 我们可分两种情况讨论：

(1)正方形 $ABCD$ 的四个顶点全在$\triangle EFG$ 的边上(图 13.2). 这时，

$$a=ED+DF=1+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

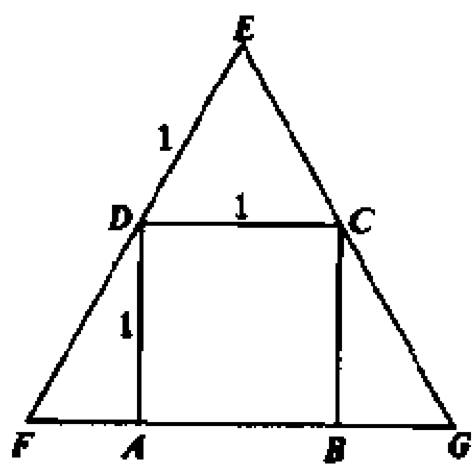

图 13.2

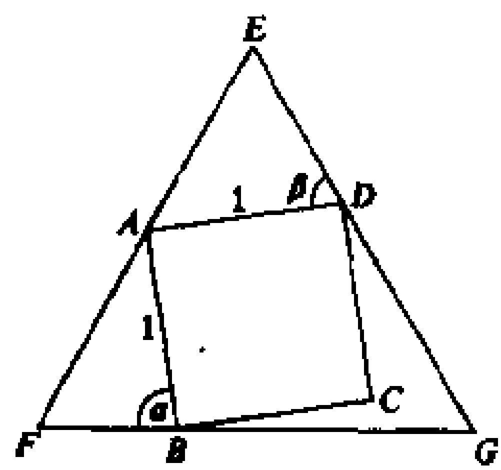

图 13.3

(2)正方形 $ABCD$ 有一个顶点不在$\triangle EFG$ 的边上(图 13.3). 这时，

$$\begin{aligned} a &= AF+AE=\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ}+\frac{\sin\beta}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \end{aligned}$$

因为 $$\alpha+\beta=360^\circ-60^\circ-60^\circ-90^\circ=150^\circ,$$

并且 $\alpha<90^\circ$，$\beta<90^\circ$，所以，

$$\alpha>60^\circ,\quad \beta>60^\circ,\quad -30^\circ<\alpha-\beta<30^\circ,$$

于是 $a=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{150^\circ}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}>\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{150^\circ}{2}\cos\dfrac{30^\circ}{2}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 90^\circ+\sin 60^\circ)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

综合(1),(2)可知,当且仅当$\triangle EFG$如图13.2所示时边长最小,此最小边长为$1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

例13.3 如果一个边长为a的正方形$ABCD$能覆盖一个边长为1的正三角形EFG,a至少要多大?

解 我们首先分几步确定正三角形EFG与正方形$ABCD$的位置关系,然后再求a的值.

(1)经过平移,使$ABCD$有一个顶点与$\triangle EFG$的一个顶点重合.在E,F,G中,设E为最左边的点,F为最右边的点,E,F中必有一点为最上边或最下边的点,不妨设E为最下边的点.平移正方形$ABCD$,使正方形的最左最下的点B与E重合(图13.4(a)),这时,$ABCD$仍覆盖正三角形EFG.

(2)设B与E重合,连结BD.由于$\angle FBG=60^\circ>\angle DBA=45^\circ$,所以$F,G$不在$BD$的同一侧.如果$\angle FBD\neq\angle DBG$,不妨假设$\angle FBD>30^\circ>\angle DBG$,则可将$\triangle FBG$绕点$B$旋转至$\triangle F'BG'$,使$\angle F'BD=30^\circ$,此时$F'$仍在$\triangle BCD$内.事实上,设射线$BF,BF'$分别交$CD$于$H,H'$,则由$\angle F'BC>\angle FBC$,$BH'>BH\geqslant BF=BF'$,可知点$F'$在线段$BH'$的内部,因而在$\triangle BCD$内.由对称性知$G'$也在$\triangle ABD$内,故$\triangle G'BF'$仍被正方形$ABCD$覆盖.因而我们不

妨假定$\triangle EFG$的顶点E与正方形$ABCD$的顶点B重合，而过点E的高与正方形的对角线BD重合.

(3)此时，若F不在CD上，则过F作$C'D'\parallel CD$，过G作$A'D'\parallel AD$(图13.4(b))，截得正方形$A'B'C'D'$，这是一个比$ABCD$小的正方形，且仍然覆盖$\triangle EFG$.

综合(1)，(2)，(3)可知，覆盖正三角形EFG的最小正方形的位置应如图13.4(c)所示，其最小边长为

$$BC=BF\cos\angle FBC=1\times\cos 15^\circ$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

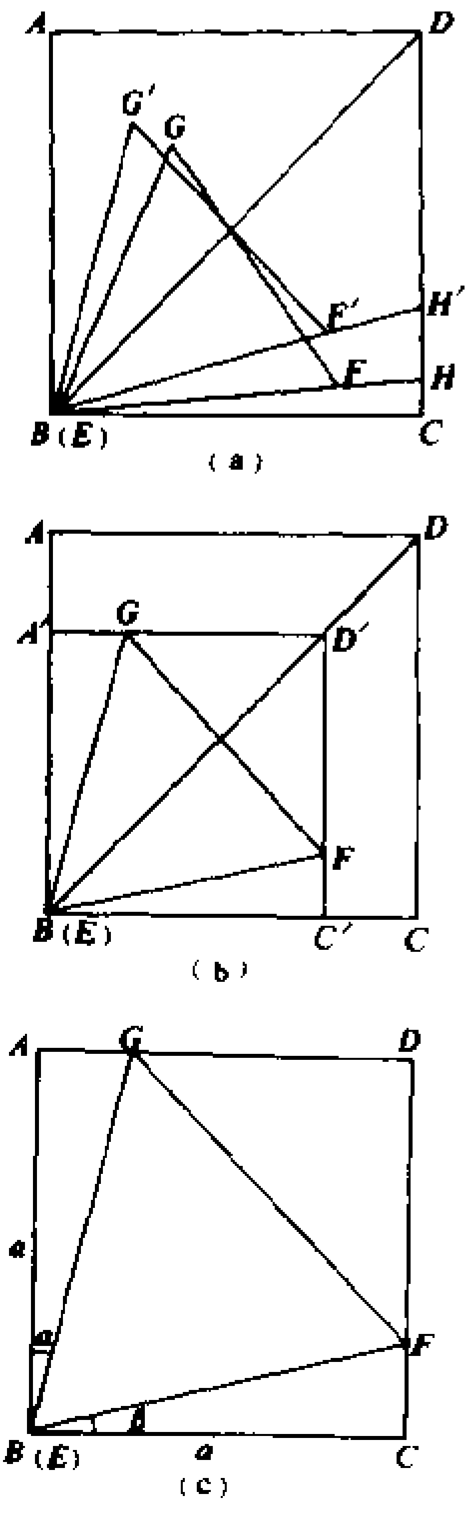

图13.4

例13.4 已知在直角三角形ABC中，直角边$CB=a$，$CA=b$，问能嵌入这个直角三角形的正方形中，最大的边长是多少？

解 设正方形$DEFG$嵌入$\triangle ABC$中，必要时将$DEFG$向左下方平移，使其中的两个顶点(F，G)落在两直角边上(图13.5)，若这时它另外的两个顶点都不在

斜边上，则可以通过以直角顶点 C 为位似中心的位似变换把正方形放大，使一个顶点 E 落在斜边上。所以我们不妨假定 $DEFG$ 在 $\triangle ABC$ 中处于如图13.6所示的位置。

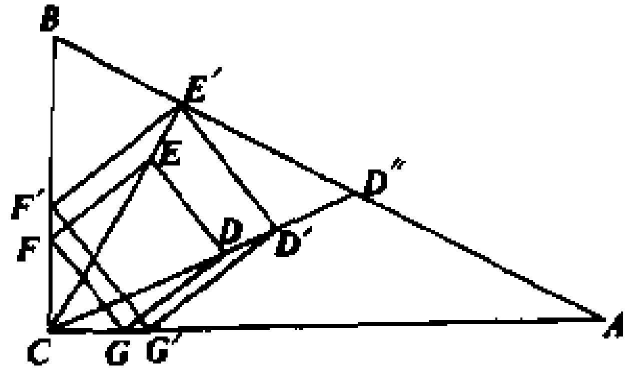

图 13.5

若 G 与 C 不重合，则连结 C 与正方形中心 O 并延长此线交 AB 于 Q，交 ED 于 P。

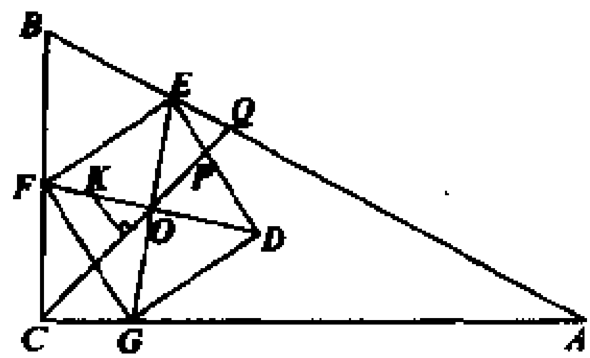

图 13.6

由于 $\angle FOG+\angle FCG=180°$，所以 O,F,C,G 共圆。从而 $\angle OCG=\angle OFG=\angle GED=45°$，故 P,E,C,G 共圆，圆心 K 在 EG 的中垂线 FD 上。由于斜线长不小于垂线长，所以 K 到 CP 的距离不大于 KO，即 CP 的弦心距不大于 EG 的弦心距。于是，$CP\geqslant EG$，故 $CQ>CP\geqslant EG$。

所以，以 CQ 为对角线的正方形的对角线最大，因而此时正方形具有最大边长。即嵌入 $\triangle ABC$ 的正方形中，如图 13.7 所示的正方形有最大边长，它的一条对角线重合于直角 C 的平

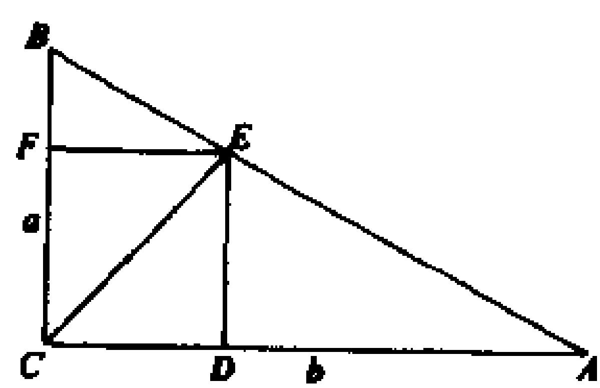

图 13.7

分线.由角平分线的性质得

$$\frac{BE}{EA}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{EF}{b}=\frac{BE}{BA}=\frac{a}{a+b},$$

$$\therefore \quad EF=\frac{ab}{a+b}.$$

这就是直角三角形中嵌入的正方形的最大边长.

例 13.5 在边长为 x 的正方形中可以嵌入任何斜边长为 1 的直角三角形.试求 x 的最小值.

解 由于在边长为 1 的正方形中可以嵌入一个直径是 1 的半圆,而在边长为 $\sqrt{2}/2$ 的正方形中仅能嵌入弦长为 1 的等腰直角三角形,所以应当有 $\sqrt{2}/2<x\leqslant 1$.

设$\triangle ABC$ 为直角三角形,$\angle A=90°$,我们来证明,如果可将$\triangle ABC$ 嵌入正方形 $KNML$,那么一定可以按如下方式嵌入(图 13.8):将顶点 B,C 中的一个重合于顶点 N,另一个置于边 LM 之上,并使顶点 A 和顶点 K 处于斜边的同一侧.事实上,我们可首先将$\triangle ABC$ 以任意方式放入正方形之内,再作$\triangle ABC$ 的一个外接矩形,使该矩形的边平行于原正方形的边,并使边长达到最小.由其最小性可知,在矩形的每一边上都必然落有 A,B,C 三顶点之一,所以必有顶点之一落在它的两条边上,亦即落在该矩形的一个顶点上.不失一般性,设顶点 B 落在该矩形的右下顶点处(图 13.9).将矩形位移一个

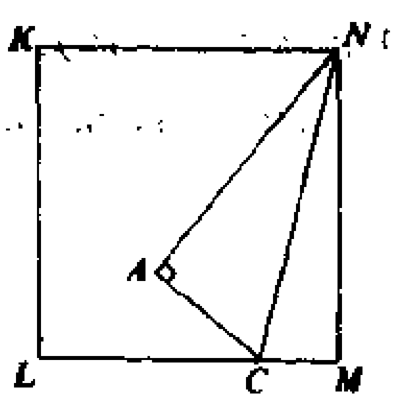

图 13.8

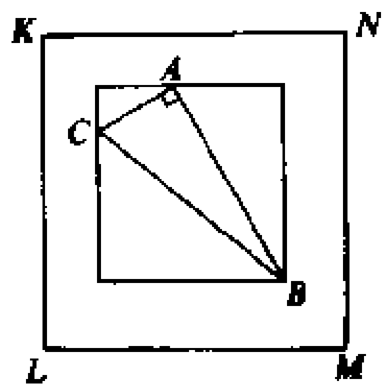

图 13.9

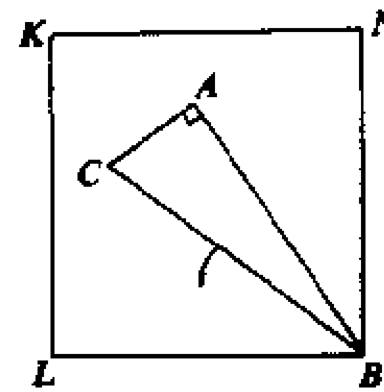

图 13.10

向量$\overrightarrow{BM}$，于是点 B重合于顶点 M，变成了如图 13.10 所示的情形. 我们再使$\triangle ABC$ 绕点 B 往顶点 L 的方向旋转. 由于 $LB\leqslant CB=1$，因此总有一个时刻，点 C 落到边 KL 之上，此时点 A 将位于正方形之内，亦即通过上述旋转，该点终将与 KN 同处一侧. 且因$\angle A=90°$，故该点不可能越出边 KL 之外. 再让正方形绕着中心旋转. 如有必要，再作其关于对角线 NL 的反射，即可得到如图 13.8 所示的位置.

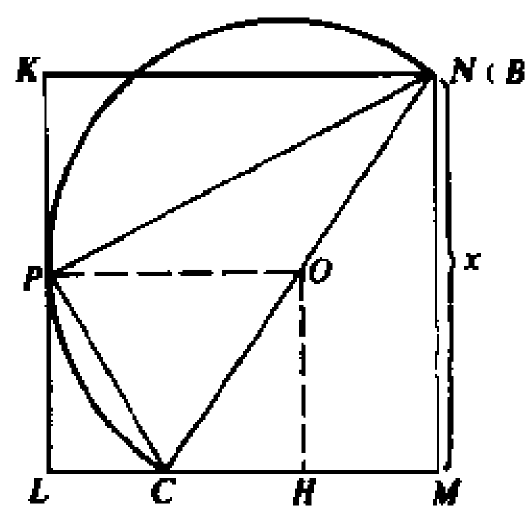

图 13.11

现在，我们来求这样的正方形的边长 x，使得以 BC 为直径的圆周与该正方形的边 KL 相切(图 13.11). 设 O 为圆心，P 是圆周与边 KL 的切点，作边 LM 的垂线 OH，则有

$$LH=PO=\frac{1}{2},$$

$$HM=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{2}\sqrt{BC^2-BM^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2},$$

$$x=LH+HM=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x^2}),$$

解此方程，得 $x=4/5$.

由于$\angle CNK>45°$，故在所作出的半圆同正方形的公共部分的内部可以放置任何斜边长等于 1 的直角三角形.

下面只须证明，任何边长更小的正方形都不能满足要求即可.

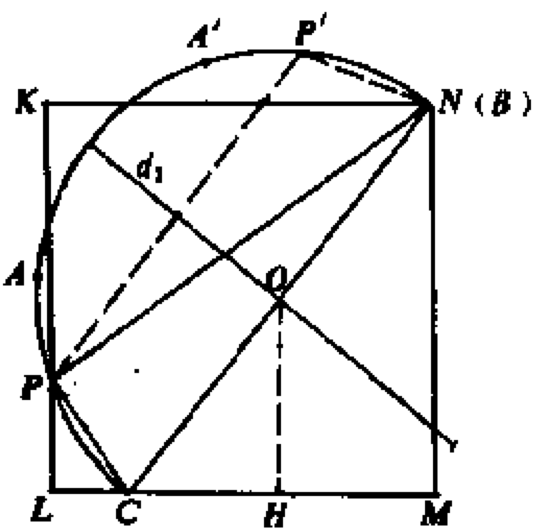

图 13.12

作与直径 BC 相垂直的直径 d_1(图 13.12)，显然，我们只须证明，点 P 的关于 d_1 的对称点 P' 位于边长为 4/5 的正方形之外即可.

我们有$\angle CNP'=\angle NCP>\angle CNK$，因而

$$\sin\angle NCP=PN>KN=NM=\sin\angle NCM=\sin\angle CNK.$$

稍稍减小 x，圆周上便会有一部分位于 KL 的另一侧(即不与点 O 同在一侧). 此时，若在另一侧上任取一点 A 作为$\triangle ABC$ 的直角顶点，则点 A 及其关于直径 d_1 的对称点 A' 均位于正方形之外. 于是，与$\triangle ABC$ 全等的直角三角形便不可能用本证明开头部分所述的办法放入所作的正方形之中. 因而也不能用其他任何办法放入其中.

综上所述，所求正方形边长的最小值 $x=4/5$.

例 13.6 能用三个边长为 1 的正三角形纸片盖住的正三角形区域的最大面积是多少？

解 (1)首先，我们发现，能盖住边长为 a，锐角为 60° 的菱形的最小正三角形的边长是 $2a$. 事实上，可以假设菱形 $MLNK$ 的锐角顶点 M 在正三角形 ABC 的边 AB 上(图 13.13)，另一锐角顶点 N 在正三角形 ABC 的边 BC 上. 不失一般性，设点 K 在边 AC 上. 并设 $\angle BNM=\alpha$，$30°\leqslant\alpha\leqslant 90°$.

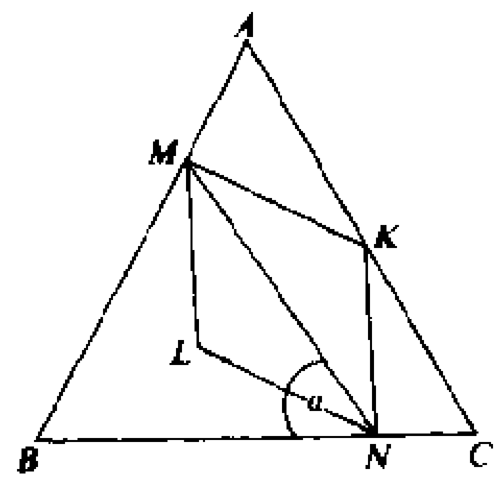

图 13.13

在 $\triangle BNM$ 中应用正弦定理，求得

$$BN=\frac{MN\sin\angle BMN}{\sin 60°}=\frac{\sqrt{3}\,a\sin(120°-\alpha)}{\cos 30°}.$$

在 $\triangle KNC$ 中应用正弦定理，求得

$$CN=\frac{KN\sin\angle NKC}{\sin 60°}=\frac{a\sin(\alpha-30°)}{\cos 30°}.$$

$$\begin{aligned}\therefore BC&=BN+CN\\&=\frac{2a}{\cos 30°}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(120°-\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-30°)\right]\\&=\frac{2a}{\cos 30°}[\sin 60°\cos(\alpha-30°)+\cos 60°\sin(\alpha-30°)]\\&=\frac{2a}{\cos 30°}\sin(30°+\alpha)=\frac{2a\cos(60°-\alpha)}{\cos 30°}.\end{aligned}$$

考虑到 $30°\leqslant\alpha\leqslant 90°$，求得 $BC\geqslant 2a$.

(2)容易看到，边长为 3/2 的正三角形可以用三个边长为

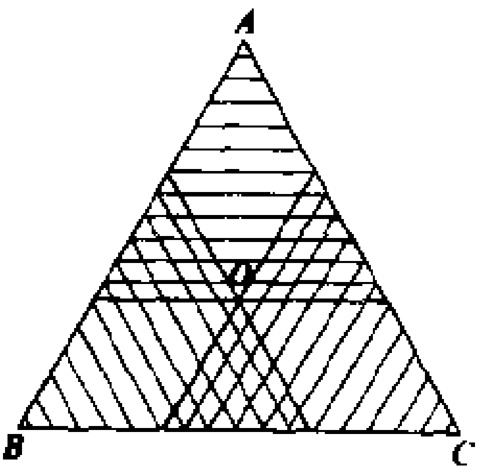

图 13.14

1 的正三角形盖住，只要如图 13.14所示放置这三个单位正三角形即可：每个单位正三角形的顶点与被盖的大正三角形的一个顶点重合，而对边中点与大正三角形的中心 O 重合.

(3) 我们再证明：边长 $b>3/2$的正三角形不能用三个单位正三角形盖住.

如果这种覆盖是可能的，则边长为 $b>3/2$ 的正三角形 ABC 的顶点 A,B,C 被不同的单位正三角形盖住，而边 AB，BC，CA 中的每一个都用两个单位正三角形盖住. 设 A 被单位正三角形$\triangle_1$ 盖住，B 被$\triangle_2$ 盖住，C 被$\triangle_3$ 盖住，而正三角形中心 O 不妨设被$\triangle_1$ 盖住. 这时可以在 AB 和 AC 上取点 M 和 N，使得 $AM=AN=\frac{1}{3}b$(图 13.15). 因为 $BM=CN=\frac{2}{3}b>1$，则点 M 和 N 必被$\triangle_1$ 盖住. 因此菱形 $AMON$ 整个被一个单位正三角形$\triangle_1$ 盖住. 根据(1)所证结果，$\triangle_1$ 的边应不小于

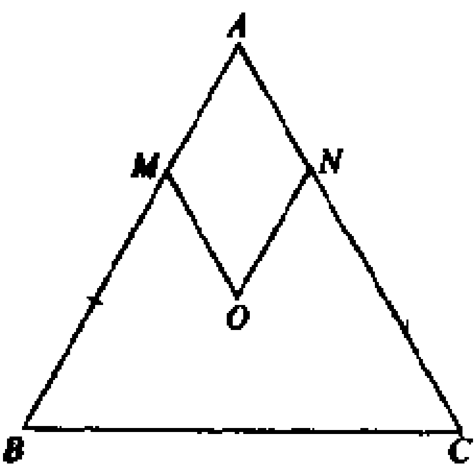

图 13.15

$$2AM=2\times\frac{b}{3}>\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1,$$

这显然与$\triangle_1$ 为单位正三角形相矛盾. 因此，边长大于 3/2 的

正三角形不能被三个单位正三角形盖住.

综上所述,能用三个单位正三角形盖住的正三角形的最大边长为 3/2,其面积为 $9\sqrt{3}/16$.

14

凸图形与覆盖定理

为了更深入地研究图形覆盖的性质，我们引入凸图形与凸包的概念.

从集合的观点看，平面图形就是平面上点的集合. 就其性态而言，可分为离散点集与连续点集. 比如一个有限 n 点组就是离散点集，而一条曲线则是连续点集.

我们约定，点 P 属于集合 A，记作 $P\in A$，读作点 P 属于集合 A. 集合 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，读作 A 包含于集 B，或集 B 包含集 A. 若 B 中至少有一个元素不属于 A，则 B 对 A 的包含记作 $A\subset B$，读作 B 真包含 A. 引入以上数学符号，便于使下面的叙述较为严格.

我们说图形 G 覆盖 F，表明 F 所在平面上存在点集 G'，而 $G'\cong G$，且 $G'\supseteq F$. 简单直观地

说，对于平面点集 G 与 F，若 $G\supseteq F$，则称 G 覆盖 F，也称 F 可以嵌入 G 中.

在圆面覆盖的例 2.2 中，我们证明了圆的一个非常好的性质：若 A，B 两点属于 $\odot(O,r)$，则线段 AB 也包含在 $\odot(O,r)$ 之中. 像圆一样具有这种性质的图形叫做凸图形. 在覆盖证明中，凸图形的概念是十分重要的.

定义 14.1 如果对于平面图形 M 中的任意两点 A，B，线段 AB 上的每一点均属于 M，则称图形 M 为凸图形.

容易验证，线段、直线、射线、半平面、(非优)角域、圆域、全平面等都是凸图形，以平面凸多边形为边界的区域也是凸图形. 其实，在前面的证明中，对正三角形、正方形，还有好多其他的凸图形，实际上我们都已经默认了.

凸图形有下面的重要性质.

定理 14.1 两个凸图形的交仍是凸图形.

证 设 Φ_1 与 Φ_2 都是凸图形.

若 $A\in(\Phi_1\cap\Phi_2)\Leftrightarrow A\in\Phi_1$ 且 $A\in\Phi_2$，

$B\in(\Phi_1\cap\Phi_2)\Leftrightarrow B\in\Phi_1$ 且 $B\in\Phi_2$，

由 $A\in\Phi_1$ 且 $B\in\Phi_1$，Φ_1 为凸图形 $\Rightarrow AB\subseteq\Phi_1$. 同理，由 $A\in\Phi_2$ 且 $B\in\Phi_2$，Φ_2 为凸图形 $\Rightarrow AB\subseteq\Phi_2$. 因此，$AB\subseteq\Phi_1$ 且 $AB\subseteq\Phi_2\Rightarrow AB\subseteq(\Phi_1\cap\Phi_2)$，

$\therefore$ $\Phi_1\cap\Phi_2$ 为凸图形.

利用数学归纳法不难推得

定理 14.2 任意个凸图形的交仍是凸图形.

应当特别注意，Φ_1 与 Φ_2 都是凸图形时，Φ_1 与 Φ_2 的并

$\Phi_1\cup\Phi_2$不一定是凸图形.

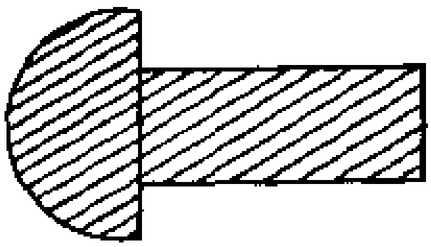

图 14.1

比如图 14.1 所示的半圆面是凸图形，长方形也是凸图形，面将这两个凸图形并在一起形成的"铆钉截面图"却不是凸图形.

对于每个平面点集 M，都存在包含它的凸图形，至少全平面包含它.

所有包含 M 的凸图形的交，根据定理 14.2 可知，仍是凸图形，并且是包含 M 的最小的凸图形，叫做 M 的凸包.

定义 14.2 包含点集(图形)M 的最小凸图形称为点集(图形)M 的凸包.

这里的"最小"，是指凸包能包含于任何其他的包含 M 的凸图形之中.

凸图形的性质给我们研究覆盖问题带来了方便. 因为如果 G 是凸图形，若 $A\in G, B\in G$，则线段 AB 包含在 G 中，也即线段 AB 被 G 所覆盖. 由两个端点被凸图形 G 覆盖，就可断言整个线段被凸图形覆盖，真有"见微而知著"的效果.

例 14.1 设凸图形 M 的面积为 m. 证明：能用一个面积不超过 $2m$ 的平行四边形覆盖 M.

证 先作一个带形域包含 M，使其边界恰与 M 的边界接触，交点为 F,H；再作另一带形域包含 M，使其边界平行于 FH，且恰与 M 的边接触，交点为 E,G. 两带形域相截得其公共部分为平行四边形 $ABCD$，M 含于其中(图 14.2).

由于 M 是凸图形，故 M 包含了四边形 $EFGH$. 所以四边

形 $EFGH$ 的面积 $\leqslant m$. 但易知,平行四边形$ABCD$的面积等于四边形 $EFGH$ 面积的 2 倍,所以 $ABCD$ 的面积不超过 $2m$.

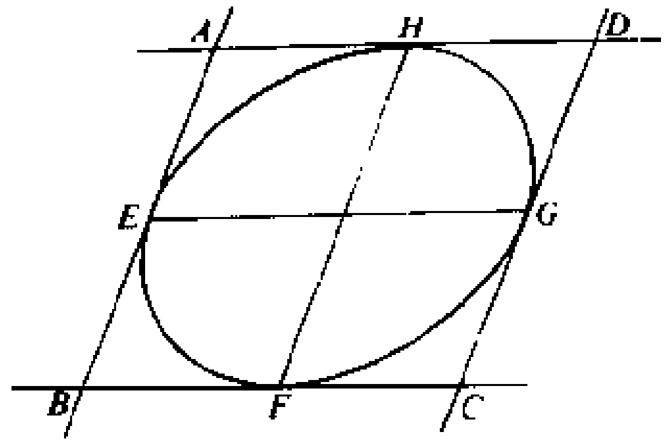

图 14.2

例 14.2 四个凸图形 M_1,M_2,M_3,M_4 中的每三个都有公共点. 证明:此四个凸图形必有公共点.

证 设 M_2,M_3,M_4;M_1,M_3,M_4;M_1,M_2,M_4;M_1,M_2,M_3 的公共点分别为 A,B,C,D. 我们分几种情况考虑:

(1)当 A,B,C,D 不同在一直线上,且任何一点不属于其他三点组成的三角形时,不妨设这四点构成凸四边形 $ABCD$. 它的两条对角线 AC,BD 交于 M(图 14.3(a)). 由于 A,C 同属于 M_2,M_4,故点 M 属于 M_2,M_4;由于 B,D 同属于 M_1,M_3,故点 M 属于 M_1,M_3. 此时,点 M 是 M_1,M_2,M_3,M_4 的公共点.

(2)当 A,B,C,D 不在同一直线上,但有一点属于其他三点组成的三角形(不妨设点 A 含于$\triangle BCD$)时(图 14.3(b)),因为 B,C,D 同属于 M_1,所以其凸包即$\triangle BCD$ 含于 M_1,因而 A 属于 M_1. 但 A 属于 M_2,M_3,M_4,所以 A 是 M_1,M_2,M_3,M_4 的公共点.

(3)当 A,B,C,D 在同一直线上时,不妨设它们排列成

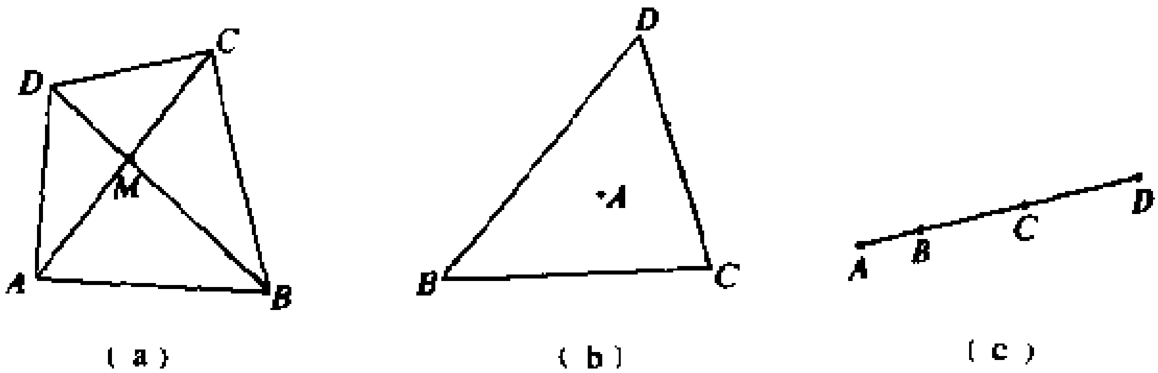

图 14.3

A,B,C,D 的次序(图 14.3(c)). 由于 A,D 同属于 M_2,M_3, 所以 B,C 也属于 M_2,M_3. 但 B,C 又属于 M_1,M_4, 所以 B,C 为 M_1,M_2,M_3,M_4 的公共点.

综上所述, M_1,M_2,M_3,M_4 总有公共点.

例 14.2 的情况可以推广到 n 个凸图形的情形($n\geqslant3$), 这就是著名的奥地利数学家海莱(Eduard Helly, 1884～1943)首先发现的一个定理.

海莱定理 在平面上, 设 $M_1,M_2,\cdots,M_p$($p\geqslant3$)是凸图形, 如果其中的每三个都有公共点, 那么这 p 个凸图形必有公共点.

证 对 p 用数学归纳法.

当 $p=3$ 时, 命题显然成立.

当 $p=4$ 时, 已如例 14.2 所证成立.

设命题对 $p=n$ 已成立, 即平面上 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 这 n 个凸图形任三个都有公共点时, 这 n 个凸图形必有公共点.

我们证明, 对平面上的凸图形 $M_1,M_2,\cdots,M_n,M_{n+1}$, 当其中任三个都有公共点时, 这 $n+1$ 个凸图形也必有公共点.

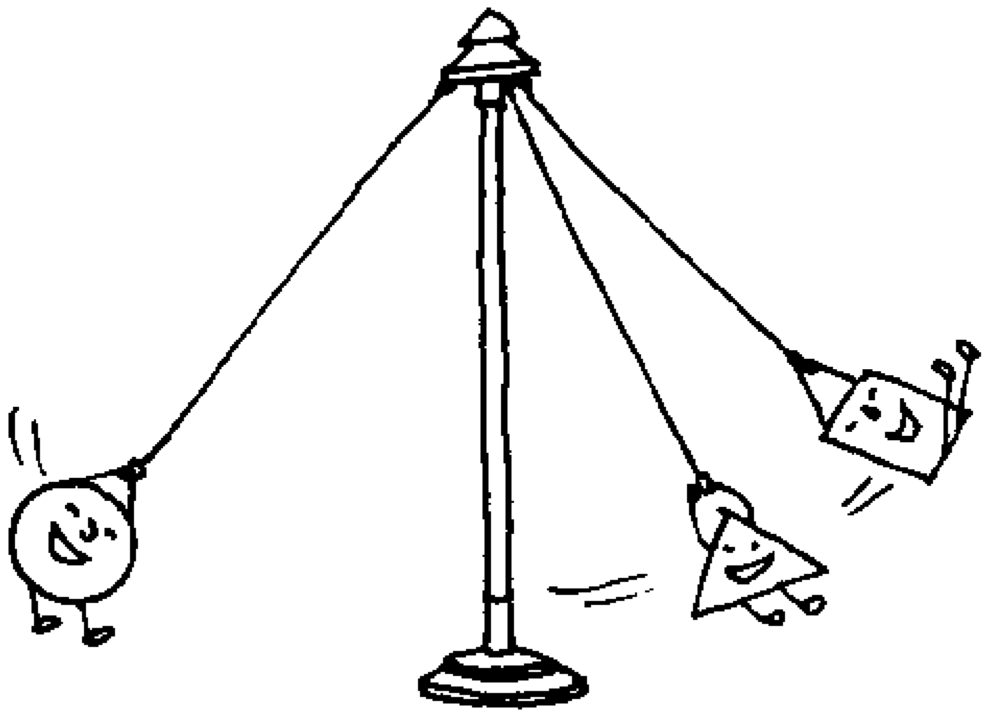

图 14.4

事实上，令 $N_i=M_i\cap M_{n+1}(i=1,2,3,\cdots,n)$，则 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 是一组 n 个凸图形(定理 14.1)．其中每三个 N_i,N_j,N_k 的交，也就是 $M_i\cap M_{n+1},M_j\cap M_{n+1},M_k\cap M_{n+1}$的交，也即 M_i,M_j,M_k,M_{n+1}的交．

由于 M_i,M_j,M_k,M_{n+1}都是凸图形，其中每三个都有公共点，所以由例14.2可知，M_i,M_j,M_k,M_{n+1}有公共点．所以 N_i,N_j,N_k 的交非空，即 $N_1,N_2,N_3,\cdots,N_n$ 中每三个都有公共点．

由归纳假设，$N_1,N_2,N_3,\cdots,N_n$ 必有公共点，此公共点就是 $M_1,M_2,M_3,\cdots,M_n,M_{n+1}$的公共点．

所以，由数学归纳原理知，海莱定理成立．

例14.3 在平面上给定 n 个点，其中任意三点都可被半

径为 r 的圆纸片覆盖. 证明:所有这 n 个点可以被半径为 r 的圆纸片覆盖.

证 半径为 r 中心为 O 的圆纸片盖住某些点,当且仅当半径为 r 的中心在这些点的圆盖住 O 点. 所以要证的命题等价于:

"在平面上给定 n 个点,且任意三个半径为 r 中心在这些点的圆纸片都有公共点,那么这 n 个圆纸片必有公共点."

由海莱定理知,这显然成立. 所以,以这公共点为中心 r 为半径的圆纸片可以覆盖这 n 个已知点.

例14.4 证明:如果 $n(n\geqslant 3)$ 个凸图形无公共点,那么其中一定有三个凸图形无公共点.

证 假设结论不成立,则 n 个凸图形中任三个凸图形都有公共点. 根据海莱定理,这 n 个凸图形必有公共点,与已知条件矛盾. 故原命题成立.

例 14.5 平面点集 M 由 n 个点 $O_1,O_2,\cdots,O_n$ 组成,M 的直径 $\leqslant 1$. 证明:用一个半径为 $\sqrt{3}/3$ 的圆纸片可以覆盖 M.

证 根据例 2.9 的结论可以判定:$O_1,O_2,\cdots,O_n$ 的直径 $\leqslant 1$,所以其中任三点的直径 $\leqslant 1$,即这任三点均能被一个半径为 $\sqrt{3}/3$ 的圆纸片盖住. 由例 14.3 的结论可知,这 n 个点 $O_1,O_2,\cdots,O_n$ 可以被一个半径为 $\sqrt{3}/3$ 的圆纸片所覆盖.

这个证明,可谓简洁而明快!

例 14.6 平面上有 100 个圆,任取其中三个都必存在一点与它们的距离小于 1(所谓⊙O 外一点 A 到⊙O 的距离,是

指线段 OA 与圆周的交点到 A 的距离). 证明:存在一个半径为 1 的圆与这 100 个圆都相交.

证 设这 100 个圆为$\odot(O_1,r_1)$, $\odot(O_2,r_2)$, $\cdots$, $\odot(O_{100},r_{100})$. 将每个圆的半径增大 1 个单位,作圆

$$\odot(O_i,r_i+1) \quad (i=1,2,\cdots,100),$$

这时,由题设条件可知,所作的 100 个圆每三个均有公共点,也即这 100 个凸图形$\odot(O_i,r_i+1)$ $(i=1,2,\cdots,100)$中每三个都有公共点. 依海莱定理,这 100 个圆必有公共点 O. 点 O 要么在$\odot(O_i,r_i)$内部,要么到$\odot(O_i,r_i)$的距离小于 1. 所以以 O 为圆心 1 为半径的圆与这 100 个圆$\odot(O_i,r_i)$ $(i=1,2,\cdots,100)$都相交.

例 14.7 已知四个开半平面①覆盖全平面. 证明:可以从中选出三个开半平面仍覆盖全平面.

证 设四个开半平面为 M_1,M_2,M_3,M_4. 它们的补集为 $\overline{M}_1,\overline{M}_2,\overline{M}_3,\overline{M}_4$. 其中 $\overline{M}_i$ 由不属于 M_i 的点组成. 显然 $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, $\overline{M}_4$ 是闭半平面,它们都是凸集.

对于平面上任一点 A,因为 M_1,M_2,M_3,M_4 覆盖全平面,所以 A 属于它们中的某一个,比如设 $A\in M_1$. 所以 $A\notin\overline{M}_1$,从而 $A\notin\overline{M}_1\cap\overline{M}_2\cap\overline{M}_3\cap\overline{M}_4$. 这表明平面上任一点 A 都不属于 $\overline{M}_1\cap\overline{M}_2\cap\overline{M}_3\cap\overline{M}_4$,所以 $\overline{M}_1,\overline{M}_2,\overline{M}_3,\overline{M}_4$ 无公共点. 根据例 14.4 的结论,其中必有三个集合无公共点,不妨设 $\overline{M}_1,\overline{M}_2$,

① 平面上一条直线 l 将该平面分为两个部分,每一部分(均不含 l)都叫做开半平面.

$\overline{M}_3$ 无公共点. 我们证明, M_1, M_2, M_3 覆盖全平面.

事实上, 设 B 为平面上任意一点, 则 $B \notin \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3$, 因此 B 不属于 $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ 中的某一个. 不妨设 $B \notin \overline{M}_1$, 此时 $B \in M_1$, 从而 $B \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$. 因此, 三个开半平面可以覆盖全平面.

应用例 14.7 的方法可以证明下面的定理.

定理 14.3 如果点集 $M_1, M_2, \cdots, M_n (n \geqslant 3)$ 覆盖点集 N, 并且 $N-M_1, N-M_2, \cdots, N-M_n$ 这些差集都是凸图形, 那么可从这 n 个点集 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 中选出三个点集, 使它们覆盖点集 N. (注: 差集 $A-B$ 是指由属于 A 但不属于 B 的点组成的集合.)

证 已知 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 覆盖 N, 即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i \supseteq N$. $N-M_i$ 都是凸集 $(i=1,2,\cdots,n)$.

对 N 中任一点 A, 因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i \supseteq N$, 所以 A 属于其中某个集合, 不妨设 $A \in M_1$. 所以 $A \notin N-M_1$, 从而 $A \notin \bigcap\limits_{i=1}^{n} (N-M_i)$.

由于 N 中任一点都不属于 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (N-M_i)$, 所以 $N-M_1, N-M_2, \cdots, N-M_n$ 这 n 个凸集无公共点. 根据例 14.4 的结论, 其中必有三个集合无公共点. 不妨设 $N-M_1, N-M_2, N-M_3$ 无公共点, 我们证明 M_1, M_2, M_3 覆盖 N.

事实上, 设 B 为 N 中任一点, 则

$B \notin (N-M_1) \cap (N-M_2) \cap (N-M_3)$, 所以 B 不属于 $N-M_1, N-M_2, N-M_3$ 中的某一个. 不妨设 $B \notin N-M_1$, 此时

$B\in M_1$，从而 $B\in M_1\cup M_2\cup M_3$. 因此，$N\subseteq M_1\cup M_2\cup M_3$. 于是定理得证.

应用定理 14.3，我们可以解决下面这个有趣的问题.

例 14.8 桌子被 100 张正方形台布完全盖住，而每张台布上都有一个火烧的圆洞. 证明：只须用其中的某三张台布就可以完全盖住桌子.

证 设这 100 张正方形带洞台布为 $M_1,M_2,\cdots,M_{100}$，桌面点集设为 N，显然，$N\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{100}M_i$. 而 $N-M_i$ 是个圆洞，即凸图形 Q_i，这样便得到 100 个凸图形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{100}$.

根据定理 14.3，从 $M_1,M_2,\cdots,M_{100}$ 中能选出某三张盖住 N，也就是可以从这 100 张带洞台布中选出某三张来盖住桌面 N.

这是一个多么有趣而又令人惊异的结果！

凸图形与凸包是我们研究平面点集的组合性质的重要概念与基本工具. 下面的例题也是进一步深入研究覆盖问题的一个重要结论.

例 14.9 在凸多边形 M 中无重叠地嵌入 n 个相等的圆纸片. 证明：可以把 M 分成 n 个小凸多边形，使得每个小凸多边形恰好覆盖一个圆纸片.

证 设嵌入凸多边形 M 的 n 个圆纸片为 $\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3,\cdots,\odot O_n$，它们的半径都是 r.

考虑 $\odot O_1$ 与 $\odot O_j$ $(j=2,3,\cdots,n)$，作 O_1O_j 的垂直平分线 g，g 将平面分为两个部分，其中覆盖 $\odot O_1$ 的那个闭半平面

记为 P_j(图 14.5). 显然 P_j 是具有下述性质的点 A 的集合:

$$AO_1 \leqslant AO_j.$$

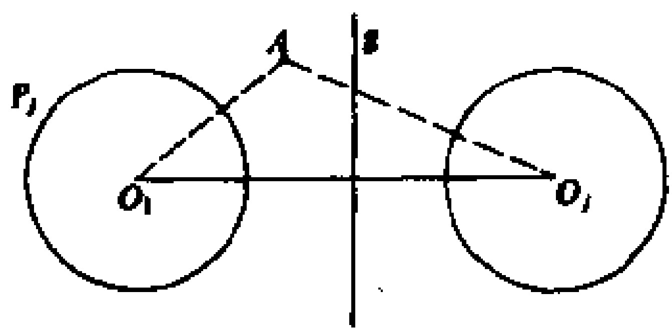

图 14.5

闭半平面 $P_2, P_3, \cdots, P_n$ 的交(落在 M 中的部分)即 $P_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_n \cap M$ 是一个凸多边形 M_1. 因为 $P_j(j=2,3,\cdots,n)$ 覆盖 $\odot O_1$, 所以 M_1 覆盖 $\odot O_1$. M_1 是 M 中具有下述性质的点 A 的集合:

$$AO_1 \leqslant AO_j \quad (j=2,3,\cdots,n).$$

同样地,我们可以作出凸多边形 $M_i \supset \odot O_i (i=2,3,\cdots,n)$, M_i 是具有下述性质的点 A 的集合:

$$AO_i \leqslant AO_j \quad (i,j=1,2,\cdots,n; i \neq j).$$

显见,平面多边形 M 内每一点至少属于一个凸多边形 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$. M 被分为了 n 个凸多边形 $M_1, M_2, \cdots, M_n$, 每个 M_i 都恰好覆盖一个圆纸片.

这样就证明了我们的结论.

说明 例 14.9 的证明本身给了我们一种对凸多边形 M 中无重叠地嵌入的 n 个等圆制作外壳多边形的方法,这个证明是构造性证明,对于给定的自然数 n 具有可操作性:

如果在凸多边形 M 中已经无重叠地嵌入了 n 个半径为 1 的圆 $\odot O_1, \odot O_2, \cdots, \odot O_n$, 那么可以把 M 分为 n 个凸多边形 $M_1, M_2, \cdots, M_n$, 每个凸多边形 M_i 恰好覆盖一个圆 $\odot O_i$. 这里

M_i 是 M 中具有性质 $AO_i \leqslant AO_j (i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$ 的点 A 组成的集合. 我们把这样的 M_i 称为$\odot O_i$ 的外壳.

例 14.9 的结论和证明中所采用的构造性方法，对于进一步研究图形覆盖是有用处的.

15

综合杂例选析

通过前面各节内容的学习，我们已经看到了各类覆盖问题的精美、巧妙与诱人之处，也从中体会到一些数学的魅力与方法的和谐.

俗话说，要想知道梨子的味道，就要亲口尝一尝；同样，要想基本领会覆盖方法的要领，也必须自己动手做些题，想一想，练一练. 本节我们选一些典型的有关图形覆盖的数学竞赛问题，作些引导性分析，并给出证明或解法，建议大家边读、边想、边练习，以达到巩固提高的综合效果.

例 15.1 探照灯的照射角为 90°. 证明：如果将四个探照灯放在广场的任意四点上，总可以调整它们使整个广场各处都被照到.

分析 一个探照灯所能照到的范围，依条

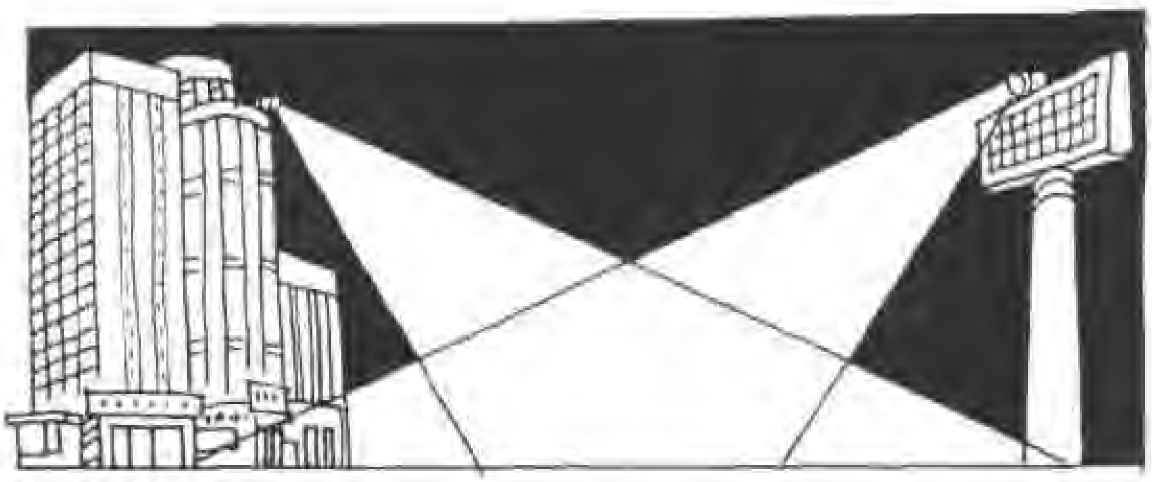

图 15.1

件知，是个“直角域”．如图15.2所示，点 O 放探照灯，所照范围为直角域 AOB．所谓调整探照灯，就是以 O 为中心，旋转这个直角域一个角度（比如变到直角域 A_1OB_1）．由于四个探照灯的位置是平面上任意四点，所以原问题的数学提法就是：在平面上任给四点 O_1,O_2,O_3,O_4．证明：能够以这四点为直角域的顶点放置四个直角域，使这四个直角域恰好覆盖整个平面．

要使顶点在 O_1,O_2,O_3,O_4 的四个直角域覆盖全平面，我们先看一下，如何使两个直角域覆盖半平面？不难发现，如图15.3所示，以 O_1,O_2 为顶点的两个如图放置的直角域（角的两边分别对应平行，一组同向，另一组反向）恰好盖住直线 l 上面的半平面．若能在适当位置 O_3,O_4 再放两个直角域的顶点，使这两个直角域能覆盖 l 下方的半平面，问题就解决了．这时 O_3,O_4 须在 l 的

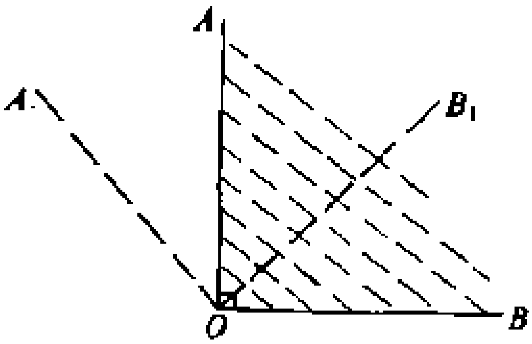

图 15.2

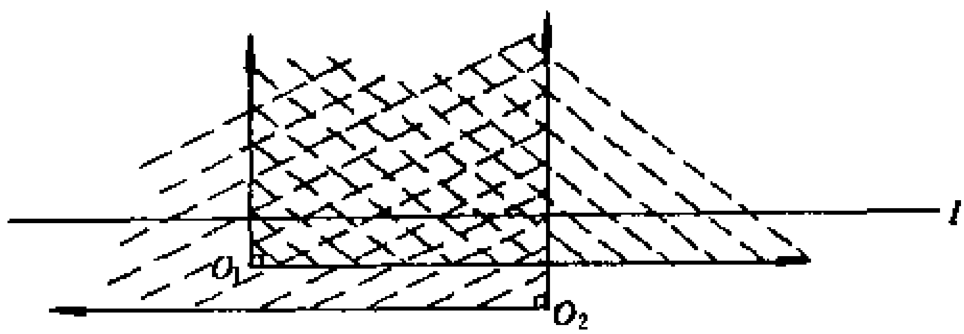

图 15.3

上半平面中，所放置的直角域向下覆盖即可. 要实现上述操作，找到一条直线 l，使两点 O_1，O_2 在 l 的一侧，另两点 O_3，O_4 在 l 的另一侧是个关键. 面这点是能够做到的. 我们将上述想法，整理一下，便可写出证明.

证 设 O_1，O_2，O_3，O_4 为平面上任意四点，在平面上引直线 l，将平面分成两个半平面，使每一个半平面内都有上述已知点中的两个点. 为确定起见，设 O_1，O_2 在 l 的(A)侧，O_3，O_4 在 l 的(B)侧(图 15.4). 过 O_1，O_2，O_3，O_4 分别作 l 的垂线与平行线，方向如图中箭头所示. 这样的四个直角域完全盖住了整个平面. 由于探照灯放在点 $O_i(i=1,2,3,4)$后，如图所示的照射位置可以通过旋转探照灯而办到，即位于同一半平面的两个点上的两个探照灯在旋转时可以照到另一个半平面. 所以，将四个探照灯放在广场的任意四点上，总可以调整它们使整个广场各处都被照到.

思考 在本题条件下，将三个探照灯放在广场的任意三点上，能调整它们照遍整个广场吗？试说明其道理.

问题还可以改变一下提法：探照灯的照射角为 90°. 如果要在广场上随意放置若干个探照灯，并总能调整它们使整个

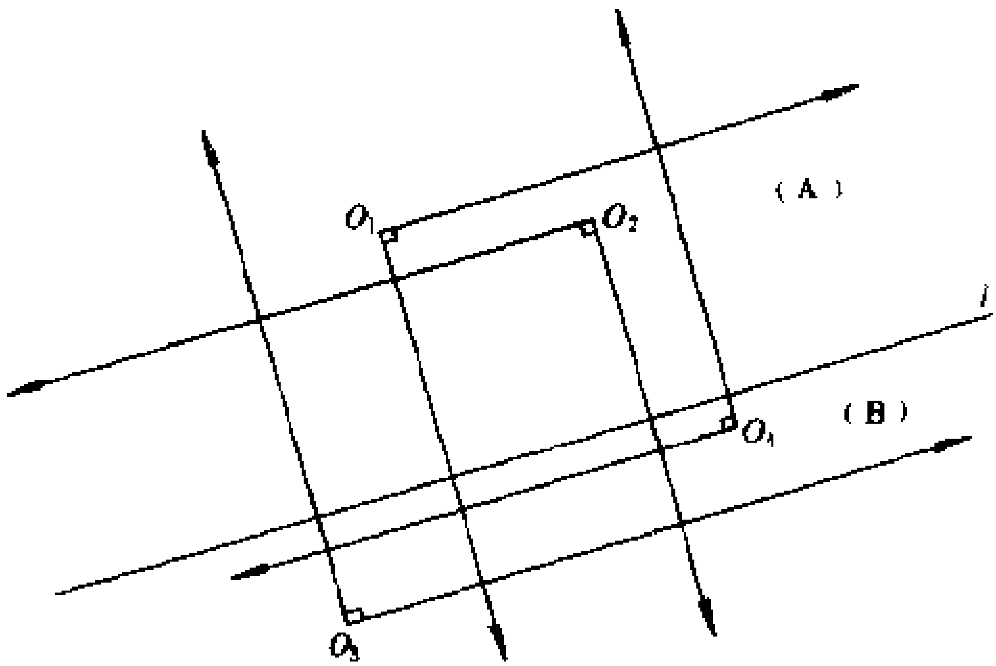

图 15.4

广场各处都被照到，问至少要放置几个探照灯？

进一步将探照灯的照射角改为 60°，情况又该如何呢？留给读者思考.

例 15.2 设 O 是平面上一点，试问，能否在平面上作出五个圆面，使得它们都不盖住点 O，但自点 O 发出的任何射线都至少与两个圆有公共点？如果将五个圆改为四个圆，结论如何？

分析 点 O 不被 $\odot O_i$ $(i=1,2,3,4,5)$ 盖住，表明 O 在 $\odot O_i$ 的外面. 从 O 引射线要与 $\odot O_i$ 有公共点，则这样的射线必在过 O 所作 $\odot O_i$ 的两条切线 OA_i 与 OB_i 之间（含 OA_i 与 OB_i，我们规定，从 OA_i 到 OB_i 为逆时针方向）. 显然 $\angle A_iOB_i$ 是点 O 向 $\odot O_i$ 的视角，$\angle A_iOB_i<180°$.

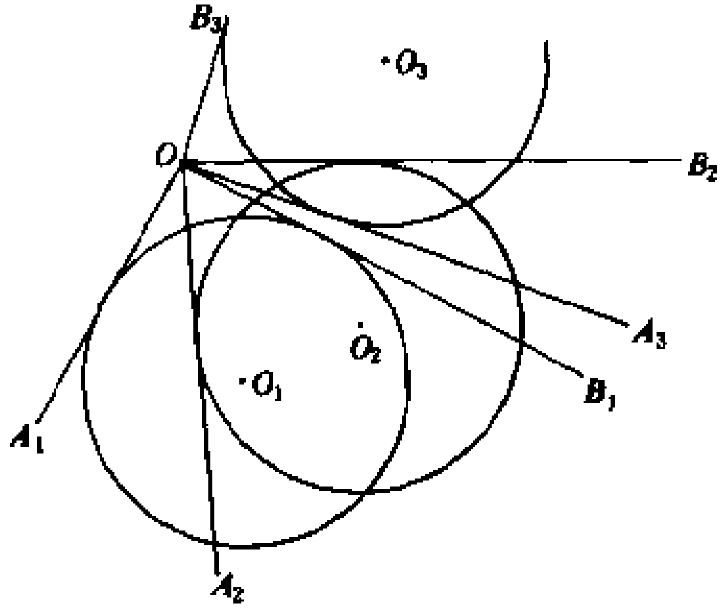

图 15.5

如图 15.5 所示，自点 O 引出的在$\angle A_2OB_1$ 中的射线与$\odot O_1$，$\odot O_2$ 都有公共点，自 O 引出的在$\angle A_3OB_2$ 中的射线与$\odot O_2$，$\odot O_3$ 都有公共点. 我们绕点 O 画出五个两两相交的圆$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$，$\odot O_4$，$\odot O_5$，并且要求自 O 引出的任意射线都与其中两个圆有公共点，则至少应使 OB_1 与 OA_3 重合，OB_2 与 OA_4 重合，OB_3 与 OA_5 重合，OB_4 与 OA_1 重合，OB_5 与 OA_2 重合(图 15.6). 这时容易看出，$\angle A_1OB_1$，$\angle A_2OB_2$，$\angle A_3OB_3$，$\angle A_4OB_4$，$\angle A_5OB_5$ 之和等于两个周角(720°). 为方便起见，我们设$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$，$\odot O_4$，$\odot O_5$ 为五个等圆，易求出$\angle A_1OB_1=\angle A_2OB_2=\angle A_3OB_3=\angle A_4OB_4=\angle A_5OB_5=144°$. 于是就得出如下的解法.

解 可以按题设要求的方式作出五个圆来. 如图 15.7 所

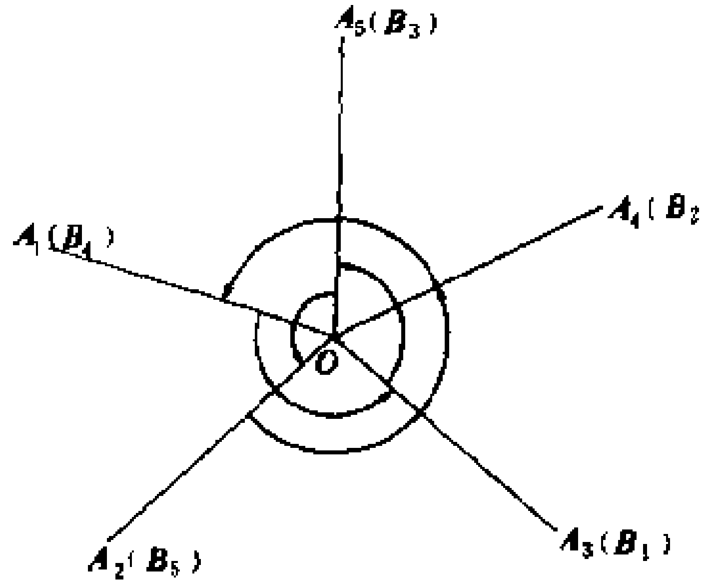

图 15.6

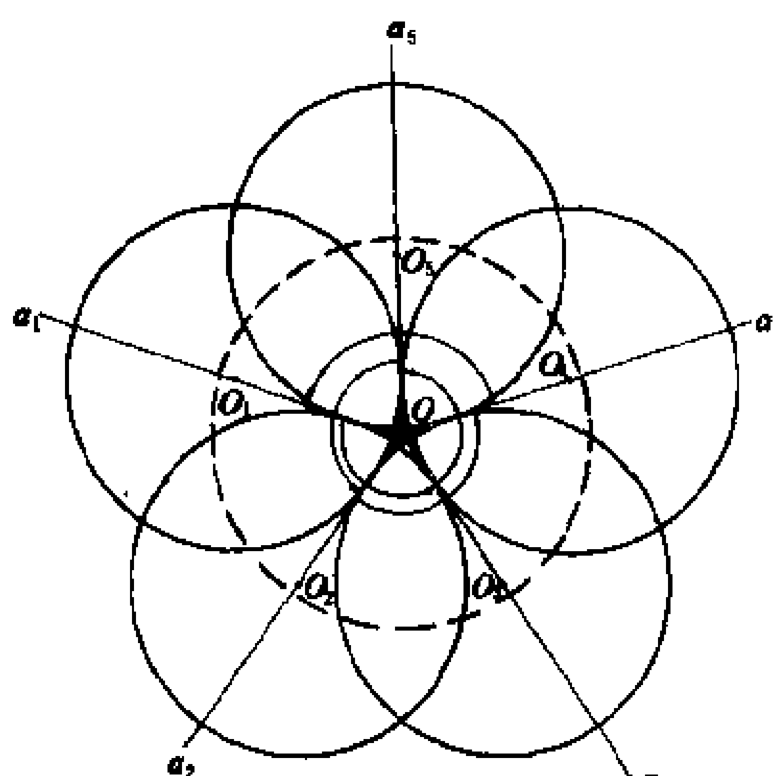

图 15.7

示，以 O 为始点引出五条射线 $Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4, Oa_5$，这五条射线将以 O 为中心的周角五等分，每个角为 72°. 以 O 为圆心，适当长为半径画圆交 Oa_i 于点 $O_i(i=1,2,3,4,5)$，则以 O_1

为圆心作$\odot O_1$，与$\angle \alpha_5 O \alpha_2$ 两边相切；以 O_2 为圆心作$\odot O_2$，与$\angle \alpha_1 O \alpha_3$ 两边相切；以 O_3 为圆心作$\odot O_3$，与$\angle \alpha_2 O \alpha_4$ 两边相切；以 O_4 为圆心作$\odot O_4$，与$\angle \alpha_3 O \alpha_5$ 两边相切；以 O_5 为圆心作$\odot O_5$，与$\angle \alpha_4 O \alpha_1$ 两边相切.

显然，点 O 在这五个圆外面，即这五个圆面都盖不住点 O. 但自点 O 发出的任何射线都至少与两圆有公共点.

如果换成四个圆，要满足题设要求是办不到的. 因为我们

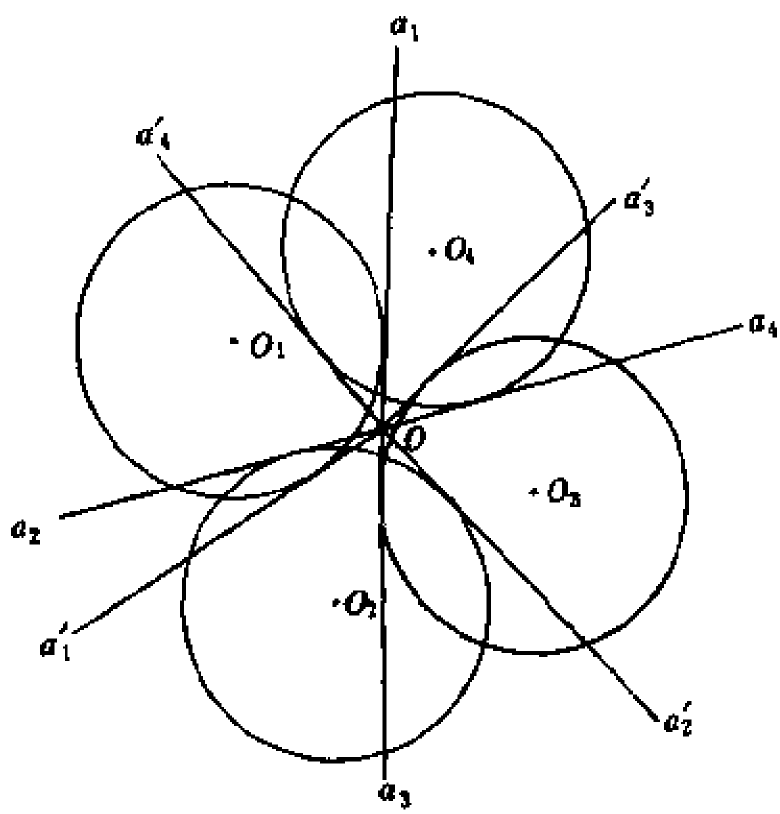

图 15.8

从点 O 向$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$，$\odot O_4$ 作切线(图 15.8)，可得四个以 O 为顶点的视角$\angle \alpha_1 O \alpha_1'$，$\angle \alpha_2 O \alpha_2'$，$\angle \alpha_3 O \alpha_3'$，$\angle \alpha_4 O \alpha_4'$，它们每一个都小于 180°，故其总和小于

$$180° \times 4 = 720°. \tag{1}$$

然而，如果自点 O 出发的每条射线都至少与四个圆中的两个有公共点时，则至少要求 $O\alpha_1'$ 与 $O\alpha_3$ 重合，$O\alpha_2'$ 与 $O\alpha_4$ 重合，$O\alpha_3'$ 与 $O\alpha_1$ 重合，$O\alpha_4'$ 与 $O\alpha_2$ 重合. 这时，根据图 15.9

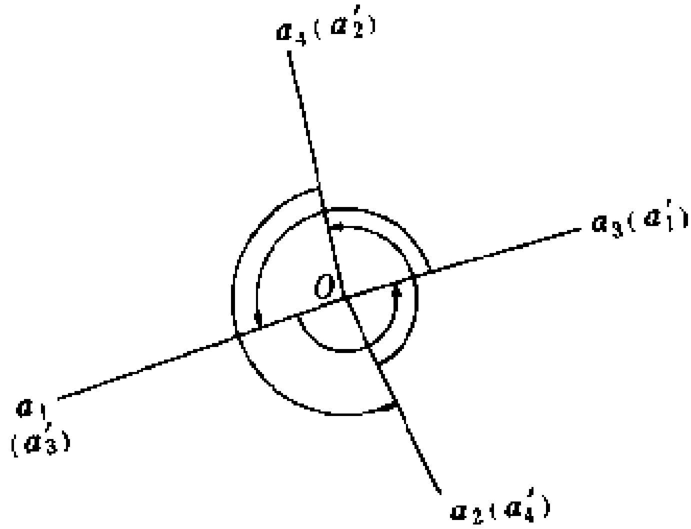

图 15.9

计算可知，以 O 为顶点的四个视角之和

$$\angle\alpha_1O\alpha_1'+\angle\alpha_2O\alpha_2'+\angle\alpha_3O\alpha_3'+\angle\alpha_4O\alpha_4'=720°,$$

这与式(1)矛盾. 所以将五个圆换成四个圆时，问题的结论不再成立.

思考 直线与圆相交时，它与圆有两个公共点. 我们把上述问题改变一下：

设 O 是平面上一点，试问，能否在平面上作出五个圆，使得它们都不盖住点 O，但自点 O 发出的任何射线都至少与两个圆相交？

此时，我们只须在图 15.7 的基础上，将五个圆的半径都略增加一点即可：设 $\odot O_i$ 半径都是 r，$OO_i=a$，我们只要以 O_i 为圆心，$\frac{1}{2}(r+a)$ 为半径画圆，则所得的五个圆就符合要求.

读者不妨按上述操作程序试一试.

此外,例 15.2 的结论告诉我们:设 O 是平面上一点,要在平面上放若干个圆纸片,使得它们都不盖住点 O,但自点 O 发出的任何射线都至少与两张圆纸片相交,则所放圆纸片至少要五个.

例 15.1 与例 15.2 都是构造性问题.解这种问题往往需要对几何图形作深入分析,从直观入手,再加以丰富的想象构思,才会找到思路.

例 15.3 以边长为 1 的正六边形的中心为圆心,作一个半径为 2 的圆.在正六边形与圆周之间(图 15.10 中的阴影部分)任意给出 13 个点,其中任三点不共线.求证:必存在一个以这些点中某三点为顶点的三角形,其面积不超过 $\sqrt{3}/2$.

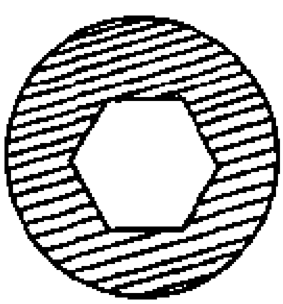

图 15.10

分析 本题与第 5 节"嵌入"中的例 5.8有相似之处.我们只要将阴影部分等分为六份,根据抽屉原则,其中必有一份包含了 13 个点中的三个点.然后只须估算以这三点为顶点的三角形面积不超过 $\sqrt{3}/2$ 即可.

证 由正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的中心 O,连结各顶点 $OA_1,OA_2,OA_3,OA_4,OA_5,OA_6$,并延长它们交外圆于 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,得六个等积的"截头扇形"(图 15.11).13 个点分布在这六个截头扇形中,根据抽屉原则,至少有一个截头扇形中不少于三个点.因这三点不共线,所以可构成一个三角形.而"截头扇形"中内接面积最大的三角形如图所示是

$\triangle B_1B_2A_2$(或$\triangle B_1B_2A_1$，$\triangle B_2B_3A_3$，等等)，其面积 $S_{\triangle B_1B_2A_2} \leqslant \frac{1}{2} B_1A_2 \times A_2B_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}/2$.

所以，这 13 个点中必存在三个点，以这三点为顶点的三角形的面积不超过 $\sqrt{3}/2$.

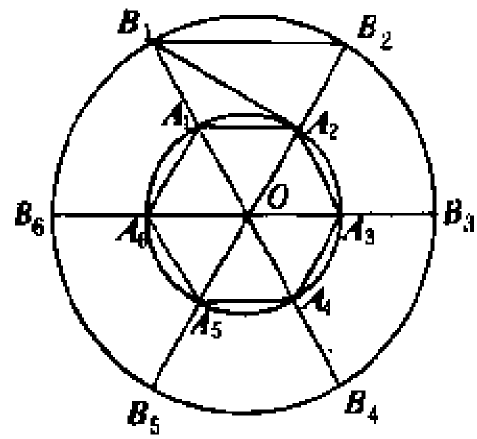

图 15.11

思考 解本题所用的方法与第 8 节"覆盖技巧例谈"中例 8.4 所使用的方法，有什么相似之处？试比较一下.

例 15.4 有 111 个点在边长为 15 的正三角形中. 证明：用一个直径为 $\sqrt{3}$ 的圆硬币总可以至少覆盖上述点中的 3 个(在盖放硬币时，硬币的一部分可以在三角形外).

分析 问题复杂，我们先从简单情况入手. 首先我们发现，边长为 1.5 的正三角形的外接圆的直径恰是 $\sqrt{3}$，即该三角形可以被直径为 $\sqrt{3}$ 的硬币盖住. 若向其中放入 3 个点，则它们自然被硬币所覆盖.

对于边长为 $1.5 \times 2 = 3$ 的正三角形，可如图 15.12 分成四个边长为 1.5 的小正三角形，其中有三个"△"，一个"▽". 通过计算知"▽"的中心 O 到 O_1, O_2, O_3 的距离都等于 $\sqrt{3}/2$. 换言之，三个直径为 $\sqrt{3}$ 的硬币在盖住三个"△"的同时，也盖住了这一个"▽". 只要在边长为 3 的正三角中放入 $2 \times 3 + 1 = 7$ 个点，就一定有一个直径为 $\sqrt{3}$ 的硬币至少要盖住 3 个点.

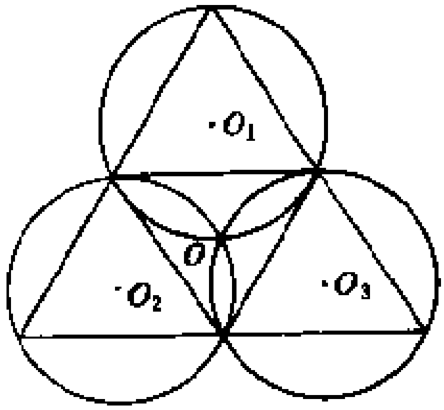

图 15.12

还可以继续对边长为4.5，6，7.5，9，…的正三角形进行试验(见表 15.1)，通过对"△"的个数，"▽"的个数，放入的点数进行分析，便不难找到解题的规律.

表 15.1

正三角形边长 ($1.5\times n$)	"△"个数	"▽"个数	至少放入点数
$1.5\times1=1.5$	1	0	$3=2\times1+1$
$1.5\times2=3$	3	1	$7=2\times3+1$
$1.5\times3=4.5$	6	3	$13=2\times6+1$
$1.5\times4=6$	10	6	$21=2\times10+1$
$1.5\times5=7.5$	15	10	$31=2\times15+1$
$1.5\times6=9$	21	15	$43=2\times21+1$
$1.5\times7=10.5$	28	21	$57=2\times28+1$
$1.5\times8=12$	36	28	$73=2\times36+1$
$1.5\times9=13.5$	45	36	$91=2\times45+1$
$1.5\times10=15$	55	45	$111=2\times55+1$

至此，对问题已经完全剖析清楚了. 直径为 $\sqrt{3}$ 的硬币可以盖住边长为 1.5 的正三角形是基础，所用硬币个数等于"△"的个数是关键，发掘出这两点，问题便迎刃而解.

证 将边长为 15 的正三角形各边 10 等分，并过各分点作平行于另两边的平行线，将原三角形分割成 100 个边长为

1.5的小正三角形.其中形如"△"的小正三角形共 55 个,形如

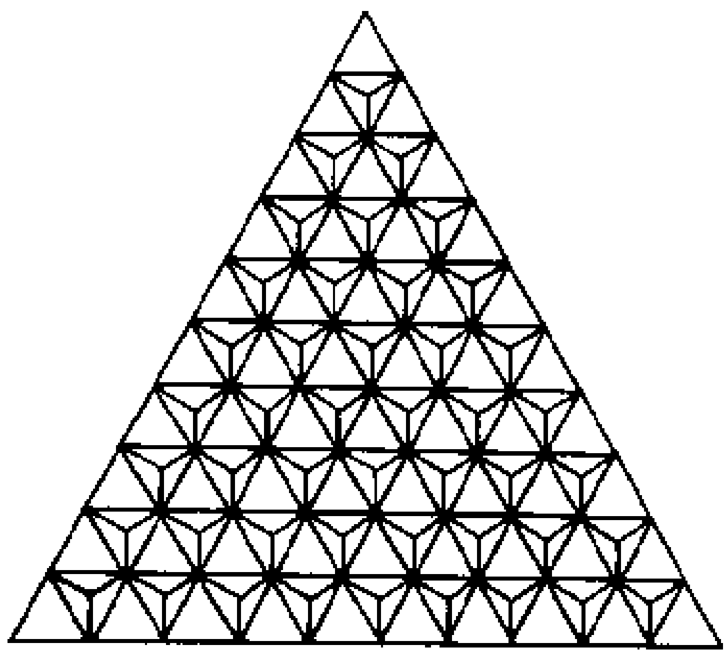

图 15.13

"▽"的小正三角形共 45 个.每个"▽"与周围三个"△"形成图 15.12 所示的边长为 3 的正三角形.用三个直径为 $\sqrt{3}$ 的硬币盖住三个"△"的同时,也就盖住了"▽".因此,所盖硬币的个数等于图中"△"的个数.在图 15.13 中共有 55 个"△",因此,用 55 个直径为 $\sqrt{3}$ 的硬币将这 55 个"△"覆盖的同时,也将其余 45 个"▽"覆盖了,从而将整个边长为 15 的大正三角形盖住.现在大正三角形中有 111 个点放入,根据抽屉原则,用于覆盖的 55 个硬币中一定有一个至少盖住了其中的 3 个点.

思考 我们可以将本题进一步一般化.由于将边长为$1.5\times n$(n 是自然数)的大正三角形各边 n 等分,并分别作各边的平行线,可以把大正三角形分为 n^2 个边长为 1.5 的小正三角

形，其中形如“△”的小正三角形共 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 个，至少放入的点数为 $2\times\frac{n(n+1)}{2}+1=n(n+1)+1=n^2+n+1$ 个. 因此本题的一般形式可表述如下：

有 n^2+n+1 个点放在边长为 $1.5\times n$ 的正三角形中（n 为自然数）. 证明：用一个直径为 $\sqrt{3}$ 的圆硬币总可以至少覆盖上述点中的 3 个点（在盖放硬币时，硬币的一部分可以在三角形外）.

与此类似的问题很多，比如将正三角形换成正方形，可提出下面的问题：在单位正方形中有 51 个点，求证：其中至少可以找到 3 个点，使它们能被一个半径为 1/7 的圆纸片盖住.

请读者在证明本题之后，也试着写出一般性的命题.

例 15.5 四边形纸片 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=12$，$CD=13$，$DA=4$，$\angle BAD=90°$（图 15.14）. 求证：这个四边形纸片可以覆盖一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆，但盖不住一个半径为 $\sqrt{6}$ 的圆.

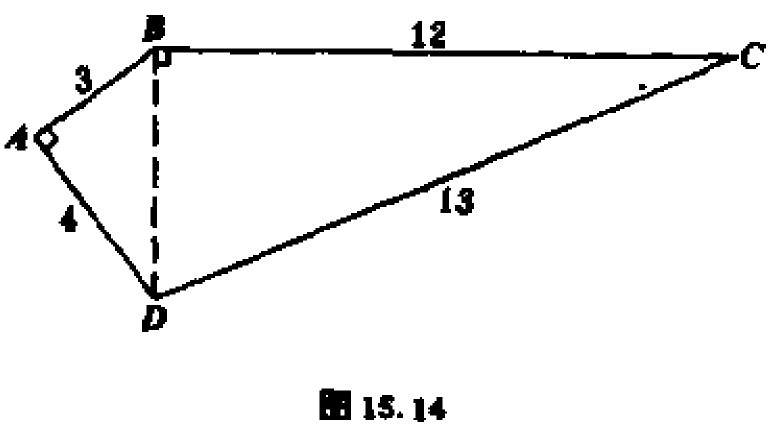

图 15.14

分析 联想第 5 节“嵌入”的例 5.1，我们曾说到，“一个三角形的内切圆是这个三角形纸片所能覆盖的最大圆. 当一

个圆的半径大于三角形内切圆半径时，这个三角形纸片就盖不住这个圆了."若我们的四边形也恰有内切圆，问题不就变为与内切圆半径比大小的问题了吗?我们不妨依边的条件看，$AB+CD=3+13=4+12=AD+BC$，即四边形 $ABCD$ 确实有内切圆，因此，证法就自然产生了.

证 如图 15.14 所示，连结 BD. 由勾股定理知 $BD=5$. 由勾股定理的逆定理知$\angle DBC=90°$，即$\triangle BCD$ 是直角三角形. 由于

$$AB+DC=3+13=4+12=AD+BC,$$

所以四边形 $ABCD$ 必有内切圆.

设四边形 $ABCD$ 的内切圆半径为 r，半周长

$$p=\frac{1}{2}(4+13+12+3)=16,$$

所以
$$S_{\text{四边形}ABCD}=16r.$$

另一方面，

$$S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=6+30=36.$$

所以
$$16r=36,\quad r=2.25.$$

即四边形 $ABCD$ 内能嵌入的最大圆的半径 $r=2.25$. 换言之，四边形 $ABCD$ 所能盖住的最大圆的半径为 2.25.

由于 $\sqrt{5}<2.25<\sqrt{6}$，所以四边形纸片 $ABCD$ 能盖住半径为 $\sqrt{5}$ 的圆，但盖不住半径为 $\sqrt{6}$ 的圆.

说明：若所给的四边形不是圆外切四边形，情况就复杂了. 在四条边长给出的情况下，可以按例 5.3 的方法，估算所能嵌入的圆的半径. 有的情况下还要适当调整，根据所给边长的数据进行具体分析.

例 15.6 在半径为 18 的圆中已经嵌入了 16 个半径为 3 的圆纸片. 证明:在该圆的其余部分还能再嵌入 9 个半径为 1 的圆纸片.

分析 本题好像似曾相识. 原来在第 10 节"面积重叠原理"中我们见过不少类似的问题,特别是与例 10.2 更为相似. "小圆半径膨胀"、"大圆半径收缩"的技巧是极为重要的,我们不妨试一试. 但也要注意,例 10.2 是"在余下的部分再放入一个圆",而我们的问题是"再嵌入 9 个圆". 这个差异自然便形成了本题的特点.

证 在半径为 18 的圆内作一个半径为 17 的同心圆,只要待放入的半径为 1 的小圆纸片的圆心在这个半径为 17 的圆内,则这些小圆纸片必在半径为 18 的大圆内. 再将已嵌入的 16 个半径为 3 的圆(纸片)膨胀为 16 个半径为 $3+1=4$ 的圆(每个都添加了厚为 1 的"保护层"),这样,待放入的半径为 1 的小圆圆心只要在这 16 个半径为 4 的圆外面,小圆就不会与已放入的 16 个半径为 3 的圆纸片重叠. 由

$$\pi\times17^2-16\times\pi\times4^2=33\pi>0$$

可知,在$\odot(O,17)$内存在一点 A_1 未被 16 个加保护层的圆面所覆盖. 所以以 A_1 为圆心,1 为半径的圆必在$\odot(O,18)$内,且与前面 16 个半径为 3 的圆不重叠,即以 A_1 为圆心可以再嵌入一个半径为 1 的$\odot(A_1,1)$(图 15.15).

将$\odot(A_1,1)$膨胀为半径为 2 的$\odot(A_1,2)$,则由

$$33\pi-4\pi=29\pi>0$$

可知,存在一点 A_2 未被 16 个加保护层的圆及$\odot(A_1,2)$所盖

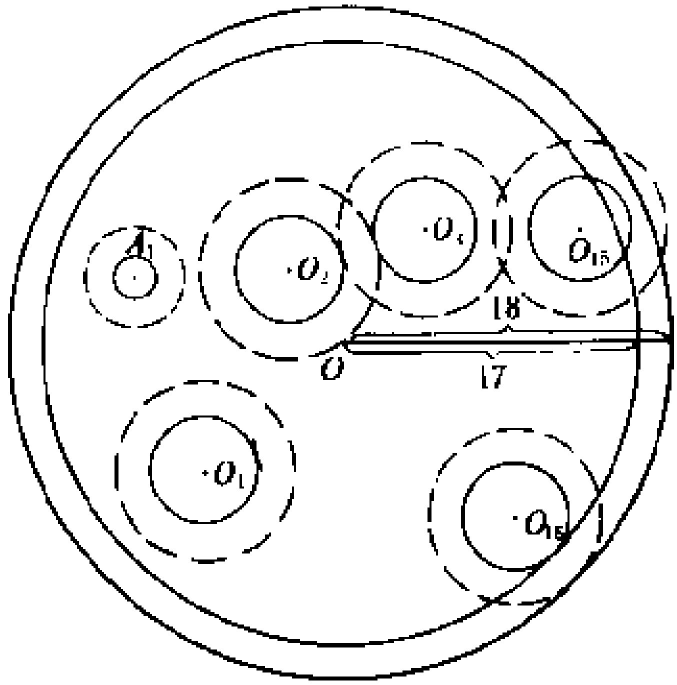

图 15.15

住.因此,又可嵌入一个半径为 1 的$\odot(A_2,1)$.

将$\odot(A_2,1)$膨胀为半径为 2 的$\odot(A_2,2)$,则由

$$29\pi-4\pi=25\pi>0$$

可知,存在一点 A_3 未被 16 个加保护层的圆及$\odot(A_1,2)$,$\odot(A_2,2)$所盖住.因此,又可嵌入一个半径为 1 的$\odot(A_3,1)$.

依此类推,可以再嵌入$\odot(A_4,1)$,$\odot(A_5,1)$,$\odot(A_6,1)$,$\odot(A_7,1)$,$\odot(A_8,1)$.这时,由

$$33\pi-8\times4\pi=\pi>0$$

可知,还可以再嵌入一个$\odot(A_9,1)$.

因此,半径为 18 的圆中嵌入 16 个半径为 3 的圆纸片以后,在余下的部分中还能再嵌入 9 个半径为 1 的圆纸片.

思考 我们已经指出本题是例 10.2 所用方法的拓广,请读者直接从例 10.2 入手考虑下述问题:

(1)在一个半径等于 6 的圆内任意嵌入 6 个半径为 1 的小圆纸片.证明:其中总还有空位置,可以再嵌入一个半径为 1 的小圆纸片和一个半径为 $\sqrt{3}/2$ 的小圆纸片.

(2)在一个半径等于 6 的圆内任意嵌入 6 个半径为 1 的

小圆纸片. 证明:其中总还有空位置,可以再嵌入一个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形纸片和一个半径为 $\sqrt{3}/2$ 的小圆纸片.

例 15.7 证明:不可能将 10 个大小相等的正方形放在同一平面内,使得每两个正方形没有公共的内点,并且第一个正方形与其余 9 个正方形都接触到.

分析 问题是当把第一个正方形 P 放好后,要将其余 9 个正方形摆放在 P 的周围,其中每个正方形与 P 的边界都至少有一点接触. 如果要使这 9 个正方形两两没有公共内点,要求证明这是不可能办到的.

此题的形式类似于 9 个正方形要盖住 P 的周界,必会发生重叠的问题. 直接使用 P 的周界不方便,我们不仿将 P 位似放大 2 倍变为 P^*,然后证明 9 个正方形纸片两两无重叠地盖住 P^* 的周界是不可能的.

证 不妨设这 10 个正方形的边长都是 1. 当把第一个正方形 P 放好以后,以 P 的中心为位似中心,将 P 放大为边长为 2 的大正方形 P^*. 此时,每个与 P 相接触的正方形至少要在 P^* 的边界上截出一段或两段小线段,而不同的正方形截出的线段除端点外不能有其他公共点,否则将违反"每两个正方形没有公共内点"的条件.

由于正方形有 9 个,而 P^* 的边界总长为 8,所以我们只须证明"任何一个与 P 接触的正方形 Q 在 P^* 边界上截出的线段总长都不小于 1"即可.

现依 Q 的位置分别讨论如下(见图 15.16):

(1)Q 的一个顶点在 P 的边上,但 Q 不包含 P^* 的顶点.

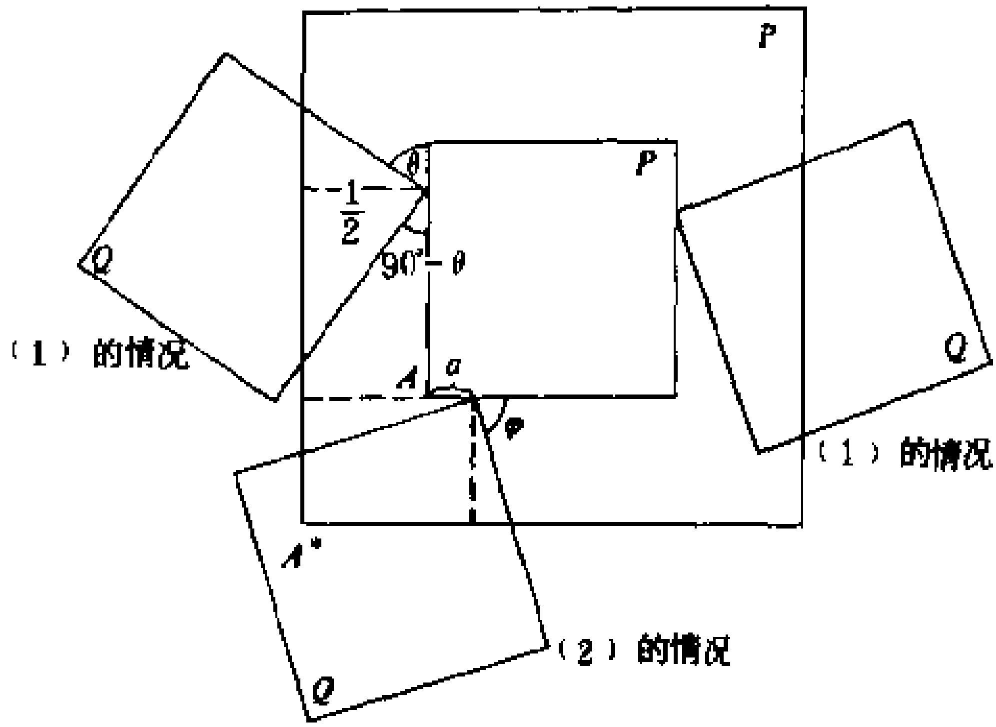

图 15.16

这时若 Q 与 P^* 的边界交点在 Q 的两条对边上，则截出的线段显然不小于 1；若交点在 Q 的两条邻边上，令这两邻边与 P 的边的交角为 θ 及 $90°-\theta$，则截出的线段长为

$$\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}(90°-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\theta+\mathrm{tg}\theta)\geqslant\frac{1}{2}\times 2=1.$$

(2)Q 的一个顶点在 P 的边上，但 Q 包含 P^* 的顶点 A^*. 设 P 与 A^* 对应的顶点为 A，令 Q 在 P 上的顶点到 A 的距离为 a，Q 的一边与 P 的边的交角为 φ. 显见 φ 必不小于 45°，则可计算截出的线段长为

$$\left(\frac{1}{2}+a+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\varphi\right)+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+a\right)\mathrm{ctg}\varphi\right]$$
$$=1+a-a\mathrm{ctg}\varphi\geqslant 1+a-a\mathrm{ctg}45°=1.$$

(3)Q 与 P 的边有一段公共线段，这时不论 Q 包含或不

包含 P^* 的顶点，截出的线段都将不小于 1.

综上所述，P^* 的周界至多被 8 个两两不重叠的正方形所覆盖，这 8 个正方形各与 P 至少有一个公共点. 因此，第 9 个正方形不能与 P^* 有公共点，当然更不能与 P 有公共点.

所以不可能将 10 个大小相等的正方形放在同一平面内，使得每两个正方形没有公共内点，并且第一个正方形与其余 9 个都接触到.

说明 本题证明的关键在于将要证的问题转化为另一种与它等价的形式，然后再设计可行的证明途径和方法.

例 15.8 凸多边形面积为 S_1，周长为 P_1，在它的内部可嵌入一个面积为 S_2，周长为 p_2 的凸多边形. 证明：$2\dfrac{S_1}{p_1}>\dfrac{S_2}{p_2}$.

分析 仔细分析题设条件，会使我们联想到曾经遇到过类似的问题，第 5 节"嵌入"的例 5.3 是"试证：用面积为 S，周长为 p 的凸五边形纸片一定可以盖住一个半径为 $\dfrac{S}{p}$ 的圆". 我们不妨试用例 5.3 的技巧来证明本题.

证 设凸多边形 Ⅰ 的边长为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，则 $p_1=a_1+a_2+\cdots+a_n$，面积为 S_1；凸多边形 Ⅱ 的边长为 $b_1,b_2,\cdots,b_m$，则 $p_2=b_1+b_2+\cdots b_m$，面积为 S_2.

设凸多边形 Ⅱ 嵌入凸多边形 Ⅰ 中(图 15.17). 以凸多边形 Ⅱ 的各边为边向形内作高为 $\dfrac{S_2}{p_2}$ 的矩形，设这些小矩形面积之和为 S_2^*，则

$$S_2^*=(b_1+b_2+\cdots+b_m)\cdot\frac{S_2}{p_2}=p_2\cdot\frac{S_2}{p_2}=S_2.$$

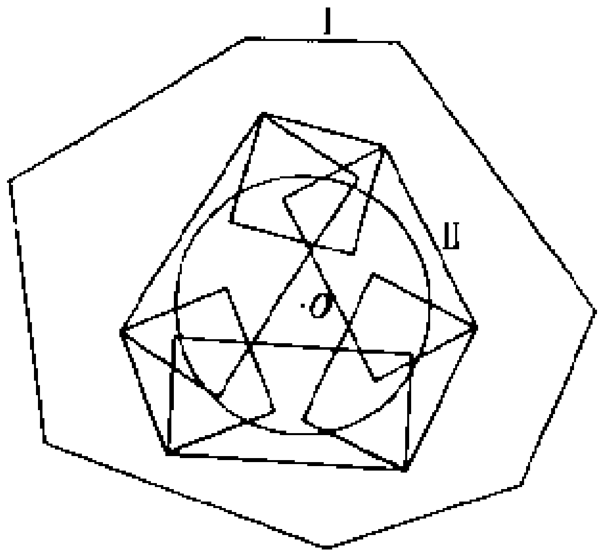

图 15.17

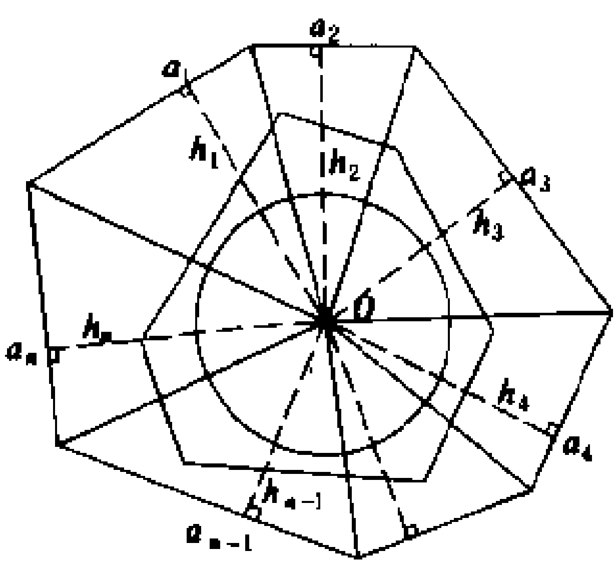

图 15.18

由于这些小矩形有重叠，所以在 I 的中间至少有一点未被这些小矩形盖住，记这点为 O. 作⊙(O, R)，其中 $R=\frac{S_2}{p_2}$，则⊙(O, R)在多边形 I 内部.

连结点 O 与多边形 I 的各顶点. 自 O 向 I 的各边作垂线，设垂线长依次为 $h_1, h_2, \cdots, h_n$(图15.18)，则

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}a_1h_1+\frac{1}{2}a_2h_2 \\
&\quad +\cdots+\frac{1}{2}a_nh_n \\
&> \frac{1}{2}a_1R+\frac{1}{2}a_2R+ \\
&\quad \cdots+\frac{1}{2}a_nR \\
&= \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots \\
&\quad +a_n)R \\
&= \frac{1}{2}p_1R.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \frac{2S_1}{p_1}>R=\frac{S_2}{p_2}.$$

例 15.9 求证：单位长的任何曲线能被面积为 1/4 的矩

形纸片所覆盖.

分析 曲线被图形覆盖,在第 2 节"圆面覆盖"中的例2.7有过类似的情况,说的是桌面上一个周长是 $2l$ 的线圈,可以被一个半径为 $l/2$ 的圆纸片所覆盖. 当 $2l=1$ 时,即桌面上一个周长为 1 的闭线圈可以被一个半径为 1/4 的圆纸片所覆盖. 注意到半径为 1/4 的圆的外切正方形边长为 1/2,其面积为 1/4,这表明单位长的闭曲线圈,必能被一个面积为 1/4 的正方形(特殊的矩形)所覆盖.

所以我们应着力对单位长的非闭曲线进行分析,并且在方法上也要改进:可采用作出单位长曲线的外切矩形的办法,再设法证明这个矩形的面积不超过 1/4 即可.

证 单位长曲线的端点设为 P_0,P_5,连结 P_0,P_5 的直线记为 l(若曲线为闭线圈时,$P_0\equiv P_5$,l 即为过线圈上任一点的直线).

作覆盖此单位长曲线且有一组对边与 l 平行的面积最小的矩形 $ABCD$,其中 $AB/\!/CD/\!/l$,$BC\perp l$,$DA\perp l$(图 15.19). 矩形 $ABCD$ 的四条边均与曲线有公共点.

令 $AB=a$,$BC=b$. 在矩形的四个边上各取一个与曲线的公共点,依次记为 P_1,P_2,P_3,P_4,则折线长

$$P_0P_1+P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_5\leqslant \text{曲线长}=1.$$

设 $P_0P_1,P_1P_2,P_2P_3,P_3P_4,P_4P_5$ 在 l 上的投影分别是 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,则

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\geqslant a.$$

设 $P_0P_1,P_1P_2,P_2P_3,P_3P_4,P_4P_5$ 在垂直于 l 的直线上的

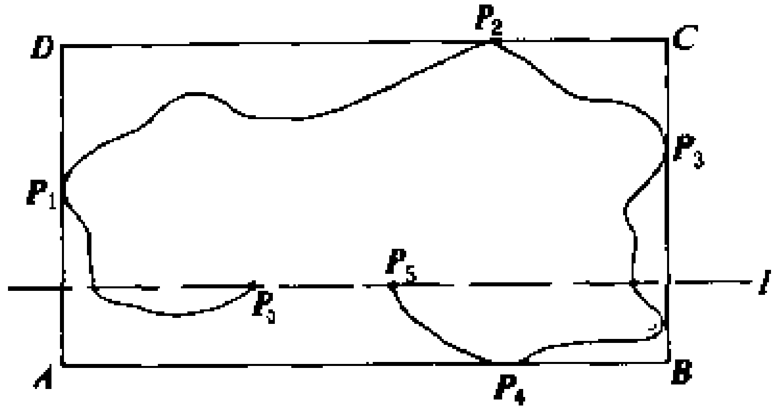

图 15.19

投影分别是 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5，则

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 \geqslant 2b.$$

由勾股定理及闵可夫斯基不等式①得

---

① 我们所用的是闵可夫斯基(H. Minkowski，1864～1909，德国数学家)不等式的一个特殊情况：对 10 个正数，x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 与 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5，恒有

$$\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}+\sqrt{x_3{}^2+y_3{}^2}+\sqrt{x_4{}^2+y_4{}^2}+\sqrt{x_5{}^2+y_5{}^2}$$

$$\geqslant \sqrt{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2+(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^2}.$$

此结论从图 15.20 中很容易根据线段 OA 的长不超过连结 O，A 两点的折线长直观地加以证明.

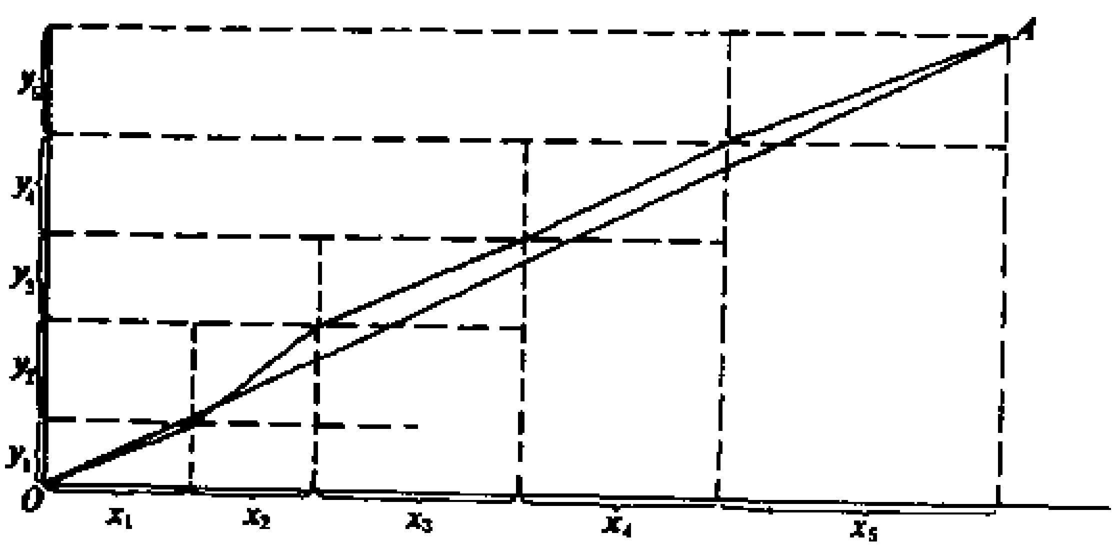

图 15.20

$$
\begin{aligned}
1 &\geqslant P_0P_1+P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_5\\
&=\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}+\sqrt{x_4^2+y_4^2}\\
&\quad+\sqrt{x_5^2+y_5^2}.\\
&\geqslant\sqrt{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2+(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^2}\\
&\geqslant\sqrt{a^2+4b^2}.
\end{aligned}
$$

再由平均不等式得

$$ab=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\cdot 4b^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+4b^2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{4}.$$

这表明，矩形 $ABCD$ 的面积不超过 1/4. 当然，当矩形 $ABCD$ 的面积<1/4 时，可以适当增加矩形的边长，使新矩形面积恰为 1/4. 因此，单位长的任何曲线能被面积为 1/4 的矩形纸片所覆盖.

说明 本题可以看成是例 2.7 的一种推广，所用的射影方法是处理折线问题常用的方法.

例 15.10 在一个面积为 1 的正三角形内部(不含边界)任意放入五个点. 证明：在此正三角形内，一定可以作三个正三角形覆盖这五个点，这三个正三角形的各边平行于原三角形的边，并且它们的面积之和不超过 0.64.

分析 由三个正三角形的面积之和不超过 0.64，我们设想在面积为 1 的正三角形 ABC 中作一个面积为 0.64 的正三角形作为参照物. 易知面积为 0.64 的正三角形与面积为 1 的正三角形 ABC 的边长之比为 4 : 5. 如图 15.21 所示，取 $AF : AB=AR : AC=4 : 5$，此时，$FR\parallel BC$，$S_{\triangle AFR}=0.64$. 按

这种方法还可以作出 $\triangle BHE$，$\triangle CDG$，它们的面积都为 0.64. 于是我们萌发一种想法，比如当有不少于三个点落在正三角形 AFR 内时，由于这三点不在边上，可以作 AF 边的平行线，使一个面积

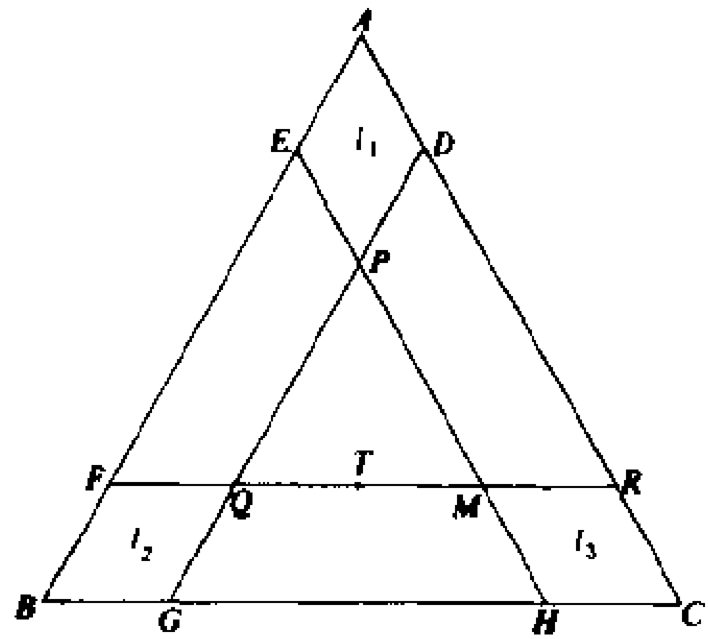

图 15.21

为 $0.64-s$ 的正三角形盖住这三个点，而另外至多还有两个点，每一个用一面积为 $s/2$ 的小正三角形盖住，这样就会找到合于题设条件的三个正三角形，盖住了这五个点，它们面积之和不超过 0.64. 这个分析使我们看到了希望. 但马上会发现，五个点的分布并不那么简单. 因此，要分情况讨论. 比如，我们只以小菱形 I_1 中点的个数来分类：

(1)I_1 中无点分布；

(2)I_1 中有三个或三个以上的点；

(3)I_1 中有两个点；

(4)I_1 中有一个点.

按上述分类，就可以展开我们的证明了.

证 如图 15.21 所示，在面积为 1 的正三角形 ABC 的边 AB 上取点 E,F，在边 BC 上取点 G,H，在边 CA 上取点 R，D，使得

$$AE : EF : FB = 2 : 6 : 2,$$
$$AD : DR : RC = 2 : 6 : 2,$$
$$BG : GH : HC = 2 : 6 : 2,$$

连结 DG, EH, FR，将正三角形 ABC 分成七个部分：顶点处是三个小菱形 I_1, I_2, I_3，中间是一个正三角形 PQM，周围有三个梯形.

现对五个点在 I_1 中几种可能的分布情况进行分类讨论：

(1)I_1 中无点. 这时五个点全分布在正三角形 DCG 与正三角形 EBH 两个区域的并中，根据抽屉原则，至少有一个正三角形（不妨设其为 $\triangle EBH$）中至少包含三个已知点（图 15.22）. 由于这些点不在边界 EB 上，故可向形内平移 EB 直到遇到所含点的位置 $E'B'$ 时为止. 这时，正三角形 $E'B'H$ 盖住了至少三个点，且 $S_{\triangle E'B'H} < 0.64$. 设 $S_{\triangle E'B'H} = 0.64 - s \quad (s > 0)$，则在其余部分中至多还有两个点. 这时对每个点都可以用一个三边分别与正三角形 ABC 各边平行且面积 $\leqslant s/2$ 的小正三角形盖住. 这时五个点用合于题设条件的三个正三角形盖住，并且这三个正三角形面积之和不超过 0.64.

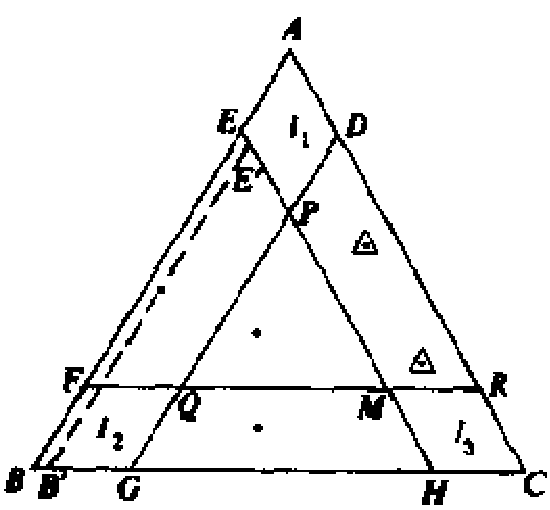

图 15.22

(2)I_1 中有三个或三个以上的点. 显然，此时过 P 作 BC 边的平行线，交 AB 于 E'，交 AC 于 D'（图 15.23），则 $S_{\triangle AE'D'}$

$=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}=0.16$，它已经盖住了至少三个点. 当然，另外两点可用两个小正三角形盖住，使这三个正三角形的总面积不超过 0.64.

(3)I_1 中恰含两个点. 这时，若其余三个点中至少有一点分布于 FR 上方时，则正三角形 AFR 盖住了至少三个点，按(1)的办法可以作一个面积为 $0.64-s$ 的正三角形盖住这三个点，另外两点各用一个面积为 $s/2$ 的小正三角形去覆盖，即可得证.

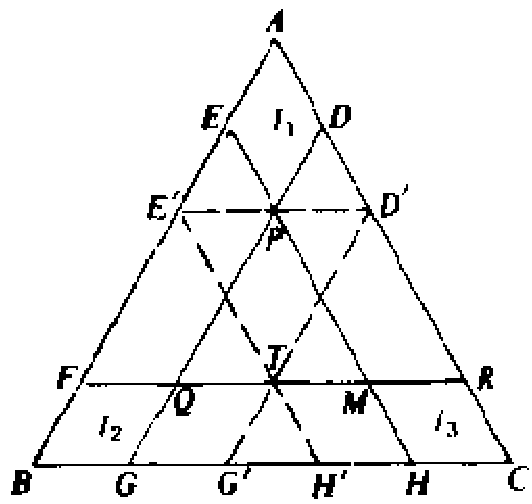

图 15.23

若其余三个点均分布在 FR 的下方，即分布在梯形 $BFRC$ 中时，过 FR 的中点 T 分别作 AB，AC 的平行线 $D'G'$，$E'H'$（图 15.23），这时$\triangle BH'E'$，$\triangle CG'D'$都是面积为$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}=0.36$ 的正三角形，它们盖住了梯形 $BFRC$、即盖住了三个点. 因此，这两个正三角形中必有一个盖住了至少两个点，不妨设其为$\triangle BH'E'$. 又正三角形 $AE'D'$ 面积为 0.16，它盖住了小菱形 I_1，因此又盖住了两个点. 此时面积为 $0.36+0.16=0.52$ 的两个正三角形已盖住至少 4 个点，至多还有一个点，只要作一个面积为 0.1 的小正三角形盖住它即可. 这时，总面积为0.53的三个正三角形盖住了所给的五个点.

(4)I_1 中恰有一个点. 这时情况较为复杂. 我们先看 I_2，若 I_2 中不含点，则转化为(1)可证；若 I_2 中含三个或四个点，转化为(2)可证；若 I_2 中含两个点，转化为(3)可证；剩下只有 I_2 也含一个点的情形. 对 I_3 仿此推理，最后也是只剩下 I_3 含一个点的情形. 即对 I_1，I_2，I_3 各都含一个点的情形，我们需要专门证明.

这时其余两个点分布在①，②，③，④这四个区域之中(图15.24). 它至多分布在其中两个区域之中，即只有①，④；①，②；①，③；②，④；②，③；③，④这六种组合形式. 但①，④；③，④；①，③均被盖在面积为0.64的正三角形 AFR 下. ①，②；②，④均被盖在面积为 0.64 的正三角形 BEH 下. ②，③则被盖在面积为0.64的正三角形 CDG 下. 总之，$\triangle AFR$，$\triangle BEH$，$\triangle CDG$ 中总有一个要盖住三个点. 不妨设正三角形 BEH 盖住了三个点. 这时仿照(1)的做法即可得证.

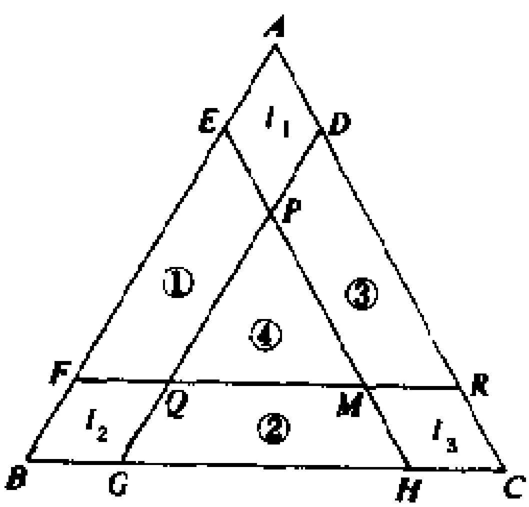

图 15.24

综上所述，所证命题成立.

说明 我们为了说明分类讨论的层次，证明写得较细致. 读者也可采用其他更概括的分类法进行简化，但相应的证明难度会增加.

题中求证三个覆盖正三角形面积之和不超过 0.64，这并

非最好的结果.应用题中的方法,有人证出这三个正三角形面积之和不超过$\frac{100}{169}=0.5917\cdots<0.6<0.64$,并指出$\frac{100}{169}$是符合题意要求的最小值.建议读者独立地探索一下这个结果.

例 15.11 给定面积之和等于 1 的若干个正方形.证明:可以把这些正方形无重叠地放入面积为 2 的正方形之中.

分析 本题给定面积之和等于 1 的若干个正方形,可能是有限个,也可能是无穷多个.因此,我们需要设计一种将这些正方形无重叠地放入面积为 2(即边长为 $\sqrt{2}$)的大正方形中去的方法.

可以直观地设想,让这些正方形按边长从大到小排队,然后一段一段往正方形中放,第一层不能再放了,就放第二层,这样一直继续下去.直到放完为止.我们的证明,实质上就是这个思想的摹写和具体化.

证 把已给的正方形按边长递减的次序排序为 M_1, $M_2,\cdots,M_n,\cdots$.其对应的边长为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,其中 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots$.

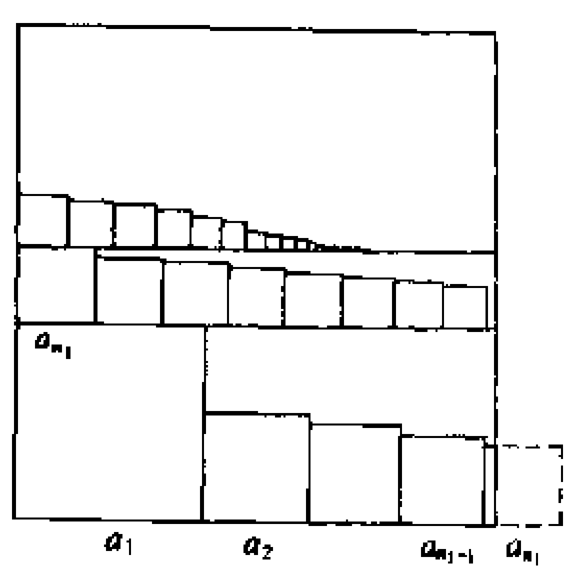

图 15.25

把这些正方形从边长最大的开始,自左至右排在边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形的最下层(图 15.25),第一层放入 M_1, $M_2,\cdots,M_{n_1-1}$,由 M_{n_1} 开始放人第二层,于是

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n_1-1}\leqslant\sqrt{2},$$

而 $$a_1+a_2+\cdots+a_{n_1-1}+a_{n_1}>\sqrt{2}.$$

一般地，第 $i+1$ 层($i=1,2,\cdots$)的第一个正方形是 M_{n_i}，则

$$a_{n_{i-1}}+a_{n_{i-1}+1}+\cdots+a_{n_i-1}\leqslant\sqrt{2},$$

$$a_{n_{i-1}}+a_{n_{i-1}+1}+\cdots+a_{n_i-1}+a_{n_i}>\sqrt{2}.$$

因此，
$$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n_1}^2\geqslant a_{n_1}(a_2+a_3+\cdots+a_{n_1})$$
$$>a_{n_1}(\sqrt{2}-a_1),$$

$$a_{n_1+1}^2+a_{n_1+2}^2+\cdots+a_{n_2}^2>a_{n_2}(\sqrt{2}-a_{n_1})\geqslant a_{n_2}(\sqrt{2}-a_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n_i+1}^2+a_{n_i+2}^2+\cdots+a_{n_{i+1}}^2>a_{n_{i+1}}(\sqrt{2}-a_{n_i})\geqslant a_{n_{i+1}}(\sqrt{2}-a_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

注意到这若干个正方形的面积之和为 1，相加得

$$1-a_1^2=a_2^2+a_3^2+\cdots>(\sqrt{2}-a_1)(a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots),$$

即
$$a_1+a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots<a_1+\frac{1-a_1^2}{\sqrt{2}-a_1}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}a_1+\sqrt{2}a_1-a_1^2-1}{\sqrt{2}-a_1}+a_1$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-a_1)+a_1(\sqrt{2}-a_1)-1}{\sqrt{2}-a_1}+a_1$$

$$=\sqrt{2}+2a_1-\frac{1}{\sqrt{2}-a_1}$$

$$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2a_1-\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}a_1}$$

$$=3\sqrt{2}-\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}a_1+\frac{1}{2-\sqrt{2}a_1}\right)$$
$$\leqslant 3\sqrt{2}-\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}.$$

最后一步，应用了 $t>0$ 时 $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$ 这个不等式. 这表明，放入的正方形纵向各层高度的总和不超过 $\sqrt{2}$. 因此，这些面积之和为 1 的正方形能够不重叠地放入边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形中.

思考 关于一系列小正方形嵌入大正方形的问题还有很多. 比如"证明：边长分别为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$ 的无限多个正方形能无重叠地嵌入一个边长为 1.5 的正方形中"，我们留给读者去思考.

例 5.12 给定一个凸多边形，它的顶点和边上某点的连线将多边形面积等分为两部分，任何这样的线段的长度都不超过 1. 证明：该多边形的面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

分析 很容易想到，以 O 为中心直径为 1 的圆具有类似的性质：每条直径都等分圆面积，且 $\odot O$ 的面积等于 $\frac{\pi}{4}$. 这是多边形边数无限增多时的极限情况. 由若干个小扇形可以生成这个圆. 对于多边形，可以设法变成若干个小部分进行研究，只要这些小部分旋转一周可以覆盖整个多边形就可以了.

证 见图 15.26，考察所有的面积等分线(它们不一定相交于一点)，每两条"相邻"的面积等分线相交成蝴蝶结形，比如图中的 AD 与 BC 交成 $ABCD$，它是由 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ (它们在公共点 O 处的交角为 α) 构成的图形. 由 AD，BC 都

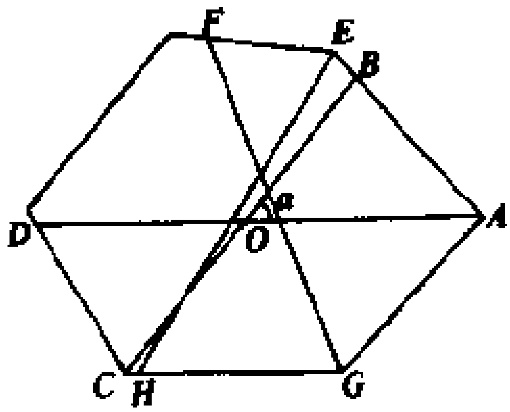

图 15.26

是面积等分线可知

$$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COD},$$

由此得

$$S_{ABCD}\leqslant\frac{AD\cdot BC\sin\alpha}{4}$$

$$<\frac{\alpha}{4}\quad(\because\sin\alpha<\alpha).$$

如果现在等分线 AD 沿着多边形的边界按逆时针方向转动 $180°$(即从 A 转到 D),那么,第一,所有"蝴蝶结"形将逐一被考察;第二,它们的总面积小于$\frac{\pi}{4}$;第三,这些"蝴蝶结"形覆盖了多边形的任一点 M. 这是由于点 M 在射线 AD 和 DA 的不同侧. 等分线 AD 逆时针旋转经历了所有等分线后才转到 DA,所以点 M 总是在某对相邻的"等分线"如 EH 和 FG 之间的"蝴蝶结"形之内. 因此,该多边形面积将不大于所有"蝴蝶结"形面积之和,即多边形面积小于$\frac{\pi}{4}$.

本题可以看作是图形覆盖在面积估值中的应用的例子.

例 15.13 将红色三角形纸片 $R_1R_2R_3$,蓝色三角形纸片 $B_1B_2B_3$,黄色三角形纸片 $Y_1Y_2Y_3$ 叠放在一起,一根针在点 M 处恰扎穿这三张纸片. 求证:可以从红、蓝、黄三个三角形中各取一个顶点,组成不同颜色顶点的三角形 $R_iB_jY_k$(i,j,k 取值 1,2 或 3),使得点 M 在$\triangle R_iB_jY_k$ 的内部或边界上.

分析 题设条件是红、黄、蓝三张三角形纸片有公共点 M,要证的是存在一个不同颜色顶点的三角形,M 被该三角

形覆盖.

我们假设 M 已在线段 B_jY_k 一侧(图 15.27),这时,M 到 B_jY_k 有一段距离 $d>0$,我们发现,B_jR_i 在 $\angle MB_jY_k$ 内部时,M 到端点异色的线段 B_jR_i 的距离将小于 d. 此时 $\triangle R_iB_jY_k$ 将盖不住点 M.

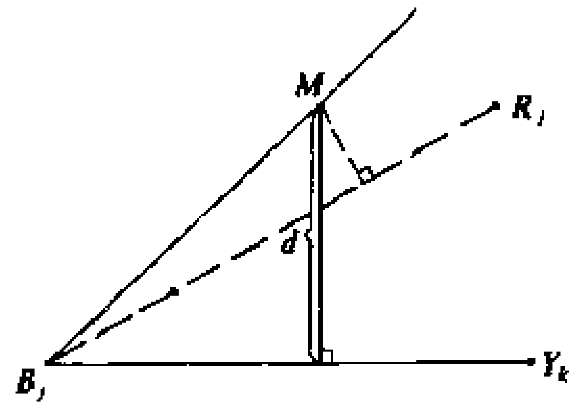

图 15.27

于是可以想到,$\triangle R_iB_jY_k$ 的选取,与 M 到端点异色线段的最小非零距离 d 有关. 这样就形成了我们的证法.

证 将异色点两两连结成线段,由于端点异色的线段只有有限条,取 M 到这些端点异色的线段的非零距离,其中必有一最小值 d. 为确定起见,不妨设点 M 到线段 B_1Y_2 的距离恰是最小非零距离 d(图 15.28).

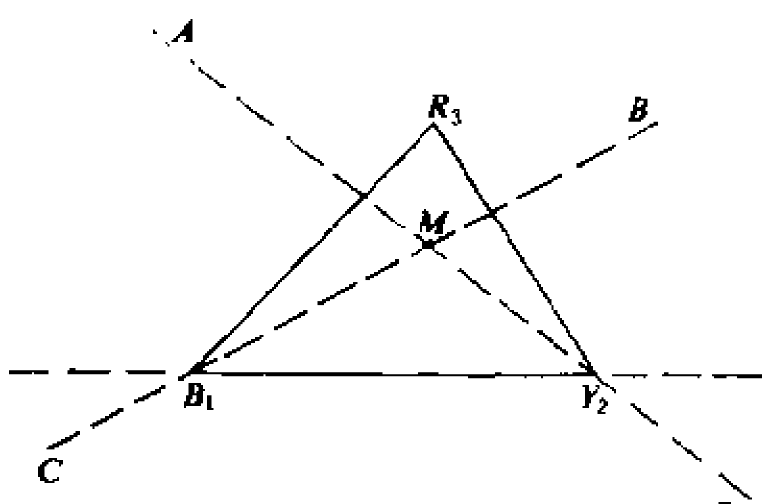

图 15.28

这时连结 B_1M,Y_2M. 显然,红点 R_1,R_2,R_3 不能全分布在直线 B_1Y_2 下方,因为那样一来,$\triangle R_1R_2R_3$ 将不盖住 M,与

题设矛盾. 因此,R_1、R_2、R_3 中至少有一点在直线 B_1Y_2 的上方,不妨设红点 R_3 在 B_1Y_2 的上方. 若 R_3 在 $\angle MB_1Y_2$ 内部,正如分析中所说,则有 M 到 B_1R_3 的距离小于 d,与 d 的选取矛盾,所以 R_3 不能在 $\angle MB_1Y_2$ 内部. 同理可证,R_3 也不能在 $\angle MY_2B_1$ 内部. 因此,R_3 只能在 $\angle AMB$ 的内部或边界上.

连结 R_3B_1,R_3Y_2,则点 M 在 $\triangle B_1Y_2R_3$ 的内部或边界上.

说明 选择 M 到异色端点线段最小距离的方法,在数学中称为"极端原理",即"在有限个实数值中一定存在最大值,也一定存在最小值". 其实本题也可以用 M 与异色点连线所成角的最大值来证明,其方法如下:

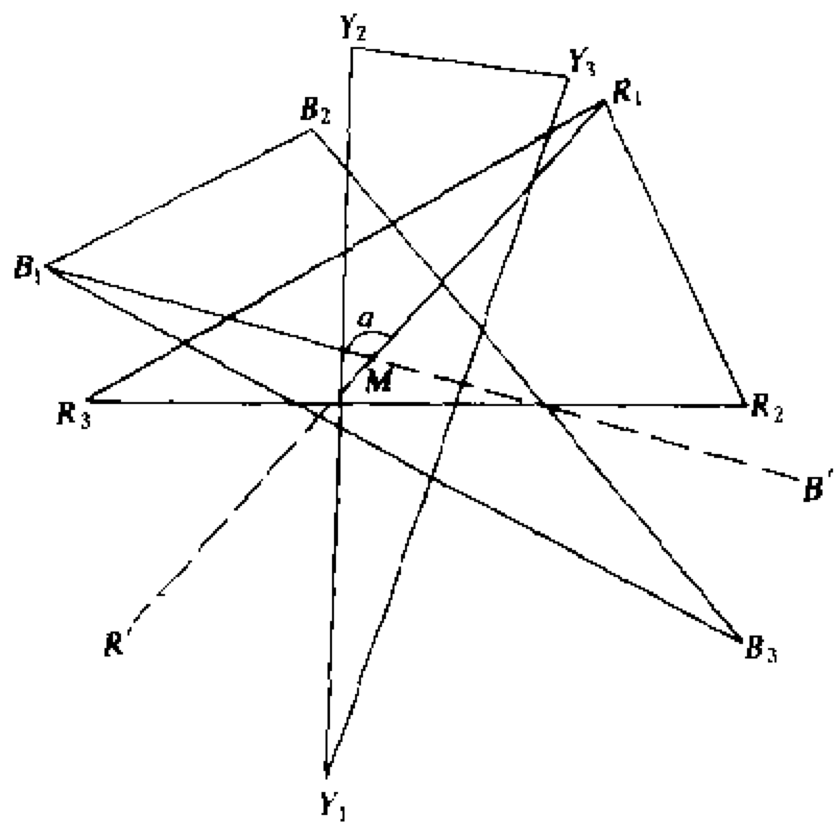

图 15.29

将点 M 与 R_1,R_2,R_3,B_1,B_2,B_3,Y_1,Y_2,Y_3 连结,找出点

M 对不同颜色的两个顶点的所有视角. 这些视角只有有限个, 所以必存在最大视角. 不妨设 $\alpha=\angle R_1MB_1\leqslant 180^\circ$ 为最大视角(图 15.29), R_1 是红点, B_1 是蓝点. 由图可见, $\angle R_1MB'$ 和 $\angle B_1MR'$ 都是 α 的邻补角, 可以断言, 在 $\angle R_1MB'$ 及 $\angle B_1MR'$ 中没有黄点. 如若不然, 这里有黄点 P, 则 $\angle PMR_1$ 或 $\angle PMB_1$ 将比 α 更大, 与 α 的选法矛盾. 这时可以肯定黄点只能分布在 $\angle R_1MB_1$ 及 $\angle R'MB'$ 中.

另外, 黄点 Y_1、Y_2、Y_3 若全分布在 $\angle R_1MB_1$ 中(可以在边上, 但不在顶点 M), 则 $\triangle Y_1Y_2Y_3$ 盖不住点 M, 与题设条件不符. 因此, 至少有一个黄点, 不妨设为 Y_1 要分布在 $\angle R'MB'$ 中(含顶点 M 及边射线 MR'、MB'), 这时, 连结 B_1Y_1、Y_1R_1. 若 $\angle B_1MR_1=180^\circ$, 则 M 在 $\triangle R_1B_1Y_1$ 的边界上; 若 $\angle B_1MR_1<180^\circ$, 则 M 与 Y_1 在 B_1R_1 同侧, 而 Y_1B_1 与 R_1M 的延长线 MR' 相交、R_1Y_1 与 B_1M 的延长线 MB' 相交, 所以点 M 在 $\triangle Y_1B_1R_1$ 的内部或边界上.

本节进一步考察了各种类型的覆盖例题. 大家看到, 重叠原理、用定义构造、分类讨论、极端原理、抽屉原则等的综合运用, "演出"了一系列精彩的画面. 品味这些例题, 可以提高你的数学能力和数学素养.

16

名趣问题四则

问题是数学的心脏.有许多初等数学中的发现是非常优美而激动人心的.历代数学工作者为之探索奋斗,留下了不朽的篇章.本节我们选择图形覆盖中的四则名题趣题,介绍给读者.让我们一起来欣赏这动人心魄的"数学美"吧!

1. 图钉钉圆问题

这个问题是数学家盖莱(T. Gallai)提出的,故又称为盖莱问题:

n 个圆纸片放在一张平板上,每两个圆纸片都有公共点.证明:可以用七个图钉把它们全部钉在平板上.

这就是著名的盖莱"钉圆"问题.

要解决这个问题,首先应把问题中的经验材料抽象化,将日常生活语言翻译成数学语言,

使问题变成纯数学问题：

有 n 个圆面，每两个圆面都有公共点．证明：可以找到七个点，使得每个圆面至少含有这七个点中的一个点．

证　设$\odot O$ 为其中半径最小的圆，不妨就假定它的半径是 1．我们以 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径画一个$\odot(O,\sqrt{3})$．设正六边形 $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ 是$\odot(O,\sqrt{3})$的内接正六边形(图16.1)．我们证明，对 $O_1,O_2,O_3,O_4,O_5,O_6,O$ 这七个点，n 个圆中每个圆至少包含这七个点中的一个点．

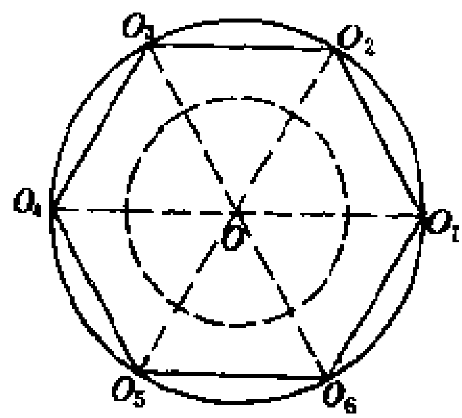

图 16.1

事实上，对任一已知的$\odot(A,a)$来说，因为$\odot(A,a)$与$\odot(O,1)$有公共点，所以

$$AO=b\leqslant a+1.$$

若 O 在$\odot(A,a)$的内部，则这圆已被钉住．

若 O 不在$\odot(A,a)$的内部，则 $b\geqslant a$．不妨设点 A 在$\angle O_1OO_2$ 这个 60°角的内部或边上．并且不失一般性，设$\angle AOO_1\leqslant 30°$(图 16.2)．于是，由余弦定理得

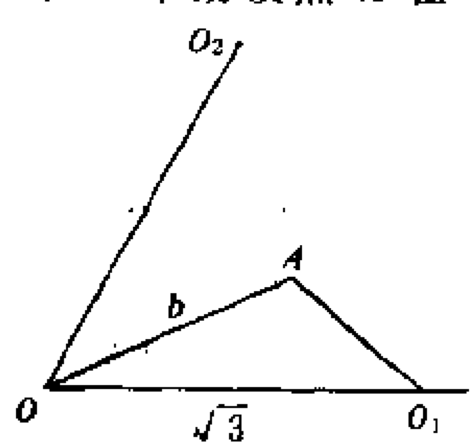

图 16.2

$$\begin{aligned}AO_1^2&=b^2+3\\&\quad-2\cdot b\cdot\sqrt{3}\cos\angle AOO_1\\&\leqslant b^2+3-3b.\end{aligned}$$

因为 $1\leqslant a$，所以

$$a^2-3a+3\leqslant a^2,$$

$$(a+1)^2-3(a+1)+3=a^2-a+1\leqslant a^2.$$

而 $a\leqslant b\leqslant a+1$，所以由二次函数

$$y=x^2-3x+3$$

在 b 的值得

$$AO_1{}^2\leqslant\max\{a^2-3a+3,(a+1)^2-3(a+1)+3\}\leqslant a^2.$$

于是 $AO_1\leqslant a$，从而 O_1 属于$\odot(A,a)$内部. 换句话说，$\odot(A,a)$ 被在 O_1 处的图钉钉住.

这样我们就完成了盖莱钉圆问题的证明.

盖莱钉圆问题引起了人们的兴趣. 人们进一步猜想，七个图钉还能不能减少？并就图钉钉等圆的情况以及图钉最小个数的问题进行了探讨. 有些问题甚至直接反映为数学竞赛中非常引人注目的问题.

例 16.1 任意剪六个圆纸片放在桌面上，使得没有一个纸片的中心落在另一个纸片之上或被另一个纸片盖住. 然后用一个图钉去钉这一堆纸片. 证明：不论钉尖落在哪一点，总是不能一次把六个纸片都钉住.

将这个问题翻译为纯数学问题，可以表述为：设平面上有六个圆，每个圆的圆心都在其余各圆的外部. 证明：平面上任一点都不会同时在这六个圆的内部.

下面我们用反证法来加以论证.

证 设平面上有一点 M 同时在这六个圆的内部，连接 M 与六个圆的圆心(图 16.3)，则

$$\angle O_1MO_2+\angle O_2MO_3+\cdots$$
$$+\angle O_6MO_1=360^\circ. \qquad (1)$$

但另一方面，

$$O_iM<O_iO_{i+1},$$
$$O_{i+1}M<O_iO_{i+1}$$
$$(i=1,2,3,4,5,6;O_7=O_1),$$

即 O_iO_{i+1} 是 $\triangle O_iO_{i+1}M$ 中的最大边. 所以

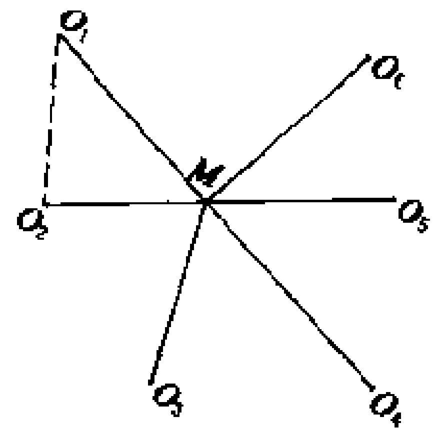

图 16.3

$$\angle O_iMO_{i+1}>60^\circ,$$

故有 $\angle O_1MO_2+\angle O_2MO_3+\cdots+\angle O_6MO_1>360^\circ. \qquad (2)$

与式(1)矛盾，所以平面上任一点 M 都不会同时在这六个圆的内部. 即不论图钉钉在哪一点，总是不能一次钉住这六张圆纸片.

如果我们给的是半径相等的圆纸片，情况又将如何呢?

例 16.2 n 个半径相等的圆纸片，每两个圆纸片都互相重叠(即有公共内点). 证明：用三个图钉就可以把它们完全钉住.

证 设这 n 个圆纸片的半径都是 1. 由于每两个圆都有公共内点，所以，这 n 个圆的圆心形成了一个直径小于 2 的点集.

由于直径为 1 的点集能被一个边长为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的正六边形纸片所覆盖(见例 8.3)，所以可以直接推出：直径不超过 2 的点集，能被一个边长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$的正六边形纸片所覆盖.

如图16.4所示，边长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$的正六边形纸片 $ABCDEF$ 盖住了 n 个半径为1的圆纸片的圆心所组成的点集，且这 n 个圆心都在正六边形 $ABCDEF$ 的内部. 取 AC 中点 I，CE 中点 J，AE 中点 K，则 $AI=IC=1$，$CJ=JE=1$，$AK=KE=1$. 这表明，正六边形中每一点到 I,J,K 三点之一的距离不超过1. 由于这 n 个圆心都在正六边形 $ABCDEF$ 内部，所以，这 n 个半径为1的圆纸片的圆心到 I,J,K 中至少有一个的距离小于1. 因此，这 n 个半径为1的圆纸片的每一个都至少被 I，J，K 处的三个图钉之一所钉住. 命题得证.

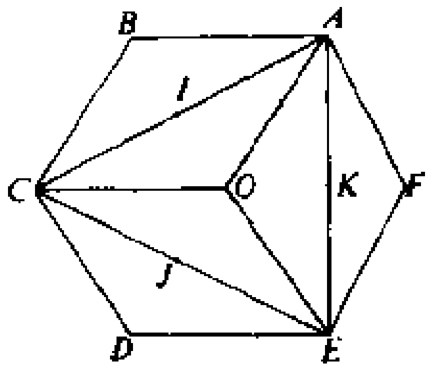

图 16.4

例 16.3 已知一组半径为1的圆纸片：$\odot K_0$，$\odot K_1$，$\odot K_2$，…，$\odot K_n$，如果 $\odot K_1$，$\odot K_2$，…，$\odot K_n$ 中每一个都与 $\odot K_0$ 有公共点，设用 n 个图钉必可钉住这组纸片. 试证：n 的最小值是7.

证 设$\odot(K_i,1)(i=1,2,\cdots,n)$与$\odot(K_0,1)$有公共点，因此，$K_i$ 在$\odot(K_0,2)$内. 根据例 9.3 可知，由六个圆$\odot(A_1,1)$，$\odot(A_2,1)$，$\odot(A_3,1)$，$\odot(A_4,1)$，$\odot(A_5,1)$，$\odot(A_6,1)$再加上$\odot(K_0,1)$就可以完全盖住$\odot(K_0,2)$(图 16.5).

所以在 $K_0,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6$ 这七点钉上七个图钉，则圆纸片$\odot K_0$，$\odot K_1$，$\odot K_2$，…，$\odot K_n$ 都将被钉住. 所以 $n\geq 7$.

现在我们证明 $n\leqslant 6$ 不能成立.

将 $\odot(K_0,2)$ 的圆周 48 等分，以分点 $K_1,K_2,\cdots,K_{48}$ 及 K_0 为圆心作 49 个半径为 1 的圆. 由于每一个半径为 1 的圆至多能覆盖 $\odot(K_0,2)$ 的圆周的 1/6，即它至多覆盖 $K_1,K_2,\cdots,K_{48}$ 中的 9 个点，

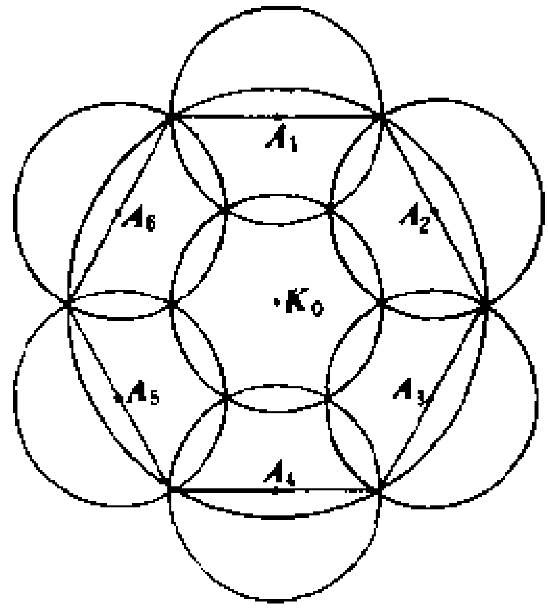

图 16.5

所以五个半径为 1 的圆至多能覆盖这 48 个点中的 45 个点. 因而在 $\odot(K_0,2)$ 的周界上的五个图钉至多能钉住 $\odot K_1$, $\odot K_2,\cdots,\odot K_{48}$ 中的 45 个圆纸片.

用六个图钉，其中一个钉住 $\odot(K_0,1)$，它至多还钉住 $\odot K_i(i=1,2,\cdots,48)$ 中的一个圆纸片；其余五个图钉至多钉住 $\odot K_i(i=1,2,\cdots,48)$ 中的 45 个圆纸片. 因而至少还有两个圆纸片未被钉住. 所以 $n\leqslant 6$ 不能成立，即 $n>6$.

因此，n 的最小值是 7.

例 16.3 表明，任给 n 个等圆纸片，每一个圆纸片都与其中某个固定的圆纸片有公共点时，用七个图钉就可以钉住这 n 个圆纸片，并且 7 这个值不能再改善了.

但是对盖莱问题，"n 个圆面，每两个都有公共点"的情形（不是都与某个定圆有公共点），七个圆的个数是可以改进的. 经过许多数学家的努力，最后由但泽（L. Danzer）彻底解决. 他将"7"改进为"4"，并举例证明"4"这个值不能再改进了. 当

然，对于 n 个等圆面，如例 16.2 所证，用三个图钉就可以了.

2. 果园问题

作为平面图形覆盖的一个有趣的应用，我们介绍一个非常著名的果园问题. 通过这个问题的研讨，我们可以进一步理解数学的内在之美.

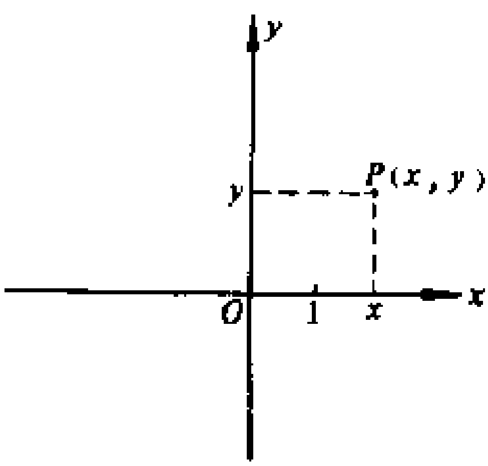

图 16.6

为了叙述方便，我们引入平面直角坐标系. 如图 16.6 所示，两条互相垂直相交于点 O 的数直线 Ox 与 Oy，组成平面直角坐标系 Oxy，点 O 称为坐标原点，Ox 称为横轴，Oy 称为纵轴. 这样一来，平面上任一点 P 可以与一对有序实数 (x,y) 建立起一一对应关系. x 称为点 P 的横坐标，y 称为点 P 的纵坐标.

特别地，我们把坐标为整数的点称为整点，或称格子点. 如 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1995,2000)$，$(-7,896)$ 等都是整点.

所谓果园问题是这样叙述的：

有一个圆形的果园，圆心在原点，半径是 50 个单位长度(图 16.8). 在果园的每个格子点处种一棵树，所有的树都被视为具有同一半径的垂直竖立的圆柱体. 证明：如果树的半径超过 1/50 个单位，那么从原点向任何方向看去，都不能看到果园以外的情景；但是，如果树的半径小于 $1/\sqrt{2501}$，就可从一个恰当的方向看到外面的情景.

问题的后一半很容易解决，而解决前一半则要用到以著

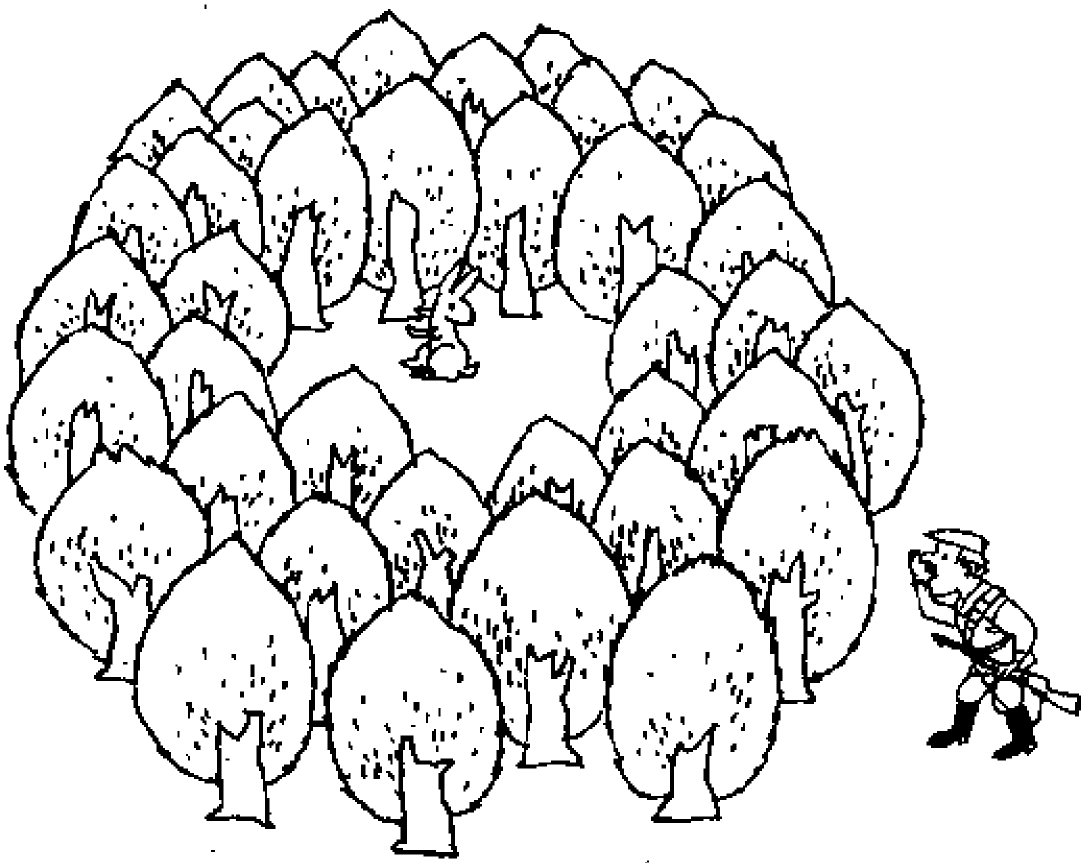

图 16.7

名数学家闵可夫斯基的名字命名的一个定理.

闵可夫斯基定理 如果一个关于原点对称的凸区域的面积大于 4，那么，该区域的内部除原点外，一定还有别的格子点.

证 我们建立如图 16.9 所示的平面直角坐标系，并且过横轴上横坐标为

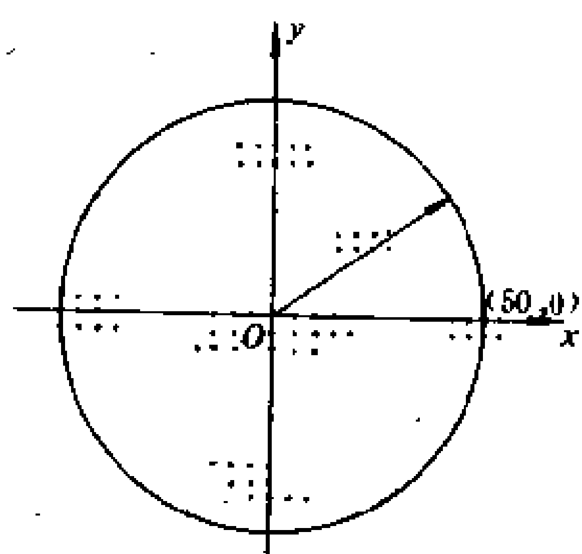

图 16.8

整数的点作 y 轴的平行线，过纵轴上纵坐标为整数的点作 x 轴的平行线，交出平面上所有的整点. 为了证明的需要，我们把分别与坐标轴距离是偶数的两组平行线画成粗实线，在平

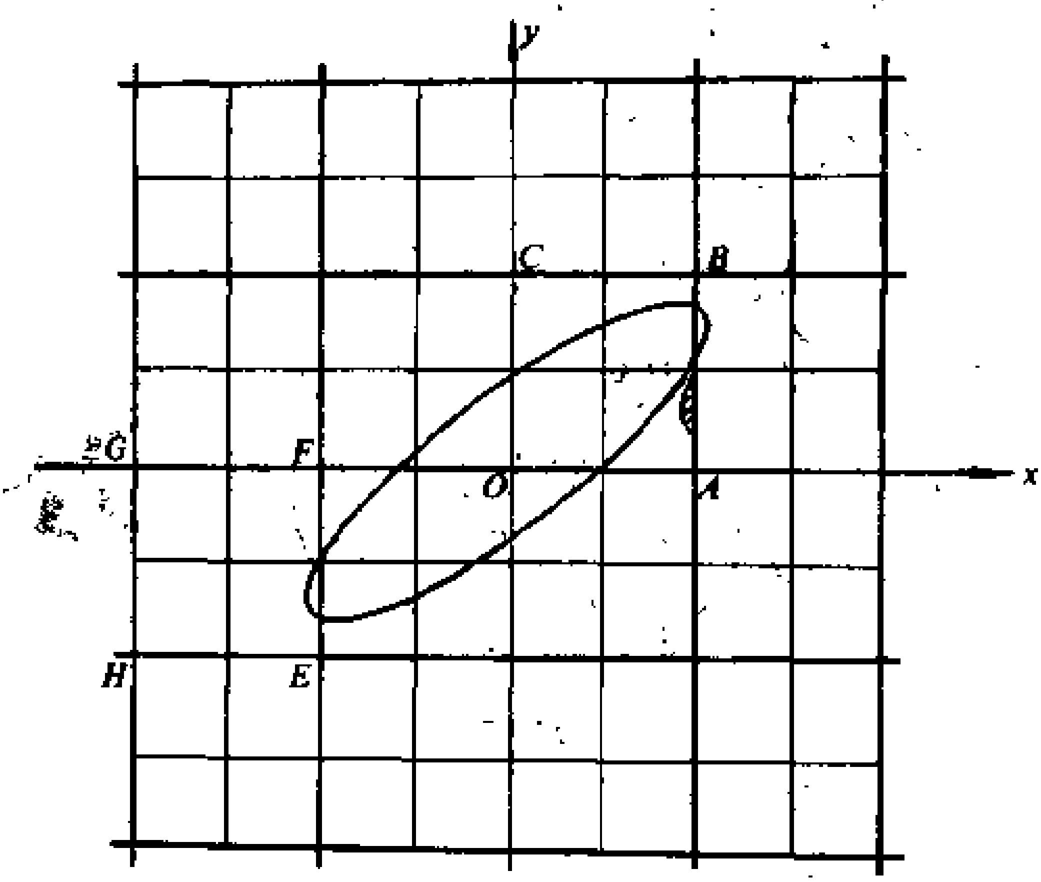

图 16.9

面上形成边长为 2 的以粗实线为边界的较大的方格. 其中标准的一个大方格是 $OABC$，它是位于第一象限面离原点 O 最近的一个大方格. 这些边长为 2 的粗实线方格把关于原点对称的凸区域分成许多块，每一个与这区域相交的大方格中各有一块，例如图 16.9 中 $EFGH$ 这个大方格中就有一小块. 把 $EFGH$ 平移到 $OABC$ 使它们彼此重合，那么 $EFGH$ 里面所包含的一小块面积也就连带地被平移到 $OABC$ 里面，如图中阴影部分. 其他大方格中的面积也可以同样平移到 $OABC$ 里

面去. 由于凸区域的面积大于 4 而 $OABC$ 的面积等于 4，根据面积重叠原理，至少有两块面积有公共点(参见例 11.7).

在移动每一个大方格时，可以先沿 Ox 轴的方向移动一段距离(等于 2 的倍数)，再沿 Oy 轴的方向移动一段距离(也等于 2 的倍数)，最后就与 $OABC$ 重合. 因此，我们从两块面积移动后有公共点这个事实可以推出，原来凸区域内有两个点 P 与 Q，它们的纵坐标的差和横坐标的差都是 2 的倍数. 连结 PO，并延长 PO 到 P'，使得 $PO=OP'$ (图 16.10). 根据区域的对称性，我们知道 P' 仍在区域内. 连结 $P'Q$，根据区域的凸性，我们知道这条线段在区域内.

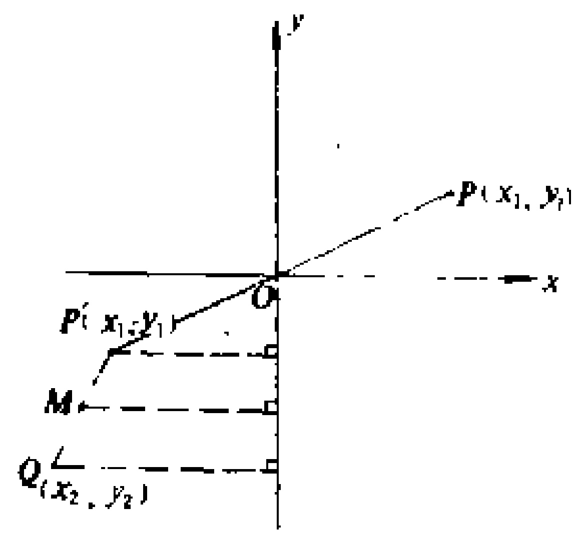

图 16.10

设 P 的坐标为 (x_1, y_1)，则 P' 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$. 设 Q 的坐标是 (x_2, y_2)，那么 $P'Q$ 中点 M 的坐标是 $\left(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)$. 由于 x_2-x_1 和 y_2-y_1 均为偶数，所以 $\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}$ 一定都是整数，即 M 一定是整点(格子点). 又由于 P, Q 是不同的两个点，所以点 M 的坐标 $\left(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)$ 不可能是(0,0). 这就表明，在我们的凸区域内至少还包含有一个不是原点的格子点.

有了上述准备知识，依据著名的闵可夫斯基定理，我们就

可以向果园问题冲击了.

证 我们希望证明,如果树的半径 r 超过 $1/50$ 个单位,就没有任何方向可以从原点看到果园外面. 设 AOB 表示果园的任一直径(图 16.11),并设树的半径 $r=1/50+q$. 我们注意到,如果 $r>1/2$,那些树就挤不下了,所以正数 q 不会是很大的正数. 现在令 p 表示任何一个大于 $1/50$ 而小于 r 的数,例如 $1/50+q/2$. 在果园的边界上 A 和 B 处作切线. 沿切线在两个方向上截取与 A,B 相距为 p 的点 C,D,E,F,这就确定了一个矩形 $FEDC$,其中心是原点 O(见图 16.11,其中把这

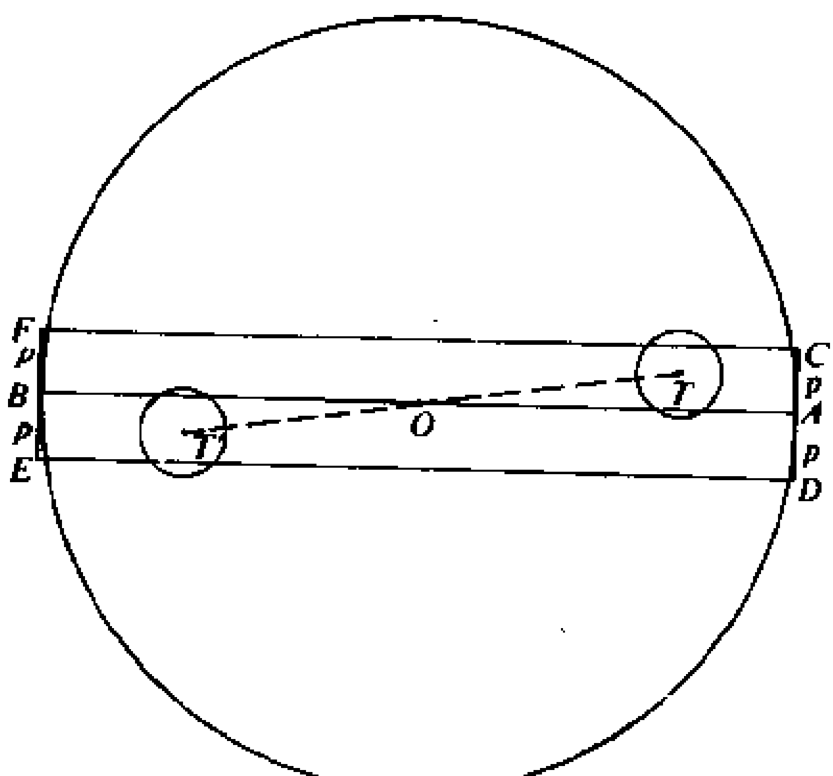

图 16.11

个矩形尺寸放大了). 矩形的长 $FC=AB=100$,宽是 $2p$,所以其面积是 $200p$. 因为 $p>1/50$,所以这个矩形面积大于 4. 由于 $FEDC$ 是一个平面凸区域,且关于原点对称,所以根据闵

可夫斯基定理.我们的矩形中含有一个异于原点的格子点 T.在点 T 种的树具有半径 $r>p=CA$. 这时以 T 为圆心 r 为半径的圆与 CF,OA 相交,因此挡住了 OA 方向的视线.根据中心对称性可知,在这个矩形中还含有一个与 T 关于 O 为中心对称的格子点 T',在点 T' 所种的半径为 r 的树挡住了 OB 方向的视线.

但是我们必须注意到,矩形 $FEDC$ 的每个角上都有很小的一部分在果园之外.如果格子点 T 刚好就落在矩形的这个部分里,则在该点处并未种树挡住我们的视线.因此我们必须证明:点 T 不会落在 $FEDC$ 在果园以外的任何部分.

矩形 $FEDC$ 的任何一点与原点的最大距离是对角线之半 $OC=\sqrt{50^2+p^2}$,由于 $0<p<1$,所以

$$OT\leqslant OC<\sqrt{2501}.$$

然而当 T 在果园以外时,我们有 $OT>50$,因此

$$2500<OT^2<2501.$$

如果 T 是格子点(x,y),则应有 $OT^2=x^2+y^2$,其中 x,y 都是整数,所以 OT^2 也是整数.但 2500 与 2501 之间不存在整数,所以点 T 不可能在果园以外.这就严格地完善了我们的证明.

因此,当树的半径超过 1/50 个单位时,从原点向任何方向看去,都不能看到果园以外的情景.

下面我们再证明:如果树的半径小于 $1/\sqrt{2501}$,则可以沿着原点到点 $N(50,1)$的射线方向看到果园以外的情景,其中线段 ON 的长度是 $\sqrt{2501}$(图 16.12).

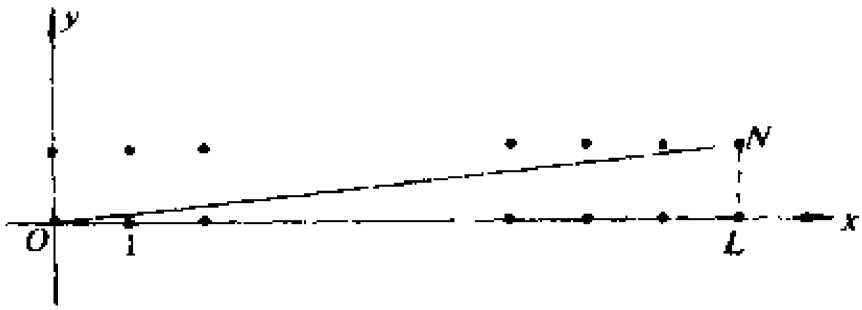

图 16.12

由于格子点是成排成列地出现的，所以由图 16.13 容易看到，果园中最靠近直线 ON 的格子点是 $M(1,0)$以及同样接近的点 $K(49,1)$. 点$(50,0)$记为 L.

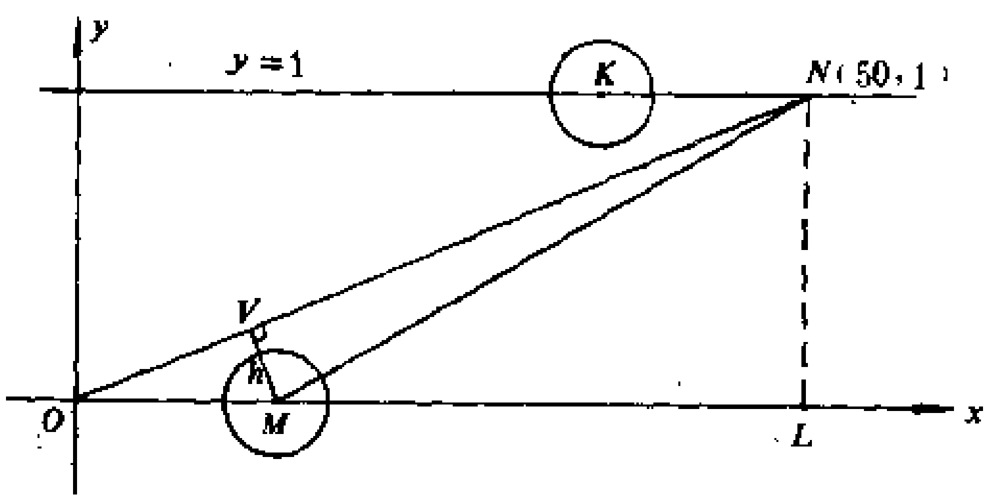

图 16.13

现在$\triangle OMN$ 的面积可以用两种办法求得：首先，这个面积是$\frac{1}{2}\cdot OM\cdot LN=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$；另外，以 ON 为底以 $h=MV$ 为高得到这个面积是

$$\frac{1}{2}\cdot ON\cdot h=\frac{1}{2}h\sqrt{2501}.$$

从而，我们可列出面积方程

$$\frac{1}{2}h\sqrt{2501}=\frac{1}{2},$$

即 $$h=\frac{1}{\sqrt{2501}}.$$

于是，当树的半径小于 $1/\sqrt{2501}$，即 h 大于树的半径时，点 M 所种的树并未与直线 ON 相交. 同样，在点 K 所种的树也并未大到足以挡住视线 ON 的程度.

既然与射线 ON 最靠近的树（点 M，K 处的两棵树）都挡不住视线 ON，所以在射线 ON 这个方向上便没有任何树能挡住我们的视线了.

这样我们便圆满地解决了果园问题. 关于果园问题，早在1954 年出版的 A. M. Яглом和 И. М. Яглом合著的《非初等问题的初等解法》中就有记载，它属于平面格点类问题.

顺便提一句，很多估值问题都与覆盖格点的知识有关. 我们不妨再举二例.

例 16.4 在果园里种树，株距是 d（图 16.14 中黑点代表树的位置）. 假如园子的面积是 A，证明：果树的株数 N 可近似表示为 $N\approx\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{A}{d^2}$.

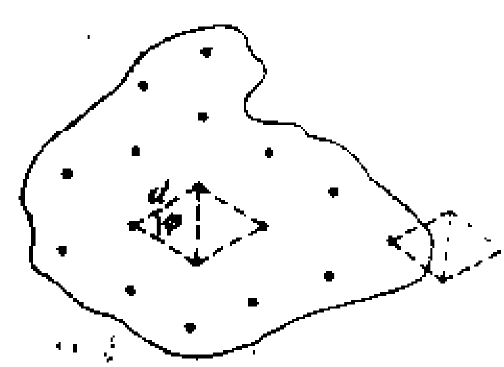

图 16.14

证 这是林学中的一个公式，可以近似估计大片果园树木的株数. 对于每个黑点，有一个四边是 d 左角 $\varphi=60°$的菱形，它的左角顶点恰好是树的位置，取这些菱形面积可得果园面积的近似值：

$$N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}d^2\right)\approx A,$$

由此推得 $$N\approx\frac{2A}{\sqrt{3}d^2}.$$

例 16.5 有一片森林可视为半径为 60 厘米的圆柱体树木的集合，它位于边长为 1000 米的正方形内部. 如果在任意 100 米长的直线路程上至少遇到一棵树，这样的森林叫做稠密的. 证明：稠密森林不少于 7430 棵树.

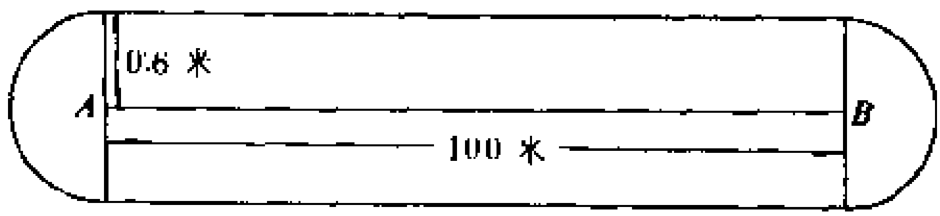

图 16.15

解 我们考察图 16.15 的图形 Φ, Φ 中的点与长为 100 米的线段 AB 的距离不超过 0.6 米. 在边长为 1000 米的正方形中，每棵树作为一个圆心应分布在 998.8 米×998.8 米的正方形内.

由于森林是稠密的，则沿任意 100 米的线段至少遇到一棵树. 因此，沿竖直方向任意 100 米长的线段至少要遇到一棵树.

将 998.8 米为边的正方形分成宽为 1.2 米、长为 998.8 米的带形域，共有 832 个. 在每个带形域中共容有 9 个图形 Φ. 由于在这个带形域中，沿竖直方向任取 100 长的线段都至少要遇到一棵树，所以每个带形域中至少应有 9 棵树. 因此整个正方形区域中树的总棵数应不少于 $9\times832=7488$，当然更有不少于 7430 棵树的结论了.

在例 16.5 中提到了“稠密的”这个用语，我们顺便提一

下，如何科学地对这个用语加以刻画.

比如在一张方桌上放有若干个5分硬币(同样大小的圆)，这些硬币不相重叠，则

$$\frac{\text{硬币面积之和}}{\text{方桌的面积}}$$

可以用来刻画桌上所放硬币的疏密程度.

一般地，设在面积为 M 的凸图形中无重叠地嵌入一组凸图形. 它们的面积分别为 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，则

$$D=\frac{G_1+G_2+\cdots+G_n}{M}$$

称为这一组凸图形 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 在凸图形 M 中的**密度**.

引入了密度概念，我们可以证明："如果在凸图形 M 内无重叠地嵌入 $n(n>1)$ 个半径为1的圆纸片，那么这组圆纸片的密度小于 $\pi/\sqrt{12}$."由于这个命题需要更多的数学知识才能证明，此处就不再展开讨论了.

3. 圆盘填装问题

有这样一个问题：在一个长为1000宽为2(单位)的矩形托板上，最多能放多少个底面直径为1的易拉罐(图16.16)?

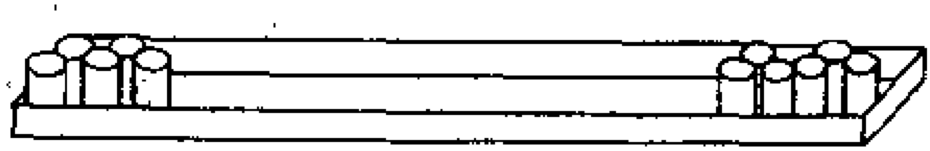

图 16.16

这个问题抽象成数学问题的表述是：在 2×1000 的长方形 L 里装填直径为1的圆，装填时任两圆都不互相重叠，同时也没有任何一个圆的任何部位超出长方形的边界，问在长方形 L 内最多能装填多少个圆?

这是一个在 2×1000 的长方形中无重叠地嵌入圆纸片的问题.

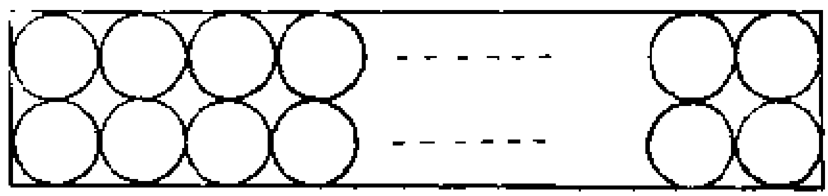

图 16.17

一般很容易按图 16.17 所示的方法在长方形中嵌入圆,即沿长方形的两边,从一端开始将圆一个挨一个地整齐地嵌入,一共嵌入 2×1000=2000 个圆.圆在 2×1000 的长方形里的布局整齐有序,但浪费的地方较多,因此答案 2000 并非最优值.然而这已经给了我们一个粗估的下界,即最多嵌入圆的个数不能少于 2000 个.

这个初看起来好似十分简单的问题,经过许多数学家之手至今尚未最终解决.现阶段获得的最佳结果是:最多能嵌入的圆的个数不小于 2011,但要小于 2013.也就是最多能嵌入 2011 个圆或 2012 个圆.但究竟是 2011 个还是 2012 个?问题尚未解决.

长方形 L 内装不下 2013 个圆的证明是匈牙利人富雷特(Füredi)给出的.证明的着眼点是圆心.将圆心在长方形内的装填问题转化为任意两点间距离不小于 1 的点集在长为 999 宽为 1 的长方形里的分布问题.可惜证明过程太长,我们只能在此割爱了.

下面我们介绍在 L 里能嵌入的圆的个数不小于 2011 的证明.

证 把图 16.18 中的四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 作为一个"计数单元". 我们将长方形 L 沿长的方向依次分为若干个这种计数单元. 因此，只要对一个计数单元搞清楚了，整个 L 中嵌入圆的个数也就清楚了.

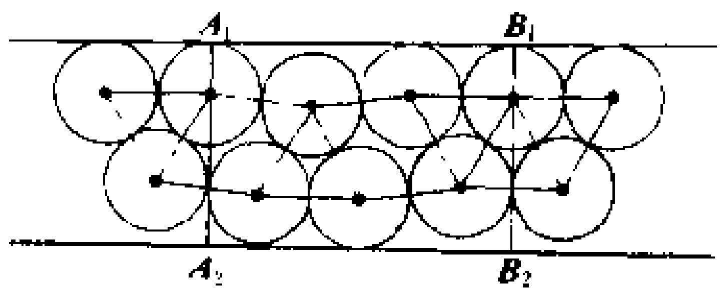

图 16.18

在图 16.18 中，圆心以黑点表示，相互外切的两圆圆心以线段相连，每条线段之长等于 1. 这样一来，在上述的一个计数单元里，含有 5 个整圆和两个半圆.

我们先来计算线段 $A_1B_1(=A_2B_2=AB)$的长. 在图16.19中，

$$AB=AC+CB=2H_1C+CB.$$

$\because$ $CB=1$,

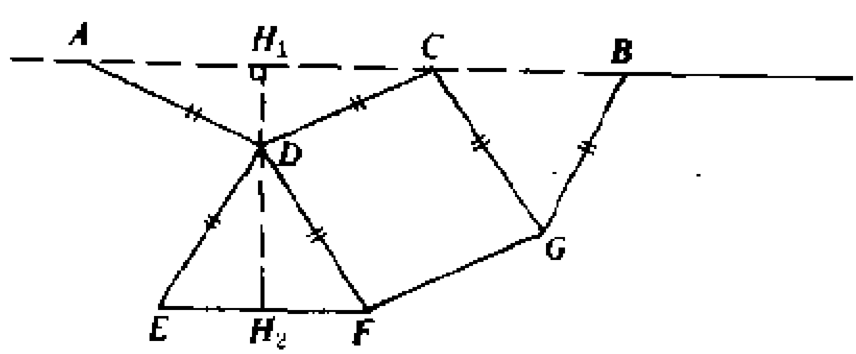

图 16.19

$$H_1C=\sqrt{DC^2-DH_1^2}$$

$$=\sqrt{1-(H_1H_2-DH_2)^2}$$

$$=\sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2},$$

$$\therefore\quad A_1B_1=AB=2\times\frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}+1=2.9819695\cdots.$$

我们再计算在长方形 L 里包含多少个上述的计数单元：

$$1000\div2.9819695=335.34884\approx335(\text{个}),$$

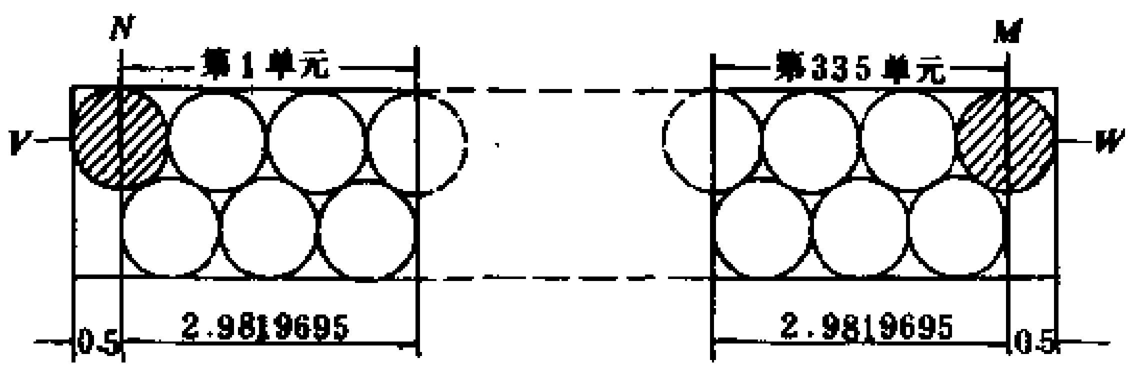

图 16.20

即长方形 L 中含有 335 个上述的计数单元，如图 16.20 所示，从 N 至 M 一段共可嵌入圆

$$5\times335+0.5\times335+0.5\times335-1=2009(\text{个}).$$

而这 2009 个圆装填进长方形 L 内以后，还有一个单位长多一点的剩余可以利用：

$$1000-(2.9819695\times335)=1.0402175.$$

如图 16.20 所示，可在长方形 L 的两端 N 与 M 以外各分配

0.5多一点的长加以利用，则在嵌入 2009 个圆以后，又可装进 V 和 W 两个圆(阴影圆). 这样，在长方形 L 内一共嵌入了 $2009+2=2011$ 个圆.

以上的证明是由美国人 R. 格雷厄姆(R. Graham)给出的. 他采用的方法不是考虑在长方形里最多能装填多少个圆，而是变换角度，将问题转化为使圆与圆之间的空隙(浪费的部分)为最小(图 16.21). 众所周知，同样大小的若干个圆在平面内最紧密的配置方法是一个圆周围安置 6 个外切圆(图 16.22).

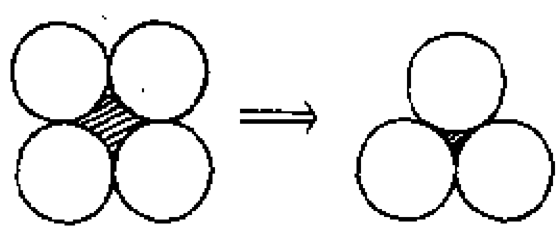

图 16.21

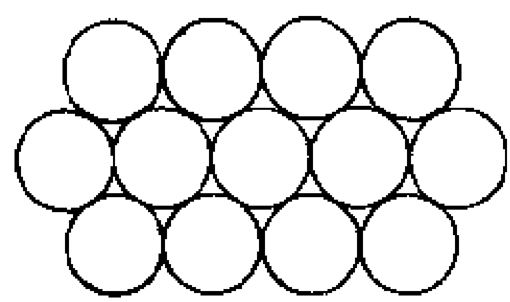

图 16.22

到底矩形 L 内能否嵌入 2012 个直径为 1 的圆?这个问题有待于数学爱好者们去探究解决.

4. 勒贝格问题

1914 年，著名的法国数学家勒贝格(Henri Léon Lebesgue，1875～1941)在同匈牙利数学家巴尔(J. Pál)谈话时提出了研究最小面积的“万能覆盖”问题，即“寻求一个面积最小的能够覆盖任何直径为 1 的点集的凸图形”. 换句话说，就是在各种能覆盖任意直径是 1 的点集的凸图形中，找出面积最小的那种凸图形来. 这个问题提出已经 80 余年了，但至

今尚未解决.

我们不妨看一下数学家探索的足迹.

早在1910年,英国数学家尤恩格就证明了"任何直径为1的平面点集,都能被一个半径为$\sqrt{3}/3$的圆纸片所覆盖".在万能覆盖中,半径为$\sqrt{3}/3$的圆被称为"尤恩格圆",它的面积为$\pi/3\approx1.047$.显然,它不是面积最小的万能覆盖,因为边长为1的正方形Q就是一个面积是1的万能覆盖.

人们很快发现,作Q的内切圆,这个圆的直径是1,再作该圆的外切正八边形,使八边形相间的四条边重叠于Q的四条边上,这时形成如图16.23所示的四个等腰三角形t_1,t_2,t_3,t_4.可以证明,切去t_1与t_2后剩下的不等边六边形仍可盖住直径是1的点集.这个不等边六边形的面积不难算得是0.9142….

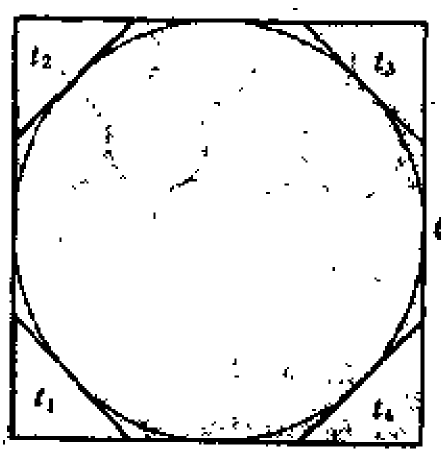

图16.23

其实,尤恩格圆的内接正六边形G的边长为$\sqrt{3}/3$.它也可以盖住直径是1的点集,而$S_G=\sqrt{3}/2=0.866\cdots$.易知$G$的内切圆直径是1.再作该圆的外切正12边形,使12边形相间的六条边依次重叠于G的六条边上,这时形成如图16.24所示的六个(其中四个未画出)顶角为120°的等腰三角形.巴尔于1920年证明,G切去不相邻的两个角t_1与t_3后剩下的部分(一个八边形)仍可盖住直径为1的点集.可以算得这个八边形的面积为$2-2/\sqrt{3}=0.845299\cdots$.

1936 年，德国数学家什波拉戈改进了巴尔的结果. 如图16.25所示，他在巴尔覆盖的八边形 $ABCDEFGH$ 中分别以 H，B 为圆心、1 为半径画弧 $\overset{\frown}{IK}$，$\overset{\frown}{JK}$，切去曲边三角形 EIK 和 EJK，所得图形仍可盖住直径是 1 的点集，称为"什波拉戈覆盖"，这个曲 10 边形面积为 0.844144…. 什波拉戈的结果又经过了 40 年，到 1975 年被汉森（Х. Хансен）所改进. 见图 16.25，在边 GF 上距 G 为 3.7×10^{-7} 处取点 P，在边 CD 上距 C 为 3.7×10^{-7} 处取点 Q（图中 P，Q 均为示意位置，图上已大大放大了这两个距离），则 $PQ=1$. 分别以 Q，P 为圆心、1 为半径画弧与边 HG，BC 相切，从而又切掉两个非常微小的小块，其总面积按 10^{-19} 来估算.

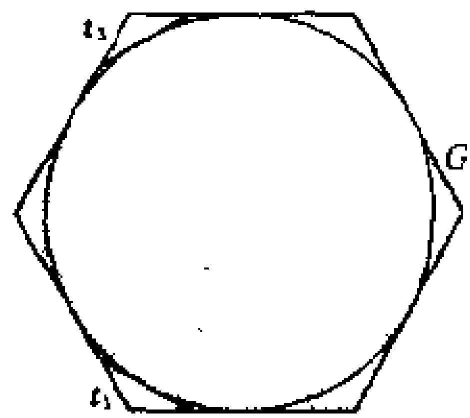

图 16.24

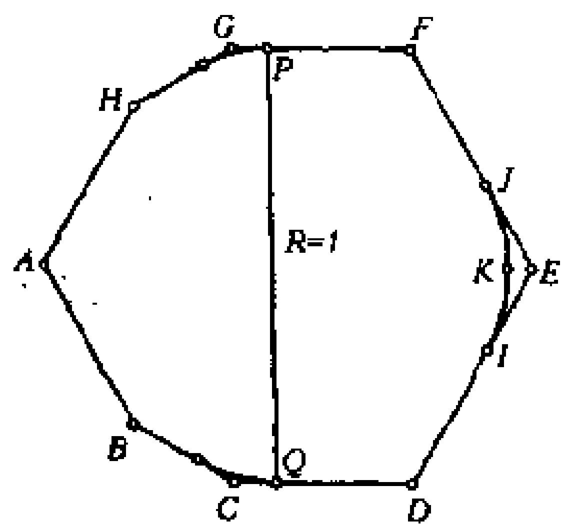

图 16.25

以上所作的各种覆盖都是凸的. 直到 1980 年达法（Г. Даффом）作出了一种非凸的且不对称的万能覆盖，其面积为 0.8441370….

我们记万能覆盖凸图形的最小面积为 $S_Λ$，巴尔得出如下

估计：

$$0.825711\cdots=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}<S_{凸}<0.8441144.$$

这样，若取 $S_{凸}=0.8349$，可知其精度为±1.1%.

对勒贝格问题人们至今仍所知甚少，理论上还有许多问题需要研究，比如：

存在面积最小的万能覆盖凸图形吗？

面积最小的万能覆盖是唯一的吗？

面积最小的万能覆盖是边数有限的多边形吗？

面积最小的万能覆盖具有对称轴吗？

……

前苏联数学家卡瓦列夫(M. Ковалев)研究了勒贝格问题的简化情况："寻求一个能够覆盖任意边长不超过 1 的三角形的具有最小面积的三角形纸片".

显然，这个问题是勒贝格问题最简化的特例："任意边长不超过 1 的三角形"是"直径为 1 的点集"的真子集，两者并不等价；"面积最小的凸图形"简化为"具有最小面积的三角形纸片".

下面我们将要介绍的是由卡瓦列夫给出的比要解决的特例更强更直接的一个结果：

所有能覆盖任意的边长不超过 1 的三角形的凸图形中，具有最小面积者是$\triangle ABC$(图 16.26)，其中$\angle A=60°$，边 $AB=1$，而由顶点 C 引向 AB 边的高线等于 $\cos 10°$. 因此，这个三角形面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cos 10^\circ$$
$$\approx 0.4924$$

就是所求的最小面积.

为了下文叙述方便，我们称具有$\angle A=60^\circ$，$AB=1$，AB边上的高等于$\cos 10^\circ$的三角形为"万能覆盖三角形".

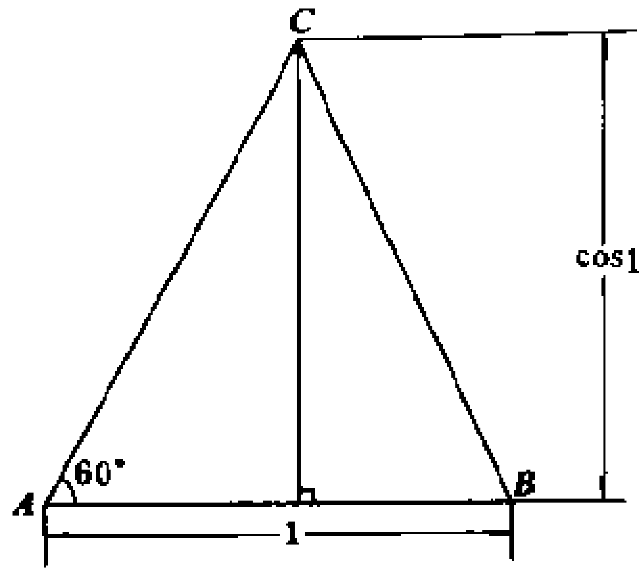

图 16.26

下面我们介绍卡瓦列夫证明的基本要点.

(1)我们不难发现，只要找到能覆盖任意腰长等于1而顶角φ不超过60°的等腰三角形的三角形纸片就足够了. 因为由此马上可以推出，任意边长不超过1的三角形都可以用这类等腰三角形(腰长$=1$，顶角$\varphi\leqslant 60^\circ$)纸片盖住.

(2)我们证明：任意腰长为1，顶角$\varphi\leqslant 60^\circ$的等腰三角形，都能被"万能覆盖三角形"所覆盖. 换言之，也就是要证明，任意腰长为1，顶角$\varphi\leqslant 60^\circ$的等腰三角形，都能嵌入"万能覆盖三角形"中.

设$\triangle ABC$中，$AB=1$，$\angle CAB=60^\circ$，$CD\perp AB$于D，$CD=\cos 10^\circ$，即$\triangle ABC$是"万能覆盖三角形"(图16.27).

由于已知$CD=\cos 10^\circ<1=AB$，又易知由B引向AC边的高等于$\cos 30^\circ$，根据$\triangle ABC$的面积公式有

$$\frac{1}{2}AC\cdot\cos 30^\circ=\frac{1}{2}AB\cdot\cos 10^\circ,$$

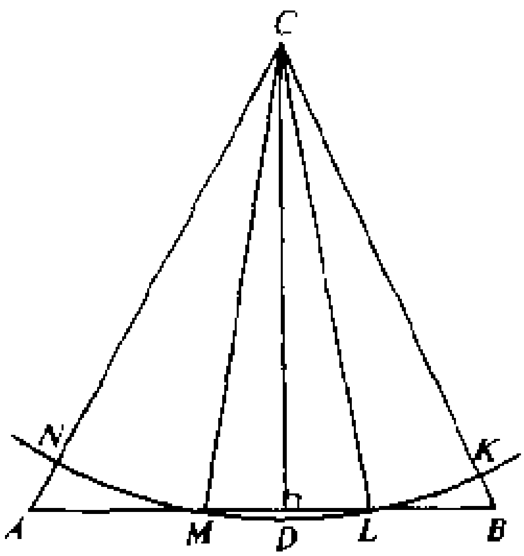

图 16.27

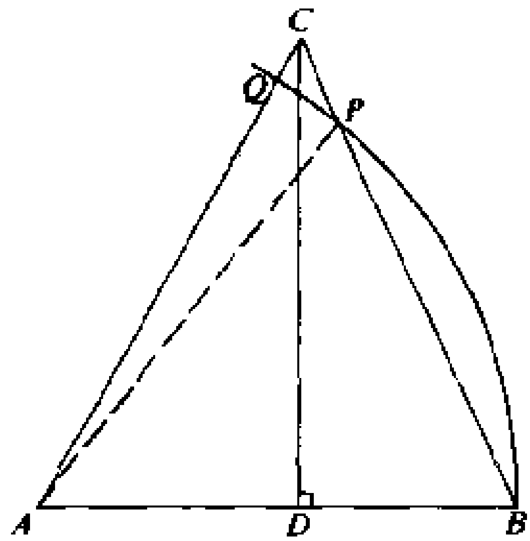

图 16.28

因为 $\cos 10^\circ > \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$,所以 $AC > AB = 1$. 于是$\angle B > \angle C$,故有$\angle B > 60^\circ = \angle A > \angle C$,从而有 $BC > AB = 1$. 因此,以点 C 为圆心 1 为半径画弧必交 BC, AB, AC. 设该弧交 BC 于 K,交 BA 中 BD 段于 L,DA 段于 M,交 AC 于 N(图 16.27).

在 $\mathrm{Rt}\triangle CMD$ 中,$\cos 10^\circ = CD = \dfrac{CD}{CM} = \cos\angle MCD$,所以$\angle MCD = 10^\circ$,$\angle MCN = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$. 同理,$\angle LCD = 10^\circ$,因此$\angle LCM = 20^\circ$.

显然,腰长为 1 顶角 φ 满足 $0 < \varphi \leqslant 20^\circ$的等腰三角形均可被扇形 CMN 覆盖.

对腰长为 1 顶角 φ 满足 $20^\circ < \varphi \leqslant \angle C$ 的等腰三角形,我们可以把它的底的一个端点放在$\overset{\frown}{MN}$上,另一个端点放在$\overset{\frown}{LK}$上,而使其顶点与 C 重合. 这样,这个等腰三角形就嵌入$\triangle ABC$ 中了.

对腰长为 1 顶角 φ 满足 $\angle C<\varphi\leqslant 60^\circ$ 的等腰三角形，我们可按图 16.28 的方式将其嵌入 $\triangle ABC$ 中：以 A 为圆心 1 为半径画弧，此弧过点 B，交 CB 于另一点 P，交 CA 于点 Q，连结 PA. 在 $\triangle ABC$ 中，AB 是最小边，所以 $\angle C<60^\circ$，因此 $\angle B>60^\circ$，$\angle PAB=180^\circ-2\angle B<180^\circ-\angle B-\angle A=\angle C$. 这意味着将这类等腰三角形（腰长为 1，顶角 φ 满足 $\angle C<\varphi\leqslant 60^\circ$）的顶点放在点 A，底边的一个端点与 B 重合，另一个端点将落在 $\overset{\frown}{PQ}$ 上，从而这类等腰三角形完全嵌入"万能覆盖三角形" ABC 中.

综上所述，任意腰长为 1，顶角 $\varphi\leqslant 60^\circ$ 的等腰三角形都能被"万能覆盖三角形"所覆盖.

(3) 我们进一步证明，对于平面上给出的等腰三角形 DEF（其中 $DE=EF=1$，$\angle DEF=20^\circ$）及边长等于 1 的等边三角形 XYZ，包含这两个三角形的凸图形的最小面积不小于 $\frac{1}{2}\cos 10^\circ$.

我们首先发现，包含 $\triangle DEF$ 的最小正三角形的边长等于 $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10^\circ$. 这一点，不难由图 16.29 算得.

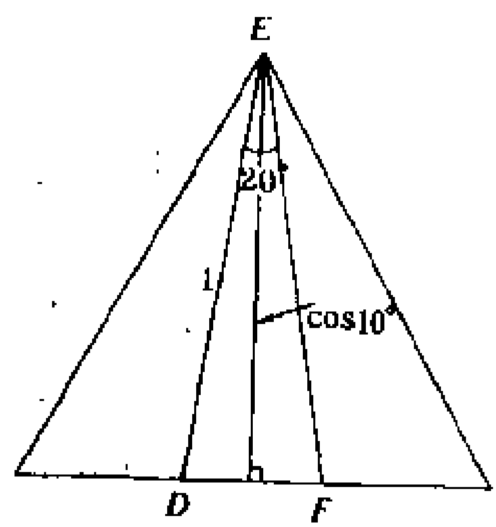

图 16.29

现在我们考察各边分别平行于正三角形 XYZ 的边并且包含 $\triangle DEF$ 和正三角形 XYZ 的最小的正三角形 $X_1Y_1Z_1$. 显

然，正三角形 $X_1Y_1Z_1$ 的边不小于 $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10°$（注意，$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10° > 1$，所以以 $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10°$ 为边的正三角形 $X_1Y_1Z_1$ 可以盖住 $\triangle DEF$，也可以盖住边长为 1 的正三角形 XYZ），而其高线长不小于 $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10° \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 10°$.

在 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 的不包含 $\triangle XYZ$ 的边的边上，应存在 $\triangle DEF$ 的顶点，比如点 D 在 X_1Y_1 上（图 16.30）.

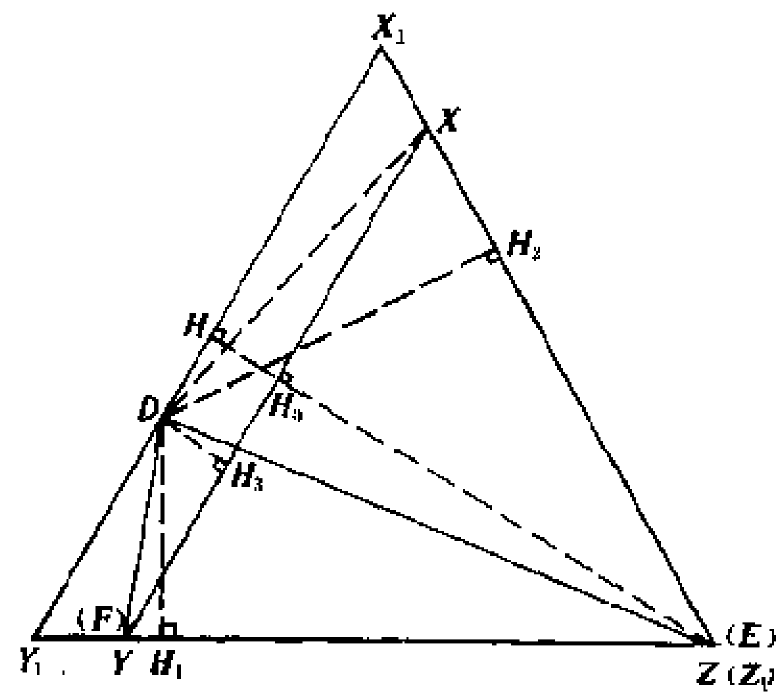

图 16.30

由 D 分别向正三角形各边或其延长线引垂线，因为等腰三角形底边一点到两腰距离之和等于腰上的高，而等边三角形 $X_1Y_1Z_1$ 的三条高相等，所以

$$DH_1 + DH_2 = ZH = DH_3 + ZH_0.$$

注意到单位正三角形 XYZ 的高 $ZH_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$，而 ZH 不小于

cos10°,所以点 D 到边 XY 的距离

$$DH_3=DH_1+DH_2-ZH_0=ZH-ZH_0\geqslant\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

包含$\triangle DEF$ 与正三角形 XYZ 的凸多边形面积一定不小于图 16.30 中$\triangle DXY$ 与$\triangle XYZ$ 的面积之和,即包含$\triangle DEF$ 与$\triangle XYZ$ 的凸多边形面积一定不小于

$$\frac{1}{2}\left(\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 1+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\cos 10°. \qquad (*)$$

由于"万能覆盖三角形"ABC 是覆盖任意边长不超过 1 的三角形的三角形纸片中面积值恰为$\frac{1}{2}\cos 10°$的那一种,因此与(*)的结果比较可知,$\frac{1}{2}\cos 10°$就是最小覆盖三角形的面积值.这样就完成了证明的基本思路.

勒贝格问题虽然尚未解决,但是数学工作者的探索足迹却能给人们以方法论的启示.从最简单的情况入手,各个击破,逐步地向问题的全面、彻底的解决逼近.这应该是我们探索数学问题时常用的方法.

勒贝格在提出"寻求一个面积最小的能够覆盖任何直径为 1 的点集的凸图形"这一问题的同时,还提出了"寻求一个周长最小的能够覆盖任何直径为 1 的点集的凸图形"的问题,这个问题同样也没有解决,已经有的结果是,周长 p 应满足

$$3.302\approx\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\leqslant p<8-\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 3.382.$$

勒贝格问题的彻底解决必属于未来的对数学奇境勇敢探索的人们!

后记

本书向具有中学数学基础的读者介绍了覆盖的初步知识，使大家看到了许多精巧的构思、绝妙的技巧，引导大家在绚丽多彩的数学园地中观赏了极小极小的一处角落．如果你不知不觉地增长了知识，扩大了视野，拓宽了思路，激发了兴趣，受到了数学美的陶冶，使自己的思维得到了一定锻炼，本书的目的就基本达到了．

笔者是数学教育与数学普及工作者．本书具有创造性的地方，首先就在于构置了一种与中学数学教育密切结合的体系，用较为通俗的语言直观形象又不失严格性地将覆盖知识介绍给广大读者，使它成为面向多数人的大众数学，从而为基础教育服务．其次，就本书的数学内容而言，有些证法是自己找到的，有些是经本人改进或改造的．其三，在内容中渗透了数学思想方法与解题思想方法，在这个意义上有普及数学

方法论的作用.

在数学中,覆盖是集合论中的内容,平面图形覆盖是组合几何的一项内容.学好覆盖方法,是向组合几何问题攻坚的必要准备.笔者作为全国初等数学研究学术交流会的发起人之一与协调组成员,一直认为较通俗地、系统地普及初等数学专题知识是振兴、推广初等数学研究的重要基础工作之一,这也是本书的写作动机之一.

本书的材料是笔者在研究奥林匹克数学教育的过程中收集、整理、积累的,其中包含自己的学习心得.许多材料在我参加培训 IMO 选手的工作中发挥过教育培训的作用.

应该指出,本书由于篇幅的限制,对很有特色的方格覆盖问题未能涉及,只能留作专题另外介绍了;另外,考虑到特定的读者对象,对于较为复杂和需用过多专门知识才能证明的定理,我们也没有涉及;对空间的覆盖也只字未提.关于这些内容的普及工作,尚有待于有兴趣的同志进行研究探索.

作者谨以此书向广大数学爱好者、数学教育工作者献礼,向支持、帮助我的工作的朋友们献礼.祝愿大家在事业上更有成就,祝愿我国的数学教育工作更加兴旺发展.

作者

1994 年 12 月于北京