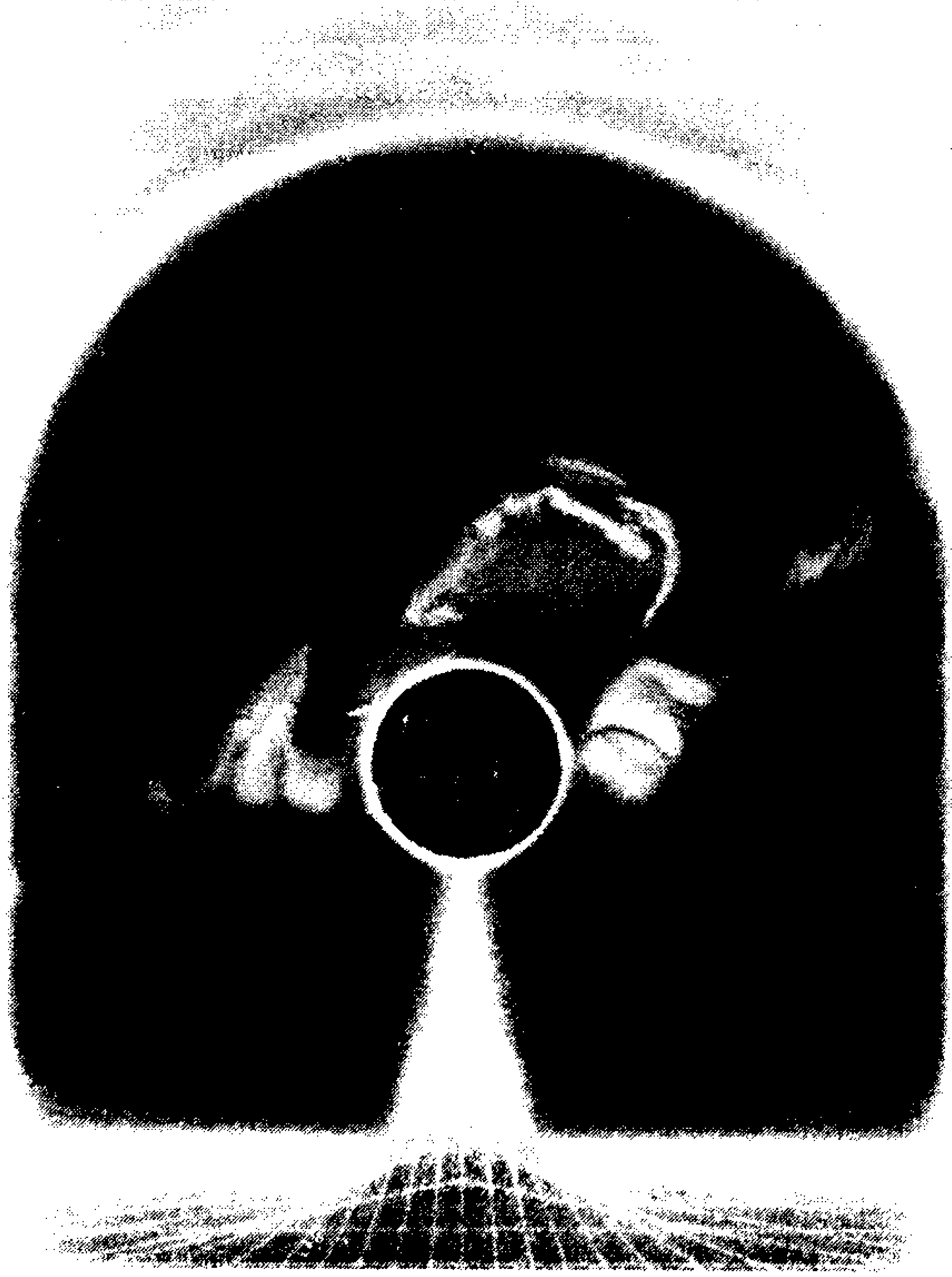
国际数学竞赛解题方法

单墫 葛军 著



中国少年儿童出版社

（京）新登字084号

责任编辑：陈效师

当代中学生精品书屋
求知书屋
*
中国少年儿童出版社出版 发行
张家口市印刷总厂印刷 新华书店经销
*
787×970 1/32 25.875印张 10插页 516千字
1996年9月河北第1版 1996年9月河北第1次印刷
本次印数11,000册 定价33.60元
ISBN 7-5007-3221-X/G·2017
凡有印装问题，可向承印厂调换

内容提要

作者是中国数学奥林匹克教练组组长。他对第一届到第三十届IMO的试题进行了深入的研究和探讨，从总共182道题中，筛选出59道有代表性的问题，进行了分析和总结，使读者可以居高临下一览IMO的试题特点与风貌。

本书充分展示了作者深厚的数学功力和独到的解题才华。全书语言简练、明快、活泼，使人在繁难的数学问题面前心态平静、充满自信。作者巧妙地摘引了诗、歌、名句放在每节之前，使你仿佛在悦耳的古典或现代轻音乐中逐步进入角色。

现代数学的思想方法正在向中学渗透，有志参加IMO的同学、数学爱好者以及数学教育工作者必将从本书中得到有益的启示。

前言

国际数学奥林匹克（IMO），自1959年开始，每年一届，仅1980年中止一次，至1989年已经举行了三十届。

1989年，我国6名中学生在第三十届IMO中荣获4块金牌、2块银牌，总分居第一位。1990年，第三十一届IMO确定在中国举行。这两件事情对我国的数学竞赛与数学教育是有很重要意义的。

从第一届至第三十届IMO的试题共182道。对这些试题进行研究和探讨，不仅可以提高我国各级数学竞赛的水平，而且可以从中看到数学竞赛的演进，看到现代数学的思想方法在向中学渗透，因而也就可以看到数学教育发展的正确方向。

我们想做一点初步的工作，着重在两个方面：第一是加强分析，也就是设想自己来解某一道题，应当如何思考，如何找出解法；第二是加强总结，对解法的优劣作一些讲评，对题目的来源与推广作一些讨论。

我们从182道题中选出59道，这些题较有代表性，通过这些题，读者可以了解到IMO的试题的特点与风貌。

目　录

1 三十年前

旧时王谢堂前燕，

飞入寻常百姓家。

——刘禹锡：《乌衣巷》

下面是三十年前（1959年），第一届IMO（在罗马尼亚古都布拉索夫举行）的两道试题（编号是原来的编号，括号中的国名是出这道题的国家，以下同此）。

例 1 （2，罗马尼亚）x取什么实数值时，等式

$$(a)\quad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},$$

$$(b)\quad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1,$$

$$(c)\quad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$$

能成立？这里的平方根取非负数。

例 2 （3，匈牙利）设a、b、c及x为实数，并且$\cos x$满足二次方程

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0。\qquad (1)$$

求作一个使$\cos(2x)$能够满足的二次方程。

在$a=4$，$b=2$，$c=-1$时，比较一下这两个方程。

这两道题平平常常，在现在中学的习题里就能够找到，可见数学竞赛并非高不可攀。当然现在的水平大大地超过了三十年前，但这种类型的题目用作训练，加强基础，还是很有用处的。

虽然题目不难，也还是要谨慎从事，尤其罗马尼亚那道题，很容易出错。

这道题着重考察所谓算术根的概念。题目中的最后一句话“这里的平方根取非负数”，已经泄漏了天机。

此外还需要注意方程左边那个式子的定义域是 $x \geqslant \frac{1}{2}$。在这个定义域中，左式有意义而且取非负值。现在将（a）中的方程两边平方，由于

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-(2x-1)}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

（算术根），经过整理后，方程成为

$$2x+2|x-1|=2。$$

函数

$$2x+2|x-1|=\begin{cases}4x-2, & 若 x>1; \\ 2 \quad, & 若 x \leqslant 1。\end{cases}$$

所以（a）的答案是

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1。 \quad （注意定义域！）$$

同样可得（b）无解，（c）的解为$\frac{3}{2}$。

本题的另一种解法需要一点技巧：将形如$\sqrt{a+2\sqrt{b}}$的式子化简。这只有在b可表成两个实数c、d之积，并且$a=c+d$时才是可能的。

例如$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{3},$$

其中$b=6=2\times3$，$a=5=2+3$。

现在先在（a）中，使方程两边同乘$\sqrt{2}$，得

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=2\text{。}$$

这样$\sqrt{2x-1}$前面有一因数2，$2x-1=(2x-1)\cdot1$，$2x=(2x-1)+1$，所以

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}=\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}$$

$$=\sqrt{2x-1}+1\text{。}$$

同样（但请注意算术根）

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}$$

$$=\left|\sqrt{2x-1}-1\right|=\begin{cases}\sqrt{2x-1}-1, & \text{若}x>1;\\ 1-\sqrt{2x-1}, & \text{若}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1\text{。}\end{cases}$$

从而不难得出与前面相同的结果。

另一道题当然要用二倍角公式

$$\cos2x=2\cos^2x-1\text{。}$$

即

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}。\qquad (1)$$

这样，方程

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

中的 $\cos^2 x$ 已经能用 $\cos 2x$ 的多项式代替。为了处理 $b\cos x$ 中的 $\cos x$，最好是先将它变成 $\cos^2 x$。为此，移项，得

$$a\cos^2 x+c=-b\cos x。$$

平方，得

$$(a\cos^2 x+c)^2=b^2\cos^2 x,$$

然后再用(1)式代入，经过化简，得

$$a^2\cos^2 2x+2(a^2+2ac-b^2)\cos 2x+(a+2c)^2-2b^2=0。$$

这就是所求的方程（用这个方法，可以从X满足的方程导出一个X^2满足的方程。只需先将奇次项移到方程的一边，然后再平方）。

在$a=4$，$b=2$，$c=-1$时，新方程与原方程相同（这时$\cos x$与$\cos 2x$是同一个二次方程的根。容易算出 $x=2k\pi\pm\frac{2}{5}\pi$，k为整数)。

“做学问当于无疑处有疑。”一道题做完以后，往往可以提出一些新的问题。例如在这里我们可以问：

当a、b、c为哪些值时，新方程与原方程相同？

答案是$a:b:c=4:2:(-1)$，$1:(-2):1$或$(-2):1:1$。

2 路在脚下

敢问路在何方?

路在脚下。

——电视剧《**西游记**》插曲

近年的竞赛题是不是特别难呢?

并不是这样。

如果说"今非昔比"的话,今天的竞赛题着重在自己去找路,不像过去的题,往往有成熟的套路。这就更富于竞争性,更需要发挥你的创造力,更有利于发展你的个性。

路,并不一定非常难找。往往就在脚下,只是需要你低头去看,去观察,去发现。

请看第三十届(1989年)的一道题:

例 (1,菲律宾)求证:集合$\{1,2,\cdots,1989\}$可以分为117个互不相交的子集$A_i(i=1,2,\cdots,117)$,使得

(1) 每个A_i含有17个元素;

(2) 每个A_i中各元素之和相同。

原始的问题是分为17个互不相交的子集。选题的委员会认为太容易了,将17改成117。其实"换汤不换药",本质并无变化。

要证明“可以分为……，使得……”，最有效的方法就是构造法，即把符合要求的一种分法具体切实地写出来。

“登高必自卑，行远必自迩”。1989太大了，117太多了。我们先用小一些的数作试验品。例如将{1，2，…，10}分为5个具有类似性质的子集，能不能办到？（选题的人将题越改越难，我们正好反其道而行之。）

这个问题应该说是非常容易的，略一尝试就可得出一个答案，我们把它写成二行五列的表

1	2	3	3	5
10	9	8	7	6

每一列是一个子集，共有5个子集，每个子集两个元素。各子集互不相交，而且每相邻两列的元素之和相等（因为上一行右面的元素多1，而下一行右面的元素少1），所以各子集元素的和相同。

从这里向前推进一步：将{1，2，…，20}分为5个具有类似性质的子集也不困难，例如表

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16

就代表一种分法（并不是唯一的分法），其中每一列代表子集。这个表可以更简单地写成

1　2　3　4　5

5	4	3	2	1（本行各数应加5）
1	2	3	4	5（本行各数应加2×5）
5	4	3	2	1（本行各数应加3×5）

使它的本质显露得更加清楚。

连续的20个整数（不限定为1～20）也可以这样处理，因为同一行的每个数都加上一个相同的数后，各列的和仍然相等。

当各子集的元数n是偶数时，上面的方法足以解决问题。现在考虑各子集的元数n是奇数的情况。先考虑最简单的情况：如何将$\{1,2,\cdots,15\}$分为5个子集（$n=3$），具有上面所述的性质？

采用三行五列的表，第一行仍照顺序从左到右写下1至5。第二行的1至5(实际上是$1+5$至$5+5$)不能按照顺序从右到左写了（否则每列前两行的和相等，第三行无论怎么写也无法使各列的和相等）。

怎样写第二行，可以说是问题的关键。

这也许需要尝试好多次才能成功。不过，如果你希望有不很复杂的规律（不是杂乱无章），并且与原来的做法差别不太大的话，那么最好是（可能是事后诸葛的总结）：1仍旧写在最右面，2则与1隔一格，3再与2隔一格，4又与3隔一格（即转回到第2列），5与4隔一格，得到

1	2	3	4	5
3	5	2	4	1（本行各数应加5）
5	2	4	1	3（本行各数应加2×5）

表中第三行，即将第二行左移一格。这时每相

邻两列有一个数相同(撇去应加的5的倍数)，另两个数的和相等，因而各列的和均相等。

原来的问题已经不难解决了。我们可以列出17行117列的表：

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ……,113, 114, 115, 116, 117,

59 , 117, 58 , 116, 57 , ……,3 , 61 , 2 , 60 , 1 ,

117, 58 , 116, 57 , 115, ……,61 , 2 , 60 , 1 , 59 ,

每两行与后两行相同

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ……,113, 114, 115, 116, 117,

117, 116, 115, 114, 113, ……,5 , 4 , 3 , 2 , 1 ,

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ……,113, 114, 115, 116, 117,

117, 116, 115, 114, 113, ……,5 , 4 , 3 , 2 , 1 ,

⋮

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ……,113, 114, 115, 116, 117,

117, 116, 115, 114, 113, ……,5 , 4 , 3 , 2 , 1 。

(表中第j行各数应加上 $(j-1)\times 117$，$j=1, 2, \cdots, 17$。)

表中每一列是一个子集，不难看出这些子集满

足要求。

选题委员会还考虑了问题的另一种变形：

“设$M=\{1, 2, \cdots, n\}$，若M可以表示为m个的互不相交的子集A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）的并集，使得

（i）每个A_i的元数相同；

（ii）对$i=1, 2, \cdots, m$，A_i中所有元素的和相等。

求m所应满足的充分必要条件。”

我们设A_i的元数为l，则$lm=n$。由前面的讨论，不难得出在l为偶数或者l为大于1的奇数并且m为奇数时，M均可以表示为m个具有所述的子集的并。

在l为奇数、m为偶数时，由于

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

所以各子集的元素的和应为$\frac{n(n+1)}{2m}=\frac{l(n+1)}{2}$，

但n为偶数，l、$n+1$都是奇数，$\frac{l(n+1)}{2}$不是整数，矛盾！即合乎要求的分法并不存在。

于是m所应满足的充分必要条件是：

“$\frac{n}{m}$是整数，大于1并且在$\frac{n}{m}$为奇数时，m也是奇数。”

3 以曲求伸

尺蠖之曲，

为求伸也。

——《周易·系辞下》

上一节，我们先退到比较简单的情况，找出规律，然后再进到较为复杂，较为一般的情况。这种以曲求伸，欲进先退的方法，在数学中常常用到。我国著名数学家华罗庚先生就曾经指出：“善于‘退’，足够地‘退’，‘退’到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！”

例 （29届4，爱尔兰）证明不等式

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4} \tag{1}$$

的解集是总长为1988的一些不相交的区间的并集。

我们先退到最简单的情况，即(1)的左边只有一项或两项。只有一项的情况是

$$\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{5}{4}。 \tag{2}$$

这个不等式的左边必须是正数，所以

$$x>1。 \tag{3}$$

在(3)的限制下(2)可化成

$$\frac{4}{5}\geqslant x-1。$$

于是，(2) 的解为

$$\frac{4}{5}+1\geqslant x>1。\qquad (4)$$

解集是一个长为$\frac{4}{5}$的区间（一端开，一端闭）。

只有两项的情况是

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\geqslant\frac{5}{4}。\qquad (5)$$

在$(x-1)(x-2)\underset{(<)}{>}0$时，(5) 可化为

$$(x-2)+2(x-1)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}\frac{5}{4}(x-1)(x-2)。$$

即

$$-(x-1)(x-2)$$

$$+\frac{4}{5}\Big((x-2)+2(x-1)\Big)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0。\qquad (6)$$

(6)是一个二次不等式，当然并不难解。但我们的目的并不是解这个不等式，而是要求出 (5)的解集的总长。更重要的是，我们希望能通过这些特殊情况的讨论，发现普遍的规律。所以(6) 式左边没有进行化简，我们特别小心翼翼，唯恐这种化简会使可以发现的规律变得模糊不清。

这里需要打消一个顾虑："不解(6)怎么能求出(5)的解集的长呢？"事实上，这是能够做到的。我们现在就来做这件事。

利用一下二次函数的图象（解二次不等式时常常利用图象）。函数$y=(x-1)(x-2)$是一条开口向上的抛物线，与x轴相交于$(1,0)$、$(2,0)$两点。函数$y=-(x-1)(x-2)+\frac{4}{5}\Big((x-2)+2(x-1)\Big)$也是一条抛物线，开口向下。

不难算出，在$x=1$时，$y=-(x-1)(x-2)+\frac{4}{5}\Big((x-2)+2(x-1)\Big)$的值是负的；在$x=2$时，值是正的。因此函数的图象与$x$轴有一个交点$(x_1,0)$，$1<x_1<2$。并且由于图象是开口向下的抛物线，它与$x$轴还有一个交点$(x_2,0)$，$2<x_2$。

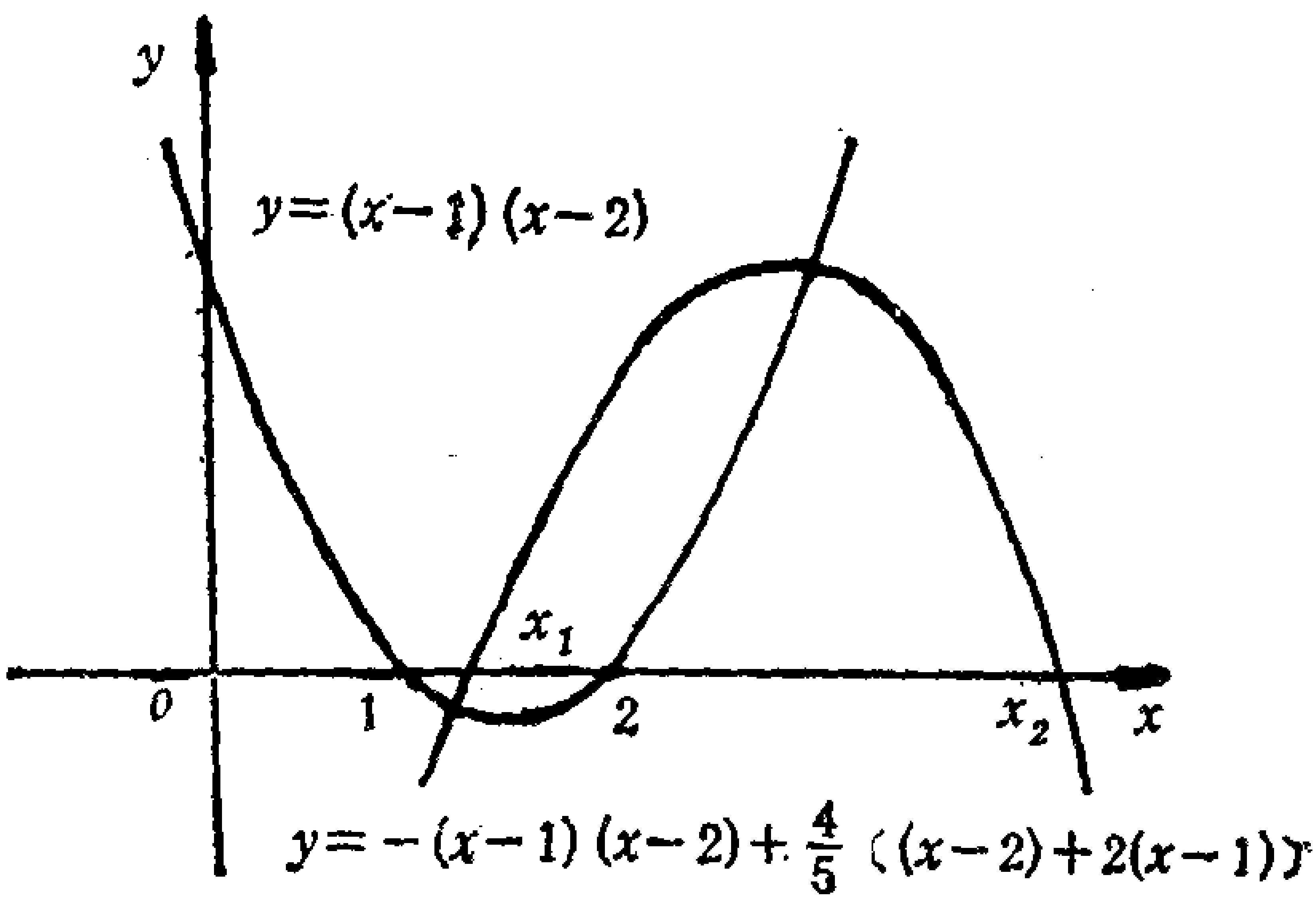


图 1

(5)的解就是使这两个函数同为正值或同为负值的那些x（包括x_1与x_2在内）。因此，解集为$(1, x_1]$，$(2, x_2]$，解集的总长为

$$(x_1-1)+(x_2-2)=(x_1+x_2)-(1+2)\text{。}$$

x_1、x_2不必求出来（所以我们不解不等式(6)），因为和x_1+x_2可以借助韦达定理，通过系数来表示：

$$x_1+x_2=1+2+\frac{4}{5}(1+2)\text{。}$$

从而解集的总长为$\frac{4}{5}(1+2)$。

回到不等式(1)，它的解集的总长应当是

$$\frac{4}{5}(1+2+\cdots+70)=\frac{4}{5}\times\frac{70\times 17}{2}=1988,$$

恰好与题目所要求证的结果一样。这表明我们所走的道路是正确的道路，也就是应当考虑函数

$$y=(x-1)(x-2)\cdots(x-70)$$

与

$$\begin{aligned}y=&-(x-1)(x-2)\cdots(x-70)\\&+\frac{4}{5}\Big((x-2)(x-3)\cdots(x-70)\\&\qquad+2(x-1)(x-3)\cdots(x-70)\\&\qquad+\cdots+70(x-1)(x-2)\cdots(x-69)\Big)\end{aligned}$$

$$=-x^{70}+\Big(\Big((1+2+\cdots+70)$$

$$+\frac{4}{5}(1+2+\cdots+70)\Big)x^{69}+\cdots\Big)$$

同号的那些区间的总长。

显然第一个函数的零点为1，2，…，70。而在$x=1$，2，…，70时，第二个函数的值正负交错，所以它的零点x_1，x_2，…，x_{70}与1，2，…，70相间：$1<x_1<2<x_2<3<\cdots<69<x_{69}<70<x_{70}$。同号区间的总长为

$$\begin{aligned}&(x_1-1)+(x_2-2)+\cdots+(x_{70}-70)\\=&(x_1+x_2+\cdots+x_{70})-(1+2+\cdots+70)\\=&\frac{4}{5}(1+2+\cdots+70)\\=&1988。\end{aligned}$$

推而广之，不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x-k}\geqslant a\qquad(a\neq 0)$$

的解集的总长应当为$\frac{n(n+1)}{2a}$。

4　依靠感觉

跟着感觉走，

让它带着我。

——歌曲《跟着感觉走》

感觉是很重要的，它常常引导你走上成功之路。

几何问题尤其如此。请看第29届的5题（希腊提供）：

在直角三角形ABC中，AD为斜边上的高。连结$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的内心的直线分别交边AB、AC于K、L。若E与E_1分别表示$\triangle ABC$与$\triangle AKL$的面积，证明$E/E_1\geqslant 2$。

解几何题时，画一个图往往是有好处的，因为图形可以帮助你思考。图的位置可以各种各样。例如本题的直角三角形可以画成图1、图2或图3。

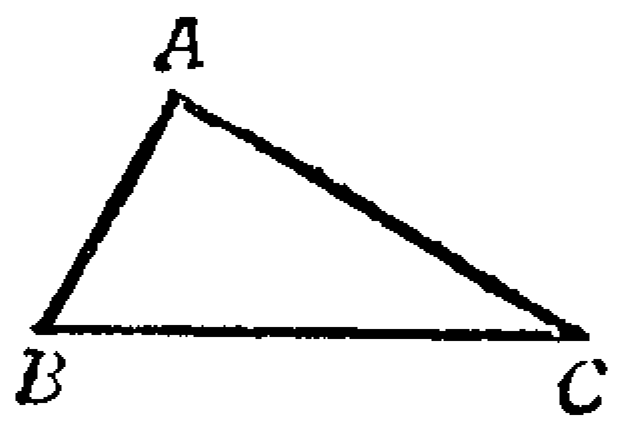


图　1

图　2

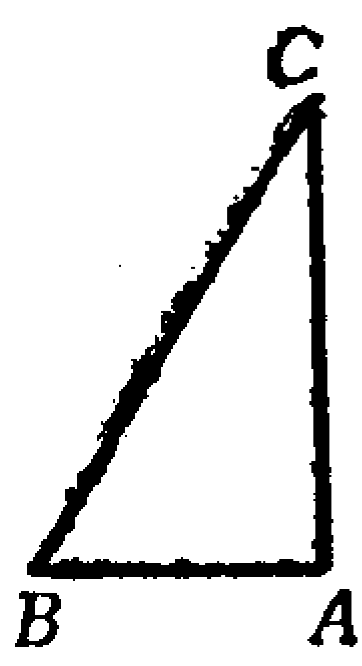


图　3

画成哪一种位置，似乎是个人的趣向，并无本质的差别。但在实际解题时，某种特定的位置或许会触发你的灵感，给你更多的启发。

这道题，我希望画成图2。理由：如果你准备利用一点解析几何的话，图中的AB、AC处在最佳的状态，它们可以充当x轴与y轴。

从图4看出$\triangle AKL$是等腰直角三角形。虽然我

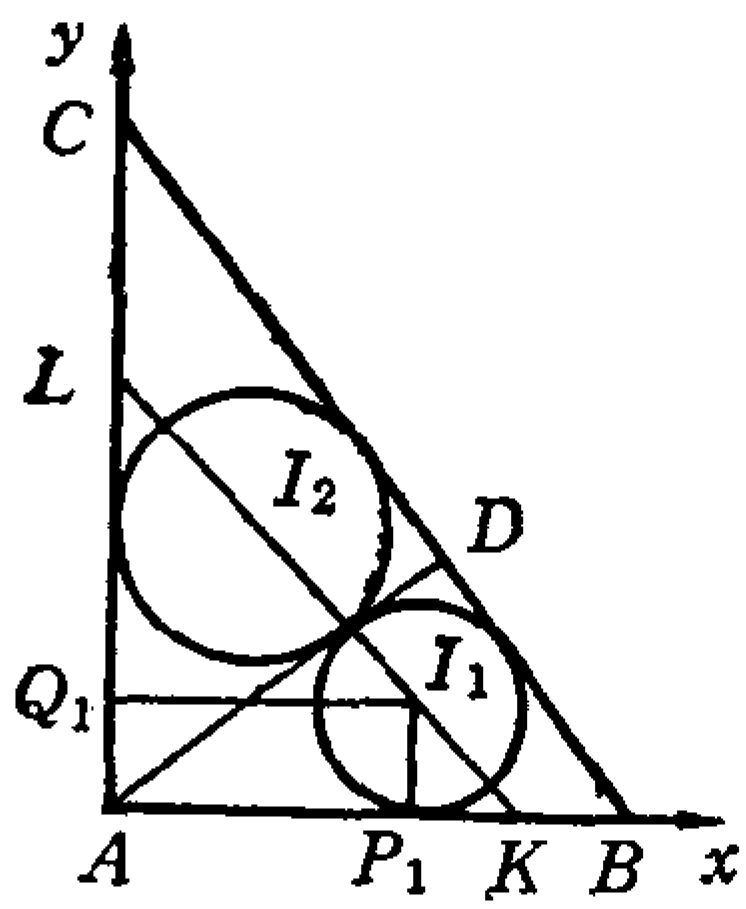


图 4

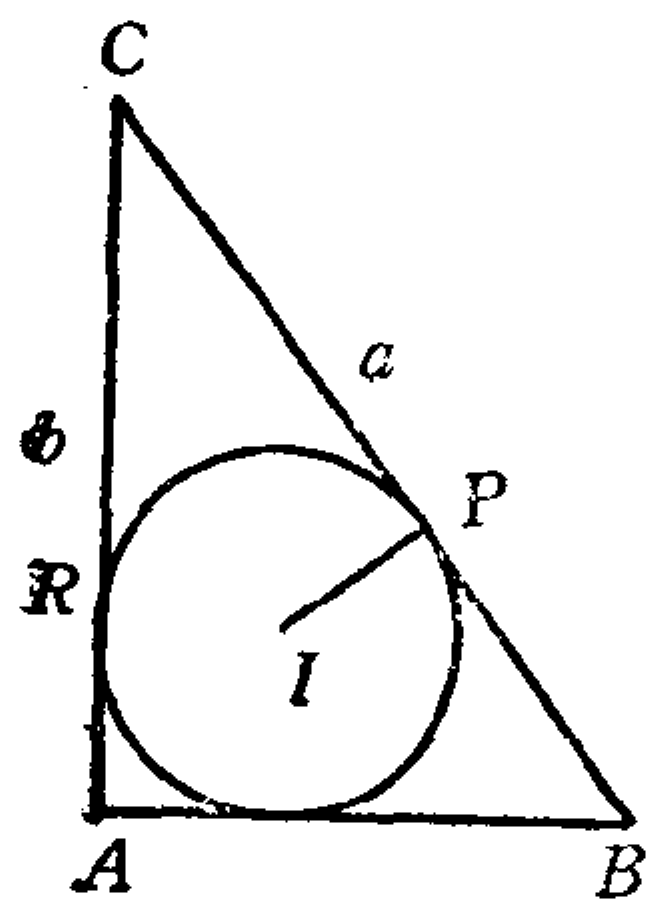


图 5

们还没有证明它确实是等腰的，但已经感觉到它应该是等腰的，并且这种感觉指出了解决问题的方向：先证明$AK=AL$，然后算出$\triangle AKL$的面积E_1。

要证明$AK=AL$，也就是要证明KL的方程为

$$x+y=\text{常数}。$$

这个常数当然就是I_1（或I_2）的坐标之和，即$I_1P_1+AP_1$，其中P_1是I_1在AB上的射影。

设$\triangle ABC$的边长$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，内切圆圆心为I、切BC于P、切AC于R（图5）。容易知道

$$IP+CP=RA+CR=b。$$

于是，根据同样的道理或者根据$\triangle ABD$与$\triangle CBA$相似（相似比为$\frac{c}{a}$），得

$$I_1P_1+AP_1=\frac{bc}{a}。\tag{1}$$

即I_1在直线

$$x+y=\frac{bc}{a}\tag{2}$$

上。同样I_2也在这条直线上。

I_1I_2的方程是(2)，因此$AK=AL=\frac{bc}{a}$。

面积$E_1=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2$，$E=\frac{1}{2}bc$，所以

$$\frac{E}{E_1}=\frac{a^2}{bc}=\frac{b^2+c^2}{bc}\geqslant 2。$$

当然本题并不是非用解析几何不可，但不论用什么方法，证明$AK=AL$总是关键的一步。

三十届有一道利用直观的几何题：

例 （30届4，冰岛）设$ABCD$是一个凸四边形，它的三条边AB、AD、BC满足$AB=AD+BC$。四边形内，距离CD为h的地方有一点P，使得$AP=h+AD$，$BP=h+BC$。求证

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}。\tag{3}$$

问题并没有明显地提到圆，可是却和圆有密切的联系。如果分别以A、B、P为圆心，AD、BC、h为半径作圆，那么已知条件表明这些圆两两外切，并且$\odot P$与CD相切。

C、D分别在$\odot B$、$\odot A$上，但CD未必就是两个圆的公切线。设EF是这两个圆的公切线，那么当C、D沿着各自的圆周趋近切点E、F时，我们看到线段CD位置下移（图6）。于是，被CD封锁在曲边三角形GCD（G是$\odot A$、$\odot B$的切点）中的$\odot P$，在CD下移时，它也获得了一点自由，可以稍稍挪动，因而也就可以稍稍放大（最好做一个幻灯片来描述这一生动的过程）。由此可见，当CD成为公切线EF时，h最大（图7）。

这时（3）成为什么样子呢？也应当具有点特殊性（极端性）吧？所以我们猜测（3）应当成为等式

$$\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{AF}}+\frac{1}{\sqrt{BE}}。\qquad (4)$$

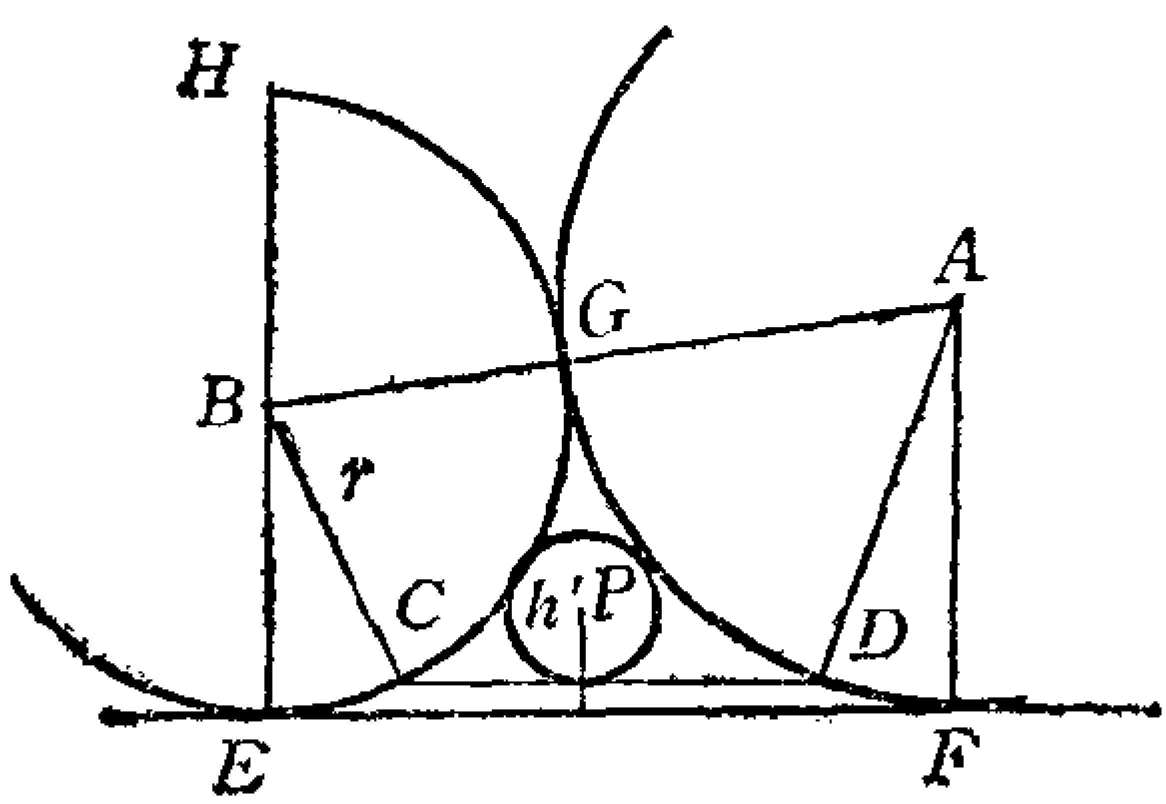


图 6

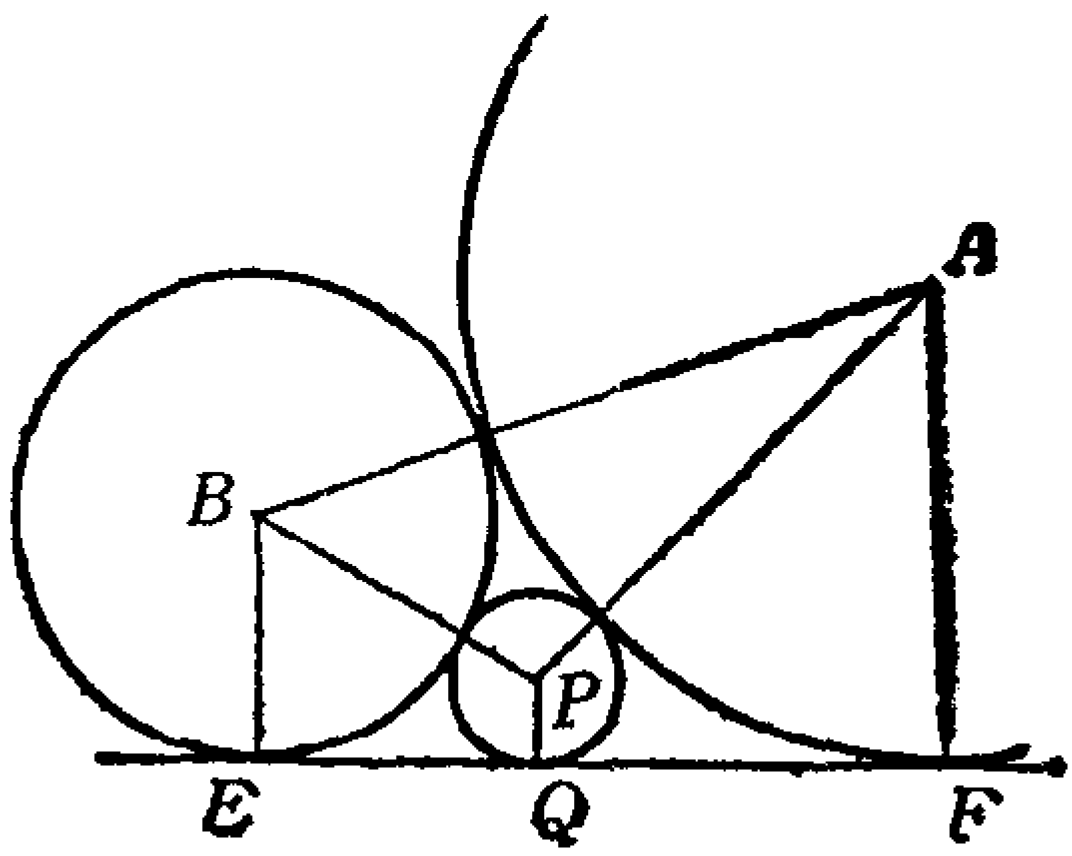


图 7

(4)确实是成立的。要证明这一点，只需注意 AB在EF上的射影EF等于BP、PA在EF上的射影EQ、QF的和。

由勾股定理，易知（记$AD=R$，$BC=r$）

$$EF=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr},$$

$$EQ=2\sqrt{rh},$$

$$QF=2\sqrt{Rh}。$$

所以

$$\sqrt{Rr}=\sqrt{rh}+\sqrt{Rh} \tag{5}$$

两边同时除以$\sqrt{Rrh}$便得(4)。

在上述变化过程中，(3)的右边（也就是(4)的右边）保持不变，左边则由大变小（h由小变大），变至最小时与右边相等，所以左边不小于右边，即(3)成立。

直接将图6中的AB、BP、PA射影到CD上也

可以证明（并不很容易而且要小心出错）。

有一种证法是设P到公切线EF的距离为h'，易知$h'\geqslant h$。将AB、BP、PA射影到EF上，与前面类似地可得

$$2\sqrt{Rr}=\sqrt{(R+h)^2-(R-h')^2}+\sqrt{(r+h)^2-(r-h')^2}。\tag{6}$$

如果

$$R-h\geqslant R-h'\geqslant 0,\tag{7}$$

$$r-h\geqslant r-h'\geqslant 0,\tag{8}$$

那么(6) 就可以改成不等式

$$2\sqrt{Rr}\geqslant\sqrt{(R+h)^2-(R-h)^2}+\sqrt{(r+h)^2-(r-h)^2},$$

即

$$\sqrt{Rr}\geqslant\sqrt{Rh}+\sqrt{rh}。$$

从而(3) 成立。

由于$h'\geqslant h$，所以(7)、(8) 的左边的不等式都是正确的。右边那一半呢？似乎也是正确的。但这一次感觉不完全靠得住了。仔细推敲一下，当P点上升时，$\odot P$（半径为h）虽然在变小，h'却在增大，它可以等于G点到EF的距离！于是(7)、(8)（至少有一个）的右一半不对了，所作的证明也就有了疑问。

但是，请不要匆忙否定整个证明，或许修补一

下就能够通过。注意（7）、（8）换成

$$R-h\geqslant R-h'\geqslant-(R-h), \tag{7'}$$

$$r-h\geqslant r-h'\geqslant-(r-h) \tag{8'}$$

时，后面的推导仍然有效。而（7′）、（8′）是成立的，因为$h+h'$等于$\odot P$上一点到EF的距离，不会超过G到EF的距离，后者又小于直径HE，即$2r$。

利用直观要注意合理。感觉往往把我们引向正确的道路，但也要防止它引错了路。

5 先分后合

话说天下大势，

分久必合，合久必分。

——罗贯中：《三国演义》

求和，是数学中经常会遇到的问题。为了求出许多项的和，一个有用的古典技巧是先将每一项分为两项之差，并且前面的减数（被减数）恰好是后一个的被减数（减数）。这样经过合并，许多中间的项都抵消了，只剩下最前面的被减数（减数）与最后面的减数（被减数），它们的差正是所要求的和。

例1 （8届4，南斯拉夫）证明：对任一自然数n及任一实数$x\neq\frac{m\pi}{2^k}$（$k=0, 1, 2, \cdots, n$；m为任一整数），有

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x。\tag{1}$$

题目中的条件无非是保证所出现的式子都有意义，用处不大。题目的结论倒是提供了极为重要的信息。

不是要把每一项拆为两项的差吗？那么，令$n=1$，（1）式正好成为这种形式：

$$\frac{1}{\sin 2x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x。\qquad (2)$$

不难验证（2)是成立的。它就是我们想要拆成的结果。走出这关键的一步之后，其余的步骤就“如履平地”了。下面只需将$2x$代换成$4x$、$8x$、…、$2^n x$，产生

$$\frac{1}{\sin 4x}=\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}4x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}2^{n-1}x-\operatorname{ctg}2^n x$$

将以上各式相加便得结果。

例2 （10届6，英国）设$[x]$是不超过x的最大整数。试对任一正整数n，求出和

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]。$$

问题中虽然有个无穷大∞，实际上还是对有限多项求和，因为在2^{k+1}大于分子$n+2^k$时，

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0\ 。$$

这道题比上道题难，因为不知道答案，一时不知如何拆项是好（当然，上一道题如果把（1）的右边隐藏起来，难度也就增加了）。除了细致地对

问题的特点进行分析，别无良法。

现在$\left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\dfrac{n}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{2}\right]$，其中$\dfrac{1}{2}$是常数，$\dfrac{n}{2^{k+1}}$是$\dfrac{n}{2^k}$的一半。为了使前一项拆出的一部分与后一项拆出的一部分相消，$\left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$拆出的第一部分应当是$\dfrac{n}{2^k}$的函数，后一部分则是将第一部分中的$\dfrac{n}{2^k}$换为$\dfrac{n}{2^{k+1}}$而得到的$\dfrac{n}{2^{k+1}}$的函数。究竟是什么函数呢？与问题最贴近的莫过于$[x]$了。我们就用它来试一试，即看看

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] \qquad (3)$$

是否成立？幸运得很，(3)是对的。实际上，对于一切实数x，

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]。$$

因为在x的小数部分（即$x-[x]$）小于$\dfrac{1}{2}$时，(4)的两边都是$2[x]$；而在x的小数部分$\geqslant\dfrac{1}{2}$时，(4)的两边都是$2[x]+1$。

将(4)中的x换作$\dfrac{n}{2^{k+1}}$即得出(3)。在(3)

中令$k=0$，1，2，…，产生许多个等式（当$2^k>n$时，等式成为$0=0-0$）。将它们相加即得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=[n]=n。$$

如果运气不那么好，第一次尝试未能取得成功。怎么办？换一换花样再试一试。

当代数学家、教育家波利亚，曾经观察过一只老鼠如何在鼠笼里找出一条缝隙逃之夭夭。他认为“鼠类和人类所用的基本方法是一样的：一再地去试，多次变化方法，使我们不致错过那少许的宝贵的可能性。”

“当然啰”，波利亚说，“人解决问题通常总比老鼠要强，人不需要用肉体去撞障碍物，他是用智力去撞。人能够比老鼠更多地变化他的方法，而且也能从挫折里学到更多的东西。”

6　解锁去枷

即使在顶晴朗的天气，他也
穿上雨鞋，带着雨伞，而且
一定穿着暖和的棉大衣。

——契诃夫：《**套中人**》

化简，是极基本同时又是极重要的步骤。很多规律，只有在化简后才能发现。不化简，就像戴着锁链跳舞，不但跳不好，连走路都困难。

例 1　（10届5，民主德国）实数$a>0$，f是定义在全体实数上的实值函数。对每一实数x，有

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}。\qquad (1)$$

(a)证明：f是周期函数，即有这样一个实数$b>0$，使对每一个x，有$f(x+b)=f(x)$。

(b) 在$a=1$时，具体给出一个不是常数的这种函数f。

首先得把(1)式中的f从根号下“解放”出来。由于$f(x)-\left(f(x)\right)^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2$不能直接从根号中“开”出去，只有借助先移项然后在两边平方，得

$$\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2。\quad (2)$$

(2)表明 $\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2$ 与 $\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2$ 的和是常数$\frac{1}{4}$，与x无关。因此，将x换成$x+a$便有

$$\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2,$$

从而（消去$f(x+a)$得）

$$\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2。\quad (3)$$

在(3)的两边开平方——但先要留心一下$f(x)-\frac{1}{2}$的正负。注意（1）表明对所有x，$f(x+a)\geqslant\frac{1}{2}$。因而对所有$x$，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$。由(3)开方得

$$f(x+2a)-\frac{1}{2}=f(x)-\frac{1}{2}。$$

即

$$f(x+2a)=f(x)。\quad (4)$$

（4）式表明f是以$2a$为周期（这是早在预料之中的，因为周期总应该与a有点关系）的周期函数。

现在我们来构造一个周期为2的、满足（1）式的函数$f(x)$。由于（2）即

$$\left(2f(x+1)-1\right)^2+\left(2f(x)-1\right)^2=1,$$

这使我们想到最熟悉的周期函数：正弦、余弦（它们的平方和为1）。由于$2f(x)-1$非负、周期为2，所以可令

$$2f(x)-1=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|。$$

即

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|\right)。$$

不难证实它的确满足条件。

例 2 （11届2，匈牙利）设a_1，a_2，…，a_n是实常数，x是实变数，

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)$$

$$+\frac{1}{2^2}\cos(a_3+x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)。$$

证明：从$f(x_1)=f(x_2)=0$可以推出$x_2-x_1=m\pi$，其中m是一个整数。

$f(x)$的形式很复杂，应当先将它化简。注意每个$\cos(a_i+x)=\cos a_i\cos x-\sin a_i\sin x$，按照$\cos x$与$\sin x$来集项后，便得

$$f(x)=A\cos x+B\sin x。$$

其中A、B不必具体写出。

由于（请不要忽略这一步）

$$f(-a_1)=1+\frac{1}{2}\cos(a_2-a_1)+\frac{1}{2^2}\cos(a_3-a_1)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n-a_1)$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}>0,$$

所以A、B不全为0，从而

$$f(x)=r\sin(x+\alpha)。\tag{5}$$

其中$r=\sqrt{A^2+B^2}>0$，$\cos\alpha=\frac{B}{r}$。

这样，$f(x)$就是一个很普通的三角函数，结论也就成为显然的了。

例3 （8届5，捷克斯洛伐克）解方程组

$$\begin{aligned}
|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4&=1,\\
|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4&=1,\\
|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4&=1,\\
|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3&=1。
\end{aligned}$$

这里a_1、a_2、a_3、a_4是已知的两两不同的实数。

本题的关键是把绝对值符号去掉。但是去掉这符号往往需要分情况来讨论，这时我们可以将种种情况化为一种或一两种（这也是化简）。

我们设$a_1>a_2>a_3>a_4$。不然的话，例如$a_2>a_1$，只需将下标1、2互换（x_1与x_2，a_1与a_2互换），就化为$a_1>a_2$了。

在$a_1>a_2>a_3>a_4$的条件下，绝对值可取消。然后用方程组的第二个方程减去第一个，第三个减第二个，第四个减第三个，得出(约去非零常数a_1-a_2等)

$$x_1-x_2-x_3-x_4=0, \tag{6}$$

$$x_1+x_2-x_3-x_4=0, \tag{7}$$

$$x_1+x_2+x_3-x_4=0, \tag{8}$$

由（6）、（7）得$x_2=0$；由（7）、（8）得$x_3=0$。于是$x_1=x_4$，代入原方程组得$x_1=x_4=\dfrac{1}{a_1-a_4}$。

一般地，设a_1、a_2、a_3、a_4中a_i最大，a_j最小，则$x_i=x_j=\dfrac{1}{a_i-a_j}$，其余两个$x$为0。

在将种种情况归并时，需要注意不可漏去某种或某几种（例如第9节例6，漏去$a\geqslant c\geqslant b$的情况是不能允许的），如果发生“漏失”的情况，那么“不妨”就不是不妨，而是大有妨碍了。

7 天上人间

霓为衣兮风为马，

云之君兮纷纷而来下。

——李白：《梦游天姥吟留别》

IMO中立体几何的问题较少，而且有的可以化为平面几何，有的可与平面几何类比。

例1 （20届2，美国）P为球内一定点，球面上有三个动点A、B、C，使

$$\angle BPA=\angle CPA=\angle CPB=90^\circ。$$

以PA、PB、PC为棱构成平行六面体，Q为六面体的与P相对的那个顶点。当A、B、C在球面上移动时，求Q点的轨迹。

可以先看一个平面几何的问题：P为$\odot O$内定点，圆周上有两个动点A、B，$\angle BPA$为直角，以

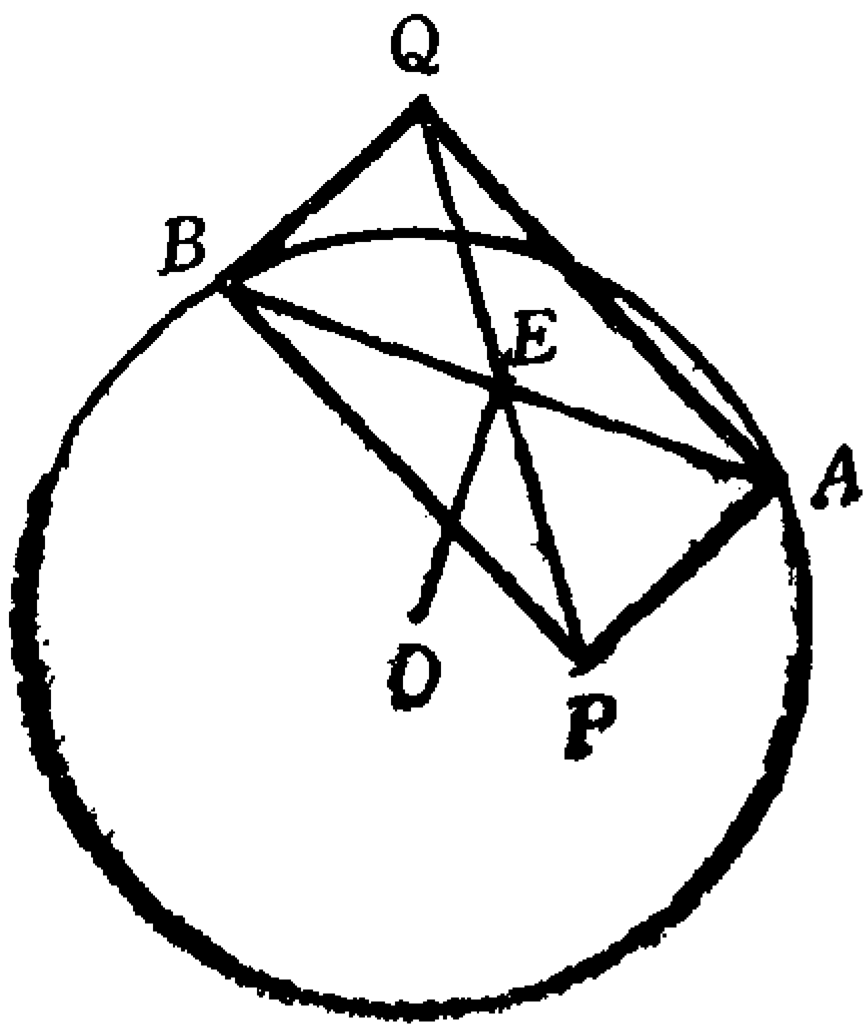


图 1

PA、PB为边构成平行四边形，Q为与P相对的顶点。求Q的轨迹。

这道题虽然不难，但有些解答却流于烦琐。简洁的解法是利用等式

$$OP^2+OQ^2=OA^2+OB^2。\tag{1}$$

从而（设⊙O半径为R，$OP=\rho$）

$$OQ^2=2R^2-\rho^2,$$

于是Q的轨迹是O为圆心，$\sqrt{2R^2-\rho^2}$为半径的圆。

为了证明(1)，我们取矩形$PAQB$的中心E。对$\triangle OPQ$与$\triangle OAB$，由中线公式，得

$$4OE^2+PQ^2=OP^2+OQ^2,\tag{2}$$

$$4OE^2+AB^2=OA^2+OB^2。\tag{3}$$

比较（2）、（3）并注意$PQ=AB$即得（1）。

回到三维空间，设球半径为R，球心O与P的距离为ρ。所得长方体与A相对的顶点为A'，则由于$PAQA'$，$PBA'C$都是矩形，

$$OP^2+OQ^2=OA^2+OA'^2$$

$$=OA^2+OB^2+OC^2-OP^2,$$

即

$$OQ^2=3R^2-2\rho^2。$$

Q的轨迹是以O为心，$\sqrt{3R^2-2\rho^2}$为半径的球。

由这个例题可以看出，二维平面的问题可以推广至三维空间。只需把2改为3（$\rho^2=(2-1)\rho^2$改为$2\rho^2=(3-1)\rho^2$），二维的矩形改为三维的长方体，圆改为球等等。类似的结果还可以推广至n维空间。

例 2 （4届7，苏联）设有一个四面体$SABC$具有性质：有五个球与SA、SB、SC、AB、BC、CA或其延长线相切。证明：

（a）这四面体是正四面体。

（b）反之，每一个正四面体都有这样的五个球。

IMO每一届6道题，只有2、4两届例外，各多出了1道题。

设球K与四面体$SABC$的6条棱都相切，则球K与每个面，例如面ABC，交得一个圆。这圆是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆，记为K_S。类似地定义K_A、K_B、K_C。每两个这样的圆，它们的公共点在棱（圆所在平面的交线）上，因而公共点是唯一的，也就是圆（球）与棱的切点。根据圆的位置，可分为两种情况：

1．所有的圆都是内切圆。由于K_S、K_A均（为三角形）唯一确定，而且不在同一平面上，所以如果有这样的球，只能有一个（不在同一平面上的四点确定一个球）。

2．至少有一个圆为旁切圆。设K_S为旁切圆，与CA、CB的延长线及AB相切，则圆K_A、K_B与K_S一样，都是与C相对的旁切圆（因为K_A与CB的延长线相切）。从而圆K_C与AB、SA、SB都相切于内部的点，因而是内切圆。

与第1种情况同理，这个球至多4个：与某个面的交线为内切圆（其他交线为旁切圆）的球至多1个。

现在假定有五个球与各棱都相切，则其中一个

是“内切球”，与各面的交线都是内切圆；其他4个为“旁切球”，与各面的交线中仅有一个是内切圆。

设$SA=a$，$SB=b$，$SC=c$，$AB=c'$，$BC=a'$，$CA=b'$，则由内切球可得

$a+a'=b+b'=c+c'=A$、B、C、S四点所作的四条切线之和。

考虑S所对的旁切球得

$a-a'=b-b'=c-c'$（$a+b'$是S、C所作的切线的和，$b+a'$也是如此）。

从以上两式即得

$$a=b=c,\quad a'=b'=c'。$$

再考虑其他旁切圆便有$a=b=c=a'=b'=c'$，从而$SABC$为正四面体。

正四面体显然有五个与各棱都相切的球。

在平面上，每一个三角形都有一个内切圆与三个旁切圆。但在空间，只有正四面体才有一个内切球与四个旁切球。

并非任何命题都可以简单地从平面推广至空间。

8 老树新花

看不起欧氏几何，就好像是
从国外回来看不起故乡。

——H·G·弗德

尽管有人喊过"打倒欧几里得！"，中学教材里的几何内容大大削减，几何不再唯我独尊了，但是几何仍然享有重要的地位。一方面它提供了直观的"形"，提供了无穷无尽的问题；另一方面，几何学的研究极有特色，所用的公理化方法一直被人们奉为圭臬，在培养学生逻辑推理方面更是卓有成效。

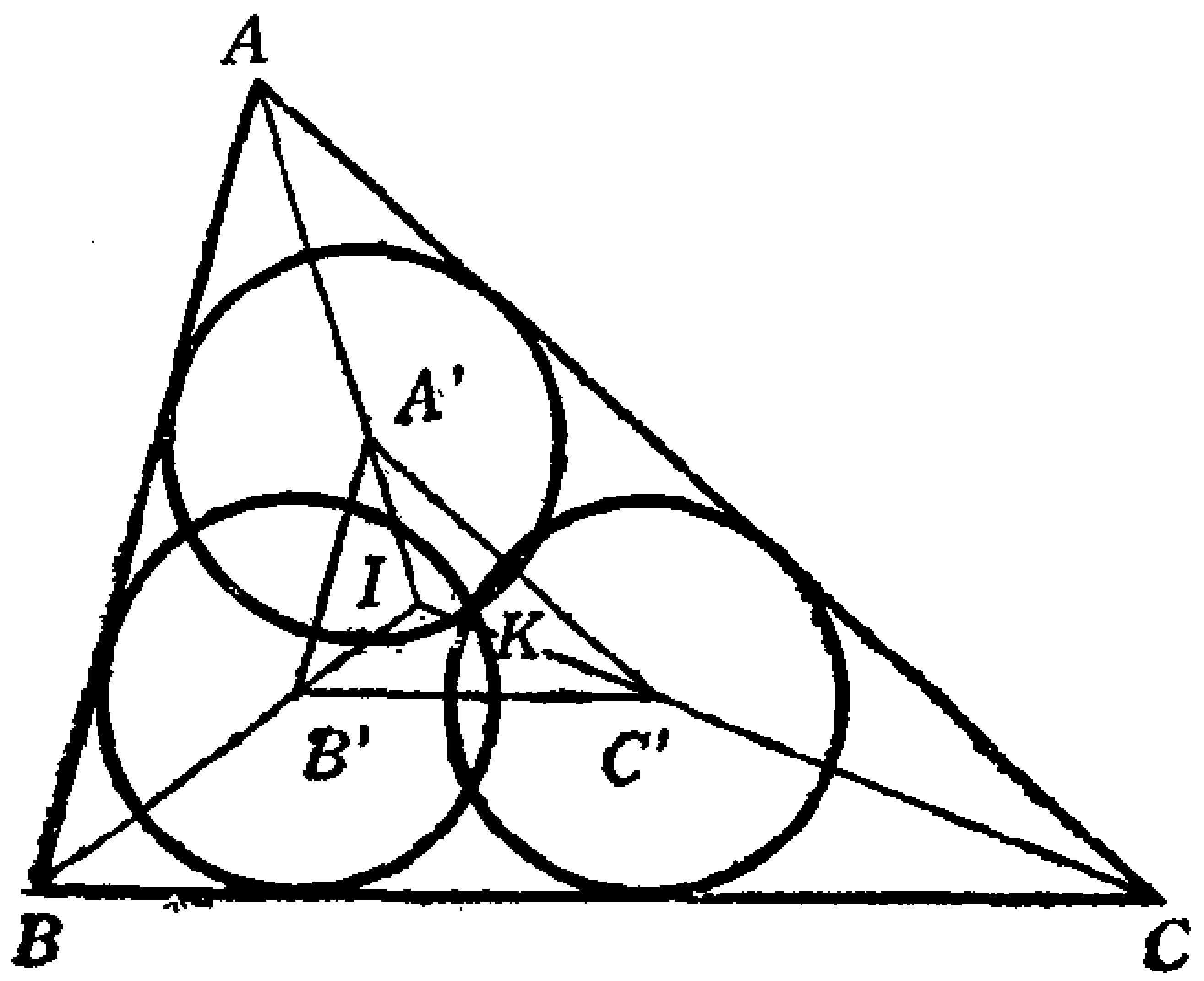


图 1

在数学竞赛中，除传统的几何问题外，着重在几何变换、轨迹、几何不等式、组合几何等方面。

例 1 （22届 5，苏联）三个全等的圆相交于一点K，这三个圆都在$\triangle ABC$内并分别与$\triangle ABC$的两条边相切。求证$\triangle ABC$的内心I、外心O与K三点共线。

设这三个圆的圆心分别为A'、B'、C'。由于$\odot A'$与AB、AC相切，所以A'在$\angle BAC$的平分线IA上。同样B'在IB上，C'在IC上。

由于$\odot A'$、$\odot B'$相等，并且都与AB相切，所以A'、B'到AB的距离相等，$A'B' \parallel AB$。

同样$B'C' \parallel BC$，$C'A' \parallel CA$。于是$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$位似，位似中心为I（在图画好之后，我们就“看出”了这个结论）。

由于$\odot A'$、$\odot B'$、$\odot C'$交于K，所以KA'、KB'、KC'相等，即K是$\triangle A'B'C'$的外心。

位似中心I、$\triangle ABC$的外心O、$\triangle A'B'C'$的外心K三点必在一条直线上。

本题如不用位似变换来证，不仅麻烦，而且思路难以看清。

例 2 （27届4，冰岛）设A、B为平面上一正n（$n \geqslant 5$）边形的两个相邻顶点，O为这n边形的中心。$\triangle XYZ$开始时与$\triangle OAB$重叠，以后一直与$\triangle OAB$全等；Y、Z在多边形的周界移动，X在多边形内。求点X的轨迹。

初等几何中的轨迹无非是由直线与圆（或直线与圆的一部分）组合而成。如果轨迹是（非圆的）二次曲线或者其他曲线，那么就必须利用解析

几何。

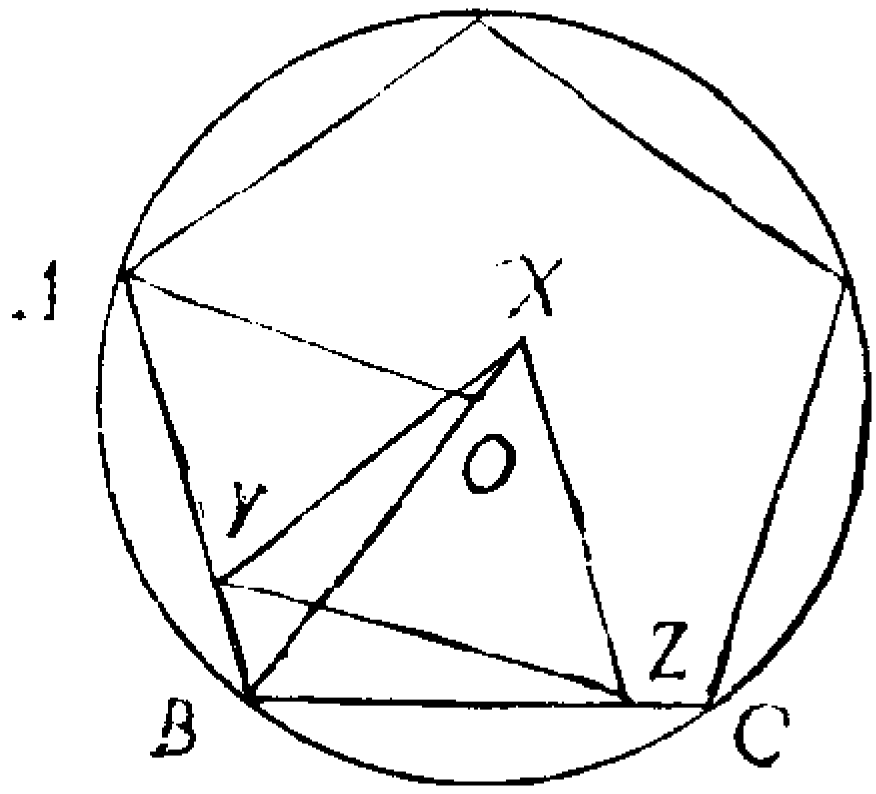


图 2

先设Y在边AB上移动。除O点外，再找两个点X的可能位置。观察表明这三个点在一条直线上，因此轨迹由直线或直线的一部分组成（如果不在一直线上，则轨迹应当由圆或圆弧组成。在难以判定的时候，应当多找几个点，作一个较为准确的圆，从而得出正确的判断）。

X、O所在的直线似乎就是BO。现在我们来证实这一点，也就是证明$\angle XBC=\angle OBC$。

由于$\angle YXZ=\angle AOB=\pi-2\angle OBA=\pi-\angle YBZ$，所以$X$、$Y$、$B$、$Z$四点共圆，从而

$$\angle XBC=\angle XYZ=\angle OBC。\qquad(1)$$

这就表明点X在直线OB上。

当Y在A时，X与O重合。当Y移向B时，X先在BO的延长线上向前移动，到达一点X_0后再反回来向O点移动。当Y与B重合时，X又与O重合。所以这部分的轨迹是（两倍的）线段OX_0。

精确地说，设$\angle ZYB=\theta$，$OA=1$，则在$\triangle XYB$

中，由正弦定理得

$$BX=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}\quad\left(\alpha=\angle OAB=\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)。\tag{2}$$

于是在开始时（$\theta=0$），$BX=1$。然后BX逐渐增加，直至$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$时达到最大值$BX_0=\frac{1}{\sin\alpha}$。然后$BX$逐渐减少，直至$\theta=\pi-2\alpha$时，$BX=1$。这正好与上面的描述吻合。

至于轨迹的纯粹性，也就是OX_0上每一点X都是一个相应的$\triangle XYZ$的顶点（在IMO中通常是不需要证明的）。证明并不复杂，实际上是一个作图问题。首先当X在OX_0上时，一定有$\theta\in[0,\ \pi-2\alpha]$，使（2）成立。然后在线段$AB$上取$Y$，使$\angle XYB=\theta+\alpha$（因为$\alpha\leqslant\theta+\alpha\leqslant\pi-\alpha$，$AB$上一定有这样的$Y$），由于（1）及正弦定理，$XY=1$。再作$\angle XYZ=\alpha$，$YZ$交$BC$于$Z$，则$X$、$Y$、$B$、$Z$四点共圆，$\angle XZY=\angle OBA$，从而$\triangle XYZ\cong\triangle OAB$。这就是说，只要能够作出合乎要求的$\triangle XYZ$，那么$X$就是轨迹中的点。

当Y在BC上变动时，情况相同。所以本题的轨迹是n条线段组成的“星形”，这些线段的一端是O，长度为$\frac{1}{\sin\alpha}-1$，并且分别在OA、OB、……的延长线上。

从运动的观点来看，点X在上述每条线段上走

了两次。

例 3 （30届2，澳大利亚）锐角三角形ABC中，A角的等分线与三角形的外接圆交于另一点A_1。点B_1、C_1与此类似。连接AA_1与B、C两角的外角等分线相交于A_0。点B_0、C_0与此类似。求证：

（1）三角形$A_0B_0C_0$的面积是六边形$AC_1BA_1CB_1$面积的二倍。

（2）三角形$A_0B_0C_0$的面积至少是三角形ABC面积的四倍。

前一问是一道普通的几何题。设I为$\triangle ABC$的内心，不难证明$IA_1=BA_1=A_1A_0$（A_0、B_0、C_0是$\triangle ABC$的旁心），由此即可导出(1)。

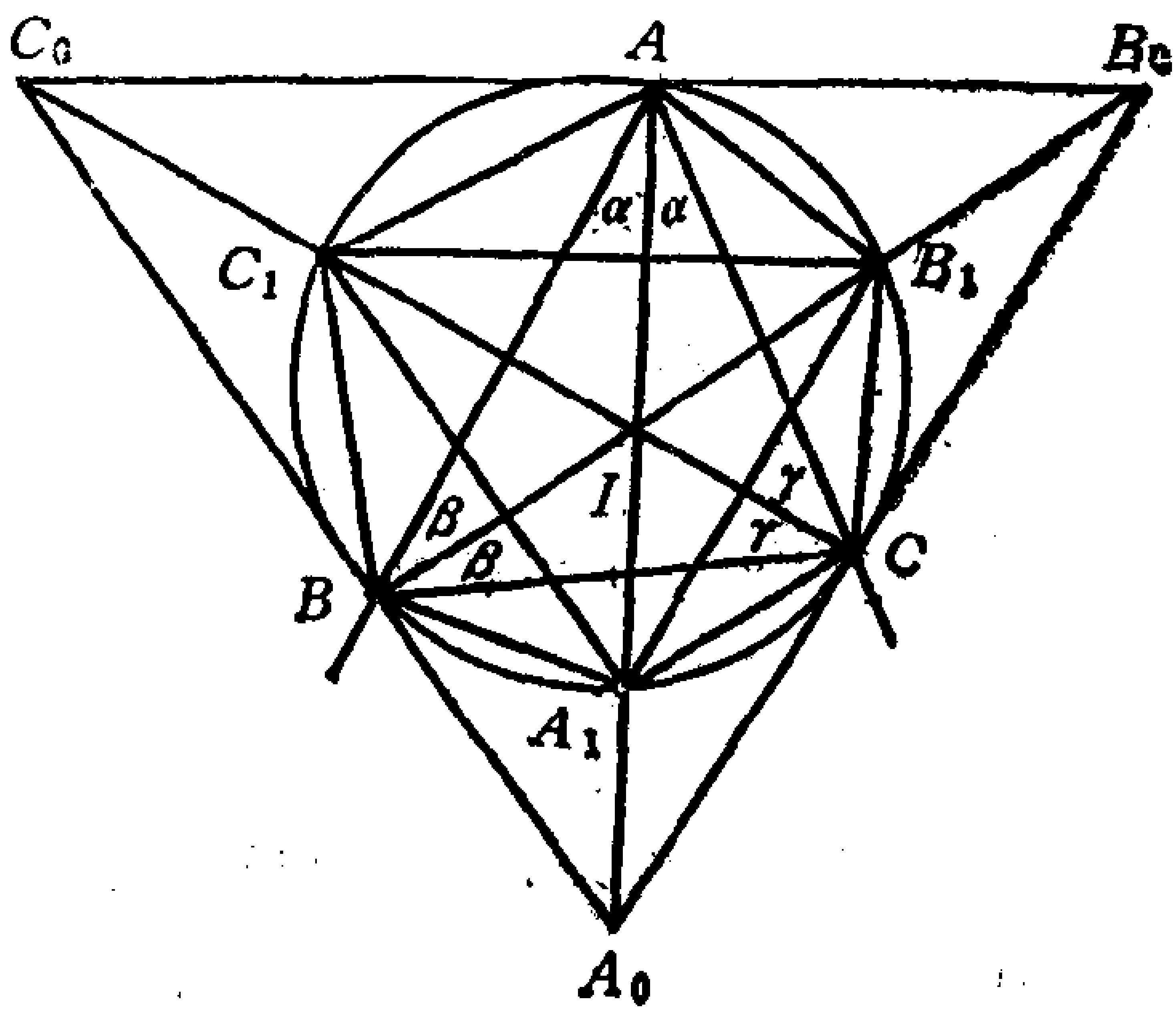


图 3

（2）是一个几何不等式，证法很多。如果注意到$A_1B_1 /\!/ A_0B_0$等，便知道$S_{A_0B_0C_0}=4S_{A_1B_1C_1}$，所

以只需要证明

$$S_{A_1B_1C_1}\geqslant S_{ABC}。\qquad (3)$$

证明(3) 的一个方法是利用面积公式

$$S_{ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C。$$

这里R为外接圆的半径（这一公式可由$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$及$b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$导出）。如果$A=2\alpha$, $B=2\beta$, $C=2\gamma$，那么$\triangle A_1B_1C_1$的角为$\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, $\alpha+\beta$。所以

$$\begin{aligned}S_{A_1B_1C_1}&=2R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\\&\quad\cdot\sin(\gamma+\alpha)\\&=2R^2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma+\\&\quad\cos\beta\sin\gamma)(\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha)\\&\geqslant 2R^2\cdot 2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}\cdot\\&\quad 2\sqrt{\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma}\cdot\\&\quad 2\sqrt{\sin\gamma\cos\gamma\sin\alpha\cos\alpha}\\&=2R^2\cdot 2^3\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma\\&=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma=S_{ABC}。\end{aligned}$$

即(3) 成立。

证明的关键一步是不等式$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$。

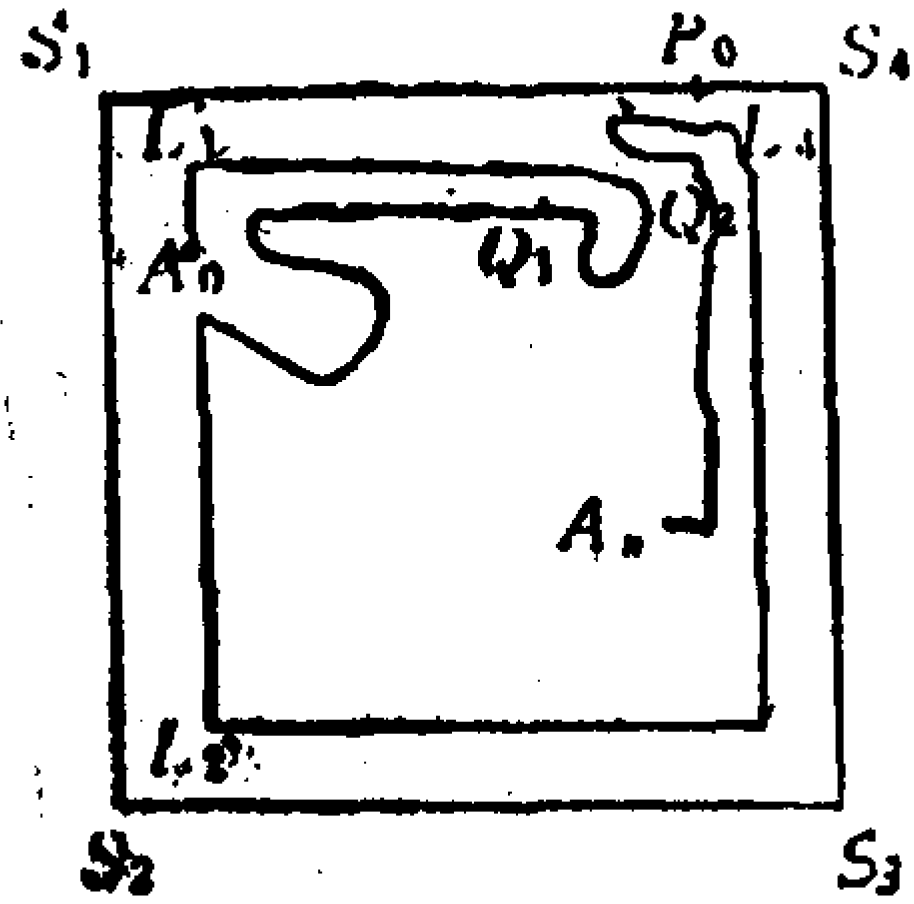
例 4 （23届6，越南）设S是边长为100的正方形，L为S内的一条折线，由线段A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$组成，其中$A_0\neq A_n$，并且L无自身相交的点。如果对S的边上的任一点P，总可以在L上找出一个点与P的距离不超过$\frac{1}{2}$，证明：在L上必定存

在两个点X、Y，它们的距离不大于1，但它们之间的线段L的长度不小于198。

S的周界上有4个重要的点，即这个正方形的顶点。设为S_1、S_2、S_3、S_4。根据题设，在L上有4个点L_1、L_2、L_3、L_4；L_i与S_i的距离$\leqslant\frac{1}{2}$($i=1$、2、3、4)。

在沿L由A_0到A_n时，我们可以假定先经过L_1(否则改变编号，使第一个出现的L_i作为L_1)，并且在L_2与L_4中，先出现的是L_2。

考虑边S_1S_4。对S_1S_4上每一点P，L中总有一点Q，$PQ\leqslant\frac{1}{2}$。现在将S_1S_4上的点分为两类：如果Q在A_0L_2这一段，P在第一类。如果Q在L_2A_n这一段，P在第二类。显然S_1在第一类，S_4在第二类，所以两类都是非空的。这两类可以有公共点，如果P_0是公共点，那么有Q_1、Q_2，满足



$$P_0Q_1 \leqslant \frac{1}{2}, \quad P_0Q_2 \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

并且Q_1在A_0L_2上，Q_2在L_2A_n上。

由(4) 即知

$$Q_1Q_2 \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1。$$

另一方面，从Q_1沿着L到Q_2必须经过 L_2， 而Q_1到L_2这段长$\geqslant Q_1L_2 \geqslant S_1S_2 - P_0Q_1 - S_2L_2$

$\geqslant 100 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 99$，$L_2$到$Q_2$这段长 也$\geqslant 99$，所 以

Q_1、Q_2之间的L的长$\geqslant 99 + 99 = 198$。

Q_1、Q_2就是所要求的点X、Y。

最后说明一下前面定义的两个类一定有公共点P_0。为此，我们设在S_1S_4上，第一类的点最远能延伸到P_0，也就是说在P_0的右面没有第一类的点，而在P_0左面任意近的区间$(P, P_0]$内都有第一类的点（用微积分中的术语来说，P_0是第一类点的上确界）。这时P_0必属于第一类，也必属第二类，它就是第一类与第二类的公共点。

距离、染色、覆盖、格点等问题属于组合几何的范畴。

几何学，从欧几里得时代算起，也已经有两千多年历史了。但是，这棵老树上却不断结出新花。组合几何就是其中的一朵。

9 等与不等

“多么奇怪的感觉！”阿丽思说，“我一定是像望远镜那样在缩小。”

——卡罗尔：《**阿丽思漫游奇境记**》

“恒等式一旦写出来，就成为显然了”。这话虽然说得太绝对了，但在大多数情况，恒等式的证明确实比不等式远为容易。

每个不等式都是从等式产生的。即使最基本的不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$，也是由恒等式

$$a^2+b^2-(a-b)^2=2ab$$

砍去一项$-(a-b)^2$而得出的。一个恒等式去掉一些项就产生一个不等式。证不等式的困难就在于我们不知道该去掉（或该增加）哪些项。

例1 （16届5，荷兰）a、b、c、d是任意正实数，下述和式

$$s=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}, \tag{1}$$

的值在什么范围内？

将前两项的分母改为$a+b$，后两项的分母改为

$c+d$，这样前两项的和为1，后两项的和也为1。由于分母减少时，分数的值增加，所以 $s<1+1=2$。

另一方面，将分母全改为$a+b+c+d$，则四项之和为1，所以$s>1$。于是

$$1<s<2。\tag{2}$$

我们利用放与缩（也就是去掉$\frac{a}{a+b+d}-\frac{a}{a+b+c+d}$等项或增加一些项）得到了(2)。这种"放缩法"，在证不等式时是极常用的。国外称之为"望远镜法"，因为望远镜是可伸可缩的。

严格说来，我们不能从(2)式就断言S的变化范围就是开区间（1,2），除非能够证明这个区间内的每一个值都能为s取得。

用初等的方法（不用连续性）来证明这一点并不太困难，但也不很容易。设$0<t<1$，为了证明s可以取得$1+t$这个值，我们令

$$a=c=1,\ b+1=e。$$

这时$s=1+t$成为

$$\frac{2}{e+d}+\frac{e-1}{e+1}+\frac{d}{2+d}=1+t。\tag{3}$$

将(3)看作d的方程，化简为

$$d^2+(e+2)d+2\left(e-\frac{2-e}{t-\frac{e-1}{e+1}}\right)=0。\tag{4}$$

要这个方程有正根，只需

$$e-\frac{2-e}{t-\frac{e-1}{e+1}}<0,$$

即

$$e(e+1)<\frac{2}{t},t>\frac{e-1}{e+1} \tag{5}$$

或写成b的不等式

$$(b+1)(b+2)<\frac{2}{t},t>\frac{b}{b+2}。 \tag{6}$$

由于$t<1$，所以$\sqrt{\frac{2}{t}+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}>\sqrt{2+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}=0$，

区间$\left(0,min\left(\sqrt{\frac{2}{t}+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2},\frac{2t}{1-t}\right)\right)$中的$b$满足(6)，由(4)可以得出正根$d$，这组$b$、$d$及$a=c=1$使$s=1+t$。

例2（11届6，苏联）证明：对所有满足条件$x_1>0$，$x_2>0$，$x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2>0$的实数x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2，有不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2} \tag{7}$$

成立，并求出其中等号成立的充分必要条件。

我们令$x_1y_1-z_1^2=a^2$，$x_2y_2-z_2^2=b^2$，即$a=\sqrt{x_1y_1-z_1^2}$，$b=\sqrt{x_2y_2-z_2^2}$。容易知道

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{8}{4ab}\cdot\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

$$\geqslant\frac{8}{4ab}\geqslant\frac{8}{(a+b)^2},$$

所以只需证明

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$$

$$\geqslant\left(\sqrt{x_1y_1-z_1^2}+\sqrt{x_2y_2-z_2^2}\right)^2, \quad (8)$$

即

$$x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$

$$\geqslant 2\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}。\quad (9)$$

(9) 式左边$\geqslant 2\left(\sqrt{x_1y_1x_2y_2}-z_1z_2\right)\geqslant 0$，所以(9)可由下式推出：

$$\left(\sqrt{x_1y_1x_2y_2}-z_1z_2\right)^2$$

$$\geqslant(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)。\quad (10)$$

(10) 即

$$x_2y_2z_1^2+x_1y_1z_2^2\geqslant 2z_1z_2\sqrt{x_1y_1x_2y_2}。\quad (11)$$

由算术-几何平均不等式 $A+B\geqslant 2\sqrt{AB}$ （也就是$a^2+b^2\geqslant 2ab$）立即得出(11)，因此(7)式成立。

不难看出，当且仅当$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$时，(7) 中等号成立。

(7) 是有“背景”的，它是一个矩阵不等式的特殊情况。所谓矩阵就是一个数表，如

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ z_2 & y_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1+x_2 & z_1+z_2 \\ z_1+z_2 & y_1+y_2 \end{pmatrix}$$

都是矩阵。第三个称为前两个的和（将对应元素相加）。表达式

$$\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_1 - z_1{}^2$$

称为矩阵 $\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix}$ 的行列式。

如果$x_1>0$，$x_1y_1-z_1{}^2>0$，则称$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix}$为正定的。（8）可以说成是正定矩阵，$A$、$B$一定满足

$$|A+B|^{\frac{1}{2}} \geqslant |A|^{\frac{1}{2}} + |B|^{\frac{1}{2}},$$

这里$|A|$表示矩阵A的行列式。更一般地，可以定义n阶（n行n列）的正定矩阵与它的行列式。在A、B为n阶正定矩阵时，必有

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geqslant |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}。\qquad (12)$$

这个不等式的证明仅用初等方法是难以奏效的。

例 3（20届5，法国）已知a_1，a_2，……为两两不同的正整数。求证对任何正整数n，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (13)$$

成立。

除了算术—几何平均不等式外，最常用的不等

式是柯西（Cauchy）不等式，即

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2,$$

其中等号当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立。

柯西不等式是由拉格朗日恒等式

$$\sum a_i^2\cdot\sum b_i^2-(\sum a_ib_i)^2=\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

去掉平方和$\sum(a_ib_j-a_jb_i)^2$而得到的。

本题即适于用柯西不等式。我们有

$$\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{k^2}\right)\geqslant\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{1}{a_k}}\cdot\sqrt{\frac{a_k}{k^2}}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)^2。$$

由于a_1，a_2，…是不同的正整数，所以

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}。$$

从上述两个不等式得

$$\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}。$$

例 4　（21届5，以色列）找出所有的实数a，对于它存在着非负实数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，满足关系

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a,\quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2,\quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3。$$

由题中的关系可以推出

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k \cdot \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = \left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 = a^4。$$

这正好是柯西不等式中等号成立的情况。如果x_i，x_j不等于0，那么$\frac{ix_i}{i^5x_i} = \frac{jx_j}{j^5x_j}$导出$i=j$。所以，$x_1$，…，$x_5$中至多有一个不为0。设$x_j \neq 0$，则$a = jx_j$，$a^2 = j^3x_j$，从而$a = j^2 (1 \leqslant j \leqslant 5)$。在$x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 0$时，$a = 0$。所以，$a$的可取值为0，1，4，9，16，25。

例 5 （22届1，英国）设P是$\triangle ABC$内一点，从P点向BC、CA、AB作垂线分别交这些边于D、E、F。请确定P点位置，使

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

为最小。

设三角形的边为a、b、c，各垂线长为x、y、z。要求出

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \tag{14}$$

在何时为最小。应注意到

$$ax + by + cz = 2\Delta。 \tag{15}$$

这里Δ为$\triangle ABC$的面积。由（15）及柯西不等式得

（与例 4 相同，乘上一式后用柯西不等式）

$$2\Delta\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$=(ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\geqslant(a+b+c)^2。$$

因此

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2\Delta}。$$

在$x=y=z$，也就是P为内心时，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$取得最小值$\frac{(a+b+c)^2}{2\Delta}$。

例 6 （24届6，美国）设 a、b、c 分别为一个三角形三边的边长，证明

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant0, \quad (16)$$

并指出等号成立的条件。

首先要指出的是（16)并非对任意一组正数a、b、c均能成立。例如$c<a=1$，而b很接近于0，则（16）左边的符号由$c^2a(c-a)$决定，因而是负的。

（16）只对于三角形的边a、b、c成立，边不仅是正数，而且还满足

$$a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b。\quad (17)$$

为了证明（16）成立，通常的方法是把它化成一个不带附加条件（17）的不等式。为此，令

$$a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y。\quad (18)$$

这里

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a),\quad y=\frac{1}{2}(c+a-b),$$

$$z=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

都是正数（如果作出$\triangle ABC$的内切圆，切三边于D、E、F，那么$BD=y$，$DC=z$，$AE=x$）。将（18）代入（16）左边，则（16）等价于

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geqslant 0。\qquad (19)$$

（19）左边

$$=2(xy^3+yz^3+zx^3-x^2yz-y^2xz-z^2xy)$$

$$=2xyz\left(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}-x-y-z\right)$$

$$=2xyz\left[\left(\frac{y^2}{z}+z-2y\right)+\left(\frac{z^2}{x}+x-2z\right)+\left(\frac{x^2}{y}+y-2x\right)\right]\geqslant 0$$

$\left(\text{或用柯西不等式}(x+y+z)\left(\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\right)\geqslant(x+y+z)^2\right)$。因此（16）成立。显然当且仅当三角形为正三角形时，（16）中等号成立。

另一种解法是设a为最大边，令

$$a-b=y,\quad a-c=x,\quad b+c-a=z,\qquad (20)$$

则$y\geqslant 0$，$x\geqslant 0$，$z>0$。（20）即

$$a=x+y+z,\quad b=x+z,\quad c=x+y。\qquad (21)$$

将（21）代入（16），则（16）等价于

$$(x+y+z)^2(x+z)y+(x+z)^2(y+z)(x-y)$$
$$-(y+z)^2(x+y+z)x\geqslant 0。\qquad (22)$$

（22）的左边的字母均非负，但x与y不知谁大谁小。因此，我们希望能使有$x-y$这因式的一些项并成以$(x-y)^2$为因式的项（即与$x-y$相乘的式子在$x=y$时应当为0）。以下的恒等变形即基于这个想法。

$$\begin{aligned}
&(22)\text{的左边}=x(x+y+z)(x+z)y\\
&\quad+(x+y+z)(x+z)(y+z)y\\
&\quad+(x+z)^2(y+z)(x-y)-(y+z)^2(x+y+z)x\\
&=xy(x+z)(x+y+z)+(y+z)(x+y+z)(zy-zx)\\
&\quad+(x+z)^2(y+z)(x-y)\\
&=xy(x+z)(2x+z)+(x-y)[-xy(x+z)\\
&\quad-z(y+z)(x+y+z)+(x+z)^2(y+z)]\\
&=xy(x+z)(2x+z)+(x-y)[-xy(x+z)\\
&\quad+(y+z)x^2+z(y+z)(x-y)]\\
&=xy(x+z)(2x+z)+xz(x-y)^2\\
&\quad+z(y+z)(x-y)^2\geqslant 0。
\end{aligned}$$

联邦德国选手伯恩哈德·里普因为这题的解法获得特别奖。他利用恒等变换将（16）左边写成

$$a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

（a是最大边），从而获得结果。这实际就是第二种解法的最后一个式子。

代换（18）、（21）将关于三角形的不等式化为非负数的“绝对不等式”（意即不受条件（17）

的约束），很有用处。

本题的错误证明很多，而且流传颇广。一个重要的原因是没有搞清楚（16）的左边是轮换式（将a换为b、b换为c、c换为a时不变），但不是对称式（将a、b互换时不变，将b、c互换时也不变）。所以只能设a为最大，而不能设$a \geqslant b \geqslant c$。因为情况$a \geqslant c \geqslant b$不能归结为上一种情况。我们在第二种解法中，小心翼翼地将以$x-y$为因式的项并为以$(x-y)^2$为因式的项，正是由于不能断定x、y的大小，否则何必这么费事？

检验一个证明是否错误，有个很简单的标准。看看它是否用到条件（17）。如果按照他的证明，（16）对所有正数均成立，那么他的证明一定是错的。因为一开始我们就指出（16）并非对所有正数a、b、c都能成立。

10 大胆假设

先猜，后证——这是

大多数的发现之道。

——波利亚：《数学的发现》

科学的发展需要种种的假设，往往是大胆的假设。当然这些假设有一定的基础，很多是从（不完全的）归纳中产生的。

与其他科学一样，数学也需要大胆的假设，正如德国数学家I·Schur所说："在数学研究中，非数学的归纳法起着重要的作用。"

但数学又是一门极其严谨的科学，它不满足于不完全的归纳（即"非数学"的归纳）。所提出的假设，猜想都必须小心的求证，很多是用数学归纳法来证明的。

让学生通过自己的观察，猜出结果，然后予以证明，正是许多竞赛题与"常规问题"的一大区别。

例1 （18届6，英国）一个数列u_0，u_1，u_2，……定义如下：

$$u_0=2,\quad u_1=\frac{5}{2}。$$

$$u_{n+1}=u_n\left(u_{n-1}^2-2\right)-u_1,\quad n=1,2,\cdots\cdots。$$

证明$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$，其中$[x]$表示不大于x的最大整数。

题中的递推公式比较复杂，我们无法从这个式子预先推断出u_n的通项公式是什么样子。但是我们可以利用这个递推公式及初始值u_0，u_1逐步算出

$$u_2=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2},\quad u_3=8\frac{1}{8},\quad u_4=32\frac{1}{32}。$$

于是可以猜测（顺便利用结论提供的信息）

$$u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}},\qquad (1)$$

然后再用数学归纳法证明（1）的确成立。这一步完全可以按照固定的套路进行：

设对于$n\leqslant k$，（1）成立，则

$$u_{k+1}=u_k\left(u_{k-1}^2-2\right)-u_1$$

$$=\left(2^{\frac{2^k-(-1)^k}{3}}+2^{-\frac{2^k-(-1)^k}{3}}\right)\cdot$$

$$\left(\left(2^{\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}}\right)^2\right.$$

$$\left.-2\right)-\frac{5}{2}$$

$$=\left(2^{\frac{2^k-(-1)^k}{3}}+2^{-\frac{2^k-(-1)^k}{3}}\right)\cdot$$

$$\left(2^{\frac{2^k-2\cdot(-1)^{k-1}}{3}}+2^{-\frac{2^k-2\cdot(-1)^{k-1}}{3}}\right)$$

$$-\frac{5}{2}$$

$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}。$$

所以（1）对于一切自然数n均成立。

由于

$$2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}=2^{2^{n-1}-2^{n-2}+2^{n-3}-\cdots+(-1)^{n-1}} \tag{2}$$

是正整数，而$2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$小于1，所以

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}。$$

例 2（24届1，英国）求出所有的函数f，它的定义域为一切正实数，并且函数值为正实数，满足下述条件：

（1）$f(xf(y))=yf(x)$（对所有的x、$y>0$）。

（2）当$x\to\infty$时，$f(x)\to 0$。

我们先猜一下f是什么样的函数。在熟悉的函

数中（正像找东西一样，首先在身边搜索，而不是一下子就踏入陌生的环境）有满足（2）的吗？$f(x)=\frac{1}{x}$（反比例函数）就是一个。它刚好满足（1）：

$$f(xf(y))=f(\frac{x}{y})=\frac{y}{x}=yf(x)。$$

（在$k\neq1$时，$\frac{k}{x}$不满足（1））。因此$\frac{1}{x}$就是本题的一个解。

“大概本题就这一个解吧？”也就是，我们猜想满足上述要求的$f(x)$必为$\frac{1}{x}$。要证明这一结论，只需证明对所有的$x>0$，

$$xf(x)=1。\tag{3}$$

注意条件（1）对所有的x、$y>0$均成立，我们可以令$y=x$，得

$$f(xf(x))=xf(x)。\tag{4}$$

这表明$xf(x)$是f的“不动点”：我们把满足

$$f(a)=a$$

的点a称为不动点。

希望（也就是猜想）1是f的不动点。如果在条件（1）中，令$y=(f(x))^{-1}$，则有

$$f(xf(y))=1。$$

这表明1是f可取的值。再令y为满足$f(y)=1$的值，则由条件（1）得

$$f(x)=yf(x),$$

从而$y=1$。即$f(1)=1$，1确实是f的不动点。

再猜测f只有一个不动点（从而（3）成立）。假如a是不动点，且$a\neq1$，这时有两种可能：

1．$a>1$。这时

$$f(a^2)=f(af(a))=af(a)=a^2,$$

所以a^2是不动点，从而a^4，a^8，…，a^{2^n}，…都是不动点，而

$$f(a^{2^n})=a^{2^n}\to+\infty,$$

这与条件（2）矛盾。

2．$a<1$。由条件（1）得

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{a}f(a)\right)=af\left(\frac{1}{a}\right),$$

所以$\frac{1}{a}$也是不动点，且$\frac{1}{a}>1$。上面的讨论已经表明这也是不可能的。

这类函数方程的问题往往需要我们提出种种猜测，然后加以证明或否定（猜错了就应当予以修正）。由于所给的条件通常是对任意的x（y、n等）都成立，所以我们可以选择一些适当的值，导出很多有用的算式（或不等式）与关系。

例3　（17届6，英国）求出满足下列条件的所有的两个变量的多项式$P(x,y)$：

（1）P是n次齐次的，即对所有实数x、y、t有

$$P(tx,ty)=t^nP(x,y)。$$

（2）对所有实数a、b、c，有

$$P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0。$$

（3）$P(1,0)=1$。

首先考察最简单的情况$n=1$。这时应设

$$P(x,y)=sx+ty。$$

由（3）可得$s=1$，再由（2）得

$$2(a+b+c)+t(a+b+c)=0,$$

所以$t=-2$，于是$n=1$的多项式为

$$P(x,y)=x-2y。$$

再考虑$n=2$的情况。我们希望$n=2$的情况与$n=1$的情况有些关系。确切点说，我们希望$x-2y$是$P(x,y)$（现在是二次多项式了）的一个因式（大胆的猜测），即

$$P(x,y)=(x-2y)(sx+ty)。\qquad (5)$$

由（3）得$s=1$。像上面那样利用条件（2）当然可以，但是毕竟较为麻烦。变通一下，在（2）中令$b=a$，$c=-2a$，则

$$P(2a,-2a)+P(-a,a)+P(-a,a)=0。$$

由于齐次条件（1），上式即

$$(2^n-2)P(a,-a)=0。$$

在$n>1$时，$2^n-2\neq0$，所以

$$P(a,-a)=0。\qquad (6)$$

（6）表明$x+y$是$P(x,y)$的因式（把$P(x,y)$看作x的多项式，在$x=-y$时，$P(x,y)=0$，因而有因式$x-(-y)$），于是由（5）及$s=1$得

$$P(x,y)=(x-2y)(x+y)。\qquad (7)$$

即比$n=1$的情况多出了一个因式$x+y$。

对于一般的n，我们猜测

$$P(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}。\qquad (8)$$

假设这结论对于$n-1$次多项式成立。对于满足条件的n次多项式$P(x,y)$，根据上面的推导，$x+y$是它的因式，所以可设

$$P(x,y)=P_1(x,y)\ (x+y)。\qquad (9)$$

其中$P_1(x,y)$是$n-1$次齐次多项式（即满足条件(1)）。由于$P(1,0)=1$，所以$P_1(1,0)=1$，即$P_1(x,y)$满足条件（3）。最后由条件（2）得

$$P_1(a+b,c)(a+b+c)+P_1(b+c,a)(a+b+c)$$
$$+P_1(c+a,b)(a+b+c)=0,$$

所以$P_1(x,y)$满足条件（2）。根据归纳假设

$$P_1(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-2}。\qquad (10)$$

由（9）、（10)即得（8）((8）满足条件是容易验证的)。

例4　（19届6，保加利亚）设$f(n)$是定义在自然数集上，并且在这个数集中取值的函数。试证：如果对于每一个n，不等式

$$f(n+1)>f(f(n))\qquad (11)$$

都成立的话，那么$f(n)=n$。

结论已经告诉我们，省了一番猜测。这个函数显然满足要求，又是最简单的，所以即使不说出答案，我们也能猜到它。问题是怎么证明呢？

f应当是严格递增的，即$f(n+1)>f(n)$，虽然

我们还没有证明它确实成立（答案透了风）。

暂且假定已有$f(n+1)>f(n)$（我们在后面补证），那么由（11）立即得出

$$n+1>f(n),$$

即（由于$f(n)$是自然数）

$$n\geqslant f(n)。\tag{12}$$

另一方面，$f(n)>f(n-1)>\cdots>f(2)>f(1)$，所以它们必须是前$n$个自然数，$f(n)=n$。

现在来证明$f(n)$严格递增。换一个等价的说法，就是在数列

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots\cdots \tag{13}$$

中，$f(1)$是最小的，$f(2)$是次小的，…。

怎样证明$f(1)$是最小的？有趣的是（11）已经表明$f(n+1)$不是最小的，即在（13）中大于1的函数值都不是最小的。因而只能$f(1)$是最小的（若干自然数中总有一个最小的）。

为了证明$f(2)$是次小的，我们考虑数列

$$f(2)-1,\ f(3)-1,\ f(4)-1,\ \cdots \tag{14}$$

（即将$f(2)$移到“头”的位置，不过将它减去1。因为我们心中知道$f(2)$减去1才正好是1）。如果记$F(n)=f(n+1)-1$，那么

$$\begin{aligned}F(n+1)&=f(n+2)-1>f(f(n+1))-1\\&=f(F(n)+1)-1=F(F(n))。\end{aligned}$$

这表明F与f的性质完全相同（$F(n)>f(1)-1\geqslant 0$，所以F的值也是自然数），于是在

$$F(1),\ F(2),\ F(3),\ \cdots \tag{14'}$$

中$F(1)$最小，即（14）中$f(2)-1$最小。这就证明了（13）中$f(2)$是次小的。并且，由于F与f性质相同，$F(2)$是（14′）中次小的，亦即$f(3)$是（13）中第三小的。如此继续下去，即知（13）是由小到大，严格递增的。

上面的证明颇为有趣。下面再给出一种更简洁、更形式化的另一种证明如下：先证明命题

"若$m\geqslant n$，则$f(m)\geqslant n$。" （15）

为此，对n进行归纳。$n=1$时命题显然成立。假设命题对n成立，则在$m\geqslant n+1$时，$m-1\geqslant n$，由归纳假设$f(m-1)\geqslant n$，$f(f(m-1))\geqslant n$，所以

$$f(m)>f(f(m-1))\geqslant n,$$

即$f(m)\geqslant n+1$。因此命题（15）对一切n成立。由（15）及$f(n)\geqslant n$得$f(f(n))\geqslant f(n)$，从而

$$f(n+1)>f(f(n))\geqslant f(n),$$

即f严格递增。以下同前。

11　上下求索

路曼曼其修远兮，

吾将上下而求索。

——屈原：《离骚》

寻求问题的答案，有时需要艰苦的努力。

例　（29届3，英国）函数f定义在正整数上（并且取正整数值），满足

$$f(1)=1,\quad f(3)=3。$$

及对所有正整数n，

$$f(2n)=f(n),$$

$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$

$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)。$$

确定（并予以证明）在≤1988的正整数中有多少个n，使$f(n)=n$？

问题的关键是求出$f(n)$的表达式。如果你事先知道这表达式，那么便不难用归纳法去证实（许多写解答的人就是这么做的）。于是，这样一来就味同嚼蜡了。我们解题的乐趣，就在于亲自动手去捉住它。为此我们先算几个函数值。由于$f(2n)=f(n)$，只需要对于奇数n来求$f(n)$。不难得出

$$f(5)=5,\quad f(7)=7。$$

似乎恒有$f(n)=n$（n为奇数）。果真如此的话，问

题就很简单了。再算下去，

$$f(9)=9,$$

又添了一个证据！但是，且莫高兴得太早，接下去的是

$$f(11)=13,$$

美梦顿时化为泡影。

看来$f(n)$的表达式较为复杂，也许算了很多n还难以发现。不过，如果算了比较多的数或者比较细心的话，你会发觉把$f(2n+1)-f(n)$先算出来较为方便，它加上$f(2n+1)$就得出$f(4n+1)$，将$f(4n+1)$再加上$f(2n+1)-f(n)$就得出$f(4n+3)$。例如算至$f(31)$后可继续求出

$$f(33)=f(17)+f(17)-f(8)=17+16=33,$$

$$f(35)=33+16=49,$$

$$f(37)=f(19)+f(19)-f(9)=25+16=41,$$

$$f(39)=41+16=57,$$

…………

产生一个表

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
$f(n)$	1	3	5	7	9	13	11	15	17	25	21	29	19	27	23	31

n	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63
$f(n)$	33	49	41	57	37	53	45	61	35	51	43	59	39	55	47	63

从表中可以发现许多有趣的事实，如

$f(2^n\pm1)=2^n\pm1$；若$f(n)=m$，则$f(m)=n$等等。不过，我们不必迷恋这些"美景"，我们的首要任务是求出$f(n)$的表达式，有了它，一切全变成显然。

在计算中，我们发现

$$f(2n+1)-f(n)=2\text{的整数幂。}$$

这个递推关系表明$f(2n+1)$将是2的一些整数幂的和，例如

$$f(29)=2^4+f(14)=2^4+f(7)=2^4+2^2+f(3)$$
$$=2^4+2^2+2+1。$$

这就启发我们使用二进制（所谓二进制，无非是把自然数表示成二的整数幂的和）。$f(n)$的值分布表也给我们同样的启发：每隔2的整数幂后有些相似的现象发生，如$f(2^n+1)=2^n+1$等。

比较一下n的二进制表示与$f(n)$的二进制表示。例如$29=2^4+2^3+1$与$f(29)=2^4+2+1$，$41=2^5+2^3+1$与$f(41)=35=2^5+2^2+1$等等。可以发现n与$f(n)$是"数字顺序相反的"，即

设$n=\overline{a_1a_2\cdots a_k}$，则

$$f(n)=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_1}。\qquad(1)$$

这里$\overline{a_1a_2\cdots a_k}$代表$a_1\times2^{k-1}+a_2\times2^{k-2}+\cdots+a_k$是$n$的二进制表示。例如

$$29=\overline{11001},\quad f(29)=\overline{10011};$$

$$41=\overline{101001},\quad f(41)=\overline{100101}。$$

当n为偶数时，（1）仍然适用。例如

$12=\overline{1100}$，$f(12)=\overline{0011}=1\times2+1=3$。

公式（1）的得来殊不容易。这可能是一个漫长的过程，需要许多时间去“上下求索”。但是真正想提高你的解题能力，就必须花这番功夫。因为解题的经验不是读读解答就可以取得的。“你想学会游泳，你就必须下水，你想成为解题能手，你就必须去解题。”

当然我们还必须证明（1）确实是$f(n)$的表达式。这只是一件“例行公事”而已。用归纳法。奠基是显然的。设当$n<l$时（1）成立。考虑$f(l)$。

1．在l是偶数时，设$l=\overline{a_1a_2\cdots a_{k-1}0}$，则

$$f(l)=f(\overline{a_1a_2\cdots a_{k-1}0})=f(\overline{a_1a_2\cdots a_{k-1}})$$
$$=\overline{a_{k-1}\cdots a_2a_1}=\overline{0a_{k-1}\cdots a_2a_1}$$

2．在$l=4m+1$时，设$l=\overline{a_1\cdots a_s01}$，则

$$f(l)=f(\overline{a_1\cdots a_s01})$$
$$=2f(\overline{a_1\cdots a_s1})-f(\overline{a_1\cdots a_s})$$
$$=\overline{1a_s\cdots a_1}+\overline{1a_s\cdots a_1}-\overline{a_s\cdots a_1}=\overline{10a_s\cdots a_1}。$$

3．在$l=4m+3$时，设$l=\overline{a_1\cdots a_s11}$，则

$$f(l)=f(\overline{a_1\cdots a_s11})$$
$$=3f(\overline{a_1\cdots a_s1})-2f(\overline{a_1\cdots a_s})$$
$$=\overline{1a_s\cdots a_1}+\overline{1a_s\cdots a_1}+\overline{1a_s\cdots a_1}$$

$$-\overline{a_s\cdots a_1}-\overline{a_s\cdots a_1}$$

$$=\overline{11a_s\cdots a_1}。$$

于是（1）对一切自然数n成立。

现在看看什么样的n满足$f(n)=n$。由公式（1），我们知道n必须是“对称的”，即形如

$$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_3a_2a_1}。$$

在$2s$位（$2^{2s-1}\leqslant n<2^{2s}$）或$2s-1$位（$2^{2s-2}\leqslant n<2^{2s-1}$）二进制的数中各有$2^{s-1}$个是对称的（首位与末位数字必须是1，第二位至第$s$位的数字可以为0或1，其余数字随之确定）。易知

$$1988=\overline{11111000100}\ (2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^2)$$

在二进制中是11位数。11位数中有

$$1+1+2+2+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+2^5=94$$

个是对称数，其中$\overline{11111111111}$与$\overline{11111011111}$大于1988，并且也只有这两个大于1988（因为1988的二进制表示中前5位数字都是1）。所以本题的答案是92。

12 横看侧看

横看成岭侧成峰，

远近高低各不同。

——苏轼：《题西林壁》

解题时需要从各个方面去看问题。将几方面考察的结果综合起来，才能对问题的本质有透彻的理解。这就和看庐山一样，需要横看、侧看，在山中看、在山外看，在地面看、坐了飞机到天上看（可惜苏东坡学士没有这种福气）。

许多组合问题要从两个方面去考察同一个量。如果每个方面都算出精确的结果，那么得出一个等式。如果至少有一个方面采取了估计的方法，那么得出的是不等式。也许某一方面没有量的计算，只有质的描述，这往往要赋于问题中考虑的对象某些特殊性质。也许两个方面互相矛盾，这是一件好事，采用反证法时就希望出现这种现象。

例1 （30届3，荷兰）设n和k是正整数。S是平面上n个点的集合，满足：

（1）S中任何三点不共线；

（2）对S中的每一点P，S中至少存在k个点与P距离相等。

求证：$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$。

我们选择什么量来考察呢？这是关系成败利钝的一步。

不要离题太远。或许选择以S中的点为两个端点的线段——姑且称之为“好线段”——的条数来考虑就可以了。

一方面，好线段的条数显然为C_n^2。

另一方面，性质2告诉我们，以S中任一点P为圆心，可以作一个圆，这个圆上至少有k个S中的点。因此，这个圆至少有nC_k^2条弦是好线段。

S中有n个点，因而可作n个圆，每个圆有C_k^2条弦是好线段，共有nC_k^2条。不过其中有一些被重复地计算了两次或更多次，这种线段是两个圆或几个圆的公共弦，由于每两个圆至多有一条公共弦，所以n个圆至多有C_n^2条公共弦（重数计算在内），从而至少有

$$nC_k^2 - C_n^2$$

条弦是好线段。

将两个方面综合起来得

$$nC_k^2 - C_n^2 \leqslant C_n^2,$$

经过化简成为

$$k^2 - k - 2(n-1) \leqslant 0,$$

从而

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}\text{。}$$

还可以选择其他的量来考虑。例如S中在好线段的垂直平分线上的点的个数，也就是由S中的点构成的等腰三角形的、与底边相对的顶点的个数。

题目中的条件（1）是多余的。我们的解法并未用到它。不过，有的解法少它不可，例如考虑等腰三角形的顶点个数或者“好直线”（即过S中两个点的直线）的条数，都要用到S中每三点不共线。如果去掉条件（1），问题的难度就增加了一些。

线段、直线，仅仅一字之差，需要的条件却很不一样，这些地方应当仔细玩味。

选题委员会把问题分为A、B、C三级。这题属于最难的A级。不知读者认为这样评价是否确当？

例2　（29届2，捷克斯洛伐克）设n为正整数，A_1、A_2、…、A_{2n+1}都是集B的子集，并且

（a）每个A_i恰有$2n$个元素。

（b）每个$A_i\cap A_j$（$1\leqslant i<j\leqslant 2n+1$）恰含一个元素。

（c）B的每个元素至少属于A_i中的两个。

问对怎样的n，可以将B中元素各标上数0或1，使得每个A_i恰含n个标上0的元素？

这道题的条件（a）、（b）都出现了“恰”这个字。我们首先指出（c）中的“至少”实际上也可以改成“恰”。

因为如果有一个元素$a_1 \in A_1 \cap A_{2n} \cap A_{2n+1}$，那么剩下的$2n-2$个子集$A_2$、$A_3$、…、$A_{2n-1}$每个至多含$A_1$中一个元素（性质（$b$）），从而$A_1$中至少有一个元素$\overline{\in} A_2 \cup A_3 \cup \cdots\cdots \cup A_{2n-1} \cup A_{2n} \cup A_{2n+1}$，与（$c$）矛盾。

如果每个A_i中恰有n个元素标的数为0，我们考虑一个形状如下的矩形数表：

$$
\begin{array}{ll}
 & a_1 a_2 \cdots\cdots \\
A_1 & \\
A_2 & \\
\vdots & \\
A_{2n+1} &
\end{array}
$$

如果$a_j \in A_i$，并且被标为1，就在第i行第j列填上1。如果$a_j \in A_i$，并且被标为0，就在第i行第j列填上0。

由于每个A_i恰含$2n$个元素，所以每行填了$2n$个数，共填$2n(2n+1)$个数。

另一方面，由于每个元素恰属于两个A_i，所以每列有2个数。因此这表应有$n(2n+1)$列，即B的元数为$n(2n+1)$。

不仅如此，表中每一行恰有n个1，所以每一行的数加起来等于n，表中所有的数加起来等于$n(2n+1)$。

另一方面，每个数在同一列出现两次，和为偶数2或0，表中所有数的和也应为偶数，即$n(2n+1)$为偶数。从而n为偶数。

反过来，设n为偶数$2k$。我们可以构造出一种合乎要求的标数法。为此，考虑一个圆周上依时针顺序等距离排列的$2n+1$个点A_1、A_2、…、A_{2n+1}，每两点连一条弦，这些弦就是B的元素，从A_i出发的$2n$条弦所成的集合就是集A_i（如果你愿意，可以把点A_i换成另一个字母C_i，不换也无关宏旨）。显然条件（a）、（b）、（c）都成立。将圆周上距A_i最近的$2k$个点与A_i所连的弦标上0。0标完后，剩下的弦标上1。这种标法就符合题述要求。

例3 （19届2，越南）在一个有限的实数数列中，任何7个连续项的和都是负数，任何11个连续项的和都是正数。试问这样一个数列最多能包含多少个项？

我们证明这个数列至多含16项。

首先证明17项就不能具有所述的性质。用反证法，假设有一个17项的数列a_1，…，a_{17}具有所述性质。将每连续11项写成一行：

$$
\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{10} & a_{11} \\
a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{11} & a_{12} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_7 & a_8 & a_9 & \cdots & a_{16} & a_{17}
\end{array}
$$

共可写成七行（恰好写到a_{17}为止）。由于表中每一行的和都是正数，所有数的和当然也是正的。

但另一方面，如果先算各列的和，再将列和加起来，那么由于每一列的七个数的和都是负的，总和当然是负的。矛盾！

其次，我们可以造出一个16项的数列满足要求。这个数列应尽可能造得简单些，所以我们设其中的正数都为a，负数都为b（如果这样做不能造出所需要的数列，那么可以“改弦更张”，作一些变动，决不顽固地坚持成见）。在连续7项中至少有一个b，仅有一个b是不行的，因为如果$b+6a<0$，那么11项（其中将有2个b）之和就小于0。我们假定7项中有2个b，而11项中有3个b，看看数列

a，a，b，a，a，a，b，a，a，b，a，a，a，b，a，a

能否满足要求。

这只需取$5a+2b<0$，$8a+3b>0$，即

$$\frac{8}{3}a>-b>\frac{5}{2}a。$$

为方便起见，我们取a为整数5，b为-13。16项的数列

5，5，-13，5，5，5，-13，5，5，-13，5，5，5，-13，5，5

确实满足要求。

上面两个问题的后半部分都已经属于构造法了。

13 抽屉苹果

只在此山中，

云深不知处。

——贾岛：《寻隐者不遇》

证明具有某种性质的对象存在，除了用构造法把它造出来（找出来），还可以采用抽屉原理：将$mn+1$个苹果放入n个抽屉中，必有一个抽屉中的苹果多于m个。

德国数学家迪里赫勒（Dirichlet，1805—1859）在研究有理数逼近无理数时，首次明确地使用了这一原理。因此，抽屉原理也称为迪里赫勒原理。

例1 （14届1，苏联）一个集合由十个两位数组成。证明这个集合必有两个无公共元素的子集，两个子集中各数的和相等。

这个集合有$2^{10}-1$个非空子集，每个子集中元素的和小于$10\times100=1000$。由于$2^{10}-1=1023$大于1000，所以必有两个子集A、B中元素的和相同（如果有标号为1，2，…，1000的1000个抽屉，将这1023个子集按照它的元素的和放入相应的抽屉，那么这1023个“苹果”中一定有两个落入同一个抽屉中）。

A、B可能有公共元素，将这种元素从A、B中

去掉，产生两个无公共元素的子集A_1、B_1，它们中各数的和仍然相等。

使用抽屉原理时，只是证明了具有某种性质的对象存在，究竟是谁？在什么地方？并没有说明，也没有必要说明。

例2 （20届6，荷兰）一个国际社团的成员来自六个国家，共有成员1978人。用1，2，3，…，1977，1978编号。请证明该社团至少有一个成员的编号数，与他的两个同胞的编号数之和相等，或是一个同胞的编号数的二倍。

由于$\frac{1978}{6}>329$，根据抽屉原理，必有一个国家A的成员≥330个。设a_1是其中号码最大的，如果a_1-a_j（$a_j\in A$，$j\neq 1$）中有一个$\in A$，那么结论即已成立。如果329个a_1-a_j都在其他五个国家中，那么由于$\frac{329}{5}>65$，必有一个国家B中有66个形如a_1-a_j的号码。

再考虑其中最大的$b_2=a_1-a_2$与$b_j=a_1-a_j$的差。由于$b_2-b_j=a_2-a_j$，如果这些差中有一个$\in A$或B，结论成立。否则这65个差中必有17（$\frac{65}{4}>16$）个在国家C中。继续照此进行。或者结论成立，或者有6（$\frac{16}{3}>5$）个差在D中，3（$\frac{6}{2}=3$）个差在E中，最后有2个差（$\frac{3}{2}>1$）在同一个国家F中，设

为f_6，f_7。差

$$f_6-f_7=e_6-e_7=d_6-d_7=c_6-c_7=b_6-b_7=a_6-a_7$$

无论在哪一个国家中，结论均成立。

1978年，我们刚刚接触国际数学竞赛的问题。当时，大家都觉得这道题很难，无从下手。但现在已经成为一道熟题，很多奥林匹克学校都讲过它。可见一个新方法会逐渐被大家掌握的，掌握了，也就不再觉得困难了。

例3 （25届3，罗马尼亚）平面上有两定点O和A，对平面上除O以外的任何点X，用$a(X)$表示射线OA和OX之间的角度，该角是OA按逆时针方向旋转到OX而产生的（$0\leqslant a(X)<2\pi$）。设$C(X)$是以O为圆心，以$OX+\dfrac{a(X)}{OX}$为半径的圆。如果该平面上的每一点都被涂上n种颜色中的一种，证明平面上存在一点Y，$a(Y)>0$，Y的颜色与$C(Y)$上某一点的颜色相同。

首先我们证明有两个以O为圆心的圆，上面的颜色的种数相同（圆与OX的交点不算在内）。证明相当简单：圆有无穷多个，圆上面颜色的种数（n种颜色的子集）至多为2^n-1，所以必有两个圆的颜色的种数相同。

设这两个圆的半径为$r<s$。我们证明在小圆上必有一点Y，使得$C(Y)$为大圆，即

$$r+\frac{a(Y)}{r}=s。\tag{1}$$

（1）等价于

$$a(Y)=r(s-r)。\qquad (2)$$

我们可以假定$s<1$（因为半径小于1的、以O为心的圆有无穷多个），于是由（2）给出的$a(Y)\in(0,2\pi)$，以它为幅角的、在小圆上的点Y就以大圆为$C(Y)$。

由于两圆颜色的种数相同，大圆上当然有一点与Y的颜色相同。

本题的解法很多。先定出圆$C(Y)$再来找Y是比较聪明的办法。

例 4 （6届4，匈牙利）17个科学家中的每一个和其他的人都通信。在他们的通信中仅仅讨论三个题目，并且任两个科学家之间仅讨论一个题目。证明其中至少有三个科学家，他们互相通信中讨论的是同一个题目。

这是在IMO中最早出现的组合（图论）问题。

将科学家用点A_0、A_1、…、A_{16}表示。每两个点之间连一条线。如果讨论的是第一个题目，这条线涂上红色；讨论的是第二个题目，则涂黄色；第三个题目涂蓝色。

自A_0引出的线有16条，根据抽屉原则，其中有六条或更多条是同一种颜色的。不妨设A_0A_1，A_0A_2，A_0A_3，A_0A_4，A_0A_5，A_0A_6为红色。

考虑自A_1引出的五条线A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_1A_5，A_1A_6。如果这五条线中有一条，比如说A_1A_2是红的，那么A_0A_1，A_0A_2，A_1A_2都是红

的，也就是A_0、A_1、A_2三人讨论的是同一个题目。

如果这五条线都不是红的，其中必有三条同色。不妨假设A_1A_2、A_1A_3、A_1A_4是黄色。如果A_2A_3、A_3A_4、A_2A_4中有一条为红色，那么它与A_0引出的两条线组成一个（三条边全为红色的）红色三角形。如果有一条为黄色，那么它与A_1引出的两条线组成黄色三角形。如果三条全为蓝色，那么$\triangle A_2A_3A_4$就是一个蓝色三角形。总之结论成立。

这种讨论一个图中是否存在同色三角形（或其他同色图形）的问题在图论中称为拉姆赛（Ramsey，英国逻辑学家）问题，内容极其丰富。

例5　（28届3，联邦德国）设x_1，x_2，…，x_n为实数，满足$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$。证明对每一个整数$k\geqslant2$，存在整数$a_1$，$a_2$，…，$a_n$不全为0；对每一$i$，$|a_i|\leqslant k-1$；并且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}。\tag{3}$$

首先注意题中a_i可正可负，所以不妨假定x_i全是非负的（否则用$-x_i$代替x_i，结论成立时，用$-a_i$代替a_i并将$-x_i$还原为x_i）。

考虑形如$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$，$0\leqslant b_i\leqslant k-1$（$i=1,2,\cdots,n$）的数，这种数有$k^n$个。由于

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(1^2+1^2+\cdots+1^2)=n$（柯西不等式），

所以

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n\leqslant(k-1)\sqrt{n},$$

即k^n个形如$b_1x_1+\cdots+b_nx_n$（$0\leqslant b_i\leqslant k-1$）的数都在区间〔0，$(k-1)\sqrt{n}$〕内。将这区间等分为$k^n-1$份，每份长为$\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$，则必有一份里有两个数$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$，$b'_1x_1+b'_2x_2+\cdots+b'_nx_n$，$0\leqslant b_i$，$b'_i\leqslant k-1$（$i=1,2,\cdots,n$）。即有

$$|b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n-b'_1x_1-b'_2x_2-\cdots-b'_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}。$$

令$a_i=b_i-b'_i$（$i=1,2,\cdots,n$），则a_i不全为0，

$$|a_i|=|b_i-b'_i|\leqslant k-1,$$

并且（3）式成立。

例6　（26届4，蒙古）集合M由1985个互不相同的正整数构成，每个数都不被大于26的质数整除。证明M中有4个不同的元素，它们的积是一个整数的4次幂。

M中的数的质因数不大于26，即只可能为

2，3，5，7，11，13，17，19，23

中的某一个。所以M中的数都可以写成

$$2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdots23^{\alpha_9}\qquad(4)$$

的形式，其中α_1，α_2，$\cdots$，α_9为非负整数。

我们希望能在M中找到4个数，将它们表成（4）的形式后，2的指数之和，3的指数之和，…，23的指数之和都是4的倍数。这件事不容易做到，只好

暂把要求降低一些：证明M中有两个数，它们的积为整数的平方。也就是相应的指数之和都是偶数。

注意α_i按奇偶来分只有两种可能：奇或偶。所以9个α的奇偶分配共2^9种。如果有513个形如（4）的自然数，其中必有两个的指数α_1，α_2，…，α_9分别与α_1'，α_2'，…，α_9'的奇偶性相同。M中有$1985>513$个形如（4）的数，当然可以找出一对具有所述性质的数。不仅如此，将这一对数取出后，还可以继续在M中取出第二对具有所述性质的数，如此继续下去，可选出737对这样的数（直到剩下的数少于513）。

每一对这样的数相乘，积为

$$2^{2\beta_1}\cdot 3^{2\beta_2}\cdots 23^{2\beta_9} \tag{5}$$

的形式，其中β_i（$1\leqslant i\leqslant 9$）为非负整数。我们有$737>513$个这样的积，根据上面所说，必有两个积，在写成（5）的形式后，指数β_1、β_2、…、β_9分别与β_1'、β_2'、…、β_9'的奇偶性相同。这两个积ab、cd的积

$$(ab)(cd)=2^{4\gamma_1}\cdot 3^{4\gamma_2}\cdots 23^{4\gamma_9},$$

其中$\gamma_i=\dfrac{1}{2}(\beta_i+\beta_i')$是非负整数，所以$a$、$b$、$c$、$d$ 4个数的积为整数的4次幂。

本题必须先考虑平方，然后考虑4次方。

14　子虚乌有

上穷碧落下黄泉，

两处茫茫皆不见。

——白居易：《长恨歌》

问题的答案未必永远是肯定的，有时具有某些性质的对象根本就不存在，你得有这样的思想准备。如果在很长时间的搜索后还是找不到，那就应当反过来想一想，是不是所要办的事根本就不可能办成。

证明不存在的方法当然是反证法，即假设所说的事物存在，然后导出矛盾。

例1　（12届4，捷克斯洛伐克）找出具有下列性质的所有正整数n，使集合$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$可以划分成两个无公共元素的非空子集，一个子集中所有元素的积与另一个子集中所有元素的积相等。

假定n具有上述性质，那么下列6个数

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$$

中的任意一个质因数至少整除其中的两个数，因而能整除它们的差。所以，它们的质因数只能为2、3或5。

再考虑中间的4个数

$$n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4。$$

由于它们之间的差及n或$n+5$与它们的差都不等于5，所以这4个数均不被5整除（否则只有一个数被5整除，其他5个都不被5整除）。它们的质因数只能为2与3。这4个数中有两个为奇数，它们必须为3的正整数幂3^r与3^s（$r<s$）。但这两个奇数之差为2，而3^s-3^r是3的倍数，决不能等于2。矛盾！这就说明具有所述性质的n是不存在的。

上述证明的要点是：a、b的公约数一定整除$a-b$，因此连续整数中每两个的公共质因数不会太多。

例2 （28届4，越南）证明不存在一个将非负整数集映到自己的函数f，能够对每个n，有

$$f(f(n))=n+1987。\qquad (1)$$

如果题目改为“是否有一个…的f”，难度将增加，因为需要判断这个函数是否存在。很可能会猜错，猜错了就会走许多冤枉路。

现在设f具有所述性质。考虑$f(f(f(n)))$。一方面，保持最里面的$f(n)$不动，由（1）得

$$f(f(f(n)))=f(n)+1987。$$

另一方面，先处理里面的$f(f(n))$得

$$f(f(f(n)))=f(n+1987)。$$

所以

$$f(n+1987)=f(n)+1987\ 。\qquad (2)$$

这就表明对于$\geqslant 1987$的数，f的值$\geqslant 1987$。

将$\{0,\ 1,\ \cdots,\ 1986\}$分为两个子集：

$$A=\{n:\ 0\leqslant n\leqslant 1986,\ f(n)<1987\},$$
$$B=\{n:\ 0\leqslant n\leqslant 1986,\ f(n)\geqslant 1987\}。$$

若$a\in A$，则$f(a)<1987$，并且由（1），

$$f(f(a))=a+1987\geqslant 1987,$$

所以$f(a)\in B$，即f是从A到B的映射。

如果a'是A中另一个元素，那么

$$f(f(a'))=a'+1987\neq a+1987=f(f(a))。$$

所以$f(a')\neq f(a)$。即A中不同元素在B中的象不同。因而$|A|\leqslant|B|$。

另一方面，设$b\in B$，则$f(b)\geqslant 1987$，

$$f(f(b)-1987)\xlongequal{\text{由(2)}}f(f(b))-1987$$
$$\xlongequal{\text{由(1)}}b\ 。\qquad(3)$$

由于$b\leqslant 1986$，所以$f(b)-1987\leqslant 1986$（请看（2）式下面的一句话），从而 $f(b)-1987\in A$。即$f(b)-1987$将b映到A中。

如果b'是B中另一个元素，那么

$f(f(b')-1987)=b'\neq b=f(f(b)-1987)$，所以$f(b')-1987\neq f(b)-1987$。即$B$中不同元素在$A$中的象不同。因而$|B|\leqslant|A|$。

综合以上的讨论，$|A|=|B|$。但A、B是两个不相交的集合，$A\cup B=\{0,1,\cdots,1986\}$共有1987个元素。1987是奇数，所以$|A|$与$|B|$不可能相等。

这矛盾表明所述的f不存在。

本题的解法有几点值得注意：一是用两种方法去计算$f(f(f(n)))$，从而导出一个等式（“横看侧看”）。这种方法在有复合函数$f(f(n))$出现时常常用到。另一点是本题采用了对应的方法来比较$|A|$与$|B|$（参见“以巧伏人”那节），其中的一个关键是f为单映射，即n不同时，$f(n)$也不同（“没有两个人坐在同一个坐位上”）。最后还利用了奇偶性。在发现矛盾方面，奇与偶起着重要的作用。

15 惨淡经营

廊腰缦回，檐牙高啄；

各抱地势，钩心斗角。

——杜牧：《阿房宫赋》

“一个好的数学家与一个蹩脚的数学家之间的差别，就在于前者有许多具体的例子，而后者则只有抽象的理论。”

数学中的例子就和城市里的房屋一样，到处可以见到。在数学竞赛中，也有不少问题需要我们去构造例子。造出符合要求的例子并不是一件容易的事（第2节的构造法是最简单的），需要我们惨淡经营，精心设计。如同建筑一样，这里可以标新立异，斗巧争奇，大有英雄用武之地。

例1 （28届5，民主德国）设整数$n\geqslant3$。证明平面上有一个由n个点组成的集，集中每两个点的距离为无理数，每三个点组成一个非退化的三角形，面积为有理数。

只要每三点不共线，它们构成的三角形就是非退化的。如果每点的坐标都是整数——整点，那么三角形的面积

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

就是有理数。取n个整点，每三点不共线，则已经满足了题目中后两个要求。

由勾股定理，两个整点之间的距离为$\sqrt{m}$，其中m是自然数。如果m不是平方数，那么$\sqrt{m}$就是无理数。但我们无法保障m都不是平方数。不过m的个数是有限的，可以取一个质数p与它们都互质，将这些点的坐标放大$\sqrt{p}$倍，这时面积扩大p倍，仍为有理数。而每两点的距离成为$\sqrt{mp}$，由于p与m互质，$\sqrt{mp}$是无理数。于是三个要求都满足了。

另一种方法是考虑抛物线$y=x^2$上的整点(k, k^2)，$k=0, 1, 2, \cdots$。不难验证它也满足要求。

例2 （24届5，波兰）能否找到1983个互不相同的正整数，每一个都不大于10^5，并且其中任意三个数都不是等差数列的连续三项？

这个问题需要判断一下能与否。如果能，采用构造法；如果否，采用反证法。

现在采用构造法（如果造不出来，也许是“否”）。为了使任意三个数x、y、z不成等差数列，考虑三进制，即将每一个数写成

$$a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_k\cdot 3^k$$

的形式，其中$a_i \in \{0, 1, 2\}$ $(i=0, 1, \cdots, k)$。设其中每个a_i都不为2的那些数组成的集合为T。如果x、y、$z \in T$，而$x+z=2y$，那么由于$2y$的各位数字为0或2，所以$x+z$的各位数字也为0或2（这是由于一个数的三进表示只有唯一的一种），即x与z必须完全相同，从而每三个互不相同的数不成等差数列。在其中取出位数≤11的数，这些数中最大的为

$$3^{10}+3^9+\cdots+3+1=\frac{1}{2}(3^{11}-1)=88573<10^5,$$

而个数为$2^{11}-1>1983$。

例 3 （13届3，波兰）证明：数列$\{2^n-3\}$，$n=2, 3, 4, \cdots$中至少有一个无穷子列，其中的项两两互质。

假定已经有k个数$2^{n_i}-3$ $(i=1, 2, \cdots, k)$，两两互质，我们再找一个数$2^{n_{k+1}}-3$与它都互质。为此，将$2^{n_i}-3$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的质因数p_j全找出来，p_j的个数只有有限多个。我们要证明在$\{2^n-3\}$中一定可以找到一项与这些数都互质。

在数论中有个定理：对奇质数p，$2^{p-1}-1$是p的倍数（费尔马小定理）。即使不知道这个定理，只需注意在$1, 2, 2^2, \cdots, 2^p$这$p+1$个数中，一定有两个数除以p得到相同的余数（因为余数只有p种），它们的差2^s-2^t被p整除，即$p \mid 2^t(2^{s-t}-1)$。由于p为奇数，所以$p \mid 2^{s-t}-1$，也就是有自然数f，使2^f-1是p的倍数（定理无非告诉我们

可取$f=p-1$）。

上面所说的p_j当然都是奇数。对每个p_j，有自然数f_j，使$2^{f_j}-1$被p_j整除。设f为这些f_j的公倍数，则2^f-1被$2^{f_j}-1$整除，因而被所有的p_j整除。2^f-3被p_j除，余数为-2。因此2^f-3与所有p_j互质，也就与$2^{n_i}-3$（$1\leqslant i\leqslant k$）均互质。f就可以取作n_{k+1}。

用这方法就可以找出无穷多个$2^{n_i}-1$，$i=1$，2，…，它们两两互质。

这是用归纳法来构造的一个例子。

例 4 （13届1，匈牙利）自然数$n>2$。证明下述论断仅对$n=3$和$n=5$成立：对任意实数a_1、a_2、…、a_n都有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)$$
$$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots$$
$$+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0。\qquad(1)$$

不妨设$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$。

在$n=3$时，（1）式左边前两项的和为

$$(a_1-a_2)^2\geqslant 0,$$

第三项不小于0，所以不等式成立。

在$n=5$时，同样可知（1）式左边前两项的和不小于0，末两项的和及第三项也不小于0，不等式成立。

对于其他情况，我们来构造使（1）不成立的

例子，这种例子通常称为反例。

在n为偶数时，令$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}>a_n$，则（1）左边最后一项小于0，其他各项为0，（1）不成立。

在$n\geqslant7$时，令$a_1=a_2=a_3>a_4>a_5=\cdots=a_n$，则左边只有一项非零，这一项

$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\cdots(a_4-a_n)<0$，故（1）不成立。

第13届IMO需要构造的问题竟占一半。

例 5 （13届5，保加利亚）证明：对任何自然数m，平面上有无穷多个非空的有限点集S，具有性质：对S中的任一点A，S中恰有m个点与A的距离为1。

实际上只需证明有一个点集S具有所述性质，因为将S平移可产生无限个点集，它们都具有所述性质。

如果能找到m个平面向量u_1，u_2，…，u_m，满足

$$|u_i|=\frac{1}{2}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m), \tag{2}$$

$$0\neq|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m|\neq\frac{1}{2}, \tag{3}$$

其中$c_i\in\{0,\ \pm1\}$，并且至少有两个不为0。

那么，由向量$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m$表示的$2m$个点（其中$a_i\in\{\pm1\}$，$1\leqslant i\leqslant m$）所组成的点集$S$就具有题述的性质。事实上，对于任一点$A$，

$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m\in S$，将其中一个$a_i$变号所得的点与$A$的距离为1，这样的点有$m$个，其他的点与$A$的距离均不等于1。

现在用归纳法来构造上述的u_i。首先任取一个向量u_1，满足$|u_1|=\frac{1}{2}$。假设已取定k个向量u_1，u_2，…，u_k，满足$|u_i|=\frac{1}{2}$，并且

$$0\neq|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k|\neq\frac{1}{2}, \qquad (4)$$

其中$c_i\in\{0,\ \pm1\}$，并且至少有两个不为0。

注意在（4）成立时，满足

$$|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k+u|=0\text{或}\frac{1}{2} \qquad (5)$$

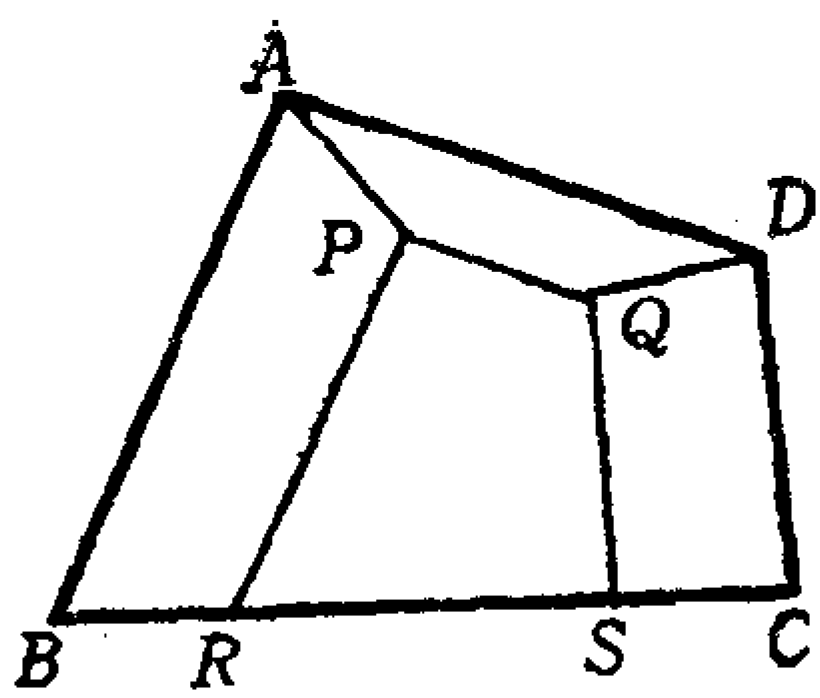
的、长为$\frac{1}{2}$的向量u只有有限多个（对于每一组固定的c_1、c_2、…、c_k，至多三个u满足要求）。因此，可以取一个向量u_{k+1}，$|u_{k+1}|=\frac{1}{2}$，并且$0\neq|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k+c_{k+1}u_{k+1}|\neq\frac{1}{2}$。这样，对任意的自然数$m$，都可以找到满足（2）、（3）的$u_i$，$i=1$，2，…，$m$。

例6 （14届2，荷兰）证明：对$n\geqslant4$，每一个有外接圆的四边形，总可以划分成n个都有外接圆的四边形。

本题的关键是注意等腰梯形一定有外接圆。如

果已知的四边形$ABCD$是等腰梯形，那么用平行于底的直线将它分成n个等腰梯形就可以了。如果$ABCD$不是等腰梯形，我们设法将它分成四个有外接圆的四边形，其中有一个是等腰梯形。

不妨设$\angle A \geqslant \angle B$。于是$\angle D \leqslant \angle C$。在四边形内作$\angle BAP=\angle B$，$\angle CDQ=\angle C$（如图），并取$P$与$Q$，使得它们都在$ABCD$内，$PQ \parallel AD$。再过$P$、$Q$分别作$AB$、$DC$的平行线，与$BC$分别交于$R$、$S$。由于$\angle B+\angle ADC=\angle C+BAD=\pi$，所以$\angle DAP=\angle DAB-\angle B=\angle ADC-\angle C=\angle ADQ$，因此$ABRP$，$CDQS$和$APQD$都是等腰梯形，当然有外接圆。又



$$\angle QPR+\angle QSR=\angle DAB+\angle C=\pi,$$

所以$PQSR$也有外接圆。这样就把$ABCD$分成4个有外接圆的四边形。再将其中一个等腰梯形用平行于底的直线来分就可以得出任意多个有外接圆的四边形。

例 7 （11届5，蒙古）在一个平面上给出n个点（$n>4$），其中没有三点在一条直线上。证明至少

可以找到 C_{n-3}^2 个以上述点为顶点的凸四边形。

凸是一个很重要的要求。任意四个点都可以构成四边形，但不一定凸。

揣摩题目的意思，应当取定三个点A、B、C，再从剩下的$n-3$个点中任取两个点D、E（有C_{n-3}^2种取法）。如果D、E与$\triangle ABC$的两个顶点可以构成凸四边形，问题就解决了。但是，图1表明这件事未必能够实现。

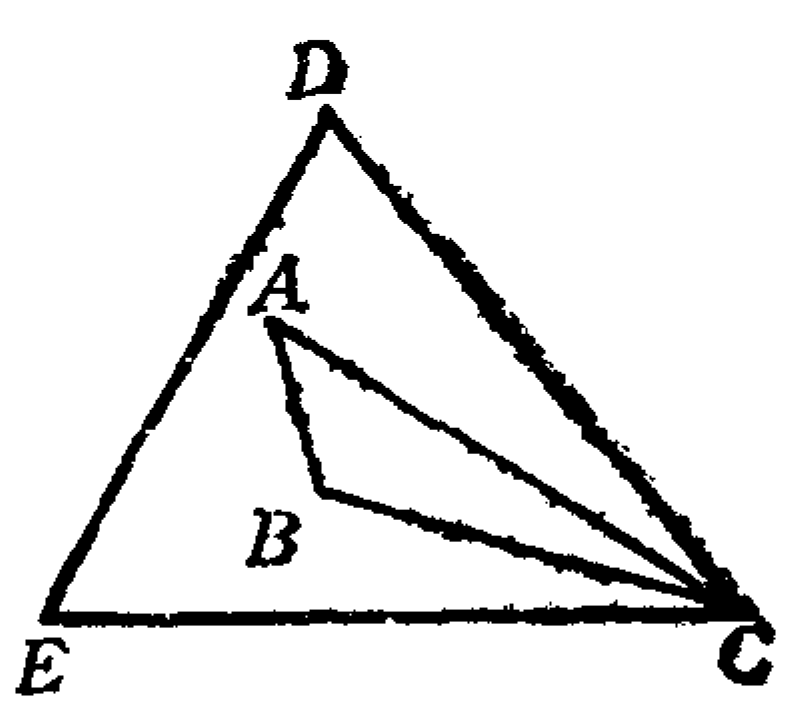


图 1

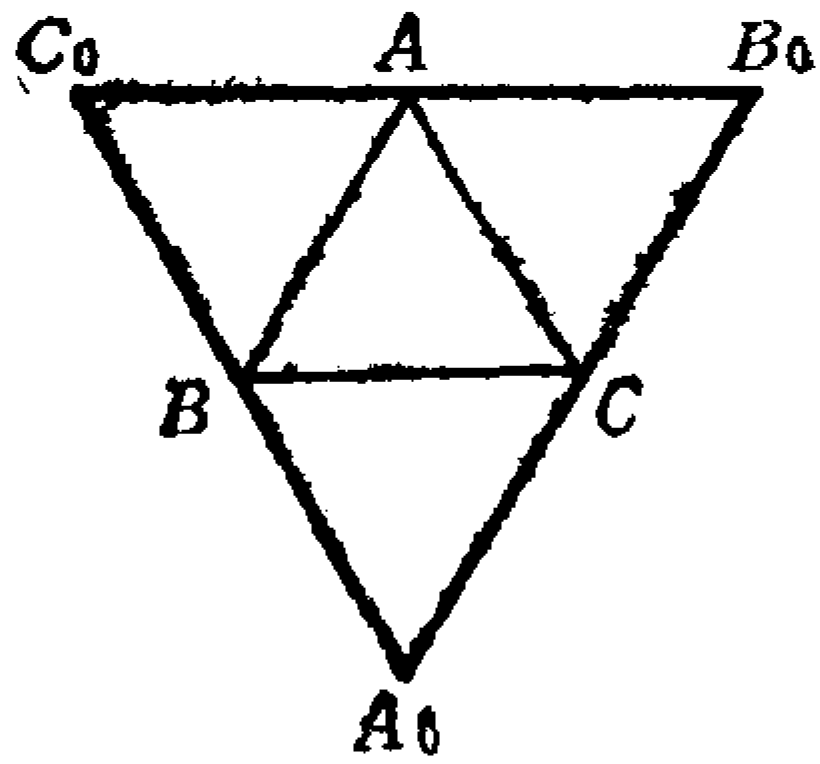


图 2

尝试失败了。别灰心！别一遇挫折就否定前面的计划：其中有很多合理的部分（尤其是恰好出现了 C_{n-3}^2这个数）。现在需要的是调整。对于$\triangle ABC$，我们未作任何限制。如果挑选一下，选一个比较合适的、具有某种性质的三角形，也许……选什么样的三角形呢？选面积最大的那一个试一试吧（图1中的$\triangle ABC$太小，所以不能成功）。

设$\triangle ABC$是由已知点组成的三角形中面积最大的一个（图2）。过A、B、C分别作对边的平行

线，构成$\triangle A_0B_0C_0$。已知点中任一点D必在B_0C_0下方（A_0所在的那一侧），否则$\triangle DBC$的面积大于$\triangle ABC$。由此即知一切已知点都在$\triangle A_0B_0C_0$内。

对于任取的两个已知点D、E，不妨设它们都在BCB_0C_0内。A、B、C三点中必有两点在直线DE同侧，这两点与D、E构成凸四边形。于是结论成立。

上面的解法中，取面积最大的三角形是关键的一步。很多构造性的问题（或存在性的问题）需要利用具有某种极端性质的元素。

又解：从已知点中任选五个点A、B、C、D、E。如果位置如图1所示，那么A、B及在直线AB同侧的两点（图中C、D）构成一个凸四边形。其他情况，即五点构成凸五边形；或四点构成凸四边形，另一点在四边形内。因此五点中总有四点构成凸四边形。

这样看来，用已知点至少可作成C_n^5个凸四边形。不过，每个四边形可以出现C_{n-4}^1次（与其余$n-4$个点中任意一个组成五点的组合），所以不同的凸四边形至少$\dfrac{C_n^5}{C_{n-4}^1}=\dfrac{C_n^5}{n-4}$个。

不难验证$\dfrac{C_n^5}{n-4}>C_{n-3}^2$。所以这种解法所得

结果比题目要求的还要好一些。

完全从揣摩题目入手，不敢越雷池一步，有时会束缚了我们的才智。

16 以巧伏人

将军欲以巧伏人，

盘马弯弓惜不发。

——韩愈：《雉带箭》

一道数学题可以有好几种不同的解法，可以通过各种途径去接近结论。因此，在解题时应当尽可能多考虑几种方法，从中选出一种最简单、最有效的来，“以巧伏人”。这样做，开始虽然多费点思考，但由于采用了“最佳方案”，事半功倍。这样久而久之，养成习惯，对数学的方法将有更多的领悟。不少学生解题时（尤其遇到考试）“慌不择路”，道路尚未看清就一头撞进去，结果花了许多力气，费了许多时间，绕了许多圈子，甚至走进一条死胡同，吃足了苦头，还要坚持走下去。这种做法实在要不得。

第30届IMO的第6题是波兰提供的。原来的解法十分烦琐。选题委员会把它定为A，即难中之难。后来学生找出好几种解法，每一种都比标准答案简单。

例1 （30届6，波兰）设n是正整数。我们说集合$\{1, 2, \cdots, 2n\}$的一个排列$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$具有性质$P$，如果在$\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$当

中至少有一个i，使$|x_i-x_{i+1}|=n$成立。求证：对于任何n，具有性质P的排列比不具有性质P的排列个数多。

解法一：设$1\leqslant k\leqslant n$，

$N_k=\{(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$：其中$k$与$k+n$相邻$\}$。设具有性质$P$的排列个数为$m$，则

$$m\geqslant\sum_{k=1}^{n}|N_k|-\sum_{1\leqslant k<h\leqslant n}|N_k\cap N_h|。\tag{1}$$

（这里$|N_k|$表示集N_k的元素个数）

而

$|N_k|=2\times(2n-1)!$（将k与$k+n$看作一个数，$2n-1$个“数”有$(2n-1)!$种排列。k与$k+n$的位置可以交换。因此，共有$2\times(2n-1)!$种）。

$|N_k\cap N_h|=2^2\times(2n-2)!$（将$k$与$k+n$，$h$与$h+n$并在一起，$2n-2$个“数”有$(2n-2)!$种排列。$k$与$k+n$，$h$与$h+n$可以交换，各有2种可能）。

所以

$$m\geqslant 2n\times(2n-1)!-C_n^2\times2^2\times(2n-2)!$$

$$=(2n)!-2n\times(n-1)\times(2n-2)!$$

$$=2n\times(2n-2)!\times n$$

$$>(2n)!\times\frac{1}{2}。$$

m超过排列总数$(2n)!$的一半，即具有性质P的排列多于不具有性质P的排列。

如果在（1）的右边再继续写出$+\sum|N_k\cap N_h\cap N_j|$等等，便可以得出$m$。这就是“容斥原理”。不过，就本题而言，算出$m$的值并不是必须的。

解法二：更巧妙的方法是利用对应。令

$A=\{(x_1, \cdots, x_{2n})$：不具有性质$P\}$，

$B=\{(x_1, \cdots, x_{2n})$：恰有一个$i$使

$$|x_i-x_{i+1}|=n\}。$$

我们称元素k与$k+n$（$1\leqslant k\leqslant n$）为一对伴侣。B就是恰有一对伴侣相邻的那些排列所成的集。显然$|B|<m$（具有性质P的排列个数）。

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in A$，则$x_1$的伴侣不是$x_2$。设$x_k(k>2)$是$x_1$的(唯一的)伴侣。令对应$f$为：

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\rightarrow(x_2,\cdots,x_1,x_k,\cdots, x_n)$，

即将x_1移到它的相伴元x_k的前面，产生一个新的排列。显然$(x_2, \cdots, x_1, x_k, \cdots, x_n)\in B$，所以$f$是从$A$到$B$的对应（映射）。不难验证$A$中不同元素$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$(x_1', x_2', \cdots, x_n')$有不同的象（如果它们的象相同，那么仅有的一对相邻的相伴元必然相同，所以$x_1=x_1'$，$x_k=x_k'$。从而其他元素也全相同，

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1', x_2', \cdots, x_n')。$$

所以$|A|\leqslant|B|<m$。

在比较两个集合的元数时，对应是很有用的，它可以省去对元数的计算。例如要比较教室里人数与坐位数的多少。只需看一下是不是每个人都有坐位，不同的人坐在不同的坐位上（即没有两个人坐

在同一个坐位上），就可以知道了，不必数出有多少个坐位和多少个人。

例 2 （22届2，联邦德国）若$1 \leqslant r \leqslant n$，考虑集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有由$r$个元素组成的子集，每个子集有最小元素，以$F(n,r)$表示所有这些最小元素的算术平均值，证明

$$F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}。$$

解法一：共有 C_n^r 个r元子集。其中最小元素为k的（$1 \leqslant k \leqslant n-r+1$）有$C_{n-k}^{r-1}$个（其余的$r-1$个元素从$k+1$，$k+2$，…，$n$这$n-k$个数中选出）。所以

$$F(n,r)=\frac{1}{C_n^r}\sum_{k=1}^{n-r+1} k\,C_{n-k}^{r-1}。 \qquad (2)$$

（2）式右边的和求起来有点麻烦，比较简单的做法是将它写成一个表

$$\begin{array}{llll}
C_{n-1}^{r-1} & & & \\
C_{n-2}^{r-1} & C_{n-2}^{r-1} & & \\
\vdots & \vdots & & \\
C_{r-1}^{r-1} & C_{r-1}^{r-1} & \cdots\cdots & C_{r-1}^{r-1}
\end{array}$$

如果先将每一行加起来，再将这些行和相加便是

(2)的右边的分子。现在我们换一种做法：先将每一列加起来，再将这些列相加（这正是“横看侧看”那节所说的方法）。

由组合恒等式易知各列的和为

$$C_n^r, C_{n-1}^r, \cdots, C_r^r。$$

列和的和为 C_{n+1}^{r+1}。于是

$$F(n,r)=\frac{1}{C_n^r}\times C_{n+1}^{r+1}=\frac{n+1}{r+1}。$$

解法二：用归纳法。奠基是显然的。设 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的r元子集的最小元素的算术平均值为 $\frac{n}{r+1}$，则 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 的r元子集的最小元素的算术平均值为 $\frac{n}{r+1}+1$。

考虑 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的r元子集。其中含1的有 C_{n-1}^{r-1} 个，这些集的最小元素为1。不含1的有 C_{n-1}^r 个，其最小元素的算术平均值为 $\frac{n}{r+1}+1$。于是

$$F(n,r)=\frac{1}{C_n^r}\left(1\times C_{n-1}^{r-1}+\left(\frac{n}{r+1}+1\right)\right.$$

$$\left.\times C_{n-1}^r\right)=\frac{1}{C_n^r}\left(C_n^r+\frac{n}{r+1}\times C_{n-1}^r\right)$$

$$=1+\frac{n-r}{r+1}=\frac{n+1}{r+1}。$$

解法三：如果集$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个r元子集A以k为最小元素，那么

$A\cup\{k-1\}$，$A\cup\{k-2\}$，…，$A\cup\{1\}$，$A\cup\{0\}$。

这k个集都是集$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$的$r+1$元子集。

集$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$的每个$r+1$元子集都可以用这个方法产生（将这个$r+1$元子集的最小元素去掉便得到$\{1, 2, \cdots, n\}$的r元子集A），并且在最小元素不同时，产生的$r+1$元子集不同；即使两个r元子集$A\neq B$的最小元素都是k，用上述方法产生的$r+1$元子集也各不相同。所以$\sum k$（最小元素的总和）就等于集$\{0, 1, \cdots, n\}$的$r+1$元子集的个数，即C_{n+1}^{r+1}。

从而最小元素的平均值

$$F(n,r)=\frac{\sum k}{C_n^r}=\frac{C_{n+1}^{r+1}}{C_n^r}=\frac{n+1}{r+1}。$$

例 3 （27 届3，民主德国）正五边形的五个顶各配给一个整数，五个数的和为正。如果三个相邻的顶点的数分别为x、y、z，并且$y<0$，则施行变换：将x、y、z分别换为$x+y$，$-y$，$z-y$。只要五个数中有一个为负，变换就继续进行下去。问这一过程能否在有限多次后结束？

问题就是能否在有限多次变换后，五个数全变

为非负的。

但是，在作变换时能否有所选择，抑或能否是完全随机的。这一点题目不甚明确。应以后一种理解为好（这样就不能挑选——比如说最小的负数先来进行变换），因为答案是肯定的，后一种理解下的解法对前一种理解依然适用，反过来却不一定行。

要证明变换在有限步后停止，关键是寻找一个函数，函数的值为自然数，在从一种状态变换为另一种状态时，函数的值严格减少，而一个严格递减的自然数数列只能有有限多项，所以所述过程不能无限继续下去。

为了使函数的值为自然数（即正整数），当然以用平方或绝对值为好。这样的函数不止一个。美国选手约瑟夫·基内采用的是（设原来五个数为x、y、z、u、v）

$$
\begin{aligned}
&|x|+|y|+|z|+|u|+|v|\\
&+|x+y|+|y+z|+|z+u|+|u+v|\\
&+|v+x|\\
&+|x+y+z|+|y+z+u|+|z+u+v|\\
&+|u+v+x|+|v+x+y|\\
&+|x+y+z+u|+|y+z+u+v|\\
&+|z+u+v+x|+|u+v+x+y|\\
&+|v+x+y+z|\\
&+|x+y+z+u+v|。
\end{aligned}
$$

他的解法具有独创性，与标准解答（考虑的函数是 $(x-z)^2+(y-u)^2+(z-v)^2+(u-x)^2+(v-y)^2$）不同，因而荣获特别奖。

上面的函数在变换后，值严格减少，这一点不难验证。

至于怎么会想出这样的函数来，读者亲自动手验算一下递减性，就可以找到答案。

17 数学皇后

数论是数学的皇后。

——高 斯

IMO中，常常出现数论的幽灵。一方面由于数论（算术）是一个重要的数学分支；另一方面，这类问题，利用极少的知识，可生出无穷的变化，解法也千姿百态，“各有巧妙不同”（甚至出题人也预料不到），最能够反映选手的创造性，所以特别受到命题者的宠爱。有些人对此望而生畏。其实“魔鬼也并不可怕”，只要有较多的机会去接触它，就能逐渐摸清它的特点，驯服、驾驭这匹野马。

例 1 （1届1，波兰）证明：对任何自然数n，$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约。

这道“天字第一号”的题目，现在看来非常容易，关键是一个等式

$$3(14n+3)-2(21n+4)=1。\qquad (1)$$

$14n+3$与$21n+2$的公约数一定整除（1）式右边的1，因而$14n+3$与$21n+4$的公约数只有1，即$14n+3$与$21n+4$互质，从而$\frac{21n+4}{14n+3}$既约。

设a、b的最大公约数为d，那么一定有整数u、v，使

$$ua+vb=d\text{ 。}\tag{2}$$

这个等式称为裴蜀（Bezout）恒等式。反过来，如果（2）成立，那么d就是a、b的最大公约数。

（1）是d为1的特殊情况。

对于具体的a、b，等式（2）不难“凑”出。

例 2（9届3，英国）若k、m、n是正整数，$m+k+1$是一个比$n+1$大的质数。令$c_s=s(s+1)$。证明乘积

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)\tag{3}$$

能被乘积$c_1c_2\cdots c_n$整除。

请注意$a(a+1)-b(b+1)=(a^2-b^2)+(a-b)$
$=(a-b)(a+b+1)$，所以

$$c_{m+j}-c_k=(m+j-k)(m+j+k+1),$$

（3）可化为

$$(m+1-k)(m+2-k)\cdots(m+n-k)(m+k+2)$$
$$\cdot(m+k+3)\cdots(m+n+k+1)\text{。}$$

而

$$c_1c_2\cdots c_n=n!(n+1)!\text{。}$$

我们知道组合数$C_m^n=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$是整数，所以$n!\mid m(m-1)\cdots(m-n+1)$（这里$a\mid b$表示$a$整除$b$），即$n!$整除$n$个连续整数的积（由于0是任何自然数的倍数，所以在$m<n$，从而$m(m-1)\cdots(m-n+1)$中可能有0的时候，这句结论也是正确的），于是

$$n!\mid(m+1-k)(m+2-k)\cdots(m+n-k),\tag{4}$$

$$(n+1)! \mid (m+k+1)(m+k+2)\cdots(m+n+k+1)。 \tag{5}$$

已知$m+k+1$是比$n+1$大的质数，所以在$(n+1)!$的质因数中没有$m+k+1$，从而由（5）得

$$(n+1)! \mid (m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+n+k+1)。 \tag{6}$$

（4）、（6）推出$c_1c_2\cdots c_n$整除（3）。

例 3 （17届2，英国）设a_1，a_2，…是正整数数列，并且对所有$k\geqslant1$，有$a_k<a_{k+1}$。证明在这数列中，有无穷多个a_m可以写成

$$a_m=x\cdot a_p+y\cdot a_q$$

的形式，其中x、y为适当的正整数，$p\neq q$。

题中的a_p、a_q并非指定的两项(如果指定两项，命题是不成立的。例如$a_p=2$，$a_q=4$，其余的a_m全为奇数），我们可以适当选择。不妨就选$a_p=a_1$。x、y也可以由我们选择一个，我们取$y=1$。问题化为：有无穷多个a_m可以写成

$$a_m=x\cdot a_1+a_q。 \tag{7}$$

为了证明这一结论，需要将所给数列的项按照除以a_1的余数来分类，这种类称为（以a_1为模的）剩余类。由于余数仅有a_1种（0，1，…，a_1-1)，其中必有一类有数列中的无穷多项，设a_q为这样的项，则对这一类中大于a_q的、无穷多个a_m，均有a_m-a_q是a_1的倍数，即（7）式成立。

在数论中，（7）可以说成a_m与a_q（对于模a_1）同余。同余这个重要的概念，是由伟大的数学家高

斯发明的。

例 4 （22届4，比利时）（1）对于什么样的整数$n>2$，可以找到由n个连续正整数构成的数列，这数列的最大值整除另外的$n-1$个数的最小公倍数。

（2）对于什么样的整数$n>2$，可以找到并且只能找到一个具有上述性质的数列？

设n个连续数中最大的为a。先看看$n=3$的情况。如果a整除$a-1$，$a-2$的最小公倍数，那么a整除$(a-1)(a-2)$，但

$$a\mid(a-1)(a-2)\Rightarrow a\mid 1\times 2,$$

与$a\geqslant 3$矛盾。

设$n=4$。由于

$$a\mid(a-1)(a-2)(a-3)\Rightarrow a\mid 6,$$

而$a\geqslant 4$，所以这时只有一个数列3，4，5，6具有所述性质。

设$n>4$。由于

$$a\mid(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)\Rightarrow a\mid(n-1)!,$$

取$a=(n-1)(n-2)$，则$(n-1)\mid(a-(n-1))$，$(n-2)\mid(a-(n-2))$。由于$n-1$与$n-2$互质，$a-(n-1)$与$a-(n-2)$互质（两个连续整数总是互质的，因为它们的差为1），所以$a=(n-1)(n-2)$整除$a-(n-1)$与$a-(n-2)$的最小公倍数，因而a具有题述性质。

类似地，取$a=(n-2)(n-3)$，则a整除$a-(n-2)$与$a-(n-3)$的最小公倍数，因而a具有

题述性质。

所以当$n\geqslant4$时，总可以找到具有题述性质的数列。当且仅当$n=4$时，这种数列是唯一的。

例 5 （21届1，联邦德国）若p、q均为自然数，并且

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}, \quad (8)$$

求证p能被1979整除。

这是1979年的试题。与年代有关的问题中，年代未必有特殊的作用。不过，本题的1979是一个质数，这是一个不可忽视的条件。

（8）的右边有正有负，我们先设法把它化成全由正项组成的和：

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\\&\quad-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319}\\&\quad-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}\right)\\&=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1319}。\end{aligned}$$

然后将这些项两两配对，使得和的分子为1979，即

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$

$$=\frac{1979}{660\times1319}+\frac{1979}{661\times1318}+\cdots$$

$$+\frac{1979}{989\times990}。$$

从而$(660\times1319)\times(661\times1318)\times\cdots\times(989\times990)\cdot p$是1979的倍数。由于1979是质数，$660\times661\times\cdots\times1319$的质因数没有1979，所以$1979\mid p$ 。

例 6 （30届5，瑞典）求证：对任何正整数n，存在n个连续的正整数，它们都不是质数的整数幂。

本题可用构造法。设这n个数为

$(n+1)!a+2$，$(n+1)!a+3$，$\cdots$，$(n+1)!a+(n+1)$，则它们分别有因数2，3，$\cdots$，$n+1$（我们希望这些数至少有两个不同的质因数，所以从加2开始，而不是从加1开始）。如果其中有某一个$(n+1)!a+k$为质数的整数幂，那么k必为质数，

并且

$$(n+1)!a+k=k^m,$$

从而

$$(n+1)!a=k(k^{m-1}-1)。\qquad(9)$$

（9）的右边被质数k整除，但不能被k^2整除；左边的$(n+1)!$ 被k整除，如果我们取$a=(n+1)!$ ，那么左边被k^2整除，因而（9）不可能成立。可见$((n+1)!)^2+2$，$((n+1)!)^2+3$，$\cdots$，$((n+1)!)^2$

$+(n+1)$这$n+1$个连续正整数都不是质数的整数幂。

本题如果用中国剩余定理（孙子定理）来解更为简单。关于这个定理，可以参看华罗庚著《从孙子的神奇妙算谈起》。

例7 （19届3，荷兰）设n是一个给定的、大于2的自然数，V_n是形如$kn+1$（$k=1, 2, \cdots$）的数所构成的集合。对于数$m\in V_n$，如果不存在数p、$q\in V_n$，使得$m=pq$，则称m为（V_n的）不可约数。证明存在一个数$r\in V_n$，它有不止一种方式分解为数集V_n中几个不可约数的乘积。

我们知道在自然数集中，每一个数可以唯一地表示成质数（不可约数）的积（因数的顺序不予考虑）。如果在任何数集中，都有类似的结论，那么著名的费尔马大定理可以立即解决。可惜情况并非这样，本题就是一个唯一分解定理不成立的例子。

设$a=n-1$，$b=2n-1$，则a^2、b^2、ab都是V_n中的数。于是$m=a^2\cdot b^2\in V_n$有两种分解：

$$m=a^2\cdot b^2=(ab)\cdot(ab)\text{。}\tag{10}$$

剩下的问题："a^2、ab、b^2是不是V_n中的不可约数？"

由于$a^2<(n+1)^2$，所以a^2不可约。如果

$$b^2=(2n-1)^2=(cn+1)(dn+1),$$

那么

$$cdn+(c+d)=4n-4\text{。}\tag{11}$$

所以$cd<4$，从而c、d中至少有一个为1。不妨设

$c=1$，则$d\in\{1, 2, 3\}$。由于$n>2$， 容易验证（11）只在$d=3$，$n=8$时成立。因此，在$n\neq 8$时，b^2不可约。

同样地，若$ab=(n-1)(2n-1)=(cn+1)(dn+1)$，则$c=d=1$，$n=5$。

于是，在$n\neq 5$、8时，（10）表明m有两种方式分解为V_n中不可约数的积。

在$n=5$时，

$$1296=6\times 6\times 6\times 6=16\times 81,$$

6，16，81都在V_5中不可约。

在$n=8$时，

$$4225=65\times 65=25\times 169,$$

65，25，169都在V_8中不可约。

例 8 （28届6，苏联）设整数$n\geqslant 2$。如果对满足$0\leqslant k\leqslant\sqrt{\frac{n}{3}}$的所有整数$k$，$k^2+k+n$为质数，证明对$0\leqslant k\leqslant n-2$的所有整数$k$，$k^2+k+n$为质数。

采用归纳法。假设对于小于m的非负整数k，k^2+k+n为质数，这里$\sqrt{\frac{n}{3}}<m\leqslant n-2$。要证$m^2+m+n$为质数。

如果m^2+m+n是合数，设它的最小的质数为p。这时有以下几种情况：

1．如果$m\geqslant p$。这时$p\mid(m-p)^2+(m-p)+n$，并且
$$(m-p)^2+(m-p)+n\geqslant n>p。$$
但是由归纳假设，$(m-p)^2+(m-p)+n$是质数，

矛盾。

2. 如果$2m+1\geqslant p>m$。这时$p-m-1<m$，质数$(p-m-1)^2+(p-m-1)+n=(p-m)(p-m-1)+n=(p-m-1)^2+(p-m-1)+n$被$p$整除，而又大于$p$，矛盾。

3. 如果$p\geqslant 2m+1$。这时由于$m>\sqrt{\frac{n}{3}}$，所以

$$p^2\geqslant 4m^2+4m+1>m^2+m+n,$$

与p是合数m^2+m+n的最小质因数矛盾。

因此m^2+m+n必为质数，从而命题成立。

本题是用多项式来表示质数的问题，有很深刻的背景。

许多竞赛问题源自某篇论文的一个片断，这正反映了数学普及的进程。

18　后生可畏

宣父犹能畏后生，

丈夫未可轻年少。

——李白：《上李邕》

从第一届至第三十届IMO，负责命题的主试委员会没有能办成这样一件事：编出一道试题，使每名选手都束手无策。相反地，却的确有一道试题，由领队们组成的主试委员会中谁都不会做。这是一道数论题，后来给澳大利亚四位顶冒尖儿的数论专家去解，每一位花了一整天的时间，仍然毫无成效。可是参赛的选手中却有11个人作出了解答。真是后生可畏！

让我们看看这道题

例　（29届6，联邦德国）设a、b为正整数，$ab+1$整除a^2+b^2。证明$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$是完全平方。

保加利亚一名学生的解法最为简单（他因此获得特别奖）：

设$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=q$，则

$$a^2+b^2=q(ab+1)。\tag{1}$$

因而（a，b）是不定方程

$$x^2+y^2=q(xy+1) \qquad (2)$$

的一组（整数）解。

如果q不是完全平方，那么（2）的整数解中x、y均不为0，因而

$$q(xy+1)=x^2+y^2>0,$$

$\Rightarrow \quad xy>-1 \quad \Rightarrow \quad xy\geqslant 0$

$\Rightarrow \quad x$、y同号。

现在设a_0、b_0是（2）的正整数解中，使a_0+b_0为最小的一组解，$a_0\geqslant b_0$。那么a_0是方程

$$x^2-qb_0x+(b_0{}^2-q)=0 \qquad (3)$$

的解。

由韦达定理，方程（3）的另一个解

$$a_1=qb_0-a_0。$$

a_1是整数，而且（a_1，b_0）也是（2）的解，所以a_1与b_0同为正。但由韦达定理

$$a_1=\frac{b_0{}^2-q}{a_0}<\frac{b_0{}^2}{a_0}\leqslant a_0$$

与a_0+b_0为最小矛盾。这说明q一定是完全平方。

这种解法就是所谓无穷递降法：如果在q不是完全平方时，不定方程（2）有正整数解a_0、b_0，那么它一定还有另一组正整数解a_1、b_1，并且$a_1+b_1<a_0+b_0$。这样继续下去，将有无穷多组正整数a_n、b_n满足（2），并且

$$a_0+b_0>a_1+b_1>a_2+b_2>\cdots>a_n+b_n>\cdots$$

但这是不可能的，因为一个严格递减的正整数数列只有有限多项（这与上述解法中，存在一个“最小

解”是等价的）。这种方法是17世纪的数学家费尔马（Fermat，1601—1665）特别钟爱的。他用这一方法证明了许多不定方程，例如$x^4+y^4=z^4$，没有正整数解。

方程（2）类似于马尔科夫（Марков）方程

$$x^2+y^2+z^2=3xyz。$$

这类方程通常是借助韦达定理，从一组解导出另一组解。

如果$q=r^2$，r为正整数，那么（2）有无穷多组正整数解。上面的解法正好给出了递推公式

$$a_{k+1}=b_k, \tag{4}$$

$$b_{k+1}=qb_k-a_k。 \tag{5}$$

这种序列只有有限多项，设在第n项终止，则

$$qb_n-a_n=0。$$

即

$$a_n=qb_n, \tag{6}$$

代入（2）中得

$$q^2b_n^2+b_n^2=q(qb_n^2+1)。$$

于是$b_n=\sqrt{q}=r$，再由（4）、（5）即可递推出其他解。

这些解可用公式表示出来。为方便起见改记$a_0,a_1,\cdots,a_n$，$a_{n+1}=r$及b_0，b_1，…，b_n，$b_{n+1}=0$为x_n，x_{n-1}，…，$x_0=r$及y_n，y_{n-1}，…，$y_0=0$（注意数列的顺序反了过来）。递推公式成为

$$y_{k+1}=x_k, \tag{7}$$

$$y_k = qy_{k+1} - x_{k+1}。 \tag{8}$$

(8) 即

$$y_{k+2} = qy_{k+1} - y_k。 \tag{9}$$

用通常的方法可以导出通项公式为

$$y_k = \frac{r}{\sqrt{q^2-4}}\left(\left(\frac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}\right)^k - \left(\frac{q-\sqrt{q^2-4}}{2}\right)^k\right),$$

$$x_k = \frac{r}{\sqrt{q^2-4}}\left(\left(\frac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{q-\sqrt{q^2-4}}{2}\right)^{k+1}\right)。$$

$$(k=1, 2, 3, \cdots)$$

这就是方程 (2) 的全部解。

19　更进一步

世之奇伟、瑰怪、非常

之观，常在于险远……

——王安石：《游褒禅山记》

许多问题，如果进一步探讨，还可以发现人之所未见。数学竞赛中也不乏这样的例子。

例1　(20届4，美国)在$\triangle ABC$中，边$AB=AC$。有一圆内切于$\triangle ABC$的外接圆，并且与AB、AC分别相切于P、Q，求证线段PQ的中点是$\triangle ABC$的内切圆的圆心。

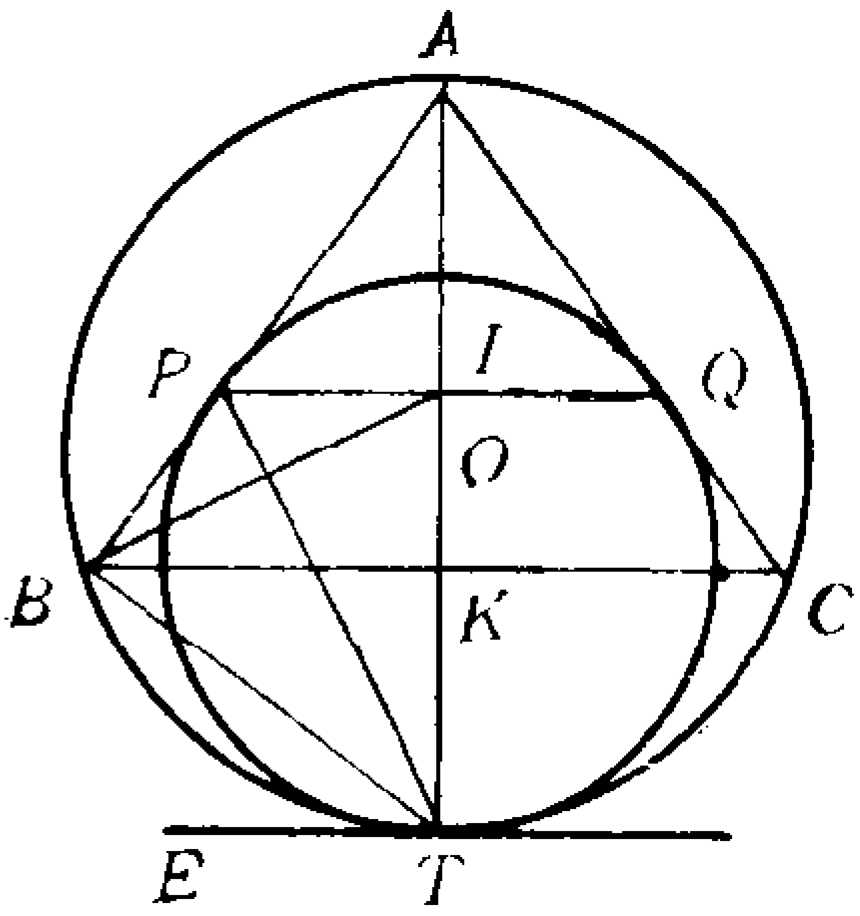


图　1

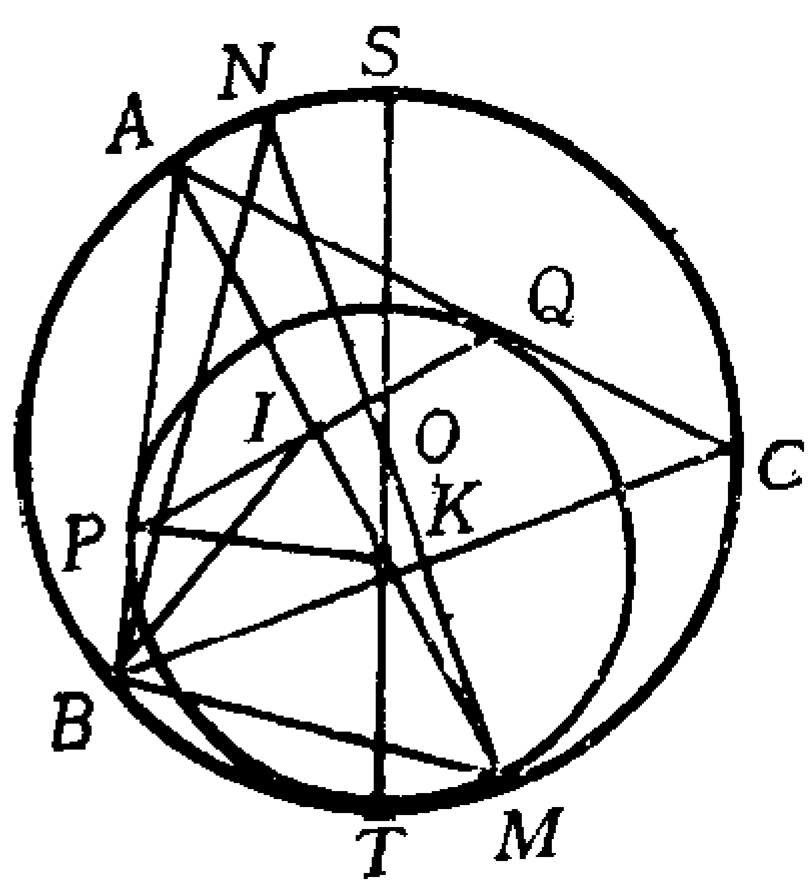


图　2

设O为$\triangle ABC$的外心，K为另一圆的圆心，两圆相切于T，TE为公切线。AB、AC与$\odot K$相切，所以K在$\angle BAC$的平分线上。因为$AB=AC$，所以外心O在$\angle BAC$的平分线上。直线OK过切点T，又

过A（OK是$\angle BAC$的平分线）。OK与PQ的交点I显然是PQ的中点（图1），并且$OI\perp PQ$。

连BT、BI、PT，则

$\angle ETB=\angle BAT$，$\angle ETP=\angle BPT$，

$$\angle BTP=\angle ETP-\angle ETB=\angle BPT-\angle BAT$$
$$=\angle PTA。$$

由于$\angle PBT=90^\circ$，$\angle PIA=90^\circ$，所以B、T、P、I四点共圆。从而

$$\angle PBI=\angle PTI=\angle BTP=\angle BIP。$$

易知$PQ\parallel BC$，所以$\angle PBI=\angle BIP=\angle IBC$，即$IB$平分$\angle ABC$。于是$I$为内心。

有趣的是本题的条件$AB=AC$实际上是多余的。即（如图2）设$\odot K$与$\triangle ABC$的外接圆内切于T，与AB、AC分别切于P、Q，则线段PQ的中点I是$\triangle ABC$的内心。

这时上面的证明不再适用，但A、I、K仍然共线，并且$KA\perp PQ$，KA平分$\angle BAC$。

为了证明这个命题，延长AK交$\odot O$于M，设MN、TS为$\odot O$的直径，则TS过K。

易知在$Rt\triangle APK$中，$KP^2=KI\times KA$，又$TK\times KS=MK\times KA$，两式相加得（$KP=TK$）

$$TK\times TS=MI\times KA。\qquad(1)$$

由于$\angle BNM=\angle PAK$，所以

$$Rt\triangle BNM\backsim Rt\triangle PAK,$$
$$KP\times MN=MB\times KA。\qquad(2)$$

因为$TK=KP$，$TS=MN$，所以由（1）、（2）导出

$$MI=MB。$$

于是 $$\angle MBI=\angle MIB,$$

$\angle ABI=\angle MIB-\angle BAM=\angle MBI-\angle CBM=\angle IBC$，即$IB$平分$\angle ABC$，$I$为$\triangle ABC$的内心。

如果将“$\odot K$与$\odot O$内切”改成“$\odot K$与$\odot O$外切”，那么线段PQ的中点就是$\triangle ABC$的旁心。

本题还可以进一步探讨。

叶中豪先生发现：“如果作$\odot K$、$\odot K'$都与AB、AC相切，并且$\odot K$与$\triangle ABC$的外接圆内切，$\odot K'$与外接圆外切，那么$\odot K$与$\odot K'$的内公切线与BC平行（图3）。”

利用前面的结论，这个命题并不难证：

设$\triangle ABC$的内心为I，与A相对的旁心为I'，则内切圆与旁切圆的内公切线为BC。

$\odot K$与$\odot I$是位似的，位似中心为A，相似比为$\frac{KP}{ID}$（D为内切圆与AB的切点），而$\frac{KP}{ID}=\frac{AP}{AD}=\frac{AI/\cos\angle BAK}{AI\cos\angle BAK}=\frac{1}{\cos^2\angle BAK}$（我们利用了前面的结论：$PI\perp AK$）。

同样$\odot K'$与$\odot I'$位似，位似中心为A，相似比为$\frac{1}{\cos^2\angle BAK}$（$\angle BAK=\frac{1}{2}\angle BAC$）。

于是以A为位似中心作位似变换可使$\odot K$、$\odot K'$分别变为$\odot I$、$\odot I'$，$\odot K$与$\odot K'$的内公切线

当然变成$\odot I$与$\odot I'$的内公切线BC。所以$\odot K$与$\odot K'$的内公切线与BC平行。

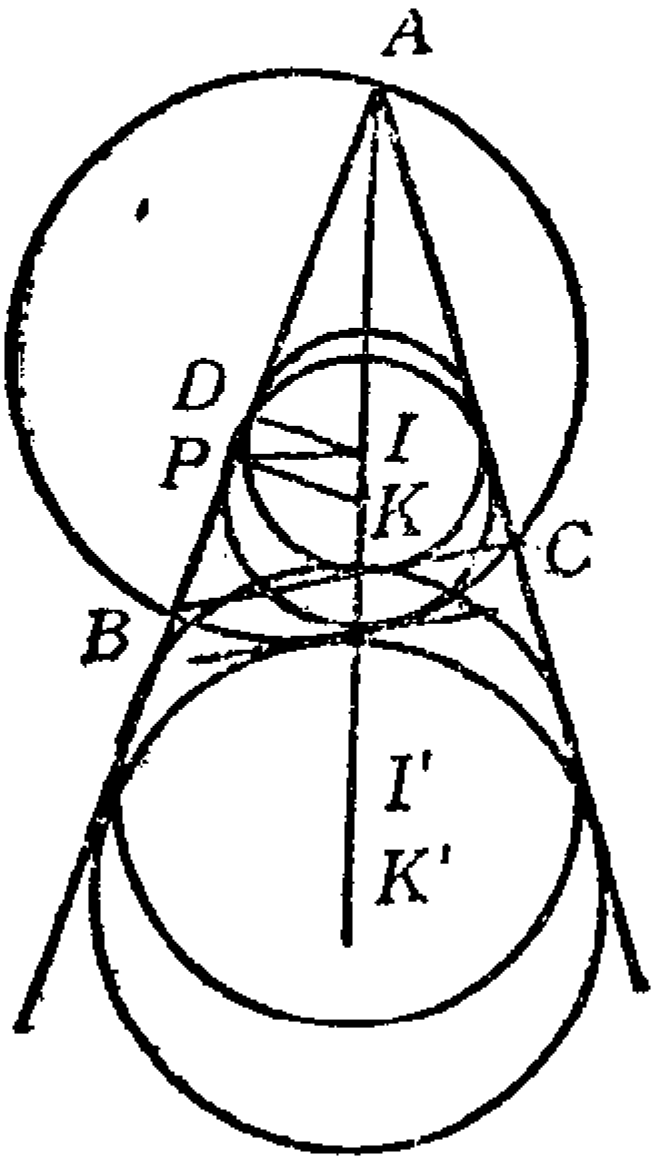


图 3

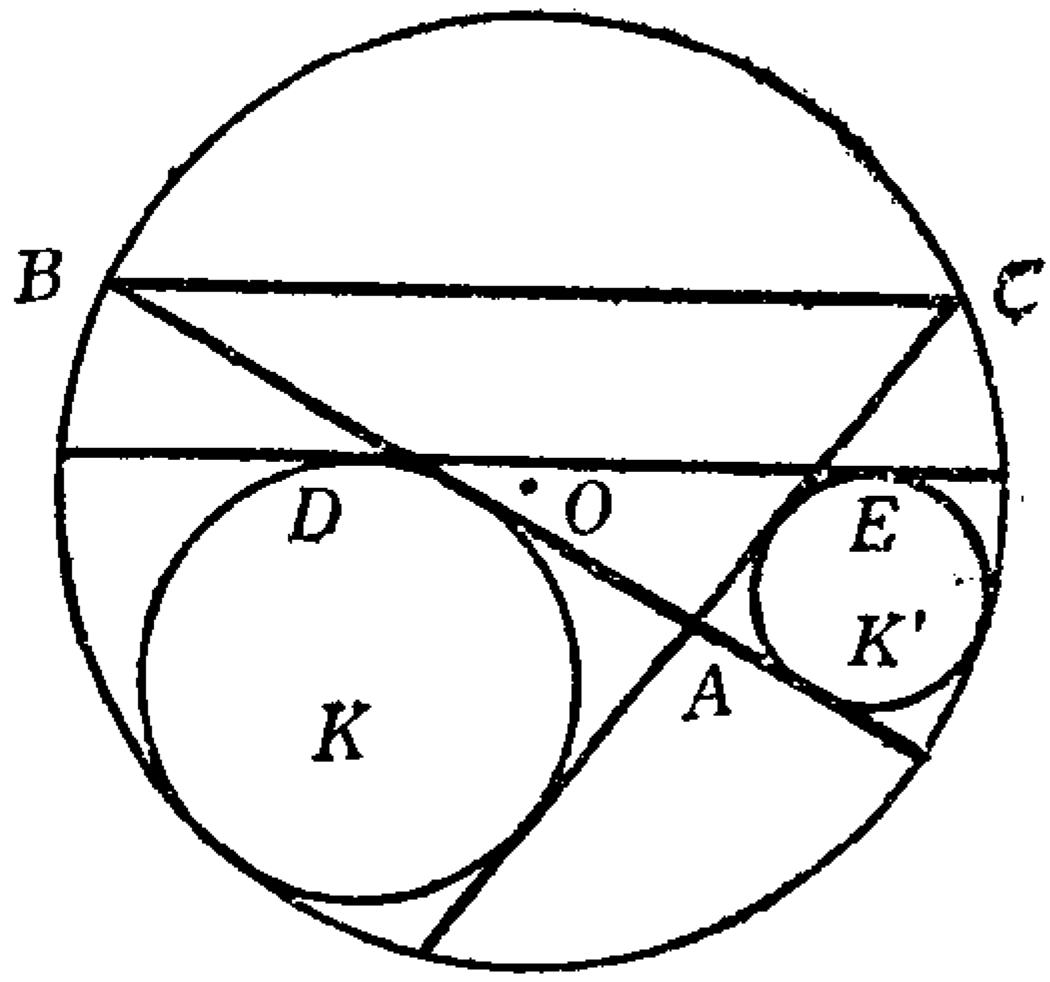


图 4

叶中豪先生进一步发现即使A不在$\odot O$上，结论依然成立。也就是有下面的定理：

定理 设$\odot K$、$\odot K'$均与$\odot O$相切，$\odot K$与$\odot K'$的外（内）公切线相交于A，交$\odot O$于B、C，则$\odot K$与$\odot K'$的内（外）公切线DE与BC平行（图4）。

这个定理，作者曾给出一个解析几何的证明。我们不知道不用解析几何怎样证明。在文献中没有发现过这个定理，很可能是一个新的结果。

这个定理有很多变形（例如在图4中，证明$\overset{\frown}{BC}$的中点到$\odot K$与$\odot K'$的切线相等）与特例（如$\odot K$与$\odot K'$相切的情况）。采用反演变换还可以诱导出更多的定理来。