单墫先生文章小集

这个小册子收录了单墫先生在各类数学杂志上发表的２２篇文章,版权归单墫先生所有，我只是将其进行收集整理，全为交流与学习，请勿不当使用！

齐建民

网名：三下五除二

个人网站：http://maths352.bokee.com

２００６　年８月１４日

最 佳 结 果

单 墫

问题：在正方体的每一个顶点处，写上一个非负的有理数，而且这些有理数的和等于1.甲、乙二人做下面的游戏：甲任选一面，然后乙另选一面，甲再选第三个面.所选的面不能平行.说明甲总可以使所选的三个面的公共顶点处的数不大于$\frac{1}{6}$.

生：这道题，我想了几天，想不明白.

师：这道题的确不容易.虽然用的知识不多，但需要较强的推理能力.你可以先做一个容易一些的问题：证明甲总可以使所选的三个面的公共顶点处的数不大于$\frac{1}{4}$.

生：这题我可以做，上底面有4个数，下底面也有4个数，它们的和是1，所以这两个面中，有一个面，面上4个数的和不大于$\frac{1}{2}$.甲先选这个面.

师：为了说话方便，可设甲选的这个面是上底面$ABCD$，如图1.

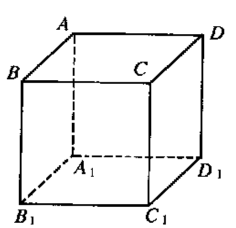


图1

生：乙选的面是一个侧面，比如说是左侧面ABB_1A_1.这时，A处的数与B处的数相加，和小于等于$\frac{1}{2}$，所以其中有一个数小于等于$\frac{1}{4}$.不妨设A处的数小于等于$\frac{1}{4}$.甲再选面AA_1D_1D，那么三个面的公共顶点就是A，满足要求.

师：很好.原来的问题要难一些，但也有类似的地方.如果仍像上面那样选一个面，必须这个面上有一个顶点，所写的数不大于$\frac{1}{6}$.

生：这并不难做到，因为面$ABCD$上4个数的和小于等于$\frac{1}{2}$，

4 个数中必有 2 个数都不大于 $\frac{1}{6}$ $\left(\text{否则就有 3 个数大于}\frac{1}{6},\text{和大于 } 3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\right)$. 但这两个数可能在同一条棱上,比如写在 A 和 B. 乙如果选右侧面 CC_1D_1D,那么甲就无法使三个面的公共顶点为 A 或 B,也就无法使公共顶点处的数小于或等于$\frac{1}{6}$了.

师:因此甲第 1 次所选的面上应有一对对角的顶点,所写的 2 个数都不大于$\frac{1}{6}$.

生:怎么能做到这一点呢?

师:刚才你已得出有一个面 4 个数中有 2 个数小于等于$\frac{1}{6}$. 在 8 个数中呢?

生:8 个数中,应当有 3 个数小于等于$\frac{1}{6}$. 否则 8 个数的和 大于$(8-2)\times\frac{1}{6}=1$.

师:很好. 现在只需要讨论一下这 3 个数的分布情况,看看其中是否有 2 个在一个面的对角顶点.

生:设一个在 A 点,如果另两个中有一个在 B_1, C 或 D_1,那么问题已经解决. 否则这两个数在 A_1, B, C_1 或 D 处,也是一对写在某个面的对角顶点处的数.

师:最后,还可以问一个问题. $\frac{1}{4}$可以改为$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{6}$能不能改成更小的数?

生:不能了. 例如 A, B 处写 0,其他顶点处都写$\frac{1}{6}$. 无论甲怎么取,乙都可以使三个面的公共顶点不是 A, B.

师:所以$\frac{1}{6}$是最佳的结果.

“四连”(二)

单 墫

上次说过,在 6×6 的棋盘上放白子,使得后放的黑子不能形成“四连”,白子至少要用 10 个. 这 10 个白子使黑子不能形成“四连”,但它自己能不能形成“四连”? 至多形成多少个?

我们探讨一下这个问题.

如果某列有 4 个白子形成“四连”,不妨设第三列的前 4 行是“四连”(图 1),这时其他列各需 1 个白子放在前 4 行,5,6 行也各需 1 个白子,共需白子

$$4+5+2=11(\text{个}).$$

如果主对角线上前 4 个方格成“四连”(图 2),那么边上 3 个 2×4 的块(阴影部分)共有 6 个白子,A, B 两格中没有白子. 同理, C, D 两格中没有白子,这样 4 个空格 A, B, C, D 在一条线上. 所以这种情况不会发生.

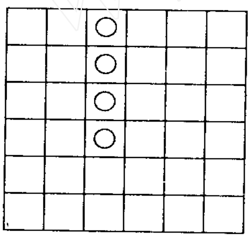


图 1

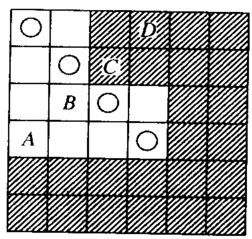


图 2

如果主对角线上中间 4 个方格成“四连”(图 3),那么由于中央已有 2 个白子,边上每个 2×4 的块中恰有 2 个白子. 斜线 AB 上应有白子,不妨设白子在 A 或 B. 由于 B 这列已有白子,所以 B 无白子,A 放白子(而且左上角的 2×4 的块中再没有白子了). BC 所在斜线的前 3 个方格均无白子,所以 C 应放白子. 同理 D 或 E 应放白子,但右下角的 2×4 的块中不能有 3 个白子,所以这种情况也不会发生.

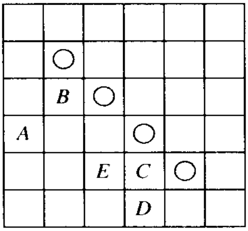


图 3

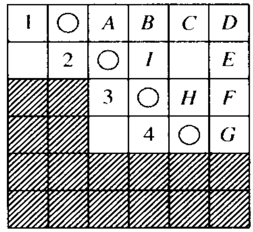


图 4

如果“四连”如图 4,那么右上角的三角形 ADG 的每条边上至少有 1 个白子,3 条边上至少有 2 个白子,剩下 4 个白子在阴影(2 个 2 ×4 的块)中. 1, 2, 3, 4 中无白子,这种情况也不会发生.

最后,“四连”如图 5,这时 A, B, C, D 中必有一个白子,E, F, G, H 中也必有一个白子,其余 4 个白子在阴影中,所以 I 处无白子. 这样一来,C 处必有白子. G, H 处不会全有白子,不妨设 G 处没有白子. B, G, I 均无白子,所以 2 处必有白子. 右下的 2 ×4 的块中,另一个白子在最后一行,又在过 D 的斜线上,因此必在 3 处. 主对角线的后 4 个方格中必有白子,它在 H 处. 最后还剩两个白子在一、二两列中. 它们应当在第三、四行,4 和 I 所在的这条斜线上应有白子,它必在 4 处. 第一列的白子可在 5 处或 6 处.

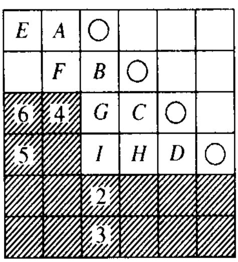


图 5

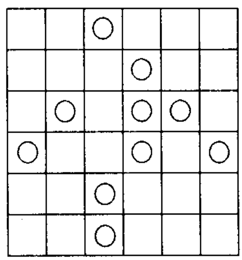


图 6

于是,有一个“四连”的情况只有两种,一种如图 6,另一种是将图 6的第一列的白子上移 1 格. 除去对称的图形外,其他图形均不形成“四连”. 所以至多只能形成 1 个“四连”.

“四连”(一)

单 墫

一个 6 ×6 的棋盘,有 36 个小方格,在方格里放棋子. 如果在一条直线(竖线、横线或斜线)上有 4 个同色的棋子相连,就称为一个“四连”.

甲放白棋,乙放黑棋. 如果允许甲先放,他至少要放多少个棋子,才能使乙随后放的棋子不可能构成四连?

最好自己画一个棋盘先试一试.

图 1 是一种放法.

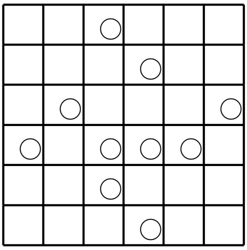


图 1

这种放法共用了 10 个白子,不难检验它符合要求(当然这不是惟一的放法).

要证明“至少要 10 个白子”,不是一件容易的事.

首先注意每个 1 ×4(由同一行或同一列的 4 个相连的方格组成) 的块,至少要放 1 个白子,所以边上的每个 2 ×4 的块(图 2 中阴影部分) 至少要放 2 个白子. 如果中央(A, B, C, D 四个方格) 放的白子数大于或等于 2,那么白子总数大于或等于 $4 \times 2 + 2 = 10$.

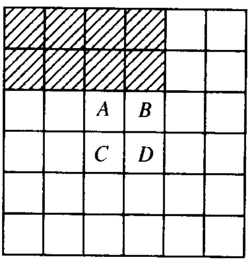


图 2

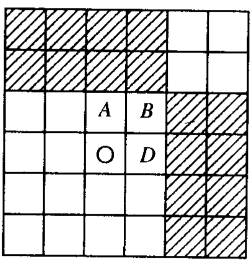


图 3

让未知数参加运算

马　明

已知数可以参加运算,例如,3 + 2 = 5,7 ×8 = 56, ……往后就要学习如何让未知数参加运算,因为,让未知数参加运算是重要的代数思想,它比算术思想先进得多,作用也大得多.

问题　一台自动车床生产零件,生产速度是均匀的.张师傅看见计件器上显示的数是一个两位数(用$\overline{AB}$表示),立即看看手表,记下时间.1 小时后,再看计件器,上面显示的仍然是一个两位数,不过恰好是前一个两位数颠倒了顺序(用$\overline{BA}$表示).再过 1 小时,计件器上显示的是三位数,又恰好是第一个两位数中间加了一个零(用$\overline{A0B}$表示).那么,这台自动机床每小时生产多少零件?计件器上三次显示的数各是多少?

如果中央不放白子,那么中间的两列(第三、四列),每列必须放两个白子,中间两行及两条主对角线(从左上到右下,从左下到右上的两条斜线)也是如此,而且这些白子互不相同,白子总数大于或等于6 ×2 = 12.

如果中央恰有 1 个白子,不妨设放在 C 处,那么由于 A、B 为空格,第三行必有 1 个白子放在阴影中(图 3).同样,第四列有 1 个白子在阴影中;A、D 所在主对角线上有两个白子在阴影中;B 所在的、与 AD 平行的斜线也有 1 个白子在阴影中.这 5 个白子互不相同,所以图中两块 2 ×4 的阴影中,有一块至少放 3 个白子.其他 3 个 2 ×4 的块与它组成棋盘的"边",每个块中至少放 2 个白子,白子总数大于或等于 1 + 3 + 3 ×2 = 10.

因此,10 个白子是最少的.

命题与解题

2005 中国数学奥林匹克的不等式题

单 墫

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097)

2005 年中国数学奥林匹克的试题比 2004 年容易些,只有第 4 题较困难. 如下:

已知数列$\{a_n\}$满足条件

$$a_1=\frac{21}{16},$$

$$2a_n-3a_{n-1}=\frac{3}{2^{n+1}},\ n\geqslant 2. \qquad ①$$

设 m 为正整数, $m\geqslant 2$. 证明:当 $n\leqslant m$ 时,有

$$\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]$$

$$<\frac{m^2-1}{m-n+1}. \qquad ②$$

解这道题当然是先求出$\{a_n\}$的通项,即由式①得

$$2\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)=3\left(a_{n-1}+\frac{3}{2^{n+2}}\right),$$

从而,有

$$a_n+\frac{3}{2^{n+3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(a_1+\frac{3}{16}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}.$$

于是,式②化为

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<\frac{m^2-1}{m-n+1}. \qquad ③$$

本题的难点是式③的证明. 命题者给出了一个很好的解答,本文将提供另一种解答.

首先,指出在 $n\geqslant 2$ 时,式③可加强为

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\cdot m\leqslant\frac{m^2-1}{m-n+1}. \qquad ④$$

式④的证明如下:

设 $f(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}(m-n+1)$.

当 $n<m$ 时,有

$$\frac{f(n)}{f(n+1)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{m-n+1}{m-n}.$$

因为 $\left(1+\frac{1}{m-n}\right)^m>\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$

$$>1+m\cdot\frac{1}{m}=2>\frac{3}{2},$$

所以, $f(n)>f(n+1)$.

收稿日期:2005-03-10

(提示:如果用直线 l 联结某两点(不妨记为 A_1、A_2),由题设这两点不能同时与点 $A_i(i\geqslant 3)$联结,即经过 A_1、A_2 中至少一点的直线至多只有 $n-1$ 条(包括直线 l). 同理,对 $A_3, A_4, \cdots, A_n$ 这 $n-2$ 个点而言,至少过 A_3、A_4 中一点的直线至多只有 $n-3$ 条,等等. 这样,

$$k\leqslant(n-1)+(n-3)+(n-5)+\cdots$$

$$=\begin{cases}(n-1)+(n-3)+\cdots+1=\dfrac{n^2}{4}, & \text{若 } n \text{ 为偶数;}\\ (n-1)+(n-3)+\cdots+2=\dfrac{n^2-1}{4}, & \text{若 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

另一方面,可把 n 个点分成两组:

当 n 为偶数时,每组各 $\frac{n}{2}$ 个点;

当 n 为奇数时,一组 $\frac{n-1}{2}$ 个点,另一组 $\frac{n+1}{2}$ 个点.

把第一组的每点与第二组的每点联结成 $\frac{n^2}{4}$ 或 $\frac{n^2-1}{4}$ 条直线,这些直线满足题设. 若 n 为偶数, $k_{\min}=\frac{n^2}{4}$;若 n 为奇数, $k_{\min}=\frac{n^2-1}{4}$.)

由于 $f(n)$ 递减,要证式④只须证 $f(2) \leq \frac{m^2-1}{m}$,即 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{m}} \leq \frac{m+1}{m}$. 因为

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^m \geq 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2m} \geq \frac{9}{4},$$

所以,式⑤成立,式④也随之成立.

易看出,当且仅当 $m = n = 2$ 时,式④中等号成立.

于是,剩下的问题是证明 $n = 1$ 时,式③成立,即

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\left[m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right] < \frac{m^2-1}{m}. \qquad ⑥$$

为了证明式⑥,考虑关于 t 的二次函数

$$y = mt - \frac{2}{3}t^2.$$

由于该函数在 $t \leq \frac{3}{4}m$ 时递增,而

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}} < 1 + \frac{1}{2m} \quad \left(\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m > 1 + m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{3}{2}\right),$$

$$1 + \frac{1}{2m} < 1 + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}m,$$

所以,$m\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{m}}$

$$< m\left(1+\frac{1}{2m}\right) - \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^2$$

$$< m + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3m}$$

$$= m - \frac{1}{m} + \frac{1}{3m} - \frac{1}{6} \leq \frac{m^2-1}{m}.$$

故式⑥成立.

在上面的证明中,n 为正整数,这与原来的题意相符. 其实,不等式③对一切满足 $1 \leq n \leq m$ 的实数 n 均成立(m 为大于或等于 2 的实数). 原解答仍可用于 n 为实数的情形,而上面的解答则需要略加修改.

关于 $f(n)$ 的单调性,应当利用导数:

$$f'(n) = -\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} + (m-n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{1}{m}\ln\frac{3}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{m-n+1}{m}\ln\frac{3}{2} - 1\right)$$

$$< \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(\ln\frac{3}{2} - 1\right) < 0.$$

而在 $1 \leq n \leq 2$ 时,应当先证明

$$g(n) = (m+1-n)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]$$

是单调递减的(从而,问题化为式⑥的证明). 这也要利用导数.

因为

$$g'(n) = -\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\right] + (m-n+1) \cdot$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}} \cdot \frac{m-2}{m}\right]\ln\frac{3}{2},$$

于是,有

$$g'(n) < 0$$

$$\Leftarrow m\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(1 - \ln\frac{3}{2}\right)$$

$$> (m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\ln\frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}$$

$$\Leftarrow m\left(1 - \ln\frac{3}{2}\right) > (m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\ln\frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}$$

$$\Leftarrow m\left(1 - \ln\frac{3}{2}\right) > (m-2)\ln\frac{3}{2} + 1$$

$$\Leftarrow m\left(1 - 2\ln\frac{3}{2}\right) > 1 - 2\ln\frac{3}{2}.$$

而 $1 - 2\ln\frac{3}{2} > 0$ ($e = 2.718\,28 \cdots > \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$),所以,上式成立. 从而,$g(n)$ 递减.

当指数由整数变为任意实数时,不可避免地要利用导数(原解答用到贝努利不等式,而实指数的贝努利不等式必须用导数来证明). 冬令营的选手中有一些也试图利用导数,但却未能得出正确结果. 这表明导数的学习应当加强,因为它是很重要的.

命题与解题

抽象与具体*

单 墫
(南京师范大学数学系,210024)

著名数学家柯尔莫哥洛夫在《数学,它的内容、方法和意义》一书中指出数学有三大特点,即抽象性、严谨性、应用的广泛性.

数学是抽象的,但又是具体的.

如果只谈抽象,不谈具体的例子,抽象就会变成无源之水,无本之木,抽象就难于理解,难于感觉.因此,我们不但要学会如何从具体到抽象,还要学会将抽象的定理、问题具体化.

1.具体的例子可以帮助我们猜出结论

很多命题是从具体的例子抽象出来的,猜就是抽象.

例1 $X=\{1,2,3,\cdots,2n+1\}$. A 是 X 的子集,具有性质:A 中任意两个数的和不在 A 中,求 $\max|A|$.

我们先考虑一个具体的 A. 题中 A 是具有某种性质的数的集合,而 A 中任两个数的和却不具有这种性质.

举例子应从身边开始,尽量举熟悉的例子. 关于整数,最常见的性质便是奇偶性,而且任两个奇数的和不是奇数. 所以,

$$A=\{1,3,5,\cdots,2n+1\}$$

就是一个合乎要求的例子. 这时

$$|A|=n+1.$$

A 显然不能再添加其他的数,添加任一个偶数就不再合乎要求. 而且去掉一些奇数后,似乎也不能增添更多的偶数(这一点将在下面严格证明). 所以我们大胆猜测

$$\max|A|=n+1.$$

例2 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$, A、B、C 是 X 的分拆,即 $A\cup B\cup C=X$,并且 A、B、C 两两的交都是空集. 如果从 A、B、C 中各取一个元,那么每两个的和都不等于第三个. 求

$$\max\min(|A|,|B|,|C|).$$

此题比例1更难一些,仍应当先举具体的例子. 还是考虑奇偶性. 如果 A 由 X 中的奇数组成,$B\cup C$ 由 X 中的偶数组成,那么它们合乎题述要求. 这时

$$\min(|A|,|B|,|C|)=\left[\frac{n}{4}\right].$$

由此我们可以提出猜测

$$\max\min(|A|,|B|,|C|)=\left[\frac{n}{4}\right],$$

也就是恒有

$$\min(|A|,|B|,|C|)\leq\frac{n}{4}. \tag{1}$$

2.具体的例子可以引出命题的证明

命题的证明不是从天上掉下来的,具体的例子往往给我们很多的启发.

在例1中,奇偶性给我们很大的帮助. 对一般的、满足要求的 A,可设其中有 k($k\leq n$

* 本文收稿日期:2002-01-21

的整数 a,可惟一地表示成

$$a=a_0k_0+a_1k_1+\cdots+a_nk_n.$$

这里 $a_i\in\{-1,0,1\}(i=0,1,\cdots,n)$.

(简解:取集合 $A=\{0,1,2,\cdots,3^{n+1}-1\}$,则在三进制下 A 中的数可表示为 $3^nx_n+3^{n-1}\cdot x_{n-1}+\cdots+3x_1+x_0$($x_0,x_1,\cdots,x_n=0,1,2$). 令

$$A_1=\{x-(3^n+3^{n-1}+\cdots+1)\mid x\in A\}$$

$$=\left\{-\frac{3^{n+1}-1}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{3^{n+1}-1}{2}\right\}.$$

则 A_1 中的每个数可表示为

$$(x_n-1)3^n+(x_{n-1}-1)3^{n-1}+\cdots+3(x_1-1)+(x_0-1).$$

令 $a_i=x_i-1(i=1,2,\cdots,n)$,

则 $a_i\in\{-1,0,1\}$).

$+1)$ 个奇数

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_k.$$

再看一看 A 中至多能有多少个偶数. 显然,偶数

$$a_1 - a_2 < a_1 - a_3 < \cdots < a_1 - a_k$$

都不能在 A 中(因为 $a_1 - a_i$ 与 a_i 之和 a_1 在 A 中),所以,A 中至多有

$$n - (k - 1) = n + 1 - k$$

个偶数. 从而,

$$|A| \leq k + (n + 1 - k) = n + 1.$$

例 2 的证明更复杂一些,但去掉一些比较容易处理的情况,剩下的也就是我们所举的例子. 详细的推导可见《集合及其子集》(单墫著,上海教育出版社 2001 年出版).

3. 解题应当从具体出发

前面已经说过,具体的例子会给我们很多启发,所以解题往往从具体开始.

例 3　100 个质量分别为 1、2、…、100 克的砝码放在天平两边,正好达到平衡. 证明:一定可以从每边各取去 2 个砝码,天平仍保持平衡.

从具体出发,不妨设 1(即 1 克的砝码) 在左边,进一步设 $1, 2, \cdots, k$ 在左边,而 $k+1$ 在右边. 这时有两种情况:

(i) $k+2$ 在右边.

如果 $k+3$ 在左边,那么,从左边取下 $k+3$ 与 k,从右边取下 $k+2$ 与 $k+1$,天平仍然平衡.

如果 $k+3$ 在右边,而 $k+4$ 在左边,同样,可从左边取下 $k+4$ 与 k,从右边取下 $k+3$ 与 $k+1$,天平仍然平衡.

依此类推,只要有 $t(t \geq k+2)$ 在右边,而 $t+1$ 在左边,那么,就可在左边取下 $t+1$ 与 k,在右边取下 $k+1$ 与 t,天平仍然平衡.

于是,只剩下一种可能不合要求的情况,即 $1 \sim k$ 在左边,而 $k+1 \sim 100$ 在右边. 但这时应有

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + 100),$$

即　$k(k+1) = 5\,050 = 101 \times 50.$

而这个 k 的方程无整数解,所以这种情况不会发生.

(ii) $k+2$ 在左边.

如果有 $t(t > k+2)$ 在左边,而 $t+1$ 在右边,那么,可在左边取下 t 与 $k+2$,在右边取下 $t+1$ 与 $k+1$. 如果有 $t(t > k+2)$ 在右边,而 $t+1$ 在左边,那么可在左边取下 $t+1$ 与 k,在右边取下 $k+1$ 与 t. 因此只剩下一种可能不合要求的情况,即 $1 \sim k$ 与 $k+2$ 在左边,而 $k+1, k+3 \sim 100$ 在右边. 同样,由不定方程无整数解可知这种情况不会发生.

这道题,有些同学不从具体出发,解起来就困难重重.

还可以举一个更复杂的例子,用以说明从具体出发是解题的一条重要途径,这就是本文最后的例 6.

4. 具体例子中隐含问题的本质

有人认为抽象反映了问题的本质,而具体例子只呈现问题的表象. 其实问题的本质即寓于具体例子之中.

例 4　图 1 中 8 个顶点,每个顶点处各有一个实数,每个顶点处的实数正好等于 3 个相邻顶点(有线段相连的两个顶点称为相邻顶点)处的数的平均数. 求

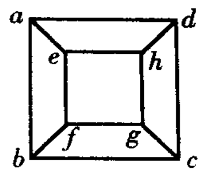


图 1

$$a + b + c + d - (e + f + g + h).$$

下面的解法曾在期刊上出现:

由已知

$$a = \frac{b + e + d}{3}, \tag{1}$$

$$b = \frac{a + f + c}{3}, \tag{2}$$

$$c = \frac{b + g + d}{3}, \tag{3}$$

$$d = \frac{c + h + a}{3}. \tag{4}$$

四式相加得

$$a + b + c + d = \frac{1}{3}(2a + 2b + 2c + 2d + e + f + g + h),$$

即　$a + b + c + d - (e + f + g + h) = 0.$

上述解法,巧诚巧矣!但有两个缺点.

一是太凑巧了.四式相加可以得出 $a+b+c+d$,这是预料之中的事,但整理后正好得出 $a+b+c+d-(e+f+g+h)=0$ 却是偶然的.如果题目改为求 $2a+b+c+d-(2e+f+g+h)$,那么上面的解法就不再奏效了.

二是上述解法未能揭示问题的实质,即 8 个数 a、b、c、d、e、f、g、h 之间的关系.

解本题应当先举一个具体的例子.要使每一个顶点处的数都等于相邻顶点处的数的平均数,最简单的例子是取

$$a=b=c=d=e=f=g=h.$$

而实际上这也就是仅有的可能.因为不失一般性,可设 a 是 8 个数中最大的,由于 a 是 b、e、d 的平均数,所以 b、e、d 也必须是最大的,即与 a 相等.同理可知 8 个数全相等.这样,无论 $a+b+c+d-(e+f+g+h)$ 还是 $2a+b+c+d-(2e+f+g+h)$ 都显然是 0.

所以,(1),(2)等式子只是表面的东西,8 个数相等才是真正的本质.

5.一个具体例子可能包含很多内容,可从不同角度加以抽象

一个极简单也极典型的例子就是高斯(Gauss,1777—1855)对

$$1+2+\cdots+100$$

的计算.通常,由这个例子可以抽象出一般的等差数列的求和公式

$$s_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}. \qquad (5)$$

但高斯当时的原始想法究竟如何已经无法知道,我们可以有多种的揣想,例如,可以认为高斯知道常数数列的求和(这是每个知道乘法的小朋友都能掌握的),他很可能想将 $1+2+\cdots+100$ 化为常数数列的求和.为此,他采用"均贫富"的方法,"损有余以补不足",即将最小的 1 与最大的 100 平均,变成 2 个 $\frac{101}{2}$;再将次小的 2 与次大的 99 平均,也变成 2 个 $\frac{101}{2}$;依此类推,恰好这些平均数都相等,都是全体 100 个数的平均数,所以总和就是 $\frac{101}{2}\times100$.因此,可以说高斯的故事中给我们两个重要的思想,即平均的思想与化归(为常数数列)的思想.

例 5 求下列方阵中所有数的和

1 901	1 902	…	1 949	1 950
1 902	1 903	…	1 950	1 951
…				
1 950	1 951	…	1 998	1 999

很多人先用公式(5)求出第一行的和

$$S_1=\frac{1\,901+1\,950}{2}\times50=96\,275;$$

再求出第 2、3、…、50 行的和;最后将这些和相加.如果注意到第二行的每个数比上一行的数大 1,那么,各行的和是

$$S_2=96\,275+50,$$

$$S_3=96\,275+50\times2,$$

……

$$S_{50}=96\,275+50\times49.$$

这样,可以再用(5)求出 $S_1+S_2+\cdots+S_{100}$.

但更简单的做法还是应用平均的思想,将每个数与位置关于它中心对称的数平均,每个平均数都是 $\frac{1\,901+1\,999}{2}=1\,950$.

于是总和为

$$1\,950\times50\times50=4\,875\,000.$$

可见,即使是很简单、很常见的例子,也包含很多内容,并非只经过一次抽象,就将它的精、气、神全都抽光了.

6.将抽象问题具体化,是数学素养的一个重要方面

最近在一处讲课,同学问我一个问题:

例 6 集 $S=\{x|\ x$ 是十进制中的 9 位数,数字为 1,2,3$\}$.映射 $f:S\longrightarrow\{1,2,3\}$,且对 S 中任意一对同数位上数字均不相同的 x、y,$f(x)\neq f(y)$.求 f 及其个数.

首先,应搞清题意,S 可以看作是 9 元有序组$(x_1,x_2,\cdots,x_9)$的集合,其中 $x_i\in\{1,2,3\}$,$1\leq i\leq9$.令 S_i 为 S 中映成 i 的元所成的集$(i=1,2,3)$,则 S_1、S_2、S_3 是 S 的分拆,且 S_i 中任意二个元 x、y,至少有一个"分量"相同.问题即求这种分拆及其个数.

分拆比映射 f 较为具体,所以对题意的理解往往是具体化的过程.

再进一步,我们举一个符合要求的具体

函数观点在竞赛中的应用*

王 金 战

(中国人民大学附中,100080)

函数不仅是高中阶段学习的一项主要内容,而且是长久起作用的一个基本数学观点,故函数也常常成为各类考试的重点、热点.

一、应用函数的有关知识和思想解题的基本策略

1. 将静态的问题放到动态过程中考察

例 1 求 $\delta=(1-1\,997)(1-1\,997^2)(1-1\,997^3)\cdots(1-1\,997^{1\,997})+1\,997(1-1\,997^2)(1-1\,997^3)\cdots(1-1\,997^{1\,997})+1\,997^2(1-1\,997^3)\cdots(1-1\,997^{1\,997})+\cdots+1\,997^{1\,996}(1-1\,997^{1\,997})+1\,997^{1\,997}$.

解:构造函数 $\varphi_n(x)=(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)+x(1-x^2)\cdots(1-x^n)+x^2(1-x^3)\cdots(1-x^n)+\cdots+x^{n-1}(1-x^n)+x^n$.

则 $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=1$, $\varphi_3(x)=1$, ….

而 $\varphi_{n+1}(x)=(1-x^{n+1})\varphi_n(x)+x^{n+1}$,由数学归纳法不难证得

$\varphi_n(x)=1$, $\varphi_{1\,997}(1\,997)=1$,即 $\delta=1$.

由此例看到,所求 δ 仅为函数 $\varphi_n(x)$ 的一个瞬间,由 $\varphi_n(x)$ 的性质,我们又可构造出

* 本文收稿日期:2001-10-15

例子.这也不难,令

$S_i=\{$以 i 为首位的 9 元数组$\}$($i=1,2,3$).显然,这样的 S_i 合乎条件.

首位可改为任何一位,S_1、S_2、S_3 可以任意排列顺序.因此,我们已经举出 $9\times3!=54$ 个合乎要求的例子.

感觉再也没有其他例子了.于是,大胆猜测:只有上述那些情况.证明如下:

不妨设 $(1,1,\cdots,1)\in S_1$, $(2,2,\cdots,2)\in S_2$, $(3,3,\cdots,3)\in S_3$.

设有 $x\in S_1$,并且 x 的首位为 1,记 x 为 $1+y$,其中 y 是 x 的后 8 位所成向量(数组).

若 $2+y\in S_2$,我们往证一切以 2 为首位的数组均在 S_2 中.

事实上,设这个数组为 $2+u$,则有一个 8 元数组 v,每一位与 y 不同,与 u 也不同,所以 $3+v\notin S_1$, $3+v\notin S_2$, $3+v\in S_3$.从而,$2+u\notin S_3$.又 $1+v\notin S_2$.而且有一个 8 元数组 w,每一位与 y 不同,也与 v 不同,显然 $3+w\in S_3$,从而 $1+v\in S_1$, $2+u\notin S_1$.所以,必有 $2+u\in S_2$.

易知这时 S_2 中也只有以 2 为首位的数组,并且,这时 $122\cdots2\in S_1$, $322\cdots2\in S_3$. S_1、S_3 分别由 1、3 为首位的数组组成.

因此,若 $21\cdots1\in S_2$,则结论已经成立.设 $21\cdots1\in S_1$,同理若 $221\cdots1\in S_2$,则由上面的推理(将首位换作第二位),S_i 由第二位为 i 的数组组成.设 $221\cdots1\in S_1$.依此类推,直至 $22\cdots21\in S_1$.但此时 $22\cdots22\in S_2$,所以 S_i 由末位为 i 的数组组成.

这样一道题,为什么一些(准备参加冬令营的)同学解不出来呢?很可能是由于他们已经过分习惯于"抽象",而不先去寻求具体的例子.这一现象值得我们注意,不要难题做得过多,反而忘记了最基本的方法:即应当将抽象问题具体化,从最简单的做起.本文的目的之一也就是提醒师生注意这方面的问题,这应当是最基本的数学素养.

当代数学大师陈省身先生曾经说过一段话:"一位好的数学家与一个蹩脚的数学家之间的差别,在于前者手中有很多具体的例子,而后者只有抽象的理论."所以,我们应当掌握更多的具体的例子,使抽象的东西变为能够感觉的,易于把握的具体的例子.

第 31 届(2002)美国数学奥林匹克

单 墫

(南京师范大学数学系,210024)

师:2002 年的美国竞赛题,难度与 IMO 相当. 涉及的知识范围,如极限、多项式性质等,比我国的 CMO 稍广. 但几乎没有平面几何,这是他们的弱点.

下面是第 1 道试题,你做做看.

1. 设 S 是 2 002 元集,N 为整数,满足 $0 \leq N \leq 2^{2\,002}$. 证明:可将 S 的所有子集染上黑色或白色,使得下列条件成立:

(a) 任两个白色子集的并集是白的;

(b) 任两个黑色子集的并集是黑的;

(c) 恰好存在 N 个白色的子集.

生:我从简单的情况做起,设 $S = \{1, 2, \cdots, 2\,002\}$. 在 $N = 1$ 时,可将空集 $\varnothing$ 或任一个一元子集,例如 $\{1\}$,染黑(其余子集染白). 这时 (a)、(b)、(c) 显然满足.

$N = 2$ 时,将 $\varnothing$ 与 $\{1\}$ 染黑.

$N = 3$ 时,将 $\varnothing$、$\{1\}$、$\{1,2\}$ 染黑.

$N = 4$ 时,将 $\varnothing$、$\{1\}$、$\{1,2\}$、$\{2\}$ 染黑.

显然,在上述几种情况,(a)、(b)、(c) 均成立.

师:接下去怎么办呢?

生:当然不能一直这样做下去. 我想采用数学归纳法.

师:很好. 归纳假设是什么?

生(想了一想):我假设对于 n 元集 S 及 $N \leq 2^n$,可以实现所说的染色. 考虑 $n+1$ 元集 $S \cup \{n+1\}$ 的染色. 不过,不知道怎样利用这个假设将 $S \cup \{n+1\}$ 的 $2^n + k\,(k = 1, 2, \cdots, 2^n)$ 个子集染黑.

师:还是回到简单具体的情况. 你已经解决了 $S = \{1,2\}$ 及 $N \leq 2^2$ 的染色情况. 考虑将集 $\{1,2,3\}$ 的 $2^2 + 1$ 个子集染黑.

生:这只要在已有的基础上再增加一个黑的子集就可以了. $\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$ 都是黑的,再增加谁呢? $\{3\}$ 不行(因为 $\{2,3\}$ 是白的),$\{1,2,3\}$ 也不行(因为 $\{1,2,3\} = \{1,3\} \cup \{2,3\}$). 只剩下 $\{1,3\}$ 与 $\{2,3\}$. 奇怪,它们也不行.

师:所以,你必须抛弃原有的"基础",重新开始. 不要先将 $\{1,2\}$ 的 4 个子集染黑. 相反地,应当将 $\{1,2,3\}$ 的另 4 个子集,也就是含有 3 的 $\{3\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$ 染黑. 然后在 $\{1,2\}$ 的 4 个子集中再增加一个黑的.

生:我明白了. 2^2+2、2^2+3、2^2+4 的情况也是如此.

师:一般情况呢?

生:我先将含 $n+1$ 的 2^n 个子集染黑. 然后运用归纳假设,将 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的 k 个子集染黑,使得它们满足 (a)、(b). 这样,对 $2^n + k\,(k = 1, 2, \cdots, 2^n)$,有满足要求的染色.

师:应当验证一下这样的染色确实符合要求.

生:这并不困难.

师:那我们就看第 2 道题吧.

2. 设 $\triangle ABC$ 满足

$$\left(\cot\frac{A}{2}\right)^2 + \left(2\cot\frac{B}{2}\right)^2 + \left(3\cot\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{6s}{7r}\right)^2,$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$,r 为内切圆半径. 证明:$\triangle ABC$ 与一个三角形 T 相似,T 的边长均为整数,并且三边的最大公约数为 1,确定 T 的边长.

生:我知道

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{s-a}{r},\ \cot\frac{B}{2} = \frac{s-b}{r},\ \cot\frac{C}{2} = \frac{s-c}{r}.$$

所以,原来的条件即

$$(s-a)^2 + [2(s-b)]^2 + [3(s-c)]^2 = \left(\frac{6s}{7}\right)^2. \qquad ①$$

接下去如何进行却看不太清楚.

师:应当利用 ① 求出 $a:b:c$.

生:要求比 $a:b:c$,可假定 $c = 1$,实际上有两个未知数 a、b. 但只有 ① 一个等式,通常只能定出一个未知数. 除非 ……

师:除非什么?

生:除非这个等式是一些实数平方的和等于0.但现在是3个平方的和等于一个非零的平方,要作恒等变形有点烦.

师:不必作恒等变形.因为有一个著名的不等式可以利用.

生:我知道您说的是柯西不等式,①的左边是三个平方的和,应当再乘上三个平方的和.这三个平方的和,应当是右边的分母 7^2.但这三个平方分别是什么?我要凑一下.

师:$s-a$、$2(s-b)$、$3(s-c)$应当分别乘上不同的数,使得所得结果中 s 的系数相等.这才便于与右边的分子比较.

生:1、2、3的公倍数是6,所以 $s-a$、$2(s-b)$、$3(s-c)$应当分别乘上6、3、2.而

$$6^2+3^2+2^2=36+9+4=49=7^2.$$

则
$$\begin{aligned}&7^2\{(s-a)^2+[2(s-b)]^2+[3(s-c)]^2\}\\&=(6^2+3^2+2^2)\{(s-a)^2+[2(s-b)]^2\\&\quad+[3(s-c)]^2\}\\&\geq[6(s-a)+6(s-b)+6(s-c)]^2\\&=(6s)^2.\end{aligned}$$

其中等号成立.所以,

$$\frac{s-a}{6}=\frac{2(s-b)}{3}=\frac{3(s-c)}{2}.$$

由等比定理,这比就是

$$\frac{6(s-a)+6(s-b)+6(s-c)}{6^2+3^2+2^2}=\frac{6s}{49}.$$

从而,$\dfrac{a}{49-6^2}=\dfrac{b}{49-3^2}=\dfrac{c}{49-2^2}$,

即 $a:b:c=13:40:45$.

三角形 T 的三边是13、40、45.

师:再看第3道题.

3.证明:任一 n 次实系数的首一(首项系数为1)多项式是两个 n 次的、有 n 个实根的首一多项式的平均.

师:这是一个关于多项式的问题.你应当知道一个关于根的定理:

如果实系数多项式 $f(x)$ 在区间 $[c,d]$ 上变号,即 $f(c)f(d)<0$,那么,$f(x)$ 在 $[c,d]$ 内必有一个根.

生:听说过这个定理.

师:那么,你就可以做这道题了.

生:设 $f(x)$ 是已知的多项式.又设 $g(x)$ 是另一个 n 次的首一多项式,则有

$$f(x)=\frac{1}{2}(2f(x)-g(x)+g(x)).$$

只要设法选择 $g(x)$,使得 $g(x)$ 与 $2f(x)-g(x)$ 都有 n 个实数根.

师:你先将 $f(x)$ 表成两个 n 次首一多项式的平均,然后再设法满足其他要求,这种想法很好.

生:怎么选择 $g(x)$ 比较困难.

师:先假定 n 是偶数.这时,在 x 的绝对值很大时,$g(x)>0$.

然后任取 n 个值,例如 $1,2,\cdots,n$,再取一个正数 M,使得

$$g(1)=g(3)=\cdots=g(n-1)=-M, \quad ①$$

$$g(2)=g(4)=\cdots=g(n)=M. \quad ②$$

根据前面所说的定理,$g(x)$ 在 $(-\infty,1)$,$(1,2)$,$\cdots$,$(n-2,n-1)$,$(n-1,n)$ 上各有一个根,即 $g(x)$ 有 n 个实根.

生:有一个问题,满足①、②的 n 次、首一多项式 $g(x)$ 存在吗?

师:我忘记说了,这要用到拉格朗日插值定理.

生:我知道这个定理.它是说对任意的两组实数 $a_1<a_2<\cdots<a_k$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_k$,有一个 $k-1$ 次多项式 $h(x)$ 存在,满足 $h(a_i)=b_i(1\leq i\leq k)$.具体的表达式是

$$h(x)=\sum_{i=1}^{k}\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}\cdot b_i.$$

但我不知道现在如何应用这个定理.而且,$h(x)$ 并不是首一的.

师:我们只定了 n 个点的函数值,所以你说的 $h(x)$ 是 $n-1$ 次多项式.再加上一个首一的 n 次多项式 $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ 就得到合乎要求的 $g(x)$ 了.

生:原来这么简单!不过,怎么能保证另一个多项式 $2f(x)-g(x)$ 也有 n 个实根呢?

师:上面的 M 可以由我们自由地选择.现在希望 $2f(x)-g(x)$ 在 $x=1,3,\cdots,n-1$ 处的值大于0,在 $x=2,4,\cdots,n$ 的值小于0.

生:这只要取

$M > \max\{2|f(1)|, 2|f(2)|, \cdots, 2|f(n)|\}$

就可以了.

师:n 是奇数的情况证明只需稍作修改.

4. 设 R 为实数集,确定所有满足下列条件的函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$, $\forall x、y \in \mathbf{R}$.

师:你先猜猜看,$f(x)$ 是什么函数?

生:我猜想 $f(x)$ 是正比例函数 kx. $f(x) = kx$ 确实符合要求. 但要证明只有 $f(x) = kx$,似乎不太容易.

师:试试看.

生:令 $x = y = 0$ 得 $f(0) = 0$. 令 $y = 0$ 得

$f(x^2) = xf(x)$. ①

令 $x = 0$ 得

$f(-y^2) = -yf(y) = -f(y^2)$. ②

所以 $f(x)$ 是奇函数,只需在 $(0, +\infty)$ 上讨论.

由于 ①,

$f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2)$.

将 x^2、y^2 改写为 x、$y(x、y > 0)$,则

$f(x - y) = f(x) - f(y)$,

即(将 x 改记为 $x + y$, $x - y$ 改记为 x)

$f(x + y) = f(x) + f(y)$. ③

由 ③,运用熟知的柯西方法可知,对 $x \in \mathbf{Q}$,

$f(x) = kx$, $k = f(1)$. ④

如何证明 ④对于 $x \in \mathbf{R}$ 成立,好像很难.

师:由 ③只能得出 ④对 $x \in \mathbf{Q}$ 成立. 要证明 ④对 $x \in \mathbf{R}$ 成立,通常要利用连续性. 本题未给出这一条件,但除 ③外,还有一个重要的式 ①,利用它可以得出所欲的结果.

你可以考虑一下 $f((x+1)^2)$.

生:一方面

$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1)$

$= (x+1)(f(x) + k)$.

另一方面,

$f((x+1)^2) = f(x^2 + 2x + 1)$

$= xf(x) + 2f(x) + k$.

比较以上两个方面即得

$f(x) = kx$.

师:这是典型的"算两次",是一种很有用的方法.

5. 设 a、b 为大于 2 的整数. 证明:存在一个正整数 k 及正整数的有限序列 $n_1, n_2, \cdots, n_k$,满足 $n_1 = a$, $n_k = b$ 且对所有 $i(1 \le i \le k)$, $n_i n_{i+1}$ 被 $n_i + n_{i+1}$ 整除.

生:这道题,我还是从简单的例子做起. 首先,3 可以用一步变为 6,记为 $3 \to 6$. 一般地,

$a \to a(a-1)$. ①

师:很好! ①可以算做第 1 条引理. 你再做几个简单的例子,如将 4、6、9 变为 3.

生:因为 $3 \to 6$,所以反过来便有 $6 \to 3$.

师:这也可以算做一条引理,即引理 2:如果 a 经若干步可以变成 b,那么 b 也可以经过若干步变为 a.

生:$4 \to 4 \times 3 \to 2 \times 6 \times 5 \to 6 \times 5 \to 6 \to 3$

$9 \to 3 \times 3 \times 2 \to 3 \times 6 \times 5 \to 2 \times 6 \times 5 \to \cdots \to 3$

我还可以得出第 3 条引理:

如果 a 能经过若干步变成 b,那么 ac 能经过若干步变为 bc.

师:一般情况,你准备怎么做?

生:我想用归纳法,证明一切大于 2 的整数 a 都可以变为 3. 这样,由引理 2, a 可以先变为 3,再变为任一大于 2 的整数 b.

师:很好的想法,就这样做下去.

生:假设 $a > 3$,并且小于 a、大于 2 的整数都可以经若干步变为 3,考虑 a.

如果 a 是合数,设 $a = mn$, m、n 是两个大于 1 的整数, $m \ge n$.

若 $m = 2$,则 $n = 2$, $a = 4$. 若 $m = 3$,则 $n = 3$ 或 2, $a = 9$ 或 6. 这些情况前面已经做过,以下设 $m > 3$.

由归纳假设, m 可以经若干步变为 3. 由引理 3, a 可经若干步变为 $3n$. 因为 $3n < a$,再用归纳假设便得出 a 可经若干步变为 3.

如果 a 是质数,我还没有想好.

师:如果 a 是质数,那么 $a + 1$ 是合数,设 $a + 1 = mn$, m、n 是两个大于 1 的整数,它们能相等吗?

生:如果 $m = n$,那么,

$a = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$

不是质数(除非 $m = 2$, $a = 3$. 但前面假设 $a > 3$).

师:设 $m > n$,由前面的引理 1、3,

$$a \to a(a-1) \to a(a-1)(a-2) \to \cdots$$
$$\to a(a-1)\cdots m\cdots n$$
$$=(a+1)a(a-1)\cdots(m+1)(m-1)(m-2)\cdots(n+1).$$

生:接下去我知道怎么做了. 由引理 1、2、3,

$$\text{上式} \to (a+1)a\cdots(m+2)(m-1)(m-2)\cdots(n+1)$$
$$\to\cdots\to(a+1)a(m-1)(m-2)\cdots(n+1)$$
$$\to(a+1)(m-1)(m-2)\cdots(n+1)$$
$$=m(m-1)(m-2)\cdots(n+1)n$$
$$\to m(m-1)(m-2)\cdots(n+1)$$
$$\to\cdots$$
$$\to m.$$

最后再用归纳假设就证完了.

6. 我有一版 $n\times n$ 的邮票. 要从中分出由 3 张在同一行或同一列相连的邮票组成的块(只能沿着针孔线分,而且每个块就是分下的一片纸). 分下一些块以后,不可能再分下更多的块了. 令这时的块数的最小值为 $b(n)$. 证明:存在实常数 c、d,对所有 $n>0$,都有

$$\frac{1}{7}n^2-cn\le b(n)\le\frac{1}{5}n^2+dn.$$

生:这道题看上去很复杂,又是大轴题,恐怕很不容易.

师:那倒不见得. 解题得有信心,不要先折了自己的锐气. 你先考虑右边的上界.

生:上界即 $5b(n)\le n^2+5dn$. 意味每一块在整版上的影响大致为 5. 我从第一行左端开始,每隔 2 张邮票剪下一块,如图 1 所示:

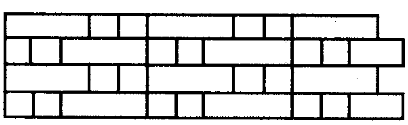


图 1

其中黑色表示剪下的块,每块由 3 张邮票组成. 这样剪下去,第一行剪到最后,可能出现以下两种情况:

(1) 恰好剪完或剩下 1 张或剩下 2 张邮票;

(2) 剩下 3 张或 4 张邮票. 这时再剪下 1 块.

其他行与第一行相同或类似.

设这时剪下的块数为 $c(n)$.

一般情况,第一、三、⋯行(第二、四、⋯行)每一块"控制"自身的 3 张邮票及随后(前面)的 2 张邮票. 对于最后的一、两块,在 $n\times n$ 的这版邮票右边再添 4 列($4n$ 张邮票)作为被它们控制的,那么每个块都至少可以"控制"5 张邮票. 因此

$$5c(n)\le n^2+4n.$$

从而 $b(n)\le c(n)\le\frac{1}{5}n^2+\frac{4}{5}n.$

师:边缘的(或添加的)几列,邮票张数是 n 的一次式,对结果(有 n^2 出现,它是主项)没有什么影响(只改变常数 d 或 c 的值).

生:下界要难一些. 每个块,无论横竖,右面与下面有 5 张相邻的邮票,如图 2(包括与这块仅有一个公共顶点的邮票).

如果已经不能再剪下更多的块,那么下方或右方的 4 张邮票中至少有 1 张属于其他被剪下的块.

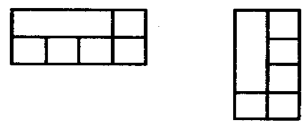


图 2

规定每一块控制如图 2 所示的 8 张邮票中的 7 张(去掉属于其他块的 1 张). 如果这版邮票的每张邮票都被控制了,那么就有

$$7b(n)\ge n^2. \tag{1}$$

问题是如何证明每张邮票都被控制了.

师:最上面的两行与最左面的两列可能有未被控制的.

生:这些邮票不超过 $4n$ 张,只需将(1)改为

$$7b(n)\ge n^2-4n. \tag{2}$$

师:如果其他地方有 1 张邮票 A 未被控制,那么 A 的上方 B、左方 C 及左上方 D 都不属于任何一块(图 3).

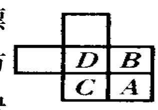


图 3

这时 D 的上方必属于一块,而 D 的左方又属于另一块. D 受到双重控制,将 D 改为只受一块控制,A 改为受另一块控制.

这样处置后,除去第一、二行与第一、二列,每张邮票都受到控制. 所以(2)成立,即

$$\frac{1}{7}n^2-\frac{4}{7}n\le b(n).$$

第 10 卷第 4 期
2001 年 11 月

数学教育学报
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION

Vol.10, No.4
Nov., 2001

对我国数学教育学研究的反思

单墫，喻平
（南京师范大学 数学系，江苏 南京 210097）

摘要：我国数学教育学的研究以分化—综合—分化的模式流变，经历了从理论移植到自我理论开发、从理论思辨到理论与实践整合的发展历程，取得了丰富的成果．然而，数学教育学的研究还存在许多盲点，诸如：学科理论建构的逻辑起点、数学学习心理、学科性质与功能定位、学科研究的价值取向、学科研究内容的拓展等，都需要作更深入的研究．

关键词：数学教育学；反思；发展

中图分类号：G420 **文献标识码**：A **文章编号**：1004-9894（2001）04-0004-05

数学教育学的研究在我国已有 20 余年，回顾和审视数学教育学的这段流变历程，对所取得的成果以及存在的问题进行反思和检讨，这无疑对于学科的建设和发展都是必要和有意义的．本文从数学教育学研究的轨迹中梳理出其发展特征，再提出一些值得进一步思考和研究的问题．

1 数学教育学研究的发展特征

我国的数学教育发端于 20 世纪初，就数学教育理论体系的变革进程而言，可以分为 3 个阶段．第一阶段为 1902 年至 1958 年，这一阶段主要研究中学数学教学法．1949 年由商务印书馆出版了刘开达著《中学数学教学法》一书，这是我国第一本自编的数学教学法著作，该书对数学教学现状、教学目的、教学原则作了论述，重点论述了算术、代数、几何、三角教学法．1952 年以后全面学苏，高师院校所用中学数学教学法课程教材多采用前苏联伯拉基斯的《中学数学教学法》．在这一阶段，数学教育侧重研究数学教学中的某些问题，讨论具体课题的具体教法．第二阶段是从 1959 年至 1966 年，这一阶段主要研究中学数学教材教法，除了讨论具体问题的教法，还研究教材分析．一般是各校自编讲义，没有统一的教材，数学教学理论研究没有多少进展．第三阶段是 1977 年至今．这一阶段，才是真正意义上数学教育学研究的开端．1979 年出版了由全国 13 所高等师范院校合作编写的《中学数学教材教法》一书，应该说，该书奠定了我国数学教学论研究的第一块基石．1982 年在郑州召开的全国中小学数学教学研究会第一次年会上，正式提出了建立“数学教育学”的奋斗目标．1984 年，由丁尔陞等翻译的前苏联数学教育家斯托利亚尔著《数学教育学》出版．1985 年，出版了王鸿均、王玉阁编著的《数学教育学》，标志着数学教育学的研究开始启动．1987 年在昆明召开的全国高师数学教育研究会年会上，曹才翰提出了数学教育学的一个框架，同时提出了为建立数学教育学而需要研究的 20 个重大课题，这就使建立我国数学教育学的宏大工程开始了有计划地、全面地施工．事实上，此后十几年来，我国相继出版的数学教育学理论专著、教材几十种，呈现出一个蓬勃的研究局面．纵观 1979 年以来数学教育学的发展历史，我们认为有几个显著的特点．

1.1 以分化—综合—分化的模式流变

第一个分化，是指学科研究面窄，焦点主要集中在数学教学论、数学学习心理以及数学方法论等 3 个方面，而且各学科之间的联系不甚紧密，研究各自为阵．从 13 院校合编的《中学数学教材教法》（总论）来看，论述内容涉及数学教学目的、逻辑基础、数学教学原则、教学过程、教学方法、教学组织形式、教学手段、教学研究方法等，这事实上已是“数学教学论”的雏形．1988 年出版了毛鸿翔等编著的《数学教学与学习心理学》，这是我国自编的第一本数学学习心理著作．该书对教师如何应用注意、感知、记忆、思维规律到数学教学情境中，如何培养和激发学生的学习动机、兴趣和意志等作了积极探索，还提出了数学概念、数学命题等的学习策略，在运用

收稿日期：2001-09-17
基金项目：江苏省教委重点课题资助项目“数学课程研究与实践”（1610701090）
作者简介：单墫（1943—），男，江苏人，南京师范大学教授，博士生导师，从事数论及数学教育研究．

教育心理学理论指导数学学习和教学方面作了有益的工作．1980年，徐利治提出了“数学方法论”的基本思想，1983年出版了他的著作《数学方法论选讲》．书中论述了数学模型方法、RMI原则以及数学哲学中的有关问题，为数学方法论的研究作了开拓性的奠基工作．

综合阶段．以相继出版的数学教育学著作为标志．基于由数学教学论、数学课程论、数学学习论为骨架构建数学教育学的思想，从1989年至今出版的数学教育学论著基本上囿于这种框架，其中以曹才翰等编著的《数学教育学概论》（1989年）为代表．

第二次分化．1990年以后，继续有呈综合内容的“数学教育学”论著问世．但更突出的现象是学科出现了分化，出现了数学教育学的下位学科群，包括：数学教学论、数学课程论、数学学习论、数学方法论、数学思维论、数学教学艺术论、数学教育评价论、数学习题论、数学解题论、数学教育研究方法论、数学思维教学论、数学教育论、数学思想史、高观点下的初等数学、数学竞赛论、比较数学教育论等等，同时，也产生了为寻求数学教育理论基础的学科，如数学教育哲学、数学教育学原理等．从而，开创了我国数学教育理论研究前所未有的欣欣向荣局面．

从分化到综合再到分化，这不是一个简单的循环历程，前一种分化表现出的是一种局部地探索，犹如只见树木，不见森林，而后一种分化是在对研究领域统览的前提下再去寻求局部，理论上就会得到进一步的升华．这种分化所形成的学科群中其它学科之间不是相互独立的，而是包容在数学教育学这个母体学科之中的相互渗透和胶合．正是学科的这种分化，使数学教育学形成一个具有学科群落、理论集块和多维结构的新格局，从而加强了理论的解释力和对数学教学实践的指导性．

1.2　从理论移植到自我理论开发的沿革

除“数学方法论”的研究是建立在自身的理论基础之上外，早期的数学教育理论研究基本上采用由一般教育理论移植的方法，即用一般教育理论演绎数学教育理论．后来随着研究的不断深入，人们逐渐发现这种移植的理论体系难以阐释数学教学现象及规律，于是便产生了一种自发的反思，研究思路转向寻求数学教育自身理论的生长点．近年来，这种思维转轨的研究已经取得了一些富有价值的成果，其中以“数学教学论”的研究成果更为显著．

如前所述，13院校合编的《中学数学教材教法》拉开了数学教学论研究的序幕，当时这本书的体系除去“逻辑基础”部分外基本上是一般教学论模式，而且还不含课程论部分，其内容只是在“数学教学原则”的论述方面表现出了数学自身的特点，其它内容几乎是教学论的例证说明．进入“综合”分阶段，数学教学论作为数学教育学的一个子内容，虽然研究没有取得实质性的突破，但在某些方面确实有了一些积极探索，譬如，开展了对数学课程和数学教育评价理论的研究，对数学教学原则进行了比较深层地探索等等．到了第二次分化阶段，数学教学论的研究有了一些实质性的进展，具体地说，表现在如下几个方面．

第一，认识到了数学思维教育是数学教育学的基础和核心．1990年以后的几年中，包括《数学教育学报》在内的许多刊物展开了对数学思维的深入讨论，对数学思维的成分、品质、方法、形式及过程等都有了相对统一的认识和界定．与此同时，数学教学论从数学教育学中分离出来，出现了数学教学论的专门论著，如曹才翰《中学数学教学概论》（1990年）、胡炯涛《数学教学论》（1994年）、朱水根、王延文《中学数学教学导论》（1998年）等．在这些书中，都把数学思维作为构建数学教学论的基础而进行了详细论述．作为对数学思维更深层的探讨，又相继出版了数学思维教育的专著，如张乃达《数学思维教育学》（1990年）、郭思乐、喻纬《数学思维教育论》（1997年）等．总之，把数学教学理解为“数学思维活动的教学”，这本身就冲破了一般教学论的围栏，加上对数学思维有了比较系统和深入认识，因而在建立具有自身理论基础的数学教学论进程中就迈出了坚实的一步．

第二，开展了对数学课程理论的系统研究．对数学课程的演变、数学课程编制、数学课程评价、数学课程发展、各国数学课程的比较等方面都进行了不同程度的探讨，其成果以丁尔陞主编的《现代数学课程论》（1997年）为代表．特别值得称颂的是，张景中院士在其所著《从数学教育到教育数学》（1989年）中，提出了“教育数学”思想，即将作为科学的数学进行再创造使其变为作为教育的数学，这种“再创造”已经超

出了对数学进行"教学法加工"的范畴．他在该书中以平面几何体系以及极限定义的重建作为2个实例进行了全面论述，充分展示了这一思想的精髓．这在体现数学学科特色的"数学教材论"建设方面做了一项很有价值的工作．

第三，初步形成了数学解题教学理论．"问题是数学的心脏"，因而解决数学问题就成为数学教学的核心问题．事实上，解题研究是我国数学教育的一个强项，许多教师的教学研究更多的精力是投到解题研究上的，然而长期以来虽然形成了一种很浓的研究氛围，但没有形成相对完善的体系．戴再平对这种研究状况进行了思考和梳理，于1991年出版了《数学习题理论》一书，对习题的结构、功能、科学性问题进行了深入论述，同时提出了一些解题策略．该书1996年再版时又增加了"数学开放题"的内容，从而进一步推动了数学习题理论的发展．在竞赛数学的研究方面，单墫于1993年发表论著《数学竞赛研究教程》，该书分50个专题对数学竞赛题目的范围、分类进行了全面的论述，并将解题思想、方法、模式与问题融于一体，形成了竞赛数学的理论框架．此外，国内先后出版了许多版本了许多版本的解题教学方面的论著，初步形成了具有中国特色的数学解题教学理论．

第四，相对完善地构建了数学教学原则体系．数学教学原则具有发展性，从不同角度去研究也可能得到不同的教学原则，因而不同的学者对此都有自己的不同看法，但经过这些年的不断摸索，参照一般教学原则再结合数学教学特点，对一些数学教学原则的认识已趋于一致，形成相对完善的体系，其中，以张楚廷等著《数学教学原则概念》（1994年）最为系统．

以上4个方面可以说我国在建构体现学科特色的数学教学论中有了一些实质性的突破．与此相比，国内这些年也出版了数学学习心理的论著十几本，但我们认为，数学学习和教学心理的研究始终还没有走出教育心理学的视野．

1.3 从理论思辨到理论与实践相结合的位移

科学理论的形成和发展，必须依据两个基本条件：一是理论基础的完整构建，二是理论应该有实证研究作为支撑点．数学教育学的发展正在从早期的空泛思辨逐步转向寻求理论概括与实证研究并行的运行轨迹，正是表现出了对这2个基本条件的追求．

理论的完整建构，需要有一个高层次的理论思考，需要以哲学认识作为基础，需要一种带有普适性的方法论原则和理论框架作为形式系统，使得能更深刻地揭示教学规律．郑毓信在这方面作了比较深入地研究，他在《数学教育哲学》（1995年）一书中，从数学哲学角度，依据已由静态转向动态的现代数学观，重新审视数学的本体，指出：数学是模式的科学，数学是由理论、问题、方法、语言相互交融的多元复合体；数学是形式和非形式的对立统一，是科学性质和艺术性质的辨证统一，是知识成分和观念成分的辨证统一．在此基础上，对数学教育目标的基本准则、数学教育的基本矛盾以及数学学习和教学过程进行了认识论分析，从而为数学教育理论建构了哲学层面的认识论基础，明晰了数学教育理念．

另一方面，近10年来，数学教育的实证研究已在全国蓬勃开展，如：北京市部分中学关于培养中学生数学能力的教学改革实验研究（徐友标等著《数学教学与智能发展》（1991年））；上海青浦县顾泠沅主持进行的大面积提高初中数学教学质量的实验研究，创立了尝试指导、效果回授的教学模式；陈重穆主持的初中数学教材改革实验研究；山东省泰安师专组织进行的转化贫困生数学学习的教改研究；贵州师范大学数学系进行的数学教育的跨文化研究（吕传汉，《文化背景与民族教育》（1991年）．张洪林等《数学教育的跨文化研究》（1999年））；山东临沂师院主持研究的"问题解决教学的研究"（李红婷，山东教育，2000年）等等，此外，还有众多的中、小型教改实验研究．总之，从数学教育研究的出发点看，研究者开始更多地投入教学实践，在实践中去发现问题、研究问题，从方法论来看，研究者已从单纯地思辨走向思辨与实证相结合的道路．

2 对数学教育学研究的一些思考

综上所述，可以看到我国数学教育学的研究经历了从无到有的创业时期，从小到大的生长时期，从模糊到清晰的发展时期．回眸这段探索历程，应该说在短短的时间内，取得的成绩是丰厚的．但是，我们也应该清醒地认识到，数学教育学的研究进程中始终伴随着一些困惑和盲点，这是数学教育学发展所必须面对和正视同时又需

要解决的问题．

2.1　学科研究的逻辑起点问题

数学教育学研究的逻辑起点是什么？这事实上不是一个仅涉及研究的出发点问题．一个教育问题研究的逻辑起点必基于一定的教育理念，这个逻辑起点在一定程度上预示着研究的目标和方向，制约着学科理论框架的建构和学科体系的定位．

有一种观点认为，数学教育学的逻辑起点是教育学，因为数学教育的本质是教育问题．我们仔细分析这种观点，会发现它将面临一种困境．以教育学为起点构建数学教育学，其方法是一种演绎的范式，用教育学演绎数学教育学，结果往往是移植型的数学教育学．我们姑且不论作为演绎的大前提——教育学理论是否具有完备的解释力，而移植型的数学教育学本身就缺乏再演绎的能力，这事实上也就是数学教育学与数学教学实践产生脱节现象的一个症结，因为缺乏依据数学学科特有的学习规律和教学规律作为理论支点，所建立的数学教育学就难以对数学现象作出阐释，而且，自身的理论繁殖能力也会很弱．数学教育的本质是教育，但是，数学教育更本质的是一种特殊的教育．

另一种观点认为，数学教育学的逻辑起点是数学教学，即从数学教育实践中去发现问题、归纳共性，进而升华为数学教学理论．显然，这种基于实践的教育理念有更多的合理和积极成分，所建构的理论体系能体现学科教育的特征，对教学也有较强的直接指导意义．然而，这种抉择也会面临一种困境，就是所形成的理论难以提升到一个较高的层面．数学教学是只涉及一门学科的教学，把研究视角定位在一个狭窄领域而不注意提取不同学科教学的共同规律，那么自身的理论就会定位在一个较低的层面上，甚至还可能走入重“术”轻“学”的理论研究误区．譬如，这些年来出版了不少关于数学解题技能技巧训练的书，就是一种典型的低层面归纳体系，不是真正意义上的数学解题理论．

对于数学教育学的逻辑起点问题在这些年的研究中是没有解决好的，是需要进一步探求的课题，这里，我们提出一种看法．我们认为，数学教育学的逻辑起点不是一维而是二维的，一个起点为教育学，它与数学教育学是演绎关系，另一个起点是数学教学，它与数学教育学是归纳关系，于是将演绎与归纳有机结合，这样就会形成有理论张力的数学教育学体系．

$$\text{教育学}\xrightarrow{\text{演绎}}\text{数学教育学}\xleftarrow{\text{归纳}}\text{数学教学}$$

2.2　数学学习心理学的研究

作为支撑数学教育理论基柱的数学学习心理学，是这些年研究中的薄弱环节，除零星的几篇文章对此有较深入的探讨外，出版的“数学学习心理学”论著几乎都是教育心理学的演绎．诸如：数学知识的表征、数学概念形成[1]、数学命题学习的心理规律、数学问题解决的认知心理、数学学习中的迁移、数学认知结构的形成、元认知对数学学习的调控、数学思维发展、数学学习认知风格、非智力因素对数学学习的影响等等．都不同程度地缺乏实证研究．应当指出，心理学界对数学学习心理的研究已有不少成果，但研究的对象多是集中在小学或初中阶段的学生，研究内容也显过窄，主要探讨数的形成、解应用题（传统应用题）的心理分析、简单的平面几何解题思维、儿童的能力发展等方面，而对大量复杂的数学知识学习，特别是对高级数学思维的研究寥若辰星．因而，数学学习心理的研究领域，存在大片尚待开发的处女地．

我们认为，开展数学学习心理的研究势在必行，为此，对一些问题应有清晰地认识．第一，研究者要转变观念，走出书斋，先脱弃从理论到理论的演绎定势，把视角转向数学教学实践，走从归纳到升华再到演绎的探索之路．第二，研究方法应以实证为主，个案研究与群体研究相结合，调查研究与实验研究相结合，定量分析与定性分析相结合．研究策略应是从局部到整体，从小题目做起，事实上，国外的同类问题研究就非常重视这种策略．他们的许多做法是值得我们学习的．第三，把握现代心理学研究趋势，借鉴其研究成果和方法．例如，有学者指出，21世纪心理学研究主要有：与各类学习和教学情境有密切联系的认知现象（认知结构、认知技能与风格、认知表征等）；多维动机目标对学习的作用；情感对学生学习和教师教学的作用；动机与自我调节能力的迁移；不同学科思维的特殊性；不同文化背景群体的心理差异等等方面．参照心理学的研究动态，结合数学学科特征，使研究更具活力．

2.3　学科的性质与功能定位

数学教育学以及子学科（如数学教学论）究

竟是理论学科还是应用学科，它们的功能是对教学基本问题所蕴含的内在联系或规律进行科学的阐述和预测，还是直接用于实践，为教学设计对症下药式地开处方，这些问题在数学教育界还未形成共识．学科性质和功能不明确，学科就难以更深入地发展．因而，有必要对这些问题展开进一步的讨论．

2.4 学科研究的价值取向

首先，就数学学科而言，如何处理科学主义取向和人文主义取向的协调性问题．以往的研究只注重前者而忽视后者，使学生体验更多的是科学的数学而不是作为文化的数学，因而导致研究的重心有所偏向，仅注重从认识角度去探讨教学过程，将研究目标定位在知识的掌握、技能的训练、智力的提高等方面，而很少考虑如何通过数学教学，使学生全方位地认识数学和体验数学的价值，如：理解数学是模式的科学；认识数学是一个多元复合体；体会数学精神；领略数学审美；感悟数学交流；尝试数学创造等．忽视学科的人文价值取向，就会削弱数学教育对于提高学生整体素质方面的功能．

其次，是数学的思维训练取向与应用价值取向的协调性问题．这与历史上的“形式教育”和“实质教育”的争论有不同涵义，形式教育与实质教育关注的是能力与知识在教育目标中的权重问题，而我们这里所说的“应用价值”既有知识成分（主要指应用数学的有关知识），又有运用数学知识去解决实际问题的能力成分．对于数学教育的“应用价值”功能，目前已受到世界上许多国家的重视，这是科技浪潮冲击的结果．从历史上看，我国一直有着强调数学应用价值的传统，建国后所颁布的一系列数学教学大纲中，都提到了要提高学生运用数学知识去分析和解决实际问题的能力．尽管如此，我们的数学教育理论研究以及数学教学实践还是表现出对“思维训练“功能的过多偏爱，教材中有关应用数学的知识和问题很少，许多教师也缺乏教会学生运用数学去解决问题的意识．因此，如何使思维训练价值与数学应用价值的取向协调起来，这是一个理论和实践都必须去研究的问题．

2.5 学科研究的内容拓展

如前所述，数学教育学已经分化出了许多子学科，覆盖面广，研究领域已呈现全方位、多层面格局，但是，纵观这个学科群，会发现在理论与实践的接壤带显得研究不足，诸如：数学教学设计、数学教学模式、数学教学策略等，都需要认真研究，此外，数学教育技术学也有待加大研究力度．

参考文献：

[1] 郑毓信．数学学习心理学的现代研究[J]．数学教育学报，1997，6（1）：8．

Reflection of Research about the Chinese Mathematics Education

SHAN Zun, YU Ping

(Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210097, China)

Abstract: The research of Chinese mathematics education had been changing, this was a course that from separating to comprehensiveness to separating over again, from transplanting of theory to exploiting of theory itself, and from mental analysis of theory to concordance of theory and practice. However, there were many blind spots in research of mathematics education, for example: the logic origin of mathematics education theory, mathematical learning psychology, property and location of subject, valued orientation of subject, and continuation of content of subject and so on, we should be made a deep study.

Key words: mathematics education; reflection; developing

[责任编校：周学智]

命题与解题

利用导数证明不等式

单　墫
(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097)

导数是研究函数的重要工具,在证明不等式时也极为有用.本文拟对此作一些介绍.

1　预备知识

一般地,设函数 $y=f(x)$ 在某个区间 I 内可导.

如果 $f'(x)>0\ (x\in I)$,则 $f(x)$ 严格递增 $(x\in I)$;如果 $f'(x)<0\ (x\in I)$,则 $f(x)$ 严格递减 $(x\in I)$.

上面结论中的“ > ”或“ < ”也可以改为“ ≥”或“ ≤”,只要等号成立的点不形成一个区间.

2　无条件的不等式

对于无条件的不等式,通常运用上面的预备知识即可解决.

例 1　求 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}\ (x\in(0,\pi))$ 的最小值.

解:由于函数 $f(t)=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\ (t\in(0,1])$ 的导数

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}=\frac{t^2-4}{2t^2}<0,$$

所以,$f(t)$ 严格递减.

因此,$f(t)$ 的最小值为 $f(1)=\frac{5}{2}$.

从而,$\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$,且在 $x=\frac{\pi}{2}$ 时取得.

本题若不用导数,可用算术—几何平均不等式求解,但技巧性较高.其他解法则比较麻烦.

例 2　已知 $x、y、z\in\mathbf{R}_+$.求证:

$$\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}\leq\frac{1}{5\,120}. \quad ①$$

解:对函数

$$f(t)=\frac{t}{(at+b)(ct+d)},\ t\in\mathbf{R}_+,\ a、b、c、d>0$$

求导得

$$f'(t)=p[(at+b)(ct+d)-t(2act+bc+ad)]$$
$$=p(bd-act^2).$$

其中 $p=(at+b)^{-2}(ct+d)^{-2}$ 表示正的量.

当 $t^2<\frac{bd}{ac}$ 时,$f'(t)>0$,所以,$f(t)$ 严格递增;当 $t^2>\frac{bd}{ac}$ 时,$f'(t)<0$,所以,$f(t)$ 严格递减.因此,$f(t)$ 在 $t^2=\frac{bd}{ac}$ 时取得最大值

$$f\left(\sqrt{\frac{bd}{ac}}\right)=\frac{1}{(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})^2}.$$

固定 y,对 x 的函数

$$g(x)=\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}$$

用上面的结果 $(a=5,b=1,c=4,d=3y)$ 得

$$\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}\leq\frac{1}{(\sqrt{15y}+2)^2}. \quad ②$$

同样,对 z 的函数有

$$\frac{z}{(5y+6z)(z+18)}\leq\frac{1}{(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}. \quad ③$$

所以,由式 ②、③并对 y 的函数再一次用上面的结果得

$$\text{式 ①左边}\leq\frac{y}{(\sqrt{15y}+2)^2(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}$$
$$=\left[\frac{\sqrt{y}}{(\sqrt{15y}+2)(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})}\right]^2$$

收稿日期:2005 - 05 - 23

$$\leqslant\left[\frac{1}{\left(\sqrt{18\sqrt{5}}+\sqrt{2\sqrt{5}}\right)^{2}}\right]^{2}=\frac{1}{5\,120}.$$

3 条件不等式

对于某些条件不等式,可以固定其中一些变数,化为一元函数,再经过调整得出所需要的结果.这种方法称为“导数调整法”.

例3 已知 a、b、c 为非负实数,且 $a+b+c=1$.求证:

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\geqslant 2.$$

证明:注意到,在 $a=1$,$b=c=0$ 时,所证不等式成立.不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$.固定 b,则 $c=1-b-a$ 是 a 的函数.

考虑 a 的函数

$$f(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2,$$

有 $f(a)$ 递减 $\Leftrightarrow f'(a)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow -a(1-a^2)+c(1-c^2)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (a-c)(a^2+ac+c^2-1)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow a^2+ac+c^2-1\leqslant 0$

$\Leftarrow (a+c)^2\leqslant 1$.

最后的不等式显然成立.所以,$f(a)$ 递减.可以使 a 增大 c 减小($a+c$ 保持不变),而 $f(a)$ 一直减小,直至 c 减小至 0.于是,

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$$
$$\geqslant(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1,$$

其中 $a+b=1$.

对函数 $\varphi(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1$ ($a+b=1$) 采用同样的做法(前面的 c 换成 b),可知 $\varphi(a)$ 递减.所以,

$$\varphi(a)\geqslant(1-1)^2+(1-0^2)^2+1=2.$$

因此,所证不等式成立.

由例3可以看出,导数调整法的步骤是:

(1)选定目标,也就是不等式中等号成立(函数取最大值或最小值)的情况;

(2)固定一些变量,使函数成为一元函数;

(3)确定调整方向,也就是应证明该一元函数递增或递减;

(4)利用导数证明函数递增或递减,从而使一个变量调整到所需要的值;

(5)继续采取上面的做法,直至使各个变量都调整到所需要的值.

例4 已知 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$,且 $a+b+c=3$.求证:$ab^2+bc^2+ca^2\leqslant\frac{27}{8}$.

证明:在 $a=b=\frac{3}{2}$,$c=0$ 时,所证不等式的等号成立.固定 b,则 $c=3-b-a$.

考虑函数 $f(a)=ab^2+bc^2+ca^2$,有

$f(a)$ 递减 $\Leftrightarrow f'(a)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow b^2-2bc+2ac-a^2\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (b-a)(a+b-2c)\leqslant 0$.

最后的不等式显然成立.

所以,$f(a)$ 递减.可以使 a 减小到 b($a+c$ 保持不变),而 $f(a)$ 一直增加到 $b^3+bc^2+cb^2$ ($c=3-2b$).

$\varphi(b)=b^3+bc^2+cb^2$ 递增 $\Leftrightarrow \varphi'(b)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 3b^2+c^2-4bc+2bc-2b^2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow (b-c)^2\geqslant 0$.

最后一个不等式显然成立.

所以,$\varphi(b)$ 递增,

$$\varphi(b)\leqslant\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}.$$

因此,所证不等式成立.

例4的第一步不是将 a 调整至 $\frac{3}{2}$ 或将 c 调整至 0,而是将 a 调整至 b(然后再继续调整).

4 更复杂的例子

例5 已知 x、y、$z\in\mathbf{R}_+\cup\{0\}$,且 $x+y+z=\frac{1}{2}$.求

$$\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1} \qquad ①$$

的最大值.

解:易猜到 $x=y=z=\frac{1}{6}$ 时,式①取最大值 $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$(至少这是最大值的一个“候选者”.另一个候选者是 $x=\frac{1}{2}$,$y=z=0$ 时,函数的取值 $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$.这些特殊的值值得注意).

不妨设 $x>\frac{1}{6}>z$.固定 y,则

$z=\frac{1}{2}-y-x$.

考虑 x 的函数 $f(x)=\sum\frac{\sqrt{x}}{4x+1}$,有

$f(x)$ 严格递减 $\Leftrightarrow f'(x)<0$

$$\Leftrightarrow\frac{1-4x}{\sqrt{x}(4x+1)^2}<\frac{1-4z}{\sqrt{z}(4z+1)^2}. \quad ②$$

当 $x\geq\frac{1}{4}$ 时,式②显然成立(左边负,右边正).

当 $x<\frac{1}{4}$ 时,$\frac{1-4x}{\sqrt{x}(4x+1)^2}$ 是 x 的减函数,所以,式②也成立.

因此,$f(x)$ 递减.可将 x 调小 z 调大($x+z$ 保持不变),而 $f(x)$ 增加.从而,可使 x 减至 $\frac{1}{6}$ 或 z 增至 $\frac{1}{6}$(根据 y 大于或小于 $\frac{1}{6}$ 而定).

不妨设 $z=\frac{1}{6}$,而 $x>y$.对

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{\frac{1}{6}}}{4\times\frac{1}{6}+1}$$

(其中 $y=\frac{1}{3}-x$)同样处理,得出 $x=y=z=\frac{1}{6}$ 时,$\sum\frac{\sqrt{x}}{4x+1}$ 取得最大值 $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

上面的解法同时得出,当 $y=z=0$,$x=\frac{1}{2}$ 时,$\sum\frac{\sqrt{x}}{4x+1}$ 取得最小值 $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$.

例 6 已知 x、y、$z\in\mathbf{R}_+$,且 $x+y+z=1$.求

$$\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1}$$

的最大值.

解:此题与例 5 不同的地方是,条件 $x+y+z=\frac{1}{2}$ 换为 $x+y+z=1$.

不妨设 $x\geq\frac{1}{3}\geq z$.固定 y,有

$f(x)=\sum\frac{\sqrt{x}}{4x+1}$ 严格递减 $\Leftrightarrow f'(x)<0$

$$\Leftrightarrow\frac{1-4x}{\sqrt{x}(4x+1)^2}<\frac{1-4z}{\sqrt{z}(4z+1)^2}. \quad ①$$

当 $z\leq\frac{1}{4}$ 时,式①显然成立(左边负,右边正).此时,$f(x)$ 递减.可将 x 调小 z 调大($x+z$ 保持不变),而 $f(x)$ 增加.所以,可使 $x=\frac{1}{3}$ 或 $z=\frac{1}{4}$.前者已有一个变量为 $\frac{1}{3}$.否则 $z=\frac{1}{4}$.

设 $z\geq\frac{1}{4}$.同理可设 $y\geq\frac{1}{4}$.这时,$x\leq\frac{1}{2}$.

要证式①成立,只须证

$$\varphi(x)=\frac{4x-1}{\sqrt{x}(4x+1)^2}$$

在 $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增.

$\varphi(x)$ 严格递增,$x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

$\Leftrightarrow\varphi'(x)>0$,$x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

$\Leftrightarrow 8x(4x+1)-(4x+1)(4x-1)-16x(4x-1)>0$,$x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

$\Leftrightarrow 1+24x-48x^2>0$,$x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

$\Leftrightarrow 1+6t-3t^2>0$,$t\in[1,2]$.

不难看出,最后的不等式成立.

所以,式①成立.

因此,$f(x)$ 递减.可将 x 调小 z 调大($x+z$ 保持不变),而 $f(x)$ 增加.直至 x 或 z 中有一个成为 $\frac{1}{3}$,不妨设 $z=\frac{1}{3}$,$x\geq y$.对

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{4\times\frac{1}{3}+1}$$

同样处理,得出 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时,$\sum\frac{\sqrt{x}}{4x+1}$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

例 6 与例 5 的函数相同,只是条件 $x+y+z=\frac{1}{2}$ 换成了 $x+y+z=1$,其调整就比例 5 复杂一些.

顺便指出,很多人喜欢用琴生(Jensen)不等式来处理此类问题.但使用琴生不等式是

有条件的,即函数应为凸(凹)函数.要证明函数是凸(凹)的,需要求二阶导数,并证明二阶导数恒负(正)(除少数已知的凸(凹)函数,如 $y=\lg x$, $y=ax^2+bx+c$, $y=\sin x$ ($x\in(0,\pi)$)等).

例 7　已知 x、y、$z\in\mathbf{R}_+$,且 $xyz=1$.求证:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}.\qquad ①$$

证明:不妨设 $x\geq y\geq z$.

当 $y\leq 2$ 时,固定 x,则 $z=\frac{1}{xy}$.函数

$f(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}$递减

$\Leftrightarrow f'(y)\leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{(1+y)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{xy^2}\leq 0$

$\Leftrightarrow\frac{y^2}{(1+y)^3}\geq\frac{z^2}{(1+z)^3}$

$\Leftarrow\frac{y^2}{(1+y)^3}$递增 $\Leftrightarrow\left(\frac{y^2}{(1+y)^3}\right)'\geq 0$

$\Leftrightarrow 2y(1+y)-3y^2=y(2-y)\geq 0$.

最后一个不等式显然成立.因此,$f(y)$递减.此时,可增大 z 减小 y,直至 $y=z$.

当 $y>2$ 时,固定 z,则 $x=\frac{1}{yz}$.

$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}$递减

$\Leftrightarrow\varphi'(y)\leq 0$

$\Leftrightarrow\cdots$(前面的 z 换成 x)

$\Leftrightarrow\frac{y^2}{(1+y)^3}\geq\frac{x^2}{(1+x)^3}$

$\Leftarrow\frac{y^2}{(1+y)^3}$递减

$\Leftrightarrow\left(\frac{y^2}{(1+y)^3}\right)'\leq 0\Leftrightarrow y(2-y)\leq 0$.

最后一个不等式显然成立.因此,$\varphi(y)$递减.此时,可减小 y 增大 x,直至 $y=2$.再用前面的方法调整使 $y=z$.于是,式①化为

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{2}{\sqrt{1+y}}\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}\ (xy^2=1,y\leq x).$$

$h(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{2}{\sqrt{1+y}}$递增

$\Leftrightarrow h'(y)\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{y^3}-\frac{1}{(1+y)^{\frac{3}{2}}}\geq 0$

$\Leftrightarrow y^{-2}(1+y)\geq 1+x$

$\Leftrightarrow 1+y\geq\frac{1+x}{x}\Leftrightarrow xy\geq 1$.

因为 $y\leq x$, $xy^2=1$,则 $y\leq 1$, $xy\geq 1$.所以,$h(y)$递增.可使 y 增大 x 减小,直至 $x=y=1$.在这个过程中,$h(y)$一直增加,直至取得最大值$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

例 8　已知 x、y、$z\in\mathbf{R}_+\cup\{0\}$,且 $x+y+z=1$.求证:

$$\sum\left(\frac{20}{15-9x^2}-9x^2\right)\leq\frac{9}{7}.$$

证明:当 $x=y=z=\frac{1}{3}$时,等号成立.

$\sum(-9x^2)$在 $x=y=z=\frac{1}{3}$时,取得最大值,但 $\sum\frac{20}{15-9x^2}$却不是在 $x=y=z=\frac{1}{3}$时,取得最大值.先说明如下:

不妨设 $x\geq y\geq z$.固定 y,则

$z=1-y-x$.

$f(x)=\sum\frac{20}{15-9x^2}$递增 $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x}{(15-9x^2)^2}-\frac{z}{(15-9z^2)^2}\geq 0$.

由于 $x\geq z$, $15-9x^2\leq 15-9z^2$,所以,最后一个不等式成立.从而,$f(x)$递增.因此,可使 x 增大 z 减小,直至 z 变为 0.在这个过程中,$\sum\frac{20}{15-9x^2}$一直增加.同样,可使 x 增大 y 减小,直至 y 也变为 0,x 变为 1.所以,

$$\sum\frac{20}{15-9x^2}\leq\frac{20}{15-9}+\frac{20}{15}+\frac{20}{15}=6$$

的最大值 6 在 $x=1$, $y=z=0$ 时取得.

因为 $\sum\frac{20}{15-9x^2}\leq 6$,所以,在 $9\sum x^2\geq\frac{33}{7}=6-\frac{9}{7}$时,所证不等式成立.

设 $9\sum x^2<\frac{33}{7}(<5)$.

不妨设 $x\geq\frac{1}{3}\geq z$.固定 y,则

$z=1-y-x$.

$F(x)=\sum\left(\frac{20}{15-9x^2}-9x^2\right)$ 递减

$\Leftrightarrow F'(x)<0$

$\Leftrightarrow \frac{20x}{(15-9x^2)^2}-x-\frac{20z}{(15-9z^2)^2}+z<0$

$\Leftarrow\left(\frac{20x}{(15-9x^2)^2}-x\right)'<0$

$\Leftrightarrow 20(15+27x^2)-(15-9x^2)^3<0$.

因为 $15-9x^2>15-5=10$,所以,

$(15-9x^2)^3-20(15+27x^2)$

$>100(15-9x^2)-20(15+27x^2)$

$=20(60-72x^2)>20(60-8\times5)>0$.

于是,$F(x)$ 递减.可调小 x 增大 z,直至 x 或 z 成为$\frac{1}{3}$.在此过程中,$F(x)$ 一直增加.

不妨设 $z=\frac{1}{3}$,又设 $x\geq\frac{1}{3}\geq y$.继续采用上面的做法,便知所证不等式成立,其中等号仅在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时成立.

本例也不适合用琴生不等式证明.因为函数 $g(x)=\frac{20}{15-9x^2}-9x^2$ 并非凸函数,它的二阶导数与上面的 $20(15+27x^2)-(15-9x^2)^3$ 只差一个正因子.而 $20(15+27x^2)-(15-9x^2)^3$ 并不恒负,例如,$x=1$ 或接近1时,即取正值.

例9 给定正整数 n.求最小的正数 λ,使对任何 $\theta_i\in(0,\frac{\pi}{2})$ $(i=1,2,\cdots,n)$,只要

$$\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2\cdots\cdot\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}},\qquad ①$$

就有

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n\leq\lambda.\qquad ②$$

解:当 $n=1$ 时,

$\cos\theta_1=(1+\tan^2\theta_1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

设 $n\geq2$.令 $x_i=\tan^2\theta_i\ (1\leq i\leq n)$,则题设条件变为

$$x_1x_2\cdots x_n=2^n.\qquad ③$$

要求最小的 λ,使

$$\sum\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\leq\lambda.$$

不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中 x_1 最大,则由式③有 $x_1\geq2$.

若 $x_2\geq2$,则与例7中 $y\geq2$ 的情况完全一样(x 即 x_1,y 即 x_2),可以得出 $\sum\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}=\varphi(x_2)$ 递减.从而,可调小 x_2 直至 $x_2=2$,这时,$\varphi(x_2)$ 一直增加.同样,可设 $x_3\leq2$,$x_4\leq2$,$\cdots$,$x_n\leq2$.再由例7中 $y\leq2$ 的情况,可逐步调整,使得 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 都调成 $\left(\frac{2^n}{x_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.于是,只须求最小的 λ,使

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{n-1}{\sqrt{1+y}}\leq\lambda,$$

其中 $x\geq2\geq y$,$xy^{n-1}=2^n$.

$g'(y)=\frac{-(n-1)}{2(1+y)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(n-1)2^n}{y^n}$

$=\frac{n-1}{2y}\left[\frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}}-\frac{y}{\sqrt{(1+y)^3}}\right]$.

$g(y)$ 递增 $\Leftrightarrow g'(y)\geq0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2}{(1+x)^3}\geq\frac{y^2}{(1+y)^3}$

$\Leftrightarrow x^2(1+y)^3-y^2(1+x)^3\geq0$.

当 $n=2$ 时,$xy=2^2$,

$y^2[x^2(1+y)^3-y^2(1+x)^3]$

$=4^2(1+y)^3-y(y+4)^3$

$=(2+y)(2-y)^3\geq0$.

所以,$g(y)$ 递增.

因此,最大值为 $g(2)=\frac{2}{\sqrt{3}}$,即 $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

当 $n\geq3$ 时,$xy^{n-1}=2^n$,

$y^{3n-5}[x^2(1+y)^3-y^2(1+x)^3]$

$=2^{2n}y^{n-3}(1+y)^3-(y^{n-1}+2^n)^3$

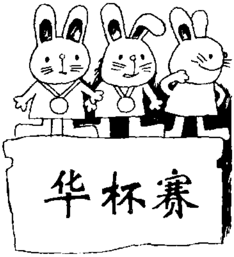
$=(2^n-y^n)(y^{2n-3}+2^ny^{n-3}+3\times2^ny^{n-2}-2^{2n})$

$\leq(2^n-y^n)(2^{2n-3}+2^{2n-3}+3\times2^{2n-2}-2^{2n})$

$=0$.

所以,$g(y)$ 递减.

当 $y\to0$ 时,$g(y)\to n-1$,即 $\lambda=n-1$.



逆　序

单　墫

例　(1997年第六届华杯赛决赛初一组第2试第2题)用1,2,…,99,100共一百个数排成一个数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{99},a_{100}. \quad ①$$

已知数列中第6个是$a_6=60$,第94个是$a_{94}=98$.如果相邻两个数$a_i>a_{i+1}$,就将它们交换位置.如此操作,直到左边的数都小于右边的数为止.请回答最少需实行多少次交换?最多需实行多少次交换?

解　如果在上述排列①中,$j>i$,而$a_i>a_j$,我们就称(a_i,a_j)是一个逆序.例如在

$$1,2,3,4,5,\mathbf{60},6,7,\cdots,58,59,61,\cdots,$$
$$92,93,\mathbf{98},94,95,96,97,99,100 \quad ②$$

中,(60,6),(60,7),…,(60,59),(98,94),(98,95),(98,96),(98,97)都是逆序,共有

$$54+4=58$$

个逆序,而在排列

$$100,99,97,96,95,\mathbf{60},94,93,\cdots,$$
$$8,7,\mathbf{98},6,5,4,3,2,1 \quad ③$$

中,如果去掉60与98两个数,共有

$$97+96+\cdots+2+1=\frac{97\times 98}{2}=4\,753$$

个逆序.60放入后,增加

$$5+59=64$$

个逆序.98放入后,又增加

$$2+6=8$$

个逆序.所以③中共有

$$4\,753+64+8=4\,825$$

个逆序.

每交换一次，恰好减少一个逆序，所以②调整成自然排列(即从小到大的排列)

$$1,2,3,\cdots,97,98,99,100 \qquad ④$$

需实行 58 次交换. 而③调整成④需实行 4 825 次交换.

由于①中 $a_6=60$，所以 $1,2,\cdots,59$ 中至少有 $59-5=54$ 个在 a_6 后面，即 60 至少产生 54 个逆序. 又①中 $a_{94}=98$，所以在 a_{94} 后面的 6 项中，至少有 $6-2=4$ 个数比 a_{94} 小. 即 98 至少产生 4 个逆序. 所以①中至少有 $54+4=58$ 个逆序，至少需交换 58 次才能变成④. 而②就是交换 58 次变成④的实例.

由于①中 $a_6=60$，所以在 a_5 前面至多有 5 个数比 60 大，即 60 至多产生 $59+5=64$ 个逆序. 又在 $a_{94}=98$ 前面至多有 2 个数比 98 大，即 98 至多产生 $6+2=8$ 个逆序. 去掉 60 与 98 后，其余的 98 个数至多产生 4 753 个逆序(即全部从大到小排列). 所以①中至多有 4 825 个逆序，至多需交换 4 825 次才能变成④. 而③就是交换 4 825 次变成④的实例.

本题的答案是 58 与 4 825.

逆序是一个重要的概念. 本题不仅要计算②，③中逆序的个数，而且还应**证明**②、③提供了两个实例，分别使①中逆序的个数达到最小与最大. 这种推理能力，需要逐步培养，并非一日之功. **揣摩已有的解法**，就是培养这种能力的必由之路.

平方差公式的应用(二)

○单 墫

师：今天讨论两个与平方差有关的问题．第一个问题是：

1．如果 a 是正整数，证明有两个整数 x，y，使得 $x^2-y^2=a^3$．

生：我还是进行分解：

$(x+y)(x-y)=a^3$，

所以 $\begin{cases}x+y=a^2,\\x-y=a.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{a^2+a}{2},\\y=\dfrac{a^2-a}{2}.\end{cases}$

师：你得到的 x，y 是不是整数？

生：如果 a 是偶数，$a^2\pm a$ 是偶数．如果 a 是奇数，a^2 与 a 同是奇数，$a^2\pm a$ 是个偶数．所以上面得到的 x，y 都是整数，而且 $\left(\dfrac{a^2+a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a^2-a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+a+a^2-a}{2}\cdot\dfrac{a^2+a-(a^2-a)}{2}=a^3$，所以 a^3 是平方差．

师：能否利用上次得到的结论来证？(1~2 合期《平方差公式的应用(一)》中的结论为：每个奇数都可以写成平方差，是 4 的倍数的偶数也能写成平方差.)

生：如果 a 是奇数，那么 a^3 也是奇数，它能写成平方差．如果 a 是偶数，那么 a^3 是 4 的倍数，它能写成平方差．这种证法更容易一些．

师：于是第一道题就有两种不同的证法．现在看第二道

题：

2.a、b、c、d 是四个自然数，$a<b<c<d$，并且后一个减去前一个，所得的差都相同（称这四个数组成等差数列）.证明 $abcd$ 是平方差.

生：例如 1，3，5，7 这四个数，它们的积是奇数，所以也是平方差.

一般地，如果 a 是奇数，$abcd$ 是不是奇数？好像不一定.

师：不一定.你可以设差 $b-a=t$，将 4 个数表成 a，$a+t$，$a+2t$，$a+3t$，再考虑能不能用上一次的结论.

生：如果 a 是奇数，t 是偶数，那么 $a+t$，$a+2t$，$a+3t$ 都是奇数，$a(a+t)(a+2t)(a+3t)$ 也是奇数，所以能写成平方差.

如果 a 是奇数，t 是奇数，那么 $a+t$，$a+3t$ 都是偶数，积 $a(a+t)(a+2t)(a+3t)$ 是 4 的倍数，所以能写成平方差.

如果 a 是偶数，那么 a，$a+2t$ 都是偶数，积 $a(a+t)(a+2t)\cdot(a+3t)$ 是 4 的倍数，所以能写成平方差.

师：证得很好.如果不用上次的结论，直接做也可以：

$$\begin{aligned}&a(a+t)(a+2t)(a+3t)\\=&(a^2+3at)(a^2+3at+2t^2)\\=&(a^2+3at+t^2-t^2)(a^2+3at+t^2+t^2)\\=&(a^2+3at+t^2)^2-t^4.\end{aligned}$$

生：将 a 与 $a+3t$ 相乘，$a+t$ 与 $a+2t$ 相乘，得出的 a^2+3at 与 $a^2+3at+2t^2$ 不仅第一项相同，而且第二项也相同. 这就可以用平方差公式了，很巧妙.

师：不过，就本题而言，还是利用上次的结论更简单，基本上不需要计算.

责任编辑　王写之

where he lives；

2)Mary's idea about middle school students studying abroad；

3)Something about John's favorite sports star and why he likes him or her；Anything that he knows about the 2008 Olympic Games;

4)Tim's two likes and two dislikes, and something about what she is going to plan to do for the day after tomorrow;

5)Tom's favorite gift he received on his sixteenth birthday.

责任编辑　张彩萍

平方差公式的应用<一>

○单 墫

师：今天看一个与平方差有关的问题：证明2003可以写成两个整数x、y的平方差，即有整数x，y，使得

$x^2-y^2=2003$.（1）

生：这可以用分解的方法. 由上式得

$(x+y)(x-y)=2003$.

所以

$$\begin{cases}x+y=2003,\\x-y=1.\end{cases}$$

$x=\dfrac{2003+1}{2}$

$=1002$，

$y=\dfrac{2003-1}{2}$

$=1001$.

师：你得到一组使(1)成立的解.还有一组解是$x=-1002$，$y=-1001$.不过，这道题只要求找出一组使(1)成立的整数解. 所以你的解答是很好的.

进一步，可以考虑更一般的问题：设$2n+1$是奇数，证明$2n+1$可以写成平方差.

生：我还是用分解的方法.

师：分解的方法可行.不过,也可以直接猜一下：

$(\quad)^2-(\quad)^2=2n+1$

中,(　)里可以填什么？

生：可以填 $n+1$ 与 n.因为 $(n+1)^2-n^2$

$=n^2+2n+1-n^2=2n+1$.

师：很好.所以我们得到更一般的结论：每个奇数都可以写成平方差.

但是，能写成平方差的整数不一定是奇数,4 的倍数 $4n$ （n 为整数）,也能写成平方差.

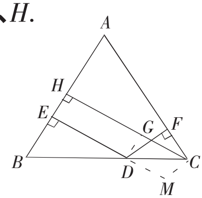
生：$(n+1)^2-(n-1)^2=4n$，所以 $4n$ 能写成平方差.

责任编辑　王写之

重视解题

在几何学习中，许多同学满足于单纯解题，不重视解题后的思考，只会机械地重复解题,不能举一反三、触类旁通地学习，浪费了大量的时间.我们先看一例.

例 1　已知：如图，$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 为 BC 上任一点,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,$CH\perp AB$，垂足分别为 E、F、H.



求证：$CH=DE+DF$.

分析：证 $a+b=c$ 型题目，常见思路是“截长法”和“补短法”.“截长法”可在 CH 上取一点 G,使 $HG=ED$,则问题变为证 $GC=FD$,这时只要证 $\triangle DGC\cong\triangle CFD$ 即可.“补短法”与之相类似,可在 ED

数学竞赛之窗

本栏目特邀主持人 熊 斌 冯志刚

有关本栏目的稿件,请直接寄给熊斌(200062,华东师范大学数学系 E-mail:xiongbin @163. net),或冯志刚(200231,上海市上海中学 E-mail:zhgfeng @online. sh. cn). 提供试题及解答请尽量注明出处.

本期给出单墫先生的“评 2002 年全国高中数学联赛.

评 2002 年全国高中数学联赛

单 墫

2002 年高中联赛的试题,普遍反映难度不大,与高考题接近,受到师生的欢迎. 其中与不等式有关的内容(包括函数的单调性,极值,参数的取值范围等)似乎偏多一些.

标准答案大多简明,有几道题的解法可以稍有不同,如选择题 6,原题如下:

直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 相交于 A, B 两点,该椭圆上点 P,使得 $\triangle PAB$ 面积等于 3,这样的 P 点共有 ( )

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

如果采用直线的法线式,椭圆上一点 $P(4\cos\alpha,3\sin\alpha)$ 与原点 O 在 AB 异侧时,它到 AB 的距离为

$$\frac{3(4\cos\alpha)+4(3\sin\alpha)-12}{5}$$

$$=\frac{12}{5}(\cos\alpha+\sin\alpha-1)\leq\frac{12}{5}(\sqrt{2}-1)<\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{6}{5}.$$

而 $AB=5$,所以

$$\triangle PAB\text{ 的面积}<\frac{1}{2}\times5\times\frac{6}{5}=3.$$

因此,在 $\triangle PAB$ 面积为 3 时, P 与 O 在 AB 同侧,这样的点有 2 个,所以选(B).

第 10 题为填空题,原题如下:

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f(1)=1$ 且对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有

$f(x+5)\geq f(x)+5$, $f(x+1)\leq f(x)+1$. 若 $g(x)=f(x)+1-x$,则 $g(2002)=$______.

本题以先定出 $f(2002)$ 为好,因为

$$f(x)+5\leq f(x+5)\leq f(x+4)+1\leq f(x+3)+2\leq f(x+2)+3\leq f(x+1)+4\leq f(x)+5,$$

所以其中等号均成立 $f(x+1)=f(x)+1$.

再由 $f(1)=1$,逐步得出 $f(2)=2$, $f(3)=3$, $\cdots$, $f(2002)=2002$,从而 $g(2002)=1$.

第 12 题原题如下:

使不等式 $\sin^2x+a\cos x+a^2\geq1+\cos x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的负值 a 的取值范围是______.

本题“对一切 $x\in\mathbf{R}$”不等式成立,所以可取 $x=0$,得 $a+a^2\geq2$,从而 $a\leq-2$.

反过来,在 $a\leq-2$ 时,

$$a^2+a\cos x\geq a^2+a\geq2\geq\cos^2x+\cos x=1+\cos x-\sin^2x.$$

于是 a 的取值范围是 $a\leq-2$.

2002 年的加试题比 2001 年容易,当然也有一定的难度,由于要通过加试来选拔,所以题目应当有一定的难度与较好的区分度. 如果题目中有很好的数学思想,而不是过偏过繁,那就更为理想了.

加试第一题原题如下:

如图 1,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60°$, $AB>AC$,点 O 是外心,两条高 BE, CF 交于 H 点. 点 M, N 分别在线段 BH, HF 上,且满足 $BM=CN$. 求 $\frac{MH+NH}{OH}$ 的值.

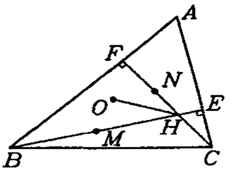


图 1

图中 N 在线段 CH 的延长线上,而 M 在线段 BH 内. 其实本题 N 也可以与 H 重合,或者 N 在线段 CH 内, M 也可以在 BH 的延长线上.

先看一个特殊的情况(也是最简单的情况),即 N 与 H 重合,此时 $NH=0$, $BM=CH$, M 在线段 BH 内(严格说来,这一点是要证明的. 当然并不难证:由 $\angle BCH=90°-\angle ABC>90°-\angle ACB=\angle HBC$,得 $BH>CH$,所以 M 在线段 BH 内).

因为 $\angle BOC=2\angle BAC=120°=180°-\angle BAC=\angle BHC$,所以 B, O, H, C 共圆,从而易知 $\triangle OBM\cong\triangle OCH$, $OM=OH$, $\angle MOH=\angle BOC=120°$.

在 $\triangle MOH$ 中, $\frac{MH}{OH}=\sqrt{3}$.

如果 N 在 CH 的延长线上,那么 M 将从上面所说的位置 M_0 ($BM_0=CH$) 上移,这时有两种可能:

(1) M 在线段 M_0H 内.

由于 $M_0M=BM-BM_0=CN-CH=HN$,所以 $MH+HN=MH+M_0M=M_0H$,根据上面所证

$$\frac{MH+HN}{OH}+\frac{M_0H}{OH}=\sqrt{3}.$$

(2) M 在线段 M_0H 的延长线上.

由于 $M_0M=HN$,所以

$$HN-HM=M_0M-HM=M_0H.$$

约定 MH 为有向线段,即 $MH=-HM$,那么仍

有$\frac{MH+HN}{OH}=\frac{M_0H}{OH}=\sqrt{3}$.

如果 N 在 CH 内,那么有向线段 $HN=-NH=M_0M$,仍有

$$\frac{MH+HN}{OH}=\frac{M_0H}{OH}=\sqrt{3}.$$

于是,约定 MH, HN 为有向线段(向上为正,向下为负),恒有$\frac{MH+HN}{OH}=\sqrt{3}$.

加试的第二题与三次方程有关,这是教材中没有,学生普遍生疏的内容,因而做对的人不太多. 原题如下:

实数 a,b,c 和正数 λ 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实根 x_1,x_2,x_3,且满足

(1) $x_2-x_1=\lambda$;

(2) $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

求$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$的最大值.

本题的解法很多,这里提供两种.

解法1　首先搞清 $2a^3+27c-9ab$ 的意义. 如果看不清楚,可先提出 27,将它写成

$$27\left(\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\right)$$

从 $-\frac{1}{3}ab$ 与 c 这两项可以猜出.

$$f\left(-\frac{1}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c,$$

而这立即可以验证是成立的,于是问题化为在条件(1),(2)下,求

$$\begin{aligned}S&=\frac{27f\left(-\frac{1}{3}a\right)}{\lambda^3}\\&=\frac{27\left(-\frac{1}{3}a-x_1\right)\left(-\frac{1}{3}a-x_2\right)\left(-\frac{1}{3}a-x_3\right)}{(x_2-x_1)^3}\\&=\frac{-27\left(x_1+\frac{1}{3}a\right)\left(x_2+\frac{1}{3}a\right)\left(x_3+\frac{1}{3}a\right)}{(x_2-x_1)^3}\end{aligned}$$

的最大值.

为简便起见,令 $u_i=x_i+\frac{a}{3}$ $(i=1,2,3)$,这时 $u_2-u_1=x_2-x_1=\lambda$, $u_3>\frac{1}{2}(u_1+u_2)$,并且 $u_1+u_2+u_3=x_1+x_2+x_3+a=0$.

所以 u_1,u_2,u_3 仍满足相应的条件,而

$$S=\frac{-27u_1u_2u_3}{(u_2-u_1)^3}.$$

由 $u_3=-(u_1+u_2)>\frac{u_1+u_2}{2}$ 得 $-(u_1+u_2)>0$. 从而 u_1,u_2 中至少有一个小于 0. 设 $u_1<0$,如果 $u_2<0$,那么 $S<0$,不可能取最大值. 于是可设 $u_2>0$.

问题可进一步简化,即令

$$v_1=\frac{-u_1}{u_2-u_1},\ v=v_2=\frac{u_2}{u_2-u_1},$$

则 $v_1+v_2=1$, v_1,v_2 均正, $v_1-v_2=\frac{u_3}{u_2-u_1}>0$,

$$S=27v_1v_2(v_1-v_2)=27v(1-v)(1-2v).$$

现在 S 的最大值已很容易求出:

$$\begin{aligned}S&=27\sqrt{(v-v^2)^2(1-2v)^2}\\&=27\sqrt{2(v-v^2)(v-v^2)\left(\frac{1}{2}-2v+2v^2\right)}\\&\le 27\sqrt{2\times\left(\frac{1}{6}\right)^3}\\&=\frac{3}{2}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

在 $v=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时等号成立,相应的三次方程为 $x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{3}}=0$, $\lambda=1$ $\left(x_1=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right),\ x_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right),\ x_3=\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

解法2　先考虑 $a=0$ 的特殊情况,这时问题即

$$S=\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{27c}{\lambda^3}=\frac{-27x_1x_2x_3}{(x_2-x_1)^3}$$

的最大值,可参见上面的解答.

对于一般情况,由于

$$x^3+ax^2+bx+c=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+p\left(x+\frac{a}{3}\right)+q$$

(其中 p,q 无须具体定出),令 $u=x+\frac{a}{3}$,原方程化为 u 的三次方程

$$u^3+pu+q=0.$$

而

$$\begin{aligned}q&=-u_1u_2u_3\\&=-\left(\frac{a}{3}+x_1\right)\left(\frac{a}{3}+x_2\right)\left(\frac{a}{3}+x_3\right)\\&=-\left[\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{a}{3}\right)^2(x_1+x_2+x_3)+\left(\frac{a}{3}\right)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3\right]\\&=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^2}{9}\cdot a-\frac{a}{3}b+c\\&=\frac{1}{27}(2a^3+27c-9ab),\end{aligned}$$

$$u_2-u_1=\lambda,\ u_3>\frac{1}{2}(u_1+u_2),$$

所以 $S=\frac{27q}{(u_2-u_1)^3}$. 问题化归为上面 $a=0$ 的特殊情况.

在将 S 用 x_1,x_2,x_3 表出后,也可以将它看成 x_3 的函数,用导数来求极值. 有的学生就是这样做的.

数 学 竞 赛 之 窗

(本栏目特邀主持人 熊 斌 冯志刚)

有关本栏目的稿件,请直接寄给熊斌(200062,华东师范大学数学系 E - mail:xiongbin@sh163.net),或冯志刚(200231,上海市上海中学 E - mail:zhgfeng@online.sh.cn).提供试题及解答请尽量注明出处.

评 2003 年高中联赛

单 墫

与往年的试题相比,2003 年的试题计算量较小,而思维的程度有所增加,更有利于培养人才.

选择题的 3 是过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60 的弦 AB,AB 的中垂线交 x 轴于 P,求 PF,本题焦点 F 为原点,直线 AB 方程为 $y=\sqrt{3}x$,所以 A,B 横坐标适合方程:

$$3x^2-8x-16=0.$$

由韦达定理,AB 中点 E 的横坐标为

$$\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

由于 AB 倾斜角为 60°,所以 $FE=2\times\frac{4}{3}$,$PF=2FE=4\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$.

选择题的 4 是 $x\in[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}]$,求 $y=\tan(x+\frac{2\pi}{3})-\tan(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 的最大值.

本题可先化 y 为同角的三角函数的代数和.

$$y=-\cot(x+\frac{\pi}{6})-\tan(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{6})$$

$$=\cot z+\tan z+\cos z,\ z\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$$

由于 $\cot z\cdot\tan z=1$,所以在 $\cot z$ 与 $\tan z$ 的差越大时,$\cot z+\tan z$ 越大,而

$$\cos z\leq\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 y 在 $z=\frac{\pi}{6}$ 时取最大值

$$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11}{6}\sqrt{3}$$

选择题 6 是在 $AB=1$,$CD=\sqrt{3}$,AB 与 CD 距离为 2,夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 时,求四面体 $ABCD$ 的体积.

本题由简单向量知识可知由 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ 所形成的平行四边形面积为

$$1\times\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2},$$

所求体积为

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}\times2=\frac{1}{2}.$$

填空题 10,已知 a,b,c,d 均为正整数,且 $\log_a b=\frac{3}{2}$,$\log_c d=\frac{5}{4}$,若 $a-c=9$,求 $b-d$.

本题由已知得 $a=b^{\frac{2}{3}}$,$c=d^{\frac{4}{5}}$,所以 $b=s^3$,$d=t^5$,s,t 为正整数,并且 $s^2-t^4=9$,从而 $s=5$,$t=2$,$b-d=5^3-2^5=93$.

解答题 14:设 A,B,C 是复数 $z_0=ai$,

$z_1=\frac{1}{2}+bi$, $z_2=1+ci$ 对应的不共线的三点(a, b, c 都是实数),证明曲线

$z=z_0\cos^4 t+2z_1\cos^2 t\sin^2 t+z_2\sin^4 t$ ($t\in\mathbf{R}$)与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点,并求出此点.

本题大多数人都是解方程组求出曲线与中位线的公共点.如果具有一些重心坐标的知识,那么由 $\cos^4 t$, $2\cos^2 t\sin^2 t$, $\sin^4 t$ 均为正数,并且和为 1 可以知道曲线上的点到 AC 的距离 $=AC$ 上的高 $h\times 2\cos^2 t\sin^2 t$,当且仅当 $t=\frac{\pi}{4}$(由周期性,我们只在一个周期 $[0,\pi/2)$ 内考察 $2\cos^2 t\sin^2 t$)时,这值为 $\frac{h}{2}$,即曲线与平行于 AC 的中位线恰有一个公共点,这点为

$$(z_0+2z_1+z_2)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{1}{2}+\frac{a+c+2b}{4}i.$$

第 15 题是纸上画有半径为 R 的圆 O 内有一定点 A, $OA=a$,折叠纸片,使圆周上某点 A 与 A 重合.当 A 跑遍圆周时,求折痕所在线上点的集合.

本题当然以 O 为原点, OA 为 x 轴建立坐标轴,如图 1,设折痕与 OA 的交点为 E,则

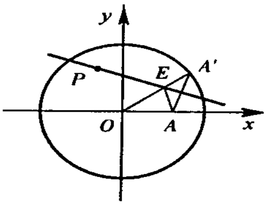


图 1　第 15 题图

$$EO+EA=EO+EA'=R.$$

所以 E 点在以 O, A 为焦点, R 为长轴的椭圆

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1$$

上,而对折痕上其它点 P, $PO+PA=PO+PA'>R$.因此折痕上的点在上述椭圆上或椭圆外.

反之,对椭圆上或椭圆外任一点 P,可过 P 作椭圆的切线,设切点为 E,延长 OE 交圆于 A',则 $EA'=R-EO=EA$,且由椭圆切线的性质, $\angle AEP=\angle A'EP$,从而 A, A' 关于 PE 对称,即 PE 是所说的折痕.

综上所述所求集合为椭圆上及椭圆外的点的全体.

加试题第 1 题仍是平面几何,原题为:

过圆外一点 P 作图的两条切线和一条割线,切点为 A, B,割线交圆于 C, D, C 在 P, D 之间,在弦 CD 上取一点 Q,使 $\angle DAQ=\angle PBC$,求证 $\angle DBQ=\angle PAC$.

本题证法很多,这里介绍一种,首先易知

$$\frac{AC}{AD}=\frac{PA}{PD}=\frac{PB}{PD}=\frac{BC}{BD} \qquad (1)$$

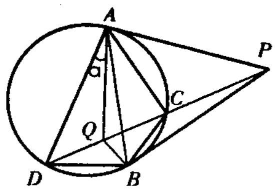


图 2　加试第 1 题图

又 $\angle BAC=\angle PBC=\alpha$, $\angle ABC=\angle ADC$,

所以 $\triangle ADQ\backsim\triangle ABC$, $DQ=\frac{AD\times BC}{AB}$.

同样, $\triangle ADB\backsim\triangle AQC$,

$$QC=\frac{AC\times DB}{AB}.$$

结合(1)得 $DQ=QC$,即在 $\angle PBC=\alpha$ 时, Q 是 DC 的中点,由于中点的唯一性,反过来,在 Q 是 DC 的中点时, $\angle PBC=\alpha$,这也就得出,由于 Q 是 DC 的中点,所以 $\angle PAC=\angle DBQ$.

第 2 题与数论有关,但我们希望解法用到的知识较少(否则会造成学生"恶补"的现象),下面的解法只用到同余式.

原题为:设三角形的三边长是整数 $l>m>n$. $\left\{\frac{3^l}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^m}{10^4}\right\}=\left\{\frac{3^n}{10^4}\right\}$,求周长的最

小值.

由已知得$\frac{3^l-3^m}{10^4}=\frac{3^l}{10^4}-\frac{3^m}{10^4}=$整数,所以$3^l-3^m$被10整除,即$3^l\equiv 3^m\pmod{10^4}$.因为3与10互质,所以$3^{l-m}\equiv 1\pmod{10^4}$.同理$3^{m-n}\equiv 1\pmod{10^4}$,$3^{l-m}\equiv 1\pmod{10^4}$.

我们来寻求$3^h\equiv 1\pmod{10^4}$时,正整数h满足的条件.

首先$3^2=9\equiv -1$,$3^3\equiv -3$,$3^4\equiv 1\pmod{10}$,现在$3^h\equiv 1\pmod{10}$,所以$h=4k$,k为正整数.

$$l\equiv 3^h=3^{4k}=(10-1)^{2k}\equiv 1-2k\times 10+k(2k-1)\times 10^2-\frac{k(2k-1)(2k-2)}{3}\times 10^3\pmod{10^4}$$

所以

$$2k-k(2k-1)\times 10+\frac{2k(2k-1)(k-1)}{3}\times 10^2\equiv 0\pmod{5^3},$$

左边后两项被5整除,所以$2k$被5整除,$k=5t$,t为正整数,并且

$$2t-10t(2k-1)\equiv 0\pmod{5^2}.$$

左边第2项被5整除,所以第1项$2t$被5整除,这样一来,左边第2项被5^2整除,从而第1项也被5^2整除,即t被5^2整除,于是h被$4\times 125=500$整除.

$l-m$,$m-n$,$l-n$都是500的倍数,所以$m-n\geq 500$,$l-n\geq 2\times 500$,$n>l-m\geq 500$.周长$l+m+n\geq 3n+3\times 500\geq 3\times 501+3\times 500=3003$.

另一方面,在$n=501$,$m=501+500$,$l=501+2\times 500$时,周长为3003,并且由

$$3^{500}=(10-1)^{250}\equiv 1-2500+\frac{250\times 249}{2}\times 100\equiv 1-2500+250\times 50=1-250\times 40\equiv 1\pmod{10000}$$

知l,m,n均满足条件.因此,周长的最小值为3003.

第3题研究一个n点l条线的图中何时有一个四边形,这方面有一个著名的结果,在$l>[\frac{1}{4}n\cdot(1+\sqrt{4n-3})]$时,图中必有一个四边形,证法是考虑一个点$u$及这点引出的两条边$uv_1$,$uv_2$所组成的"角".如果图中没有四边形,每个"角"对应的点对(v_1,v_2)是互不相同的,所以点对的总数$C_n^2\geq$角的总数$\sum_{i=1}^{n}C_{x_i}^2$,其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是各点的次数.

由Cauchy不等式及$\sum x_i=2l$可得

$$n(n-1)\geq\sum x_i(x_i-1)\geq\frac{4}{n}l^2-2l,$$

从而$l\leq\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$.

现在的题目给出$n=q^2+q+1$,$l\geq\frac{1}{2}q(q+1)^2$,$q\in\mathbf{N}$,$q\geq 2$,并且有一个点次数$\geq q+2$,要证明有一个四边形,直接援引上面的结果是不成立的.必须去掉与次数$x_1\geq q+2$的点A_1相连的x_1个点,剩下的点对有$C_{n-x_1}^2$个.与上面的类似,在无四边形时有

$$C_{n-x_1}^2\geq\sum_{i=2}^{n}C_{x_i-1}^2$$

同样用Cauchy不等式及

$$\sum_{i=2}^{n}(x_i-1)=2l-n+1-x_1\text{ 得}$$

$$(n-1)(n-x_1)(n-x_1-1)$$
$$\geq(nq-q+2-x_1)(nq-q-n+3-x_1)$$

这与$(q+1)(n-x_1)<nq-q+2-x_1$

及$q(n-x_1-1)\leq nq-q-n+3-x_1$

矛盾,所以图中必有四边形.

二、三两题的解法似嫌单一,第三题尤其过于细致,更像研究的问题,而不很适合竞赛.因为在考场上很难(除非事先做过)从这些不太简明的条件看出问题的本质.能够完整地解出这种题目的学生恐怕不会很多.

数 学 竞 赛 之 窗

(本栏特邀主持人　熊　斌　冯志刚)

有关本栏目的稿件,请直接寄给熊斌(200062,华东师范大学数学系　E - mail:xiongbin@sh163.net),或冯志刚(200231,上海市上海中学　E - mail:zhgfeng@online.sh.cn).提供试题及解答请尽量注明出处.

谈 2004 年高中联赛

单墫

今天的联赛,计算相当多,我国著名数学家华罗庚先生曾经说过:“不要怕算”,可是目前我国中学生,运算能力大多不很强,或不够熟练,或不够简捷,或忙中出错,或不会检查.因此,增加一些计算对提高学生的运算能力是有益的.当然,计算过多,也有些“矫枉过正”,或许命题者认为“不过正则不能矫枉”吧.

今年联赛,增多概率、向量等方面内容,这是值得赞赏的.

试　　题

先谈联赛的 1～15 题.

大多数试题与标准解答均很好,不必多说,本文只讨论几道有其它解法的问题.

第 4 题涉及向量,这是过去较少出现的内容.

4　设 O 点在 $\triangle ABC$ 内部,且有

$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0,$$

则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积的比为　(　　)

(A) 2.　(B) $\frac{3}{2}$.　(C) 3.　(D) $\frac{5}{3}$.

这道题的图画得太准,有 60%以上的学生用尺去量 BO 及 OD(D 为 BO 延长后与 AC 的交点),发现 $BO=2OD$,从而选(C).所以这题最好不要画图,让学生自己画.如果画,也不要画得太准.

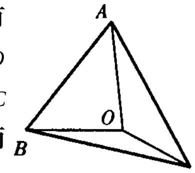


图 1　第 4 题图

不靠量,可作出以 OA 及 $3OC$ 为边的平行四边形 $OAEF$.这时 $OE=2BO$,并且 B,O,E 共线.设 P 为平行四边形的中心,则 $OP=BO$,由 $\triangle ACF$ 的中位线 $PQ \parallel CD$,可得 $OD=DP=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}BO$.从而选(C).

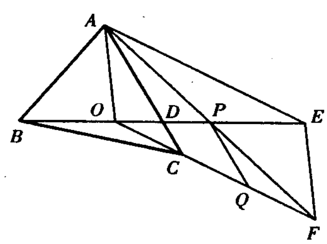


图 2　第 4 题图

更一般地,设 l,m,n 为正实数.

$$l\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}=0.$$

求 $\triangle BOC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积的比.

我们知道 $\frac{m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}}{m+n}=\overrightarrow{OD}$,$D$ 是 BC 上的一点,分 BC 为 $n:m$,由已知 $\overrightarrow{OD}=-\frac{l\cdot\overrightarrow{OA}}{m+n}$,所以 D 即是 AO 延长线与 BC 的交点,而且

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\frac{l+m+n}{m+n}\overrightarrow{AO}.$$

于是

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{OD}{AD}=\frac{l}{l+m+n}.$$

(其实 l,m,n 也可取 0 或负数,但不能全都为 0)

应用这一结果,立即得出第 4 题的答案是

$$\frac{1+2+3}{2}=3.$$

第 5 题需要列举种种情况.

5　设三位数 $n=\overline{abc}$,若以 a,b,c 为三条边的长可以构成等腰三角形,则 n 有　(　　)

(A) 45 个.　(B) 81 个.

(C) 165 个.　(D) 216 个.

显然 $a=b=c$ 的有 9 种,其它的等腰三角形均

不等边,由对称性,不妨设 $b=c\neq a$,再将算得的结果乘以 3. 这时有两种情况:

1° $b=c>a$.

有 $(b,c,a)=(2,2,1),(3,3,1),(3,3,2),\cdots,(9,9,1),\cdots,(9,9,8)$,共 $1+2+\cdots+8=\frac{8\times 9}{2}=36$(种).

2° $a>b=c>\frac{a}{2}$

有 $(a,b,c)=(3,2,2),(4,3,3),(5,3,3),(5,4,4),(6,4,4),(6,5,5),(7,4,4),(7,5,5),(7,6,6),(8,5,5),(8,6,6),(8,7,7),(9,5,5),(9,6,6),(9,7,7),(9,8,8)$,共 16 种

所以 n 的个数是 $9+3\times(36+16)=165$. 这是不被 9 整除的数,应当选(C).

填空题的 8 实际上是一个函数方程.

8 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,满足 $f(0)=1$,且对 $\forall x、y\in\mathbf{R}$,都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$,则 $f(x)=$______.

这种问题,当然是取一些特殊的 x 或 y 代入函数方程,看看能得什么结果. 由于已知的函数值只有 $f(0)$,所以取 $y=0$ 代入得

$$f(1)=f(x)-x+1$$

即

$$f(x)=x+f(1)-1 \qquad (1)$$

(1)已经是 $f(x)$ 的表达式了,只是常数 $f(1)$ 还不知道,再在(1)中令 $x=0$,得 $f(1)=2$,所以 $f(x)=x+1$.

第 9 题是求二面角的度数.

9 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,二面角 $A\text{-}BD_1\text{-}A_1$ 的度数是______.

本题可利用 $A_1D\perp$ 平面 AD_1B, $AB_1\perp$ 平面 A_1D_1B,法线 A_1D, AB_1 所成的角就是两个平面的夹角. 由于 $\triangle AB_1C$ 是正三角形,所以 $\angle AB_1C=60°$,即 A_1D, AB_1 所成的角是 60°,二面角 $A\text{-}BD_1\text{-}A_1$ 的度数也是 60°(平面 $ABA_1\perp$ 平面 A_1D_1B),所以二面角 $A\text{-}BD_1\text{-}A_1$ 的度数小于 90°).

第 10 题是数论题

10 设 p 是给定的奇质数,正整数 k 使 $\sqrt{k^2-pk}$ 也是一个正整数,则 $k=$______.

我们当然设 $k^2-pk=n^2(n\in\mathbf{N})$. 标准答案是将它看作二次方程. 另一种做法是分解:

$$pk=k^2-n^2=(k+n)(k-n).$$

由于 $k+n>k$,所以 $p\nmid k-n$, $p\mid k+n$,设

$$k+n=mp\ (m\in\mathbf{N}) \qquad (1)$$

则

$$m(k-n)=k \qquad (2)$$

多出了两个字母 m,n,但可以消去 n,即(1) $\times m+$(2)得

$$(2m-1)k=m^2p \qquad (3)$$

因为 $(2m-1,m)=1$,所以 $2m-1\mid p$,从而

$$2m-1=1 \text{ 或 } 2m-1=p$$

前者导出 $k=p$,与 k^2-pk 为正整数不合,后者得出 $k=m^2=(\frac{p+1}{2})^2$.

12 在平面直角坐标系 xOy 中,给定点 $M(-1,2)$ 和 $N(1,4)$. 点 P 在 x 轴上移动,当 $\angle MPN$ 最大时,点 p 的横坐标是______.

熟知圆 MPN 与 x 轴相切时, $\angle MPN$ 最大. 先求出 MN 的方程为 $x=y-3$,它交 x 轴于点 Q, Q 的横坐标为 -3. $[x_p-(-3)]^2=QM\times QN=2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=4^2$,所以 $x_p=1$ 或 -7,由于 MN 与 x 轴正方向成锐角,应取在 Q 右边的 P 点,即 $x_p=1$.

解答题中第 13 题是概率,这是过去未有的内容.

13 在第 n 关要掷一颗骰子 n 次,如果 n 次的点数和大于 2^n,则算过关:问

1) 最多能过几关?

2) 连过前 3 关的概率是多少?

由于每次最多掷出 6 点, $6>2$, $6\times 2>2^2$, $6\times 3>2^3$, $6\times 4>2^4$,所以可过 4 关. 但 $6\times 5<2^5$,所以最多能过 4 关.

另一方面,过第一关需掷出的点数 >2,过关概率为 $\frac{4}{6}$. 过第二关需两次点数之和 >4,而 $1+1,1+2,2+1,1+3,3+1,2+2$ 均不超过 4,所以过关概率为 $\frac{36-6}{36}=\frac{30}{36}$,过第 3 关需 3 次掷出的点数之和 >8,3 次点数之和不大于 8 的情况有:

$1+1+1,1+1+2,1+1+3,1+1+4,1+1+5,1+1+6,1+2+2,1+2+3,1+2+4,1+2+5,1+3+3,1+3+4,2+2+2,2+2+3,2+2+4,2+3+3.$

其中三次点数全相同的(如 $1+1+1,2+2+2$)各 1 种,三次中有二次相同的各 3 种,三次点数全不同的各 6 种,所以共有 $2\times 1+10\times 3+4\times 6=56$ 种,

点数之和大于 8 的有 $6^3 - 56 = 160$ 种. 过第三关的概率 $\frac{160}{216}$.

连过前 3 关的概率为

$$\frac{4}{6} \times \frac{30}{36} \times \frac{160}{216} = \frac{100}{243}.$$

第 14、15 两题似乎是“华山一条路”,没有什么实质不同的解法. 解法也都不难想到. 只需要有耐心与时间去做,如果在前面已经花去很多时间,做这两题就很紧张了. 第 14 题如果改为只求轨迹(或加上求内心),也许学生的时间会更宽裕些,水平能更正常发挥,第 15 题也可只要第(1)问. 现在题量似乎过大一些,除非平时做过类似问题,成竹在胸,否则在考场上恐怕大多同学难以完成,更无法检查一遍,而从培养学生兴趣,重在参与这一点考虑,似乎减少一点题量会吸引更多学生的参加.

此外,第 14 题中,切点只算一个公共点,而不算作两个(重合的)公共点,这最好能够说明,以免岐义. 第 15 题(Ⅱ)中,$\sum \frac{1}{g(\tan\mu)}$ 的最大值是 $\frac{9\sqrt{2}}{7}$,比题中上界 $\frac{3}{4}\sqrt{6}$ 稍小一些. 有人认为第 15 题可以改作加试题(换去加试的第二题). 目前试题的难度与量似乎偏大,在 100 分钟内完成,要求似偏高. 希望别再升高了.

加试题

加试题第一题仍是平面几何题,但变成一道计算题.

1　在锐角三角形 ABC 中,AB 上的高 CE 与 AC 上的高 BD 相交于点 H,以 DE 为直径的圆分别交 AB, AC 于 F, G 两点, FG 与 AH 相交于点 K. 已知 $BC = 25$, $BD = 20$, $BE = 7$, 求 AK 的长.

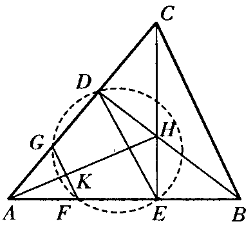


图 3　三角形

本题有三个三角形相似: $\triangle ABC \backsim \triangle ADE \backsim \triangle AFG$. 题中 B, C, D, E 共圆, $\angle ADE = \angle ABC$. 这种情况,我们说 DE 与 BC(关于 AB, AC)逆平行. 同样, FG 与 DE(关于 AB, AC)逆平行. 两次逆平行导出 FG 与 BC 平行. 从而与 BC 垂直的直线 AH 也与 FG 平行. $\triangle AFG$ 的高 AK 与 $\triangle ABC$ 对应高的比等于相似比 $\frac{AF}{AB}$.

在 $\triangle ABC$ 中,由已知条件可算出 $AE = 18$. 算法很多,除标准答案外,如用三角法.

由 $\angle ACE = 90° - \angle CAB = \angle ABC + \angle ACB - 90$ 得

$$\begin{aligned} AE &= CE\tan\angle ACE \\ &= -CE\cot(\angle ABC + \angle ACB) \\ &= 24 \times \frac{\frac{24}{7} \times \frac{4}{3} - 1}{\frac{24}{7} + \frac{4}{3}} = 18. \end{aligned}$$

从而 $AB = 25 = BC$, $\triangle ABC$, $\triangle ADE$, $\triangle AFG$ 均为等腰三角形, $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高 $= CE = 24$, $AF = FE = \frac{1}{2}AE = 9$. $AK = 24 \times \frac{9}{25} = \frac{216}{25}$.

2　在平面直角坐标系 xOy 中, y 轴正半轴上的点列 $\{A_n\}$ 与曲线 $y = \sqrt{2x}\ (x \geq 0)$ 上的点列 $\{B_n\}$ 满足 $|OA_n| = |OB_n| = \frac{1}{n}$. 直线 A_nB_n 在 x 轴上截距为 a_n, 点 B_n 的横坐标为 b_n, $n \in \mathbf{N}$.

1) 证明 $a_n > a_{n+1} > 4$.

2) 证明有 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得 $\forall n > n_0$, 都有

$$\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} + \cdots + \frac{b_{n+1}}{b_n} < n - 2004.$$

这道题也有相当多的计算,首先,不难求出:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} - 1 = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} \\ &= \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{b_n}{1 - n\sqrt{2b_n}}.$$

要证 1), 当然是将 b_n 的表达式代入. 证明 a_n 递减.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{b_n}{1 - n\sqrt{2b_n}} \\ &= \left[n(n + \sqrt{n^2+1}) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + n}}\right)\right]^{-1} \\ &= \left[n(n + \sqrt{n^2+1} - \sqrt{2n(n + \sqrt{n^2+1})}\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{n}{n + \sqrt{n^2+1} + \sqrt{2n(n + \sqrt{n^2+1})}}\right]^{-1} \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}, \end{aligned}$$

显示随 n 增加而减少,并且

$$a_n > 1 + \sqrt{1} + \sqrt{2 + 2\sqrt{1}} = 4.$$

(在 $n \to +\infty$ 时, $a_n \to 4$).

要证 2)，先估计 $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ (要敢于去掉碍手碍脚的因子)：

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n}{n+1}\times\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1}<\frac{n}{n+1}.$$

所以

$$\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{b_n}<\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}$$

$$=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).$$

括号里是著名的“调和级数”.学过一点高等数学的人都知道趋于无穷，因此，存在一个 n_0，当 $n>n_0$ 时，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<2004$$

即 2) 成立.具体一点，可用

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)>\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=$$

$$\frac{k+1}{2}>2004.$$

得出 $n_0=2^{4008}$.

3　对于整数 $n\geq4$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合 $\{m, m+1, \cdots, m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中，均有至少 3 个两两互素的元素.

这是一道与整式有关的组合问题.

首先要弄懂题意，其中“任何”“任一个”，“均有”，“至少”，“最小”等词汇是组合中常见的.

可以从简单情况做起.

$n=4$ 时，4 元集 $\{2,3,4,5\}$ 的三元子集 $\{2,3,4\}$ 中的三个数并不两两互素，所以 $f(4)>3$.另一方面，4 个连续自然数中，必有 3 个连续自然数，第 1 个是奇数，这 3 个自然数两两互素，所以 $f(4)=4$.

$n=5$ 时，5 元集 $\{2,3,4,5,6\}$ 的 4 元子集 $\{2,3,4,6\}$ 中的三个数并不两两互素(三个中有两个偶数)，所以 $f(5)>4$.另一方面，5 个连续自然数中，必有 3 个连续自然数，第一个是奇数，这 3 个自然数两两互素，所以 $f(5)=5$.

$n=4,5$ 时，$f(n)=n$，是不是对所有 n，均有 $f(n)=n$ 呢？当然不能这样武断，应再往下看.

$n=6$ 时，6 元集 $\{2,3,4,5,6,7\}$ 的 4 元子集 $\{2,3,4,6\}$ 中没有 3 个数两两互素，另一个方面对任 6 个连续自然数.

$m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5$，在 m 为偶数时 5 元子集 $\{m, m+1, m+2, m+4, m+5\}$ 中，$m+1$ 与 $m+5$ 是互素的奇数，在 $3\nmid m+2$ 时，$m+2$ 与它们都互素，在 $3\mid m+2$ 时，$m+4$ 与 $m+1$，$m+5$ 都互素.其它的 5 元子集中，$m+1$，$m+2$，$m+3$ 两两互素或 $m+3$，$m+4$，$m+5$ 两两互素.在 m 为奇数时，情况类似(将 $m, m+1, m+2, \cdots, m+5$ 分别换成 $m+5, m+4, m+3, \cdots, m$).因此 $f(6)=5$.

进一步，可考虑 $n=6k$ (6 是 2 与 3 的最小公倍数).一方面在 $\{2,3,\cdots,6k+1\}$ 中，$4k$ 元子集

$\{2,4,6,\cdots,6k,3,9,\cdots,6k-3\}$

中没有 3 个两两互素的数(3 个数中或有 2 个偶数，或有 2 个被 3 整除)所以 $f(6k)\geq4k+1$.

另一方面，$6k$ 个连续自然数可分为 k 组，每组 6 个连续的自然数，任一 $4k+1$ 元子集必与 k 组至少一组中有 5 个公共元，根据 $f(6)=5$，可知这 5 个数中有 3 个两两互素，所以 $f(6k)=4k+1$.类似地，可以得出

$f(6k+1)=4k+2$，$f(6k+2)=4k+3$，$f(6k+3)=4k+4$，$f(6k+4)=4k+4$，$f(6k+5)=4k+5$，

以 $f(6k+4)$ 为例.一方面 $\{2,3,\cdots,6k+5\}$ 的 $4k+3$ 元子集 $\{2,4,6,\cdots,6k+4,3,9,\cdots,6k+3\}$ 中没有 3 个两两互素的数，另一方面，$6k+4$ 个连续自然数可分为 $k+1$ 组，前 k 组，每组 6 个连续自然数，最后一组是 4 个连续自然数，任一 $4k+4$ 元子集或者与前 k 组中某一组有 5 个公共元或者包含最后的 4 元组，从而由 $f(6)=5$ 及 $f(4)=4$ 可知有 3 个数两两互素.

不难验证，上面的结果与标准结答案 $f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]+1$ 是一致的，而且 $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{6}\right]$ 正是 $\{2,3,\cdots,n+1\}$ 中 2 或 3 的倍数的个数.

数学文化教育

谈谈研究式的学习

南京师范大学数学系(210024) 单 墫

一位学生,应当学习课本上的知识,这一过程主要在课堂进行.但对一位优秀的学生,仅仅依靠课本来学习是远远不够的.即使就知识方面来说,中学阶段所能学的内容是很多的,而课本上的充其量仅占十分之一,更何况要培养各种能力.要取得长足的进步,最好是进行研究式的学习.

一、自己看书

应当学会看课外书,这样眼界就大为开阔,能力就大为增强,真正成为学习的主人.课外书不容易读,数学书更不可能像小说、散文那样有趣味.但只要读下去,有所领悟,有所收获,也会有无穷的乐趣.

初看书时,不要选择大部头的书,最好从读小册子开始.好的小册子出得少,但由于价格不高,往往很快售罄,而出版社又因为利润不高,往往不再重印,所以市场上不易见到(在一些学校的图书馆有可能借到).因此我在这里稍作介绍.

前苏联曾组织数学家写过许多小册子.上个世纪中期有不少被译为中文.如《直圆柱》、《最短线》、《不等式》、《数学归纳法》、《几何学中的归纳法》、《简易的极大与极小》、《无穷小量的求和》、《循环级数》、《菲波那契数》、《奇妙的曲线》、《双曲线函数》、《对数与面积》、《摆线》、《图形的组成相等和大小相等》、《什么是非欧几何》、《什么是微分学》、《力学在几何中的应用》、《奇妙的正方形》、《直尺作图》、《圆规作图》、《正定理和逆定理》.

我国数学家也写了很多小册子.尤其是华罗庚先生,他先后写了《从杨辉三角形谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》、《从孙子的神奇妙算谈起》等等.后来又汇集为《华罗庚科普著作选》.这时期出的小册子还有《对称》、《一笔画与邮递路线》、《平均》、《复数与几何》、《欧拉定理与多面体的拓朴分类》、《从刘徽的割圆术谈起》、《格点与面积》等.

文革后,小册子更多.尤其上海教育出版社的王文才、赵斌、冯贤、叶中豪等编辑大力组织,推出了数十种.如《抽屉原则及其他》、《单位根》、《计数》、《组合恒等式》、《从正五边形谈起》、《从反面看问题》、《差分方程》、《棋盘上的组合问题》、《不定方程》等.

这些小册子深入浅出,大多出自数学名家之手.它们的出版对于我国中学界产生了很大的影响.我也写过不少册子,如《几何不等式》、《趣味的图论问题》、《覆盖》、《棋盘上的数学》、《组合数学的问题与方法》、《趣味数论》、《组合几何》、《十个有趣的数学问题》、《平面几何中的小花》、《集合及其子集》、《解析几何的技巧》、《算两次》、《国际数学竞赛解题方法》等.不能自夸这些书都写得很好,但也确实用了一些力气,费了一番斟酌,可供同学们参考.

读者还可以看一些数学的期刊杂志.例如《中学生数学》,上面经常有一些短小精悍、非常有趣的文章.读一读也大有好处.

读课外书,可以采取"牛吃草的方式".先浏览一遍,囫囵吞下去,大致知道有哪些内容,不求甚解.然后,像牛反刍一样,再对那些有兴趣的、用得上的章节细细咀嚼.

读不懂,怎么办?要有耐心,反复地读,反复思考,反复领会."书读十遍,其意自见".一定要顶得住,不可轻易放弃.遇到困难,可以请教老师、同学,但主要靠自己,硬着头皮往下看.坚持下去,不但学到了很多知识,也培养了读书的能力,学会了如何读书.

"尽信书,则不如无书".看书时要多思考,书中也可能有些欠妥的地方,甚至会有错误.

这可以考察你的识别能力.如果你发现书中的疏漏或不足,并写出自己的心得,那就是古人所说的"读书得间"了.

二、想问题

"心之官则思".数学是思维的科学,学数学的最好方法是做数学.只有经常想问题,才能真正掌握数学的思想、方法,才能活用所学的知识.

问题可以是书本上的,也可以是生活中的."处处留心皆学问",随时可以发现好的问题.例如2002年高考有一道试题如下:

(1) 给出两块面积相同的正三角形纸片(如图1,图2),要求用其中一块剪成一个正三棱锥模型,另一块剪成正三棱柱模型,使它们的全面积都与原三角形的面积相等.请设计一种剪拼方法,分别用虚线标示在图1、图2中,并作简要说明;

(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;

(3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片(如图3),要求剪拼成一个直三棱模型,使它的全面积与给出的三角形的面积相等,请设计一种剪拼方法,分别用虚线标示在图3中,并作简要说明.

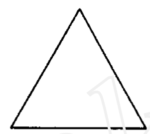


图1

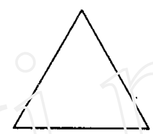


图2

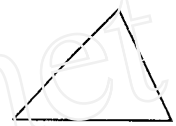


图3

从这道高考题出发,可以引出下面的新问题:

一块任意三角形的纸片,是否一定能沿着它的中位线折成一个三棱锥?如果能,它的体积如何计算?试与用同样的纸片剪拼成的、有相同底面积的直三棱柱比较,谁的面积大?

这样的问题,可以促使我们带着它去看有关书籍,查找所需的资料,或与同学讨论,向老师请教.最后,将自己的解答与体会写成文章,这就是研究式的学习.

孔夫子教导我们说:"学而不思则罔,思而不学则殆".读书、想问题应当很好的结合起来,不可偏废. □

名校基础知识自测初一答案

一、选择题

1. D; 2. D; 3. B; 4. C; 5. A; 6. D; 7. B; 8. D; 9. B; 10. C.

二、填空题

1. $-\frac{1}{3},\frac{2}{9}$; 2. $\pm\frac{24}{5}$; 3. 75; 4. 4; 5. $56\frac{1}{4}$.

三、解答题

1. (1) $\frac{2x+5}{5}-\frac{3+2x}{3}=2$,

$$(6x+15)-(15+10x)=30,$$
$$-4x=30,$$
$$x=-\frac{15}{2}.$$

(2) $6-2(x-\frac{1+x}{3})=3x-3(2x-\frac{10-7x}{3})$,

$$6-2x+\frac{2+2x}{3}=3x-6x+10-7x,$$
$$26x=10,$$
$$x=\frac{5}{13}.$$

2. 设老师家与学校相距x千米,则

$$10+1.2(x-4)=16,$$

解得　$x=9$.

3. 由已知,得$\frac{1}{3}a^{2x+1}b^2$与$-4a^{3x-1}b^2$是同类项,故$2x+1=3x-1$,$x=2$.

又由非负数的和为0,则这几个非负数均为0,得$5y-2(x-3)=0$和$3x+6=0$.

解得　$y=-\frac{2}{5}$,$z=-2$.

因此　$x^2+y^2+z^2=2^2+(-\frac{2}{5})^2+(-2)^2$

$=8\frac{4}{25}$. □

数学文化教育

谈谈研究式的学习

南京师范大学数学系(210024)　单　墫

一位学生,应当学习课本上的知识,这一过程主要在课堂进行.但对一位优秀的学生,仅仅依靠课本来学习是远远不够的.即使就知识方面来说,中学阶段所能学的内容是很多的,而课本上的充其量仅占十分之一,更何况要培养各种能力.要取得长足的进步,最好是进行研究式的学习.

所谓研究式的学习,简单说就是自己看书想问题.

一、自己看书

应当学会看课外书,这样眼界就大为开阔,能力就大为增强,真正成为学习的主人.课外书不容易读,数学书更不可能像小说、散文那样有趣味.但只要读下去,有所领悟,有所收获,也会有无穷的乐趣.

初看书时,不要选择大部头的书,最好从读小册子开始.好的小册子出过不少,但由于价格不高,往往很快售罄,而出版社又因为利润不高,往往不再重印,所以市场上不易见到(在一些学校的图书馆有可能借到).因此我在这里稍作介绍.

前苏联曾组织数学家写过许多小册子.上个世纪中期有不少被译为中文,如《直圆柱》、《最短线》、《不等式》、《数学归纳法》、《几何学中的归纳法》、《简易的极大与极小》、《无穷小量的求和》、《循环级数》、《菲波那契数》、《奇妙的曲线》、《双曲线函数》、《对数与面积》、《摆线》、《图形的组成相等和大小相等》、《什么是非欧几何》、《什么是微分学》、《力学在几何中的应用》、《奇妙的正方形》、《直尺作图》、《圆规作图》、《正定理和逆定理》.

我国数学家也写了很多小册子.尤其是华罗庚先生,他先后写了《从杨辉三角形谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》、《从孙子的神奇妙算谈起》等等.后来又汇集为《华罗庚科普著作选》.这时期出的小册子还有《对称》、《一笔画与邮递路线》、《平均》、《复数与几何》、《欧拉定理与多面体的拓朴分类》、《从刘徽的割圆术谈起》、《格点与面积》等.

文革后,小册子更多.尤其上海教育出版社的王文才、赵斌、冯贤、叶中豪等编辑大力组织,推出了数十种.如《抽屉原则及其他》、《单位根》、《计数》、《组合恒等式》、《从正五边形谈起》、《从反面看问题》、《差分方程》、《棋盘上的组合问题》、《不定方程》等.

这些小册子深入浅出,大多出自数学名家之手.它们的出版对于我国中学界产生了很大的影响.

我也写过不少小册子,如《几何不等式》、《趣味的图论问题》、《覆盖》、《棋盘上的数学》、《组合数学的问题与方法》、《趣味数论》、《组合几何》、《十个有趣的数学问题》、《平面几何中的小花》、《集合及其子集》、《解析几何的技巧》、《算两次》、《国际数学竞赛解题方法》等.不能自夸这些书都写得很好,但也确实用了一些力气,费了一番斟酌,可供同学们参考.

读者还可以看一些数学的期刊杂志.例如《中学生数学》,上面经常有一些短小精悍、非常有趣的文章.读一读也大有好处.

读课外书,可以采取"牛吃草的方式".先浏览一遍,囫囵吞下去,大致知道有哪些内容,不求甚解.然后,像牛反刍一样,再对那些有兴趣的、用得上的章节细细咀嚼.

读不懂,怎么办?要有耐心,反复地读,反复思考,反复领会."书读十遍,其意自见"一定要顶得住,不可轻易放弃.遇到困难,可以请教老师、同学,但主要靠自己,硬着头皮往下看.坚持下去,不但学到了很多知识,也培养了读书的能力,学会了如何读书.

“尽信书，则不如无书”. 看书时要多思考，书中也可能有些欠妥的地方，甚至会有错误. 这可以考察你的识别能力. 如果你发现书中的疏漏或不足，并写出自己的心得，那就是古人所说的“读书得间”了.

二、想问题

“心之官则思”. 数学是思维的科学，学数学的最好方法是做数学. 只有经常想问题，才能真正掌握数学的思想、方法，才能活用所学的知识.

问题可以是书本上的，也可以是生活中的. “处处留心皆学问”，随时可以发现好的问题. 例如 2002 年高考有一道试题如下：

(1) 给出两块面积相同的正三角形纸片(如图 1，图 2)，要求用其中一块剪成一个正三棱锥模型，另一块剪成正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 1，图 2 中，并作简要说明；

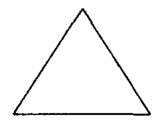


图 1

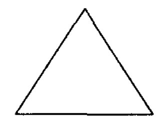


图 2

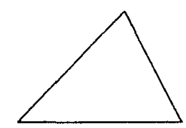


图 3

(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小；

(3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片(如图 3)，要求剪拼成一个直三棱锥模型，使它的全面积与给出的三角形的面积相等，请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 3 中，并作简要说明.

从这道高考题出发，可以引出下面的新问题：

一块任意三角形的纸片，是否一定能沿着它的中位线折成一个三棱锥? 如果能，它的体积如何计算? 试与用同样的纸片剪拼成的、有相同底面积的直三棱柱比较，谁的面积大?

这样的问题，可以促进我们带着它去看有关书籍，查找所需的资料，或与同学讨论，向老师请教. 最后，将自己的解答与体会写成文章，这就是研究式的学习.

孔夫子教导我们说：“学而不思则罔，思而不学则殆”. 读书、想问题应当很好地结合起来，不可偏废. □

动态与信息

1. 世界著名数学大师陈省身称赞中国的数学科普工作

世界数学家大会期间，著名数学大师陈省身在接受采访时称赞中国科普工作做得很好，值得其他国家效仿. 这位 92 岁的美籍华人数学家说，由于科普工作不赚钱，外国很少有人搞. 但是在中国，由于有政府的支持，科普方面取得显著成效. 他说，有人甚至建议将中国的科普读物翻译成英文介绍到西方. 陈省身说，近年来中国青少年在国际奥林匹克数学竞赛中连获金牌就是中国科普成功的一个例证. 现在，就连数学强国美国也开始引进中国的培训方式和教材，其参赛选手的水平也因此得到明显提高.

2. 2002 年中国代表队在国际学科奥林匹克竞赛中取得的优异成绩

学科	届数	时间	地点	队员数	金牌	银牌	铜牌
数学	43	7 月	英国	6	6	0	0
物理	33	7 月	印度尼西亚	5	4	1	0
化学	34	7 月	荷兰	4	4	0	0
生物学	13	7 月	拉托维亚	4	3	1	0
信息学	14	8 月	韩国	4	3	1	0

谈一道竞赛题

南京师范大学数学系(210097)　单　墫

2001北京市初二年级决赛题四(本刊第6期)是一道很好的几何题.看似简单,却不容易.原题如下:

如图,在等腰三角形 ABC 中,延长边 AB 到点 D,延长边 CA 到 E,连结 DE,恰有

$$AD=BC=CE=DE.$$

求证:$\angle BAC=100°$.

除去本刊第6期公布的答案外,这里再提供两个解答.

解法一　$\angle DAE=\angle DEA$ 是锐角,$\angle BAC$ 是钝角,所以等腰三角形 ABC 中,$AB=AC$,从而 $AE=CE-AC=AD-AB=BD$.

如图1,以 BD 为底,作与 $\triangle ADE$ 全等的等腰三角形 BDF,连 CF,则 $\angle FDB=\angle EAD$,所以

$$DF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} CE,$$

四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

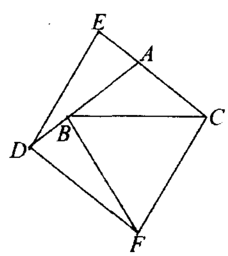


图1

$$CF=DE=BF=BC.$$

$\triangle BCF$ 是正三角形.

设 $\angle ABC=\alpha$,则 $\angle FBD=\angle EAD=2\alpha$,

$$\alpha+60°+2\alpha=180°,$$

所以 $\alpha=40°$,$\angle BAC=100°$.

解法二　连 CD.同解法一,易知 $AB=AC$,设 $\angle ACB=\alpha$,则 $\angle DEA=\angle DAE=2\alpha$.

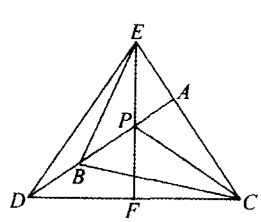


图2

在等腰三角形 DEC 中,作高 EF,交 AB 于 P,连 CP,则 $\angle DEF=\angle FEC=\alpha$,$\angle DPF=\angle CPF$.

在等腰三角形 CEB 中,$\angle CEB=\angle CBE=\frac{180°-\alpha}{2}$,$\angle PEB=\angle CEB-\angle FEC=\frac{180°-\alpha}{2}-\alpha=90°-\frac{3}{2}\alpha$.

$$\angle PBE=180°-\angle CEB-\angle BAE=180°-\frac{180°-\alpha}{2}-2\alpha=90°-\frac{3}{2}\alpha.$$

由于 $\angle PEB=\angle PBE$,所以 P 在 $\triangle CEB$ 的对称轴上,即 CP 是顶角的平分线,$\angle APC=\angle CPF$.所以 $\angle DPF=\angle CPF=\angle APC=\frac{180°}{3}=60°$.

从而 $90°-\frac{3}{2}\alpha=\angle PBE=\frac{1}{2}\angle BPF=\frac{60°}{2}=30°$,$\alpha=40°$,$\angle BAC=100°$.

对于特殊角30°、45°、60°、90°,大家很有兴趣.但80°(或100°)的角也有不少特点.图2的 $\triangle EDC$ 就是一个顶角为80°的等腰三角形.我们还可以举出几个与它有关的问题.

1. 设 $\triangle EDC$ 中,$ED=EC$,$\angle DEC=80°$,B 为 $\triangle EDC$ 内一点,$\angle BCD=10°$,$\angle BDC=30°$.求 $\angle EBD$.

2. 设 $\triangle EDC$ 中,$ED=EC$,$\angle DEC=80°$,B 为 $\triangle EDC$ 内一点,$BC=EC$,$\angle BCE=40°$.求 $\angle EDB$.

3. 设 $\triangle ABC$ 中,有一点 P,$\angle PAB=10°$,$\angle PBA=20°$,$\angle PCA=30°$,$\angle PAC=40°$.证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形(1996年第25届美国数学奥林匹克第5题).

2001年国际数学竞赛的第5题也是一道涉及80°的题.原题如下:

在 $\triangle ABC$ 中,AP 平分 $\angle BAC$,P 在 BC 上,BQ 平分 $\angle ABC$,Q 在 CA 上.已知

$$\angle BAC=60°,AB+BP=AQ+QB$$

$\triangle ABC$ 的角的可能值是什么?

答案是 $\angle ABC=80°$,$\angle ACB=40°$.　□

(责审　李延林)

行程问题

单 墫

早上八点钟，甲、乙、丙三人从东往西直行. 乙在甲前 400 m，丙在乙前 400 m. 甲、乙、丙三人的速度分别为每分 120 m、100 m、90 m. 问什么时刻甲和乙、丙的距离相等？

本题是 2001"华杯赛"中学组一试第 2 题.

由于甲的速度最快，所以甲先追上乙，而乙尚未追上丙. 具体地说，甲追上乙需

$$400 \div (120 - 100) = 20(分),$$

而此时乙在丙后面

$$400 - (100 - 90) \times 20 = 200(m).$$

在这 20 分内，甲与丙的距离始终大于甲与乙的距离.

设再过 t 分，甲到达乙、丙的中间，与乙、丙的距离相等，则这时乙、丙的距离是

$$200 - (100 - 90)t = 200 - 10t(m),$$

而甲、丙的距离是

$$200 - (120 - 90)t = 200 - 30t(m),$$

并且
$$200 - 10t = 2(200 - 30t),$$
即
$$50t = 200,$$
$$t = 4.$$

此后，甲与丙的距离比甲与乙的距离小. 直到乙追上丙，这时共行

$$400 \div (100 - 90) = 40(分).$$

在这以后，甲与丙的距离比甲与乙的距离大.

因此，在 8:24 与 8:40 时，甲与乙、丙的距离相等.

一道高考题的求解思路

单 墫

(南京师范大学,210097)

2004 年高考江苏卷的最后一题,比较难,多数考生不熟悉这样的问题,不知从何入手.所公布的参考答案也比较迂回,不易看清其思路,本文将介绍另一种解法.

原题如下:

22. 已知函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$ 满足下列条件:对任意的实数 x_1, x_2 都有

$$\lambda(x_1-x_2)^2\le(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$$

和

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|,$$

其中 λ 是大于 0 的常数.

设实数 a_0, a, b 满足

$$f(a_0)=0 \text{ 和 } b=a-\lambda f(a).$$

(1) 证明 $\lambda\le 1$,并且不存在 $b_0\ne a_0$,使得 $f(b_0)=0$;

(2) 证明 $(b-a_0)^2\le(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$;

(3) 证明 $[f(b)]^2\le(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

题目比较长,需要仔细看,弄清其中字母 λ, a_0, a, b 的意义.问题涉及自变量的差($x_2-x_1, a-a_0, b-a_0$)与函数值的差($f(x_2)-f(x_1), f(a)-f(a_0), f(b)-f(a)$).这肯定是一位高校教师从数学分析中挖掘出来(或自己研究中产生)的一道题目,需要利用已知条件(其中 x_2, x_1 可取任意值),作适当的估计.

略解　(1)(2)略.

(3) 棱台 $DEF-ABC$ 的棱长和为 6(等于正四面体的各棱长和,而正四面体的棱长为 1).

$\because$ 正四面体 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12}$,

$\therefore 0<V<\frac{\sqrt{2}}{12}$,

$\therefore$ 存在满足条件的平行六面体.

设直平行六面体各棱长均为 $\frac{1}{2}$,底面相邻两边夹角为 α,则该平行六面体的棱长和为 6,体积为 $\frac{1}{8}\sin\alpha$,

若 $\frac{1}{8}\sin\alpha=V$,则 $\sin\alpha=8V$,由 $0<V<\frac{\sqrt{2}}{12}$,$\therefore 0<8V<1$,

可取 $\alpha=\arcsin(8V)$

故构造棱长均为 $\frac{1}{2}$,底面相邻两边夹角为 $\arcsin(8V)$ 的直平行六面体满足题设.

评析　题目要求构造出一个适合题设的平行六面体(答案不唯一)可以这样探索:棱长为 $\frac{1}{2}$ 的正方体是特殊的平行六面体,其棱长为 6,其体积为 $\frac{1}{8}\notin\left(0,\frac{\sqrt{2}}{12}\right)$,故正方体不合题意.于是,我们可以思考,高仍为 $\frac{1}{2}$,底面是平行四边形(菱形),设菱形的一个夹角为 α,则其面积为 $\frac{1}{4}\sin\alpha\left(\text{比}\frac{1}{4}\text{小}\right)$,平行六面体体积为 $\frac{1}{8}\sin\alpha\left(\text{比正方体的}\frac{1}{8}\text{小}\right)$,这种由特殊到一般的思想是我们在探索问题中发现问题的一种有效途径.此题对考生的思维能力要求较高,考查空间想象能力,观察、分析、综合、探索和创新能力.

由已知条件,在 $x_1 \neq x_2$ 时,

$$0 < \lambda \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)^2}(x_1 - x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

所以 $f(x_1) - f(x_2)$ 与 $x_1 - x_2$ 同号(同正或同负),即 $f(x)$ 在 R 上是(严格的)增函数(即在 $x_1 > x_2$ 时,$f(x_1) > f(x_2)$).当然不会有两个零点,也就是在 $b_0 \neq a_0$ 时,$f(b_0) \neq 0$.

并且由已知 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$,

$$\lambda \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq 1. \quad ①$$

这就完成了(1)的证明,而且还证得更多的些,得出了 $f(x)$ 在 R 上是(严格)的增函数.

现在来证(2),注意

$$f(a_0) = 0, b = a - \lambda f(a),$$

所以

$$b - a_0 = a - a_0 - \lambda[f(a) - f(a_0)]. \quad ②$$

如果 $a = a_0$,那么 $b = a_0 - 0 = a_0$,(2)式当然成立.

以下设 $a \neq a_0$,令

$$t = \frac{f(a) - f(a_0)}{a - a_0}, \quad ③$$

(为了将函数值的差变为自变量的差)

则 $\quad f(a) - f(a_0) = t(a - a_0). \quad ④$

由于 ①(取 $x_1 = a, x_2 = a_0$),

$$\lambda \leq t \leq 1. \quad ⑤$$

将 ④代入 ②得

$$b - a_0 = (a - a_0)(1 - t\lambda),$$

所以

$$(b - a_0)^2 = (a - a_0)^2(1 - t\lambda)^2.$$

剩下的问题是证明

$$(1 - t\lambda)^2 \leq 1 - \lambda^2, \quad ⑥$$

也就是

$$\lambda(1 + t^2) \leq 2t.$$

由于 $0 \leq \lambda \leq t \leq 1$,所以

$$\lambda(1 + t^2) \leq 2\lambda \leq 2t$$

即 ⑥成立,(2)证毕.

最后证(3),类似于上面的证明,在 $b \neq a$ 时,设

$$f(b) - f(a) = t(b - a) \quad ⑦$$

则 ⑤成立(在 ①中取 $x_1 = b, x_2 = a$),所以 ⑥成立.

将 ⑦及 $b = a - \lambda f(a)$ 代入(消去 b),得

$$\begin{aligned}[f(b)]^2 &= [f(a) + t(b - a)]^2 \\ &= [f(a)(1 - t\lambda)]^2 \\ &= [f(a)]^2(1 - t\lambda)^2 \\ &\leq (1 - \lambda^2)[f(a)]^2.\end{aligned}$$ (根据 ⑥

在 $b = a$ 时,$\lambda f(a) = 0$,根据(1),$a = a_0$,所以 $f(b) = f(a) = f(a_0) = 0$.

于是总有 $[f(b)]^2 \leq (1 - \lambda^2)[f(a)]^2$.

③式证毕.

引入一个参数 t,是为了将函数值的差变为自变量的差(在证(2)时,将 $f(a) - f(a_0)$ 变为 $t(a - a_0)$,在证(3)时,将 $f(b) - f(a)$ 变为 $t(b - a)$),以便比较.虽然多出一个参数 t,但它满足 ⑤,范围为已知.这时(2)与(3)都可以用同一个不等式 ⑥来证明.

证(2)分 $a = a_0$ 与 $a \neq a_0$ 两种情况.其实不分也可以.对于 $a = a_0$,不论 t 为什么数,④当然成立,这时我们也可取 t 满足 ⑤,所以两种情况可以合在一起,同样,证(3)也可以不分两种情况.

上面证明的另一个关键之处是消去 b,将它用基本的量 a_0, a 及 $f(a), t, \lambda$ 的表达式代替后,问题就解决了.

注 其实函数(二次函数) $y = (1 - t\lambda)^2$,$\lambda \leq t \leq 1$,在区间端点 $t = \lambda$ 处取最大值 $(1 - \lambda^2)^2$,所以本题(2),(3)中的系数 $1 - \lambda^2$ 都可改进为(更小的) $(1 - \lambda^2)^2$.

一道几何题

单 墫

如图 1,已知 $\triangle ABC$ 中, $AH \perp BC$,垂足 H 在线段 BC 上, G 为线段 HC 内一点, $\angle BAG = 60°$, $\angle HAG = \frac{1}{2}\angle GAC$, $AB = 11$, $AC = 9$. 求 $\frac{BH}{HC}$.

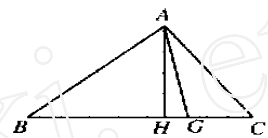


图 1

这道几何题用到的知识不多,初中同学应当能做(原来是日本小学算学竞赛的试题,但小学知识是不够的). 有趣的是,懂得更多知识的高中学生(甚至数学教师),往往做不好(笔者曾给一些人做过). 这倒不是说“知识越多越愚蠢”,而是知识多了,可供选择的解法也多了,反倒不知道选择哪一条路为好.

所谓做不好,就是解答极其复杂. 我们希望的好的解答,应当尽量简单. 同学们可以自己先试一试,然后再看下面的解答.

首先设 $\angle HAG = \alpha$, 则 $\angle BAC = 60° + 2\alpha$,而 $\angle ABC = 90° - (60° - \alpha) = 30° + \alpha$. 即设 $\angle ABC = \phi$,则 $\angle BAC = 2\phi$.

现在点 G 的“使命”已经结束,可以将它(及线段 AG)擦去.

过点 C 作直线平行于 AH,交 BA 的延长线于点 A',则 $\frac{BH}{HC} = \frac{BA}{AA'}$,只需求出 AA' 或 $A'B$ 就可以了.

为清楚起见,我们重画一个图(图 2). 其中 AH 也去掉了,只保留现在最需要的部分.

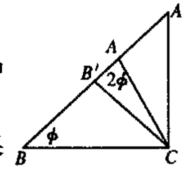


图 2

$\triangle A'CB$ 是直角三角形, $A'B$ 是斜边. 如果设 B' 是 $A'B$ 的中点,那么 $CB' = \frac{1}{2}A'B$.

山姆大叔的妙题

谈祥柏

现在我国经济比较富裕的长三角地区开办双语学校的城市还真不少,这些学校的收费一般都比较昂贵,教育需要投入,这是人们的共识. 但是,高价除了极大地加重家长的经济负担之外,是否一定就能培养出高质量的人才?笔者是深表怀疑的.

虽然名为"双语",然而进行中-德,中-法,或者中-日(日、德、法都是同我国有大量进出口贸易的国家)双语教学的还是绝无仅有. 所谓双语学校,其实所教的外语十之八九仍是英语.

不过,在双语学校里,无论考试、课堂教学与课外作业,用外文出题是合法的,而且这种作法也逐步开始流行起来. 下面就来讲一个非常有趣、别致与独具风格的问题.

这是一道初中数学题,原文如下:

The combined ages of Mary and Ann are 44 years, and Mary is twice as old as Ann was when Mary was half as old as Ann will be when Ann is three times as old as Mary was when Mary was three times as old as Ann.

How old is Ann?

班上的一位好学生看得莫名其妙,拿去请教外语教师. 老师一看,段落虽然不长,却是古怪透顶:全句没有一个生字,然而过去、现在、将来三种时态同时出现,又不使用标点符号,而是整个句子囫囵吞枣地连在一起. 于是她认为:语法是狗屁不通的,简直不屑一顾.

(接第 2 页)

CB' 与 CA 有什么关系?

注意 $\angle AB'C = \angle BB'C + \angle B'CB = 2\varphi = \angle BAC$, 所以 $CB' = CA = 9$.

于是 $AB' = 2\times 9 = 18$, $AA' = 18 - 11 = 7$, $\frac{BH}{HC} = \frac{11}{7}$.

一道物理问题的数学建模探究

谭志中　　单　墫

(兴化市唐刘高级中学,江苏　225723)　(南京师范大学数学系,江苏　210097)

中图分类号:O12 - 42　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:0488 - 7395(2002)07 - 0031 - 02

许多与计算有关的物理问题往往需要相应的数学知识,据说爱因斯坦研究相对论时曾请数学大师帮忙. 事实上,数学与物理是联系最为紧密的学科,不少数学问题都是建立在物理问题之上,而不少物理问题也可以通过建构数学模型获得解决. 数学物理的结合不仅有助于解决物理问题,而且有助于将抽象的数学问题具体化. 本文就一道电场问题进行了一点探究,通过建构数学模型,给出了巧妙的初等数学方法,并由此进行了一点引申和推广.

1　物理问题

在物理学之电场中存在这样一类问题:带电量分别为 q_1, q_2 的两个异号点电荷相距 L,如图所示,则两个点电荷连线上的最小场强 E 为多少?

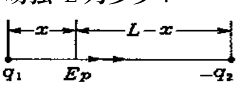


图 1

这是物理学之电场中常见的问题,不妨首先考虑两个点电荷连线上任意一点处的电场 E_p,直接根据点电荷激发的电场公式 $E = k\frac{q}{r^2}$ 得:

$$E_p = E_1 + E_2 = k\frac{q_1}{x^2} + k\frac{q_2}{(L - x)^2},$$ 其中 $x \in (0, L)$　　(1)

如何由(1)式根据 x 的变化确定 E_p 的最小值? 这个问题看似简单,其实并不那么容易. 当然,运用微分或求导的方法是可以解决的,但能不能有更为巧妙的初等方法解决此问题则是笔者探究此问题之目的所在. 本文将式(1)抽象成如下数学模型:

2　数学模型

若 $\forall a, b \in \mathbf{R}^+$, $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x + y = L$, $f(x, y) = \frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2}$,试求 $f(x, y)$ 的最小值.

本文通过构造恒等式巧妙地解决了这类问题,即

$$f(x,y) = \frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} = \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2} + \frac{(ay - bx)^2}{xy(x+y)}\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{a+b}{x+y}\right) \qquad (2)$$

通过取差运算不难验证此恒等式的正确性. (证略)

由式(2)可直接得到

$$f(x, y) = \frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} \geq \frac{(a + b)^3}{(x + y)^2} \qquad (3)$$

(其中等号成立当且仅当 $ay = bx \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$)

根据结论(3)不难求出式(1)的最小值:

$$E_{\min} = k\frac{(\sqrt[3]{q_1} + \sqrt[3]{q_2})^3}{L^2},$$

其中等号成立的条件为 $\frac{\sqrt[3]{q_1}}{x} = \frac{\sqrt[3]{q_2}}{L - x}$,

由此可解得 $x = \left(\frac{\sqrt[3]{q_1}}{\sqrt[3]{q_1} + \sqrt[3]{q_2}}\right)L$. 特别地当 $q_1 = q_2$ 时易得 $x = \frac{1}{2}L$.

从恒等式(2)不仅能够直接看出最小值,而且能够直接看出取得最小值的条件,因此(2)式是一个很有价值的恒等式. 该恒等式还可以用来巧妙地解决一些相关的数学竞赛命题. 根据上述 2 维形式的数学模型我们不难将此推广成 n 维形式的数学模型:

3　n 维形式的数学模型

若 $\forall a_i \in \mathbf{R}^+$, $x_i \in \mathbf{R}^+$ 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i = L$, $f_n(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{x_i^2}$ $(n \geq 2)$,试求 $f_n(x_i)$ 的最小值.

该命题可根据式(3)进行数学归纳,不难得到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \qquad (4)$$

即 $f_{\min}(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

(其中等号成立当且仅当 $\frac{a_i}{x_i} = \frac{a_j}{x_j}$, $i, j \in \mathbf{N}$).

简证　(数学归纳法)

记 $\sum_{i=1}^{n} a_i = A_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = X_n$.

1) 当 $n = 2$ 时,由式(3)可直接得

$\frac{a_1^3}{x_1^2} + \frac{a_2^3}{x_2^2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^3}{(x_2 + x_2)^2}$ (其中等号成立当且仅当

收稿日期:2002 - 01 - 10

作者简介:谭志中(1965 —),江苏兴化人,江苏兴化市唐刘高级中学一级教师,硕士.

$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}$) ,即当 $n=2$ 时,式(4)成立.

2) 假设当 $n=k$ 时($k>2$),式(4)成立,即

$\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^3}{x_i^2}\geq A_k^3/X_k^2$(其中等号成立的条件为 $\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_k}{x_k}$). (6)

将式(6)两边同时加以 $\frac{a_{k+1}^3}{x_{k+1}^2}$ 得:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i^3}{x_i^2}\geq\frac{A_k^3}{X_k^2}+\frac{a_{k+1}^3}{x_{k+1}^2},$$

将上式的右端应用式(3)可得

$$\frac{A_k^3}{X_k^2}+\frac{a_{k+1}^3}{x_{k+1}^2}\geq\frac{(A_k+a_{k+1})^3}{(X_k+x_{k+1})^2}=\frac{A_{k+1}^3}{X_{k+1}^2},$$

(其中等号成立当且仅当 $\frac{A_k}{X_k}=\frac{a_{k+1}}{x_{k+1}}$)

亦即 $\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i^3}{x_i^2}\geq\frac{A_{k+1}^3}{X_{k+1}^2}$.

可见当 $n=k+1$ 时式(4)成立.

并且等号成立的条件由上述证明过程确定为

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_{k+1}}{x_{k+1}}=\frac{A_k}{X_k}.$$

由①②可知对于 $n\geq2$ 的一切自然数,式(4)均成立.(证毕)

我们还可反过来将上述 n 维形式的数学模型通过构造具体的物理模型进行直观理解和应用,即

4 数学问题的物理模型

在一条直线上固定 $n+1$ 个点电荷,其中最左端的带正电的点电荷带电量为 q,右端所有点电荷均带负电,其带电量的大小分别为 $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},q_n$ 且这些点电荷相距正电荷 q 的距离分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$,如图所示,则在 q,q_1 两个点电荷连线上存在的最小场强 E 为多少?

这一问题可作为抽象的数学问题(4)的具体物理模型之一.

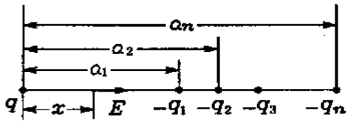


图 2

设在 q,q_1 两个点电荷连线上与 q 相距 x 处的电场为 E,直接根据点电荷激发的电场公式 $E=k\frac{q}{r^2}$ 得:

$$E=k\frac{q}{x^2}+k\frac{q_1}{(a_1-x)^2}+k\frac{q_2}{(a_2-x)^2}+\cdots+k\frac{q_n}{(a_n-x)^2} \quad (7)$$

(其中 $0<x<a_i$, $i=1,2,3,\cdots,n$).

式(7)可根据结论(5)求得最小值,但需要对式(7)进行变形,即

设 $\exists\mu_i\in(0,1)$,使得 $\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1$,则可将式(7)变形为:

$$E=\frac{q}{x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2q_i}{(\mu_ia_i-\mu_ix)^2}.$$

变形之目的旨在使得满足上式能够取得最小值时的条件以及使上式分母能够满足:

$x+\sum_{i=1}^{n}(\mu_ia_i-\mu_ix)=x\left(1-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i$(与变量 x 无关)则应用式(4)可得

$$E=\frac{q}{x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{(a_i-x)^2}=\frac{(\sqrt[3]{q})^3}{x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\sqrt[3]{\mu_i^2q_i})^3}{(\mu_ia_i-\mu_ix)^2}\geq\frac{\left(\sqrt[3]{q}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\mu_i^2q_i}\right)^3}{\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i\right)^2} \quad (8)$$

下面根据式(4)等号成立的条件确定式(8)等号成立的条件为:

$$\frac{\sqrt[3]{q}}{x}=\frac{\sqrt[3]{\mu_1^2q_1}}{\mu_1a_1-\mu_1x}=\frac{\sqrt[3]{\mu_2^2q_2}}{\mu_2a_2-\mu_2x}=\cdots=\frac{\sqrt[3]{\mu_n^2q_n}}{\mu_na_n-\mu_nx} \quad (9)$$

将上式变形并设其比值为 λ 得

$$\frac{\sqrt[3]{q}}{x}=\frac{\sqrt[3]{q_1/\mu_1}}{a_1-x}=\frac{\sqrt[3]{q_2/\mu_2}}{a_2-x}=\cdots=\frac{\sqrt[3]{q_n/\mu_n}}{a_n-x}=\lambda \quad (10)$$

由此可解出

$$x=\sqrt[3]{q}/\lambda,\ \mu_i=\frac{q_i}{(\lambda a_i-\sqrt[3]{q})^3},(i=1,2,3,\cdots,n)$$

$$\because\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{(\lambda a_i-\sqrt[3]{q})^3}=1 \quad (11)$$

方程(11)正是确定 λ 的特征方程,即 λ 是方程(11)的一个有意义的解.

所以电场 $E=\frac{q}{x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{(a_i-x)^2}$ 的最小值 $E_{\min}$ 为:

$$E_{\min}=\min\left\{\frac{q}{x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{(a_i-x)^2}\right\}=\frac{\left(\sqrt[3]{q}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\mu_i^2q_i}\right)^3}{\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i\right)^2} \quad (12)$$

其中 $x=\sqrt[3]{q}/\lambda$, $\mu_i=\frac{q_i}{(\lambda a_i-\sqrt[3]{q})^3}$,($i=1,2,3,\cdots,n$),而 λ 是方程(11)的一个解.

特别地当 $n=1$ 时,上式问题便退化为两个点电荷的情形,即式(1)的情形.

自动扶梯

单 墫

在我主编的某套奥数教材中有这样一道题:

“自动扶梯以均匀速度往上行驶着,两位性急的孩子从扶梯走上楼,男孩每分钟走 20 级梯,女孩每分钟走 15 级梯,结果男孩用了 5 分钟到达梯顶,女孩用了 6 分钟到达梯顶,问扶梯共有多少级.”

解答是 $(20-15)\times 6\times 5=150$(级).

深圳市吴乃华先生指出:“150 级,这个数据脱离实际,如按一级 0.2 米来计算,150 级将高达 $0.2\times 150=30$(米).”

吴先生批评的意见很对,一般商厦两层楼之间很少有高达 30 米的,自动扶梯也就 20 多级. 我见到的最长也是最宽的自动扶梯在香港科技大学,24 小时不停地转动,蔚为壮观. 但究竟有多少级却未曾数过. 即使超过 150 级,也只是特殊的例子(或许飞机场的平地的自动扶梯能达到 150 级). 此外,一分钟走 20 级,也太慢了. 走得快些,20 级应当只用几秒钟.

因此,题中的数据需要修改.

怎样修改呢?先采用字母表示数.

设男孩每秒钟走 a 级梯,女孩每秒钟走 b 级梯,结果男孩用了 s 秒钟,女孩用了 t 秒钟到达梯顶(其他条件不变). 问扶梯共有多少级.

本题中,应当有 $a>b$, $s<t$. 此外, a, b, s, t 尽可能取整数值,以便计算.

解法如下:

设电梯有 m 级,每秒行 n 级,则有

$$\begin{cases} m=s(n+a), & (1)\\ m=t(n+b). & (2)\end{cases}$$

消去 n,即将 $(1)\times t$ 减去 $(2)\times s$ 得

$$(t-s)m=st(a-b),$$

所以

$$m=\frac{st(a-b)}{t-s}. \tag{3}$$

希望 m 是整数,最简单的办法是令 $t-s=1$. 例如 $t=5$, $s=4$,这时

$$m=20(a-b).$$

m 不能太大. 只好也令 $a-b=1$. 例如 $a=3$, $b=2$,这样 $m=20$,即扶梯共 20 级.

又如令 $s=4$, $t=6$,则 $t-s=2$, $m=12(a-b)$,也是整数,如再取 $a=4$, $b=3$,则 $m=12$. 但这组数却是不可以取的. 因为 $as=16$,已经超过 12(除非扶梯是下行的. 虽然可以这样解释,毕竟不太符合实际).

如令 $s=4$, $t=6$, $a=3$, $b=2$,则 $m=12$. 恰好与 sa, tb 相等,这时扶梯停了.

所以在取 s, t, a, b 的数值时,不但要使 m 为整数,不很大,还要使 $m\geq sa$,读者利用(3) 不难发现这一要求等价于 $sa\geq tb$.

满足这些要求的 s, t, a, b 的值并不是很多,稍一不慎便会出现不符实际的情况,命题时千万要注意.

开心角　　利　息

教数学课的老师问:“有人借了5 000元,每月利息 1 分,两年后,能收多少利息?”

全班的同学都开始运算,只有银行家的儿子端坐不动,

“你为什么不计算呢?”

“对 1 分这样低的利息,我不感兴趣。”

……

(易　垣)