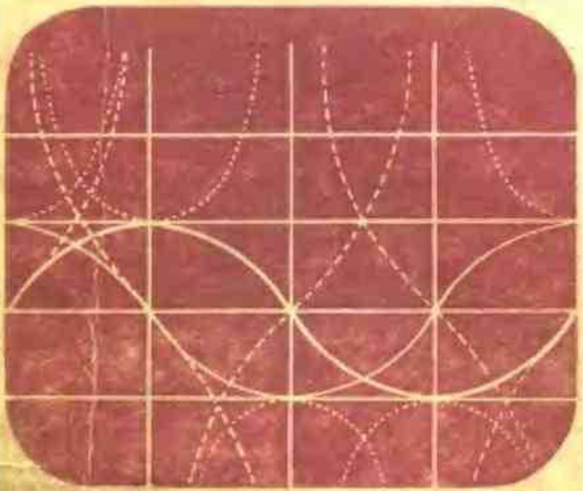


单　墫

趣味的图论问题

上海教育出版社

趣味的图论问题

单　墫

上海教育出版社

趣味的图论问题

单 墫

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印十二厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 4.125　字数 89,000
1980年9月第1版　1980年9月第1次印刷
印数 1—23,000 本

统一书号：7150·2308　定价：0.30元

3JC 1217 117

前　言

这本小册子的目的是向中学生介绍一些图论的基本知识、图论中常用的初等方法．以扩大中学生的知识领域，提高他们的思维能力．

图论的应用现在已经渗入许多基础科学和工程技术学科，考虑到中学生的阅读兴趣，本书比较多地是通过一些有趣的数学难题和数学游戏来展开讨论的．但是读者并不难看出这些内容的理论意义和实际背景．

阅读本书不需要太多的预备知识，只是希望读者有一定的数学推理能力，并且假定读者知道什么是数学归纳法——这是本书中常常用到的一个证明方法．虽然如此，为了完整起见，有些节的后半部分还是容纳了一些比较复杂的概念与定理．这些内容已用*隔开，初学者可以略去这些内容而不致影响下面的阅读．本书还需要极少的集论知识，它是现行中学数学教学大纲中的内容，但为了读者的方便，我们在书末加上一个附录，供读者查阅．

全书分八节，有不少例题与习题，习题均有解答．

李克正同志仔细地阅读了本书的初稿，并提出许多宝贵的意见与建议，作者谨在此表示衷心的感谢．

目　　录

§1 基本概念

图论是一个应用十分广泛而又极其有趣的数学分支．物理、化学、生物、科学管理、计算机等各个领域都可以找到图论的足迹．图论与数学的其他分支，如群论、矩阵论、概率论、拓扑、数值分析、组合数学等都有着密切的联系．

在历史上，有很多数学家对图论学科的形成作出过贡献，特别要提到的欧拉 (Euler)、基希霍夫 (Kirchhoff) 与凯莱 (Cayley)．

欧拉在 1736 年发表了第一篇图论的论文，解决了有名的七桥问题(见 § 2)．拓扑学中著名的欧拉公式同时也是图论中的重要公式(见 § 5)．

基希霍夫对电路网络的研究(学过电学的人一定知道著名的基希霍夫定律)及凯莱在有机化学的计算中都应用了树、生成树等(见 § 3)图论概念．

很多有趣的数学游戏与谜语也促进了图论的发展，哈密尔顿的周游世界的游戏(见 § 6)就是其中最著名的一个．

对四色定理的研究 (见 § 5) 也曾很大地促进了图论的发展．

这一节，我们先介绍一些图论的基本概念和它们的简单应用．

图论研究的对象是图．什么是图呢？我们先看下面的图 1.1(书中的插图，我们分节编上序号，记为图 1.1、图 1.2 等等，而图论中所说的图，本书就直接称为图)．

图 1.1 就是一个图，它有若干个不同的点 v_1、v_2、…，我们称之为顶点，或简称为点（图 1.1 中顶点个数为 10），这些顶点中有一些是用直线（段）或曲线（段）连结的，我们把这些直线（段）或曲线（段）称做边．例如，图 1.1 中，v_1 与 v_2 之间有两条边，v_2 与 v_3 之间有一条边，v_2 与 v_4 之间没有边，……等等．图 1.1 中，v_1 与 v_1 本身也有边相连，这样的边称为环．

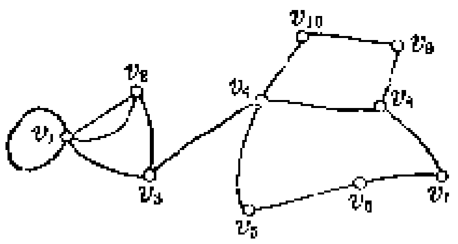


图 1.1

由若干个不同的顶点与连结其中某些顶点的边所组成的图形就称为图．

要注意的是，在图的定义中，顶点的位置以及边的曲直长短都是无关紧要的，而且，也没有假定这些点、边都要在一个平面中（比如说，正多面体的顶点和棱也构成一个图）．我们只关心顶点的多少及这些边是连结那些顶点的．确切地说，如果两个图 G 与 G' 的顶点之间可以建立起一对一的对应，并且当且仅当 G 的顶点 v_i 与 v_j 之间有 k 条边相连时，G' 的相应的顶点 v_i' 与 v_j' 之间也有 k 条边相连，我们就说 G 与 G' 有相同的结构，简称为同构．同构的两个图我们认为是没有区别的．

图 1.2 与图 1.1 乍看起来很不一样，其实这两个图却是同构的，这只要将图 1.2 中的顶点 i 与图 1.1 中的 v_i 相对应（$1\leqslant i\leqslant 10$）就明白了．

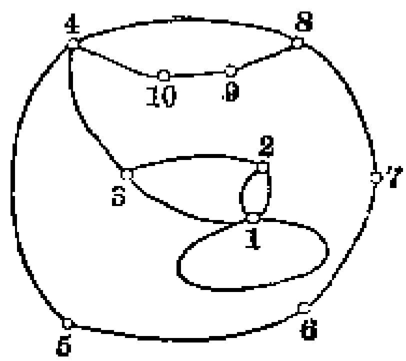
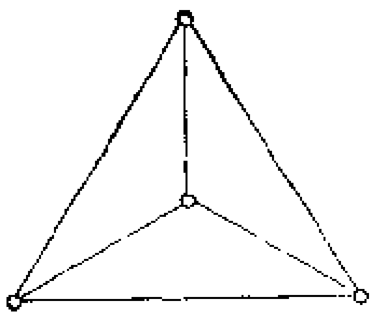


图 1.2

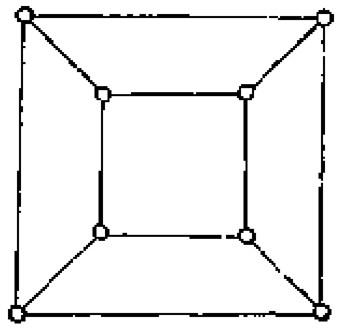
通常用一个大写字母 G 来表示图，用 V 来表示所有顶点的集合，E 表示所有边的集合，并且记成 $G=(V, E)$。

如果顶点的个数$|V|$与边的个数$|E|$都是有限的，图G称为有限图．如果$|V|$或$|E|$是无限的，G称为无限图．

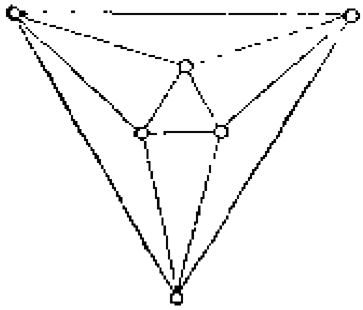
图1.3中有五个图G_1、G_2、G_3、G_4、G_5，读者可以数一下这五个图的顶点数与边数．熟悉正多面体的人能够看出，这五个图分别与五种正多面体(即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体)的顶点与棱所构成的图同构。



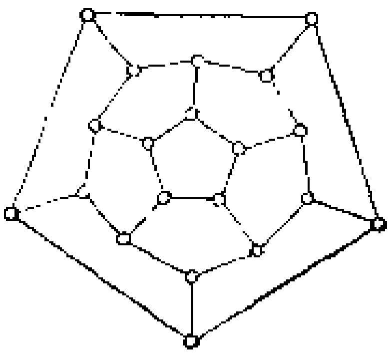
G_1



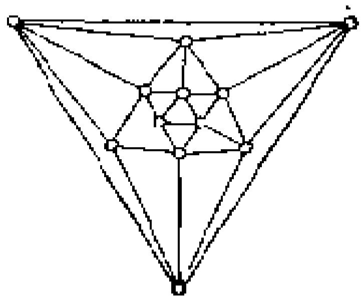
G_2



G_3



G_4



G_5

图 1.3

如果对图$G=(V, E)$与$G'=(V', E')$有$V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，也就是说图G'的顶点都是图G的顶点，图G'的边也都是图G的边，我们就说G'是G的子图．例如，一个正方形就可以看作图1.3中G_2的子图．

如果一个图没有环，并且每两个顶点之间至多只有一条

边，这样的图称为简单图. 在简单图中，连结 v_i 与 v_j 的边可以记成 (v_i, v_j).

如果图 G 是一个简单图，并且每两个顶点之间都有一条边，我们就称 G 为完全图. 通常将具有 n 个顶点的完全图记为 K_n. 图 1.4 就是一个完全图.

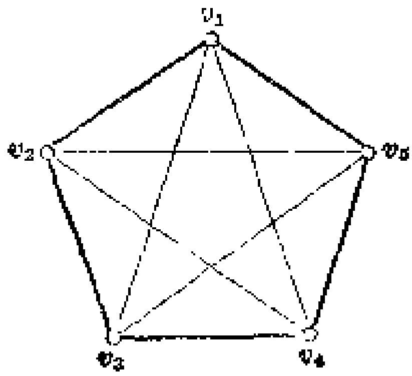


图 1.4 完全图 K_5

我们还要介绍一下相邻与次数这两个术语.

如果图 G 的两个顶点 v_i 与 v_j 之间有边相连，我们就说点 v_i 与 v_j 是相邻的，否则就说点 v_i 与 v_j 是不相邻的. 如果顶点 v 是边 e 的一个端点，就说点 v 与边 e 是相邻的，e 是从 v 引出的边. 从一个顶点 v 引出的边的条数，称为 v 的次数，记作 $\deg_G v$，在不致混淆的时候，也可以写成 $\deg v$. 例如在图 1.1 中，$\deg v_0 = 2$, $\deg v_2 = 3$. 约定一点上的环算两条边，所以在图 1.1 中 $\deg v_1 = 5$.

除非特别说明，本书以后所说的图都是指没有环的有限图.

上面所给出的一些概念都是非常简单、直观的. 这些简单直观的概念可以帮助我们思考并解决一些问题. 下面就是几个例题.

[例一] 某次会议有 n 名代表出席，已知任意的四名代表中都有一个人与其余的三个人握过手，证明任意的四名代表中必有一个人与其余的 $n-1$ 名代表都握过手.

解 我们将这 n 名代表用 n 个点来表示. 如果两名代表没有握过手，我们就在相应的两个点之间连一条边. 这样就得到一个简单图 G. 已知的条件就是在 G 的任意四个顶点之

中，有一个点与其余的三个点不相邻．要证明的结论就是在任意的四个点之中，有一个点与其余的 $n-1$ 个顶点都不相邻．

用反证法，设结论不成立，那么在 G 中任取四个顶点 v_1、v_2、v_3、v_4，每一个点 $v_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 都有与之相邻的点．设 v_1'、v_2'、v_3'、v_4' 分别与 v_1、v_2、v_3、v_4 相邻（v_1'、v_2'、v_3'、v_4' 不一定是互不相同的）．

根据已知条件，v_1、v_2、v_3、v_4 中有一个点，不妨设它为 v_1，与其余的三个点 v_2、v_3、v_4 均不相邻．于是，v_1' 不同于 v_2、v_3，或者说 $v_1'\neq v_2$，$v_1'\neq v_3$，$v_2'\neq v_1$．

如果 $v_2'\neq v_1'$，那么由图 1.5，明显地看出在 v_1、v_2、v_1'、v_2' 这四个点中，没有一个点与其余的三个点均不相邻，这是和已知条件相矛盾的．所以必有 $v_2'=v_1'$。同理 $v_3'=v_1'$．这就成了图 1.6，但可以看出在 v_1、v_2、v_3、v_1' 这四个点中，又没有一个点与其余的三个点均不相邻，仍与已知条件相矛盾．所以在任意四个顶点中必有一个点与其余的 $n-1$ 个点均不相邻．

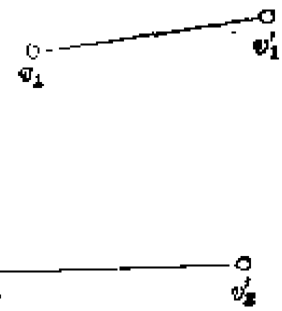


图 1.5

如果一个图 G 中的点 v 与 G 中除 v 外的每一个点均不相邻，那么 v 就称为 G 的孤立点．

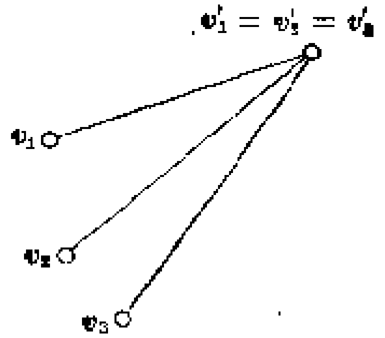


图 1.6

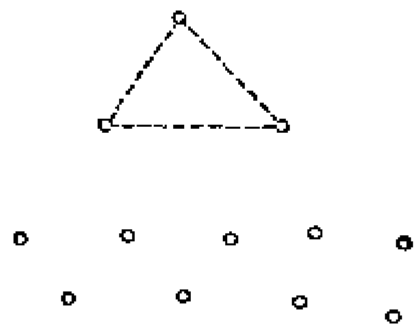


图 1.7 虚线表示可能有边

根据上面的证明，例一中的图 G 至多只有三个点不是孤立点，因而这个图的形状为图 1.7.

如果 G 是一个有 n 个顶点的简单图，从完全图 K_n 中把属于 G 的边全部去掉后，得到的图称为 G 的补图，通常记为 $\bar{G}$.

显然 $\bar{\bar{G}}=G$，即一个图的补图的补图就是原来的那个图.

读者不难作出图 1.7 中图 G 的补图 $\bar{G}$. 例题一也可以借助于图 $\bar{G}$ 来证. $\bar{G}$ 的顶点与 G 的顶点相同，但 $\bar{G}$ 的边 (v_i, v_j) 表示 v_i 与 v_j 所对应的两个人是握过手的. 推理方法完全相同，读者愿意的话，可以作为一个习题来做.

［例二］ 九个数学家在一次国际数学会议上相遇，发现他们中的任意三个人中，至少有两个人可以用同一种语言对话. 如果每个数学家至多可说三种语言，证明至少有三个数学家可以用同一种语言对话.

解法一 用九个点 v_1、v_2、…、v_9 表示九个数学家，如果某两个数学家可以用第 r 种语言对话，那么就用一条边将相应的两个点连结起来，并且将这条边涂上第 r 种颜色，这样就得到一个图 G，它的边涂上了颜色（至多有 27 种颜色）.

显然，如果在顶点 v_i、v_j 之间有一条边涂上第 r 种颜色，在顶点 v_i 与 v_k 之间有一条边也涂上第 r 种颜色，那么在 v_j 与 v_k 之间一定也有一条边涂上第 r 种颜色（这种性质可以称为传递性）.

已知的条件就是每三个点之间至少有一条边，并且对任一个顶点 v_i，自 v_i 引出的边至多有三种不同的颜色. 要证明的结论是图 G 中至少有一个三角形，这个三角形的三条边是同一种颜色的，这种三角形我们称之为同色的三角形.

根据上面所说的传递性，只要证明图 G 有一个顶点，从这个顶点引出的两条边具有同样的颜色也就可以了.

采用反证法，假定结论不成立，那么从任一个顶点 v_i 引出的边颜色都不相同，因而根据已知条件得

$$\deg v_i \leqslant 3 \quad (1 \leqslant i \leqslant 9).$$

对于顶点 v_1，由于 $\deg v_1 \leqslant 3$，所以至少有 $9-1-3=5$ 个顶点与 v_1 不相邻. 不妨设 v_2、v_3、v_4、v_5、v_6 与 v_1 不相邻，因为 $\deg v_2 \leqslant 3$，在 v_3、v_4、v_5、v_6 这四个点中必有一个点与 v_2 不相邻. 设 v_3 与 v_2 不相邻，那么 v_1、v_2、v_3 这三个点之间无边，与已知条件矛盾.

解法二 仍用 v_1、v_2、…、v_9 这九个点表示九个数学家，但和刚才相反，在两个人不能用同一种语言对话时，才用边来连结相应的两个顶点，这样得到一个简单图 G'.

因为每三个人中至少有两个人可以用同一种语言对话，所以 G' 中每三个点之间至少有两个点是不相邻的，换句话说，在 G' 中没有三角形.

现在我们来证明 G' 中必有一个点 v_i 的次数不大于 4. 如果 $\deg v_1 \leqslant 4$，那么 v_1 就是所说的点 v_i. 如果 $\deg v_1 > 4$，那么至少有五个顶点与 v_1 相邻，不妨设 v_2、v_3、v_4、v_5、v_6 与 v_1 相邻，如图 1.8 所示.

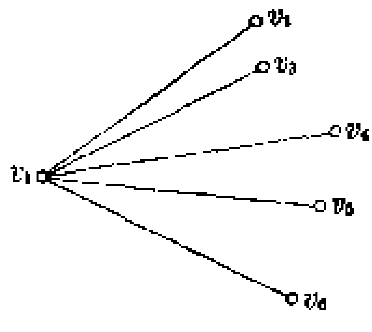


图 1.8

由于 G' 中没有三角形，所以 v_2 与 v_3、v_4、v_5、v_6 均不相邻，从而 $\deg v_2 \leqslant 4$.

上面证明了 G' 中有一个点的次数不大于 4，也就是说在九名数学家中有一个人至少可以同四个人对话. 由于这个人至多会说三种语言，因此至少有两个人与他对话时用的是同

一种语言，于是这三个人可以用同一种语言对话.

解法二的结尾用到一个极其简单而有用的原则——抽屉原则：如果将 $n+1$ 个球放入 n 个抽屉中，那么必有一个抽屉中有两个或更多个球．读者可参看常庚哲著《抽屉原则及其他》一书（上海教育出版社，1978 年版）.

［例三］ 证明任意的六个人中一定有三个人互相认识（在本书中，我们约定甲认识乙就意味着乙也认识甲）或者有三个人互不相识.

解法一 作一个完全图 K_6，六个顶点表示六个人，如果某两个人互相认识，连结相应两点的边就涂上红色，否则就涂上蓝色．要证明的结论就是这个涂了色的 K_6 中一定有一个各边同色的三角形.

从顶点 v_1 引出的边有五条，而颜色却只有红蓝两种，因此其中必有一种颜色涂了三条或更多条边（不然的话，红色边与蓝色边的条数 $\leqslant 2+2=4$）.

不失一般性，假定有三条边 (v_1, v_2)，(v_1, v_3)，(v_1, v_4) 为红色（有三条边为蓝色的证法与此完全相同）.

(i) 如果 $\triangle v_2v_3v_4$ 的三条边都是蓝的，那么 $\triangle v_2v_3v_4$ 就是所要求的同色三角形.

(ii) 如果 $\triangle v_2v_3v_4$ 有一条边，比如说 (v_2, v_3) 是红色的，那么 $\triangle v_1v_2v_3$ 就是一个三边均为红色的同色三角形.

解法二 用六个顶点表示六个人，如果两个人互相认识，就在相应的两个点之间连一条边，这样得到一个简单图 G. 要证明的结论就是 G 或者它的补图 $\bar{G}$ 中有一个三角形.

顶点 v_1 与其余的五个顶点不在 G 中相邻就在 $\bar{G}$ 中相邻，因而在 G 或 $\bar{G}$ 中，v_1 至少与三个顶点相邻，不妨假定在 G 中，v_1 与三个顶点 v_2、v_3、v_4 相邻．如果 v_2，v_3，v_4 这三个点

中有两个点在 G 中相邻，那么添上 v_1，就得到一个 G 中的三角形. 如果，v_2、v_3、v_4 这三个点在 G 中均不相邻，那么它们在 $\overline{G}$ 中相邻，即 $\overline{G}$ 中有一个三角形，即 $\triangle v_2v_3v_4$.

解法二与解法一并无太大的差别，只不过是两种不同的说法，但是由这两种说法却可以引出这个问题的两种推广，读者可参看本节习题或 §7.

无论是解法一还是解法二都用到一个简单的原则——平均数原则：如果 n 个数 a_1、a_2、…、a_n 的平均数为 a，那么 a_1、a_2、…、a_n 中一定有一个数不小于 a（不然的话，$a_1+a_2+\cdots+a_n<na$），也一定有一个数不大于 a. 这个原则是重叠原则的一种表现形式（在解法一中，自 v_1 引出的边共 5 条，因而红色边或蓝色边中必有一种的个数不小于平均数 5/2，也就是不小于 3）. 关于重叠原则也请参看《抽屉原则及其他》一书.

在习题一中，读者可以找到这个原则的应用.

［例四］ 俱乐部里有 99 个人，每个人声称只愿意与他认识的人在一起打桥牌. 证明如果每个人认识的人数大于 66，总可以从这 99 个人找出 4 个人，这 4 个人可以在一起打桥牌. 如果每个人认识的人数小于或等于 66，那就不一定能找出这样的四个人.

解 作一个图 G：用 99 个点表示 99 个人，如果两个人不认识就在相应的两个点之间连一条边.

如果每个人认识的人数大于 66，那么对每个点 v_i，有

$$\deg v_i \leqslant 99-1-67=31.$$

对于 v_1，取一个与它不相邻的点 v_2 后还剩下 97 个顶点，其中与 v_1 或 v_2 相邻的顶点个数不超过

$$\deg v_1+\deg v_2 \leqslant 31+31=62,$$

因而必有与 v_1 及 v_2 均不相邻的点 v_3. 与 v_1、v_2、v_3 中至少有

一个相邻的顶点个数不超过

$$\deg v_1+\deg v_2+\deg v_3\leqslant 31\times 3=93,$$

所以在剩下的 96 个点中必有一个点 v_4 与 v_1、v_2、v_3 均不相邻. 由于 v_1、v_2、v_3、v_4 互不相邻，所以它们代表的四个人是互相认识的，这四个人愿意坐在一起打桥牌.

如果每个人认识的人数小于或等于 66，不一定能找出四个互相认识的人来. 为了举出这样的例子，只要设图 G 是由三个完全图 K_{33} 组成的图，则在 G 的 99 个顶点中找不出四个互不相邻的顶点，从而相应的 99 个人中也找不出四个互相认识的人.

最后介绍一个游戏，作为本节的结束.

［例五］ 制作四个同样大小的正方体 C_1、C_2、C_3、C_4，将它们的面涂上红、黄、蓝、白四种颜色，比如说所涂颜色如下表：

	上	下	左	右	前	后
C_1	白	蓝	红	红	蓝	黄
C_2	白	蓝	红	黄	黄	黄
C_3	白	蓝	蓝	黄	红	红
C_4	白	红 [illegible?]	白	黄	蓝	黄

颜色涂好后，你能不能将这四个正方体一个接一个地叠起来，组成一个底为正方形的棱柱，使得棱柱的每个侧面有四个颜色各不相同的正方形？

解 这个游戏看上去很简单，做起来却不容易成功（读者不妨试一试），因为底层的立方体有三种放法，其余的立方体各有 24 种放法（底面有 6 种选法，选好底面后又有 4 种旋转

的方法)，所以总共有 $3\times24^3=41472$ 种可能的堆法，完全依靠试验是相当困难的．我们借助于图来解决这个问题．

先用四个点 r、y、b、w 分别表示红、黄、蓝、白四种颜色．对每一个立方体 C_i 都作三条标以 i 的边，这三条边表示 C_i 的三对相对的面．例如 C_1，上下两面分别为白色与蓝色，我们就在 w 与 b 之间连一条边，左右两面都是红色，就在顶点 r 处作一个环，前后两面分别为蓝色与黄色，就在 b 与 y 之间连一条边，并且这样作出的三条边都标上 1．这样得到一个有环的图 G(见图 1.9)．

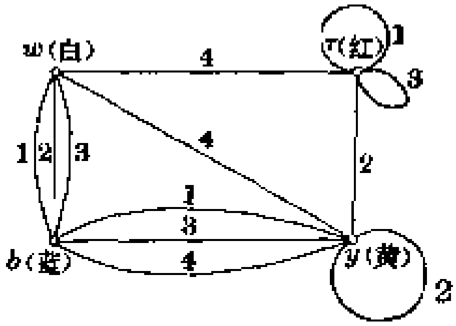


图 1.9

如果符合要求的棱柱堆好了，它有两对侧面，每对侧面有八个正方形，红、黄、蓝、白各两个，因此棱柱每对侧面对应于一个图 $G_i(i=1, 2)$，它们都是 G 的子图，各有四个顶点，四条分别标有 1、2、3、4 的边，每个顶点的次数都是 2(环算两条边)，并且 G_1 与 G_2 没有公共边．

我们不难从图 1.9 中找出两个满足上述要求的子图 G_1 和 G_2(见图 1.10)．

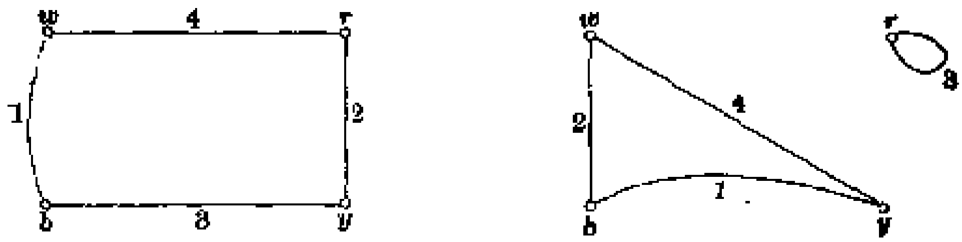


图 1.10

由图 1.10 我们可以得一种堆法，即使 C_1 的前后两面为蓝(b)、白(w)两色，左右两面为黄(y)、蓝(b)两色；使 C_2 的前后两面为红(r)、黄(y)两色，左右两面为白(w)、蓝(b)两色；C_3 的前后为蓝、黄两色，左右为红色；C_4 的前后为白红两色，

左右为白黄两色.

读者还可以从图 1.9 中找出本题的另一个解(参见习题一第 17 题).

习 题 一

1 写出图 1.3 中每个图的顶点数、边数及各个顶点的次数.

2 说明下面的两个图同构.

(第 2 题图)

3 完全图 K_n 有多少条边?

4 有 n 个药箱,每两个药箱里有一种相同的药,每种药恰好在两个药箱里出现,问有多少种药?

5 图 G 有 n 个顶点, m 条边,问它有多少个子图:

(1) 有 n 个顶点?

(2) 有 n 个顶点, m' 条边? ($m' \leqslant m$)

6 证明在简单图中,如果顶点数 $\geqslant 2$,那么至少有两个顶点的次数是一样的.

7 有 $n_1+n_2+\cdots+n_t-t+1$ 个顶点,每个顶点都涂上了颜色,如果共用 t 种颜色,证明一定存在一个整数 $i(1 \leqslant i \leqslant t)$, 第 i 种颜色涂了 n_i 个或更多个顶点.

8 图 G 有 n 个顶点, $n+1$ 条边, 证明 G 至少有一个顶点的次数 $\geqslant 3$.

9 一个圆盘分为内外两圈,均等分为 100 个"格子",且各有 50 个格子涂红, 50 个格子涂蓝,如果内圈可以绕圆心转动,证明在转动中一定有某一时刻,内圈有 50 个或更多个格子与外圈颜色相同的格子对齐.

10 已知九个人 v_1、v_2、…、v_9 中 v_1 和两个人握过手，v_2、v_3 各和四个人握过手，v_4、v_5、v_6、v_7 各和五个人握过手，v_8、v_9 各和六个人握过手，证明这九个人中一定可以找出三个人，互相握过手.

11 有 $2n$ 个人在一起聚会，其中每个人至少同其中的 n 个人认识，证明从这 $2n$ 个人中总可以找出四个人来，这四个人可以围着圆桌坐下，使得每个人旁边都是认识的人($n\geqslant 2$).

12 俱乐部里有十四个人想打桥牌. 已知过去每个人都曾与其中的五个人合作过. 现在规定要四个人中任意两个人都未合作过才准许在一起打一局桥牌. 在这种规定下，只打了三局就无法再继续进行下去. 如果这时俱乐部里又加入一个新来的年轻人，他与所有的人都没有合作过，证明一定可以再打一局.

13 举例说明例三中，如果将六个人改为五个人，则结论不一定成立.

14 十七位学者，每一位都给其余的人写一封信，信的内容是讨论三个论文题目中的任一个，而且两个人互相通信所讨论的是同一个题目. 证明至少有三位学者，他们互相之间通信所讨论的是同一个论文题目.

如果将十七改为十六，结论是否成立?

15 证明任意的九个人中一定有三个人互相认识或者有四个人互不相识.

16 将完全图 K_{18} 的边涂上红色或蓝色，证明不管怎么涂，一定可以找出四个顶点，这四个顶点之间的六条边颜色相同，也就必有一个同色的子图 K_4 存在.

17 给出例五的另一个解.

18 如果将例五中的每个立方体的相交于某一个角的三个面都涂上红色，其余的面任意涂上红、黄、蓝、白四种颜色，证明不论怎样堆，总无法堆出一个棱柱，它的每个侧面恰有红、黄、蓝、白四种颜色的正方形各一个.

19 作一个简单图 G 与它的补图 $\bar{G}$ 同构.

§2 七桥问题

1736年数学家欧拉(Euler 1707～1783)发表了一篇论文，解决了著名的七桥问题，通常认为这是图论的第一篇论文．这一节，我们就来谈谈七桥问题及一些有关的内容．

［例一］ 帕瑞格尔河从哥尼斯堡(即现在苏联的加里宁格勒，当时属德国)城中穿过，河中有两个岛 A 与 D，河上有七座桥连结这两个岛及河的两岸 B、C(图 2.1)，

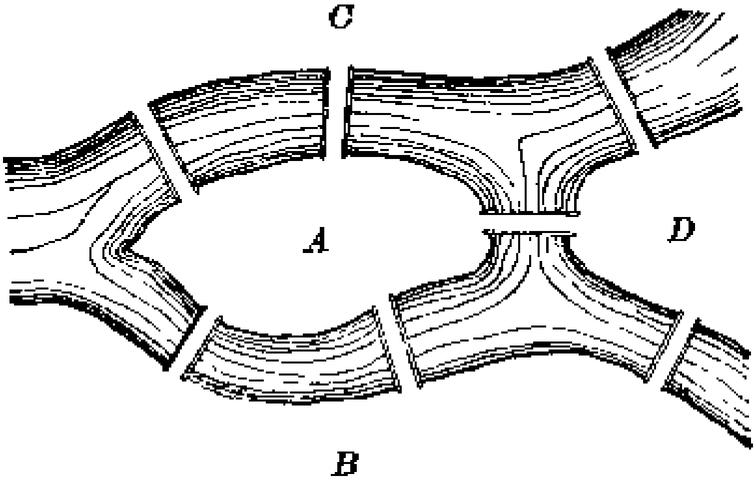


图 2.1

问：(1)一个旅行者能否经过每座桥恰好一次，既无重复也无遗漏？(2)能否经过每座桥恰好一次并且最后能够回到原来的出发点？

解 我们首先把图 2.1 变成一个图．如图 2.2 所示，A、B、C、D 变成四个顶点，七座桥变成七条边，七桥问题就变成了通常所说的一笔画的问题：能否一笔画出这个图(每条边都无遗漏也无重复地画到)？或能否一笔画出这个图并且最后可

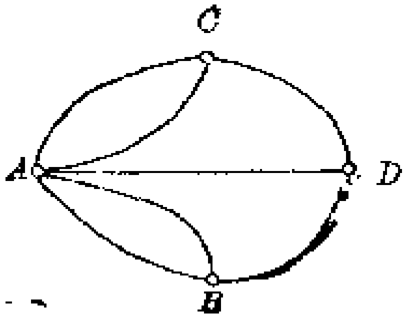


图 2.2

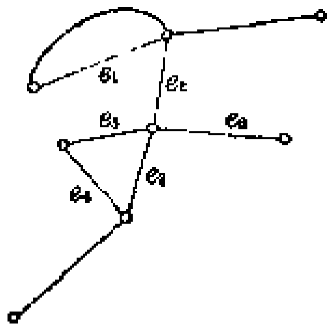


图 2.3

以回到原来的出发点?

为了叙述方便及今后的需要我们再引入几个概念.

在图 G 中,一个由不同的边组成的序列 e_1、e_2、…、e_q,如果其中 e_i 是连结顶点 v_i 与 v_{i+1} 的($i=1$、2、…、q),我们就称这个序列为从 v_1 到 v_{q+1} 的链,数 q 称为这个链的长. v_1 与 v_{q+1} 称为这个链的端点. 如果 G 是简单图,这个链也可以记作(v_1, v_2, …, v_{q+1}).

例如图 2.3 中,e_1、e_2、e_3、e_4、e_5、e_6 组成一个链.

如果一个链的两个端点 v_1 与 v_{q+1} 重合,我们称这个链为圈.

注意在链的定义中,并不要求 v_1、v_2、…、v_{q+1} 互不相同. 如果 v_1、v_2、…、v_{q+1} 互不相同,这样的链称为*初级链*. 如果 v_1、v_2、…、v_q 互不相同,而 $v_1=v_{q+1}$,这样的圈称为*初级圈*. 不难看出,如果有一条从 v 到 v' 的链,那么从这条链中(如果需要的话)去掉若干个圈,便得到一条从 v 到 v' 的初级链.

利用链(圈)的概念,图能否一笔画成(并且回到原出发点)的问题就等价于这个图是不是一个链(圈)?

按照欧拉的办法,我们先把图 G 的顶点分为两类. 次数为奇数的顶点称为*奇顶点*,次数为偶数的顶点称为*偶顶点*。

例如图 2.2 中,A、B、C、D 都是奇顶点.

如果图 G 是一个从 v_1 到 v_{q+1} 的链，那么每一个不同于 v_1 及 v_{q+1} 的顶点 v_i 都是偶顶点($i=2$、3、…、q)，因为对 v_i 说有一条进入 v_i 的边就有一条从 v_i 引出的边．而且进、出的边不能重复已走过的边．所以与 v_i 相邻的边总是成双的．故图 G 至多有两个奇顶点，即 v_1 与 v_{q+1}．如果图 G 是一个圈，那么根据上面的推理，v_1 与 v_{q+1} 也是偶顶点．

因此如果图 G 是一个链(圈)，那么图 G 的奇顶点的个数不大于 2(等于 0)，这就是图 G 为一个链(圈)的必要条件．换句话说，如果图 G 的奇顶点的个数大于 2，那么图 G 就不是一个链，从而不能一笔画成．在图 2.2 中，有四个奇顶点，因而不能一笔画成，也就是说一个旅行者要既无重复也无遗漏地走过图 2.1 中的七座桥是不可能的．

这就解决了七桥问题．欧拉还设计了一个十五座桥的问题，即一个人能否经过图 2.4 中的每一座桥恰好一次？这留给读者作为一个习题．

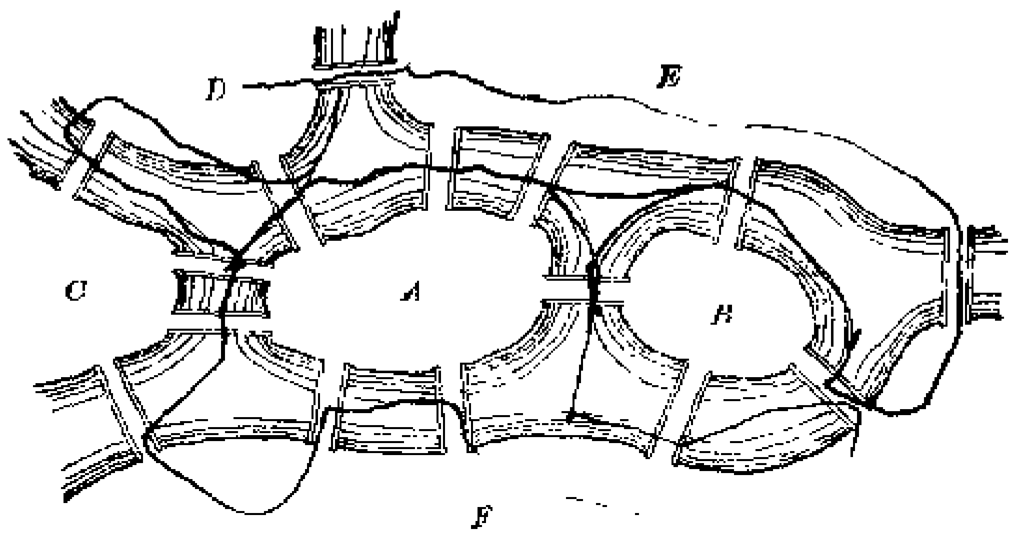


图 2.4

关于图的奇顶点的个数，有一个简单常用的定理，也是欧拉首先发现并证明的，通常认为它是图论中最早出现的一个

定理.

定理一 对于任意的图 G,奇顶点的个数一定是偶数.

证明 我们来数一下边的条数. 设次数为 i 的顶点有 n_i 个($0\leqslant i\leqslant$ 最大次数 k),那么和数

$$0\cdot n_0+1\cdot n_1+2\cdot n_2+\cdots+k\cdot n_k$$

是边的总数 m 的两倍, 因为每一条连结 v 与 v' 的边都被算了两次, 一次是作为从 v 引出的, 一次是作为从 v' 引出的. 即:

$$0\cdot n_0+1\cdot n_1+2\cdot n_2+\cdots+k\cdot n_k=2m.$$

移一部分到右边,得

$$\begin{aligned}1\cdot n_1+1\cdot n_3+1\cdot n_5+\cdots=2m-0\cdot n_1-2\cdot n_2\\-2\cdot n_3-4\cdot n_4-\cdots,\end{aligned}$$

该式右边是偶数, 因此奇顶点的个数 $n_1+n_3+n_5+\cdots$ 是一个偶数.

根据定理一, 奇顶点个数为 1、3、… 的图是不存在的. 所以如果图 G 可以一笔画成, G 的奇顶点的个数一定是 0 或 2(注意 0 是偶数).

反过来, 我们很自然地会提出这样的问题, 即如果图 G 的奇顶点的个数是 0 或 2, 那么图 G 是否一定可以一笔画成?

答案是否定的, 例如下面的图(图 2.5), 每个顶点都是偶顶点, 却不能一笔画成. 不能画成的原因是图不"连"在一起, 这就引出下面的连通性的定义.

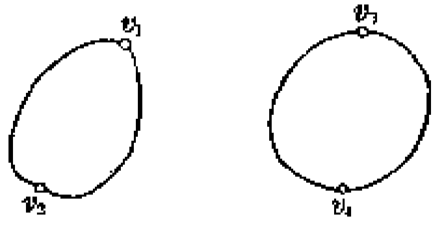


图 2.5

如果对图 G 的任意两个顶点 v 与 v', 都有一个从 v 到 v' 的链, 那么图 G 称为连通的, 否则 G 称为不连通的.

例如图 2.2，图 2.3 中的图都是连通的，而图 2.5 是不连通的图.

仅由一个顶点组成的图也看做连通图.

每个不连通的图 G 可以分成几个连通的子图 G_1、G_2、…、G_k，其中 G_1、G_2、…、G_k 相互之间没有公共的顶点，它们称为 G 的连通分支. 例如图 2.5 中的图有两个连通分支. 连通图可以看成是只有一个连通分支的图. §1 中所说的孤立点就是仅由一个点组成的连通分支.

现在我们来证明下面的定理.

定理二 有限图 G 是一条链（即可以一笔画成）的充分必要条件是 G 是连通的，且奇顶点的个数等于 0 或 2. 并且当且仅当奇顶点的个数为 0 时，连通图 G 是一个圈（孤立点可以看做圈）.

证明 只要证明充分性. 我们对图 G 的边数 m 采用归纳法.

设在边数小于 m 时，定理成立. 如果 G 有两个奇顶点 v 与 v'，从 v 出发，沿着 G 的边前进，每条边至多经过一次，那么到达任意一个不同于 v' 的顶点 v'' 时，有两种情况发生：

(i) $v''\neq v$，那么由于 v'' 是偶顶点，而每次到达 v'' 时用掉奇数条与 v'' 相邻的边，所以还可以从 v'' 继续前进.

(ii) $v''=v$，那么由于 v 是奇顶点，而每次到达 v 时用掉偶数条与 v 相邻的边，所以也可以从 v'' 继续前进.

但图 G 的边数是有限的，不能无限地走下去，最后一定会到达顶点 v'. 这就得到一条从 v 到 v' 的链 μ.

将链 μ 去掉后，得图 G'. G' 是 G 的子图，它的顶点全部是偶顶点. 设 G' 的连通分支为 G_1、G_2、…、G_k. 根据归纳假设，G_1、G_2、…、G_k 都是圈.

回到原来的图 G. 因为 G 是连通图，所以每个 G_i 与 μ 至少有一个公共点，设 v_i 为 G_i 与 μ 的公共点($i=1, 2, \cdots, k$)，于是由图 2.6 可以看出 G 是一条从 v 到 v' 的链，即由 v 出发，沿 μ 前进，每走到一个 v_i 时，就沿 G_i 走一圈再回到 v_i，然后继续前进，一直走到 v'.

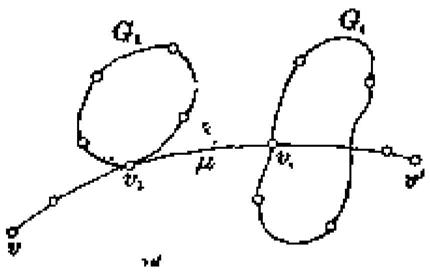


图 2.6

如果 G 没有奇顶点，去掉一条连结 v 与 v' 的边 e，得到图 G'. 由刚才所证，G' 是一个从 v 到 v' 的链，再添上 e，就成为一个圈.

推论一 如果图 G 有两个奇顶点，k 个连通分支，那么图 G 可以分解为 $k-1$ 个圈和一个链.

证明是显然的.

推论二 如果连通图 G 有 $2k$ 个奇顶点，那么图 G 可以用 k 笔画成，并且至少要用 k 笔才能画成.

证明 设图 G 可以用 h 笔画成，那么 G 可以分成 h 条链，由定理 2，每条链上至多有两个奇顶点，所以

$$2h\geqslant 2k$$

即 $h\geqslant k$，所以图 G 至少要 k 笔才能画成.

为了证明图 G 可以用 k 笔画成，我们在每对奇顶点之间添加一条边，这样添加 k 条边后所得的图 G' 没有奇顶点，因而是一个圈. 再将添加的 k 条边去掉，这个圈至多分为 k 段，即 k 条链，也就是图 G 可以用 k 笔画成.

现在我们再看几个例题.

[例二] 图 G(图 2.7) 是一个立方体的图，它有八个奇顶点，四笔可以画成，而三笔是画不成的.

[例三] 如图 2.8 所示，图 G 有 4 个顶点，6 条边，它们

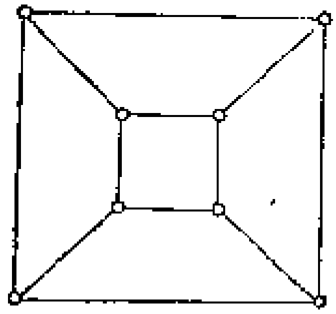


图 2.7

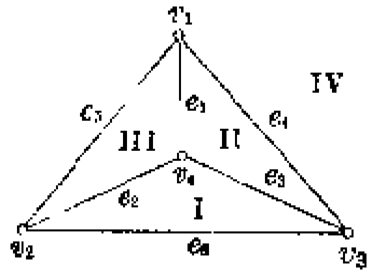


图 2.8 G

都在同一个平面上，这个平面被六条边 e_1、e_2、e_3、e_4、e_5、e_6 分成四个区域 I、II、III、IV，这样得到的区域我们常常称它为 G 的面（注意 IV 也是面）．设有两个点 Q_1、Q_2 在这些面中，证明平面上不存在一条连结 Q_1 与 Q_2 的线 μ 同时满足下面的两条要求：

(1) μ 截每条边 e_i 恰好一次（$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$）；

(2) μ 不过任一顶点 v_j（$j=1, 2, 3, 4$）．

解 我们在每个面中取一个点，仍命名为 v_j（$j=1, 2, 3, 4$），如果两个面相邻（即两个区域有一条公共边），就在所取的两个点之间连一条边，这样得到的图 G^*（图 2.9）称为图 G 的对偶图．

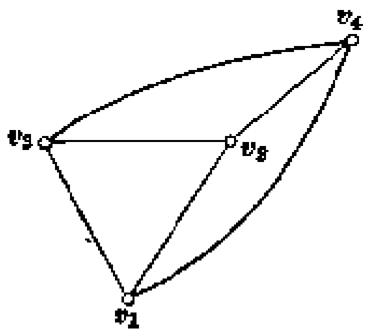


图 2.9 G^*

在图 G 中，我们从一个面穿过某条边 e_i 到另一个面，就相当于在图 G^* 中，从一个顶点沿一条边到另一个顶点．因此，如果 G 中有满足条件(1)、(2)的折线 μ 存在，那么 G^* 就是一个链（如果 Q_1、Q_2 不在同一个面内）或一个圈（如果 Q_1、Q_2 在同一个面内），即 G^* 可以一笔画成，但 G^* 的 4 个顶点全是奇顶点，根据推论 2，至少要两笔才能画成，矛盾．因此，在 G 中没有满足条件(1)、(2)的折线 μ 存在．

[例四]　如图 2.10 所示，大三角形的三个顶点分别涂以红、蓝、黑三种颜色. 在大三角形内取若干个点，将它分为若干个小三角形，每两个小三角形或者有一个公共顶点，或者有一条公共边，或者完全没有公共点. 将每个小三角形的顶点也涂上红、蓝、黑三种颜色之一，证明不管怎样涂，都有一个小三角形，它的三个顶点的颜色全不相同.

解法一　和七桥问题一样，奇偶性仍然是解决这个问题的关键.

设在大三角形内部的红蓝边（即一端为红、一端为蓝的边）有 k 条. 又设三个顶点分别为红、蓝、黑的小三角形有 p 个，三个顶点分别为红、红、蓝或蓝、蓝、红的小三角形有 q 个，其余的小三角形共 r 个.

计算一下每个小三角形的红蓝边的条数，再把它们加起来，总和为 $p+2q$，由于每一条在大三角形内部的红蓝边被算了两次，而大三角形本身的一条红蓝边只算了一次，所以

$$p+2q=2k+1.$$

从而 p 是一个奇数，当然不等于零（注意零是偶数），即有三个顶点的颜色各不相同的小三角形存在.

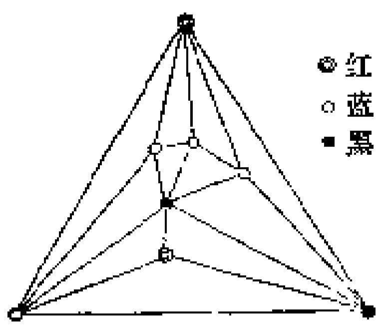


图 2.10　G

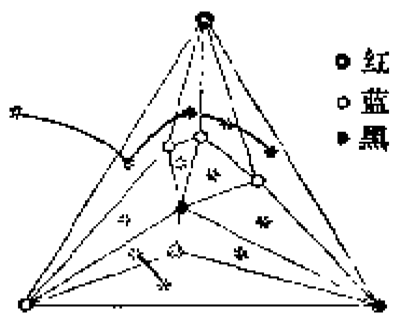


图 2.11　G'

解法二　仿照例题三，在大三角形外及每个小三角形内各取一个点，当两个面以一条红蓝边为公共边时，我们在相应

的两个点之间连一条边，这样得到一个图 G'(图 2.11)。

三个顶点的颜色分别为红、蓝、黑的小三角形对应于 G' 的奇顶点(次数为 1)，其余的小三角形均对应于 G' 的偶顶点(次数为 0 或 2)，此外大三角形的外部也对应于一个奇顶点 v_1。根据定理一，奇顶点的总数是一个偶数，因此图 G' 除了 v_1 外，至少还有一个奇顶点，也就是在图 2.11 中至少有一个小三角形，它的三个顶点分别为红、蓝、黑这三种颜色。

利用本题的结论不难推出著名的 Brouwer 的不动点原理，限于篇幅，这里就不多说了。

* * *

最后我们把上面所说的连通性稍加推广。

如果图 G 有 n 个顶点，并且去掉任意的 $k-1$ 个顶点后 $(1\leqslant k<n)$，所得的图是连通的，我们就说图 G 是 k 连通的。

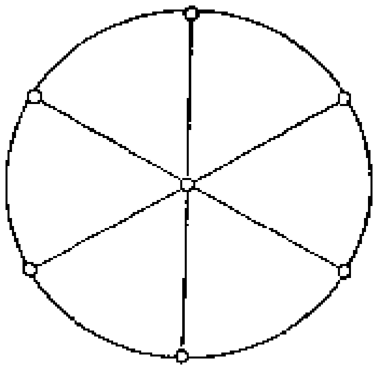


图 2.12

显然 k 连通图也是 $k-1$ 连通的 $(2\leqslant k<n)$。1 连通图就是前面所说的连通图。图 2.12 的"车轮"是 3 连通的。

下面的例题说明了 2 连通图的特征。

［例五］ 证明如果连通图 G 是 2 连通的，那么对任意两个顶点 v 与 v'，有一个经过 v 与 v' 的初级圈。反过来，如果对任意两个顶点 v 与 v'，有一个经过 v 与 v' 的初级圈，那么 G 是 2 连通的。

解 设 G 是 2 连通的，那么每个点的次数 $\geqslant 2$，否则有一个顶点 v 仅与一个顶点 v' 相连，去掉 v' 后，v 成为孤立点。

对于任意的两个点 v 与 v'，假设 v 到 v' 最短链长为 q。

(1) 如果 $q=1$，即 v 与 v' 相邻，取另一个与 v 相邻的顶

点 $v''\neq v'$，那么必有一个从 v' 到 v'' 的链不经过 v(否则去掉 v 后，v' 与 v'' 之间没有链相连，与 G 为 2 连通相矛盾)，我们可以假定这条链(如果需要的话，去掉若干个圈)是初级链，这样就得到一个经过 v 与 v' 的初级圈(图 2.13)，它由 v 与 v' 及 v 与 v'' 之间的边和上面所说的初级链组成.

(2) 假定在链长 $q<k$ 时命题成立，而从 v 到 v' 的链上的顶点依次为 $v=v_1$、v_2、…、v_k、$v_{k+1}=v'$，那么根据归纳假设，v 与 v_k 在一个初级圈 C 上.

如果 v_{k+1} 也在 C 上，那么命题已经成立.

如果 v_{k+1} 不在 C 上，那么除去点 v_k 后得到图 G'，因为 G 是 2 连通的，所以 G' 是连通的，在 G' 中 $v'=v_{k+1}$ 必与 C 上(不同于 v_k 的)点有初级链相连，设 v'' 是这条初级链上的第一个属于 C 的点，那么由图 2.14 可以看出链 μ_1、μ_2 及边 e^3 构成一个经过 v 与 v' 的初级圈.

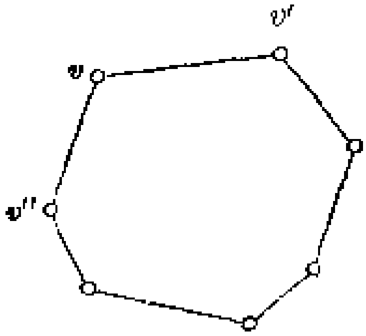


图 2.13

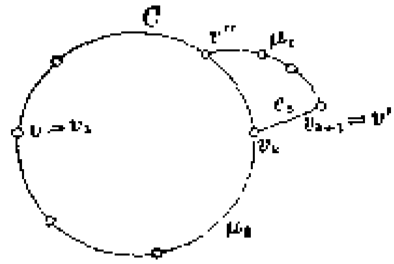


图 2.14

反过来，如果图 G 的任意两个顶点 v 与 v' 在一个初级圈上，那么去掉一个顶点 v''($v''\neq v$ 与 v')后，v 与 v'' 至少还有一条链相连，所以 G 是 2 连通的.

上面所说的连通性可以称为点连通，类似地可以定义线连通.

如果从图 G 中任意去掉 $k-1$($1\leqslant k<|E|$)条边后，所得

的图是连通的，我们就说 G 是 k 阶线连通的.

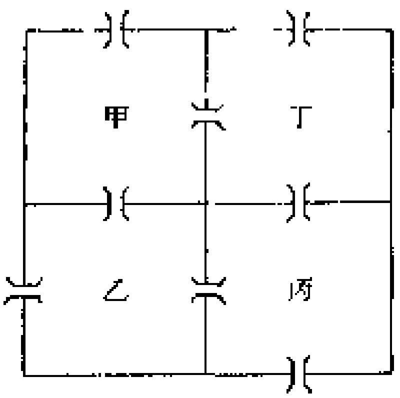
点连通与线连通有许多有趣的性质，但是我们不打算多说了。

习 题 二

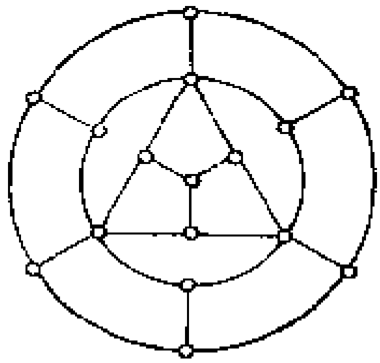
1 在图 2.4 中，旅行者能否经过每一座桥恰好一次，既无遗漏也无重复?

2 证明在任一次舞会上，跳过奇数次舞的人的总数一定是偶数.

3 如图所示，四个村庄下面各有一个防空洞甲、乙、丙、丁，相邻的两个防空洞之间有地道相通，并且每个防空洞各有一条地道与地面相通(图中地道用⌶来表示)，能否每条地道都恰好走过一次，既无重复也无遗漏?



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4 在图中找一条链经过每个顶点恰好一次(并不要求经过所有边)?

5 将 8×8 的国际象棋盘的右上角与左下角各剪去一个方格，剩下的部分能否用 31 个 1×2 的矩形完全盖住?

6 某单位有 120 名职工，每晚需派三个人值班. 能否排出这样的值班表，使每两个人都同时值班一次并且只同时值班一次?

7 能不能用 13 个 $1\times1\times2$ 的方块堆成一个空心的 $3\times3\times3$ 的立方体?

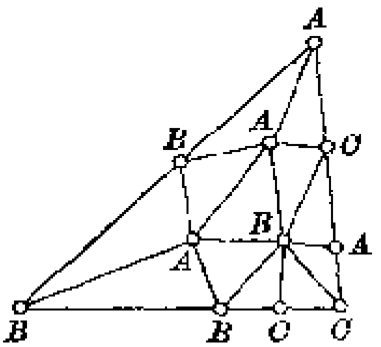
8 (1) 12只杯子，杯口全部朝上，如何将它们全部翻过来，使得杯口全部朝下？但规定每一次翻动时，必须11只杯子一起翻动。

(2) 13只杯子，杯口全部朝上，如何将它们全部翻过来，使得杯口全部朝下？但规定每一次翻动时，必须12只杯子一起翻动。

9 教室里有5排椅子，每排5张，每张椅子坐一个学生。如果一周后每个学生都必须与和他相邻的某一个同学（前后左右）交换坐位，问应当怎样换？

10 n个点v_1、v_2、…、v_n顺次排在同一条直线上，每个点涂上红色或蓝色。如果相邻点间的线段v_iv_{i+1}的两端颜色不同，我们就把它叫做标准线段。已知v_1与v_n的颜色不同，证明标准线段的个数一定是奇数。

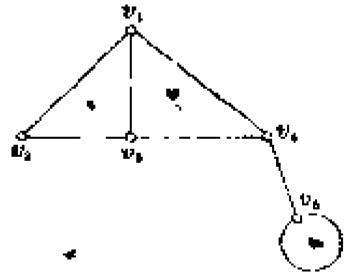
11 在$\triangle ABC$的边上及内部取若干个点，将$\triangle ABC$分成一些小三角形，每两个小三角形或者有一个公共顶点，或者有一条公共边，或者完全没有公共点(这称为$\triangle ABC$的三角剖分)。然后，将$\triangle ABC$的内部所取的各点任意标上字母A、B、C，将大三角形的AB边上的点标上A或B，BC边上的点标上B或C，CA边上的点标上C或A。证明一定有一个小三角形，它的三个顶点为A、B、C。



(第11题图)

12 有n张卡片，在每张卡片的每一面各写上1、2、…、n中的一个数，并且每个数恰好写过两次。证明可以将这n张卡片摊在桌上，使得卡片向上一面出现的数为1、2、…、n。

13 作出下图的对偶图。



(第13题图)

14 将1、2、…、$2n$这$2n$个数依次排在一个圈上，并且在某些数上放有奖品，如果一个人掷出k点($1\leqslant k\leqslant 2n$)，就由k向前再数k个数(k本身不算在内)。证明可以在m个位置($m\leqslant n$)放上奖品，不管你掷出多少点，都得不到奖品。

15　无限图 G 以平面上的所有整点为顶点，以水平线段 $\{y=j,\ i-1\leqslant x\leqslant i\}$ 及竖直线段 $\{x=i,\ j-1\leqslant y\leqslant j\}$ 为边。试找一条长为无穷的链，经过 G 的所有顶点恰好一次。

16　至少要去掉多少条边，才能将完全图 K_n 变成一个不连通的图 G，并且 G 有一个连通分支含 n' 个顶点？$(1\leqslant n'<n)$

17　已知图 G 至少要 k 笔才能画成。去掉一条边后得图 G'，问 G' 至少需要几笔才能画成？试举例加以说明。

18　如果在一次会议上，每个人都至少与 $\delta\geqslant 2$ 个人交换过意见，证明一定可以找到 k 个人 v_1、v_2、…、v_k，使得 v_1 与 v_2 交换过意见，v_2 与 v_3 交换过意见，…，v_{k-1} 与 v_k 交换过意见，v_k 与 v_1 交换过意见。其中 k 为大于 δ 的某个整数。

19　已知简单图 G 有 n 个顶点，k 个连通分支，证明边数 $m\leqslant\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$。等号什么时候成立？

20　如果简单图 G 有 n 个顶点，而边数大于 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，那么 G 是连通的。

21　如果简单图 G 有 n 个顶点，并且是 $n-1$ 连通的，那么 G 是什么样的图？

22　如果 G 是 2 连通图，那么对于每三个顶点 v、v'、v''，有一条从 v 到 v'' 的链经过 v'。

23　某次会议有 n 个人参加，其中有些人互相认识，如果每两个互相认识的人都没有共同的熟人，每两个互不认识的人都恰有两个共同的熟人。证明每一个参加者有同样数目的熟人。

24　证明上题中 $n\neq 5$、6、7、8、9、10。

25　在接头 A、B 之间连接着某些电阻。试问：至少需要多少个电阻，应当照怎样的线路图，才能使得任意九个电阻损坏（电阻短路或断路）时，所形成的电路图仍然是连通的，而且不短路。

26　一只蜗牛以不变的速度沿直线爬行，并且每经过 15 分钟就折转 90° 继续沿直线爬行。证明蜗牛爬回到原出发点时，一定要经过整数个小时。

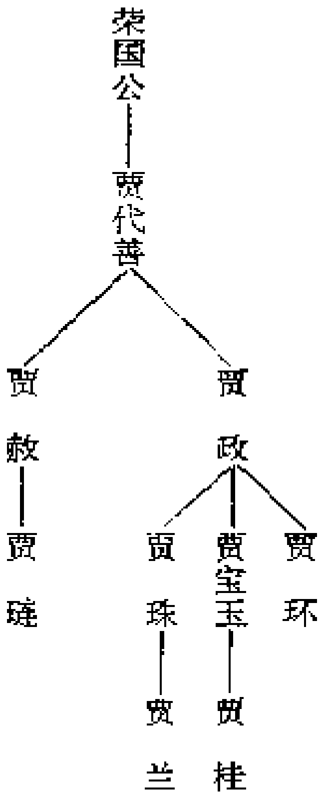
27 有一条自身相交的闭折线，已知它每一节相交一次．证明这条闭折线的节数是偶数．

28 从敌区铁路交通图上发现，要使两个城市 v_1、v_2 的铁路交通完全断绝，至少要炸坏 k 段铁路．如果图上有一个城市 v_3 与 v_1、v_2 之间各有一段铁路 e_1、e_2 相通，证明把 e_1、e_2 炸坏后，至少还要再炸坏 $k-1$ 段铁路才能使 v_1、v_2 的铁路交通完全断绝．

§3 树

前面已经说过，图论有两个重要的起源，一个是基希霍夫对电路网络的研究，一个是凯莱对有机化学中各种同分异构体个数的计算．在他们的工作中都用到一种很常见的图，这种图就是我们这一节所要说的树．

［例一］ 《红楼梦》中荣国府的世系图如下：



如果将每个人用一个点来表示，并且在父子之间连一条边，便得到图 3.1．

这种图便称为树图或简称为树，因为它的形状（倒过来看）很象一棵树．

现在我们给出树的定义.

没有圈的连通图称为树. 通常用字母 T 来表示树.

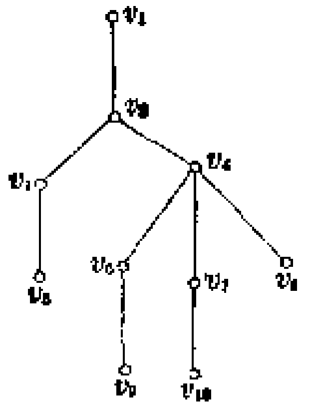


图 3.1

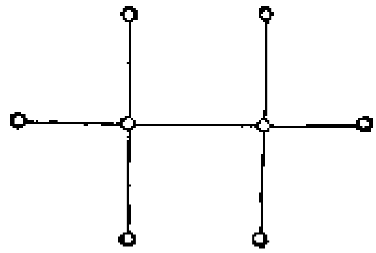
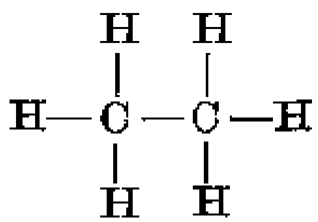


图 3.2

[例二] 在有机化学中, 乙烷(C_2H_6)的结构式是



如果将 C 与 H 都用点来表示, 便得到图 3.2 它是有六个顶点的树.

根据定义, 树显然是简单图. 从图 3.1、图 3.2 还可以看出一个树有一些顶点的次数为 1.

我们把次数为 1 的顶点称为悬挂点.

定理一 如果树 T 的顶点数 $\geqslant 2$, 那么它至少有两个悬挂点.

证明 设想有一个人这样旅行: 从某个顶点 v 出发, 沿着 T 的边前进, 已经走过的边不再重复. 由于树是没有圈的, 因此他不会回到已经走过的点, 也就是说每个顶点至多走过一次. 如果他走到一个点不是悬挂点, 那么由于这个点的次数大于 1, 旅行还可以继续下去. 但 T 的顶点个数是有限的, 所

以旅行不能永远继续下去．如果在顶点 v' 处，旅行不能继续下去，点 v' 就是一个悬挂点．

图 3.3

如果旅行者是从悬挂点 v'（上面已经证明了它的存在）开始出发的，那么在旅行结束时又得到另一个悬挂点 v''，所以每个树至少有两个悬挂点．

图 3.3 是恰有两个悬挂点的树．

下面的定理揭示了树的顶点数与边数之间的关系．

定理二 如果树 T 的顶点数为 n，那么它的边数 $m=n-1$．

证明 对 n 用归纳法．$n=1$ 或 2 时定理显然成立．假设定理对 $n-1$ 个顶点的树已经证明．我们去掉树 T 的一个悬挂点及与它相邻的边，这就得到一个树 T'，T' 有 $n-1$ 个顶点，根据归纳假设，T' 的边数 $m'=n-2$，因面 T 的边数

$$m=m'+1=(n-2)+1=n-1.$$

设 G 是一个连通图，如果 G 中有圈，我们在这个圈中去掉一条边，得到的图 G' 还是连通的，如果 G' 仍然有圈，再在圈中去掉一条边得连通图 G''，…，这样继续下去，最后得到一个树 T．T 与 G 的顶点是相同的，并且从 T 陆续添加一些边就得到 G．具有这样性质的树 T 称为连通图 G 的生成树．生成树是一个很有用的概念．上面的叙述说明了生成树的存在性．

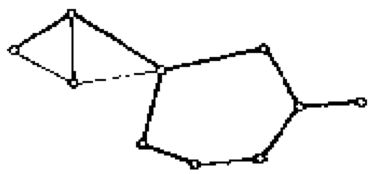


图 3.4

例如图 3.4 中的粗边便构成该图的一个生成树．

现在我们来证明定理二的逆定理．

［例三］ 如果图 G 是连通的，有 n 个顶点，$m=n-1$ 条边，那么 G 是一个树．

解 取 G 的生成树 T, T 有 n 个顶点，因而根据定理二，T 有 $n-1$ 条边. T 又是 G 的子图，所以 $G=T$.

[例四] 证明树 T 具有以下性质：

(1) 在 T 中去掉任一条边后，所得的图 G 是不连通的.

(2) T 添加一条边后所得的图 G 一定有圈.

(3) T 的每一对顶点 v 与 v' 之间有且仅有一条链相连.

解 (1) 如果 G 是连通的，那么 G 还是树，所以 G 有 $n-1$ 条边，即与 T 的边数相同，矛盾.

(2) 如果 G 没有圈，那么 G 还是树，所以 G 有 $n-1$ 条边，即与 T 的边数相同，矛盾.

(3) 因为 T 连通，所以有一条链连结 v 与 v'. 因为 T 没有圈，所以仅有一条链连结 v 与 v'.

[例五] 如果一个图 F 由 k 个互不相连的树组成，那么 F 称为森林. 图 3.5 就是一个森林，它由三个树组成.

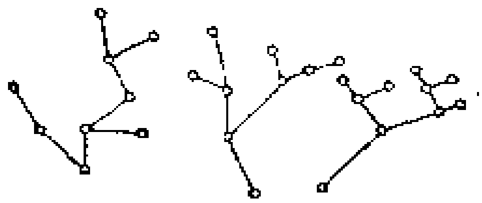


图 3.5

不难看出，如果森林 F 有 n 个顶点，并且由 k 个互不相连的树组成，那么 F 有 $n-k$ 条边.

关于树的计算，凯莱及其他数学家做了许多工作.

[例六] 由四个顶点 v_1、v_2、v_3、v_4 可以产生 16 个不同的树(图 3.6).

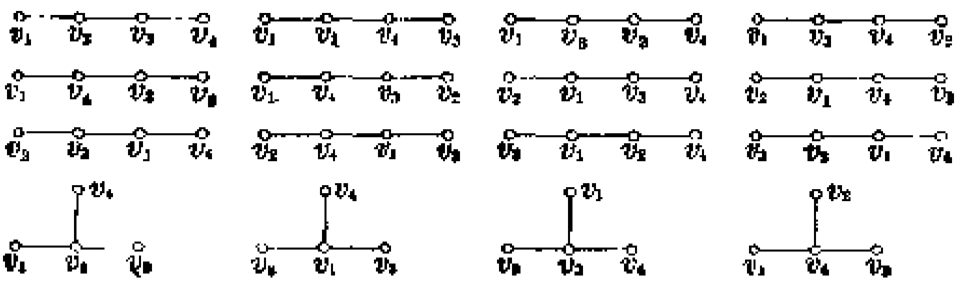


图 3.6

如果对顶点 v_1、v_2、v_3、v_4 不加区别，或者说在同构的意义下，就只有两个不同的树(图 3.7).

图 3.7

下面的定理是凯莱首先证明的.

定理三* 由 n 个顶点 v_1、v_2、…、v_n 可以产生 n^{n-2} 个不同的树.

证明 这个定理有许多不同的证法与推广. 我们采用的是 Prüfer 的方法.

设树 T 的顶点为

$$v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n. \tag{1}$$

v_{i_1} 为序列(1)中第一个出现的 T 的悬挂点. 在 T 中将 v_{i_1} 及与它相邻的边 $e_1=(v_{i_1},\ v_{j_1})$ 去掉后得树 T_1. 设 v_{i_2} 为序列(1)中第一个出现的 T_1 的悬挂点. 在 T_1 中将 v_{i_2} 及与它相邻的边 $e_2=(v_{i_2},\ v_{j_2})$ 去掉后得树 T_2. 依此继续下去，最后得一条连结两个顶点的边 $e_{n-1}=(v_{i_{n-1}},\ v_{j_{n-1}})$. 因此，由树 T 可以唯一地确定一个排列

$$\sigma(T)=(v_{j_1},\ v_{j_2},\ \cdots,\ v_{j_{n-2}}). \tag{2}$$

不难看出，任一顶点 v 在其中出现的次数为 $\deg_T v-1$，并且如果 T 与 T' 不同，则产生的排列 $\sigma(T)$ 与 $\sigma(T')$ 不同.

例如从图 3.8 中的树，用上面的方法得到排列

$$(v_2,\ v_4,\ v_4,\ v_3,\ v_2).$$

其中 v_4 与 v_2 各出现两次，v_3 出现一次.

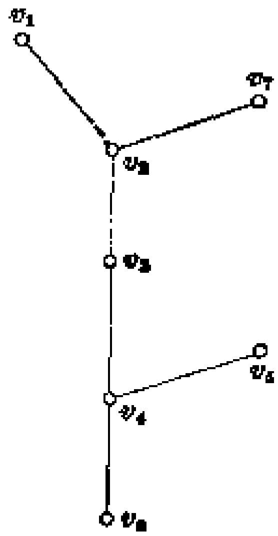


图 3.8

反过来，从每一个排列 $(v_{j_1},\ v_{j_2},\ \cdots,\ v_{j_{n-2}})$ 可以得到一个树 T. 方法是从(1)中取出第一个不在(2)

中的顶点 v_{i_2}，连一条边(v_{i_2}, v_{j_2})，从(1)中去掉 v_{i_2}，从(2)中去掉 v_{j_2}，然后再从(1)中找出第一个不在(2)中的顶点 v_{i_3}，又连一条边(v_{i_3}, v_{j_3})，如此继续下去，最后将(1)中剩下的唯一的点 $v\neq v_{j_{n-2}}$ 与 $v_{j_{n-2}}$ 相连．例如从$(v_2, v_4, v_4, v_3, v_2)$可以陆续得到边$(v_1, v_2)$，$(v_5, v_4)$，$(v_6, v_4)$，$(v_4, v_3)$，$(v_3, v_2)$，最后将 v_7 与 v_2 相连，就得到图 3.8.

不难证明这样得到的图是一个树 T，并且

$$\sigma(T)=(v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_{n-2}}).$$

根据以上所述，树 T 与排列(2)是一一对应的，但排列(2)显然有 n^{n-2} 种，因此由 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 可以产生 n^{n-2} 个不同的树．

关于树及其它图的计算有许多重要的定理(如著名的波利亚(Pólya)定理)，读者可以阅读有关的著作，这里就不作介绍了．

* * *

最后我们引进图的直径、离径、半径与中心等概念．

对于图 $G=(V, E)$的顶点 v 与 v'，从 v 到 v' 的链长(即该链中边的段数)的最小值，称为 v 与 v' 的距离，记为 $d(v, v')$．如果 v 与 v' 之间没有链相连，则规定 $d(v, v')=\infty$．又规定 $d(v, v)=0$.

不难看出距离 $d(v, v')$具有下列性质：

(1) $d(v, v')\geqslant 0$，等号当且仅当 $v=v'$ 时成立．

(2) $d(v, v')=d(v', v)$.

(3) $d(v, v')+d(v', v'')\geqslant d(v, v'')$.

图 G 中最大的距离，称为图 G 的直径．

例如图 3.9 中，G_1 的直径为 2，G_2 的直径为 3.

如果固定 v，v 到与它最远的顶点之间的距离称为 v 的

G_1　　　　　　G_2

图 3.9

离径，记作 $R(v)$.

如果在所有点中顶点 u 处离径 $R(u)$ 最小，那么 u 称为图 G 的中心，$R(u)$ 称为图 G 的半径.

例如图 3.9 中，G_1 的中心为 v_1，半径为 1. G_2 的每一个顶点都是中心，半径为 3.

图的中心有很明显的实际意义. 假定图 G 的边均等于单位长，每个顶点各驻有一支军队，那么以中心为集合点将各支部队集中，比用不是中心的顶点为集合点时所需要的时间短.

[例七]　如果图 G 的每个顶点的次数均不超过 δ，那么图 G 的半径

$$R \geqslant \frac{\ln(n\delta - n + 1)}{\ln\delta} - 1,$$

其中 $n = |V|$.

解　$R=\infty$ 时，命题显然成立. 如果 $R<\infty$，设中心为 u. 到 u 的距离等于 1 的顶点个数 $\leqslant \delta$，距离等于 2 的顶点个数 $\leqslant \delta^2$，…，所以

$$n \leqslant 1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^R = \frac{\delta^{R+1}-1}{\delta-1},$$

即

$$R \geqslant \frac{\ln(n\delta - n + 1)}{\ln\delta} - 1.$$

现在我们来讨论一下树的中心、直径、半径.

[例八]　每个树 T 或者有一个中心，或者有两个相邻的中心.

解　对于只有一个顶点的树 T_1 与只有两个顶点的树 T_2，命题显然成立.

对于一般的树 T，把 T 的悬挂点全部去掉，得到树 T'. T' 的每一个顶点 v 的离径 $R'(v)$ 比它在 T 中的离径 $R(v)$ 减少 1，因此 T' 与 T 的中心相同. 再将 T' 的悬挂点全部去掉，得到树 T''，T'' 的中心仍与 T 相同. 如此继续下去，最后成为 T_1 或 T_2，所以 T 有一个中心或者有两个相邻的中心.

下面的例九比例八更进了一步.

[例九]　设 $\mu=(v_1, v_2, \cdots, v_{q+1})$ 为树 T 中最长的链，那么 T 的直径 $=q$，v_1 与 v_{q+1} 都是悬挂点. 我们把这条链称为树的主干. 这时有两种情况：

(1) q 为奇数 $2k-1$，那么 T 的半径为 k，T 有两个相邻的中心，即 v_k 与 v_{k+1}，并且每一条长为 q 的链都通过这两个中心.

(2) q 为偶数 $2k$，那么 T 的半径为 k，T 只有一个中心，即 v_{k+1}，并且每一条长为 q 的链都通过中心 v_{k+1}.

解　我们只证明(1)，情况(2)可以用完全同样的方法加以证明.

对于任意一个顶点 v，

$$d(v, v_1)+d(v, v_{2k})\geqslant d(v_1, v_{2k})=2k-1,$$

所以 $d(v, v_1)\geqslant k$ 与 $d(v, v_{2k})\geqslant k$ 这两个不等式必有一个成立（否则 $d(v, v_1)+d(v, v_{2k})\leqslant k-1+k-1=2k-2$）. 这也就是说，任一顶点的离径 $\geqslant k$，因此 T 的半径 $\geqslant k$.

现在证明半径为 k 而且中心为 v_k 与 v_{k+1}. 如果顶点 v 不在主干上，那么 v 必在自某点 $v_i(2\leqslant i\leqslant 2k-1=q)$ 引出的

"树枝"上(图 3.10)，即有一条连结 v_i 与 v 的链，v_1、v_2、…、v_{i-1}、v_{i+1}、…、v_{2k} 都不在这条链上。

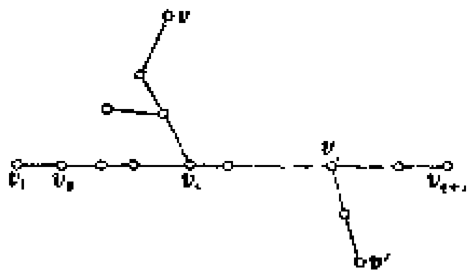


图 3.10

由于 u 是最长的链，所以有下两式：

$$d(v,\ v_i)\leqslant i-1,$$

$$d(v,\ v_i)\leqslant q+1-i.$$

如果 $i\leqslant k$，那么因为 $d(v_i,\ v_k)=k-i$，

$$d(v,\ v_k)\leqslant d(v,\ v_i)+d(v_i,\ v_k)\leqslant(i-1)+(k-i)$$
$$=k-1<k.$$

如果 $i>k$，那么

$$d(v,\ v_k)\leqslant d(v,\ v_i)+d(v_i,\ v_k)\leqslant(q+1-i)+(i-k)$$
$$=q+1-k=k.$$

从而 T 的半径 $\leqslant k$。与前证半径 $\geqslant k$ 结合，可以得出 $k=T$ 的半径，v_k 是 T 的中心。同样可证 v_{k+1} 也是 T 的中心。

最后证长为 q 的链一定通过 v_k，v_{k+1}。设顶点 v 在由 v_i 引出的树枝上，v' 在由 v_j 引出的树枝上，并且 $i\leqslant j$(图 3.10)。

如果 $i\leqslant j\leqslant k$，那么

$$d(v,\ v')\leqslant d(v,\ v_i)+d(v_i,\ v_j)+d(v_j,\ v'),$$
$$\leqslant(i-1)+(j-i)+(j-1)=2(j-1),$$
$$\leqslant 2(k-1)<2k-1=q.$$

同样，$k+1\leqslant i\leqslant j$ 时，$d(v,\ v')<q$。

所以，在 $d(v,\ v')=q$ 时，必有 $i\leqslant k<k+1\leqslant j$，这就证明了长为 q 的链一定通过中心 v_k 与 v_{k+1}。

习 题 三

1 如果连通图 G 有 n 个顶点，那么 G 至少有 $n-1$ 条边.

2 已知图 G 有 n 个顶点，$n-1$ 条边，并且 G 没有圈，证明 G 是树.

3 图 G 连通，但去掉任意一条边后就不连通，证明 G 是树.

4 图 G 没有圈，任意加上一条边后就有圈，证明 G 一定是树.

5 作出 K_5 的一个生成树. K_5 有多少个生成树？其中不同构的有多少？

6 如果图 G 的边数不小于顶点数，那么 G 一定有圈.

7 在连通图中，或者有一个顶点的次数为 1，或者可以去掉一条边使图仍然保持连通.

8 如果连通图 G 的顶点数 $\geqslant 2$，则 G 中至少有两个顶点，将它们去掉后 G 仍然连通（没有顶点的"图"也看作是连通图）.

9 证明定理三中，由序列 $(v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_{n-2}})$ 所得到的图 T 是树，并且 $\sigma(T)=(v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_{n-2}})$.

10 十个学生参加一次考试，试题十道. 已知没有两个学生做对的题目完全相同. 证明在这十道试题中可以找到一道试题，将这道试题取消后，每两个学生所做对的题目仍然不会完全相同.

11 已知条件同上题，证明在这十道试题中可以找到一道试题，即使每个学生都把这道题做了出来（不论原先有没有做出来），仍然没有两个学生做对的题目是完全相同的.

12 试利用直径的概念来表征完全图.

13 证明对于连通图，有

$$\text{直径}/2 \leqslant \text{半径} \leqslant \text{直径},$$

并分别举出直径/2＝半径、半径＝直径的例子.

14 nm 个人排成 n 行 m 列的矩阵，(1)先从每一行中挑出一个身材最高的，再在挑出的人中选一个最矮的，他的身长记为 M_1，(2)先从每一列中挑出一个身材最矮的，再在挑出的人中选一个最高的，他的身长记为 M_2. 问 M_1 与 M_2 哪个大？

15 如果G为连通图，顶点个数大于2，并且半径与直径相等，那么G一定有圈。

16 求图G的中心、半径和直径。

(1) G是长为$2n$的初级链，

(2) G是长为$2n-1$的初级链，

(3) G是长为$2n$的初级圈，

(4) G是长为$2n-1$的初级圈.

17 简单图G的直径$\geqslant 3$，则其补图$\bar{G}$的直径$\leqslant 3$.

18 如果简单图G的顶点数大于1，并且G与$\bar{G}$同构，那么G的直径为2或3，试加以证明并各举一例.

19 证明如果图G的每个初级圈的长度都是偶数，那么G的每个圈的长度都是偶数.

20 在乒乓球单打比赛中采用淘汰制，即一名选手如果在一场比赛中失败就被淘汰．我们用点表示选手，两名选手如果进行过比赛就在相应的两个点之间连一条边，证明这样得到的图是树．如果有n名选手参加比赛，决出冠军，共需进行多少场比赛?

21 如果一个树是这样"生长"的：从点a引出五条边(a, b_i)，$i=1, 2, 3, 4, 5$，再由点b_i引出五条边(b_i, c_{ij})，$j=1, 2, 3, 4, 5$或者一条边也不引出．依此类推，问这样长下去，能否得到一个有1002个悬挂点的树? 能否得到一个有1001个悬挂点的树?

22 能不能找到一个图，具有以下性质：任意取掉一条边后，它分成两个同构的连通分支?

23 在8×8的棋盘上填上1～64的所有整数，证明总能找到两个相邻（具有公共边的两个方格称为相邻的）的方格，里面的数的差不小于5.

24 坐标纸上的11条水平线与11条竖直线构成一个图，以它们的交点（格点）为顶点．问应当去掉多少条边才能使每点的次数<4? 至多可以去掉多少条边还能使图保持连通?

§4 偶图与对集

偶图也是一种常见的图，它的顶点的集合 V 是由两个没有公共元素的子集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 与 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 组成的，并且在 x_i 与 $x_j(1\leqslant i, j\leqslant n)$，$y_s$ 与 $y_t(1\leqslant s, t\leqslant m)$ 之间没有边相连．例如图 4.1 就是一个偶图．

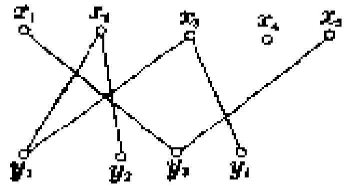


图 4.1

通常将偶图记为 $G=(X, Y; E)$．

［例一］ 有 100 个点，其中任意三个点不共线，证明可以添加 2500 条连接这些点的线段，而不形成一个以这 100 个点中某些点为顶点的三角形．

解 用这 100 个点为顶点作一个偶图，其中集合 X 与 Y 各有 50 个点，将每一个 $x_i\in X$ 与每一个 $y_s\in Y$ 用一条边连起来，恰好连了 2500 条线段而没有形成一个以这 100 个点为顶点的三角形．

如果在偶图 $G=(X, Y, E)$ 中，$|X|=n$，$|Y|=m$，并且每一个 $x_i\in X$ 与每一个 $y_s\in Y$ 有一条边相连，那么这样的偶图称为完全偶图，记为 $K_{n,m}$．

例一中所作的偶图就是 $K_{50,50}$．

［例二］ 证明如果在例一的 100 个点之间添 2501 条线段，那么一定有以这些点为顶点的三角形产生．

解 可以用归纳法证明更一般的结论：如果简单图 G 的顶点数为 $2n$，并且图 G 中没有三角形，那么 G 最多有 n^2 条边．

假设命题对 $n-1$ 已经成立．去掉 G 中两个相邻的顶点

v 与 v' 及它们之间的边，得图 G'，G' 有 $2n-2$ 个顶点，根据归纳假设，G' 至多有 $(n-1)^2$ 条边.

因为 G 中没有三角形， 任一顶点 v'' 不能同时与 v 及 v' 相邻，所以 G 至多有

$$(n-1)^2+(2n-2)+1=n^2$$

条边.

当 G 的顶点个数为 $2n+1$ 时，如果 G 中没有三角形，那么 G 最多有 n^2+n 条边，证明留给读者作为习题.

因此顶点个数为 p 的简单图，如果不含有三角形，则它至多有 $\left[\frac{p^2}{4}\right]$ 条边(在本书中，用 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分).

[例三]　X、Y 两国留学生各 $n(n>2)$ 人，每个 X 国学生都与一些(不是所有)Y 国学生跳过舞，每个 Y 国学生至少与一个 X 国学生跳过舞，证明一定可以找到两个 X 国学生 x、x' 及两个 Y 国学生 y、y'，使得 x 与 y、x' 与 y' 跳过舞，而 x 与 y'、x' 与 y 没有跳过舞.

解　作一个偶图 $G=(X, Y, E)$，X 的每一个顶点表示一个 X 国学生，Y 的每一个顶点表示一个 Y 国学生. 如果一个 X 国学生与一个 Y 国学生跳过舞， 就在相应的两个点之间连一条边.

设在集合 X 中，点 x 的次数最大(即与 x 跳过舞的 Y 国学生最多). 因为 $\deg x<n$，所以在 Y 中存在一个点 y' 与 x 不相邻. 但由题设至少有 x' 与 y' 相邻，因为除 y' 外与 x' 相邻的点为 $\deg x'-1$，而且

$$\deg x'-1\leqslant\deg x-1<\deg x,$$

所以在与 x 相邻的点中一定有一个点 y 与 x' 不相邻. 这样得出的四个点 x、x'、y、y' 就代表了四个符合要求的人.

［例四］ 如果在偶图 $G=(X, Y, E)$ 中有一条初级链，那么链上属于 X 与属于 Y 的点相间，因而两者的个数相等或相差 1. 这可以用来解决习题二中的一些问题. 如习题二第 4 题中的图（图 4.2）就是一个偶图，其中黑色点组成集 X，白色点组成集 Y. 由于 $|X|-|Y|=9-7=2$，所以不存在一条链经过图 4.2 中所有顶点恰好一次.

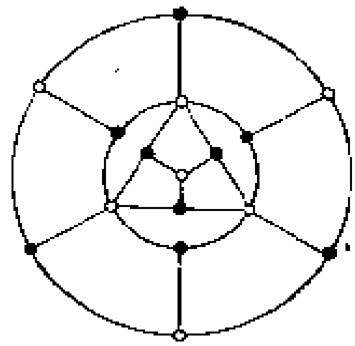


图 4.2

将图 G 的顶点涂上颜色，如果至少要用 k 种颜色才能使任意两个相邻的顶点颜色不同，我们就说图 G 的色数为 k.

显然偶图的色数 $\leqslant 2$（集合 X 与 Y 各用一种颜色），反过来，色数 $\leqslant 2$ 的图是偶图.

［例五］ 如果树 T 的顶点数 $n>1$，那么 T 的色数为 2. 因此，树是偶图.

解 用归纳法. $n=2$ 时显然. 设对 $n-1>1$，命题已经成立. 去掉 T 的一个悬挂点 x 及与 x 相邻的边 (x, y)，得到树 T'. 由归纳假定，T' 的色数为 2. 用两种颜色将 T' 涂好，使得相邻的顶点颜色不同，再将边 (x, y) 及点 x 添加到 T' 上，并使 x 涂上与 y 不同的另一种颜色，就得出 T 的色数也是 2 的结论.

［例六］ 证明如果图 G 为偶图，那么所有的圈长为偶数. 反过来，如果图 G 的所有的圈长为偶数，那么 G 是偶图.

解 设 μ 为偶图 $G=(X, Y, E)$ 的一个圈. μ 从 X 引出进入 Y，再从 Y 引出进入 X，…，最后从 X 引出进入 Y，再从 Y 引出进入 X，因此 μ 的长一定是偶数.

反过来，设 G 的每个圈的长为偶数，要证明 G 为偶图. 不

妨假定 G 是连通的(否则考虑 G 的每一个连通分支),任取一点 v，将它涂上红色，然后根据下面的规则将 G 的顶点 v' 涂上红色或蓝色:

如果有一条自 v 到 v' 的链长为偶数,那么就将 v' 涂上红色.

如果有一条自 v 到 v' 的链长为奇数,那么就将 v' 涂上蓝色.

由于 G 的每个圈的长都是偶数,所以如果从 v 到 v' 有几条链,那么这几条链的长具有相同的奇偶性,因此按照上面的规则,每个点都可以涂上一种确定的颜色,并且显然相邻的两个点一定涂上不同的颜色. 这就证明了图 G 的色数为 2，从而 G 是一个偶图.

* * *

如果图 G 的每个顶点的次数都是 δ，我们就把 G 称做 δ 正则图.

例如图 1.3 中的 G_1、G_2、G_4 均是 3 正则的，G_3 是 4 正则的，G_5 是 5 正则的.

[例七]　$G=(X, Y, E)$ 是一个偶图，顶点的最大次数为 δ,试将它扩大为一个 δ 正则的偶图 G'，即作一个偶图 G'，使得 G 为 G' 的子图，并且 G' 是 δ 正则的.

解　先作 δ 个 G 的"复制品" $G_1=G$, G_2, …, G_δ, 每一个都和 G 同构.

设 $G_k=(X_k, Y_k, E_k)$，$(1\leqslant k\leqslant\delta)$. 并令

$$X^*=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_\delta,$$
$$Y^*=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_\delta.$$

如果对于 X 中某个 x_i，有 $\deg_G x_i<\delta$，那么再添 $\delta-\deg_G x_i$ 个顶点到 Y^* 中，并且将这些顶点中的每一个都与 x_{i1}

$=x_i$, x_{i2}, $\cdots$, $x_{i\delta}$ 连结起来(x_{ik} 表示 G_k 中与 x_i 相对应的那个顶点)．对于 Y 中次数 $<\delta$ 的顶点 y_j，完全类似地再添 $\delta-\deg_G y_j$ 个顶点到 X^* 中，并将这些顶点与 $y_{j1}=y_j$, y_{j2}, $\cdots$, $y_{j\delta}$ 连结起来(y_{jk} 表示 G_k 中与 y_j 相对应的那个顶点)．最后得到的图 G' 是一个偶图，它以 $G=G_1$ 为子图，并且是 δ 正则的．

每一个偶图 $G=(X, Y, E)$，其中 $|X|=n$, $|Y|=m$，可以用一个 $n\times m$ 的 (0, 1) 矩阵来表示．这里所说的 $n\times m$ 的 (0, 1) 矩阵就是一个长方形的数表，有 n 行 m 列，表中的数字(称为矩阵的元素)是 0 或 1．如果在图 G 中，x_i 与 y_j 之间有一条边，我们就在矩阵的第 i 行第 j 列添入 1，否则就填 0($1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$)．这样得到的矩阵称为偶图 G 的**表示矩阵**．

例如图 4.3 中的偶图的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

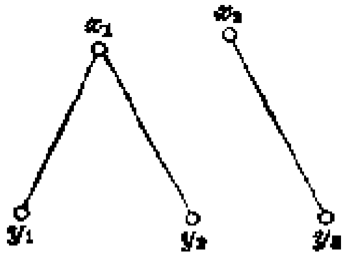


图 4.3

反过来，每一个 $n\times m$ 的 (0, 1) 矩阵表示一个偶图，即作 n 个顶点 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 与 m 个顶点 y_1, y_2, $\cdots$, y_m．如果矩阵的第 i 行第 j 列的元素为 1，就在 x_i 与 y_j 之间连一条边，否则就不连($1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$)．显然这样得到的图是一个偶图，并且这个偶图的表示矩阵就是已知矩阵。

例如矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

表示图 4.4 中的偶图．

关于 (0, 1) 矩阵有很多有趣的性质．如

[例八] 如果 A 是一个 $n\times m$ 的(0, 1)矩阵，A 的每一行都既有 0 又有 1，A 的每一列也既有 0 又有 1，那么一定可以从 A 中去掉 $n-2$ 行及 $m-2$ 列，得到一个形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵.

解 这作为一个习题留给读者考虑.

现在我们来介绍对集的概念.

设 $G=(V, E)$ 为简单图，G 的对集是指 E 的一个子集 E_0，在 E_0 中没有两条边是相邻的. 例如图 4.5 中粗线边就组成一个对集，虚线边也组成一个对集.

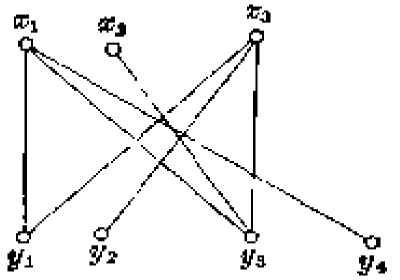


图 4.4

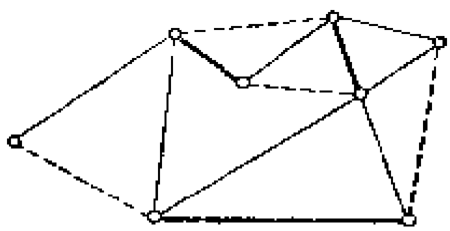


图 4.5

显然，如果 E_0 是对集，$E_0'\subseteq E_0$，那么 E_0' 也是对集.

如果在所有的对集中，$|E_0|$ 最大， 那么 E_0 称为最大对集. 图 4.5 中粗线边组成的对集不是最大的对集.

设 E_0 是对集，如果 v 与 E_0 的边相邻，我们就说顶点 v 被 E_0 吸收了. 如果一个对集吸收了图 G 的所有的顶点，那么这个对集就称为完全对集. 完全对集显然是最大对集. 图 4.5 中虚线边组成的对集是完全对集，因而也是最大对集.

我们只讨论偶图的对集，这是应用中最为常见的情形. 例

如有 n 个人（用点 x_1、x_2、…、x_n 表示），m 台机器（用点 y_1、y_2、…、y_m 表示），如果 x_i 可以操纵机器 y_j，我们就在 x_i 与 y_j 之间连一条边，这样就得到一个偶图．如何适当地安排，使尽可能多的人工作，就是求这个偶图的最大对集．

［例九］ 设有 m 个集合 Y_1、Y_2、…、Y_m（不一定互不相同），从每个集合中各取一个元素：$x_i \in Y_i (i=1, 2, \cdots, m)$，如果取出的元素

$$x_1、x_2、\cdots、x_m \tag{1}$$

互不相同，我们就说 (1) 是集合 Y_1、Y_2、…、Y_m 的*互异的代表系*，简记为 SDR．如 $Y_1=\{2, 5\}$，$Y_2=\{2, 5\}$，$Y_3=\{1, 2, 3, 4\}$，$Y_4=\{1, 2, 5\}$，那么

$$2, 5, 3, 1$$

就是 Y_1、Y_2、Y_3、Y_4 的一个 SDR．如果将 Y_4 改为 $Y_4'=\{2, 5\}$，那么 Y_1、Y_2、Y_3、Y_4' 不存在 SDR，因为在 $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_4'$ 中只有 2 和 5 这两个元素，而 Y_1、Y_2、Y_4' 的 SDR 中至少要有三个元素．

如果我们用点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示集合 $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_m$ 的各个元素，用点 y_j 表示集合 $Y_j (1 \leqslant j \leqslant m)$，并且当且仅当 $x_i \in Y_j$ 时，我们在点 x_i 与 y_j 之间连一条边 $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$．这样就得到一个偶图 $G=(X, Y, E)$．求 Y_1、Y_2、…、Y_m 的 SDR 就变为求 G 的一个对集 E_0，E_0 吸收了所有的 $y_j (1 \leqslant j \leqslant m)$．

例如由上面所举的集合 Y_1、Y_2、Y_3、Y_4 可得图 4.6，其中粗线边表示它的对集，也就是上面所说的 SDR．

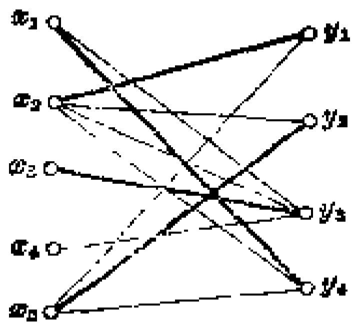


图 4.6

我们进一步研究一下 Y_1、Y_2、…、Y_m 具有 SDR 需要什么条件．

荷尔(Hall)证明了下面的定理.

定理一 偶图 $G=(X, Y, E)$ 有一个吸收了所有 y_j 的最大对集($1\leqslant j\leqslant m$),也就是 Y_1、Y_2、…、Y_m 有一个 SDR 的充分必要条件是:与任意 $k(1\leqslant k\leqslant m)$ 个 y_j 相邻的顶点 x_i 的个数不小于 k。

证明 必要性是显然的,只要证充分性.

假定与任意 $k(1\leqslant k\leqslant m)$ 个 y_j 相邻的顶点 x_i 的个数不小于 k, 我们对 m 用归纳法来证明 G 有一个吸收了所有 y_j 的最大对集.

$m=1$ 时命题显然成立. 假定命题对 $m-1$ 已经成立,要证明命题对 m 也成立. 这时有两种情况:

(1) 如果对每个 $k\leqslant m-1$,与任意 k 个 y_j 相连的 x_i 的个数 $\geqslant k+1$. 我们去掉两个相邻的顶点,不妨设这两个顶点为 x_1 与 y_1, 在剩下的图 G' 中, 与任意 k 个 y_j 相邻的顶点 x_i 的个数 $\geqslant k$, 因此由归纳假设, 有一个 G' 的对集 E_0' 吸收了所有 y_j $(2\leqslant j\leqslant m)$, 再将边$(x_1, y_1)$添加到 E_0' 中就得到我们所要的对集 E_0.

(2) 如果对某个 $k\leqslant m-1$, 有 k 个 y_j, 与它们相邻的 x_i 的个数等于 k. 这时不妨假定与 y_1、y_2、…、y_k 相邻的顶点只有 x_1、x_2、…、x_k 这 k 个, 由于这一点, 我们可将图 G 分成两个子图,由顶点 x_1、x_2、…、x_k、y_1、y_2、…、y_k 及与它们相邻的边组成的子图记为 G_1, 其余部分记为 G_2. 由于 G 满足定理条件, G_1 显然也满足定理条件,因此存在一个 G_1 的对集 E_0' 吸收了 y_1、y_2、…、y_k. 另一方面 G_2 也满足定理条件 (不然的话, 例如设与 y_{k+1}、y_{k+2}、…、y_{k+h} 相邻的顶点少于 h, 那么与 y_1、y_2、…、y_k、y_{k+1}、y_{k+2}、…、y_{k+h} 相邻的点少于 $k+h$, 与已知条件矛盾), 所以也有一个 G_2 的对集 E_0'' 吸收了 y_{k+1}、

y_{k+2}、…、y_m. 将 E_0' 与 E_0'' 合起来就得到所要的对集 E_0.

定理一有很多颇为有趣的应用.

[例十] 有 n 个 X 国留学生与 n 个 Y 国留学生参加了一次舞会. 每个 X 国学生恰好认识 δ 个 Y 国学生, 每个 Y 国学生也恰好认识 δ 个 X 国学生, 证明可以适当安排, 使每个 Y 国学生均与她所认识的 X 国学生在一起跳舞.

解 用点 x_1、x_2、…、x_n 表示 X 国学生, y_1、y_2、…、y_n 表示 Y 国学生. 如果 x_i 认识 y_j, 就连一条边 (x_i, y_j), 这样就得到一个 δ 正则的偶图 $G=(X, Y, E)$, 要证明它有一个完全对集, 只要证明这个图满足定理一的条件就可以了.

如果定理一的条件不满足, 那么存在一个整数 k $(1\leqslant k\leqslant n)$, 使得与某 k 个点 x_{i_1}、x_{i_2}、…、x_{i_k} 相邻的点少于 k. 我们计算一下与这些点相邻的边的条数. 从 x_{i_1}、x_{i_2}、…、x_{i_k} 这方面考虑, 应当有 $k\delta$ 条, 而从与 x_{i_1}、x_{i_2}、…、x_{i_k} 相邻的点 y_{j_1}、y_{j_2}、…、y_{j_h} $(h<k)$ 这方面来考虑, 却只有 $h\delta<k\delta$ 条, 矛盾.

因此定理一的条件是满足的, 图 G 有一个完全对集.

[例十一] 拉丁长方的扩充是定理一的另一个应用.

设 A 是一个 $r\times n(r\leqslant n)$ 的矩阵, 元素为 1、2、…、n, 如果在 A 中每一个数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 在每一行恰好出现一次, 在每一列至多出现一次. 这样的矩阵就称为拉丁长方. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

就是一个 3×5 的拉丁长方, 它可以添上两行成为 5×5 的拉丁方($n\times n$ 的拉丁长方称为拉丁方).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

一般地，如果给出了一个 $r\times n(r\leqslant n)$ 的拉丁长方 A，能不能将这个拉丁长方添上 $n-r$ 行，使它成为一个 $n\times n$ 的拉丁方？

解 作一个偶图 $G=(X, Y, E)$. X 的顶点为 1、2、…、n. Y 的顶点为 y_1、y_2、…、y_n，分别代表 A 的 n 个列. 如果数 i 不在第 j 列出现，我们就在 i 与 y_j 之间连一条边.

因为 A 的每一列有 r 个元素，所以每个顶点 y_j 有 $n-r$ 条相邻的边. 又因为每一行恰好有一个 i，所以 r 行共有 r 个 i，因此数 i 只在 r 个列中出现，即每个顶点 i 也有 $n-r$ 条相邻的边$(1\leqslant i, j\leqslant n)$.

根据例十，图 G 有一个完全对集 E_0.

利用对集 E_0，可以将 $r\times n$ 的拉丁长方 A 补上一行，成为$(r+1)\times n$ 的拉丁长方. 方法是：如果边 (i, y_j) 在对集 E_0 中（即 i 不在第 j 列出现），就将 i 添到第 $r+1$ 行的第 j 列$(1\leqslant i, j\leqslant n)$. 这样添加的结果显然还是一个拉丁长方.

如果 $r+1<n$，再用上法继续扩充下去，最后得到一个 $n\times n$ 的拉丁方.

习 题 四

1 证明如果简单图 G 有 $2n+1$ 个顶点，n^2+n+1 条边，则 G 一定含有一个三角形.

2 作一个不含三角形的、有 $2n+1$ 个顶点、n^2+n 条边的简单图.

3　在§1图3的每一个图 G_i 中找一个子图 G'_i，G'_i 是偶图，它包含 G_i 的所有顶点和尽可能多的边($1\leqslant i\leqslant 5$)．

4　证明如果偶图 $G=(X, Y, E)$ 是 δ 正则的，那么 $|X|=|Y|$．

5　如果在偶图 $G=(X, Y, E)$ 中，$|X|>|Y|$，并且 X 的每一个点的次数不小于 δ，那么 Y 中必有一个点的次数大于 δ．

6　甲、乙二人玩"捉乌龟"的游戏，先将54张扑克(27对)藏起一张，于是剩下的牌中有一张没有对子，称为"乌龟"，再将牌分给两个人，每个人将手中的对子全部扔掉，这时你能否根据两人手中的牌的张数来判断乌龟在谁的手上？

7　给出一个集合 A，由十个互不相同的两位数组成，证明这个集合中必有两个无公共元素的子集，这两个子集中各数的和相等．

8　证明偶图中不含三角形，也不含五边形．

9　在 n 与 δ 满足什么条件时，可以作出一个有 n 个顶点的 δ 正则图？

10　在 8×8 的国际象棋盘的64个格子中取16个格子．证明如果每一行与每一列都恰好取了两个格子，那么一定可以把8个红棋与8个蓝棋放在这些取定的格子里，使得每一行与每一列都恰有一个红棋与一个蓝棋．

11　图 G 的圈长的最小值称为 G 的腰围，记为 g(如果 G 没有圈，就规定 $g=\infty$)，证明

(1) 如果 G 是 n 正则图，$g=4$，那么 G 至少有 $2n$ 个顶点．试举出 G 恰好有 $2n$ 个顶点的例子．

(2) 如果 G 是 n 正则图，$g=5$，那么 G 至少有 n^2+1 个顶点．

12　证明如果 G 是 n 正则图，$g=5$，直径 $D=2$，那么 G 恰好有 n^2+1 个顶点．对于 $n=2$ 与 3，造出满足上述要求的图．

13　六个男孩 a、b、c、d、e、f 与六个女孩 $\bar{a}$、$\bar{b}$、$\bar{c}$、$\bar{d}$、$\bar{e}$、$\bar{f}$ 穿着不同的衣服，男女相间手拉手围成一个圈子表演团体操．如果每两个人只允许相邻一次，用这样的团体操可以表演几次？

14　试解本节例八．

15　如果在定理一中，每个集合 Y_i 至少有 t 个元素，并且

(1) $t\leqslant m$,那么这些集合至少有 $t!$ 个不同的 SDR

(2) $t>m$,那么这些集合至少有 $t!/(t-m)!$ 个不同的 SDR.

16 偶图 $G=(X, Y, E)$ 中，顶点 x_1、x_2、…、x_p 与 y_1、y_2、…、y_q 的次数为最大,其值为 δ. 证明 G 有一个对集吸收了这些次数最大的顶点 x_1、x_2、…、x_p 与 y_1、y_2、…、y_q.

17 色指数是与色数相对应的概念. 将图 G 的边涂上颜色，使相邻的边颜色互不相同（这时同一种颜色的边组成一个对集），如果至少要用 k 种颜色，我们就说 G 的色指数为 k.

证明：如果在偶图 $G=(X, Y, E)$ 中，$|X|=|Y|$，那么

$$G\text{ 的色指数 }k=G\text{ 的最大次数 }\delta.$$

从而 E 可以分成 δ 个对集，但不能分成 $\delta-1$ 个对集.

18 $2n$ 个学生每天出去散步，每两个人一组. 如果每一对学生只在一起散步一次，这样的散步可以持续多少天?

19 证明完全图 K_{2n-1} 的色指数为 $2n-1$.

§5 平　面　图

如果一个图 G 可以在平面上实现，也就是说可以作一个与 G 同构的图 G'，使 G' 的顶点与边都在同一个平面内，并且任意两条边都不相交(即除端点外没有公共点)，那么 G 就称为平面图.

图 1.1、图 1.2、图 1.3 都是平面图. 下面的图 5.1 是平面图. 图 5.2 也是平面图，因为它和图 5.1 同构.

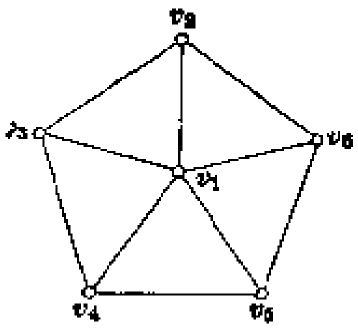


图　5.1

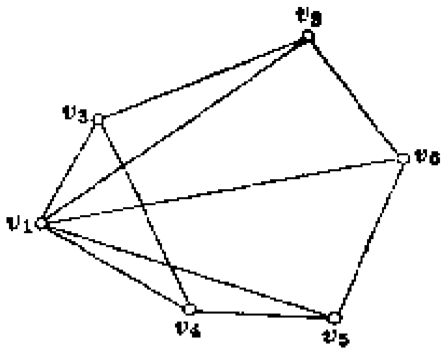


图　5.2

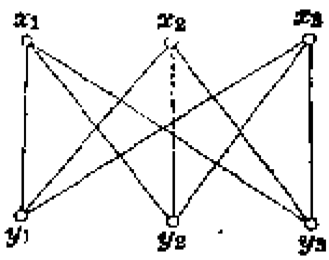


图　5.3

以后我们说到平面图，都是认为它已经在平面上实现了.

图 5.3 即偶图 $K_{3,3}$ 不是平面图，它无法在平面上实现. 这一事实，我们将在下面证明. 证明中要利用一个重要公式，即定理一中的(1)式，它是欧拉在 1852 年发现的，通常称为欧拉公式.

定理一　如果连通的平面图 G 有 n 个顶点，m 条边，f 个面(平面被 G 的边分成的区域称为面. 这在 §2 的例三中已经说过)，那么

$$n-m+f=2. \tag{1}$$

例如图 1.3 中的五个图，可以列成下表：

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
n	4	8	6	20	12
m	6	12	12	30	30
f	4	6	8	12	20

对每一个 $G_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$，(1)式都成立.

证明 如果 G 是树，那么 $f=1$, $m=n-1$, 所以 $n-m+f=2$，欧拉公式成立.

如果 G 不是树，我们取 G 的生成树 T. 在取生成树 T 的过程中，每一次去掉一条边，减少一个圈即减少一个面，因此 $n-m+f$ 始终保持不变. 既然对于树 T，欧拉公式成立，所以对于 G, $n-m+f=2$ 也成立.

[例一] 有三个工厂和三个矿山，要从每一个工厂到每一个矿山各修一条专用铁路，这些铁路能否在同一个平面上并且互不交叉？

解 将三个工厂与三个矿山用六个点表示，九条铁路用九条边表示就得到图 5.3，即是 $K_{3,3}$. 我们证明它不是平面图.

假设 $K_{3,3}$ 是平面图，那么由于 $n=6$, $m=9$，根据欧拉公式得

$$f=2+m-n=5.$$

因为 $K_{3,3}$ 是简单图，没有由两条边围成的面. 又因为 $K_{3,3}$ 是偶图，也不会有由三条边围成的面. 所以每个面至少有四条边，从而

$$4f \leqslant 2m$$

即 $$4\times5=20\leqslant2\times9=18,$$
矛盾．因此在平面上九条专用铁路必定相交，除非它们不在同一个平面上(地下铁路或空中交叉铁路)．

［例二］ 证明完全图 K_5 不是平面图．

解 对于 K_5, $n=5$, $m=C_5^2=10$．如果是平面图，根据欧拉公式
$$f=2-n+m=7.$$

因为 K_5 是简单图，每个面至少有三条边，所以
$$3f\leqslant2m,$$
即
$$21\leqslant20,$$
矛盾．

例一与例二指出 $K_{3,3}$ 及 K_5 都不是平面图，反过来，Kuratowski 证明了一个图如果不是平面图，那么将次数为2的点收缩掉以后，它一定含有一个子图与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构．这里所谓的收缩，就是把一个点 v 与它相邻的点 u 合并为一个点 w，并且使所有与 v 或 u 相邻的点都与 w 相邻．这个定理我们就不证了．

［例三］ 如果平面图 G 是简单图，它一定有一个次数不超过5的顶点．

解 可以假定 G 是连通的，否则考虑它的每一个连通分支．

因为 G 是简单图，每一个面至少有三条边，所以
$$f\leqslant\frac{2m}{3},$$
m

如果每一个顶点的次数 $\geqslant6$，那么
$$6n\leqslant2m,$$
即
$$n\leqslant\frac{m}{3}.$$

$6n\leq2m$

$3f\leq2\times$

$9\leq10$

$4f\leq2m$

$n\leq\frac{m}{3}$

根据欧拉公式

$$2=n-m+f\leqslant\frac{m}{3}-m+\frac{2m}{3}=0,$$

矛盾. 所以至少有一个顶点的次数 $\leqslant 5$.

欧拉公式不仅适用于连通的平面图，对于凸多面体(这时 m 表示多面体的棱数)它也是成立的. 因为凸多面体可以“绷”在一个球面上，再作一个球极投影(图 5.4)，凸多面体就变为一个连通的平面图. 其中多面体的含北极 N 的面就变为平面图的含 ∞ 点的面.

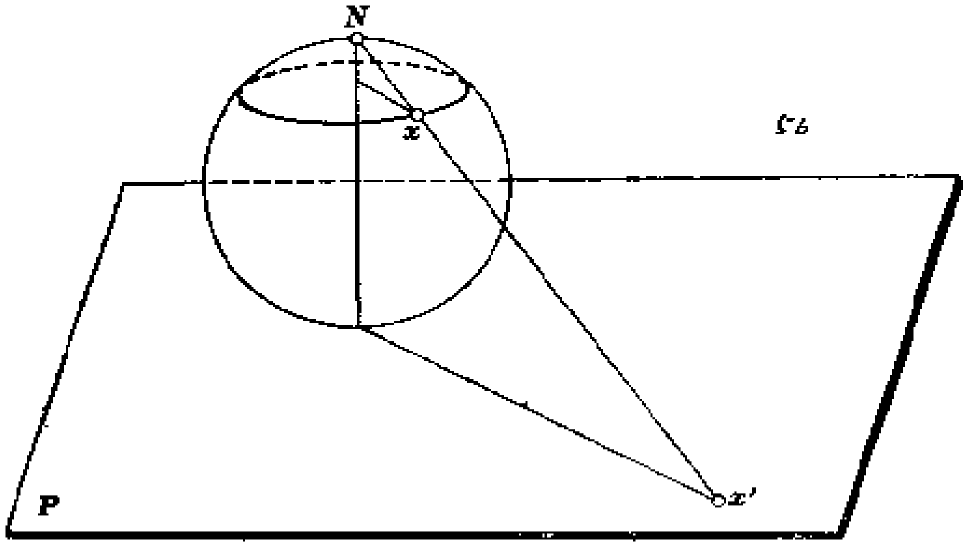


图 5.4

由欧拉公式不难推出只有五种正多面体，这一点许多书籍都有介绍，我们就不证明了.

[例四] 不存在 7 条棱的凸多面体.

解 如果 $m=7$，根据欧拉公式

$$n+f=m+2=9, \tag{1}$$

但每个面至少有三条边，每个顶点至少引出三条棱，所以

$$3f\leqslant 2m,\quad 3n\leqslant 2m,$$

从而

$$f\leqslant\frac{2}{3}m=\frac{14}{3}.$$

但 f 为整数，所以

$$f\leqslant 4.$$

同样

$$n\leqslant 4.$$

于是

$$f+n\leqslant 8. \tag{2}$$

(1)、(2)两式矛盾．所以 7 条棱的凸多面体不存在．

虽然不是所有的图都能在平面上实现，却不难证明下面的定理．

定理二 所有的图都能在三维空间中实现．

证明 设图 $G=(V,\ E)$．取一条直线 L，对每个 $v_i\in V$，在 L 上取一点 v_i' 与之对应．对每条连结 v_i 与 v_j 的边，各作一个以 L 为边界的半平面，再在这个半平面上以线段 $v_i'v_j'$ 为直径作一个半圆．由这些顶点 v_i' 及连结它们的半圆所组成的图 G' 就是 G 在三维空间的实现（G' 与 G 同构，并且 G' 的每两条边除端点外没有公共点）．

例如，图 K_5 虽然不能在平面上实现，却可以在环面上实现（图 5.5）．

$K_{3,3}$ 也可以在茂比乌斯带上实现（图 5.6）．

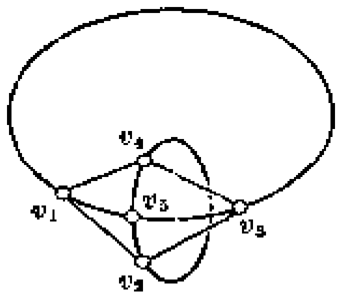


图 5.5

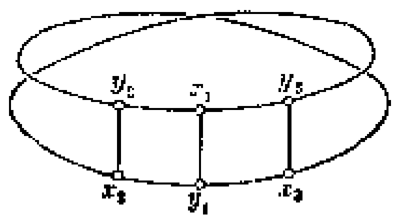


图 5.6

1948 年 Fary 还证明了每一个简单的平面图 G 都可以“直线化”，即可以找到一个与 G 同构的图 G'，G' 的边全部是直线，在同一平面上，并且除端点外彼此没有公共点．

[例五] 图5.7中的G_1是一个平面图，相应的"直线化"了的图G_1'见图5.8.

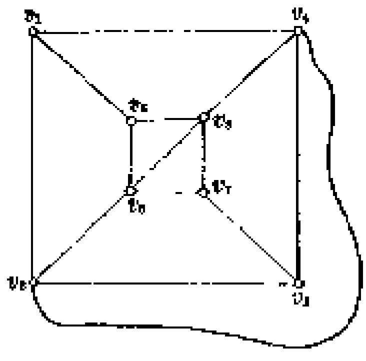


图 5.7 G_1

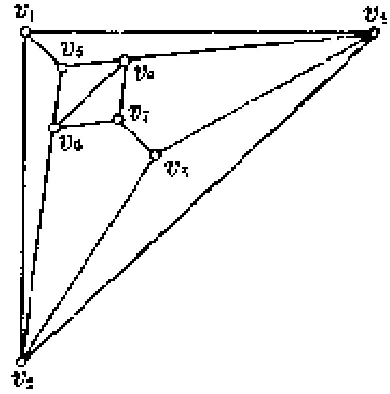


图 5.8 G_1'

图5.9的G_2也是平面图，请读者把相应的直线化了的图G_2'作出来.

通常的一张地图，只要在国界上选取若干个适当的顶点就是一个平面图. 为了将每个国家或地区(面)各涂上一种颜色，使相邻的两个国家或地区(面)的颜色不同，至少需要几种颜色？在实践中发现四种颜色就足够了. 例如图5.10(欧洲地图的一部分)就可以用四种颜色来区分(四种颜色分别用数字1、2、3、4来表示，其中大西洋用颜色1表示).

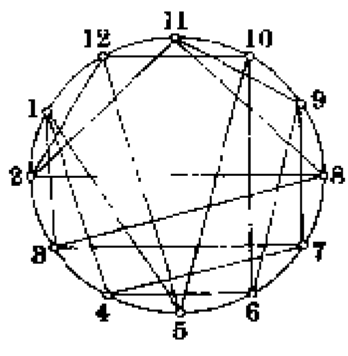


图 5.9 G_2

图 5.10

1840年茂比乌斯首先提出对任意的地图(平面图)，四种颜色是足够的，但未能加以证明. 这就是著名的四色定理.

这个问题有各种各样的表现形式，比如说作平面图 G 的对偶图 G'，可以证明 G' 也是平面图，G 的面的涂色问题就变成 G' 的顶点的涂色问题，四色定理就等价于证明平面图 G' 的色数 $\leqslant 4$.

一百多年来，很多数学家为了解决这个问题，花费了不少的心血，他们的研究大大地促进了图论的发展．直到最近(1976 年)，美国数学家借助于高速电子计算机用了一千二百个小时才证明了四色定理.

虽然四色定理是很难证的，五色定理的证明却很容易，我们现在就可以证明它.

定理三 平面图的色数 $\leqslant 5$.

证明 对平面图 G 的顶点个数 n 进行归纳．$n=5$ 时命题显然成立．假设对顶点个数为 $n-1$ 的平面图命题成立.

由例三，平面图 G 有一个顶点 v，满足 $\deg v \leqslant 5$．将 v 及与 v 相邻的边去掉后得图 G'，由归纳假设，G' 的色数 $\leqslant 5$，设 G' 的顶点已经涂上了五种颜色 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5，每两个相邻的顶点颜色不同.

如果 $\deg_G v < 5$，将 v 涂上与相邻顶点(至多四个)均不相同的那一种颜色，这就完成了图 G 的涂色.

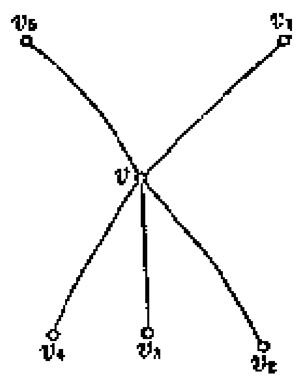


图 5.11

如果 $\deg v=5$(图 5.11)，即 v 有五个相邻的顶点 v_1、v_2、v_3、v_4、v_5，这时又有两种情况:

(1) v_1、v_2、v_3、v_4、v_5 这五个顶点的颜色不全不同．这可以和上面一样地解决.

(2) v_1、v_2、v_3、v_4、v_5 这五个顶点的颜色互不相同，不妨设它们分别为 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5.

考虑 G' 中由 α_1、α_2 这两种颜色的顶点及它们之间的边所组成的图 $G'_{\alpha_1\alpha_2}$. 如果 $G'_{\alpha_1\alpha_2}$ 中有一个连通分支只含 v_1 不含 v_2，我们将这个连通分支中 α_1、α_2 这两种颜色对调，于是 v_1 成为 α_2 色，从而 v 可以涂上颜色 α_1，命题成立. 因此如果定理三不成立，那么 v_1 与 v_2 一定在 $G'_{\alpha_1\alpha_2}$ 的同一个连通分支中，即 v_1 与 v_2 之间有一条链. 同样，任意两个 $v_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 之间有一条链. 把链上其它顶点忽略掉，得到一个以 v_1、v_2、v_3、v_4、v_5 为顶点的子图 K_5，但 K_5 不是平面图，矛盾. 所以定理三是成立的.

下面的例六是一个"两色定理".

[例六] 平面 M 上的 n 条直线将平面 M 分成若干个区域，证明为了使相邻的区域都涂上不同的颜色，用两种颜色就足够了.

解 用归纳法. $n=1$ 时显然. 假设对于 $n-1$ 条直线命题成立，我们用两种颜色将这 $n-1$ 条直线所成区域涂上颜色，使得相邻的区域颜色互不相同. 现在添上第 n 条直线，并将第 n 条直线一侧的所有区域的颜色改为与原来不同的那种颜色，而另一侧保持不变. 这样就用两种颜色将 n 条直线所分成的区域涂上了颜色，并且相邻的区域颜色互不相同.

如果一个地图(平面图)的各个区域可以涂上两种颜色之一，使得相邻的区域颜色不同，这样的图称为*两色图*.

例六中的图形可以看作一个平面图，它的顶点是各条直线的交点及一个广义的点 ∞，每条直线都通过这个广义的点，这个点就是北极 N 的球极投影(参见图 [illegible]). 这个图的边就是各条直线被这个顶点分成的线段. 根据上面所证，这个图是两色的.

[例七] 一个地图 G(没有悬挂点的平面图)是两色图的

充分必要条件是每个顶点都是偶顶点。

解 与例题六证法相似. 充分性可对图 G 的圈数 r 用归纳法. $r=0$ 或 1, 命题显然成立. 假设命题对圈数为 $r-1$ $(r\geqslant1)$ 时已经成立, 那么将去掉 G 的一个圈, 得图 G', G' 的每个顶点的次数与这点在 G 的次数相等 (如果这点不在所去的圈上) 或少 2(如果这点在所去的圈上), 根据归纳假设, 可以用两种颜色将 G' 涂好, 使得相邻的区域颜色互不相同, 再把去掉的圈加上去,并使这个圈外的区域颜色保持不变,而圈内的颜色均改为与原来不同的颜色, 这样就用两种颜色将 G 涂好了。

* * *

一个图的色数与它的顶点的次数当然是有联系的.

不难证明,如果图的最大次数为 q, 那么这个图的色数不大于 $q+1$(见习题), 更进一步, 1941 年 Brooks 证明了一个著名的定理:

定理四 如果图 G 的最大次数 $q\geqslant3$, 并且 G 不含有完全图 K_{q+1}, 那么 G 的色数不大于 q.

这个定理有好几种证明, 1974 年 Lovass 给出了一个简单的证法,要点见下面的例题八,其余细节我们就不介绍了.

[例八] 图 G 的最大次数为 q,并且图 G 中有两个点 a、b 具有以下性质:

(1) a、b 之间的距离为 2;

(2) 去掉 a、b 这两个点后所得的图 G' 是连通的.

证明图 G 的色数不大于 q.

解 因为 a、b 的距离为 2,所以 a、b 不相邻,并且存在一点 v_1 与 a、b 均相邻.

设 G 的点数为 n,因为 G' 连通,所以其余的 $n-3$ 个点中

一定有一个点与 v_1 相邻，记这点为 v_2. 如果已经有点 v_1、v_2、…、$v_i(1\leqslant i\leqslant n-3)$，其中每一个点都与排在它前面的某一个点相邻. 那么由于连通性，剩下的未标记的点中一定有一个点与 v_1、v_2、…、v_i 中某一个相邻，将这个点记为 v_{i+1}. 这样继续下去，最后得到点

$$v_1、v_2、\cdots、v_{n-2},$$

其中每一个点都与排在它前面的某一个点相邻.

现在我们将图 G 的顶点涂上 q 种颜色. 首先将 a、b 涂上颜色 1，然后依次将 v_{n-2}、v_{n-1}、…、v_2 涂上颜色. 在这一涂色过程中由于每个顶点的次数 $\leqslant q$，并且每一个点均与一个尚未涂色的点相邻，所以它至多与 $q-1$ 个涂过色的点相邻，因此可以将它涂上一种与(已涂过色的)相邻顶点均不相同的颜色. 最后 v_1 与 a、b 相邻，而 a、b 是同一种颜色，其余的与 v_1 相邻的顶点至多 $q-2$ 个，至多有 $q-2$ 种不同的颜色，因此 v_1 也可以涂上适当的颜色. 这样，我们就将图 G 的顶点涂上了 q 种颜色，使得每两个相邻的顶点颜色均不相同. 即图 G 的色数 $\leqslant q$.

有趣的是，最小的次数也和色数密切相关.

考虑 G 的每一个子图 H，H 的最小次数记为 $\delta(H)$，$\delta(H)$的最大值记为 s，即

$$s=\max_{H\subseteq G}\delta(H),$$

则有

定理五 色数 $\leqslant 1+s$.

证明 我们证明 G 的每一个子图 H 的色数均不大于 $s+1$.

对 H 的顶点个数 n' 用归纳法. $n'=1$ 时命题显然成立.

设对于 $n'<k$ 时，命题成立，当 $n'=k$ 时，由于 H 中有一个顶点 v 的次数 $\leqslant s$，并且去掉 v 后所得的图 H' 可以涂上 $s+1$ 种颜色，使相邻顶点颜色互不相同，所以添上 v 后，只要将 v 涂上与它相邻的（至多 s 个）顶点均不相同的颜色，那么 H 的相邻的顶点颜色各不相同，所以命题对 $n'=k$ 仍然成立.

利用定理五可以解决许多有趣的涂色问题.

[例九] 假定我们已经知道环面上的欧拉公式（并不难证明．可参看江泽涵著《多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类》，人民教育出版社出版）为

$$n-m+f=0,$$

G 为一个简单的环面图（即可以在环面上实现的图），证明 G 的色数 $\leqslant 7$.

解 不难证明 $m\leqslant 3n$（参见本节习题1），因此顶点的平均次数 $\frac{2m}{n}\leqslant 6$，从而 $s\leqslant 6$，色数 $\leqslant s+1\leqslant 7$．这就是环面上的"七色定理".

可以象图 5.5 那样在环面上把完全图 K_7 画出来，因此一般说来，7 不能改为更小的数了.

[例十] r 为正整数，如果每个国家除本土外还有 r 块"飞地"，要求使每个国家的本土与它的飞地涂上同一种颜色，并且每两个相邻的国家颜色互不相同，问至少要用多少种颜色？

解 当 $r=0$ 时，就是四色定理．$r>0$ 时，一般说来四种颜色是不够的（读者可自己举例说明），下面我们证明 $6(r+1)$ 种颜色就足够了.

首先将地图用它的对偶图 G 来代替，如果国家个数为 n，那么 G 的顶点数为 $n(r+1)$．设 G 的边数为 m，则（参见本

节习题1)

$$m \leqslant 3n(r+1)-6.$$

将 G 的代表同一个国家(本土或飞地)的 $r+1$ 个顶点

$$v_{i1},\ v_{i2},\ \cdots,\ v_{i,r+1}(1 \leqslant i \leqslant n)$$

合并为一个顶点 v_i. 这样得到 n 个顶点 v_1、v_2、$\cdots$、v_n.

规定在某个 v_{ik} 与 v_{jh} $(1 \leqslant k,\ h \leqslant r+1,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$ 相邻时, v_i 与 v_j 之间用一条边相连, 如果 v_{ik} 与 v_{jh} 均不相邻, 则 v_i 与 v_j 之间不用边相连. 这样得到一个图 G'.

显然 G' 的边数 $m' \leqslant m \leqslant 3n(r+1)-6$. 因此 G' 的顶点的平均次数

$$\frac{2m'}{n} \leqslant 6(r+1)-\frac{12}{n} < 6(r+1),$$

所以对于 G', $s \leqslant 6(r+1)-1$.

从而 $\qquad G'$ 的色数 $\leqslant s-1 \leqslant 6(r+1)$,

这也就是所要证的结论。

当 $r=1$ 时, $6(r+1)=12$, 这个结果已经不能再改善了, 因为可以举出一个图, 由 12 个国家 (每个国家一块飞地) 组成, 至少要用 12 种颜色才能实现前面所说的要求.

我们还可以考虑每个国家在月球上有一块研究基地, 或更一般地每个国家在 N 个星球上各有一块研究基地, 涂上颜色使每个国家与它的研究基地颜色相同, 而相邻的国家颜色互不相同, 至少要多少种颜色?

运用上面的方法同样可得色数 $\leqslant 6(N+1)$. 特别地, $N=1$ 时, 色数 $\leqslant 12$, 但 12 是否可以改善还是一个未解决的问题.

习　题　五

1　如果简单图 G 是平面连通图, 证明 $m \leqslant 3n-6$.

2 如果 G 是平面图，有 k 个连通分支，证明

$$n-m+f=k+1.$$

3 如果一个凸多面体 $n=6$, $m=12$, 证明这个凸多面体的每个面都是三角形.

4 如果一个多面体的每两个面至多有一条公共边，那么它至少有两个面有同样数目的边.

5 图 G 由 $K_{3,3}$ 与两个孤立点组成，证明它的补图 $\bar{G}$ 不是平面图.

6 考虑 G 与它的补图 $\bar{G}$:

(1) 如果 $n<8$, G 与 $\bar{G}$ 中至少有一个为平面图;

(2) 如果 $n\geqslant 11$, G 与 $\bar{G}$ 中至少有一个不是平面图;

(3) $n=8$ 时，各举一例说明下列三种情况都可以发生: (a) G 与 $\bar{G}$ 中一个是平面图，另一个不是平面图. (b) G 与 $\bar{G}$ 都不是平面图. (c) G 与 $\bar{G}$ 都是平面图.

7 K_5 或 $K_{3,3}$ 去掉任一条边，就变为平面图，试将它们象例五那样"直线化".

8 将例五中的图 G_2 直线化.

9 如果 G 是平面连通图，腰围 $g\geqslant 3$, 证明

$$m\leqslant g(n-2)/(g-2).$$

在腰围为 ∞ 时情况如何?

10 证明彼得森图(习题四第 12 题)不是平面图.

11 将平面分成 f 个区域，每两个区域都相邻，问 f 最大为多少?

12 作一个地图，只有四个区域，但却要用四种颜色才能使相邻的区域颜色不同.

13 证明在平面上画有限个圆所得的地图是两色的.

14 如果一个地图的顶点的次数至少为 3, 并且 $f<12$, 证明:

(1) 这个地图有一个区域的边数少于 5;

(2) 这个地图是四色的(不用四色定理).

15 如果一个图的最大次数为 q, 那么它的色数 $\leqslant q+1$.

16 如果简单图 G 是四色的，那么可以将它的边涂上红、蓝两种颜色，使得 G 中每个三角形都有两条红的边一条蓝的边.

17 完全图 K_{q+1} 的色数是多少?

18 图 G 的最大次数为 2，它的色数是不是一定为 2?

19 简单图 G 为平面图，证明 $s\leqslant 5$.

20 如果 G 是树，$s=$?

21 如果 G 不是树，证明 $s\geqslant 2$.

22 证明对本节最后所提的问题，有色数 $\leqslant 6(N+1)$。

§6 哈密尔顿链

哈密尔顿链是图论中一个非常有趣的问题.

[例一] 周游世界的游戏.

1859 年英国数学家哈密尔顿(Hamilton)提出了一种名为周游世界的游戏. 他用一个正十二面体(图 6.1)的二十个顶点代表二十个大城市，要求沿着棱，从一个城市出发，经过每个城市恰好一次，然后回到出发点.

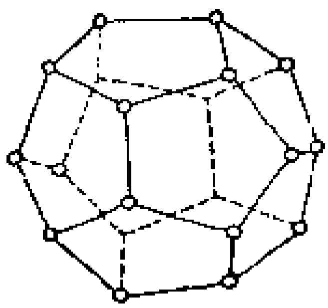


图 6.1

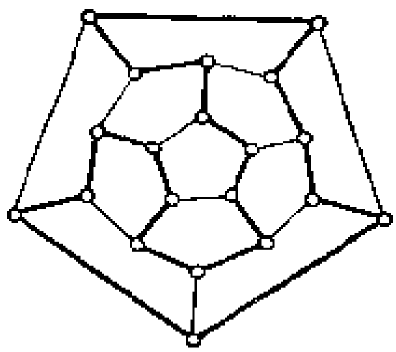


图 6.2

这个游戏曾经风靡一时. 它的解，称为哈密尔顿圈，并不难求. 为了清楚起见，我们作一个平面图(图 6.2)，与这个十二面体的顶点和棱所组成的图同构. 显然图 6.2 中粗的边组成的圈就是一个解. 符合要求的解当然不止一种，即使固定前五个城市(顶点)，还有四种不同的解. 如果不要求最后回到原来的出发点，解(称为哈密尔顿链)就更多了. 读者可以自己试着再找出几种不同的解.

现在我们给出一般的哈密尔顿链及哈密尔顿圈的定义.

在图 G 中，如果有一个链(圈)经过每个顶点恰好一次，那么这个链(圈)称为哈密尔顿链(圈)。

表面上，哈密尔顿链(圈)与一笔画(§2)非常相似，但实质上，两者的理论迥然不同，在§2中给出了一个很简单的方法来判别一个图是否可以一笔画成(§2定理二)，可是对于哈密尔顿链(圈)，迄今还没有那样简单而一般的判别法。

[例二] 图6.3有无哈密尔顿链或哈密尔顿圈?

解 图6.3无哈密尔顿链(当然更没有哈密尔顿圈)。要证明这点，只要将顶点涂上红、蓝两种不同的颜色(图中空心点表示红色，实心点表示蓝色)，使相邻的两个顶点不同。如果这个图有一条哈密尔顿链，那么在这条链上的顶点一定是红蓝相间的，即红蓝红蓝红……，或蓝红蓝红蓝……，因而红点的数目与蓝点的数目相等或相差1。但图6.3中红点有6个，蓝点有8个，两者之差为2，因此不可能有一条哈密尔顿链。

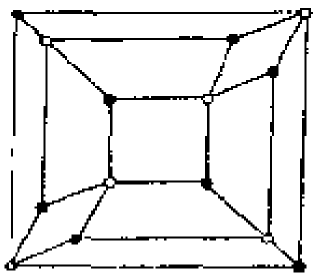


图 6.3

例二的解法已经在习题二及§4中用过。图6.3实际上是一个偶图，其中红点属于集 X，蓝点属于集 Y。一般地，可以证明下面的两个定理。

定理一 如果在一个偶图 $G=(X,Y,E)$ 中，$|X|$ 与 $|Y|$ 的差大于1，那么这个偶图没有哈密尔顿链。

证明 采用与例二完全相同的方法。

定理二 完全偶图 $K_{m,n}$ 在 $m\neq n$ 时无哈密尔顿圈，而完全偶图 $K_{n,n}$ 有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个无公共边的哈密尔顿圈。

证明 如果 $K_{m,n}$ 有哈密尔顿圈，那么在圈上 X 与 Y 的

点相间，因而 $m=n$.

对于 $K_{n,n}$，将顶点 x_i 与 y_{i+2j}，及 y_{i+1+2j} 相连（$i=1、2、\cdots、n$，$j=1、2、\cdots、\left[\frac{n}{2}\right]$，并且认为 $y_{i+n}=y_i$），就得到了 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个无公共边的哈密尔顿圈.

在一些限制条件下判别哈密尔顿链（圈）是否存在，还有许多方法.

定理三 如果图 G 有哈密尔顿圈，从 G 中去掉若干个点 $v_1、v_2、\cdots、v_k$ 及与它们相邻的边得到图 G'，那么 G' 的连通分支不超过 k 个.

证明 这个定理也是很显然的. 令 C 为 G 的哈密尔顿圈，那么将 k 个点 $v_1、v_2、\cdots、v_k$ 去掉后，C 至多分为 k 段，因而 G 的连通分支至多为 k 个.

［例三］ 图 6.4 虽然有很多条边，却没有哈密尔顿圈，因为将三个空心点及与它们相邻的边去掉后，所得的图有四个连通分支.

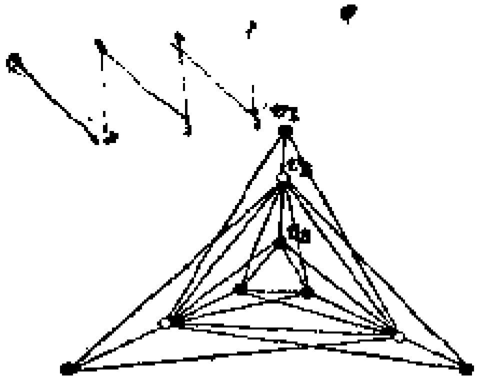


图 6.4

对于平面图，1968 年 Kozyrev 与 Griberg 提出了一个简单而有趣的定理.

定理四 如果一个平面图有哈密尔顿圈 C，用 f'_i 表示在 C 的内部的 i 边形的个数，又用 f''_i 表示在 C 的外部的 i 边形的个数，则

(1) $1\cdot f'_3+2\cdot f'_4+3\cdot f'_5+\cdots=n-2$,

(2) $1\cdot f''_3+2\cdot f''_4+3\cdot f''_5+\cdots=n-2$,

(3) $1\cdot(f'_3-f''_3)+2\cdot(f'_4-f''_4)+3\cdot(f'_5-f''_5)+\cdots=0$.

其中 n 为 G 的顶点数，显然也就是 C 的长.

证明 设 ε' 为 C 的内部的边的条数，则 C 的内部的面的总数为

$$f'_2+f'_3+f'_4+f'_5+\cdots=\varepsilon'+1.$$

这些面的边数的和为

$$2f'_2+3f'_3+4f'_4+5f'_5+\cdots=2\varepsilon'+n.$$

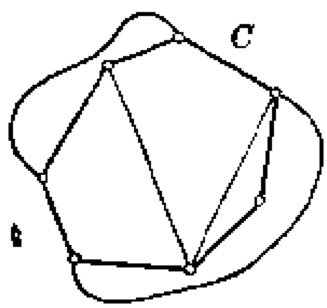


图 6.5

这是因为每一条内部的边被数了两次，而 C 上有 n 条边，每条边被数了一次．（参看图 6.5）

将第二个式子减去第一式的 2 倍便得(1)．

同理可得(2)．

(1)、(2)两式相减即得(3)．

［例四］ 证明下图无哈密尔顿圈．

解 图 6.6 中的面只有两种．一种是两边形，有三个．另一种是六边形，也有三个． 如果该图有哈密尔顿圈，那么根据定理四(3)，应当有

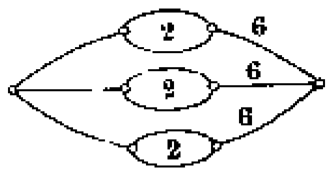


图 6.6

$$4(f'_6-f''_6)=0,$$

即 $$f'_6=f''_6.$$

但 $$f'_6+f''_6=3,$$

于是 $$f'_6=f''_6=3/2.$$

但这是不可能的，因为面数 f'_6、f''_6 都应当是整数．

定理三与定理四都是图有哈密尔顿圈的必要条件，下面的 Ore 定理是图有哈密尔顿圈的充分条件．

定理五 G 为简单图，顶点数 $n\geqslant3$，且对每一对不相邻的顶点 v、v' 有

$$\deg v+\deg v'\geqslant n,$$

那么图 G 有哈密尔顿圈.

证明 $n=3$ 时，由所给条件不可能有不相邻的顶点，故 G 为完全图 K_3，命题显然成立.

设 $n\geqslant 4$. 用反证法，设定理不成立，即图 G 满足定理的条件却没有哈密尔顿圈.

不妨假设 G 是具有这种性质的边数最大的图，也就是 G 添上一条边就具有哈密尔顿圈（否则 G 可以添加一些边，直到不能再添为止）.

(1) 如果 G 中有两个不相邻的顶点 v 与 v'，那么添上边 (v, v') 后就有哈密尔顿圈，所以在原图 G 中有一条从 v 到 v' 的哈密尔顿链. 设此链上的顶点顺次为

$$v_1=v,\ v_2,\ \cdots,\ v_n=v'.$$

因为
$$\deg v+\deg v'\geqslant n,$$
在 v_2、v_3、…、v_{n-1} 中必有一个点 $v_k(2\leqslant k\leqslant n-1)$，使得 v_k 与 v_1 相邻，并且 v_{k-1} 与 v_n 也相邻，否则的话，有 $\delta=\deg v$ 个点 v_{i_1}、v_{i_2}、…、$v_{i_\delta}(2\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\delta\leqslant n-1)$ 与 v 相邻，而 v_{i_1-1}、v_{i_2-1}、…、$v_{i_\delta-1}$ 与 v' 不相邻，从而
$$\deg v'\leqslant n-1-\delta<n-\delta,$$
即
$$\deg v+\deg v'<n.$$
这与条件矛盾. 于是图 G 存在一条哈密尔顿圈（图 6.7）：
$$(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{k-1},\ v_n,\ v_{n-1},\ \cdots,\ v_k,\ v_1).$$
这又与反证假设矛盾.

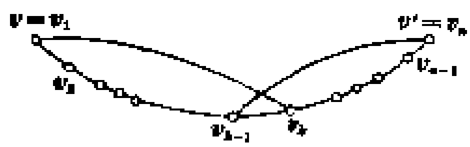


图 6.7

(2) 如果 G 中没有不相邻的顶点，则 G 为完全图，显然

有哈密尔顿圈，同样与反证假设矛盾.

由 Ore 定理立即得出：

推论一（Dirac）　设 G 为简单图，顶点数 $n\geqslant 3$，且每一点的次数 $\geqslant\frac{n}{2}$，那么 G 有哈密尔顿圈.

推论二　如果 G 是简单图，v 与 v' 为某一对不相邻的顶点，$\deg v+\deg v'\geqslant n$，添一条边 (v, v') 到 G 上得到图 G'，那么当且仅当 G 有哈密尔顿圈时，G' 有哈密尔顿圈.

证明　G 有哈密尔顿圈时，G' 显然也有哈密尔顿圈. 反过来，如果 G' 有哈密尔顿圈，那么 G 有一个哈密尔顿链，然后完全按照定理五的证明可以推出 G 也有一个哈密尔顿圈. 证毕.

设 G 为一个简单图，如果 G 有一对不相邻的顶点 v 与 v'，满足 $\deg v+\deg v'\geqslant n$，就添加一条边 (v, v')，依此下去直到没有可能再添加边为止，最后所得的图 G' 称为 G 的闭包. 例如图 6.8 中实线所表示的图 G 可逐步添加 (v_1, v_4)，(v_1, v_3)，(v_3, v_5) 或逐步添加 (v_3, v_5)，(v_1, v_4)，(v_1, v_3)，所得的图（闭包）都是完全图 K_5.

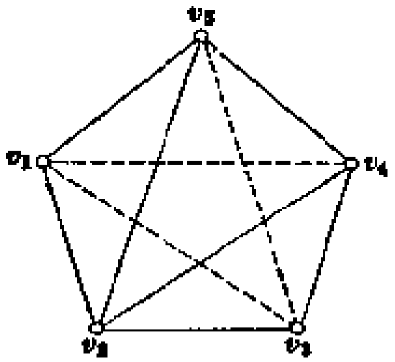


图 6.8

注意不论添加的次序如何，由简单图 G 所得的闭包 G' 总是相同的. 证明如下：

设 G'、G'' 均为 G 的闭包，由 G 得到 G' 时所添的边依次为 e'_1、e'_2、…、e'_k，由 G 得到 G'' 时所添的边依次为 e''_1、e''_2、…、e''_k. 我们证明 e'_1、e'_2、…、e'_k 均为 G'' 的边. 如果不是这样，设 $e'_{p+1}=(v, v')$ 为其中第一个不属于 G'' 的边，令 H 为由 G 添加边 e'_1、e'_2、…、e'_p 所得的图，

则由 G' 的定义

$$\deg_H v+\deg_H v'\geqslant n,$$

但 $H\subset G''$，所以

$$\deg_{G''} v+\deg_{G''} v'\geqslant n,$$

但 v 与 v' 在 G'' 中不相邻，这与 G'' 的定义相矛盾．所以 e'_1、e'_2、…、e'_k 均为 G'' 的边，即 G' 是 G'' 的子图．同理 G'' 也是 G' 的子图．因此 $G'=G''$．

现在设 G 为一个简单图($n\geqslant 3$)，G' 为它的闭包，则有下面的定理：

定理六 G 有哈密尔顿圈的充分必要条件是 G' 有哈密尔顿圈．

证明 对每次添加应用定理五的推论二．

[例五] 将图 6.4 的边 (v_1, v_2) 换为 (v_1, v_3) 得图 6.9．

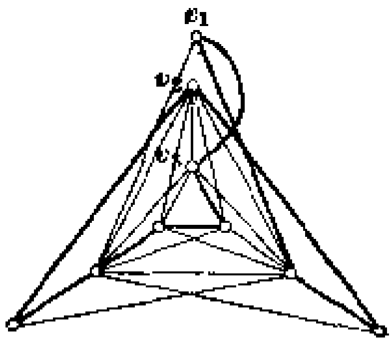


图 6.9

这个图的闭包是完全图，显然有哈密尔顿圈，因而原图有一个哈密尔顿圈，这一点也不难直接验证(图中粗线的边组成一个哈密尔顿圈)．

习 题 六

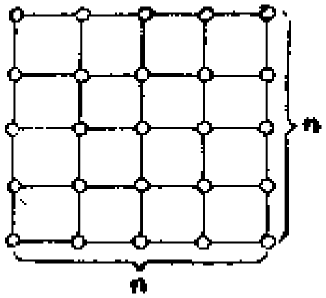
1 在例一中再找一个哈密尔顿圈．

2 证明顶点个数为奇数的偶图无哈密尔顿圈．

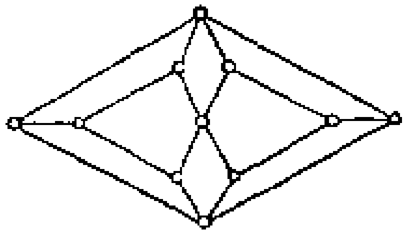
3 对于正四面体、正六面体、正八面体及正二十面体解与例一相应的问题．

4 用 $n(>1)$ 条水平线与 n 条铅直线相截得一图，以 n^2 个交点为顶点，以截得的线段为边(见图)．

这个图是否有哈密尔顿链或哈密尔顿圈？



（第 4 题图）

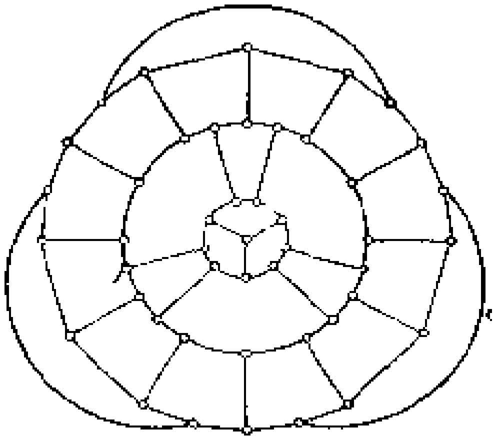


（第 5 题图）

5 证明上图没有哈密尔顿圈.

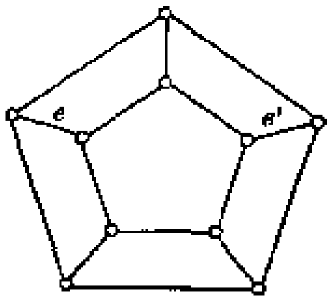
6 证明彼得森图（习题四第 12 题）无哈密尔顿圈，但移去任一个顶点（及与它相邻的边）就有哈密尔顿圈.

7 证明下图无哈密尔顿圈.

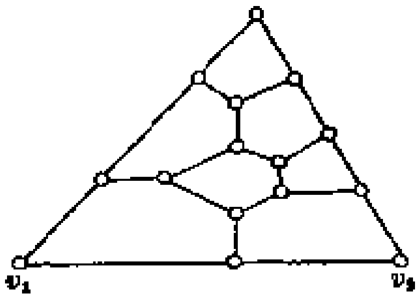


（第 7 题图）

8 下图有哈密尔顿圈，证明任一个哈密尔顿圈如果含有边 e，那么这个圈一定不含边 e'.



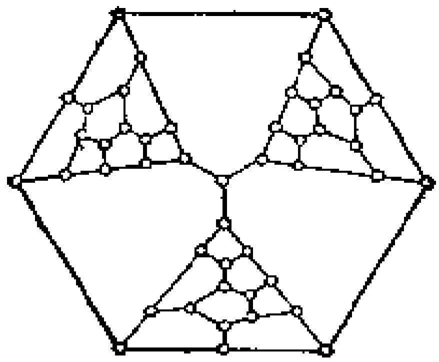
（第 8 题图）



（第 9 题图）

9 证明上图不存在一个以 v_1、v_2 为端点的哈密尔顿链.

10 在 1946 年，Tutte 举出了一个平面图，它是 3 连通的并且也是 3 正则的(见图)，但它却没有哈密尔顿圈，试证明之．它有哈密尔顿链吗？



(第 10 题图)

11 作一个图，它的闭包不是完全图．

12 亚瑟王有 n 名骑士，每次聚会时围着一张圆桌坐下，如果每两名骑士只能相邻一次，这样的聚会能进行多少次？

13 由一个图 G 可以作出一个新图 G'：对于 G 的每一条边，G' 有一个顶点与它对应，如果在 G 中两条边是相邻的，那么就在 G' 的相应的顶点之间连一条边．G' 称为 G 的导出图．显然 G' 的色数就是 G 的色指数．证明：如果 G 有哈密尔顿圈，那么 G' 必有哈密尔顿圈．反过来对不对？

14 亚瑟王(传说中的英国国王)在王宫中召见他的 $2n$ 名骑士，其中某些骑士之间互相有怨仇，已知每一个骑士的仇人不超过 $n-1$ 个．证明摩尔林(亚瑟王的谋士)能够让这些骑士围着那张著名的圆桌坐下，使得每一个骑士不与他的仇人相邻．

§7 拉姆赛定理

现在我们将§1的例三加以推广.

[例一] 九个人中一定有三个人互相认识或者有四个人互不相识.

解 用图的语言来说，这个命题相当于：如果 G 是具有 9 个顶点的简单图，那么 G 中有一个子图 K_3，或者它的补图 $\overline{G}$ 中有一个子图 K_4.

我们分两种情况来证.

(1) G 中有一个顶点 v_1 的次数 $\geqslant 4$. 这时，设在 G 中，v_2、v_3、v_4、v_5 与 v_1 相邻. 如果 v_2、v_3、v_4、v_5 中有两个，比如说 v_2 与 v_3，相邻，那么 G 中含有 $\Delta v_1v_2v_3$. 如果 v_2、v_3、v_4、v_5 在 G 中互不相邻，那么 $\overline{G}$ 中含有以 v_2、v_3、v_4、v_5 为顶点的子图 K_4.

(2) G 中每个顶点的次数 <4. 这时，$\overline{G}$ 中每个顶点的次数 >4，即对所有的顶点 v，$\deg_{\overline{G}} v \geqslant 5$，由于奇顶点的总数是偶数，所以 $\overline{G}$ 的九个顶点中一定有一个顶点 v_1 是偶顶点，$\deg_{\overline{G}} v_1 \geqslant 6$，因而由§1例三，$\overline{G}$ 中与 v_1 相邻的六个顶点中有三个顶点在 $\overline{G}$ 中构成一个三角形(从而 v_1 与这三个顶点在 $\overline{G}$ 中构成完全图 K_4)，或者有三个顶点在 G 中构成 K_3.

例一中的九不能改成较小的数. 下面的图7.1就是一个有八个顶点的图 G，在这个图中没有三角形，它的补图 $\overline{G}$ 中也没有完全图 K_4.

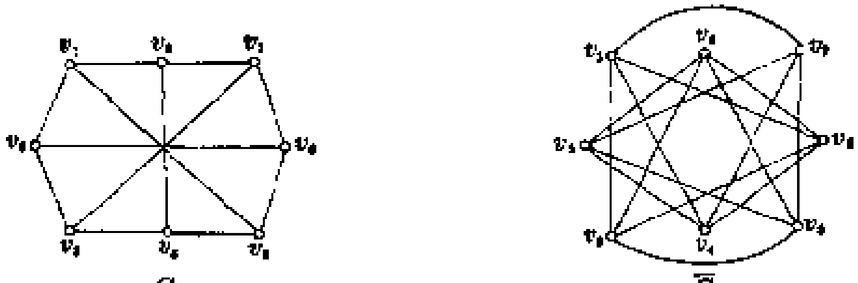


图 7.1

[例二] 14 个人中一定有三个人互相认识或者有五个人互不相识.

解 仿照例一可以推出.

现在我们设 $r_{(m,n)}$为满足下述条件的自然数 t 中的最小值:

每个具有 t 个顶点的简单图 G 含有完全图 K_m 或者它的补图 $\overline{G}$ 含有完全图 K_n.

不难看出
$$r_{(m,n)}=r_{(n,m)},$$
$$r_{(1,n)}=r_{(m,1)}=1,\quad r_{(2,n)}=n,$$
$$r_{(m,2)}=m(\text{见习题}),$$
并且根据上面的结果
$$r_{(3,3)}=6,\ r_{(3,4)}=9,\ r_{(3,5)}=14.$$

定理一 在 $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$ 时,
$$r_{(m,n)}\leqslant r_{(m,n-1)}+r_{(m-1,n)},$$
并且在$r_{(m,n-1)}$ 与 $r_{(m-1,n)}$都是偶数时,成立严格的不等式.

证明 设图 $G=(V,E)$ 有顶点 $r_{(m,n-1)}+r_{(m-1,n)}$ 个. 取顶点 $v_1\in V$,这时有下面两种情况:

(1) $\deg_G v_1\geqslant r_{(m-1,n)}$.

设与 v_1 相邻的顶点为 v_2、v_3、…、v_δ、$v_{\delta+1}(\delta=r_{(m-1,n)})$,将 G 中其余顶点去掉得图 G_1,根据 $\delta=r_{(m-1,n)}$ 的定义,G_1 中含

有 K_{m-1} 或 $\overline{G}_1$ 中含有 K_n. 如果 G_1 含有 K_{m-1}, 那么在 G 中, v_1 与这个 K_{m-1} 组成完全图 K_m. 如果 $\overline{G}_1$ 含有 K_n, 那么 $\overline{G}$ 也含有这个 K_n.

(2) v_1 至少与 $r_{(m,n-1)}$ 个顶点不相邻.

设与 v_1 不相邻的顶点为 v_2、v_3、$\cdots$、v_s、v_{s+1} $(s=r_{(m,n-1)})$. 将 G 中除 v_2, v_3, $\cdots$, v_{s+1} 外的顶点去掉得图 G_2. 根据 $s=r_{(m,n-1)}$的定义, G_2 中含有 K_m 或 $\overline{G}_2$ 中含有 K_{n-1}. 如果 G_2 中含有 K_m, 那么 G 也含有这个 K_m. 如果 $\overline{G}_2$ 中含有 K_{n-1}, 那么在 $\overline{G}$ 中, v_1 与这个 K_{n-1} 组成 K_n.

综合起来得

$$r_{(m,n)} \leqslant r_{(m,n-1)} + r_{(m-1,n)}.$$

现在证明定理的后一部分. 设 $r_{(m,n-1)}$ 与 $r_{(m-1,n)}$ 都是偶数, 而图 $G=(V, E)$ 有 $r_{(m,n-1)}+r_{(m-1,n)}-1$ 个顶点. 因为奇顶点的总数是偶数, 而 $r_{(m,n-1)}+r_{(m-1,n)}-1$ 是一个奇数, 因而 G 必有一个偶顶点 v_1. 对于 v_1, 或者 $\deg v_1 \geqslant r_{(m-1,n)}-1$ 或者 v_1 至少与 $r_{(m,n-1)}$ 个顶点不相邻. 由于 v_1 是偶顶点, 所以前一种情况就是 $\deg v_1 \geqslant r_{(m-1,n)}$. 然后按照和上面完全同样的论证得出

$$r_{(m,n)} \leqslant r_{(m,n-1)} + r_{(m-1,n)} - 1 < r_{(m,n-1)} + r_{(m-1,n)}.$$

[例三] 由定理一及 $r_{(m,2)}=m$, $r_{(2,n)}=n$ 很容易得出

$$r_{(3,3)} \leqslant r_{(3,2)} + r_{(2,3)} = 3+3 = 6,$$

$$r_{(3,4)} \leqslant r_{(3,3)} + r_{(2,4)} - 1 \leqslant 6+4-1 = 9,$$

$$r_{(3,5)} \leqslant r_{(3,4)} + r_{(2,5)} \leqslant 9+5 = 14,$$

$$r_{(4,4)} \leqslant r_{(4,3)} + r_{(3,4)} \leqslant 9+9 = 18.$$

这些就是 §1 的例三、本节的例一、例二及习题一的 16.

上面的四个不等式实际上都是等式, 前两个已经在习题一第 13 题及本节例一中说过了, 图 7.2 指出 $r_{(4,4)} \geqslant 18$,

请读者自己构造一个图说明 $r_{(3,5)}\geqslant 14$.

虽然我们不难得出 $r_{(m,n)}$ 的一个上界（本节习题第 2 题），但是 $r_{(m,n)}$ 的准确的值却不容易求出. 在 m、$n>2$ 时，目前已经知道的 $r_{(m,n)}$ 的值只有为数不多的几个，全部被列在下面的表中

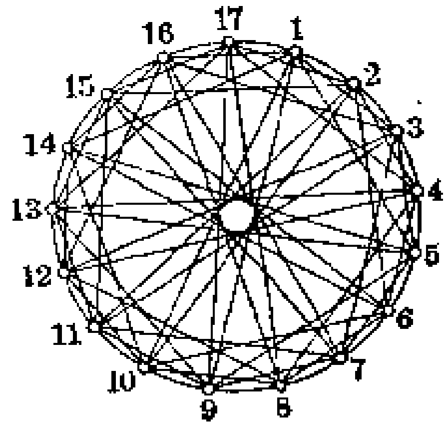


图 7.2

n \ m	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18			
5	14				
6	18				
7	23				

下面的例四也是 §1 例三的推广.

[例四] 十七位学者，每一位都给其余的人写一封信，信的内容是讨论三个论文题目中的任一个，而且两个人互相通信所讨论的是同一个题目. 证明至少有三位学者，他们之间通信所讨论的是同一个论文题目.

如果将十七改为十六，结论是否成立?

解 作一个完全图 K_{17}，它的十七个顶点表示十七位学者，它的边涂上三种颜色：如果两位学者讨论的是第 i 个题目，那么就将连结相应的两个顶点的边涂上第 i 种颜色（$i=1, 2, 3$）. 要证明的结论是这个 K_{17} 中有一个同色三角形.

任取一点 v_1，自 v_1 引出的边有 16 条，平均每种颜色有

16/3 条，因而一定有六条边具有同样的颜色(平均数原则)．不妨设 (v_1, v_2)，(v_1, v_3)，(v_1, v_4)，(v_1, v_5)，(v_1, v_6)，(v_1, v_7)这六条边是第一种颜色．v_2、v_3、v_4、v_5、v_6、v_7 这六个顶点形成一个完全图 K_6．如果这个完全图有一条边，比如说(v_2, v_3)也是第一种颜色，那么 $\Delta v_1v_2v_3$ 就是一个同色三角形．如果这个完全图的边都是第二种或第三种颜色，那么由 §1 例三(或本节例三)，也有一个同色的三角形．

如果将十七改为十六，结论不成立，也就是完全图 K_{16} 的边可以涂上三种颜色，使得图中没有一个同色三角形．

*　　　*　　　*

读者可以看出本节的例一与例二实际上还是用两种颜色来涂边，例四却改成用三种颜色来涂边，但要证明的结论与 §1 例三相同，即证明有同色的三角形存在．沿着这一方向可得下面的例五．

[例五]　完全图 K_{66} 的边各涂上四种颜色之一，证明其中一定有一个同色的三角形．

这个例题我们不证明了，因为有下面的更一般的结论．

定理二　设完全图 K_N 的边涂上 n 种颜色，则在 N 充分大时，K_N 中必有一个同色三角形．并且设 r_n 为使 K_N 中有同色三角形存在的 N 的最小值，则

(1) $r_1=3,\ r_2=6,\ r_3=17$,

(2) $r_n\leqslant n(r_{n-1}-1)+2$,

(3) $r_n\leqslant 1+1+n+n(n-1)+\cdots+\dfrac{n!}{2!}+\dfrac{n!}{1!}+n!$,

这也可以写成

$$r_n\leqslant [n!e]+1,$$

其中
$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

是一个著名的无理数.

证明 (1) $r_1=3$ 显然. $r_2=6$ 即 § 1 例三. $r_3=17$ 即本节例四.

(2) 如果 $N=n(r_{n-1}-1)+2$, 那么自完全图 K_N 的任一个顶点 v_1 引出 $n(r_{n-1}-1)+1$ 条边, 平均每种颜色有 $r_{n-1}-1+\frac{1}{n}$ 条, 因而根据平均数原则, 有 r_{n-1} 条边同为某一种颜色, 不失一般性, 设边(v_1, v_2), (v_1, v_3), $\cdots$, $(v_1, v_{r_{n-1}}+1)$均为红色. v_2、v_3、$\cdots$、$v_{r_{n-1}}+1$ 构成一个完全图 $K_{r_{n-1}}$, 如果这个 $K_{r_{n-1}}$ 中还有一条边, 比如说(v_2, v_3)是红的, 那么 $\Delta v_1v_2v_3$ 就是一个同色三角形. 如果这个 $K_{r_{n-1}}$ 中没有红色的边, 那么它的边只有 $n-1$ 种不同的颜色, 根据 r_{n-1} 的定义, 这个 K_{n-1} 中有一个同色三角形.

因此, $$r_n\leqslant n(r_{n-1}-1)+2.$$

(3) 用归纳法. $n=1$ 时, $r_1=3\leqslant 1+1+1$. 假设命题对于 $n-1$ 成立. 由于(2),

$$\begin{aligned}
r_n&\leqslant n(r_{n-1}-1)+2\\
&\leqslant n\Big[1+(n-1)+(n-1)(n-2)+\cdots+\frac{(n-1)!}{2!}\\
&\qquad+(n-1)!+(n-1)!\Big]+2\\
&\leqslant 1+1+n+n(n-1)+\cdots+\frac{n!}{2!}+n!+n!\\
&=1+n!\left(1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)\\
&=1+[n!e].
\end{aligned}$$

最后一步是因为

$$n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots$$

$$=\frac{2}{n+1}<1.$$

定理二给出了 r_n 的一个上界，但是 r_n 的准确的值，到目前为止，只知道三个，也就是(1)中列出的那三个值。对 $n=4$，由(2)得 $r_4\leqslant 66$，这就是例五。但是目前只知道可以将 K_{64} 的边涂上四种颜色而不产生同色三角形，也就是 $r_4>64$，是否可将 K_{65} 的边涂上四种颜色而不产生同色三角形，即 $r_4>65$（从而 $r_4=66$），还是一个悬而未决的问题。

上面的定理一与定理二都是拉姆赛（Ramsey）定理的特殊情况。下面我们就来叙述并证明这个定理。为此先将图的概念作一点推广。

设有 n 个点 v_1、v_2、…、v_n，由 v_1、v_2、…、v_n 中取 b($b\leqslant n$) 个不同的点作成组合 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_b})$。我们称 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_b})$ 为与点 v_{i_1}、v_{i_2}、…、v_{i_b} 相邻的 b 级边。并且说这 n 个点与所有的 b 级边组成一个 b 级完全图，记为 K_n^b。显然 $b=2$ 时，b 级边就是通常的边，b 级完全图也就是通常的完全图。$b>2$ 时，b 级完全图是所谓的"超图"。

我们将 b 级边"涂上 t 种颜色"，也就是将它们分为 t 类。

定理三　（拉姆赛定理）将 b 级完全图 K_n^b 的边以任意方式涂上 t 种颜色，t 及 n_1、n_2、…n_t 都是正整数，则在 n 充分大时，b 级完全图 K_n^b 中一定含有一个 b 级完全子图 $K_{n_i}^b$，它的 b 级边都是第 i 种颜色，这里 i 为满足 $1\leqslant i\leqslant t$ 的某个整数。

使同色的 $K_{n_i}^b$ 存在的 n 的最小值称为拉姆赛数，记为 $r_{(n_1,\cdots,n_t;b)}$。

证明 在证明这个定理之前，我们先看一看这个定理的一些特殊情况及与前面已有知识的关系，以便更好地理解它.

当 $b=1$ 时，b 级边 v_i 就是点 v_i，b 级完全图 K_n^b 就是 n 个顶点．这时拉姆赛定理退化为抽屉原则：将点 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 涂上 t 种颜色，则当 n 充分大时，必有某个满足 $1\leqslant i\leqslant t$ 的整数 i 存在，使得第 i 种颜色的点的个数不小于 n_i，并且拉姆赛数 $r_{(n_1,\cdots,n_t;1)}=n_1+n_2+\cdots+n_t-t+1$（习题一第 7 题）.

当 $b=2$ 时，b 级边就是通常的边，b 级完全图也就是通常的完全图．如果 $t=2$，拉姆赛定理就是定理一，并且 $r_{(n_1,n_2;2)}=r_{(n_1,n_2)}$。如果 $n_1=n_2=\cdots=n_t=3$，拉姆赛定理就是定理二，并且 $r_{(3,3,\cdots,3;2)}=r_t$。

现在我们分两步来证明拉姆赛定理．读者可将这里的证明与定理一、定理二的证明相比较.

第一步 先假定 $t=2$，即只有红、蓝两种颜色。

用归纳法．首先进行奠基，由习题一第 7 题得

$$r_{(n_1,n_2;1)}=n_1+n_2-1,$$

又不难看出（参见习题第 10 题）

$$r_{(n_1,b;b)}=n_1,$$

$$r_{(b,n_2;b)}=n_2.$$

其次，我们假定对已给正整数 n_1、n_2、b，$p=r_{(n_1-1,n_2;b)}$ 及 $q=r_{(n_1,n_2-1;b)}$ 存在，并且对任意满足 $1\leqslant b-1\leqslant n_1$、$n_2$ 的整数 n_1、n_2，$r_{(n_1,n_2;b-1)}$ 存在．在这样的归纳假设下来证明 $r_{(n_1,n_2;b)}$ 存在．实际上，我们可以证明

$$r_{(n_1,n_2;b)}\leqslant r_{(p,q;b-1)}+1.$$

设 b 级完全图 G 有 $N=r_{(p,q;b-1)}+1$ 个顶点 v_1、v_2、$\cdots$、v_N，

它的 b 级边涂上 t 种颜色. 由 G 可以得到一个 $b-1$ 级完全图G', 它有 $N-1=r_{(p,q;b-1)}$个顶点 v_2、v_3、…、v_N, 它的 $b-1$ 级边$(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{b-1}})$的颜色我们规定与 G 的 b 级边$(v_1, v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{b-1}})$的颜色相同.

根据 $r_{(p,q;b-1)}$的定义, G' 中或者含有一个 $b-1$ 级完全子图 K_p^{b-1}, 其 $b-1$ 级边全为红色, 或者含有一个 $b-1$ 级完全子图 K_q^{b-1}, 其 $b-1$ 级边全为蓝色.

由于两种情况的证法完全相同, 不妨假定是前一种情况. 设 b 级完全子图 K_p^b 与所说的同色的 K_p^{b-1} 有完全相同的顶点, 那么因为 $p=r_{(n_1-1,n_2;b)}$, 所以在 K_p^b 中存在一个 b 级完全图 $K_{n_1-1}^b$, 它的 b 级边全是红色, 或者存在一个 b 级完全图 $K_{n_2}^b$, 它的 b 级边全是蓝色. 如果是后者, 证明已经完成. 如果是前者, 我们将顶点 v_1 添加到 $K_{n_1-1}^b$ 中去, 得到一个 b 级完全图 $K_{n_1}^b$, 它的 b 级边$(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_b})$如果不与 v_1 相邻(即 v_{i_1}、v_{i_2}、…、v_{i_b} 均不等于 v_1), 那么它也是 $K_{n_1-1}^b$ 的 b 级边, 因而是红色的. 如果$(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_b})$与 v_1 相邻, 不妨假定 $v_{i_1}=v_1$, 那么由于 K_p^{b-1} 的 $b-1$ 级边$(v_{i_2}, v_{i_3}, \cdots, v_{i_b})$全是红色的, 所以根据对 G' 涂色的规定$(v_1, v_{i_2}, \cdots, v_{i_b})$, 也是红色的, 因而 $K_{n_1}^b$ 就是所需要的 b 级完全图.

第二步 假设对 $2\leqslant k\leqslant t-1$, $r_{(n_1,\cdots,n_k;b)}$存在, 我们来证明 $r_{(n_1,\cdots,n_t;b)}$存在, 并且

$$r_{(n_1,\cdots,n_t;b)}\leqslant r_{(n',n_t;b)},$$

其中
$$n'=r_{(n_1,\cdots,n_{t-1};b)}.$$

设 b 级完全图 G 有 $r_{(n',n_t;b)}$个顶点, 它的 b 级边涂上 t 种颜色, 先暂时把前 $t-1$ 种颜色作为红色, 那么根据 $r_{(n',n_t;b)}$的定义, G 中有一个 b 级完全图 $K_{n'}^b$, 其 b 级边全是红色, 或者有一个 b 级完全图 $K_{n_t}^b$, 其 b 级边都是第 t 种颜色. 如果是

后者，证明已经完成．如果是前者，根据 $n'=r_{(n_1,\cdots,n_{t-1};b)}$ 的定义，有一个 b 级完全图 $K^b_{n_i}$，其 b 级边都是第 i 种颜色，这里 i 为满足 $1\leqslant i\leqslant t-1$ 的某个整数．这就完成了拉姆赛定理的证明．

拉姆赛定理只是给出了 $r_{(n_1,\cdots,n_t;b)}$ 的存在性，并没有给出具体的数值，到目前为止我们所知道的拉姆赛数只有定理一的表与定理二的(1)中所列出的那些．

[例六] 设 m、n 为任意的自然数，根据拉姆赛定理(取 $b=2$、$t=2$，也就是定理一)，当图 G 的顶点数 $\geqslant r_{(m,n;2)}$ 时，G 中可以找到 m 个点两两相邻或者 n 个点两两不相邻．因此在一个无限图中或者可以找到任意多个两两相邻的顶点或者可以找到任意多个两两不相邻的顶点(见习题)．可以进一步证明无限图中可以找到无限多个两两相邻的顶点或者无限多个两两不相邻的顶点．

[例七] 整数 $m\geqslant 3$，v_1、v_2、$\cdots$、v_n 为平面上 n 个一般位置的点(即其中任意三个点不共线)，证明在 n 充分大时，其中有 m 个点 v_{i_1}、v_{i_2}、$\cdots$、v_{i_m} 组成一个凸 m 边形．

解 我们需要两个引理：

引理一 从平面上五个一般位置的点中可以找出四个点组成一个凸四边形．

引理二 设 v_1、v_2、$\cdots$、v_m 为 m 个一般位置的点，如果其中任意四个点所成的四边形都是凸的，那么这 m 个点组成一个凸 m 边形．

这两个引理的证明留作习题．

现在我们取 $n\geqslant r_{(5,m,4)}$，将 4 级完全图 K_n 的 4 级边 $(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4})$ 涂上红色或蓝色：如果相应的以 v_{i_1}、v_{i_2}、v_{i_3}、v_{i_4} 为顶点的四边形是凹的就涂红色，否则就涂蓝色．根据拉姆赛定

理，或者存在一个完全图 K_5^4，它的所有的4级边都是红的，或者存在一个完全图 K_m^4，它的所有的4级边都是蓝的. 由引理一，前一种情况不存在，因而后一种情况必然发生，再由引理二，这 m 个顶点组成一个凸 m 边形.

记使凸 m 边形一定存在的 n 的最小值为 R_m，则

$$R_m \leqslant r_{(5,\,m;4)}.$$

显然 $R_3=3=2+1$. 由引理一，$R_4=5=2^2+1$. 又 $R_5=9=2^3+1$，也已被证明，因此猜测

$$R_m=2^{m-2}+1,$$

这也是一个尚未解决的问题.

习 题 七

1 证明(1) $r_{(m,n)}=r_{(n,m)}$ (2) $r_{(2,n)}=n$ (3) $r_{(m,2)}=m$.

2 证明 $r_{(m,n)} \leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$.

3 证明 $r_{(3,5)}=14$.

4 将 K_{13} 的边涂上红色或蓝色使其中既没有三边全是红色的 K_3，也没有10条边全是蓝色的 K_5.

5 19个人一定有三个人互相认识或者六个人互不相识.

6 证明下面的许尔(Schur)定理：

将自然数1, 2, …, N 分到 n 个类中，则在 N 充分大的时候，一定有一个类同时含有数 x、y 及这两个数的差 $|x-y|$.

7 称具有下述性质的图 G 为 (n, m) 图：

(1) G 有 n 个顶点；

(2) G 不含有 K_m $(2 \leqslant m \leqslant n)$，但在原来不相邻的任意两个顶点间添上一条边后就含有 K_m.

试作一个 (n, m) 图.

8 完全图 K_n 的导出图有多少个顶点？每个顶点的次数是多少？对导出图的任意两个不相邻的顶点，恰有多少个顶点与这两个顶点都

相邻？对导出图的任意两个相邻的顶点，恰有多少个顶点与这两个顶点都相邻？

9 证明 $r_{(n_1, b; b)} = n_1$，$r_{(b, n_2; b)} = n_2$.

10 证明例七中的引理一.

11 证明例七中的引理二.

12 证明在无限图中可以找到无限多个两两相邻的顶点或者无限多个两两不相邻的顶点.

§8 有 向 图

前面说的图都是无向图：连结顶点 v 与 v' 的边是没有方向的，或者说这条边既可看成是从 v 到 v' 的边，又可以看成是从 v' 到 v 的边。现在把边规定一个方向，比如说规定这条边是从 v 到 v' 的，即以 v 为起点，以 v' 为终点，这种有方向的边称为弧。如果一个图的每一条边都规定了方向，那么我们就称这个图为有向图。

通常将有向图记为 $G=(V, U)$，其中 V 仍然表示 G 的顶点的集合，U 表示 G 的弧的集合。

一个城市的交通图是一个有向图，因为有些公路规定只能朝一个方向行驶，有些公路可以双向行驶，后者可以看作是两条方向相反的单向公路。如果每条公路都可以双向行驶，那么这个交通图实际上就是一个无向图。

有向图与无向图的关系是十分密切的。每一个无向图都可以看成是有向图，这只要将每一条连结 v 与 v' 的边换成两条弧，一条从 v 到 v'，一条从 v' 到 v。每一个有向图 $G=(V, U)$，如果不计较方向就得到一个无向图 $G'=(V, E)$，它称为 G 的对应的无向图。

有向图中的许多概念都是与无向图中的概念相对应的。

在 $G=(V, U)$ 中，以 v 为起点的弧的条数称为 v 的外半次，记为 $\deg_G^+ v$ 或 $\deg^+ v$。以 v 为终点的弧的条数称为 v 的内半次，记为 $\deg_G^- v$ 或 $\deg^- v$。

在 $G=(V, U)$ 中，一个由不同的弧组成的序列 u_1、u_2、…、

u_q,如果其中 u_i 的起点为 v_i,终点为 $v_{i+1}(i=1, 2, \cdots, q)$,那么这个序列称为从 v_1 到 v_{q+1} 的**路**,q 称为这个路的**长**,v_1 称为这个路的**起点**,v_{q+1} 称为这个路的**终点**. 如果对应的无向图是简单图,这个路通常记作$(v_1, v_2, \cdots, v_{q+1})$. 如果 $v_{q+1}=v_1$,那么这个路称为一个**回路**.

距离、直径、半径、中心等定义与无向图的对应概念完全类似,只要将原来定义中的链换成路就可以了.

例如图 8.1 中,G_1 的直径 $D=6$(从 v_2 到 v_1 的距离为最大值 6),半径为 2,v_1、v_3 都是中心. G_2 的直径 $D=\infty$(因为 v_1 与 v_2 之间没有路相通,我们约定这时 v_1 与 v_2 之间的距离为 ∞),半径为 1,中心为 v_3.

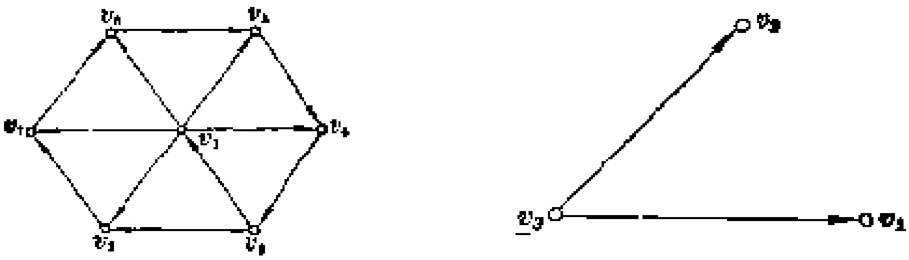


图 8.1

类似于 §2 的定理二,我们有下面的定理.

定理一 有向图 $G=(V, U)$ 是一个路或一个回路的充分必要条件是下面的(1)、(2)同时成立:

(1) 对应的无向图 $G'=(V, E)$ 是连通的.

(2) 满足 $|\deg_G^+ v-\deg_G^- v|=1$ 的顶点个数为 2 或 0,并且其余的顶点均满足 $\deg_G^+ v=\deg_G^- v$.

证明 与 §2 定理二的证明相近,请读者自行补足.

[例一] 由 σ 个字码 0, 1, $\cdots$, $\sigma-1$ 可以组成长为 n 的不同的词 σ^n 个. 能不能写出一个由 0, 1, $\cdots$, $\sigma-1$ 组成的循环序列 $a_0a_1\cdots a_{L-1}a_0a_1\cdots a_{L-1}\cdots$,使每个长为 n 的词都在这

个序列中出现？这个循环序列的循环节 L 至少应当多长？(例如字码有三个：0、1、2，长为 2 的词有 $3^2=9$ 个，即 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22. 这 9 个词都在以 001102122 为循环节的序列 001102122001102122001102122…中出现).

解 显然必须有 $L\geqslant\sigma^n$. 我们证明等号确实成立，即可以作出一个循环序列

$$a_0a_1\cdots a_{\sigma^n-1}a_0a_1\cdots a_{\sigma^n-1}\cdots \tag{1}$$

使得每一个长为 n 的由字码 0, 1, …, $\sigma-1$ 组成的词都在 (1) 中出现.

方法是作一个有向图 $G=(V, U)$. G 以长为 $n-1$ 的由 0、1、…、$\sigma-1$ 组成的词为顶点，共有 σ^{n-1} 个顶点. 在顶点 $b_1b_2\cdots b_{n-1}$ 与 $b_2b_3\cdots b_n$ 之间作一条从 $b_1b_2\cdots b_{n-1}$ 到 $b_2b_3\cdots b_n$ 的弧，并记为 $b_1b_2\cdots b_n$，这样的弧就是长为 n 的词，共有 σ^n 个.

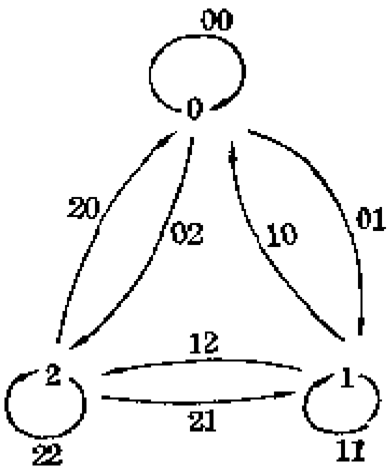


图 8.2

例如对于 $\sigma=3$(字码 0、1、2) 及 $n=2$ 得图 8.2.

我们来验证这样得到的图 G 满足定理一的条件.

首先，对任意两个顶点 $b_1b_2\cdots b_{n-1}$ 与 $c_1c_2\cdots c_{n-1}$ 有一个从点 $b_1b_2\cdots b_{n-1}$ 到 $c_1c_2\cdots c_{n-1}$ 的路，这路由弧

$$b_1b_2\cdots b_{n-1}c_1,\ b_2b_3\cdots b_{n-1}c_1c_2,\ \cdots,\ b_{n-1}c_1c_2\cdots c_{n-1}$$

组成. 因此对应的无向图是连通的.

其次，对每个点 $v=b_1b_2\cdots b_{n-1}$，有 $\deg^+v=\deg^-v$，因为进入 v 的弧为 $cb_1b_2\cdots b_{n-1}$，从 v 发出的弧为 $b_1b_2\cdots b_{n-1}c$，其中 c 都有 σ 种取法(有方向的环既算作一条以 v 为起点的弧，又

算作一条以 v 为终点的弧)，所以

$$\deg^+ v=\deg^- v=\sigma.$$

根据定理一，图 G 是一个回路，这个回路就构成所要求的循环序列. 例如由图 8.2, 得到由弧 00, 01, 11, 10, 02, 21, 12, 22, 20 组成的回路，将前一弧的第二个字码与后一弧的第一个字码并为一个就得到前面所举的那个序列.

这样得到的循环序列称为笛波滤恩(de Bruijn)序列，通常记为 $G_{\sigma,n}$. 前面所举的序列就是 $G_{3,2}$.

如果图 $G=(V,U)$的每两个顶点 v 与 v' 之间都有一个从 v 到 v' 的路，我们就说图 G 是强连通的. 例一中的图 G 就是强连通的.

如果图 $G=(V,U)$的对应的无向图 $G'=(V,E)$ 是树，那么 G 称为有向树. 例如在 §3 例一中，约定在 v_i 为 v_j 父亲时，弧的方向从 v_i 到 v_j，就得到一个有向树(图 8.3)

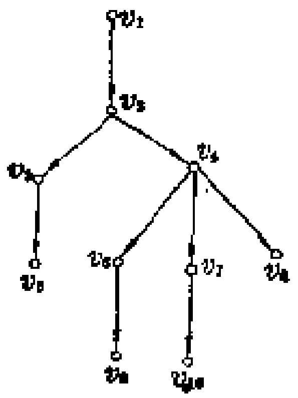


图 8.3

如果在一个有向树中有一个顶点，它到所有的顶点都有路，这个顶点称为有向树的根. 例如图 8.3 中的 v_1 就是根.

[例二] 如果对一个有向树 G 的任意两个顶点 v_i 与 v_j，都有一个顶点 v_k，从 v_k 到 v_i 与 v_j 均有路相通，那么 G 有根.

解 对于顶点 v_1 与 v_2，有一个顶点 $v_1'\in V$，从 v_1' 到 v_1 与 v_2 均有路，对于顶点 v_1' 与 v_3，又有一个顶点 $v_2'\in V$，从 v_2' 到 v_1' 与 v_3 均有路，……，最后有一个顶点 $v_{n-1}'\in V$，从 v_{n-1}' 到所有的顶点 v_1、v_2、…、v_n 均有路(从点 v 到 v 自身总有一条长为零的路)，这个顶点 v_{n-1}' 就是有向树 G 的根.

[例三] 有一百种昆虫，每两种中必有一种能消灭另一种(但甲能消灭乙，乙能消灭丙，并不意味着甲一定能消灭丙)，证明可以将这一百种昆虫依某种顺序排列起来，使得每一种能消灭紧接在它后面的那一种昆虫。

解 可将100改为更一般的自然数 $n\geqslant 2$. 用归纳法来证明。

作一个有向图 G，每一个顶点 v_i 表示一种昆虫，如果昆虫 v_i 可以消灭昆虫 v_j，我们就作一条从 v_i 到 v_j 的弧。由已知条件，G 的对应的无向图 G' 是一个完全图，因此我们可以把 G 称为有向完全图。要证明的结论就是有向完全图中有一个哈密尔顿路即经过所有顶点恰好一次的路。

假设命题对 $n-1\geqslant 2$ 已经成立，并且路为 $(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1})$. 这时有以下三种情况：

(1) 如果有弧 (v_{n-1}, v_n)，那么 $(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}, v_n)$ 就是一个哈密尔顿路；

(2) 如果有弧 (v_n, v_1)，那么 $(v_n, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1})$ 就是一个哈密尔顿路；

(3) 如果(1)、(2)都不成立，则意味着存在 (v_1, v_n) 和 (v_n, v_{n-1})，那么一定有一个 $i(1\leqslant i\leqslant n-2)$，使弧 (v_i, v_n) 与 (v_n, v_{i+1}) 同时存在(我们选取 i 为 $1, 2, \cdots, n-2$ 中第一个使弧 (v_n, v_{i+1}) 存在的数)，这时

$$(v_1, v_2, \cdots, v_i, v_n, v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_{n-1})$$

就是所求的哈密尔顿路(图8.4)。

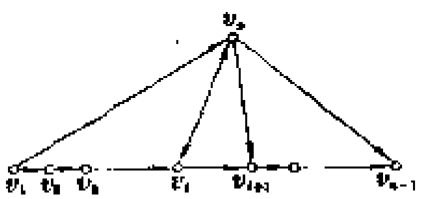


图 8.4

在研究状态或位置发生变更的问题中，常常用到有向图。下面的例四就是一个有名的问题。

[例四] 一个人带着狼、羊

和白菜从河的左岸渡河到右岸，船只有一只，并且只有人能划船，每次人只能带一件东西过河，狼和羊、羊和白菜不能在无人监视的情况下放在一起，问应怎样渡河才能把狼、羊、白菜都运过去？

解　在河左岸允许出现的情况，或者称做状态，有十种，即：

人狼羊菜，人狼羊，人狼菜，人羊菜，人羊，狼菜，狼，菜，羊，O（人、狼、羊、菜均在右岸）.

状态“人菜”等不可能出现，因为这时右岸为“狼羊”等，是不允许出现的.

将每一种状态用一个点来表示，如果某次船从左岸划往右岸时，使状态 v 变为状态 v'，我们就作一条从 v 到 v' 的弧，这样就得到一个有向图 G（图 8.5）.

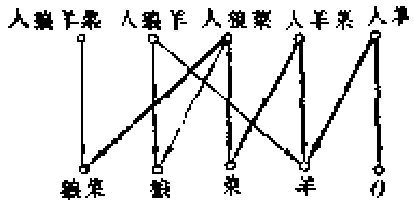


图　8.5

注意船是在两岸间往返的．我们的问题就是在图 G 中找一个从初始状态“人狼羊菜”到 O 的弧的序列，这个序列中相邻的两条弧或者都是由同一点引出的，或者都是进入同一个顶点的．这样的弧的序列是很容易找到的，图 8.5 中粗线所表示的就是一个解.

［例五］　三个人和三个机器人要从左岸渡河到右岸．船只有一只，每次可以渡人或机器人共两名，三个人都会划船，机器人中只有一个会划船．如果为防止意外，每岸有人的时候，人的数目不能比机器人的数目少，问应当怎样渡河？

解　用 M 表示人，K 表示会划船的机器人，C 表示不会划船的机器人．因为有三个 M，两个 C，一个 K，所以左岸可以产生的组合有

$$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$$

种，但其中 MCC 及 MMC（此时右岸为 MCK）等等是不允许出现的，因此只有 16 种允许的状态：

$$\begin{array}{llll} MMMCCK, & MMMK, & CCK, & CK, \\ MMMCC, & MMCC, & MC, & C, \\ MMMCK, & MMCK, & MK, & K, \\ MMMC, & MMM, & CC, & O. \end{array}$$

用和上题完全一样的方法可以作出一个有 16 个顶点的有向图 G（图 8.6）.

图 8.6 中粗线弧就表示所要求的解，也就是例四中所说的那种弧的序列. 为了找到这个解，我们先作一个辅助图 G_1（图 8.7），它的顶点与 G 相同，如果在 G 中有弧 (v, v') 与 (v, v'')，或者有弧 (v', v) 与 (v'', v)，我们就在 G_1 中作一条边 (v', v'')（这条边 (v', v'') 的意义就是在两岸间往返一次，可使状态 v' 变为 v''），此外保留 G 中四条进入 O 的弧.

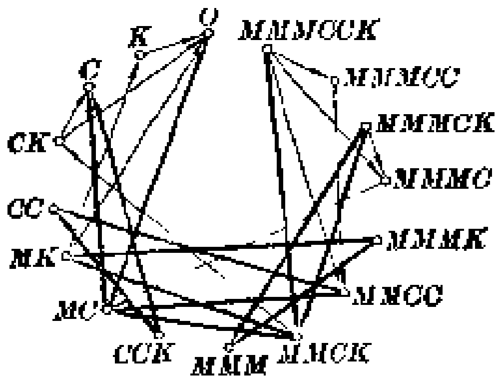


图 8.6 G

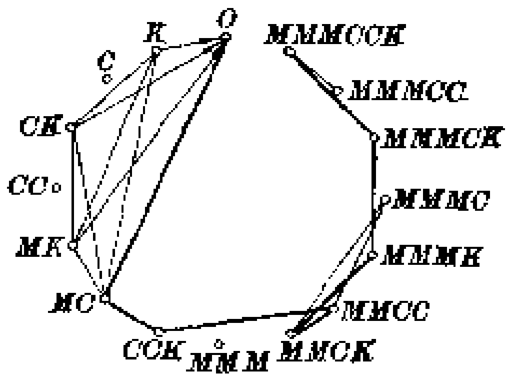


图 8.7 G_1

在图 G_1 中，不难找出一条从初始状态 $MMMCCK$ 到 O 的路（用粗线表示），然后再回到图 G 中，就可以找出相应的解.

最后我们介绍一下流量问题.

[例六] 图8.8称为流量图，其中点 v 的内半次为0，这样的点称为*发点*，点 v' 的外半次为0，这样的点称为*收点*，每条弧上的数字表示这条弧(公路)的运输能力，即在这条弧上最多能通过多少货物．问从发点 v 最多可以运多少货物(称为*最大流量*)到收点 v'？

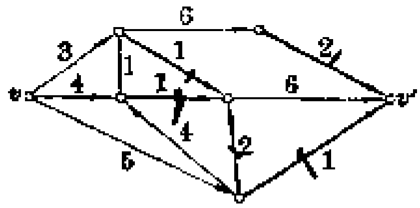


图 8.8

解 读者不难看出图8.8的最大流量为7．一般的算法请参看《图论中的极值问题》(管梅谷著，上海教育出版社出版)，这里就不多说了．

在图8.8中去掉几条弧，使得从发点 v 与收点 v' 之间没有路可通，这被去掉的几条弧上的运输能力的和称为*切断能力*．不难看出图8.8的最小切断能力也是7(被切断的弧就是图中粗线的弧)．由这个事实引导出下面的福特-福克逊(Ford-Fulkerson)定理：

定理二 在一个流量图中，最大流量等于最小切断能力．

这个定理我们就不证明了．

定理二有各种变形与应用．

[例七] 在一次舞会上，有 n 个 X 国留学生与 n 个 Y 国留学生，每个 Y 国学生恰好认识 δ 个 X 国学生，每个 X 国学生也恰好认识 δ 个 Y 国学生，证明可以适当安排，使得每个 Y 国学生都与他认识的 X 国学生跳舞．

解 这就是§4的例十，现在我们利用定理二来证明它．

为此作一个流量图 G(图8.9)，其中顶点 x_1、x_2、…、x_n 表示 n 个 X 国学生，顶点 y_1、y_2、…、y_n 表示 n 个 Y 国学生，如果 x_i 认识 y_j，就作一条从 x_i 到 y_j 的弧，取一个顶点 v 作为发

点，从 v 到每个 x_i 作一条弧，再取一个点 v' 作为收点，从每个 y_j 到 v' 作一条弧．规定每条弧的运输能力为 1．要证明的结论就是 G 的最大流量为 n．

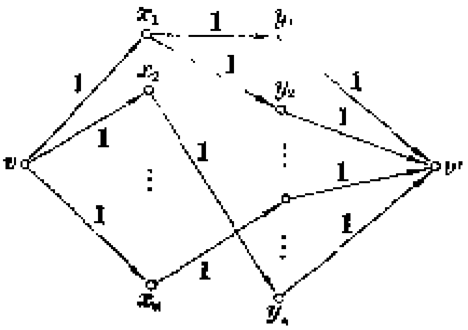


图　8.9

根据定理二，只要证明最小切断能力等于 n．

如果在被切断的弧中有一条弧为 $(x_i,\ y_j)$，我们可以将它换成 $(v,\ x_i)$ 或 $(y_j,\ v')$，切断能力不会增加，因此可以假定在取得最小切断能力时，被切断的弧是

$$(v,\ x_{i_1}),\ (v,\ x_{i_2}),\ \cdots,\ (v,\ x_{i_s})$$

与
$$(y_{j_1},\ v'),\ (y_{j_2},\ v'),\ \cdots,\ (y_{j_t},\ v').$$

这时切断能力为 $s+t$．

考虑未被切断的 $n-s$ 条弧 $(v,\ x_{i_{s+1}})$，$(v,\ x_{i_{s+2}})$，$\cdots$，$(v,\ x_{i_n})$，由于 v 与 v' 之间没有路可通，因此从 $n-s$ 个顶点 $x_{i_{s+1}}$，$x_{i_{s+2}}$，$\cdots$，x_{i_n} 引出的弧 $(x_i,\ y_j)$ 的终点 y_j 一定全在 y_{j_1}，y_{j_2}，$\cdots$，y_{j_t} 中，所以

$$\delta\cdot(n-s)\leqslant\delta\cdot t,$$

从而
$$n\leqslant s+t.$$

另一方面，显然切断 n 条弧 $(v,\ x_1)$，$(v,\ x_2)$，$\cdots$，$(v,\ x_n)$ 后，v 与 v' 就没有路相通．所以最小切断能力 $s+t=n$．

定理二也可以用到 (0, 1) 矩阵上．

[例八]　我们称一个矩阵的一行或一列为一条线．一个 (0, 1) 矩阵的不在同一条线上的 1 的最大个数称为这个矩阵的项秩，包含这个 (0, 1) 矩阵的所有的 1 的线的最小值称为最小线数，例如 (0, 1) 矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

的项秩为 3，因为三个黑体的 1 不在同一条线上，并且每四个 1 中必有在同一条线上的．这个矩阵的最小线数也是 3，因为第一列、第二行与第四行包含所有的 1，并且要包含三个黑体的 1 至少要三条线．

现在我们应用定理二来证明 (0, 1) 矩阵的项秩等于最小线数．

为此我们先作一个图 G_1，它的顶点 x_1、x_2、…、x_m 代表 (0, 1) 矩阵的 m 个行，y_1、y_2、…、y_n 代表 (0, 1) 矩阵的 n 个列，如果第 i 行第 j 列的元素是 1，我们就作一条从 x_i 到 y_j 的弧（显然 G_1 的对应的无向图 G_1' 是一个偶图）．

然后再取一个点 v 作为发点，从 v 到每个 x_i 作一条弧，又取一个点 v' 作为收点，从每个 y_j 到 v' 作一条弧，并且规定每条弧的运输能力为 1，这样就得到一个流量图 G_2（这里的作法与例七相类似，读者可参看图 8.9）．

(0, 1) 矩阵的项秩就是偶图 G_1' 的最大对集中边的条数，也就是流量图 G_2 的最大流量．

再看看最小线数在图上表示什么．如果在 (0, 1) 矩阵中有 k 个行与 h 个列 x_{i_1}、x_{i_2}、…、x_{i_k} 与 y_{j_1}、y_{j_2}、…、y_{j_h} 包含所有的 1，也就是把这 $k+h$ 条线划去后就划去了矩阵全部的 1，那么在图 G_2 中把这 $k+h$ 个点 x_{i_1}、x_{i_2}、…、x_{i_k} 与 y_{j_1}、y_{j_2}、…、y_{j_h}（及进入这些点与自这些点引出的弧）划去，G_1 的弧也就全被去掉了，v 与 v' 之间当然没有路相通．其实我们也可以不把这些点去掉，只要把弧 (v, x_{i_1})，(v, x_{i_2})，…，(v, x_{i_k}) 与 (y_{j_1}, v')，

(y_{i_2}, v'), $\cdots$, (y_{i_k}, v')去掉，就可以使 v 点与 v' 点之间无路相通，由此可见最小线数也就是 G_2 的最小切断能力，根据定理二，它与项秩相等.

习　题　八

1　对于有向图 G，证明

(1) $\sum \deg^+ v = \sum \deg^- v$.

(2) 在定理二中，如果 $|\deg^+ v - \deg^- v| = 1$ 的点有两个，那么其中恰有一个点使 $\deg^+ v - \deg^- v = 1$.

2　对完全有向图，证明

$$\sum(\deg^+ v)^2 = \sum(\deg^- v)^2.$$

3　$\deg^- v = 0$ 的点 v 称为发点，证明如果一个有向图没有回路，那么这个有向图至少有一个发点. 类似地，可以定义收点并证明没有回路的有向图至少有一个收点.

4　n 名棋手进行比赛，每一个人与若干个人进行了比赛，假定比赛中没有平局. 如果没有 v_1 胜 v_2，v_2 胜v_3、$\cdots$、v_k 胜 v_1 这样的情形出现，证明必有一个人在所有的比赛中全胜，也必有一个人在所有的比赛中全负.

5　作出笛波滤恩序列 $G_{2,3}$，$G_{2,4}$ 及有关的图.

6　如果完全有向图 G 中有一个回路，证明 G 中有一个三角形的回路.

7　如果 n 个人 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 中每两个人 v_i 与 v_j 有一个共同的祖先 v_k(约定每个人可以算作他自己的祖先)，证明这 n 个人有一个共同的祖先.

8　在顶点个数 $n \geqslant 3$ 的有向完全图 G 中有一个回路为三角形的充分必要条件是有两个顶点 v 与 v'，满足

$$\deg^+ v = \deg^+ v'.$$

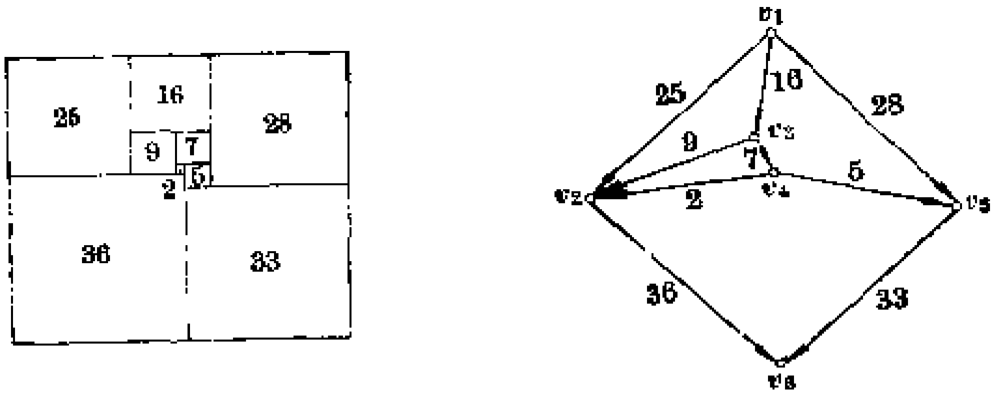
9　一次有 $n(\geqslant 3)$名选手参加的循环赛(每一对选手赛一局)没有平局，并且没有一个人是全胜的，证明其中一定有三名选手甲、乙、丙，

甲胜乙、乙胜丙、丙胜甲.

10 一次有 $n(\geqslant 3)$ 名选手参加的循环赛，没有平局，并且每胜一局得一分，负一局得零分. 各个选手所得总分分别为 s_1、s_2、…、s_n. 证明存在三个选手 A、B、C，使得 A 胜 B、B 胜 C、C 又胜 A 的充分必要条件是

$$s_1^2+s_2^2+\cdots+s_n^2<\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

11 由图 (a) 中的“完全长方形”(即由若干个正方形拼成的长方形)可以得到一个流量图，见图 (b)，作法如下:



(a) (b)

(第 11 题图)

(1) 图 (a) 中的每一根水平线，用一个点 v_i 表示 $(1\leqslant i\leqslant 6)$;

(2) 如果在图 (a) 中 v_i 所表示的线在 v_j 所表示的线的上方，并且两者之间夹着一个边长为 h 的正方形(图 (a) 中所写的数字表示正方形的边长)，那么就在图 (b) 中，从 v_i 到 v_j 作一条弧，并且标上运输能力 h.

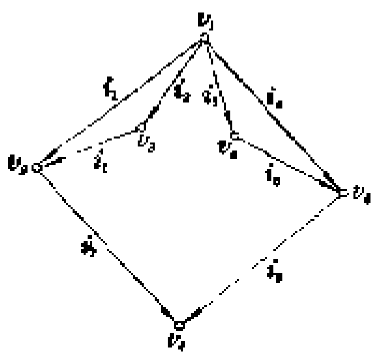
证明:

(1) 对于图 (b) 的每一个圈，图上各弧的运输能力的代数和为零(例如对于 v_1、v_2、v_3 所构成的圈有 $16+9-25=0$);

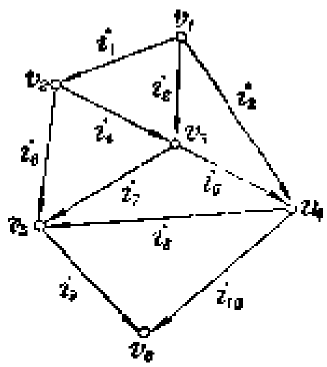
(2) 对于每个顶点 $v_i(1<i<6)$，与这点相邻的弧上的运输能力的代数和为零(例如在顶点 v_2，$25+9+2-36=0$).

12 根据上题的条件(1)与(2)(这就是电路网络中的基希霍夫定律)，来确定图中的运输能力(电流) i_1、i_2、i_3、i_4、i_5、i_6、i_7、i_8. 并利用本题图

作出一个"完全长方形"来.



(第 12 题图)



(第 13 题图)

13 对本题图解与上题同样的问题.

14 设有向的简单图 G(即对应的无向图 G' 是简单图)没有回路,顶点个数为 $nm+1$,证明在 G 中可以找到一个长度不小于 m 的路或者可以找到 $n+1$ 个互不相邻的顶点.

15 任意给定一个 n^2+1 项的实数数列(各项不同),一定可以从这个数列中找出一个 $n+1$ 项的单调(递增或递减)的子列.

16 任意给定一个 $(n+1)^2$ 项的递增的正整数数列,一定可以从这个数列中找出一个 $n+1$ 项的子列,具有性质:

(1) 任一项整除它后面的每一项;

或者

(2) 任一项不能整除其它的项.

17 一次象棋表演赛有五十七名选手参加,每场表演由两名选手对弈,每两名选手至多对弈一次,如果没有平局,证明一定可以找出九个人彼此没有对弈过或者可以找出八个人,这八个人可以排成一列,每一个人胜过他后面的所有人.

18 证明 14 题在 G 有回路时仍然成立.

19 从一个递增的正整数的无穷数列中一定可以选出一个无穷子列,具有 16 题中的性质(1)或(2).

20 证明当一个有向简单图 G 没有回路,顶点个数为 ∞ 时,在 G 中可以找到一个长度为 ∞ 的路或者无限多个互不相邻的顶点.

21 上题没有回路的条件可以去掉.

22 如果在无向图 G 中至少要去掉 k 条边才能使两个顶点 v_1 与 v_2 之间没有链相连，证明从 v_1 到 v_2 至少有 k 条没有公共边的链.

23 在接头 A 和 B 之间连接着某些电阻，如果在其中任意九个电阻损坏(电阻短路或断路)时，A、B 之间的电路仍然是连通的，并且不短路，问至少需要多少个电阻，应当按照怎样的线路图连接?

附录

集论的基本知识

一个集合(也可以简称为集)就是具有某种属性的某些事物的总体. 这些事物称为集合的元素，它们可能是点、数、人、物等等. 通常用大写字母 A、B、X、Y、V 等表示集合，用小写字母 a、b、x、y、v 等表示集合的元素.

集合 A 的元素个数，用 $|A|$ 来表示. 如果 $|A|$ 是有限的，A 称为有限集，否则称为无限集.

n 个元素 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 的集 V 常常写作

$$V=\{v_1、v_2、\cdots、v_n\},$$

显然此时 $|V|=n$.

没有元素的集合称为空集.

如果 a 是集合 A 的元素，我们说 a 属于集合 A，并记作 $a\in A$. 如果 a 不是集合 A 的元素，我们说 a 不属于集合 A，并记作 $a\in A$.

例如平面上有五个不同的点 v_1、v_2、v_3、v_4、v_5，集合 $V=\{v_1、v_2、v_3、v_4\}$，那么 $v_1\in V$，但 $v_5\in V$.

如果集 A 的元素都是集 B 的元素，我们就说 A 含于 B 内(B 包含 A)或 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

例如 $\mathbf{N}$ 为全体正整数的集合，$\mathbf{Z}$ 为全体整数的集合，那么 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$.

空集是任一集合的子集.

如果 A 有 n 个元素，那么 A 的子集共 2^n 个. 例如 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$有 16 个子集:

$\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_4\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$及空集.

设 A、B 为两个集,由同时属于 A 和 B 的那些元素组成的集称为 A 和 B 的交集,记为 $A\cap B$.

例如 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1,2,6,7\}$,那么 $A\cap B=\{1, 2\}$.

由属于 A 或 B 的元素全体组成的集称为 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$.

例如在上面所举的例子中,

$$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

设 B 为 A 的子集,A 中不属于 B 的元素全体组成的集合,称为 B(在 A 中)的补集,记为 $\overline{B}$.

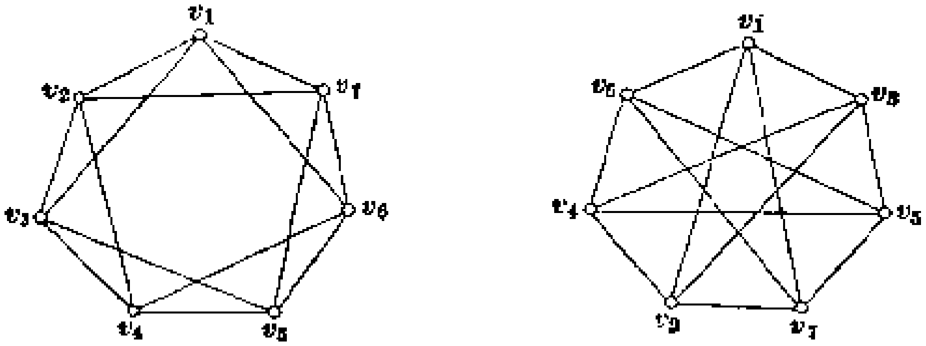
例如 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1, 2, 3\}$,那么$\overline{B}=\{4, 5\}$.

习题解答概要

习题一解答

1 甚易．可参看 § 5 所列的表．

2 标上字母如图，就可以看出两个图确实是同构的．



（第 2 题图）

3 有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边．

4 作完全图 K_n，每一个顶点表示一个药箱，每一条边 (v_i, v_j) 表示两个药箱 v_i 与 v_j 所共有的那一种药．药的种数即 K_n 的边数 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$．

5 (1) 2^m 个(2) $C_m^{m'}$ 个．

6 设顶点数 $=n$，如果没有孤立点，各顶点的次数在 1 到 $n-1$ 之间，如果有孤立点，各顶点的次数在 0 到 $n-2$ 之间，不管哪一种情况，根据抽屉原则，都至少有两个顶点的次数是一样的．

7 如果结论不成立，那么第 i 种颜色的顶点数 $\leqslant n_i-1$ $(i=1, 2, \cdots, t)$，因而

$$\text{顶点总数} \leqslant (n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_t-1)=n_1+n_2+\cdots+n_t-t$$
$$<n_1+n_2+\cdots+n_t-t+1$$

与已知矛盾．

8 $\deg v_1+\deg v_2+\cdots+\deg v_n=2(n+1)$（因为每条边恰好被算了两次），所以平均每个顶点的次数为 $\frac{2(n+1)}{n}>2$，根据平均数原则，至少有一个顶点的次

数$\geqslant 3$.

9 让内圈绕圆心转动，旋转角为$\frac{2k\pi}{100}$($k=1, 2, \cdots, 100$)，在这 100 次旋转中，内圈每一格有 50 次与外圈颜色相同的格子对齐，所以总共出现 100×50 对颜色相同的格子，平均每一次旋转中有$\frac{100\times 50}{100}=50$对颜色相同的格子，根据平均数原则，必有某一次旋转产生 50 对或更多对颜色相同的格子。

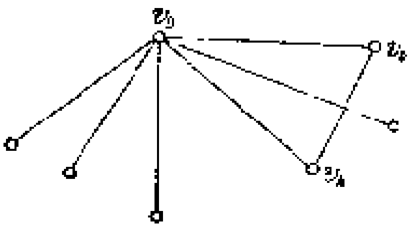
10 用九个点 v_1、v_2、…、v_9 表示九个人，如果 v_i 与 v_j 握过手就连一条边 (v_i, v_j)。与 v_9 相邻的点有 6 个，其中必有一个点 v_k 与 v_1、v_2、v_3 都不相同，这个点 v_k 显然满足

$$\deg v_k\geqslant 5.$$

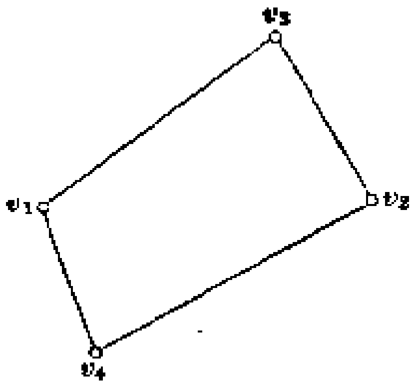
在与 v_9 相邻的其余五个点中一定有一个点 v_h 与 v_k 相邻，否则

$$\deg v_k\leqslant 9-5=4,$$

v_9、v_k、v_h 就是一个三角形的三个顶点(见图)，它们所表示的三个人互相握过手。



(第 10 题图)



(第 11 题图)

11 用 $2n$ 个点表示 $2n$ 个人，如果两个人互相认识，就在相应的两个点之间连一条边，这就得到一个简单图 G.

已知对每一个顶点 v_i，有 $\deg v_i\geqslant n$，要证明 G 中有一个四边形存在.

如果 $G=K_{2n}$，结论显然. 如果 $G\neq K_{2n}$，那么有两个不相邻的顶点 v_1、v_2，因为

$$\deg v_1+\deg v_2\geqslant 2n,$$

所以根据抽屉原则其余的 $2n-2$ 个点中必有两个点，设为 v_3、v_4，与 v_1、v_2 都相邻，这四个点就构成一个四边形(见图).

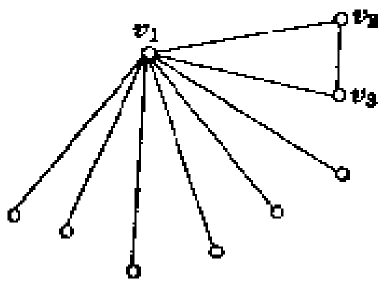
12 作一个有 14 个顶点的简单图 G，顶点代表人，边 (v_i, v_j) 表示相应于 v_i、v_j 的两个人未合作过. 于是，对每一个顶点 v_i，有 $\deg v_i=8$.

每打过一局，就要去掉两条边，三局共去掉六条边，这样得到一个图 G'，G' 中至少有两个顶点 $(14-2\times 6=2)$ 的次数保持为 8，设其中之一为 v_1，与 v_1 相邻

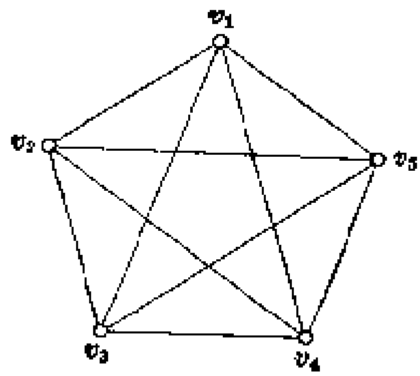
的八个顶点中至少有一个次数不小于 7(如果这八个顶点的次数都小于 7，那么至少去掉了$\dfrac{8\times(8-6)}{2}=8$ 条边，而不是只去掉六条边)，设 v_2 的次数不小于 7，那么 v_2 不可能与上述八个点中其余的七个点均不相邻，否则

$$\deg v_2\leqslant 14-1-7=6.$$

设其中与 v_2 相邻的顶点为 v_3，则 v_1、v_2、v_3 组成一个三角形(见图)，它们与新加入的一个顶点构成一个完全图 K_4。



(第 12 题图)



(第 13 题图)

13 图中若(v_1, v_2)，(v_2, v_3)，(v_3, v_4)，(v_4, v_5)，(v_5, v_1)涂上一种颜色，其余边涂上另一种颜色，则没有同色的三角形，这就是所要举的反例。

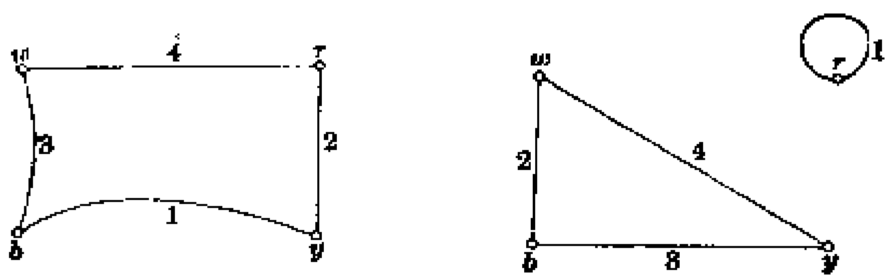
14 参见 §7 例四。

15 参见 §7 例一。

16 自 v_1 引出的 17 条边中至少有九条是同色的，设边(v_1, v_2)、(v_1, v_3)、…、(v_1, v_{10})为红色，根据上题，在由 v_2、v_3、…、v_{10} 这九个点组成的完全图 K_9 中有一个红色的 K_3 或一个蓝色的 K_4，从而在原图中有一个同色的子图 K_4。

本题也可以参看 §7 例三。

17 G_1 与 G_2 如图所示。



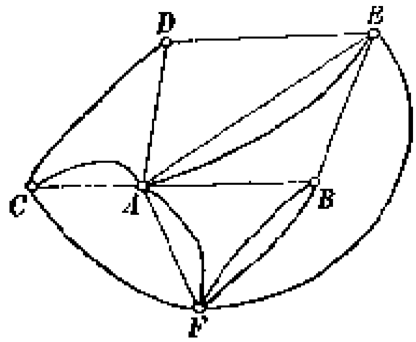
(第 17 题图)

18 不管怎样堆，棱柱的四个侧面至少有八个红的正方形，而如果有解，则只能有四个红的正方形。

19　参看习题三第 18 题.

习题二解答

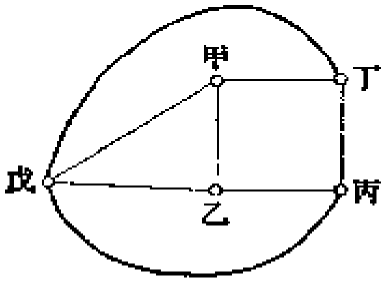
1　相应的图有两个奇顶点，因而可以一笔画成(见图).



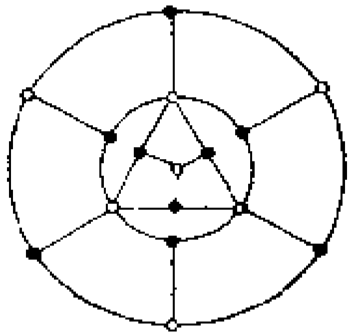
(第 1 题图)

2　即定理一.

3　由题目的图可以得到一个图(见图)，这个图不能一笔画成.



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4　如图，将顶点涂上红色或蓝色，使得相邻的顶点颜色互不相同. 如果所说的链存在，那么在链上的顶点必然红蓝相间，因此红的顶点与蓝的顶点的个数相同或相差 1，但图中蓝点的个数为 9，红点的个数为 7，相差为 2，因此所说的链不可能存在.

本题可参看 § 4 例四与 § 6.

5　不可能. 因为国际象棋盘上的格子是黑白相间. 去掉的两个格子颜色相同，因而剩下的棋盘上一种颜色的格子比另一种颜色的格子多两个. 而如果能够用 31 个 1×2 的矩形完全盖住，则两种颜色的格子数目必须相等.

6　不可能. 因为在包含 v_1 的全部班次中，其余的 119 个人每人都出现一次并且只出现一次，但从包含 v_1 的每一班次中除去 v_1 后，剩下 2 个人，故总人数

应为偶数，而 119 却是奇数，矛盾！

组合数学中非常著名的寇克满(Kirkman)的十五个女生的问题就是与此相类似的排表问题.

7 参见本习题 5. 不可能. 将空心的 $3\times3\times3$ 的立方体分为 26 个 $1\times1\times1$ 的小立方体，涂上红色或蓝色，使相邻的两个小立方体颜色不同. 两种颜色的小立方体数目相差 2，而如果可以堆成的话，两者数目应当相等.

8 (1) 翻动 $C_{13}^{12}=12$ 次，使 12 种可能的组合各出现一次，从而每只杯子恰好翻动 11 次，变为杯口朝下.

(2) 不可能. 因为若干次翻动的杯子的总个数为偶数. 而如果可能翻成杯口全部朝下的话，每只杯子应翻动奇数次，因而 13 只杯子翻动的总次数也是奇数.

9 仿照第 4 题，将椅子涂上红色或蓝色，并且使相邻的椅子涂上不同的颜色，不妨设红椅子比蓝椅子多 1 张，要所有坐红椅子的人都去坐蓝椅子是做不到的.

10 设有 k 个标准线段，将点 v_i 与数 a_i 相对应：

$$a_i=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i \text{ 为红色点}\\ -1, & \text{若 } v_i \text{ 为蓝色点}\end{cases}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

那么

$$\begin{aligned}-1=a_1a_n&=a_1\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}^2\cdot a_n\\&=(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)=(-1)^k,\end{aligned}$$

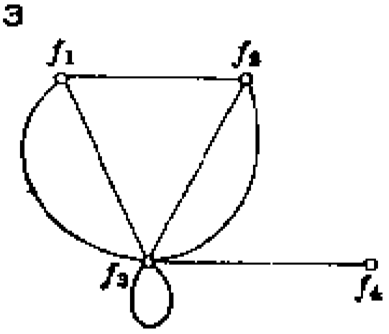
所以 k 为奇数.

11 仿照例四并利用上题.

12 作 n 个点 1、2、…、n. 若 i 与 j 在同一张卡片上，就在 i 与 j 之间连一条边，这时边就对应卡片. 因为每一个数出现两次，所以每个顶点的次数均为 2（包括环），故每一连通分支都是圈. 对每一个圈 $(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k)$，将各段边相应的卡片适当放置，使得向上一面为 i_1、i_2、…、i_k 即可.

本题也可以用归纳法来解. 若有写上 $(n,\ n)$ 的，则结论立得. 若只有 $(n,\ i)$，$i\neq n$，则取去写上 $(n,\ i)$ 的那一张卡片，将剩下的卡片中的 n 改为 i，由归纳假定可使剩下的 $n-1$ 张卡片的正面为 1、2、…、$n-1$. 如果其中 i 不是改写的，则将取去的卡片添上，并且使它的正面为 n. 如果其中出现的 i 是改写过的，则将这个 i 仍写成 n，然后添上取去的卡片，使它的正面为 i.

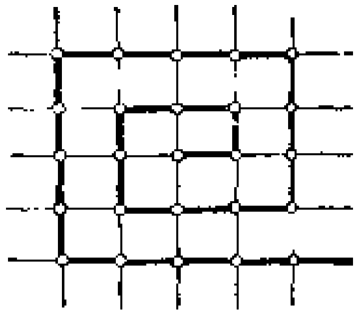
13



（第 13 题图）

14 将奖品全部放在奇数上。

15



（第15题图）

16 至少要去掉 $n'(n-n')$ 条边。

17 需要 $k-1$、k 或 $k+1$ 笔。

18 用点表示人，如果两个人交换过意见，就在相应的两个点之间连一条边，这样得到一个简单图 G。显然每个点的次数不小于 δ。要证明的结论是 G 有一个圈的长度大于 δ。为此，取一条最长的链 μ，设 μ 的一个端点为 v_1，则与 v_1 相邻的 δ 个点 v_2、v_3、…、$v_{\delta+1}$ 均在链 μ 上，否则 μ 还可以延长。沿着链 μ 走过 v_2、v_3、…、$v_{\delta+1}$，然后再回到 v_1，这就是一个长度大于 δ 的圈。

19 对顶点的个数 n 用归纳法。$n=1$ 时，结论显然成立。设对 n 个顶点的图，命题成立。那么，对于有 $n+1$ 个顶点，k 个连通分支的图 G，在顶点个数 >1 的连通分支中去掉一个顶点 v 后得到有 n 个顶点，k' 个连通分支的图 G'，其中 $k'\geqslant k$。显然该连通分支中最多只有 $n+1-(k-1)$ 个点，因而去掉 v 至多去掉 $n-(k-1)$ 条边，G 的边数 $m\leqslant G'$ 的边数 $m'+(n-k+1)$

$$\leqslant\frac{1}{2}(n-k')(n-k'+1)+(n-k+1)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)+(n-k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+2).$$

另一种证法是设 G 的连通分支 G_i 有 n_i 个顶点（$1\leqslant i\leqslant k$），利用

$$C^2_{n_1+n_2-1}-(C^2_{n_1}+C^2_{n_2})=(n_1-1)(n_2-1)\geqslant 0$$

得
$$\sum_{i=1}^{k}C^2_{n_i}\leqslant C^2_{\sum n_i-k+1}=C^2_{n-k+1}=\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

等号当且仅当 G 由 $k-1$ 个孤立点及一个完全图 K_{n-k+1} 组成时成立。

20 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)<$ 边数 $m\leqslant\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$，所以 $k<2$ 即 $k=1$，G 是连通的。

21 $G=K_n$。因为如果 $G\neq K_n$，那么 G 有两个不相邻的顶点 v 与 v'，将其余的 $n-2$ 个顶点全部去掉后，剩下的图是不连通的。

22 利用例五。

23 用点表示人，两个人互相认识时，在相应的点之间连一条边，所得的图 G 有 n 个顶点，并且具有性质 (1) 没有三角形，(2) 每两个不相邻的顶点恰在一个四边形的圈上。

设顶点 x 的次数为 k，与 x 相邻的顶点为 v_1、v_2、…、v_k。对任一对 (i,j)，

$1\leqslant i\neq j\leqslant k$，由(1)$v_i$与$v_j$不相邻，由(2)$v_i$与$v_j$在一个四边形上，这四边形的一个顶点即$x$，另一个顶点记为$y_{ij}$，则由(1)$y_{ij}$与$x$不相邻，由(2)在$(i,j)\neq(s,t)$时，$y_{ij}\neq y_{st}$。因此与$x$不相邻的顶点个数$\geqslant C_k^2$。

另一方面，由(2)，与x不相邻的顶点个数$\leqslant C_k^2$。所以与x不相邻的顶点个数为C_k^2。从而

$$1+k+C_k^2=n.$$

这是k的二次方程，它的常数项与二次项系数异号，所以只有一个正根。因此所有点的次数相等。

24 $k=2$时，$1+k+C_k^2=4$，$k=3$时，$1+k+C_k^2=7$，$k=4$时，$1+k+C_k^2=11$。因此当$n=5$，6，8，9，10时，方程$1+k+C_k^2=n$无解。

当$n=7$时$k=3$，但一个图的奇顶点个数是偶数，所以有7个奇顶点的图不存在。

25 A、B之间至少有10条无公共边的链(按照边连通的意义，这图是10连通的)，每条链上应有10个电阻，所以至少要$10\times10=100$个电阻。

26 设蜗牛回到原处。如果在爬行过程中蜗牛向东爬了n次，那么它也一定向西爬了n次，所以在东西方向上爬了$2n$次。而蜗牛交错地向东西方向和南北方向爬行，所以在南北方向上也爬了$2n$次。共爬了$4n$次，所以恰好用了n个小时。

27 设这个闭折线自身相交的交点数为m。我们来计算闭折线的节数。首先，过每一交点只能有两个节，否则过这点的每一节与折线相交将多于一次。其次，折线的每一节只能有一个交点。因此节数应是交点数的两倍，所以节数是偶数。

28 以城市为点，铁路为边得一图G，去掉边e_1、e_2后的图记为G'，从G'再去掉$k-2$条边后所得的图记为G''。如果在图G''中，v_1、v_2之间没有链相连，添上边e_1，得图G'''。G'''只比G少$k-1$条边，因而在G'''中，v_1与v_2有链相连，从而G''有一条从v_2到v_3的链(否则在G'''中，v_1与v_2仍然没有链相连)，但没有从v_1到v_3的链(否则在G''中，v_1与v_2已经有链相连)，因此G''添上边e_2后，v_1与v_2仍然没有链相连，但这图只比G少$k-1$条边，根据已知，v_1与v_2应当有链相连，矛盾！

习题三解答

1 G的生成树有$n-1$条边。

2 设G有k个连通分支，各分支的顶点数分别为n_1、n_2、…、n_k。每一个分支没有圈，所以都是树，边数分别为$n_i-1(i=1,2,\cdots,k)$，因此G的边数为

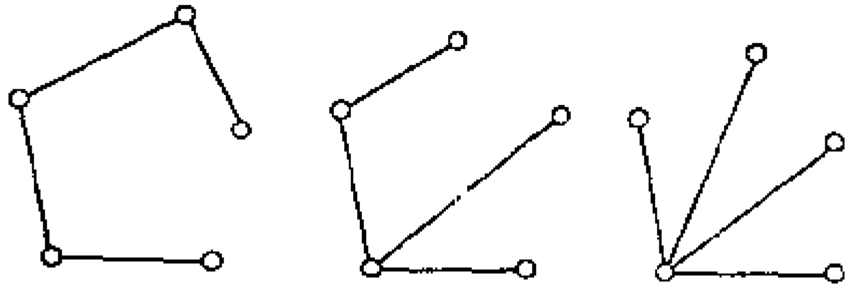
$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k$$

(这也就证明了例五中森林的边数为 $n-k$ 的结论)。根据已知，G 的边数为 $n-1$，所以 $k=1$，即 G 是连通的。

3 图 G 没有圈，否则可移去圈上的一条边，G 仍保持连通。

4 图 G 是连通的，否则在两个不同的连通分支之间连一条边不会产生圈。

5 根据定理三，K_5 有 $5^{5-2}=125$ 个生成树。根据顶点的最高次数分析，可知其中互不同构的生成树只有三种，即



(第 5 题图)

6 无圈图即森林的边数 $=n-k<n$。

7 如果每个顶点的次数大于 1，则图 G 不是树(定理一)，因而 G 有圈，可以在圈上去掉一条边仍保持连通。

8 G 的生成树有两个悬挂点，去掉这两个点后 G 仍然连通。

9 用归纳法。$n=2$，3 时显然，设命题对 $n-1$ 是成立的。又设 v_{i_1} 为 v_1、v_2、…、v_n，(1) 中第一个不在 $(v_{j_1}, \cdots, v_{j_{n-2}})$ 中出现的数。根据归纳假设，由序列 $(v_{j_2}, \cdots, v_{j_{n-2}})$ 构造出的有 $n-1$ 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, \cdots, v_n$ 的图 T' 是一个树，并且 $c(T')=(v_{j_2}, \cdots, v_{j_{n-2}})$。

由于 v_{j_1} 必在 $v_1, v_2, \cdots, v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, \cdots, v_n$ 中出现(因为 $v_{j_1}\neq v_{i_1}$)，所以 v_{j_1} 在 T' 中，而边 (v_{i_1}, v_{j_1}) 连接在 T' 的顶点 v_{j_1} 上，所以 T 是树，并且 $\sigma_{(T)}=(v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_{n-2}})$。

10 用反证法。每一个学生用一个点 $v_i(1\leqslant i\leqslant 10)$ 表示，如果命题不成立，那么对每一个题目 $h(1\leqslant h\leqslant 10)$，如果去除 h 后，就可以找到一对学生 v_i 与 v_j，做对的题目相同，这就不妨设原来 v_i 比 v_j 恰好多做一道题 h(如果有好几对这样的学生，我们任取其中的一对)，在这样的一对点 v_i 与 v_j 之间连一条边，并且标上数 h，于是得到一个有 10 个顶点 10 条边的图，并且这 10 条边上标上了 10 个互不相同的数。

由第 6 题我们知道 G 一定有圈。设 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, v_{i_1})$ 为一个圈，那么沿着这个圈前进时，每通过一条边就相当于解出的题目增加或减少了一道，并且增减的题是互不相同的题目，由于沿着圈绕行一周后仍回到 v_{i_1}，这就是说由 v_{i_1} 做对的题增加一些题再减少另一些题，最后的结果和 v_{i_1} 原来做对的题完全相同，

这显然是矛盾的.

11 解法和上题完全一样.

12 完全图就是直径为 1 的简单图.

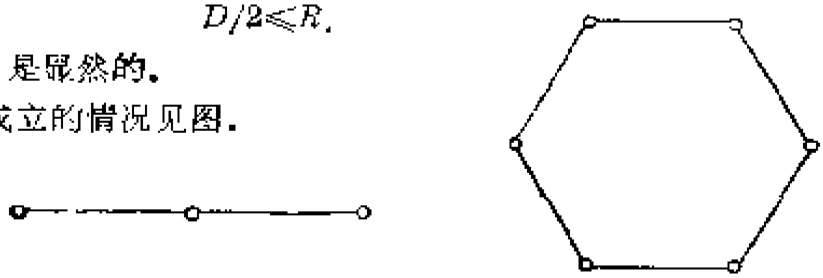
13 设 u 为中心, R 为半径, D 为直径, 那么

$$d(v, v') \leqslant d(v, u) + d(v', u) \leqslant R + R = 2R.$$

所以 $$D/2 \leqslant R.$$

$R \leqslant D$ 是显然的.

等号成立的情况见图.



(第 13 题图)

14 $M_1 \geqslant M_2$. 用 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的那个人的身长, 问题就是证明 $\min\limits_i \max\limits_j a_{ij} \geqslant \max\limits_j \min\limits_i a_{ij} = a_{i_0 j_0}$.

因为 $$\max_j a_{ij} \geqslant a_{ij_0} \geqslant \min_i a_{ij_0} = a_{i_0 j_0},$$

所以 $$\min_i \max_j a_{ij} \geqslant a_{i_0 j_0}.$$

15 如果 G 无圈, 那么 G 是树, 由例九, 半径 < 直径, 除非直径 $q=1$, 但直径为 1 的树只有两个顶点.

16 (1) 中心为 v_{n+1}, 半径为 n, 直径为 $2n$.

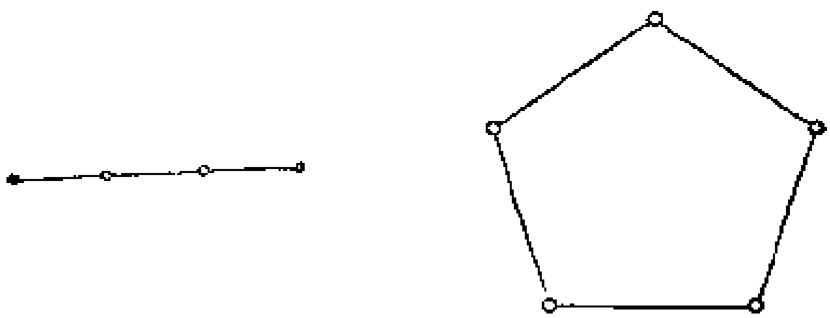
(2) 中心为 v_n 与 v_{n+1}, 半径为 n, 直径为 $2n-1$.

(3) 每一点都是中心, 半径与直径都等于 n.

(4) 每一点都是中心, 半径与直径都等于 $n-1$.

17 设在图 G 中, v 与 v' 之间的距离为最大, 那么 v 与 v' 是不相邻的(否则 G 的直径为 1), 并且任一顶点 v'' 不能与 v 及 v' 均相邻(否则 G 的直径为 2). 因此在 $\overline{G}$ 中, 任一顶点 v'' 必与 v 或 v' 相邻, 从而任意两个点之间的距离 $\leqslant 3$.

18 利用上题可知 G 的直径为 2 或 3. 例子见图.



(第 18 题图)

19 每一个圈都可以分成若干个无公共边的初级圈.

20 用归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 显然. 设当 $n=k$ 时命题成立. 当 $n=k+1$ 时, 设在第一场比赛中选手 v_0 被 v_i 淘汰($1\leqslant i\leqslant k$), 则由归纳假设 v_1、v_2、…、v_k 组成的图是树, 添上一条边(v_i, v_0)仍然是树.

树的边数为 $n-1$, 即共需进行 $n-1$ 场比赛.

21 每"长"一次, 增加的悬挂点为 4 的倍数, 因此悬挂点的个数应为 $4k+1$, k 为自然数. 所以不能得到 1002 个悬挂点. 可以得到一个 1001 个悬挂点的树, 这只要每次在第一个顶点处引 5 条边, 引 250 次即可.

22 这个图应当是树 (取掉任一条边就分成两个连通分支), 而且应当是仅有两个顶点的树, 因为去掉悬挂点所引出的边后, 一个连通分支由一个点组成, 所以另一个同构的连通分支也仅由一个点组成.

23 每个方格可作为一个点, 相邻的方格就是相邻的点. 这个图的直径为 $7+7=14$.

每点标上一个数 1~64. 如果经过一条边, 数至多加 4, 则任两点所标上的数的差 $\leqslant 4\times 14=56$.

但是 $64-1=63$, 矛盾.

24 其中有 $9\times 9=81$ 个次数为 4 的顶点, 故至少要去掉 $\left[\frac{81}{2}\right]+1=41$ 条边, 才能使每点次数 <4. 至多可以去掉

$$2\times 11\times 10-120=100$$

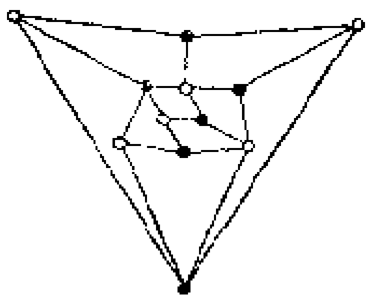
条边, 还可以使图保持连通(这时图成为 120 条边的树).

习题四解答

1 只要证明如果 G 有 $2n+1$ 个顶点, 并且不含三角形, 那么 G 至多有 n^2+n 条边. 证法与例二相同.

2 作完全偶图 $K_{n+1,n}$.

3 G_1'、G_2'、G_3'、G_4'、G_5' 的边数分别为 4、12、8、24、20. 以 G_5' 为例, 为了使相邻的顶点具有两种不同的颜色, G_5 的每个面(三角形)都至少要去掉一条边, 20 个面(包括最外面含 ∞ 的那个面)至少要去掉 10 条边(每一条边属于两个面), 所以 G_5' 至多有 20 条边. 我们可以先确定要去的边, 然后再将顶点涂上白色与黑色(见图).



(第 3 题图)

4 因为 $\delta|X|=\delta|Y|=$总边数, 所以 $|X|=|Y|$.

5 如果 Y 中每点的次数均不大于 δ, 那么 G 的边数 $m\leqslant\delta|Y|<\delta|X|\leqslant m$, 矛盾.

6 甲(乙)手中的牌如果不是乌龟，它的对子必定在乙(甲)手上，因此两人手中的牌恰好相差一牌乌龟，即谁手中的牌多(一张)，乌龟就在谁的手上.

7 作偶图 $G=(X、Y、E)$. X 的点是 A 的子集，共 $2^{10}=1024$ 个. Y 的点是 k 个两位数的和($1\leqslant k\leqslant 10$)，显然 $|Y|<10\times 100=1000$. 如果 A 的一个子集 x_i 中的两位数的和等于 y_j，就在 x_i 与 y_j 之间连一条边. 由于 $|X|>|Y|$，根据第 5 题或抽屉原则，必有两个不同的点 x_{i_1}、x_{i_2} 与同一个 y_j 相邻. 将这两个子集 x_{i_1} 与 x_{i_2} 的公共元素去掉，所得的子集 x'_{i_1} 与 x'_{i_2} 就是所要求的子集.

8 利用例六.

9 G 的边数 $\frac{n\delta}{2}$ 是整数，所以 n 与 δ 中必有一个是偶数. 反之，如果 n 与 δ 中有一个是偶数，可以作出一个有 n 个顶点的 δ 正则图. 这只要假定 n 个顶点在同一个圆周上并且将圆周等分为 n 份，两相邻点间的弧距为 1，然后将弧距为 i $\left(1\leqslant i\leqslant\left[\frac{\delta}{2}\right]\right)$ 的所有点连起来，在 δ 为奇数时(此时 n 为偶数)，将弧距为 $\frac{n}{2}$ 的点也互相连起来. 这样得到的图就是合乎要求的.

10 用 16 个顶点代表 16 个格子，如果两个格子在同一行或同一列，我们就在相应的两个顶点之间连一条线. 由已知条件显然每个顶点的次数都是 2，因此根据 §2 定理二 G 是由若干个圈组成的. 而每个圈的长都是偶数(如果顶点就取在每个格子的中心，显然圈上的边是横竖相间的)，因此根据例六，G是偶图，色数为 2.

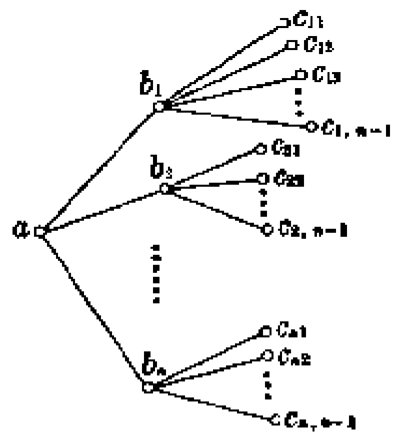
本题可将 64 改为 n^2，16 改为 $2n$.

11 (1)与顶点 a 相邻的点有 n 个，这 n 个点互不相邻(否则 $g\leqslant 3$)，设其中之一为 b，与 b 相邻的点又有 n 个，这 n 个中可能包含 a，但不会有上述 n 个中的点. 所以至少有 $2n$ 个顶点.

或用例二，因为 $g=4>2$，所以 G 是简单图. 设 G 含 p 个顶点，因为 G 不含三角形，根据例二后面的推广结论，G 的边数 $\frac{np}{2}\leqslant\frac{p^2}{4}$，$\therefore p\geqslant 2n$.

完全偶图 $K_{n,n}$ 就是顶点数恰好为 $2n$ 的例子.

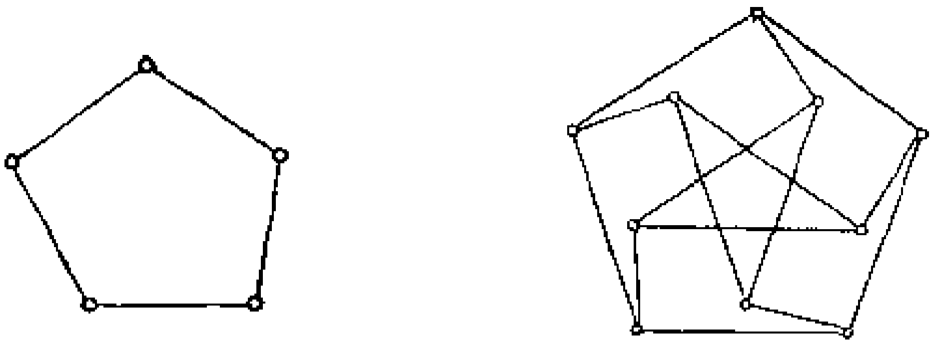
(2)设顶点 a 与 b_1、b_2、…、b_n 相邻，b_i 与 c_{i1}、c_{i2}、…、$c_{i,n-1}$ 及 a 相邻 ($i=1, 2, \cdots, n$)，则 b_j(当 $j\neq i$ 时)与 c_{ik} 不相邻，否则 $g\leqslant 4$. 因此 G 至少有 $1+n+n(n-1)=n^2+1$ 个顶点(见图).



(第11题图)

12 上题(2)中不可能再有新的点 d，否则 a 与 d 的距离至少为 3.

$n=2$ 与 3 的图如下



$n=2$　　　　　　　　$n=3$

(第12题图)

$n=3$ 的图称为彼得森(Petersen)图. 1960 年 Hoffman 与 Singleton 证明有三种满足题设条件的图，其顶点数 $n=2$、3、7，此外仅有顶点数 $n=57$ 的图可能满足条件，但直到现在还没有被证实或推翻它的存在性.

13 在每一次表演中男孩 a 与两个女孩相邻，而女孩只有六个，因此至多只能表演三次. 表演三次也是可以做到的，具体安排为 $a\bar{a}b\bar{b}c\bar{c}d\bar{d}e\bar{e}f\bar{f}$，$a\bar{c}b\bar{d}c\bar{e}d\bar{f}e\bar{a}f\bar{b}$ 与 $a\bar{e}b\bar{f}c\bar{a}d\bar{b}e\bar{c}f\bar{d}$.

14 即例三.

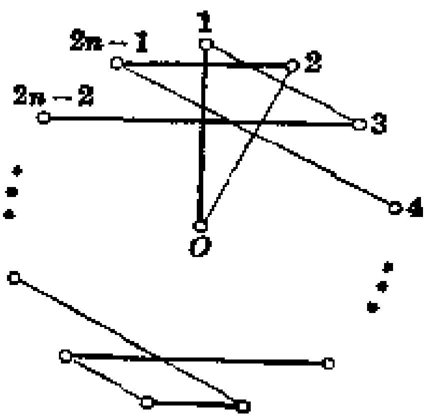
15 用归纳法. 假设命题在 $|Y|<m$ 时成立，我们来证明命题在 $|Y|=m$ 时也成立. 如果是定理一的证明中的情况(1)，对取定的 y_1，与它相邻的 x_i 至少有 t 种选择，因此由归纳假设，在 $t\leqslant m$ 时至少有 $(t-1)!\times t=t!$ 个不同的 SDR，在 $t>m$ 时至少有 $(t-1)!/(t-m)!\times t=t!/(t-m)!$ 个不同的 SDR.

如果是情况(2)，因为与 k 个 y_j 相邻的 x_i 至少有 t 个，所以 $t\leqslant k\leqslant m-1$，由归纳假设在 G_1 中至少可以得到 $t!$ 个不同的 SDR，所以在 G 中至少可以得到 $t!\times 1=t!$ 个不同的 SDR.

16 先用例七，作出 G'. 由例十，G' 有一个完全对集，这个对集在 G 中的部分吸收了 G 的所有次数为 δ 的顶点.

17 对 δ 用归纳法. $\delta=0$ 时命题显然成立. 假设命题对 $\delta-1$ 已经成立. 由上题，有一个对集吸收了 G 的所有次数为 δ 的顶点，将这个对集去掉得图 G''，G'' 的最大次数为 $\delta-1$，由归纳假定，G'' 的色指数为 $\delta-1$，从而 G 的色指数为 δ.

18 因为每个人有 $2n-1$ 个同学，所以散步至多持续 $2n-1$ 天. 我们证明只要适当安排，确实可以持续散步 $2n-1$ 天.



(第18题图)

为此作图，用 0、1、…、$2n-1$ 表示 $2n$ 个学生，第一次散步用粗边表示，然后

绕 O 点旋转，每次转过的角度为 $\frac{2\pi}{2n-1}$，这样就得到了 $2n-1$ 次散步（第二次散步用细边表示，…）.

注意实际上我们已经证明了 K_{2n} 的色指数等于 $2n-1$（一次散步也就是 K_{2n} 的一个完全对集，这个完全对集中的边涂上同一种颜色）.

19 K_{2n-1} 再加上一个点 x_{2n} 及 $2n-1$ 条边 (x_{2n}, x_i)，$i=1, 2, \cdots, 2n-1$，便成为完全图 K_{2n}，由上一题可知

$$K_{2n-1} \text{ 的色指数} \leqslant 2n-1.$$

另一方面，对于 K_{2n-1}，每一种颜色至多可涂 $n-1$ 条边，C_{2n-1}^2 条边至少需要用 $C_{2n-1}^2 \div (n-1) = 2n-1$ 种颜色.

所以 K_{2n-1} 的色指数为 $2n-1$.

习题五解答

1 因为 $3f \leqslant 2m$，根据欧拉公式 $n-m+f=2$ 得 $n-m+\frac{2}{3}m \geqslant 2$，所以 $m \leqslant 3n-6$.

2 对每个连通分支有 $n_i-m_i+f_i=2(i=1, 2, \cdots, k)$，相加，由 $n=\sum n_i$，$m=\sum m_i$，$f=\sum f_i-(k-1)$，（含有 ∞ 的面是各个连通分支共有的，所以多算了 $k-1$ 次要扣除），所以 $n-m+f=k+1$.

3 根据欧拉公式，由 $n=6$，$m=12$ 推得 $f=8$，平均每个面有边 $\frac{2m}{f}=3$ 条. 由于每个面至少有三条边，所以每个面恰有三条边.

4 设各面的边数为 $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_f$，由于第 f 个面和余下的 $f-1$ 个面中每个面至多只有一条公共边，故 $m_f \leqslant f-1$，于是 f 个 m_i 至多有 $f-1$ 个不同的值：1、2、…、$f-1$，根据抽屉原则，其中必有两个值是相同的.

5 图 $\overline{G}$ 有八个顶点，十九条边. 因为

$$3 \times 8-6=18<19.$$

根据第 1 题，$\overline{G}$ 不是平面图.

6 (1) 设 G 不是平面图，如果 G 中含有 K_5 或 $K_{3,3}$，从而 $\overline{G}$ 中有五个点互不相邻，或有两个三角形第一个三角形与第二个三角形的顶点是不相邻的. 前一种情况再加上两个顶点及十条边，后一种情况再加上一个顶点及六条边仍然是平面图. 如果 G 收缩后含 K_5 或 $K_{3,3}$，仿此.

(2) 因为 $m+\overline{m}=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，所以 m 或 $\overline{m}$ 中有一个 $\geqslant \frac{n(n-1)}{4}$. 当 $n \geqslant 11$ 时可以证明 $\frac{n(n-1)}{4}>3n-6$，从而 G 与 $\overline{G}$ 中至少有一个不是平面图.

实际上可以证明在 $n>8$ 时，G 与 $\overline{G}$ 中至少有一个不是平面图. 这里从略.

(3) (a) $K_{4,4}$ 不是平面图而它的补图是平面图.

$$n-2 \geqslant \frac{g-2}{g} \cdot m.$$

在腰围为∞时，无圈，$f=1$，

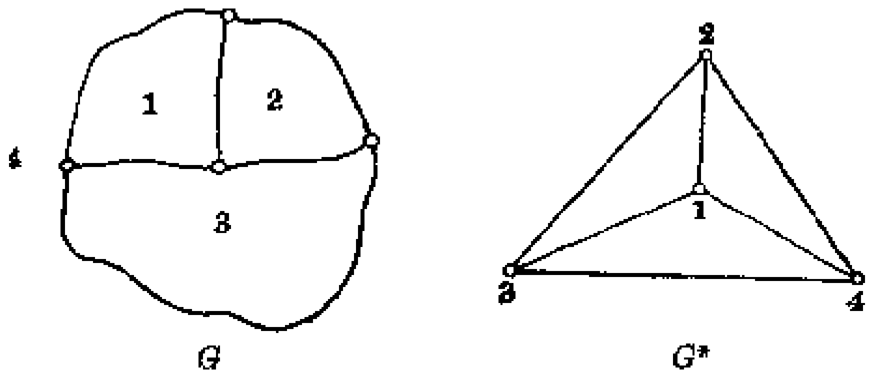
$$m=n-2-f<n-2.$$

10 解法一：因为 $g=5$, $m=15$, $n=10$，所以 $m>g(n-2)/(g-2)$。根据上题，彼得森图不是平面图。

解法二：显然平面图经过任意收缩后仍为平面图。Peterson 图经过收缩后可变为 K_5，因此它不是平面图。

11 考虑对偶图，由于 K_5 不是平面图，所以 $f\leqslant 4$。

12 图中的 G 即为所求，其对偶图为 G^*。



(第 12 题图)

13 仿照例六，或者注意它的每一个顶点都是偶顶点，利用例七即可。

14 (1) 由 $2m\geqslant 3n$ 及 $n-m+f=2$ 得 $f\geqslant 2+\frac{m}{3}$。因为 $f<12$，所以 $m<30$。如果每一个区域的边数都不少于 5，那么 $5f\leqslant 2m$，从而 $\frac{2}{5}m\geqslant 2+\frac{m}{3}$ 即 $m\geqslant 30$，矛盾。如果没有 $f<12$ 的条件，根据例三可得出有一个区域的边数少于 6。

(2) 对 f 用归纳法。假定对面数$\leqslant f-1$ 的地图命题成立，设 G 为具有 f 个面的图，$f<12$ 并且每一个顶点的次数至少为 3。由 (1)，G 中有一个区域 A 的边数$\leqslant 4$，故与 A 相邻的区域至多 4 个。如果与 A 相邻的区域少于 4，将 A 缩为一点，所得的图 G' 根据归纳假设是 4 色的，从而原来的图 G 也是 4 色的，这只要将 A 涂上与相邻的区域(至多三个)不同的颜色就可以了。如果与 A 相邻的区域恰好有 A_1、A_2、A_3、A_4 四个，由第 11 题，这四个区域中一定有两个区域，不妨设为 A_1、A_2，是互不相邻的。将 A、A_1、A_2 合并为一个区域后，所得的图 G' 根据归纳假设是四色的，从而原来的图 G 也是四色的，这只要将 A_1、A_2 保持它们在 G' 中的颜色，将 A 涂上与 A_1、A_3、A_4 都不同的颜色就可以了。

15 设有 $q+1$ 种颜色。先任取一个顶点涂上第一种颜色。假定已经有 k 个顶点涂上了颜色，对第 $k+1$ 个点 v，与 v 相邻并且已经涂色的顶点不超过 q 个，因之它们所涂的颜色种数不超过 q，将 v 涂上与这些点颜色均不同的一种颜

色．这样就可以将图 G 的每一个顶点都涂上颜色，并且相邻的顶点颜色不同。

16 将 G 的顶点涂上红、黄、蓝、白四种颜色，使相邻的顶点颜色不同．对任一条边 (v_i, v_j)，根据下表将它涂上红色或蓝色：

v_i	v_j			
	红	黄	蓝	白
	(v_i,v_j)			
红		蓝	红	红
黄	蓝		红	红
蓝	红	红		蓝
白	红	红	蓝	

G 中任意一个三角形的三个顶点颜色不同，可以分为三种情况(1)没有黄的，有一个红的．(2)没有红的，有一个黄的．(3)既有红的顶点又有黄的顶点．不管是哪一种情况，根据上表，命题都成立．

17 K_{q+1} 的色数为 $q+1$．

18 如果 G 含有一个长为奇数的圈，则它的色数等于 3，否则它的色数等于 2．

19 平面图的子图仍然是平面图，根据例题三，每个子图都有一个顶点的次数 $\leqslant 5$，所以 $s\leqslant 5$．

20 如果 G 仅由一点组成，$s=0$．否则 $s=1$．

21 G 含有一个圈，因此 $s\geqslant 2$．

22 仿照例题十，现在 G 由 $N+1$ 个子图 G_i 组成，对每个 G_i 有 $m_i\leqslant 3n-6$，因此

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_{N+1}\leqslant 3(N+1)n-6(N+1)．$$

对于 G'，$s\leqslant\frac{2m}{n}<6(N+1)$，所以 G' 的色数 $\leqslant 6(N+1)$．

习题六解答

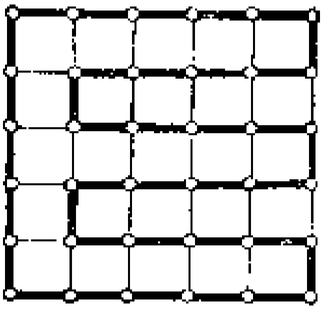
1 甚易．

2 如果有哈密尔顿圈，那么根据定理二，$|X|=|Y|$，因此顶点数 $n=|X|+|Y|=2|X|$ 是一个偶数．

3 均有哈密尔顿圈．

4 当 n 为奇数时，有哈密尔顿链，无哈密尔顿圈（利用第 2 题）。

当 n 为偶数时，有哈密尔顿圈（见图）。



（第 **4** 题图）

5 这是一个偶图，可以利用第 2 题.

6 每一个内部的顶点仅与一个外部的顶点相连，每一个外部的顶点也仅与一个内部的顶点相连。所以不会有含外内外或内外内的链，因此如果有哈密尔顿圈，一定是内内内内内外外外外外或内外外外内内内外外内，不难验证这两种情况都是不可能发生的。

移去一个顶点显然有哈密尔顿圈.

7 如果有哈密尔顿圈，则由定理四有

$$3(f_5'-f_5'')+6(f_8'-f_8'')-7(f_9'-f_9'')=0.$$

（$i\neq 5$、8、9 时，$f_i'=f_i''=0$）。因此 f_9' 与 f_9'' 的差是 3 的倍数，这与 $f_9'+f_9''=1$（最外面的一个面即包含 ∞ 的面是“九边形”）矛盾.

8 由定理四有

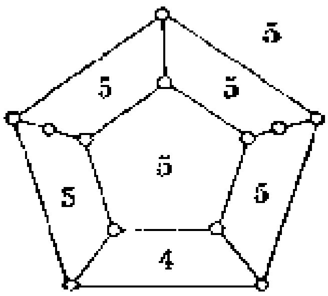
$$2(f_4'-f_4'')+3(f_5'-f_5'')=0.$$

所以 $f_4'-f_4''$ 是 3 的倍数，即五个四边形中有四个在圈外，一个在圈内或者有四个在圈内，一个在圈外. 如果这个圈既过 e_1 又过 e_2，那么 e_1 两侧的两个四边形分别在圈的内部与外部，同样 e_2 两侧的两个四边形也分别在圈的内部与外部，从而圈内与圈外均至少有两个四边形，矛盾.

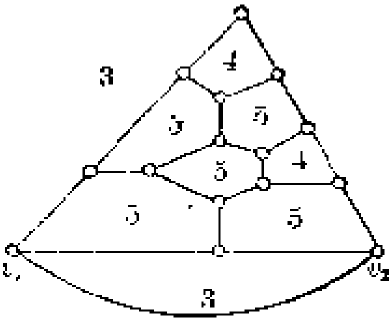
又解 在 e_1、e_2 上各增加一个顶点 v_1、v_2（见图），则共有 6 个五边形及一个唯一的四边形，如果原图有既过 e_1 又过 e_2 的哈密尔顿圈，则它们也是新图的哈密尔顿圈，由定理四

$$2(f_4'-f_4'')+3(f_5'-f_5'')=0.$$

从而 $f_4'-f_4''$ 为 3 的倍数，这与 $f_4'+f_4''=1$ 矛盾.



（第 **8** 题图）



（第 **9** 题图）

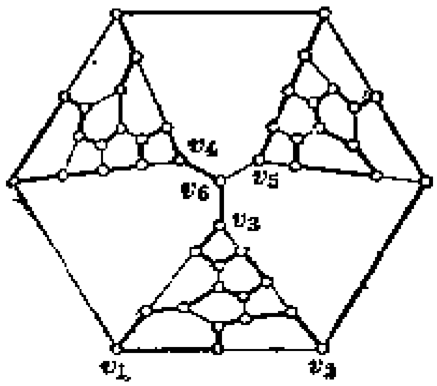
9 添上一条边 (v_1, v_2)（见图），如果原图有一个从 v_1 到 v_2 的哈密尔顿链，那么新图有一个哈密尔顿圈. 由定理四，

$$(f_3'-f_3'')+2(f_4'-f_4'')+3(f_5'-f_5'')=0.$$

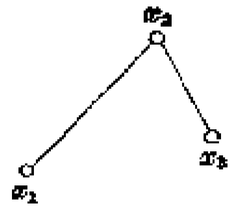
因为 $f_3'+f_3''=2$，所以 $f_3'-f_3''$ 也是 2 的倍数，于是从上面的等式得出 $f_5'-f_5''$ 是 2 的倍数，这与 $f_5'+f_5''=5$ 相矛盾．

10 假设有一个哈密尔顿圈，那么 (v_6, v_3)，(v_6, v_4)，(v_6, v_5) 这三条边中必定有一条边不在圈上，不妨设 (v_6, v_3) 不在圈上，那么由 $\triangle v_1v_2v_3$ 及由内部所构成的图有一个从 v_1 到 v_2 的哈密尔顿链，这与上一题矛盾．

这个图有哈密尔顿链，图中粗线标出的就是一条．



（第 10 题图）



（第 11 题图）

11 只要作一个无哈密尔顿圈的图，那么它的闭包也没有哈密尔顿圈，因而不是完全图．上右图就是一个最简单的例子（其闭包为自身）．

12 问题即完全图 K_n 中有多少个没有公共边的哈密尔顿圈．由于每个圈有 n 条边，所以至多能进行 $[C_n^2/n]=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 次．我们采用与习题四第 18 题相似的方法来证明确实有 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个无公共边的哈密尔顿圈．先设 $n=2k+1$，将顶点 0、1、2、⋯、$2k$ 排列如图．先取一个哈密尔顿圈，

$(0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1, 4, \cdots, k+3, k, k+2, k+1, 0)$

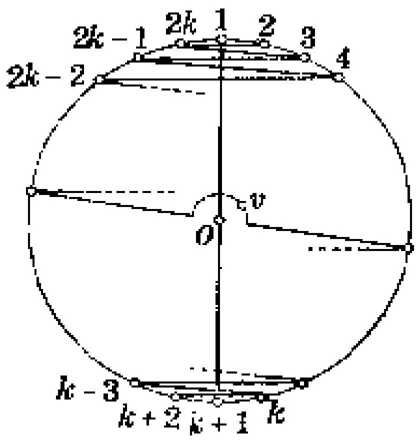
然后绕 O 点旋转得

$(0, 2, 3, 2k+1=1, 4, 2k, 5, \cdots, k+2, 0)$，

…………

共产生 $k=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个无公共边的哈密尔顿圈．

如果 $n=2k+2$，那么每次在中间添加一个顶点 v，同样有 k 个哈密尔顿圈．

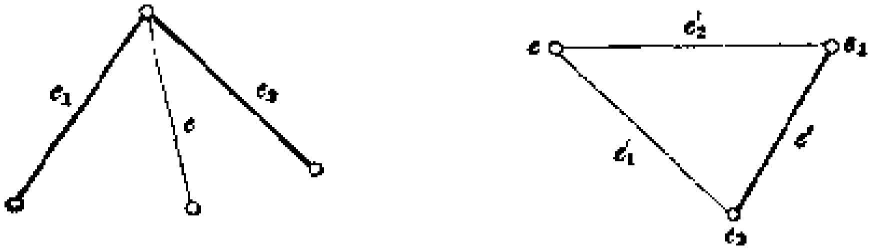


（第 12 题图）

13 在 G' 中，与 G 的哈密尔顿圈 μ 上的边相对应的顶点构成一个圈 μ'．

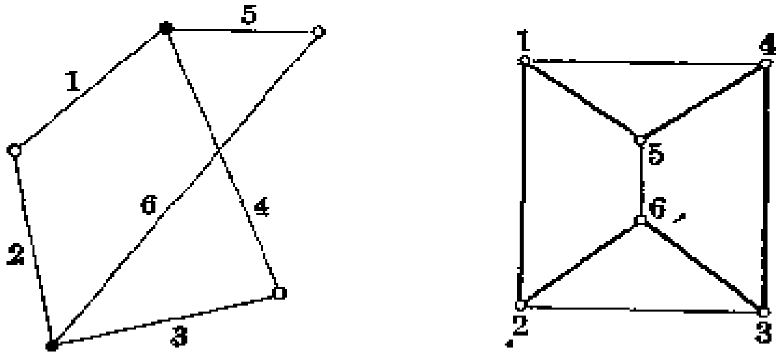
设 G' 有一个点 e 不在 μ' 上，那么在 G 中，有一条边 e 不在 μ 上，e 与 μ 上的两条边 e_1、e_2 在同一个顶点相遇，因而在 G' 中相应的点 e 与 e_1、e_2 均相邻。将 μ' 的边 e' 换为边 e_1' 与 e_2'，就得到一个圈，它经过顶点 e 及 μ 的所有顶点。依此下去，可以得到一个 G' 的哈密尔顿圈(见图(a))。

反过来不对，如在图(b)中的 G' 显然有哈密尔顿圈(已用粗线表示)，但 G 是一个无哈密尔顿圈的偶图。



G G'

(a)



G G'

(b)

(第 13 题图)

14 首先让这些骑士依任意顺序围着圆桌坐下，这时可能有若干对仇人相邻，我们证明总可以经过调整，使得仇人的对数减少，方法如下：

设 A 与他的仇人 B 相邻，不妨假定 B 在 A 右边，A 的朋友至少有 n 个，而 B 的仇人至多有 $n-1$ 个，因此一定有一个 A' 存在，A' 是 A 的朋友并且 A' 右边的 B' 不是 B 的仇人(抽屉原则)。我们将 B 至 A' 这一部分的人的顺序颠倒过来，使 A 与 A' 相邻，B 与 B' 相邻。这样仇人的对数减少 1(如果 A' 与 B' 是朋友)或 2(如果 A' 与 B' 是仇人)。

于是经过有限次调整，一定可以使仇人的对数为 0。

如果把骑士作为点，朋友之间连上边，本题实际上是要证明所得的图有一个哈密尔顿圈，利用 Dirac 定理立即推出结论。上面的解法也就是把定理的证明重复了一遍，读者可自己细加比较。

习题七解答

1 (1) 设 G 有 $r_{(m,n)}$ 个顶点，那么 $\overline{G}$ 也有 $r_{(m,n)}$ 个顶点，所以图 $\overline{G}$ 中含有 K_m 或 $\overline{\overline{G}}=G$ 中含有 K_n，即

$$r_{(m,n)}\geqslant r_{(n,m)}.$$

同样可证在图 G 有 $r_{(n,m)}$ 个顶点时，图 G 中含有 K_m 或 $\overline{G}$ 中含有 K_n，即

$$r_{(n,m)}\geqslant r_{(m,n)}.$$

所以
$$r_{(n,m)}=r_{(m,n)}.$$

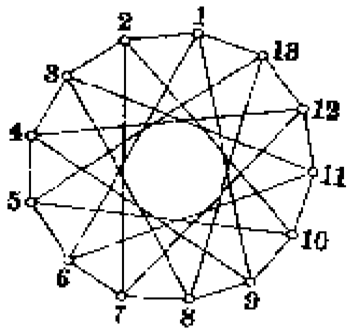
(2) 如果 G 是有 n 个顶点的图，那么有两种情况发生：如果 G 中有两个顶点是相邻的，这时 G 中含有 K_2。如果 G 中每一个顶点都是孤立点，那么 $\overline{G}$ 就是 K_n。所以我们有 $r_{(2,n)}\leqslant n$。又由 $n-1$ 个孤立点所成的图显然不含 K_2，它的补图也不含 K_n，所以 $r_{(2,n)}=n$.

(3) 证法与(2)类似。

2 用归纳法，并利用定理一得

$$r_{(m,n)}\leqslant r_{(m-1,n)}+r_{(m,n-1)}\leqslant C_{m+n-3}^{m-2}+C_{m+n-3}^{m-1}=C_{m+n-2}^{m-1}.$$

3 由例三，已知 $r_{(3,5)}\leqslant 14$，从下图可知 $r_{(3,5)}\geqslant 14$，所以 $r_{(3,5)}=14$。



（第 3 题图）

4 将第 3 题图补全为 K_{13}，并将原有的边涂上红色，补上的边涂上蓝色就得到所需要的图。

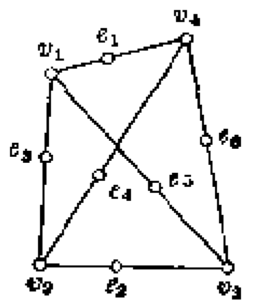
5 由定理一，$r_{(3,6)}\leqslant r_{(3,5)}+r_{(2,6)}-1=14+6-1=19$.

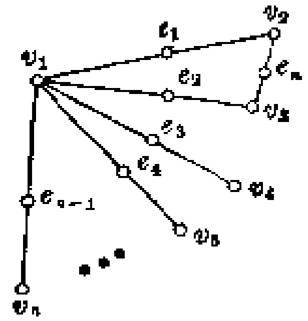
6 考虑一个以 1, 2, …, r_n（r_n 的意义见定理二）为顶点的完全图 G，将它的边涂上 n 种不同的颜色，涂的方法是当且仅当 $|x-y|$ 在第 i 类时，将 (x, y) 涂上第 i 种颜色，由定理二，G 中一定有一个同色的三角形，设这三角形的三边均为第 j 种颜色，那么在 1, 2, …, r_n 中有三个自然数 $a>b>c$，使 $x=a-c$, $y=a-b$, $z=b-c=x-y$ 均在第 j 类中。

这里的 r_n 当然只是一个粗糙的上界。

7 先作一个完全图 K_{m-2}，再将 K_{m-2} 的每一个顶点与另外的 $n-(m-2)$ 个顶点相连，就得到一个满足要求的图。

8 K_n 的导出图 L 有 C_n^2 个顶点，每个顶点的次数为 $2(n-2)$，对 L 的两个不相邻的顶点，恰有 4 个顶点与这两个顶点都相邻．若 L 的两个相邻的顶点，恰有 $n-2$ 个顶点与这两个顶点都相邻．可参看下图．





（第 8 题图）

9 以第一式为例．对 b 级完全图 $K_{n_1}^b$，如果它的 b 级边全是第一种颜色，那么 $K_{n_1}^b$ 本身就是一个同色的 b 级完全图 $K_{n_1}^b$．如果它有一条 b 级边 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_b})$ 为第二种颜色，那么由 $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_b}$ 组成的 b 级图 K_b^b（它只有一条 b 级边），是同色的完全图．因此

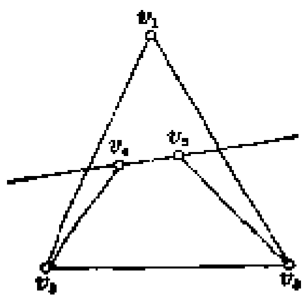
$$r_{(n_1,b;b)} \leqslant n_1.$$

又将 $K_{n_1-1}^b$ 的 b 级边全部涂上第一种颜色，那么显然它既不含有 b 级边全是第一种颜色的 $K_{n_1}^b$，也不含有 b 级边全为第二种颜色的 K_b^b．所以

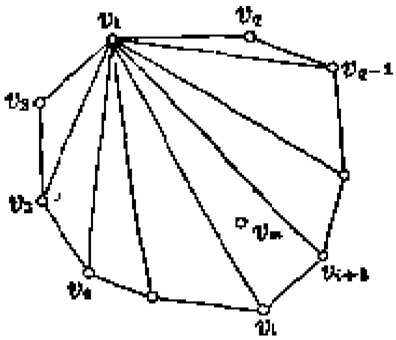
$$r_{(n_1,b;b)} \geqslant n_1.$$

因此
$$r_{(n_1,b;b)} = n_1.$$

10 由这五个点所决定的凸闭包（即包含这五个点的最小的凸多边形），如果是五边形或四边形，结论显然成立．如果是三角形，不妨设这个三角形为 $\triangle v_1v_2v_3$，另两个顶点 v_4、v_5 在 $\triangle v_1v_2v_3$ 内，那么 v_1、v_2、v_3 这三个点中必有两个在直线 v_4v_5 的同一侧．设 v_2、v_3 在直线 v_4v_5 的同一侧，那么 v_2、v_3、v_4、v_5 组成一个凸四边形（见图）．



（第 10 题图）



（第 11 题图）

11 设这 m 个点的凸闭包为 q 边形 $v_1v_2\cdots v_q$，如果 $q<m$，那么点 v_m 在 q 边形 $v_1v_2\cdots v_q$ 内部，从而在 $\triangle v_1v_2v_3$，$\triangle v_1v_3v_4$，…，$\triangle v_1v_{q-1}v_q$ 中的某一个的内部(见图)，这与已知四边形 $v_1v_iv_{i+1}v_m$ 是凸四边形相矛盾．所以 $q=m$，即这 m 个点组成一个凸 m 边形．

12 由例六，无限图 $G=(V,E)$ 中有任意多个两两相邻的顶点或者任意多个两两不相邻的顶点．

(1) 设图 G 中可以找出任意多个两两不相邻的顶点．

对每个顶点 v，存在点集 $V_1\subset V$，使 $v\in V_1$，并且 V_1 中的点两两不相邻(在 v 与每个点均相邻时，V_1 只含有一个点，即 v)，记 $|V_1|$ 的最大值为 $q_{(v)}$．

如果有某个 v，使 $q_{(v)}=\infty$，那么命题已经成立．

如果一切 $q_{(v)}<\infty$，那么可以在图 G 中找出两个相邻的顶点 v_1、v_2．假定已经找出点 v_1、v_2、…、v_k 两两相邻，那么取

$$n>q_{(v_1)}+q_{(v_2)}+\cdots+q_{(v_k)}.$$

在图 G 中有 n 个两两不相邻的顶点．由于 $q_{(v_1)}$、$q_{(v_2)}$、…、$q_{(v_k)}$ 均小于 n，所以 v_1、v_2、…、v_k 均不在这 n 个点中，并且这 n 个点中与 v_1 不相邻的至多有 $q_{(v_1)}-1$ 个，与 v_2 不相邻的至多有 $q_{(v_2)}-1$ 个，…，与 v_k 不相邻的至多有 $q_{(v_k)}-1$ 个，将这些点全部去掉，在剩下的

$$n-(q_{(v_1)}-1)-(q_{(v_2)}-1)-\cdots-(q_{(v_k)}-1)>0$$

个点中取一个点作为 v_{k+1}，则 v_1、v_2、…、v_k、v_{k+1} 两两相邻，这样继续下去，可以得到无限多个两两相邻的点．

(2) 如果 G 中可以找出任意多个两两相邻的顶点，可以用同样的方法处理．

习题八解答

1 (1) $\sum\deg^+v=\sum\deg^-v=|U|$．

(2) 由(1)得 $\deg^+v_1+\deg^+v_2=\deg^-v_1+\deg^-v_2$，所以

$$\deg^+v_1-\deg^-v_1=\deg^-v_2-\deg^+v_2,$$

从而 $\deg^+v_1-\deg^-v_1$ 与 $\deg^+v_2-\deg^-v_2$ 中恰有一个为 $+1$．

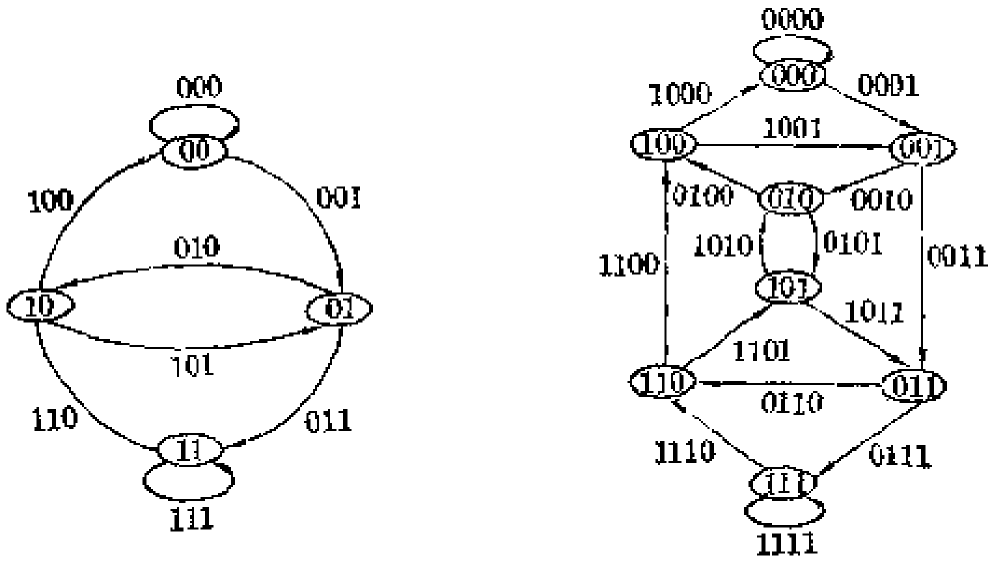
2 $\sum(\deg^+v)^2-\sum(\deg^-v)^2=\sum(\deg^+v+\deg^-v)(\deg^+v-\deg^-v)$
$=\sum(n-1)\cdot(\deg^+v-\deg^-v)=(n-1)\cdot[\sum\deg^+v-\sum\deg^-v]=0$．

其中 $n=|V|$．

3 逆着每条弧的方向旅行，由于没有回路，每个顶点至多走到一次，如果走到顶点 v'，而 v' 不是发点，则可以继续旅行，但顶点个数有限，必然在某一个顶点处旅行停止，这点就是发点．

4 用 n 个点表示 n 名棋手，如果 v_i 胜 v_j，我们就作一条从 v_i 到 v_j 的弧，这就得到一个有向图．如果没有回路，那么由第 2 题，必有发(收)点，这点就表示在比赛中全胜(负)的人．

5　$G_{2,3}$ 为 0001110100011101…, 相应的图为图(a).



(a)　　　　(b)

(第 5 题图)

$G_{2,4}$ 为 00001111011001010000111101100101…, 相应的图为图(b).

6　设 G 有回路$(v_1, v_2, \cdots, v_k)$，在 $v_2、v_3、\cdots、v_{k-1}$ 中，取第一个使弧(v_{i+1}, v_1)存在的 v_i，那么有弧(v_1, v_i)，因而(v_1, v_i, v_{i+1})就是一个三角形的回路.

7　设 $v_1、v_2、\cdots、v_n$ 中，v_p 的子孙后代最多，那么 v_p 就是这 n 个人的共同祖先，否则设 v_p 不是 v_q 的祖先. 那么 v_p 与 v_q 的共同祖先 $v_r \neq v_p$，而 v_r 的子孙后代至少比 v_p 多 1，矛盾.

8　(1) 如果有顶点 v 与 v'，满足 $\deg^+ v = \deg^+ v'$，我们来证明 G 中有一个回路为三角形.

不妨假定有弧(v, v')，并且从 v' 到顶点 $v_1、v_2、\cdots、v_k$ 各有一条弧，其中 $k = \deg^+ v'$. 那么必有一个顶点 $v_j (1 \leqslant j \leqslant k)$，从 v_j 到 v 有一条弧(否则 $\deg^+ v \geqslant k + 1 > \deg^+ v'$)，回路$(v, v', v_j)$就是一个三角形.

(2) 如果各个顶点的外半次互不相同，那么它们的外半次分别为 0、1、$\cdots$、$n-1$，假如前面 $n-1$ 个点组成的完全有向图没有三角形回路，那么添加最后一个(外半次为 $n-1$ 的)顶点，显然还是没有三角形回路.

9　解法一　用点 $v_1、v_2、\cdots、v_n$ 表示 n 名选手，如果 v_i 胜 v_j，就作一条从 v_i 到 v_j 的弧，这样就得到一个完全有向图 G.

设 G 中顶点 v_k 的外半次最大. 因为 v_k 不是全胜的，所以存在弧 (v_h, v_k). 如果 v_k 引出的弧为(v_k, v_{t_1})，(v_k, v_{t_2})，$\cdots$，(v_k, v_{t_p})，其中 $p = \deg^+ v_k$，那么必然有一条弧$(v_{t_q}, v_h) (1 \leqslant q \leqslant p)$，否则 $\deg^+ v_h \geqslant p + 1 > \deg^+ v_k$. 于是$(v_h, v_k, v_{t_q})$

就是一个三角形回路。

解法二　先利用抽屉原则证明必有两个人得分相等，再利用上一题。

解法三　利用第 3 题可知所作的完全有向图 G 有一个回路，然后利用第 6 题。

10　由第 8 题，要证的结论就是在 n 个正整数 s_1、s_2、…、s_n 的和 $s_1+s_2+\cdots+s_n=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ 时，

$$\sum s_i^2\leqslant 0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

并且等号当且仅当 s_1、s_2、…、s_n 全不相等时成立。

当 s_1、s_2、…、s_n 全不相等时，它们的值分别为 0、1、…、$n-1$，因而

$$\sum s_i^2=0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

现在设 $s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n$，其中有等号成立，我们来证明

$$\sum s_i^2<\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

用归纳法，假设命题对于 $n-1$ 成立，要证命题对于 n 也成立，这时有两种情况，

(1)　如果 $s_n=n-1$，那么去掉 s_n，则

$$s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}-s_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

根据归纳假设

$$\sum_{i=1}^{n-1}s_i^2<0^2+1^2+\cdots+(n-2)^2,$$

所以　$$\sum_{i=1}^{n}s_i^2<0^2+1^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

(2)　如果 $s_n<n-1$，那么 s_1、s_2、…、s_{n-1} 中必有某个 s_j 满足 $s_j>j-1$，否则

$$\sum s_i<0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

将 s_n 增加 1，s_j 减少 1，则总和 $\sum s_i$ 不变，而 $\sum s_i^2$ 增加了：

$$(s_j-1)^2+(s_n+1)^2-s_j^2-s_n^2=2(s_n-s_j)+2>0,$$

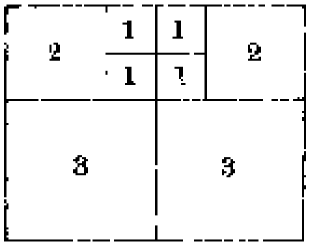
所以可以用这样的方法使 s_n 一直增加到 $n-1$（同时 $\sum s_i$ 不变，$\sum s_i^2$ 不减），这就化成情况(1)。

11　(1)设 v_i 为一个圈的"最高点"（即它所表示的水平线最高），v_j 为"最低点"，那么沿任一条 v_i 到 v_j 的路前进，高度逐步下降，这条路上的运输能力的和 $h_1+h_2+\cdots$ 也就是 v_i 与 v_j 的高度差。

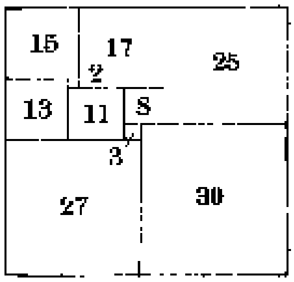
(2)这就是正方形的长与宽相等。

12　由对称性可知 $i_2=i_3$，$i_1=i_4$，$i_5=i_6$，$i_7=i_8$。又考虑点 v_3 可知 $i_2=i_5$，考

虑点 v_2 可得 $i_7=i_1+i_5$，考虑 $\triangle v_1v_2v_3$ 可得 $i_1=i_2+i_5$．因此设 $i_2=i_3=1$，则 $i_5=i_6=1$，$i_1=i_4=2$，$i_7=i_8=3$．相应的完全长方形见下图．



（第 12 题图）



（第 13 题图）

13 考虑各个顶点及圈，可以得到一组方程

$$
\begin{aligned}
&i_1-i_4-i_6=0,\\
&i_2+i_4-i_5-i_7=0,\\
&i_3+i_5-i_8-i_{10}=0,\\
&i_6+i_7+i_8-i_9=0,\\
&i_1-i_2+i_4=0,\\
&i_4+i_7-i_6=0,\\
&i_2-i_3+i_5=0,\\
&i_5-i_7+i_8=0,\\
&i_6+i_9-i_{10}=0.
\end{aligned}
$$

由这方程组可得 $i_1=15$，$i_2=17$，$i_3=25$，$i_4=2$，$i_5=8$，$i_6=13$，$i_7=11$，$i_8=3$，$i_9=27$，$i_{10}=30$（或均扩大一个常数倍）．

相应的完全长方形见图．

14 对每个顶点 v，考虑从 v 引出的路，记其中最长的一个路的长为 $q_{(v)}$．

如果有某个 $q_{(v)}\geqslant m$，命题已经成立．

如果一切 $q_{(v)}<m$，记 $q_{(v)}=i(0\leqslant i\leqslant m-1)$ 的顶点 v 的个数为 $F_{(i)}$，那么

$$F_{(0)}+F_{(1)}+\cdots+F_{(m-1)}=mn+1.$$

因为 $(mn+1)\div m=n+\dfrac{1}{m}>n$，根据平均数原则，必有某个 j，使 $F_{(j)}>n$，因而有 $n+1$ 个点 v_1、v_2、…、v_{n+1}，每一个点引出的最长的路的长为 j．这些点一定互不相邻，否则设有弧 (v_s, v_t)，那么有一个从 v_s 引出的路长为 $j+1$，矛盾．实际上，我们已经证明了有 $n+1$ 个点，彼此之间没有路相连．

15 将数列的每一项用一个顶点表示，如果 $t>s$ 并且项 $v_t>v_s$，就在顶点 v_t 与 v_s 之间作一条弧 (v_s, v_t)．然后再利用上题（在本题中 $m=n$）．

16 将数列的每一项用一个顶点表示．如果 $v_s|v_t$（即 v_s 整除 v_t），就作一

条弧(v_s, v_t). 然后利用第 14 题$(m=n+2)$.

17 五十七可换为 $nm+1(n=8, m=7)$. 用点表示选手, 如果 v_i 胜 v_j, 就作弧(v_i,v_j), 这样得到一个图 G. 如果 G 没有回路, 利用第 14 题. 如果 G 有回路, 需利用下一题.

18 设 $G=(V, U)$, 在 G 的$|V|$个顶点之间, 一条一条地把 G 的弧加上去, 使得每次得到的图都是没有回路的, 这样可以得到一个子图 G_1, 它与 G 有相同的顶点, G_1 没有回路, 但是再添上任意一条(G 的)弧, G_1 就有回路.

如果 G_1 有一个长度不小于 m 的路, 那么 G 也有一个长度不小于 m 的路.

如果 G_1 中没有上述的路, 那么根据第 14 题的解法, 可以找到 $n+1$ 个顶点 v_1、v_2、…、v_{n+1}, 彼此之间没有路相连. 我们证明这 $n+1$ 个顶点在 G 中互不相邻.

设不然, 有一条弧(v_i, v_j), 那么 G_1 添上弧(v_i, v_j)后有一个回路, 因而在 G_1 中 v_i 与 v_j 之间有一条路, 矛盾.

不难看出 G 为简单图这一条件也可以去掉.

19 仿第 16 题作出图 G, 再利用下题.

20 如果 G 中没有长度为∞的路, 我们证明 G 有无限多个收点或无穷多个发点.

设不然, 收点与发点的个数分别为有限数 m、n, 那么作出 G 中每一个从收点到发点的路, 这样的路的个数有限(至多为 mn), 每个路长有限, 因而 G 的顶点个数有限, 与 G 为无限图矛盾.

这无穷多个收点(或发点)显然是互不相邻的(实际上我们证明了有无穷多个点彼此之间没有路相连).

21 先找出一个子图 G_1, G_1 与 G 有相同的顶点, 没有回路, 但再添上任意一条(G 的)弧, G_1 就有回路. 然后利用上题, 仿照 18 题即得结论.

要证明 G_1 的存在可以利用著名的曹恩(Zorn)引理: 设子图 $H_1\subseteq H_2\subseteq\cdots$ 均没有回路, 那么 $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ 也没有回路, 因而在没有回路的子图中有一个极大子图 G_1, 即 G_1 没有回路, 而任一子图 $G_2\supseteq G_1$ 必有回路.

不难看出 G 为简单图这一条件也可以去掉.

22 将 G 看作一个流量图, 每条边(u, v)看成两条方向相反的弧, 弧上的流量都是 1. v_1、v_2 分别作为收、发点, 根据题意最小切断$\geqslant k$, 所以最大流量$\geqslant k$.

23 把电阻间的导线及 A、B 作为顶点, 电阻作为边, 得图 G, 根据上题, A、B 之间至少有 10 条无公共边的链, 并且显然每条链上应当有 10 个电阻, 才不致在九个电阻损坏时短路, 因此至少应当有 $10\times10=100$ 个电阻.