让你开窍的数学

极端原理与解题

王连笑

河南科学技术出版社

内 容 提 要

在有限个实数中一定有一个最小数，一个最大数；在无限个自然数中一定有一个最小数——这就是极端原理. 利用这个简单而又通俗的原理可以解决不少与存在性有关的数学问题和其他问题，本书列举了与极端原理和特殊化解题策略有关的89个例题，其中大部分是数学奥林匹克试题，通过这些例题全面、详尽地介绍了用极端原理解题的思维方法，本书适合中学数学爱好者(其中大部分初中生都能看懂)阅读，也可以作为中学数学教师开展数学课外活动和进行数学奥林匹克培训的资料.

让你开窍的数学

极端原理与解题

王连笑

责任编辑　袁　元

河南科学技术出版社出版

(郑州市农业路73号)

河南第一新华印刷厂印刷

全 国 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米　32开本　5.25印张　100千字

1997年1月第1版　　1998年4月第2次印刷

印数：4 001—7 000册

ISBN 7-5349-1760-3/G·447

定　价：6.30元

序

如果我们打开科学史,研究一些卓越人物成功的经验,就会发现一个重要的事实:他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳,但热爱生物,结果他成为最伟大的生物学家.反之,如果强迫他研究数学,他未必能如此成功.由此可见,兴趣与工作一致,二者形成良性循环,是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢?这固然与天赋有关,但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣,这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘,就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣,但这远远不够.如果在传授知识的同时,分析重要的数学思想,阐明发展概况,指出各种应用,使学生

不仅知其然，而且知其所以然，不仅看到定理的结论，而且了解它的演变过程，不仅看到逻辑之美，而且欣赏到形象之美、直观之美，这才是难能可贵的．在许多情况下，直观走在逻辑思维的前面，起了领路作用．直觉思维大都是顿悟的，很难把握，却极富兴趣，正是精华所在．M．克莱因写了一部大书《古今数学思想》，对数学发展的主导思想有精彩的论述，可惜篇幅太大，内容过深，不易为中学生所接受．

真正要对数学入迷，必须深入数学本身：不仅是学者，而且是作者；不仅是观众，而且是演员．他必须克服一个又一个的困难，不断地有新的发现、新的创造．其入也愈深，所见也愈奇，观前人所未观，发前人所未发，这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界．为此，他应具备很强的研究能力；而这种能力，必须从中学时代起便开始锻炼，经过长期积累，方可成为巨匠．

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用．近年来我国出版了多种数学课外读物，包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解．这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同，其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”，风格近似于美国数学教育家 G. Polya（波利亚）的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，但更切合我国的实际．本丛书共 8 本，可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广．作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平，而且大都出版过多种数学著作．因此，他们必能得心应手，写得趣味盎然，富于启发性．这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学，我们希望它能收到宗旨中确定的效果，为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996.7.

前言

在一张纸上任意画一些点，然后把这些点用直线连起来，不管这些点怎么画，一定会有一条直线，这条直线上不多不少，恰好有所画出的点中的两个. 这件事做起来并不难，然而由于这些点的画法（位置）是任意的，点的个数是任意多的（只要是大于 1 的有限个），要证明对每一种情况这条直线都存在，就成为一件难事了. 因为任何一种画法都只能是一种特殊情况，特殊情况不能代替一般情况，因而任何一种画法都不能代替证明. 这个问题就是著名的“塞尔维斯特问题”. 本书就从这个问题讲起. 历史上，人们为了寻找这个问题的证明经历了半个世纪，最后还是用极端原理解决了问题.

在有限个实数中一定有一个最大数，有一个最小数，在无限个自然数中也一定有一个最小数，这就是极端原理. 它是一个十分朴素又十

分有用的原理，应用极端原理解题，就是把解题的注意力放在所研究问题的极端情况之中（最大距离与最小距离，最大角与最小角，最长边与最短边，最大面积与最小面积，最大数与最小数，最大和与最小和，得分最多与得分最少等等），因为所涉及问题的结论往往就隐含在极端情况之中，矛盾的普遍性存在于特殊性之中，用极端原理去思考，就可以把复杂问题放到一个简单的具体的背景下去思考. 因此，考虑极端，思路就会放宽，考虑极端，思路就会来得自然.

本书选择了与极端原理有关的74个例题（1～13节）和与特殊化有关的15个例题（14、15节），其中大部分例题是国内外数学奥林匹克试题，通过对这些例题思路的分析，使题目自然而然地得到解决. 为了提高读者的思维能力，本书把重点放在“题目的解法是怎么想出来的”，“解题的入口在哪里”这样一些解题的关键问题上，为了使大部分初中学生也能读懂本书的大部分内容，这里所选的例题大部分只涉及初中知识，但是对思维能力的训练则跨越了初中和高中的界限. 作者的目标是希望通过阅读本书，对读者启发解题思路、提高思维能力和开拓数学视野能有所帮助，因此本书是作者献给中学数学爱好者和中学数学教师的一点心意. 但是由于作者水平所限，难免力不从心，一定会有不少谬误给读者带来麻烦，切望读者批评指正.

作　者

1994年5月于天津

目录

1

一个思考了半个世纪的问题

让我们看图 1.1.

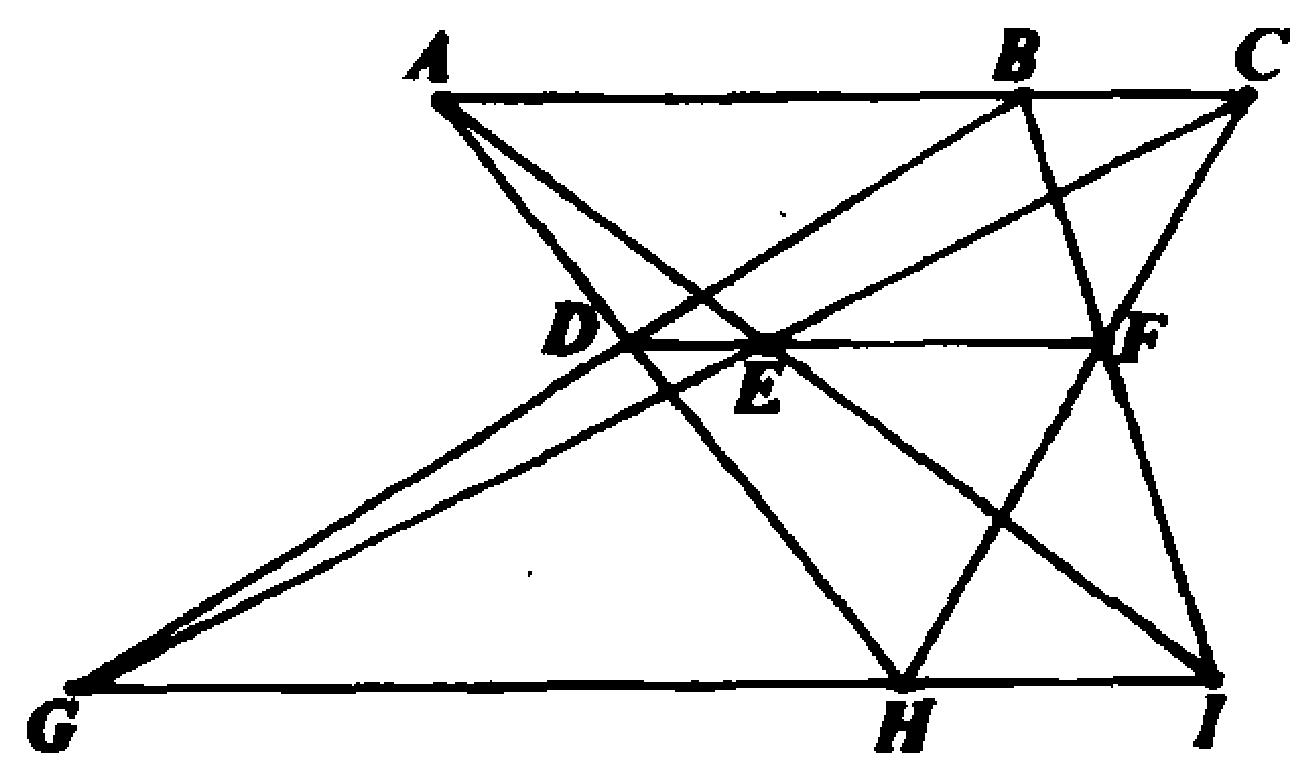

图 1.1

这个图形有些什么特点呢？图中有 9 个点

$\{A,B,C,D,E,F,G,H,I\}$

和 9 条直线

$\{AC,DF,GI,AH,AI,BG,BI,CG,CH\}$,

并且每 3 个点都在一条直线上，每一条直线上都有这 9 个点中的 3 个点.

这个图形启发我们思考这样一个问题：是不是有这样一个由有限个点组成的集合 S，这些点不全在一条直线上，并且在集合 S 中的任意两点的连线都至少包含着该集合中的另一个点.

这个问题是富有想象力的英籍犹太数学家塞尔维斯特(Sylvester，1814—1897)提出来的，为了叙述方便，我们不妨把塞尔维斯特思考过的这个集合叫做“塞尔维斯特集合”，问题就是：塞尔维斯特集合存在吗？

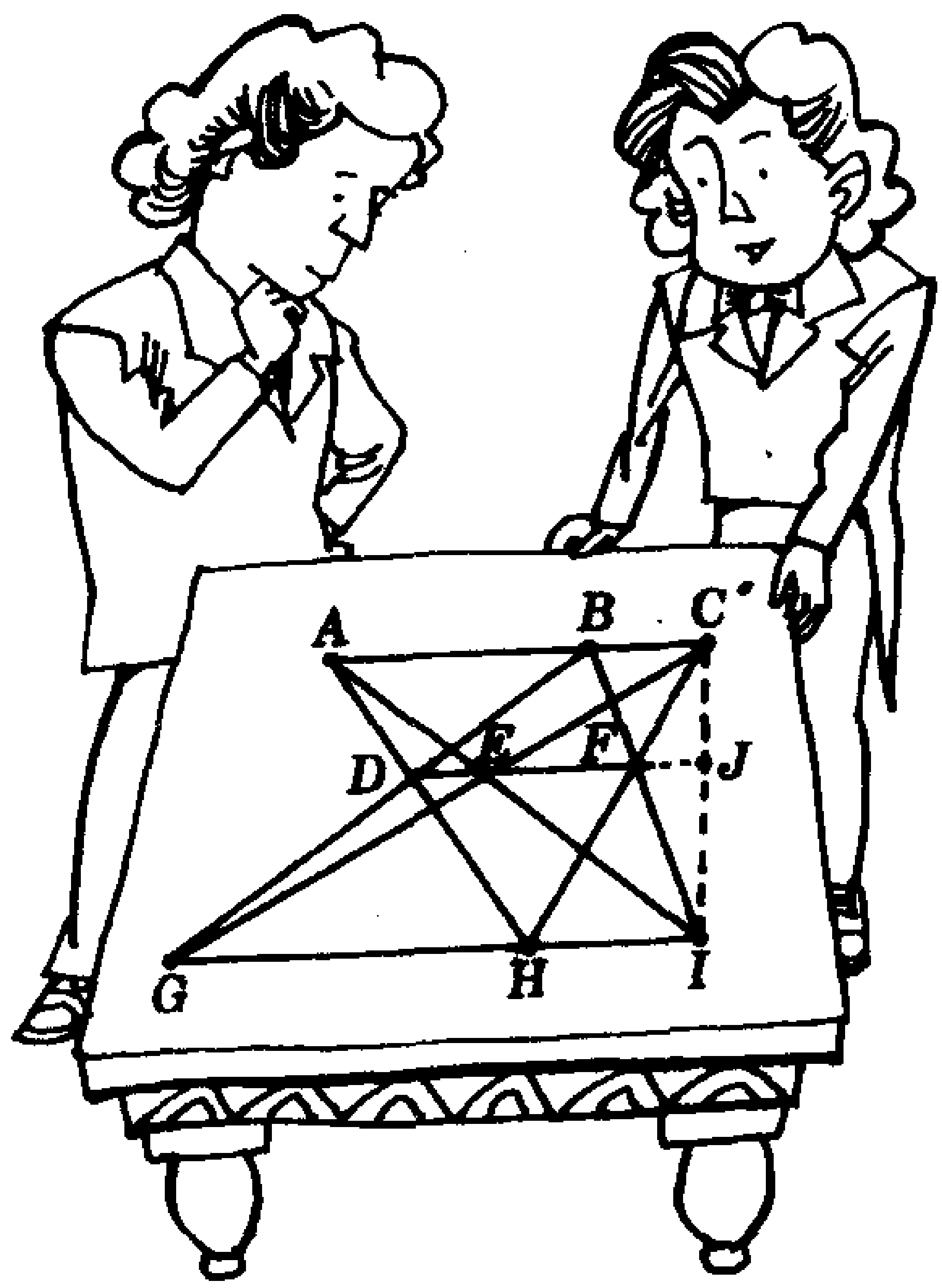

图 1.2

我们仍然研究图 1.1，因为这个图已经相当“理想”了，图中的各条直线上都有集合 S 中的 3 个点，每两个点所连的直线上都有集合 S 中的第 3 个点.

对照塞尔维斯特集合，这里就有一个细节必须注意，上面说的每两点所连直线上都有第 3 个点，这个事实是“在图中”而不是“在集合 S 中”，那么“在集合 S 中”是否有这个特点呢？

我们不妨看图 1.2，把集合 S 中的两点 C，I 连接起来，直线 CI 上面就没有集合 S 中的点，这就说明集合 S 不是塞尔

维斯特理想的集合.但不要紧,我们只须把 DF 延长与 CI 相交,设这个交点为 J. 点 J 有一定的战略意义,因为把它加进集合 S 中,虽然 S 变成了 10 个点的集合(也是有限个点,不妨叫它为 S' ,$S'=\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J\}$),但是,直线 CI 上有了第 3 个点.塞尔维斯特的要求达到了.

然而,好景不长,J 加进来后,CI 上没有点的问题解决了,新的有缺欠的点对又出现了,比如 BJ,AJ,FJ,GJ,这些直线上就没有集合 S' 中的第 3 个点.怎么办?又要添加新的具有战略意义的第 11 个点,第 12 个点,第 13 个点,….

事实上,当集合 S 中增加了新的点之后,又会出现新的有缺欠的点对,于是,上面的尝试与思考不能不使我们怀疑"塞尔维斯特集合"的存在性.

如果把一条仅有集合 S 中两个点的直线叫做"平凡直线"的话,那么,塞尔维斯特集合若不存在,便等价于下述命题成立:

对任意一个至少有两个点的有限点集 S,它的所有点不全在一条直线上,则一定存在一条平凡直线.

当然,这个问题的另一种等价形式(它的逆否命题)就是:

如果集合 S 是由有限个点组成的,并且由 S 中的点决定的每一条直线上都至少有 S 中的 3 个点(即平凡直线不存在),则 S 中的点全都位于同一条直线上.

塞尔维斯特提出这个问题的时间是在 1893 年,这个问题被人们思考了(也许是忽视了)半个世纪,直到 50 年之后的 1933 年才由数学家 T. 伽莱(Gallai)给出了一个复杂的证明.

当然，人们也期待着简单的证明，数学家L. M. 凯里(Kelly)不负众望，给出了一个十分简单又十分通俗的证法，这个证明连每个初中学生都能看懂. 下面我们就来介绍凯里的这个证明.

设平面上点的集合S中有n个点$P_1,P_2,\cdots,P_n$，$(n\geqslant 2)$，并且这n个点不全在同一条直线上，我们证明一定存在一条直线(这条直线即为平凡直线)，在它的上面仅有点集S中的两个点.

由于n个点$P_1,P_2,\cdots,P_n$不全在同一条直线上，这样，这n个点中的任何一对点所连的直线都不会包含这n个点的全部，因而至少有一个点不在这条直线上.

现在我们考虑这n个点中每两点所连接的直线，这样的直线只能有有限条，每一条这样的直线和不在这条直线上的一个点组成一个“线点小组”，这种线点小组也只能有有限个，对于每一个线点小组，我们作出这个点到该直线的垂线，得到这个点到该直线的距离，显然，每一个线点小组都伴随着一个“点线距离”，这样的距离仍然是有限个.

让我们的思路转向这有限个“点线距离”，这有限个距离是有限个正数，而有限个正数中一定有一个最小的正数，设这个最小正数为d_1.(注意，在这里我们之所以不厌其烦地说到“有限”这个词，是因为“有限”是一个关键，如果是无限个正实数，就不一定有最小的正数.)

假设d_1表示的是点P_1到点P_2和P_3所决定的直线的距离(图1.3). 直线P_2P_3是距离出现在极端情况下的一条直

线，而我们的目标（寻找平凡直线）就在这种情况下出现了——事实上，直线 P_2P_3 就是一条平凡直线，即在这条直线上不再有已知 n 个点中的第 3 个点. 因此，问题就归结为证明直线 P_2P_3 是一条平凡直线.

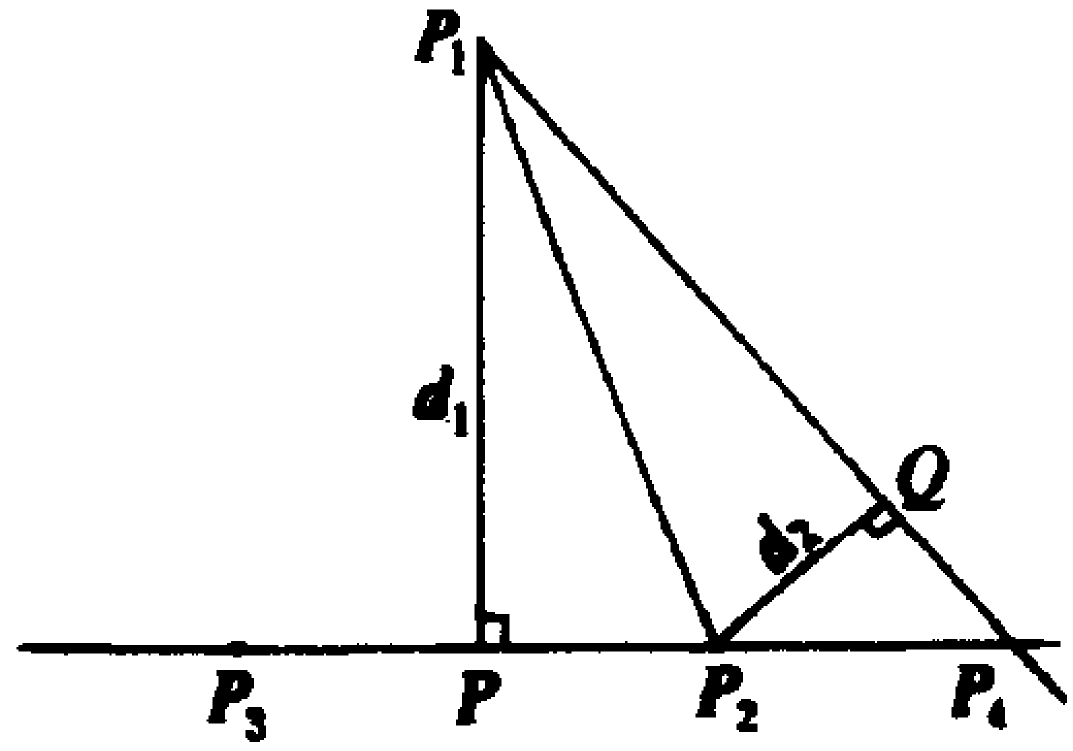

图 1.3

假设在直线 P_2P_3 上不是只有 S 中的两个点 P_2, P_3，而是至少还有一个点，设这个点为 P_4.

我们作 $P_1P \perp$ 直线 P_2P_3，P 为垂足，则 $P_1P = d_1$.

由于在直线 P_2P_3 上至少有 S 中的 3 个点 P_2, P_3, P_4，则必有两点位于该直线 P 点的同一侧，不妨设点 P_2 和 P_4 在点 P 的同一侧，且 P_2 位于 P 和 P_4 之间（当然 P_2 也可能与点 P 重合），即

$$P_2P_4 \leqslant PP_4.$$

注意到点 P_2 与直线 P_1P_4 构成一个"线点小组"，考虑这个小组伴随的"点线距离"，为此作 $P_2Q \perp P_1P_4$，垂足为 Q，设距离 P_2Q 为 d_2. 由 d_1 的最小性可得

$$d_1 \leqslant d_2. \tag{1.1}$$

然而，另一方面，对于直角三角形 P_4QP_2 与直角三角形 P_4PP_1，由于 $\angle QP_4P_2 = \angle PP_4P_1$，所以

$$\triangle P_4QP_2 \backsim \triangle P_4PP_1,$$

$$\frac{P_2Q}{P_1P}=\frac{P_2P_4}{P_1P_4}<\frac{P_2P_4}{PP_4}\leqslant 1.$$

而 $P_2Q=d_2, P_1P=d_1$，于是有

$$d_1>d_2. \tag{1.2}$$

这就导致了(1.1)与(1.2)的矛盾，这个矛盾表明，在直线 P_2P_3 上还有第三点 P_4 的假设是错误的，即直线 P_2P_3 上只有集合 S 中的两个点 P_2, P_3，因而它是一条平凡直线.

大家从上面的证明中不难看出，这个证明并不复杂，也很易懂，但是人们对这个问题解法的思考竟长达半个世纪. 那么，使塞尔维斯特问题得以解决的"法宝"是什么呢?大家从证明中可以发现，只要找出点线距离最小的那个"线点小组"，那么这个小组中的那条直线就是我们要寻找的平凡直线，目标在极端情况下出现，而"点线距离最小"这个极端值的存在性是不容置疑的，正是这个极端值在证明中起到了举足轻重的作用，真是"踏破铁鞋五十年，解决原来靠极端".

2

什么是极端原理

塞尔维斯特问题的解决依靠了一个十分朴素的原理:在有限个正数中一定有一个最小的正数,这便是极端原理的内容之一.极端原理是一个极为简单,极为重要,却又极易被人们忽视的事实.

极端原理的具体内容如下:

原理Ⅰ 设 M 是由自然数组成的集合,不论 M 是由全体自然数组成的,还是由一部分自然数组成的,即不论 M 是由无穷多个自然数组成的,还是由有限个自然数组成的,则 M 中必有最小数.

原理Ⅱ 设 T 是由有限个实数组成的非空集合,则 T 中必有最大数,也必有最小数.

这两个原理都是非常明显的事实,当然,并

不是任何一个数集都有这种极端元素的，例如：

一个由无穷个有理数组成的集合，可能既没有最大数，也没有最小数；

一个由无穷个无理数组成的集合，可能既没有最大数，也没有最小数；

一个由无穷个整数组成的集合，可能既没有最大数，也没有最小数.

上面的两个原理十分简单，却给我们解数学题提供了十分有用的工具和原则. 这是因为数的集合中的这种极端元素往往具有特殊的地位，数学上的许多性质往往会通过一些数量上达到极端值的对象反映出来. 因此在研究某些数学问题时，就可以对题设中提供的集合，考察其中处于“极端”情况的元素，从这些极端元素出发来思考，把这些极端元素反映出来的性质研究透，问题就会顺理成章地得以解决. 比如，数集中的最大数或最小数，包含最多元素的集合或最少元素的集合，点与点之间、点与直线之间的最大距离或最小距离，最大角或最小角，最长边或最短边，最大面积或最小面积，最大周长或最小周长，若干个数的最大和或最小和，方程的最大整数解或最小整数解，比赛中得分最多或得分最少的队员等等，只要这些极端元素存在，在解题中就可以考虑它们，使思路集中. 这种用极端原理解题的思考方法，对于解决一些数学问题，特别是解一些存在性问题(因为极端原理即反映极端元素存在这一特性)很起作用.

3

让思路来得自然

1990 年全国高中数学联合竞赛第二试第三题是笔者编拟的．题目是这样的：

某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 c_i 名学生($1 \leqslant c_i \leqslant 39, 1 \leqslant i \leqslant n$)到体育馆观看球赛，全部学生的总数为 $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1990$(这是 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1990$ 的简写)．看台上每一横排有 199 个座位，要求同一学校的学生必须坐在同一排，问体育馆最少要安排多少横排才能保证全部学生都能坐下？

作为全国高中联赛的最后一道题，当然有一定的难度，但是这个题目是不是难不可攀呢？其实并不是这样，只要你设身处地地去思考，解这个题目的思路就会来得自然．现在让我们一

起到体育馆去，身临其境地解决这个问题.

图 3.1

假如你是体育馆的负责人，假如这 n 所中学的学生观看比赛的座位由你来调度，你将怎样去做呢？

这个题目有三个条件：第一个条件是每校学生不超过 39 人，总人数为 1990 人；第二个条件是看台上每一横排有 199 个座位；第三个条件是同一个学校的学生必须坐在同一横排，而不能分坐在两个横排. 此题有一个目标：安排的横排越少越好.

问题在于要按照题目的条件达到规定的目标.

要求明确了，现在该轮到你操作了，你的思维能力和管理能力将得到考验.

显然，你的第一个念头是，每一横排有 199 个座位，总共又有 1990 人，如果每排都能坐满学生，这时只需要 10 排就够了. 这当然是最好不过的事情，然而这只能是一个美好的愿

望，实际情况并不会那么称心如意，那么理想，因为每所学校的人数在 1 至 39 之间都是有可能的，不可能每一排都凑得那么准，恰好有几个学校的人数之和是 199 人. 这就是说，一定有一些排会有空位，10 排座位当然不够. 我们的调度工作就是在这种具有人数随意性的情况下开展的.

首先安排第 1 排的学生. 从安排第 1 排学生开始就要多为以后着想，就要有“后顾之忧”，为了使所安排的横排最少，就希望让学生尽量往前几排坐，因此第 1 排的学生应该“尽量”地多，此排的空位应“尽量”地少. 这件事能不能做到呢？由于学校只有 n 个，即有限个，而每所学校的学生数也是有限个，把这 n 个数中的任意几个加在一起，它们的和也只有有限个（事实上有 2^n-1 个）. 在这些和中，小于 199 的也是有限个. 因为一排看台上有 199 个座位，我们就把思路集中在小于 199 的那有限个和数中，这些和数中必有一个最大的（极端原理！），设这个最大的和为

$$c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_k}.$$

我们就把第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 所中学（共 k 所）学生安排在第 1 排，这时第 1 排的空位数

$$x_1=199-(c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_k})$$

就达到最小.

如果第 1 排能够坐满学生，则 $x_1=0$，如果第一排没能坐满学生，则 $x_1>0$.

这时剩下了 $n-k$ 所中学，设其中任一所学校的学生数为

$c_j(j\neq i_1,i_2,\cdots,i_k)$，显然有

$$c_j\geqslant x_1+1.$$

因为不然的话，如果 $c_j\leqslant x_1$，就可以在第一排再安排一所学校的学生就座.

我们可以估计出第 1 排的空位数. 可以证明 $x_1\leqslant 32$.

事实上，如果 $x_1\geqslant 33$，即第 1 排的空位数超过 32 个，那么剩下的 $n-k$ 所学校的学生数都会超过 33，即 $c_j\geqslant 34$.

这时，我们把其中 5 所学校的学生比如 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 安排在同一排，就有

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5\geqslant 5\times 34=170.$$

又因为每所学校的人数不超过 39 人，则

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5\leqslant 5\times 39=195<199.$$

这说明，五所学校的学生能够安排在同一排，而这一排的空位数不超过 199－170＝29 个，而第 1 排的空位数按假设为 $x_1\geqslant 33$，$29<33$，因此这一排的空位数少于第 1 排的空位数，与第 1 排安排的人数最多、空位数最少矛盾. 所以，如果我们在第 1 排安排的学生"尽量"地多，则空位数不会超过 32.

好了，第 1 排已经安排完毕，我们可以安排第 2 排的学生了. 对第 2 排，我们的思路仍然是希望该排学生安排得"尽量"多，空位"尽量"少. 当然，着眼点是剩下的 $n-k$ 所中学，仍从 $n-k$ 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k}$ 中寻找某些数，使其和最接近 199，设和 $c_{j_1}+c_{j_2}+\cdots+c_{j_t}$ 最接近 199，由极端原理，这是能够做到的. 于是我们把第 $j_1,j_2,\cdots,j_t$ 所(共 t 所)中学的学生安排在第 2 排. 这一排的空位数设为 x_2，则

$$x_2=199-(c_{j_1}+c_{j_2}+\cdots+c_{j_t}).$$

由同样的理由可得

$$x_2\leqslant 32.$$

这样，第 2 排学生又安排完毕，剩下的空位数也不超过 32.

对于第 3 排，第 4 排，…，第 i 排，都可以按照前两排的思路去安排学生，并且令 x_i 为第 i 排学生的空位数. 显然，只要剩下的学校数不少于 5，就一定有空位数

$$x_i\leqslant 32.$$

照以上这样安排，如果所有的 x_i 都等于 0，则用 10 排就可安排完；如果有一个 $x_i\neq 0$，即有一排出现空位，则至少需要 11 排，如果 11 排能够安排完，当然只需 11 排就够了.

如果安排 11 排之后还剩下一些学校的学生，这时可能有两种情况：

一种情况是剩下的学校不足 5 所，由于每所学校的学生不超过 39 人，而 $4\times 39<199$，则把剩下的学校的学生安排在第 12 排就可以了，在这种情况下，全部 n 所学校的 1990 名学生用 12 排就可安排完毕.

另一种情况是剩下的学校不少于 5 所，这时第 11 排的空位数仍然满足 $x_{11}\leqslant 32$.

我们研究一下已经坐好的共 11 排的座位现状，这 11 排剩下的空位数不会超过 $11\times 32=352$，即

$$x_1+x_2+\cdots+x_{11}\leqslant 11\times 32=352.$$

则已经坐好的学生数不少于

$$11\times 199-352=1837.$$

因为学生的总数为 1990，因此没有座位的学生数不超过

$$1990-1837=153.$$

把他们安排在第 12 排，就可以把 1990 名学生全部安排好. 在这种情况下，仍然至少需要 12 排才可以安排完.

总之，最少需要 12 排就可以全部按要求安排这 n 所中学的 1990 名学生.

那么，12 排是不是最少的排数呢？比如 11 排行不行呢？我们还可以研究一下.

由于 11 排共有 $11\times 199=2189$ 个座位，而要安排 1990 名学生在 11 排内全部就座，只容许有 199 个空位，为了安排下全部学生，每排空位平均不能超过 19 个. 我们考虑这样一种情况，有 80 所学校($n=80$)，其中一所学校有 15 名学生，另外 79 所学校都各有 25 名学生，总人数恰好为

$$79\times 25+15=1990.$$

这 80 所学校符合题目的条件，我们在第 1 排尽量安排，至多可安排 8 所学校，其中 7 所学校各 25 人，1 所学校 15 人，即 $25\times 7+15=190$ 人，而其余的 10 排每排只能安排 7 所学校，即每排 $25\times 7=175$ 人，这时 11 排共安排了

$$175\times 10+190=1940(\text{人}).$$

因此 11 排不能安排这 80 所学校的 1990 名学生，还有两所学校共 50 人还没有座位，至少还需要一排.

所以本题的最后结论是最少需要 12 横排.

对这个题目的解法叙述得可能啰嗦一些，但是，如果你身

临其境，亲自动手，我想你也会这样想，这样做的. 上面的慢镜头正是一种解这个题目的合情合理的自然想法的再现.

解数学题当然希望思路越自然越好. 所谓自然，就是题目本来该怎么想，就怎么去想，该怎么做，就怎么去做. 本题的自然想法就是让学生尽量往第 1 排就座(在不违反一个学校的学生不能分开的前提下)，再尽量往第 2 排坐，如此下去，就能使看台排数最少这个目标得以实现. 因为人数及人数之和都是有限个，因此必然有接近 199 的"极端和"出现，极端原理保证了解题的顺利进行，其所以能够在 12 排的看台上安排妥这些学生，也是因为每一横排的学生安排也都在"走极端". 有了这个解题思路，剩下的工作只是对空位数的估计了，而这些计算并不是一件难事.

下面我们再看一个题目，这个题目与上面的题目形异实同，解题思路也完全相同，把它展现给读者，只是希望重要的精彩的镜头能够再现，这样会使读者对解这种题的自然思路更为熟悉.

题目是这样的：一批货物，分成了大小不同的许多包，其中每包连皮重量不超过 350 公斤，这批货物连皮总重量为 13500 公斤，现在要用一辆载重量为 1500 公斤的汽车来运这批货物，假如每次都能满载的话，那么分 9 次就可以运完，可是货物必须成包地装到车上去，因此不一定每次都能满载. 证明：有一个办法至多分 11 次就可把这批货物全部运完.

现在你该扮演车辆调度员的角色了.

先装第 1 车. 我们从许多包货物中挑选出一组装上车，使

得这一组各包的总重量最接近 1500 公斤，由于这批货物一共只有有限多包，因此这个最佳装配方法是存在的(极端原理!). 设第 1 车的货物还差 a_1 公斤就能装满 1500 公斤，即第 1 车运走的货物为 $1500-a_1$ 公斤.

第 2 次，我们从余下的许多货物中又挑选出一组来，使其总重量最接近 1500 公斤(又是极端原理)，把这批货物装上第 2 车. 设第 2 车运走的货物为 $1500-a_2$ 公斤，显然有

$$a_2 \geqslant a_1.$$

按照这个方法把 $1500-a_3, 1500-a_4, \cdots, 1500-a_{11}$ 公斤货物分别装入第 3 车，第 4 车，…，第 11 车，且满足

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{11}. \tag{3.1}$$

这时共运走了

$$(1500-a_1)+(1500-a_2)+\cdots+(1500-a_{11})$$
$$=16500-(a_1+a_2+\cdots+a_{11})$$

公斤.

假如 11 次还没有把货物运完，我们研究还有哪些货物没有运走.

这时我们可以断定，余下来的货物每包重量都大于 a_{11}. 不然的话，若有的包货物重量小于或等于 a_{11}，则第 11 车至少还可多带一包货物，因此我们有

$$13500-[16500-(a_1+a_2+\cdots+a_{11})]>a_{11},$$

即
$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}>3000,$$

再利用(3.1)可得

$$3000<a_1+a_2+\cdots+a_{10}\leqslant 10a_{10},$$

因而 $$a_{10}>300.$$

这就是说，在第10次装车以后，车站上余下的货物每包重量都大于300公斤. 不然的话，至少可以在第10车上多带一包货物而不致超重.

因此，如果11次还没有把货物运完，那么第11车装走的货物每包都超过300公斤. 这时第11车上装的货物至少有4包，这是因为如果只装3包的话，由于每包的重量不超过350公斤，而 $3\times350=1050$ 公斤，$1500-1050=450$ 公斤，即车上装了3包之后，完全可以再装1包；又因为每包都超过300公斤，所以第11车装的货物超过了1200公斤.

由(3.1)，前面10次运走的货物也都超过了1200公斤，这时，11次共运走的货物超过了

$$1200\times11=13200$$

公斤. 如果11次没有运完，还会有余货没有装车，因为 $a_{11}\geqslant a_{10}>300$，则没装车的货物至少还有300公斤，这时货物的总重量超过了

$$13200+300=13500$$

公斤，而我们的货物总共只有13500公斤，这就导致了矛盾. 这个矛盾表明11次没有运完的假设是不可能的，即至多分11次就可把这批货物全部运完.

这个题目的解题过程与上面那道将1990名学生安排在12排看台的题目的叙述略有不同，但是大家可以看出，解题的依据与思路是完全相同的，其重要与精彩之处就是依据极端原理，寻找最接近题目要求的极端值(第一题是最接近199

的极端和，第二题是最接近 1500 的极端和），如果把握了这个要领，我们的解法完全可以简化. 仍以第二题为例，还可以获得下面的简单解法（其灵魂依然是极端原理）.

让我们减轻一下车辆调度员的脑力劳动.

首先进行第 1 次装货. 我们尽量往车上装，直到不能再装为止，什么叫不能再装了呢？就是如果再装上 1 包就要超过 1500 公斤，我们就把要超载的这一包放在汽车旁边.

再照此办理，为第 2 车，第 3 车，…，第 8 车装货，直到装完 8 辆汽车为止. 这时已经装上的货物连同每辆汽车旁边所放货物的总重量已超过

$$1500\times 8=12000$$

公斤，因此其他剩下的货物不超过 $13500-12000=1500$ 公斤，这时可以把剩下的货物交给第 9 辆汽车运走.

在这种情况下，剩下的货物只有前 8 次放在汽车旁边的 8 包货物，我们把剩下的这 8 包货物分成两组，每组 4 包，其重量均不超过 $350\times 4=1400$ 公斤，因此可以用两辆汽车把剩下的 8 包运走.

总之，至多 11 次就可把 13500 公斤货物全部运走.

对于第一个题目也可照此办理，请读者自己完成.

4

考虑两点距离的极端情况

让我们再回到第一节讲过的塞尔维斯特问题，解决这个问题用到了“在一个有限点组成的集合中，每两点间的距离也是有限个，因而有一个最小距离”这样一个原理，实际上，在有限个点中，任意两点的距离中必有一个最大距离和一个最小距离. 下面的几个例题就是从这样一种极端情况开始思考的.

正三角形，即三边都相等的三角形是一种最常见的图形，但是你是否考虑过这样一个问题：平面上是否有一个有限点集，在这个集合中的每三点都能组成一个正三角形的顶点.

答案是明显的，由正三角形的三个顶点组成的点集就具有这个性质. 于是问题出现了：如果平面上有 4 个点，5 个点，6 个点，…，这些点

能否满足每三点都能构成一个正三角形的顶点呢？也就是说具有这种性质的点集最多有多少个点呢？在 1993 年德国数学奥林匹克中就有这样一道试题：

例 4.1 平面上有限点集 M 满足：对 M 中的任意两点 A,B，必存在第三点 C，使 $\triangle ABC$ 为一正三角形. 求 M 中元素个数的最大值.

解决这个问题的最自然的想法是先从 M 中找两点 A,B，作一个正三角形 ABC（由题目的条件可知，C 点也是 M 中的点），然后再从 M 中的另外两点，再作一个正三角形（第三个点也是 M 中的点），直到不能再作正三角形为止.

当然，我们思考问题不能漫无边际，最好是先把符合题目要求的点集中起来，因而也就必须为这些点划定一个范围. 这时，我们自然会想到应该先找出 M 中的点组成的一个最大的正三角形，然后再研究其他点（如果有的话）所在的位置（这些点事实上都在那个最大的正三角形的范围之内），于是，两点间的最大距离登场了.

下面我们就来解这个题目.

解 考虑 M 中每两点之间的距离，这些距离是有限个正数，因此必有一个最大的，设 A 和 B 是距离最大的两点.

由题设，存在点 C，使 $\triangle ABC$ 为正三角形.

分别以 A,B,C 为圆心，以 AB 为半径画弧，得到一个曲边三角形 ABC，如图 4.1 所示.

因为 $AB=BC=CA$ 是 M 中每两点之间的距离最大者，所以 M 中其他各点与 A, B, C 的距离均不会大于 AB，因此

M 中的所有点都在图 4.1 的曲边三角形 ABC 中.

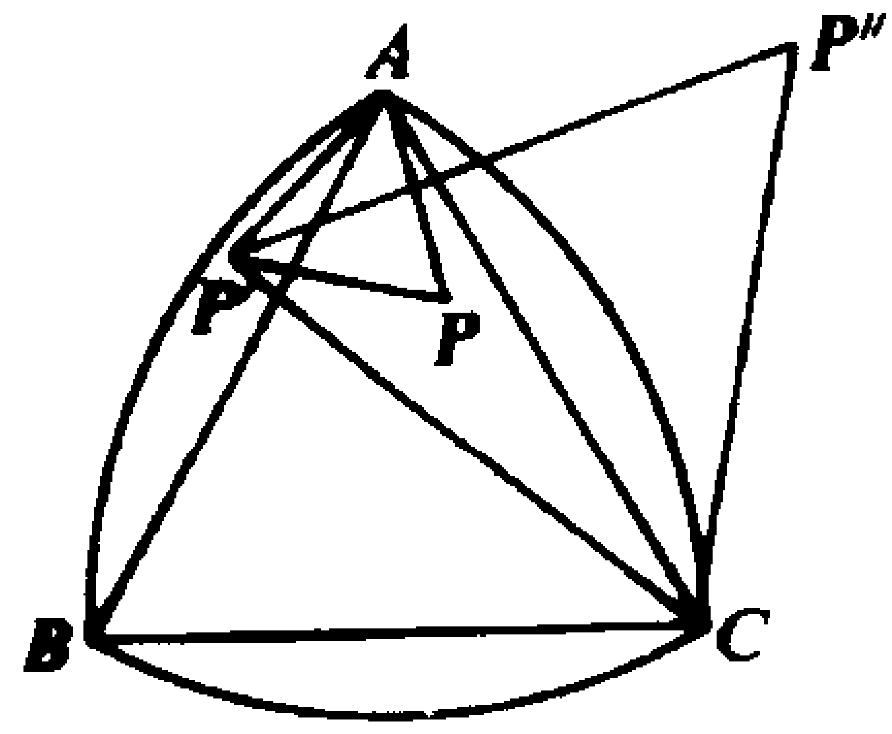

图 4.1

设集合 M 还有一个不同于 A,B,C 三点的第四点 P. 我们考虑点 P 的位置.

(1) 如果点 P 在$\triangle ABC$ 的内部或边界上(图 4.1),则由题设,对两点 A,P 还有第三点 P',使$\triangle APP'$ 为正三角形. 由$\angle BAP\leqslant 60°$,则点 P' 不可能在$\triangle ABC$ 内部,而只能在某一弓形弧的内部或边界上.

我们把点 C 和 P' 连结起来,对两点 C,P' 还有第三点 P'',使$\triangle CP'P''$为正三角形.

如果点 P''与点 A 都在直线 CP' 的同侧,考虑$\triangle CP''A$ 和$\triangle CP'B$,由于

$$CP''=CP',CA=CB,$$

$$\angle P''CA=\angle P'CB=60°-\angle ACP',$$

则
$$\triangle CP''A\cong\triangle CP'B.$$

从而
$$\angle P''AC=\angle P'BC=\angle P'BA+60°>60°.$$

这时 P''就在曲边三角形的外面,$P''B>AB$,即 P''与 B 的距离大于 A 与 B 的距离,这与 A 和 B 是 M 中距离最大的两点矛盾.

如果点 P''与点 B 均在直线 CP' 的同侧,同样可以推出矛盾.

这就说明,在点集 M 中不同于 A,B,C 的第四点 P 不可

能出现在$\triangle ABC$的内部或边界上.

(2)如果点P位于某一个弓形弧的内部或边界上,这时P就相当于(1)中的P',这样以点P以及点P所在弓形弧所对的点为两顶点作正三角形,由(1)的证明,点P'即在曲边三角形之外,仍会导致矛盾.因此,M中的第四点P是不可能存在的.

由以上的论证可以知道,我们所求的M中点的个数的最大值是3.

我们把例4.1的图形改一下,把正三角形改为直角三角形,就成为下面的一个题目:

例4.2 平面上一个有限点集M,其中任意三点都是直角三角形的顶点,求M中点的个数的最大值.

和例4.1的思路一样,我们还是要把满足题目要求的点界定在某一个范围之内,显然,距离最大的两点会有较大的管辖范围,此题还需从考虑最大距离入手.

解 设集合M有n个点.我们要确定n的最大值.

由于集合M中的点只有有限个,所以必有两点的距离最大,设这两点为A,B.

我们考虑M中其他的点.根据题设,M中的任意三点都是直角三角形的顶点,因此M中的每一点(不同于A,B)与A,B两点都能构成直角三角形的顶点.因而M中的所有点都在以AB为直径的圆周上.

现在考察以AB为直径的一个半圆.如果在这个半圆周上有两个异于A,B的点C和D(图4.2),容易看出,$\triangle ABD$

和 $\triangle ABC$ 均为直角三角形，但 $\triangle ACD$ 不是直角三角形，因此，在以 AB 为直径的一个半圆上，至多只有集合 M 中一个不同于 A,B 的点. 由于以 AB 为直径可以作出两个半圆，于是，在以 AB 为直径的圆周上至多有集合 M 中的四个点(包括 A,B)，因而 $n\leqslant 4$.

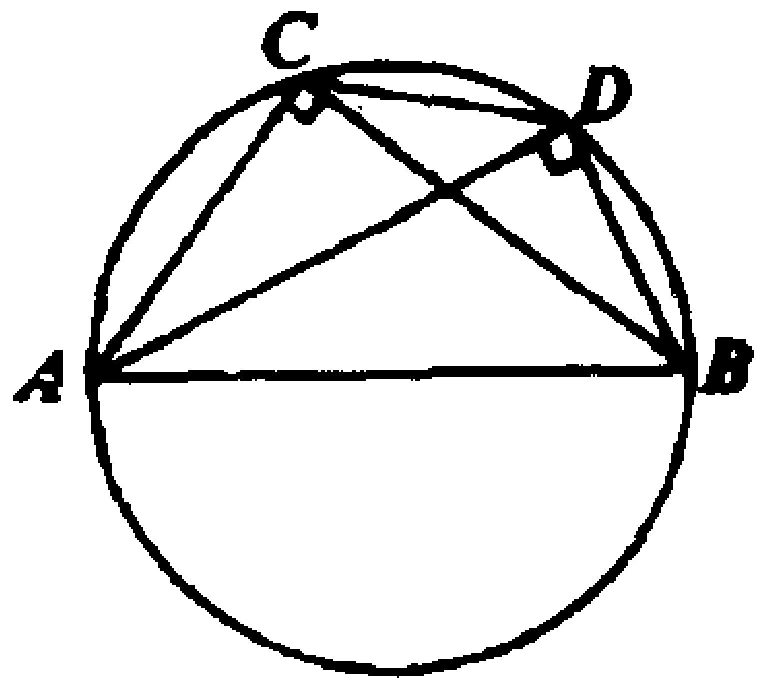

图 4.2

事实上我们可以得到一个 $n=4$ 的点集，比如正方形的四个顶点构成的集合 M 就符合要求，如图 4.3 所示，A,B,C,D 中的任意三点均能构成直角三角形的顶点.

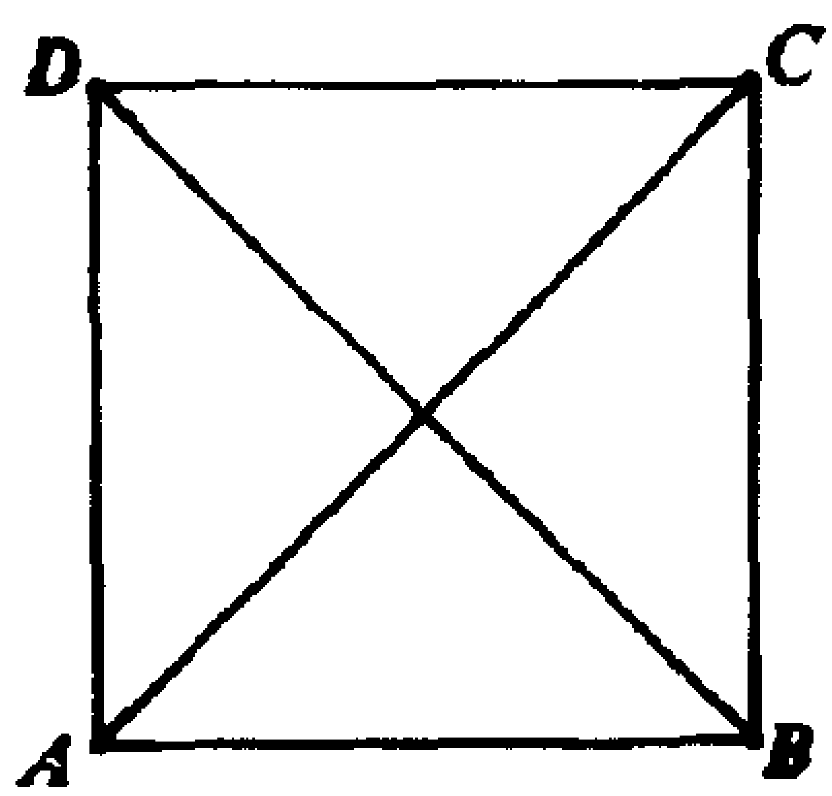

图 4.3

再把上面两个例题中的点集改为这样的要求：任意三点中必有一点为另外两点所连线段的中点，这样的点集又有什么特点呢？请看例 4.3.

例 4.3 在平面上给出某个点集 M，使得 M 中每个点都是集合 M 中某两点所连线段的中点. 证明：集合 M 中一定有无穷多个点.

这个题目与前两个题目不同，前两个题目都是事先知道 M 是由有限点组成的集合，而这个题目不仅没有给出集合 M 是有限点集，反而要证明集合 M 是无穷点集. 对于证明结论有无穷多个元素的题目最好采用反证法，既先假定这个集合

只有有限个元素，比如 n 个，经过我们的推理，又出现了第 $n+1$ 个元素，这就说明原来假设只有有限个元素是错误的. 因为如果有 n 个就会出现第 $n+1$ 个，如果有 $n+1$ 个就会出现第 $n+2$ 个，如果有 $n+2$ 个就会出现第 $n+3$ 个，这个过程可以无限延续下去，因而有无穷多个. 下面我们就用这个办法证明例 4.3.

证 假设集合 M 只有有限个点. 这时，在 M 中一定存在着距离最大的两点 A 和 B.

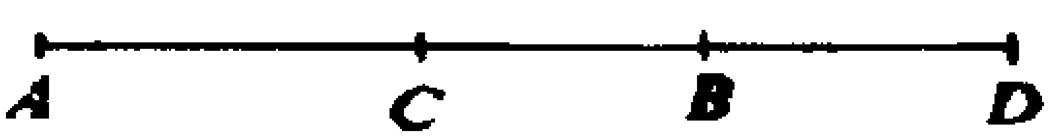

图 4.4

依题设，点 B 一定是某个线段 CD 的中点，其中 C 和 D 都是集合 M 中的点.

如果点 C 在直线 AB 上，则 D 也应在直线 AB 上，设 A 和 C 在 B 的同侧，则 D 和 A 在 B 的异侧，这时有 $AD>AB$，与 AB 最大相矛盾.

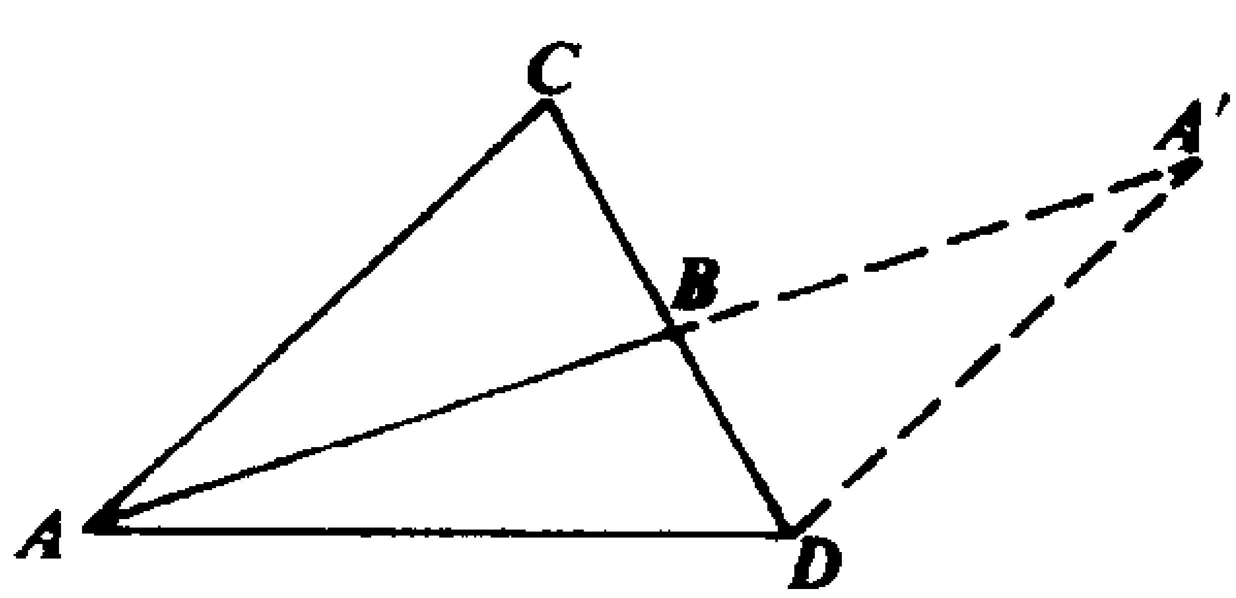

图 4.5

如果 C 和 D 都不在直线 AB 上，延长 AB 到 A'，使 $BA'=BA$，连结 $A'D$. 因为 B 是 CD 的中点，$BA'=BA$，则可证得 $A'D=AC$. 因而有

$$AD+AC=AD+A'D>AA'=2AB.$$

这就说明，AD 和 AC 之中必有一个大于 AB，不妨设 $AC>AB$，从而与 AB 最大相矛盾.

综上所述，集合 M 只有有限个点的假设不能成立，因此

M 有无穷多个点.

下面的例 4.4 还是一个有关线段中点的问题，不过与例 4.3 不同的是，这些中点并不一定是集合 M 中的点，为此我们可以对集合 M 中每两点连线的中点的个数给出一个估计.

例 4.4 M 是平面上 n 个($n\geqslant 2$)不同点的集合，确定并证明：以这些点为端点的线段，至少有多少个不同的中点.

解这个题目时，我们仍然希望能把所有这些中点“集中”在一个范围之内，以便思考起来方便，显然，中点所在的区域与最大距离有关.

解 设不同的中点最少有 k 个. 在已知 n 个点中取相距最远的两个点，设这两点为 A，B.

考虑点 A 与除 B 之外的其余 $n-2$ 个点所连的线段共确定了 $n-2$ 个不同的中点，由于 A 和 B 相距最远，从而这 $n-2$ 个不同的中点都位于以 A 为圆心，以 $\frac{1}{2}AB$ 为半径的圆内或圆周上(图 4.6).

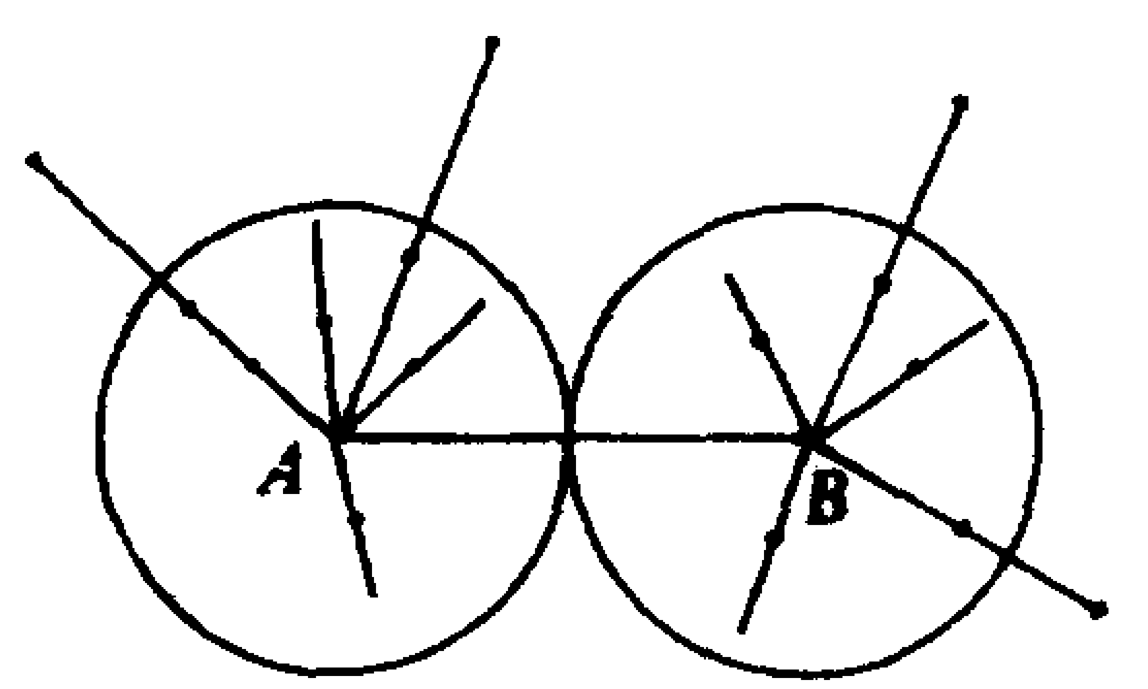

图 4.6

同样，点 B 与除 A 之外的其余 $n-2$ 个点所连的线段共确定了 $n-2$ 个不同的中点，这 $n-2$ 个不同的中点都位于以 B 为圆心，以 $\frac{1}{2}AB$ 为半径的圆内或圆周上(图 4.6).

这样得到的

$$(n-2)+(n-2)=2n-4$$

个中点互不相同.

此外，上述两圆恰有一个公共点，即 AB 的中点. 这个中点与前面所说的 $2n-4$ 个中点也不重合，因而至少有

$$(2n-4)+1=2n-3$$

个不同的中点.

因此，$k\geqslant 2n-3$.

另外，将这 n 个点以相同的间隔分布在一条直线上(比如在数轴上，与 $1,2,3\cdots,n$ 所对应的点)，可以计算出来，所有的中点恰为 $2n-3$ 个(如数轴上，$1,2,\cdots,n$ 的中点为 $\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\cdots,n-1,\frac{2n-1}{2}$，共 $2n-3$ 个中点)，因此又有

$$k\leqslant 2n-3.$$

综上所述可得 $k=2n-3$.

在 1991 年亚洲太平洋地区数学竞赛上，令 $n=997$，编拟了一道带有一些趣味性的试题，题目是这样的：

平面上已给 997 个点，将连结每两点的线段中点染成红色. 证明至少有 1991 个红点，能否找到恰有 1991 个红点的点.

鉴于 $1991=2\times 997-3$，所以亚太地区的这道竞赛题就是例 4.4 的一个特殊情形.

以上四个例题都是从最大距离这一极端情况出发展开思路的，但有些问题的解决又需要从最小距离这一极端情况出发才能奏效，下面的两个例子很能说明问题.

例 4.5 在一块平地上有 n 个人，每个人到其他人的距

离均不相同，每人都有一把水枪．当发出信号后，每人用水枪击中距离他最近的人．证明：当 n 为奇数时，至少有 1 个人的身上是干的．

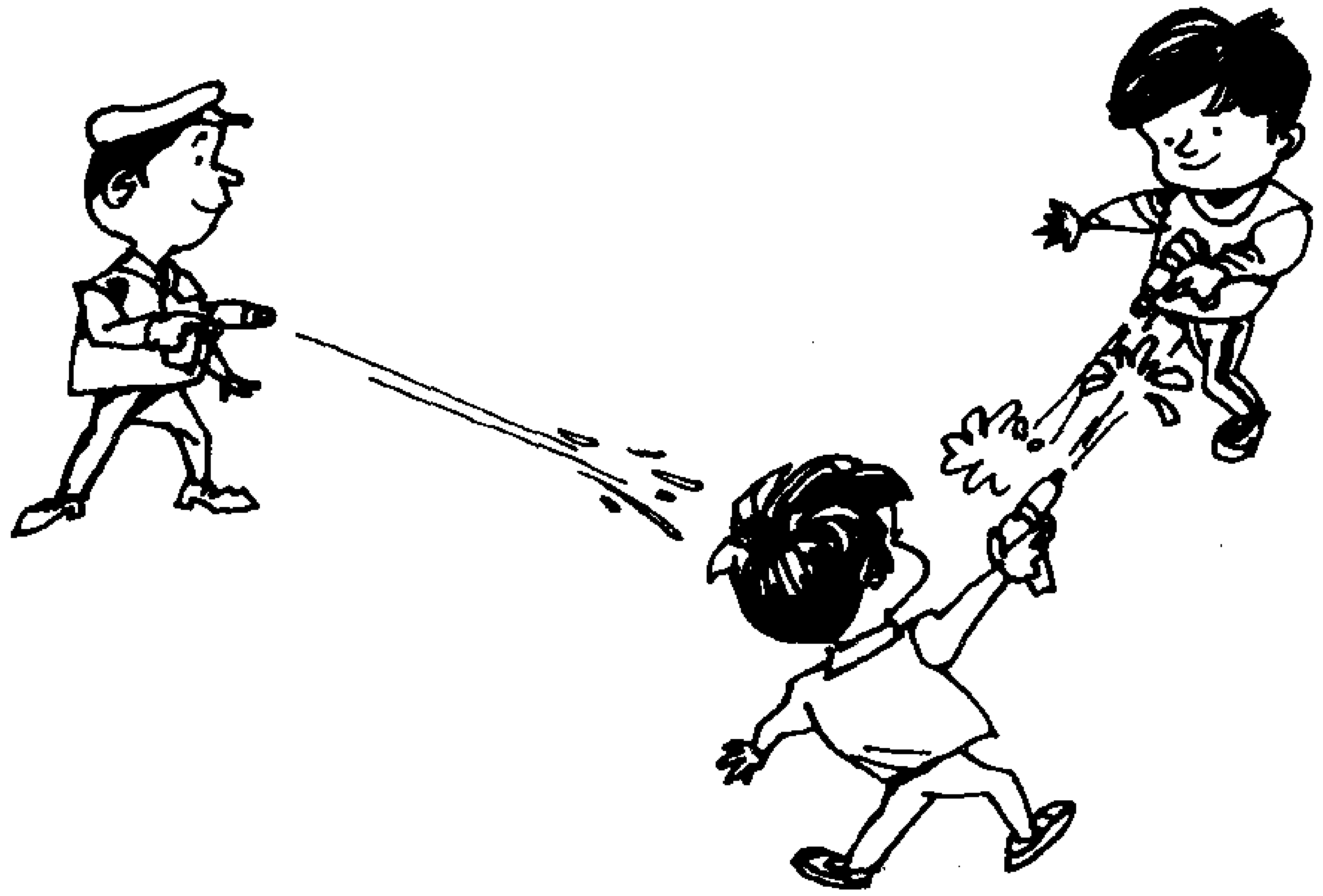

图 4.7

由于题目的条件是每人用水枪击中距离他最近的人，显然“距离最近”这个极端量会发挥作用．

如果只有 1 个人($n=1$)，显然他不会用水枪击中自己，他的身上是干的．

如果有 3 个人($n=3$)，因为这 3 个人的距离互不相同，那么一定有两个人的距离最近，按照规定，这两个人会用水枪对射，而另一个人会“坐山观虎斗”，因为这个人相对于那两个人距离都远，所以他的身上是干的．

如果有 5 个人($n=5$)，同样，其中一定有两人距离最近，这两个人用水枪对射，剩下的 3 个人中又一定有两人距离最

近，这两个人也用水枪对射，因而有 1 个人的身上是干的.

同样，对 7 个人，9 个人，11 个人，…，都可以这样做，因为只要是有限个人，他们的距离都不相等，一定有两个距离最近的，这两个人根据规定就要作出牺牲，互相对射. 所以对奇数个人来说，一定有 1 个人的身上是干的.

这个题目的一个简洁而又漂亮的证明是数学归纳法，对于初中学生来说，可以略去下面的证明，同样会理解本题的证法.

证 设 $n=2m-1$.

当 $m=1$ 时，$n=1$，由题设，这个人的身上是干的，因而 $n=1$ 时命题成立.

假设当 $m=k$ 时，即 $n=2k-1$ 时命题成立，也就是说，$2k-1$ 个人中一定有 1 个人的身上是干的.

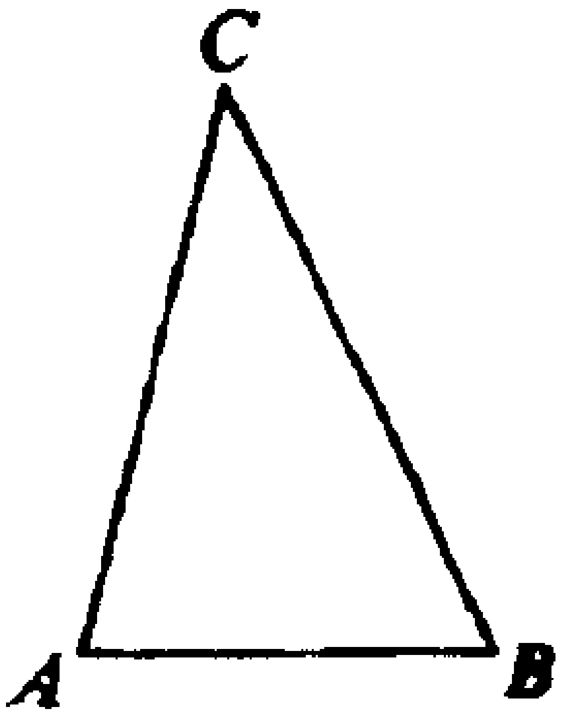

图 4.8

那么，当 $m=k+1$ 时，即 $n=2k+1$ 时，由于是有限个人，必有两人距离最近，设这两人为 A 和 B，将 A 和 B 撤出后还有 $2k-1$ 个人，由归纳假设，一定有 1 个人（设此人为 C）的身上是干的；再把 A 和 B 加进去，由于 AB 最小，则 $AB<AC$，$AB<BC$，因此对 A,B,C 来说，A 和 B 互射，所以 C 的身上还是干的，因而 $m=k+1$ 时命题成立.

综上所述，对所有奇数 $n=2m-1(m\in N)$ 命题成立.

对于偶数个人，上面的命题是不是成立呢？也就是说，根据上面的规定，是否一定有 1 个人的身上是干的呢？

结论是否定的. 我们设 $n=2m$, $2m$ 个人记为

$$A_1, A_2, \cdots, A_m; B_1, B_2, \cdots, B_m.$$

假定把这 $2m$ 个人放在数轴上, 让 A_j 对应 $3j$, B_j 对应 $3j+1$ ($j=1,2,\cdots,m$). 则对每一个 A_j 来说, 他与 B_j 距离为 1, 与其他人距离都大于 1 且各不相同, 对 B_j 也是如此, 此时 A_j 与 B_j 互相对射, 每个人的身上都是湿的.

例 4.6 已知正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于 $\odot O$, P 为 $\odot O$ 内一点. 证明: 存在正多边形的两个顶点 A_i 和 A_j, 使得 $\angle A_iPA_j \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 180°$.

证 在正多边形的 n 个顶点中, 一定有一个顶点与 P 的距离最近, 设这个顶点为 A_i. 考虑 A_iP 相对于正多边形其他顶点的关系, 有下面三种可能:

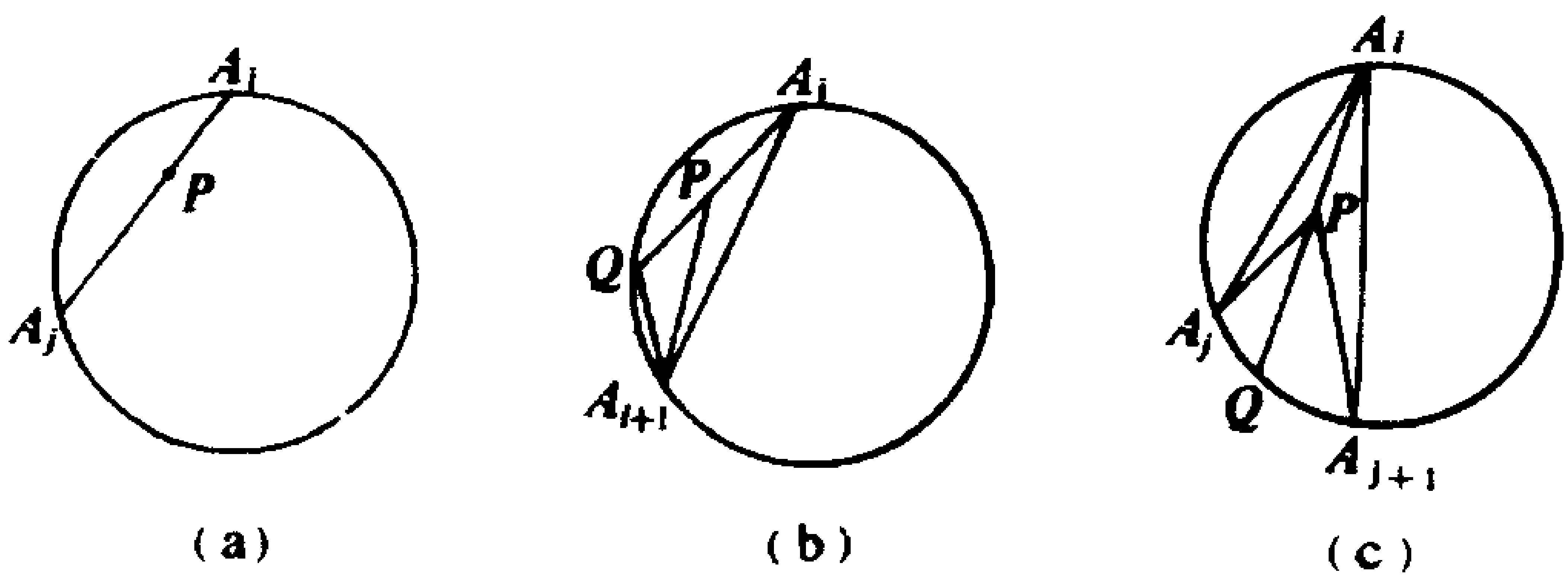

图 4.9

第一种可能是直线 A_iP 与 $\odot O$ 相交的另一交点恰是正多边形的另一顶点 A_j(图 4.9(a)), 显然有

$$\angle A_iPA_j = 180° > \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 180°.$$

因此 A_i 和 A_j 为所求.

第二种可能是除了 A_i 之外的其余顶点都在直线 A_iP 的同一侧. 设直线 A_iP 交⊙O 于 Q,则 Q 点位于 A_i 和它的一个相邻顶点之间,不妨设此顶点为 A_{i+1}(图 4.9(b)). 因为

$$\angle A_iOA_{i+1}=\frac{360^\circ}{n},$$

所以 $$\angle A_iQA_{i+1}=180^\circ-\frac{180^\circ}{n}=(1-\frac{1}{n})\cdot 180^\circ.$$

又 $$\angle A_iPA_{i+1}>\angle A_iQA_{i+1}=(1-\frac{1}{n})\cdot 180^\circ.$$

于是 A_i 和 A_{i+1}就是所求的 A_i 和 A_j 点.

第三种可能是直线 A_iP 的两侧都有正多边形的顶点,此时 Q 点位于某两个相邻顶点之间,不妨记其为 A_j 和 A_{j+1}(图 4.9(c)).

由于 A_i 是距 P 最近的顶点,则

$$PA_i\leqslant PA_j,\quad PA_i\leqslant PA_{j+1}.$$

于是 $$\angle PA_iA_j\geqslant\angle PA_jA_i,$$ $$\angle PA_iA_{j+1}\geqslant\angle PA_{j+1}A_i.$$

从而有

$$\angle PA_jA_i+\angle PA_{j+1}A_i\leqslant\angle A_jA_iA_{j+1}=\frac{180^\circ}{n},$$

$$\begin{aligned}&\angle A_iPA_j+\angle A_iPA_{j+1}\\&=360^\circ-\angle PA_jA_i-\angle PA_{j+1}A_i-\angle A_jA_iA_{j+1}\\&\geqslant 360^\circ-\frac{180^\circ}{n}-\frac{180^\circ}{n}\\&=2(1-\frac{1}{n})\cdot 180^\circ.\end{aligned}$$

因此$\angle A_iPA_j$ 和$\angle A_iPA_{j+1}$中的较大者,不妨设为$\angle A_iPA_j$ 满

足

$$\angle A_iPA_j \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ.$$

综上所述，必存在两顶点 A_i 和 A_j，使得

$$\angle A_iPA_j \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ.$$

在这个题目的证明中，第三种可能的情况用到了极端原理.

5

考虑角或边的极端情况

在一个含有有限多个角的图形中，必有一个最大角也必有一个最小角，在一个含有有限个边的图形中，必有一个最大边也必有一个最小边，而图形所需要的性质往往通过最大角(或边)或最小角(或边)反映出来.

例 5.1 平面上任给 1995 个不在同一条直线上的点，求证：存在经过三个已给点的圆，使得所有的 1995 个点都不在该圆的内部.

如何解这个题目呢？我们还是按照思路的自然发展来思考吧. 显然，若使所有的 1995 个点都不在某个圆的内部，即在这个圆的圆周上或外部，则我们所找的这个经过已知三点的圆，当然是越小越好. 如何选择三个不在同一直线上的点，使经过这三个点的圆非常小呢？一方

面，圆小则该圆内的弦不会太长，所以我们应该从所有1995个点中选每两点距离最小的那两个点，以这两点为边所作的三角形，该边所对的角为锐角，由正弦定理 $R=\frac{a}{2\sin A}$ 可知，当 a 固定之后，锐角 A 越大，所得外接圆半径 R 越小. 因此，考虑每三点组成的三角形中的最小边与最大角就成为解决本题的关键. 下面给出本题的证明.

证 在所给的1995个点中，必有两点的距离最小，设这两点为 P_1 和 P_2.

由已知，这1995个点不在同一直线上，因此在直线 P_1P_2 外有已知的点，考虑这些点对线段 P_1P_2 的张角，显然，这些张角都是锐角. 这些张角至多有1993个，因此必有一个最大角. 设 P_3 不在 P_1P_2 上，且 $\angle P_1P_3P_2$ 最大.

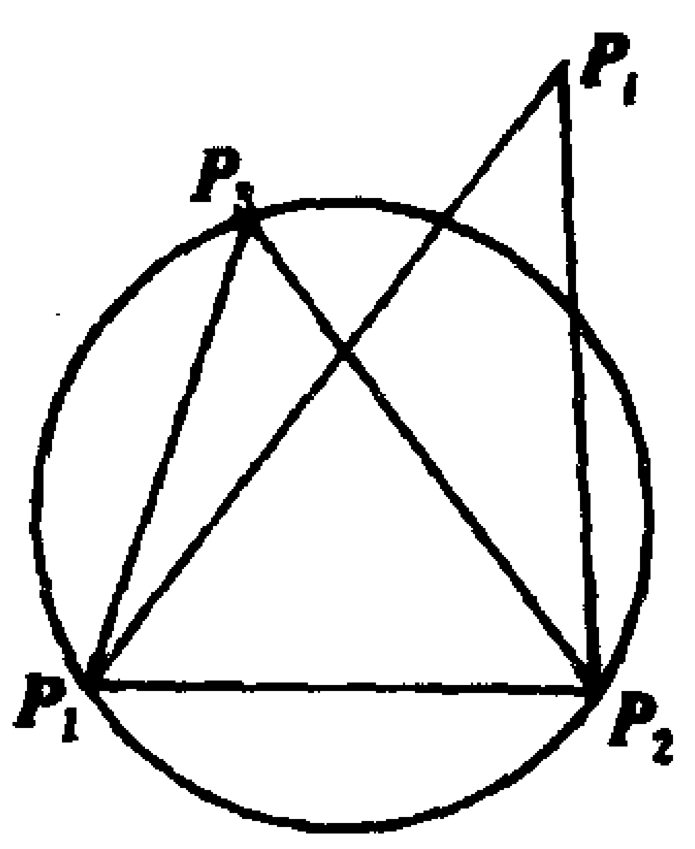

图 5.1

我们过 P_1,P_2,P_3 作一圆，则圆 $P_1P_2P_3$ 就是所求的圆.

事实上，由 P_1P_2 最短，则在线段 P_1P_2 上不可能再有已知的点，所以若已知点在直线 P_1P_2 上，也必在 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上，因此在圆 $P_1P_2P_3$ 之外. 若已知点不在直线 P_1P_2 上，考虑除 P_1,P_2,P_3 之外，不在直线 P_1P_2 上的任意一点 P_i，由于

$$\angle P_1P_iP_2 \leqslant \angle P_1P_3P_2$$

（因为 $\angle P_1P_3P_2$ 为对 P_1P_2 的最大张角），则 P_i 必在圆

$P_1P_2P_3$ 的外部或圆周上，即其余的 1992 个点均在圆 $P_1P_2P_3$ 的外部或圆周上.

例 5.2 证明：如果一个三角形的所有边都小于 1，则它的面积小于$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

由于三角形的面积与这个三角形的两边与夹角有关，而三角形的边长都小于 1，所以为使这个三角形的面积小于$\frac{\sqrt{3}}{4}$，只要找最小夹角就可以了. 因为三角形的最小夹角一定是锐角，而锐角越小，它的正弦值也越小，从而可获得下面的证法.

证 在已给三角形中，设三边为 a，b，c，其对角为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，在三个角中必有一个是最小的，设该角为$\angle A$，则$\angle A \leqslant \angle B$，$\angle A \leqslant \angle C$，且$\angle A \leqslant 60°$. 又 $b<1$，$c<1$. 设该三角形的面积为 S，则

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\
&< \frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 60° \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}
$$

即三角形的面积小于$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

例 5.3 平面上任意给定六点，其中任何三点都不共线，求证：总能找到三个点，使得以此三点为顶点的三角形中有不超过 30°的角.

证 设所给的六个点为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6. 由于每三

点所连的三角形只有有限个(事实上为$\frac{6\times5\times4}{6}=20$ 个),考察这有限个三角形的所有内角,必有一个内角最大,设这个角为$\angle A_2A_1A_6$,现在讨论$\angle A_2A_1A_6$.

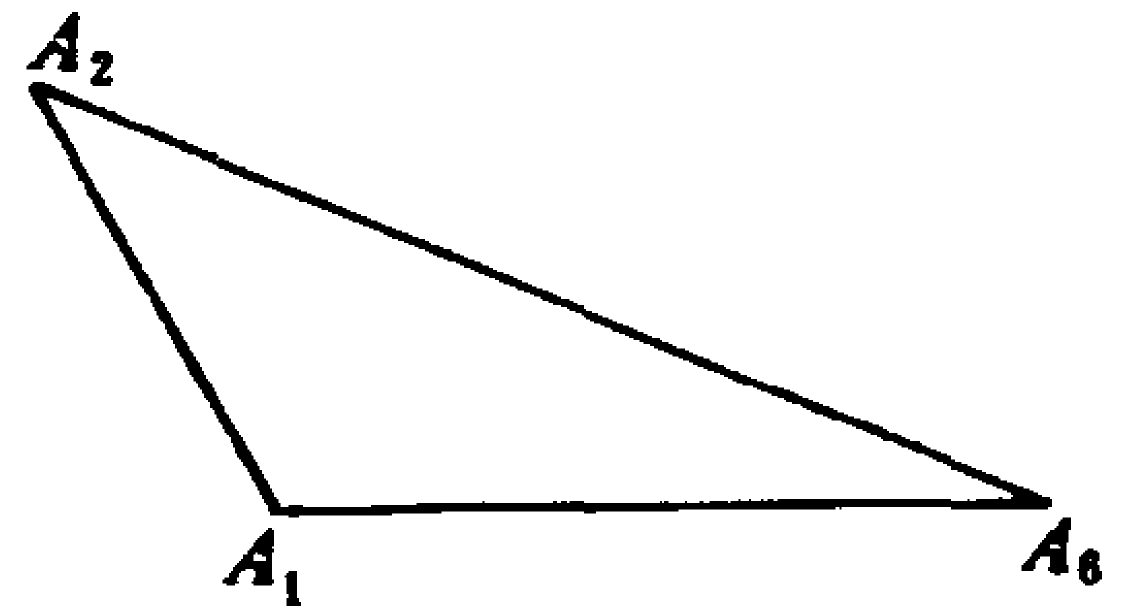

图 5.2

(1) 如果 $\angle A_2A_1A_6 \geqslant 120°$,则在$\triangle A_2A_1A_6$ 中,由

$$\angle A_2A_1A_6+\angle A_1A_2A_6+\angle A_1A_6A_2=180°$$

可知,

$$\angle A_1A_2A_6+\angle A_1A_6A_2\leqslant 60°,$$

于是$\angle A_1A_2A_6$ 和$\angle A_1A_6A_2$ 中较小的一个不超过 30°,题目的结论成立.

(2)如果$\angle A_2A_1A_6<120°$,我们研究另外三点 A_3,A_4,A_5 的位置.

如果 A_3,A_4,A_5 这三点中有一点不在$\angle A_2A_1A_6$ 的角区域内,设此点为 A_3,则由$\angle A_2A_1A_6$ 最大可知,A_3 只能在 A_1A_6 所在直线与 A_2 不同的一侧.由于

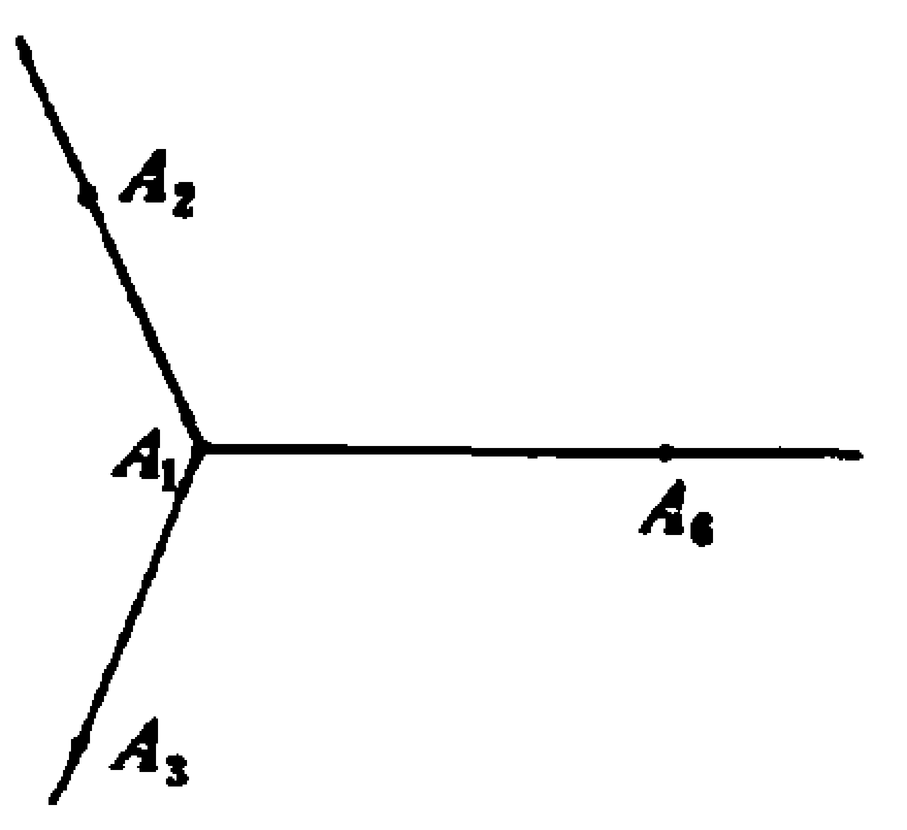

图 5.3

$$\angle A_2A_1A_3\leqslant\angle A_2A_1A_6<120°,$$

$$\angle A_3A_1A_6\leqslant\angle A_2A_1A_6<120°,$$

则 $$\angle A_2A_1A_6+\angle A_2A_1A_3+\angle A_3A_1A_6<3\times120°=360°,$$

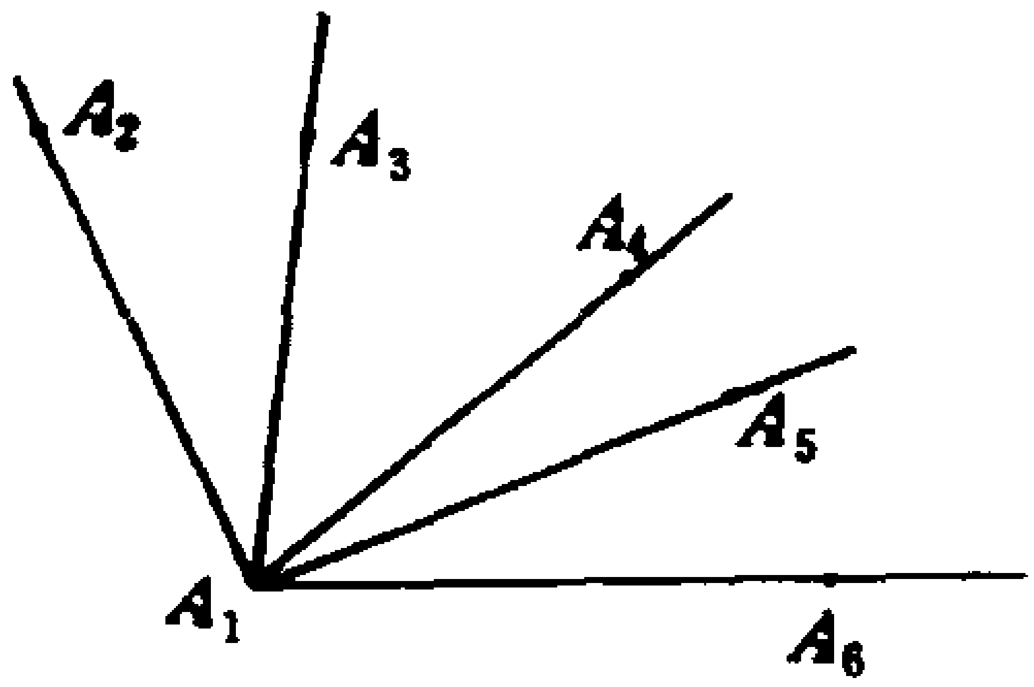

图 5.4

与周角等于 360°相矛盾. 因此，A_3,A_4,A_5 都在$\angle A_2A_1A_6$的角区域之内(图 5.4)。于是，

$$\angle A_2A_1A_3+\angle A_3A_1A_4+\angle A_4A_1A_5+\angle A_5A_1A_6=\angle A_2A_1A_6<120^\circ,$$

因此$\angle A_2A_1A_3,\angle A_3A_1A_4,\angle A_4A_1A_5,\angle A_5A_1A_6$这四个角中的较小者小于 30°,题目的结论成立.

综合(1),(2),题目的结论成立.

如果将 30°角换成 29.5°,结论就不可能成立. 比如已知六点组成一个正六边形的顶点,这六点中每三点组成的三角形的每个内角都不小于 30°.

例 5.3 的证法有一点值得注意:本来题目是寻找不超过 30°的角,即找最小的角,我们却从最大角出发,因为最小角与最大角是有密切关系的. 在情形(1)中,三角形的最大角不小于 120°,那么另外两个内角必有一角不大于 30°;在情形(2)中,虽然最大角小于 120°,但另外一些角包含在 120°角之中,故仍能找到最小角. 因此,在解题中灵活运用极端原理才能保证题目的顺利解决.

例 5.4 平面上有有限个多边形,如果其中的任何两个多边形都有一条过原点的直线与它们相交,则称这些多边形是恰当放置的.

求最小的自然数 m,使得对任意一组恰当放置的多边形,

均可作 m 条过原点的直线，使得这些多边形的任一个至少与这 m 条直线中的一个相交.

为了研究问题方便，我们引进多边形对 O 点的张角这一概念. 从 O 点向多边形 M 的每一点引射线，这些射线所组成的角中一定有一个最大者，例如图 5.5 的 $\angle AOB$，这时，$\angle AOB$ 叫做多边形 M 对点 O 的张角. 显然，多边形 M 在 $\angle AOB$ 的角区域内. 为了寻求题目中 m 的最小值，对 O 点张角最小的多边形起着关键作用.

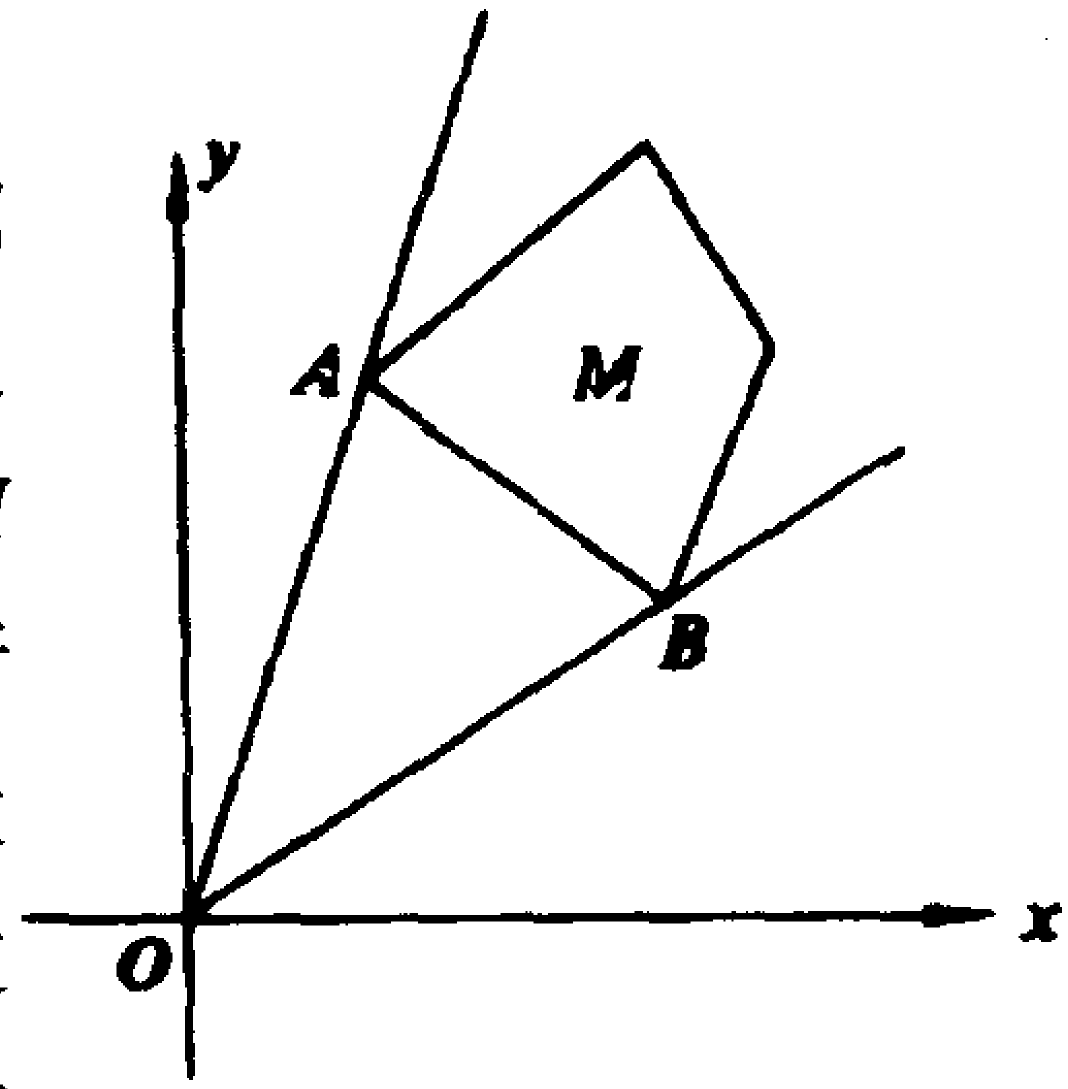

图 5.5

解 我们考虑图 5.6 所示的三个多边形. 这三个多边形中的任意两个都有一条过原点的直线与它们相交，因而符合题目的条件. 然而在图 5.6 所示的情况下，任何一条过原点的直线至多与其中的两个多边形相交，所以要满足与三个多边形相交，则须 $m \geqslant 2$.

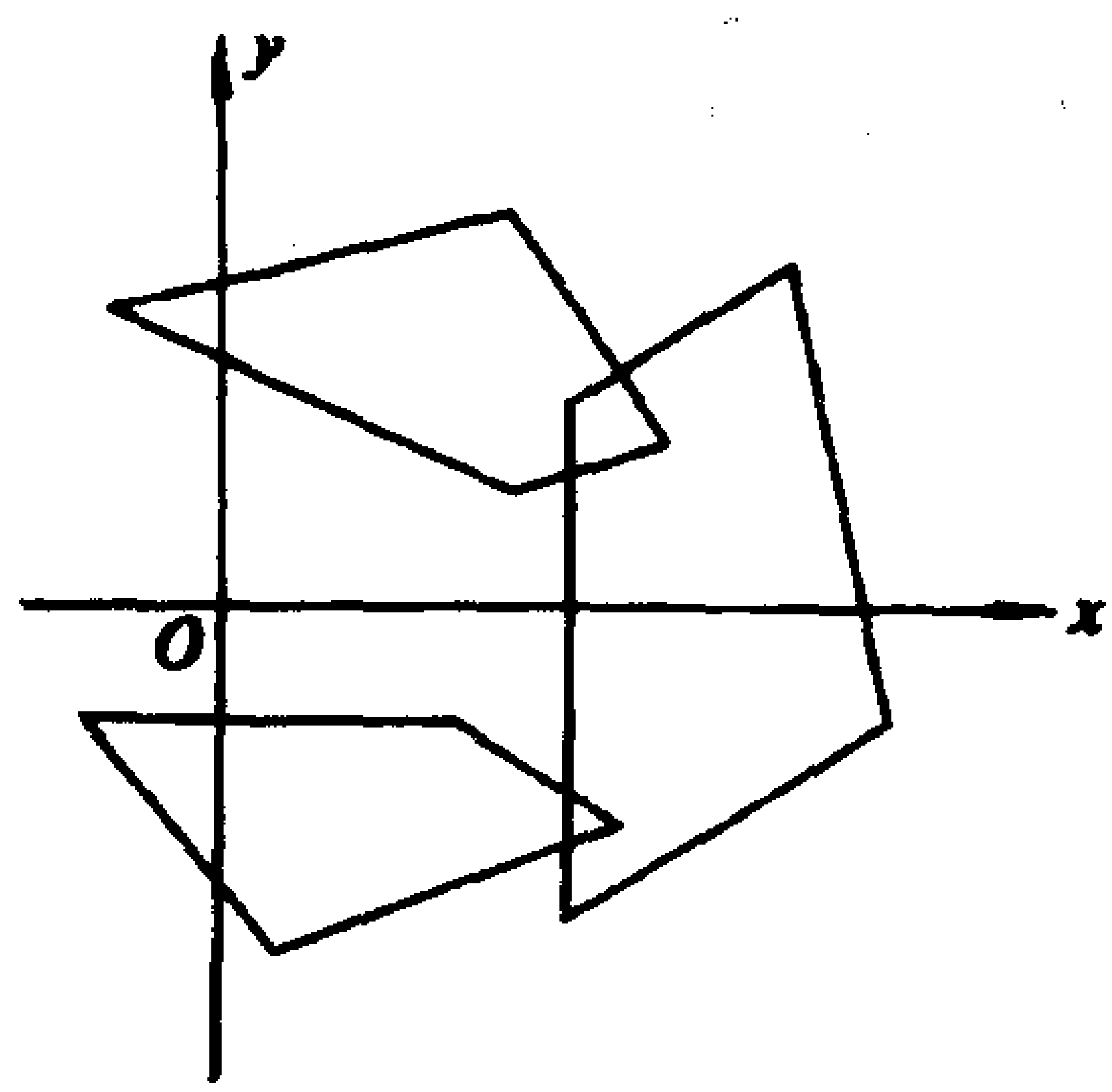

图 5.6

因为多边形只有有限个，所以其中必有一个对原点 O 的

张角最小. 设这个多边形为 M，M 对 O 的张角为 α，角 α 的两边所在直线为 l_1 和 l_2. 我们可以证明：任一多边形都至少与这两条直线中的一条相交，因而 $m=2$.

事实上，设多边形 M' 是任一不同于 M 的多边形，由已知，应有一条过 O 点的直线既与 M 相交也与 M' 相交，设这条直线为 l.

显然，l 在 l_1 和 l_2 之间或与 l_1 和 l_2 之一重合.

如果 l 与 l_1 和 l_2 之一重合，则 $m=2$.

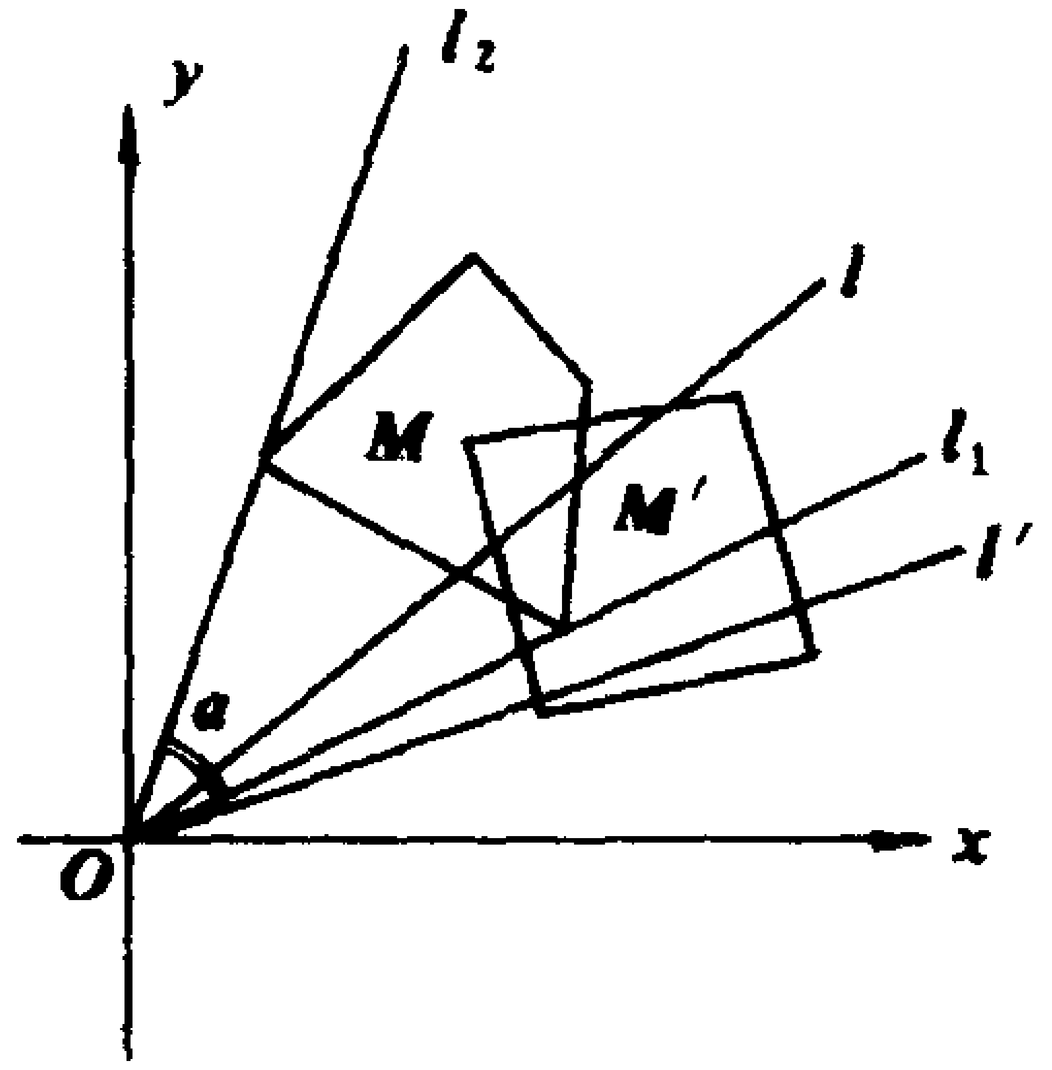

图 5.7

如果 l 在 l_1 和 l_2 之间，则由于 M' 对原点的张角 $\beta \geqslant \alpha$，所以必有一条过原点的直线 l' 与 M' 相交但在 $\angle\alpha$ 之外或与 l_1，l_2 之一重合. 若 l' 与 l_1 或 l_2 重合，则问题已经解决，即 $m=2$；若 l' 在 $\angle\alpha$ 之外，这恰好意味着 l_1 和 l_2 中必有一条在 l 与 l' 之间的 $\angle\beta$ 内，不妨设为 l_1，于是多边形 M' 与直线 l_1 相交.

所以所求的最小自然数 $m=2$.

例 5.5 平面上有 1988 个点，每 4 个点都不共线，其中有 1788 个点被涂上蓝色，200 个点被涂上红色. 证明：存在一条直线将平面分成两个部分，每个部分各含 894 个蓝点，100 个红点.

图 5.8

这个题目是荷兰为第 29 届国际中学生数学奥林匹克提供的一道候选题,因为当年是 1988 年,所以题目中给出 1988 个点,实际上对于本题,1988 是无关紧要的.我们可以证明下面一般的命题:

假定有 $2m$ 个红点,$2n$ 个蓝点,每 4 个点不共线,则必定有一条直线将平面分成两部分,在每一部分中有 m 个红点,n 个蓝点.

证 首先取一条直线 l,使它与每两个已知点的连线都不平行,平移直线 l,使得 l 两侧各有 $m+n$ 个已知点.

过 l 上方的一个已知点与 l 下方的一个已知点作直线,由于这样的直线只有有限条,所以必有一条直线与直线 l 的

夹角最小，设此直线为 AB，且设 AB 与 l 相交于 E.

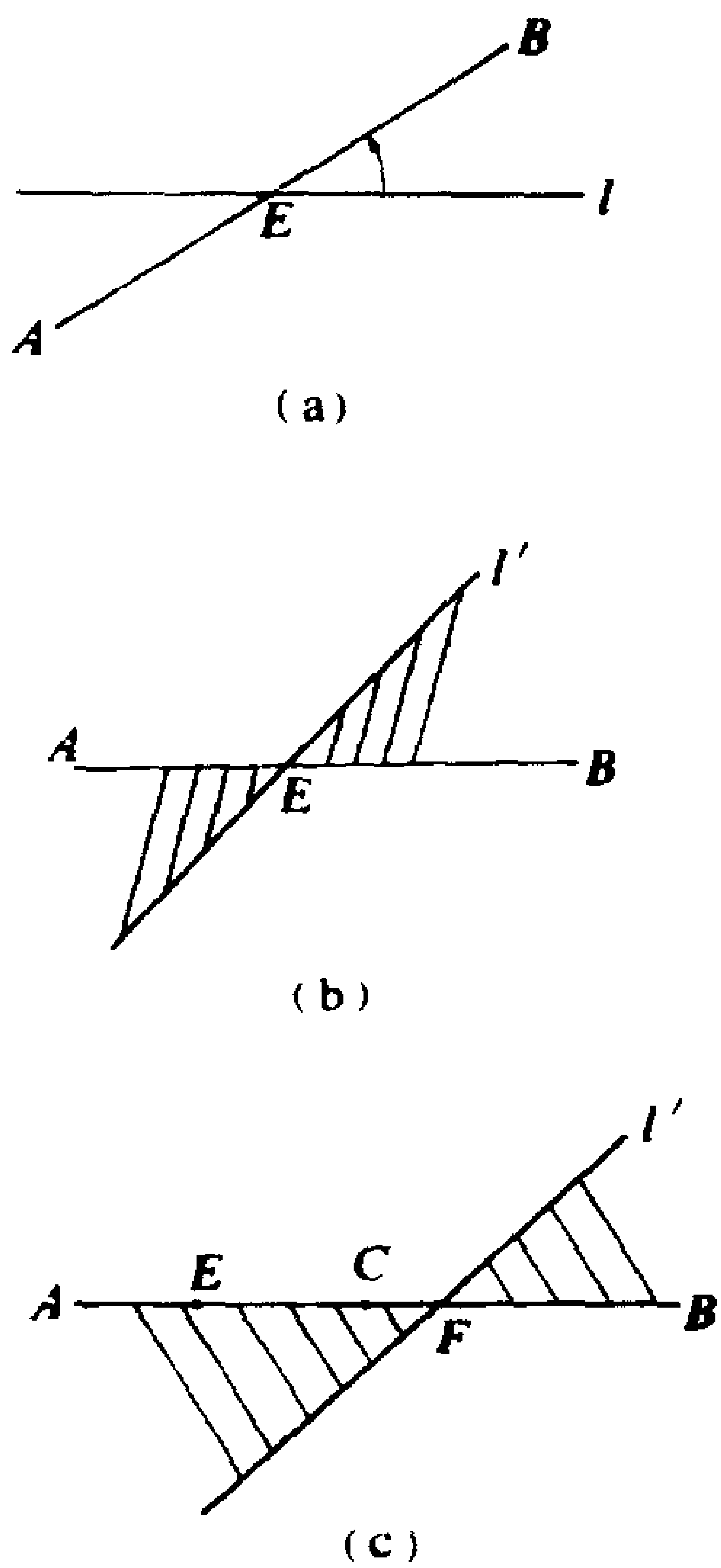

图 5.9

将直线 l 绕点 E 逆时针旋转，使 l 与 AB 重合，由于夹角最小，所以在这个旋转过程中，l 两侧的已知点的个数保持不变(图 5.9(a)).

如果在直线 AB 上仅有 A 和 B 这两个已知点，这时将点 E 与除 A，B 之外的其余各点相连，得到有限个与 AB 的夹角，再过 E 作一直线 l'，使 l' 与 AB 的夹角小于这些连线与 AB 的夹角. 这时 l' 两侧的点数仍为 $m+n$(图 5.9(b)).

如果在直线 AB 上还有一个已知点 C，不妨设 C 在线段 EB 上，过 CB 线段上任一点 F 作直线 l'，使得 l' 与 AB 的夹角内无其他已知点(图 5.9(c)).

总之，直线 l 变为 l'，这时 l' 两侧的点数仍为 $m+n$，蓝点个数不变(若 A，B 同色)或增减一个(若 A，B 异色).

如此继续进行，随着 l 的转动，原来在 l 左(右)侧的点逐一变到右(左)侧，而每一侧的点数仍保持为 $m+n$，直到最后，原先在 l 左(右)侧的点均变到右(左)侧.

如果开始时 l 左侧的蓝点多于(少于)n 个，那么结束时 l 左侧的蓝点少于(多于)n 个，由于在每次转动过程中蓝点的个数改变 1 或不变，所以 l 必会转到一个位置，使 l 左侧的蓝点恰好为 n 个，由于 l 左侧的红、蓝点的总数始终保持 $m+n$ 个，所以这时红点的个数为 m 个.

例 5.6 证明：任意的凸五边形都可以找到三条对角线，由这三条对角线可以组成一个三角形.

我们知道，三角形的任意两边之和大于第三边，因此对于三条线段 a,b,c，若 c 最长，则必有 $c+a>b$，$c+b>a$，如果 a,b,c 能组成三角形的三条边，只须 $a+b>c$ 即可. 由此可知，在本题所要求的三条对角线中，应首选一条最长的对角线. 下面给出本题的证明.

证 由于凸五边形 $ABCDE$ 的对角线只有五条，所以必有一条最长，设最长的对角线为 BE.

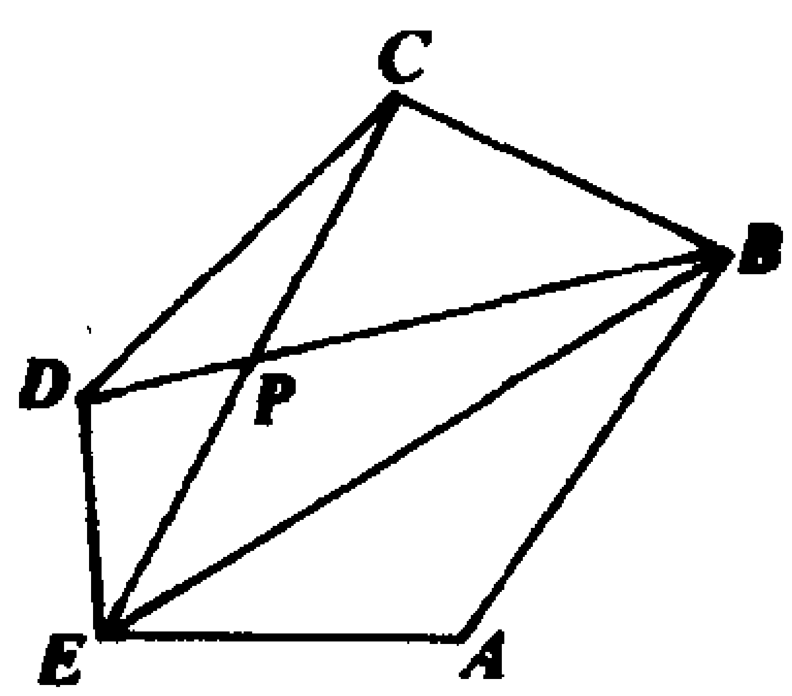

图 5.10

因为 $ABCDE$ 是凸五边形，则四边形 $BCDE$ 是凸四边形，其对角线 BD 与 CE 必相交，设交点为 P，于是

$$BP+PE>BE,$$

从而 $$BD+CE>BE.$$

因为 BE 最长，所以 BD,CE,BE 构成一个三角形的三边.

例 5.7 证明：任何一个四面体中总有一个顶点，以这个

顶点引出的三条棱为三边可以构成一个三角形.

这是第10届国际中学生数学奥林匹克的一道试题.同例5.6一样,这里也需要找出所有棱中最长的一条棱,再证明从这条棱的一个端点引出的另两条棱的和大于这条最长的棱.

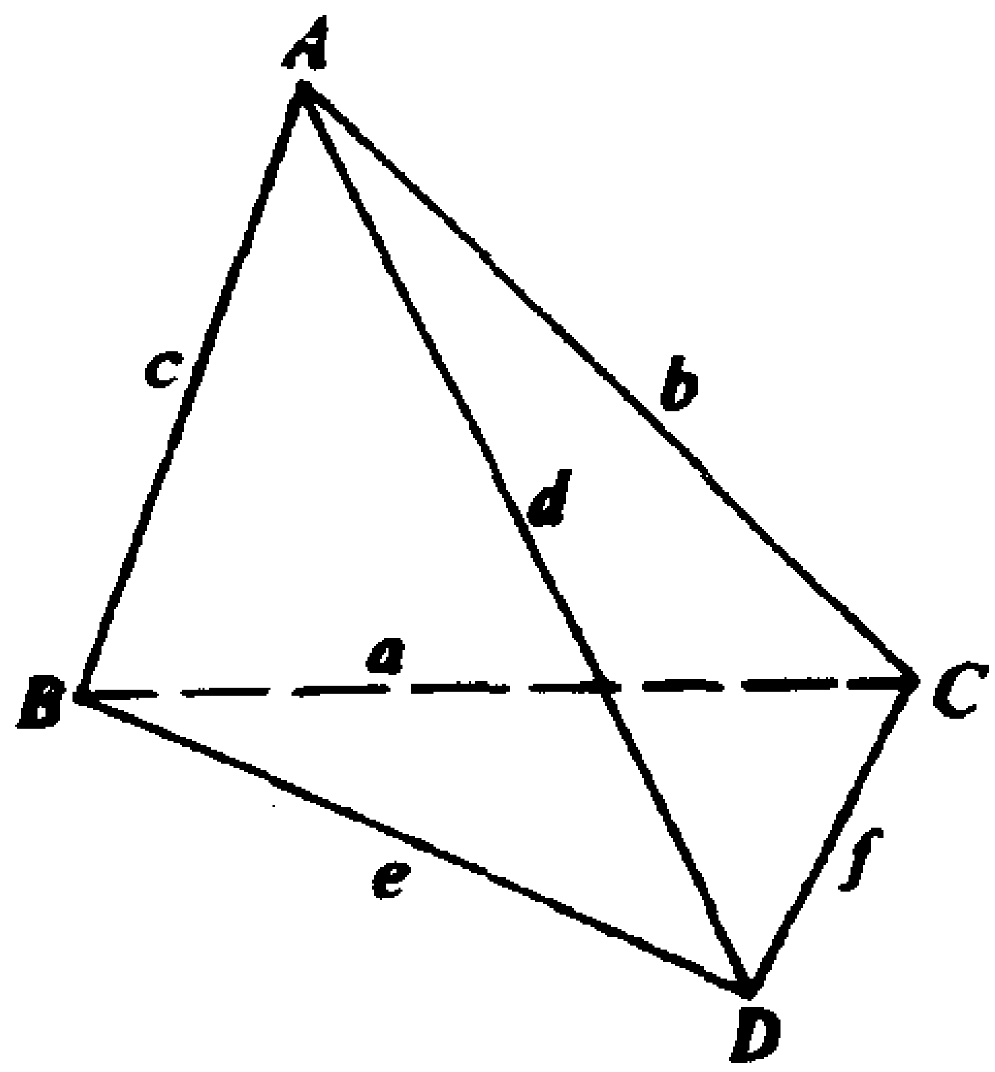

图 5.11

证 设四面体为 $ABCD$,其棱长分别记为(见图5.11)

$$BC=a, AC=b, AB=c,$$

$$AD=d, BD=e, CD=f.$$

在这六条棱中必有一条棱最长,不失一般性,设这条最长的棱是 $AD=d$.因此必有

$$d+e>f,\quad d+b>c,$$

$$d+f>e,\quad d+c>b.$$

另一方面,在$\triangle ABD$和$\triangle ADC$中,应有

$$c+e>d,\quad b+f>d.$$

由此得
$$b+c+e+f>2d.$$

这就可以断定

$$b+c>d\quad 或\quad e+f>d$$

至少有一个成立.不妨设 $b+c>d$ 成立,这样,从 A 点引出的三条棱 AB,AC,AD 为三边可以构成一个三角形.

例 5.8 证明:当 $n\neq 4$ 时,不存在整点正 n 边形.

这个题目所说的整点是指在平面直角坐标系中横坐标与纵坐标都是整数的点,例如点(2,1),(−3,2)等等.

证明本题时，我们可分步进行，首先证明不存在整点正三角形、整点正六边形，再证明当 $n\neq 3,4,6$ 时，不存在整点正 n 边形.

证　首先证明不存在整点正三角形.

事实上，若正三角形的三个顶点都是整点，则这个正三角形的面积 S 一定是有理数.

另一方面，设正三角形的边长为 a，则 a^2 是整数.

由正三角形的面积公式有

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

这个式子的左边是有理数，右边是无理数，因而不可能成立. 所以不存在整点正三角形.

由于在正六边形中，连结间隔顶点可得到正三角形，因此如果存在整点正六边形，必存在整点正三角形，上面已证明不存在整点正三角形，故不存在整点正六边形.

下面证明 $n\neq 3,4,6$ 时，也不存在整点正 n 边形.

假设存在整点正 n 边形（$n\neq 3,4,6$），在所有整点正 n 边形边长平方的集合中，由于边长的平方是自然数，则必有一个最小数，即存在一个边长最小的整点正 n 边形，设这个正 n 边形为 $P_1P_2\cdots P_n$，依次作

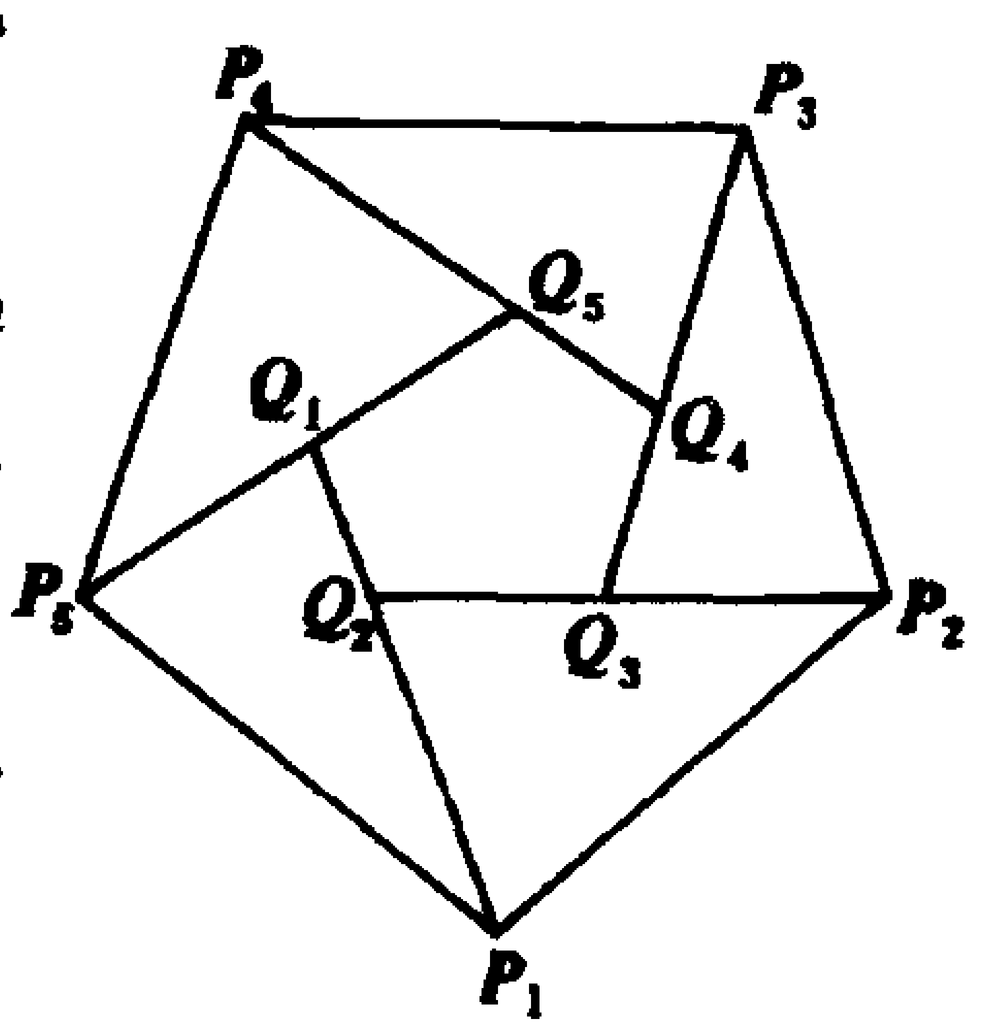

图 5.12

$$P_1Q_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} P_2P_3,\quad P_2Q_2 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} P_3P_4,\cdots,$$
$$P_{n-2}Q_{n-2} \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} P_{n-1}P_n,\quad P_{n-1}Q_{n-1} \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} P_nP_1,$$
$$P_nQ_n \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} P_1P_2.$$

显然，$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 也都是整点，从而正 n 边形 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 是整点正 n 边形（显然，$n=3,4,6$ 时不可能出现正 n 边形 $Q_1\cdots Q_n$），它的边长却比整点正 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的边长小，出现矛盾.

因而不存在 $n\neq4$ 的整点正 n 边形.

6

考虑周长或面积的极端情况

有一些平面上有限点组成的集合或者是一个空间图形，需要从整体上去考虑它们的性质，在这种情况下，反映图形整体性质的周长或面积则能在解题中发挥作用. 本节我们将举出一些考虑折线和的极端值以及面积的极端值的例子来说明这个问题，这些例子中的大多数从题目表面上并不能直接看出需要利用周长或面积的极端值，然而正是这些极端情况为题目的解决打开了大门.

例 6.1 平面上有 n 个红点和 n 个蓝点，其中任意三点都不在同一条直线上，试证明或否定：可找到两两不共点的 n 条直线段，其中每条线段的两个端点的颜色不同.

这是 1979 年美国普特南(Putnam)数学竞

赛的一道试题，仔细研究这个题目可以想象，如果这 n 条端点不同色又不相交的直线段(即一红一蓝的两点连成 n 条互不相交的线段)存在的话，也是一种特殊的情况，一种极端的情况，而不是任意的情况，因为 n 条线段端点不同色是容易做到的，而互不相交是困难的. 对于这 n 条线段从整体考虑，线段之和是一个值得注意的量.

解 因为总共只有 $2n$ 个点，故将红点与蓝点一一配对的方法也只有有限个(实际为 $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n$ 个，即第一个红点可与 n 个蓝点中的某一个配对，第二个红点与剩下的 $n-1$ 个蓝点中的某一个配对，……)，对于每一个配对方法 p，都会得到这 n 条线段之和，设配对方法 p 对应的线段和为 $S(p)$.

在这有限个 $S(p)$ 中一定有一个最小的，为简化符号，我们仍说 $S(p)$ 最小.

我们证明，n 条线段互不相交的情况就在线段和 $S(p)$ 最小时发生.

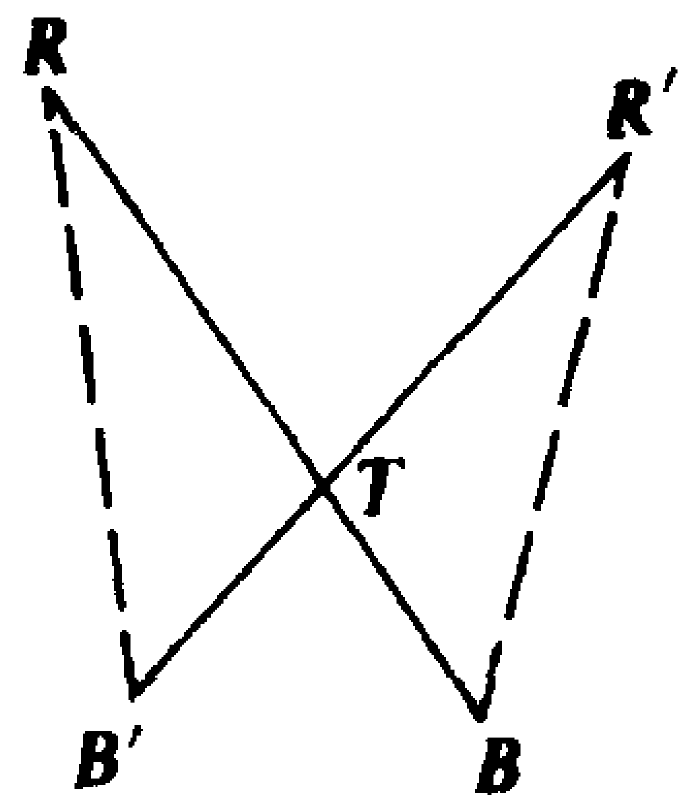

图 6.1

我们用 R 和 R' 表示红点，B 和 B' 表示蓝点，假设在配对方法 p 中出现了相交线段，设 RB 与 $R'B'$ 相交，交点为 T(图 6.1). 现把 R 与 B' 相连，R' 与 B 相连，则线段 RB' 与 $R'B$ 也是端点异色的线段. 现比较 $RB+R'B'$ 与 $RB'+R'B$ 的大小. 由于

$$RT+TB'>RB', \quad R'T+TB>R'B,$$

因此 $$RB+R'B'>RB'+R'B.$$

注意到 RB 与 $R'B'$ 是配对方法 p 中的线段，设 RB' 与 $R'B$ 是配对方法 p' 中的线段，显然

$$S(p)>S(p'),$$

这与 $S(p)$ 最小相矛盾. 因此题目的要求肯定能实现.

我们再看一个由 n 个红点和 n 个蓝点组成的集合，不过结论与例 6.1 不同.

例 6.2 设有 n 个红点和 n 个蓝点($n\geqslant 2$)，并且所有 $2n$ 个点不在同一条直线上，证明：存在两个红点，这两个红点所连线段的内部不含蓝点，或者存在两个蓝点，这两个蓝点所连线段的内部不含红点.

证 我们分三种情况来讨论：

(1)如果所有红点都共线，设该直线为 l.

若直线 l 中没有蓝点，则命题成立.

若直线 l 中有蓝点，设该蓝点为 b，因为所有 $2n$ 个点不共线，而所有红点都共线，则必有一蓝点 b' 不在 l 上，此时线段 bb' 上不可能有红点，命题依然成立.

(2)如果所有蓝点都共线，仿照(1)的证明，命题仍成立.

(3)如果所有的红点不共线，并且所有的蓝点也不共线(这也意味着红点和蓝点都至少有三个).

考虑顶点均是红点或均是蓝点的三角形，这些三角形只有有限个，所以一定有一个三角形的面积最小(这个最小值不等于零). 不妨假定面积最小的三角形的顶点都是红色的，事实上，这个三角形的三边中不能都包含蓝点，否则，若三边上

都有蓝点，则这个顶点都是蓝色的三角形的面积更小，这与所取的最小面积的红点三角形矛盾.因而这个顶点都是红色的面积最小的三角形中一定有一条边上没有蓝点.

由以上三种情况可知，命题成立.

从上面的证明可以看出，红点的个数与蓝点的个数并不一定需要相等，只要它们的个数之和不小于 5 即可，此外上述证明的关键是第(3)种情况，也就是在这种情况下用到了极端原理，题目要求的性质在面积最小的顶点同色的三角形中体现出来.正是抓住了上面这些要点，在 1988 年加拿大举行的数学奥林匹克中，把这个题目改为下面一道试题：

设 S 为平面上的一个有限点集(含点数不小于 5)，其中的若干点涂上红色，其余的点涂上蓝色，设任何三点或三个以上同色的点不共线，求证：存在一个三角形，使得

(1)它的三个顶点涂有相同的颜色；

(2)这三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

对于第(1)个要求，只要简单地运用抽屉原理就能解决，因为把 5 个点涂上两种颜色，一定有 3 点同色；而第(2)个要求，恰恰就是例 6.2 的第(3)种情况.

在 1990 年举办的第一届希望杯数学竞赛中，加拿大的这道数学竞赛试题又被推广到空间情形，变成下面的题目：

例 6.3 设在空间给出了 20 个点，其中某些点涂黄色，其余点涂红色，已知在任何一个平面上同种颜色的点不会超过三个.求证：存在一个四面体，它的四个顶点同色，并且至少有一个侧面内不含另一种颜色的点.

同例 6.2 的思路一样，显然满足条件的四面体应与体积最小的四面体有关.

证 因为共有 20 个点，涂黄、红两种颜色，所以至少有四点同色，又由题设，同一平面上的同色点不会超过三个，所以四个顶点都同色的四面体是存在的，并且这种四面体只有有限多个.

在这些四顶点同色的四面体中一定有一个体积最小的，可以证明这个四面体即为所求. 事实上，若这个四面体的各面上都有另一颜色的点，则以这些点可构成一个四顶点同色的四面体，而体积更小，这就出现了矛盾. 于是四顶点同色的四面体中体积最小的那个四面体中至少有一个侧面不含另一种颜色的点.

例 6.4 平面上 $6n$ 个圆组成的集合记作 M，其中任意三个圆都不两两相交(包括相切). 求证：一定可以从 M 中取出 n 个圆，使它们两两相离.

我们用数学归纳法完成这个题目的证明.

证 (1)当 $n=1$ 时，命题显然成立.

(2)假设 $n=k$ 时命题成立，即对 $6k$ 个圆一定能找出 k 个圆，使它们两两相离.

那么当 $n=k+1$ 时，现有 $6(k+1)$个圆，我们证明能从中找出 $k+1$ 个两两相离的圆.

为了完成命题的证明，只要能找到一个$\odot A_0$，使$\odot A_0$ 和某 $6k$ 个圆两两相离，于是由归纳假设，这 $6k$ 个圆又可取出 k 个圆两两相离，再加上$\odot A_0$，就得出 $k+1$ 个两两相离的圆.

现在我们从 $6(k+1)$ 个圆中取出面积最小的一个圆，设这个圆为 $\odot A_0$，我们证明与 $\odot A_0$ 相交(或相切)的圆最多只有 5 个，从而 $\odot A_0$ 至少与 $6k$ 个圆相离.

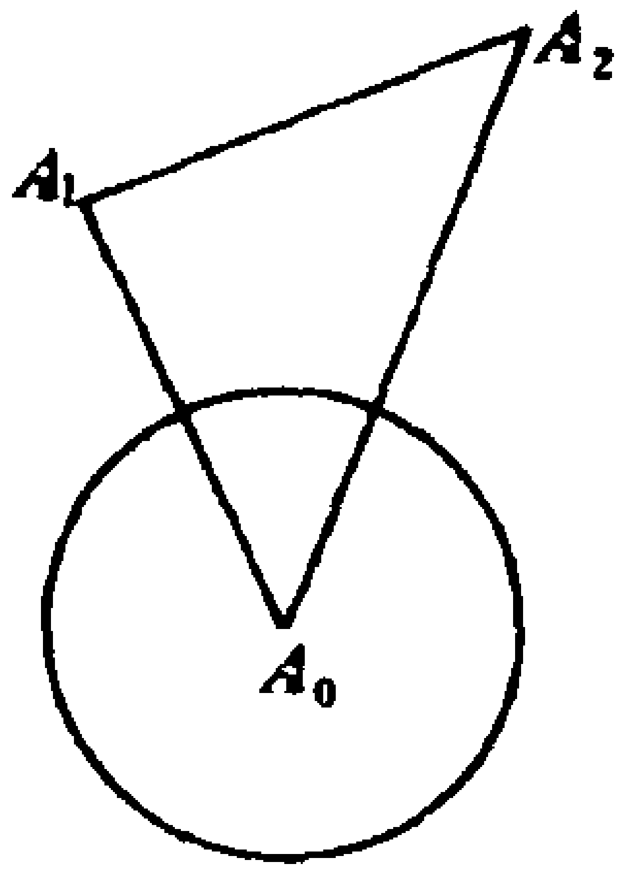

图 6.2

事实上，若有 6 个(或多于 6 个)圆 $\odot A_1,\odot A_2,\cdots,\odot A_6$ 都与 $\odot A_0$ 相交，连结 A_0A_1，A_0A_2，$\cdots$，A_0A_6，则必有某个角 $\angle A_iA_0A_{i+1}\leqslant 60^\circ$ $(i=1,2,\cdots,6$，并记 $A_7=A_1)$，不妨设 $\angle A_1A_0A_2\leqslant 60^\circ$(图 6.2).

连结 A_1A_2，设 $\odot A_0,\odot A_1,\odot A_2$ 的半径分别为 R_0,R_1,R_2. 因为 $\odot A_0$ 的面积最小，则

$$R_0\leqslant R_1,\quad R_0\leqslant R_2.$$

又因为 $\odot A_0$ 与 $\odot A_1,\odot A_2$ 相交或相切，则

$$A_0A_1\leqslant R_0+R_1,\quad A_0A_2\leqslant R_0+R_2.$$

由于 $\angle A_1A_0A_2\leqslant 60^\circ$，则 $\angle A_0A_1A_2$ 及 $\angle A_0A_2A_1$ 中至少有一角不小于 $\angle A_1A_0A_2$，不妨设

$$\angle A_0A_1A_2\geqslant\angle A_1A_0A_2,$$

于是
$$A_0A_2\geqslant A_1A_2.$$

即
$$A_1A_2\leqslant A_0A_2\leqslant R_0+R_2\leqslant R_1+R_2.$$

于是 $\odot A_1$ 和 $\odot A_2$ 也相交. 但这样一来，三个圆 $\odot A_0,\odot A_1,\odot A_2$ 两两相交，与题设矛盾.

因此，与 $\odot A_0$ 相交(或相切)的圆至多有 5 个，即 $\odot A_0$ 至少与 $6k$ 个圆相离，又由归纳假设，这 $6k$ 个圆中有 k 个圆两两相离，于是在 $6(k+1)$ 个圆中可选出 $k+1$ 个圆两两相离.

由(1),(2)可知,对所有自然数 n,命题成立.

下面再看两个需要考虑最大面积的例子.

例 6.5 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为平面上 n 个不同的点,其中每三点组成的三角形的面积不超过 1. 证明:存在一个三角形,满足

(1)面积不超过 4.

(2)$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在这个三角形的内部或边界上.

这是 1991 年澳大利亚的一道数学奥林匹克试题. 解这个题目的思路是很自然的,因为题目中给出的所有三角形的面积不超过 1,而所求的三角形的面积不超过 4,并且这个三角形要把已知的 n 个点都包含在里面,因此这个所求的三角形应该是由已知的三角形扩充而成的,而过一个三角形的各个顶点作对边的平行线所扩充而成的三角形的面积恰为原三角形的 4 倍. 于是为了包含所有已知点,我们需选择已知三角形的面积越大越好,由极端原理,这个面积最大的已知三角形是存在的.

下面是这个题目的完整解法,所谓完整解法,即还需考虑这 n 个点不能组成三角形的情况(这时面积为零,仍满足不超过 1).

证 (1)若 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 在同一条直线 l 上,且设点 P_1, $P_2,\cdots,P_n$ 按顺序排列.

在 l 外取一点 P,使 P 到 l 的距离

$$PD\leqslant\frac{8}{P_1P_n},$$

则　　$\triangle PP_1P_n$ 的面积

$$=\frac{1}{2}\cdot P_1P_n\cdot PD\leqslant 4.$$

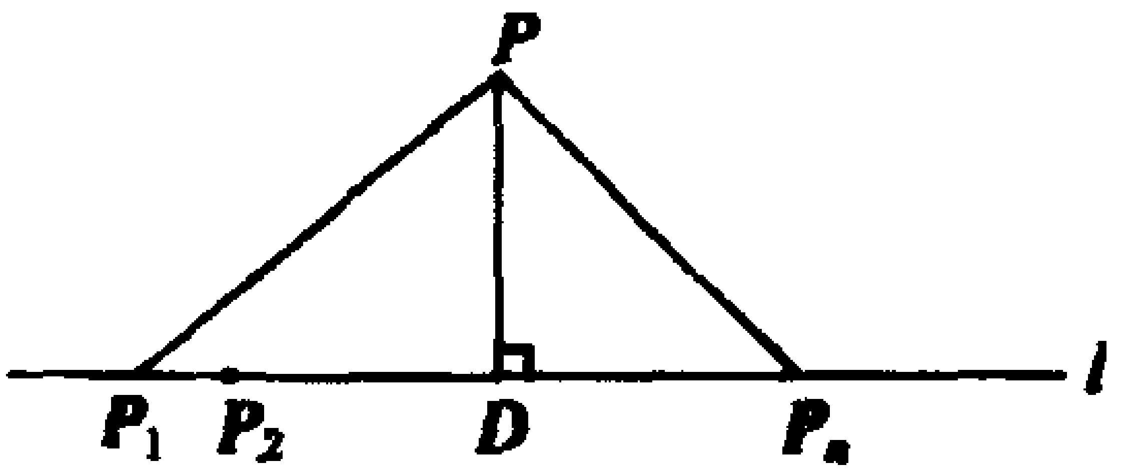

图 6.3

并且点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 全在 $\triangle PP_1P_n$ 的边上.

(2)若 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 不全在同一条直线上. 考虑这 n 个点中每三点为顶点组成的三角形,这些三角形只有有限个,所以必有一个三角形的面积最大,设这个三角形是$\triangle P_1P_2P_3$.

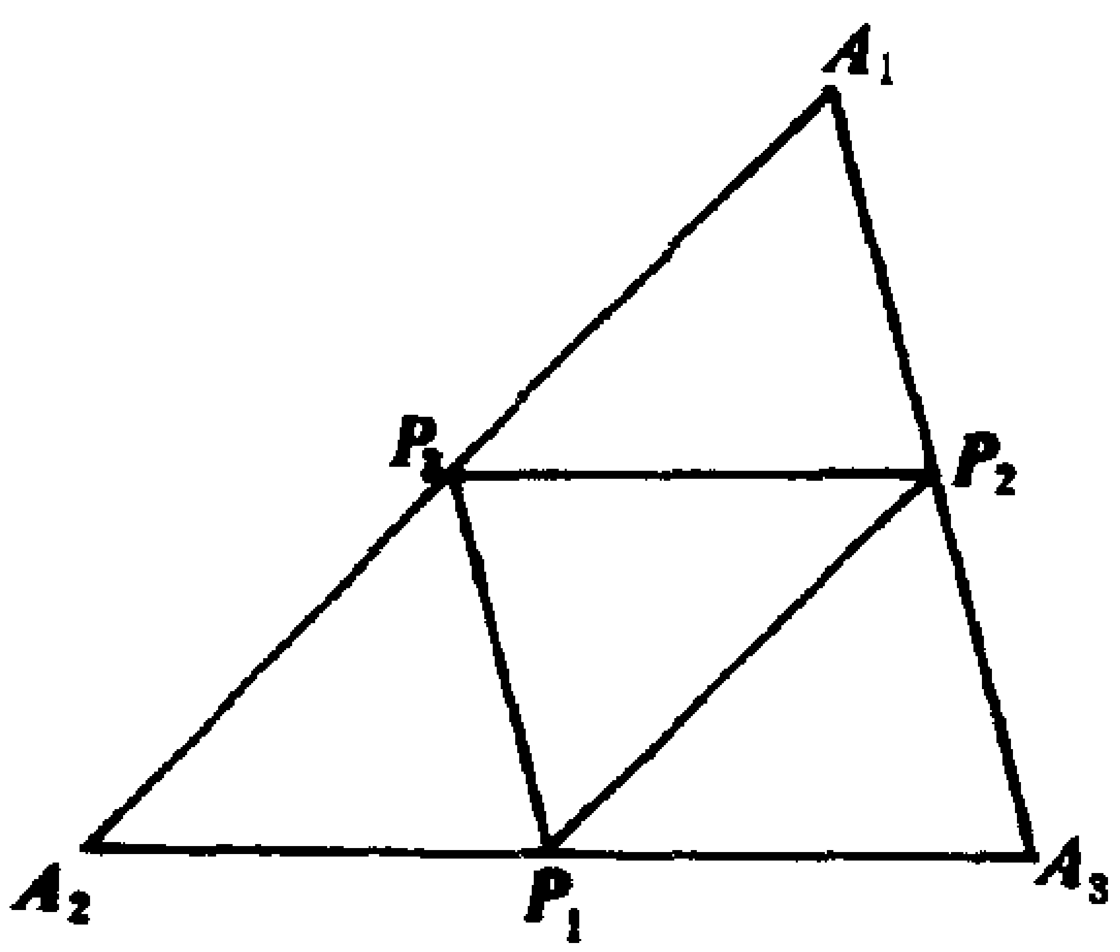

图 6.4

过 P_1,P_2,P_3 分别作对边的平行线,构成 $\triangle A_1A_2A_3$(图 6.4),则

$\triangle A_1A_2A_3$ 的面积

$=4\times\triangle P_1P_2P_3$ 的面积

$\leqslant 4.$

下面只须证明 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在$\triangle A_1A_2A_3$ 的内部或边界上即可.

设 P_i 是 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 中的任意一点,则由于$\triangle P_iP_2P_3$ 的面积不大于$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积,所以 P_i 必与 A_1 在直线 A_2A_3 的同一侧. 同理,P_i 必与 A_2 在直线 A_1A_3 的同一侧,P_i 必与 A_3 在直线 A_1A_2 的同一侧.

因此,P_i 在$\triangle A_1A_2A_3$ 的内部或边界上.

用同样的思路可以证明下面这个重要的命题.

例 6.6 证明:对于平面上的五个点,若任意三点都不共线,则必有四点构成凸四边形的顶点.

证 在已知五点中,每三点所组成的三角形中必有一个面积最大,设此三角形为$\triangle ABC$.并设另两点为D,E.

过A,B,C分别作对边的平行线,构成$\triangle A'B'C'$.由于$\triangle ABC$的面积最大,如例6.5所证,D和E均在$\triangle A'B'C'$的内部或边界上.

如果D和E中有一点在$\triangle ABC$的外部并且在$\triangle A'B'C'$的内部,比如D在$\triangle A'BC$的内部(图6.5),则四边形$ABDC$是凸四边形.

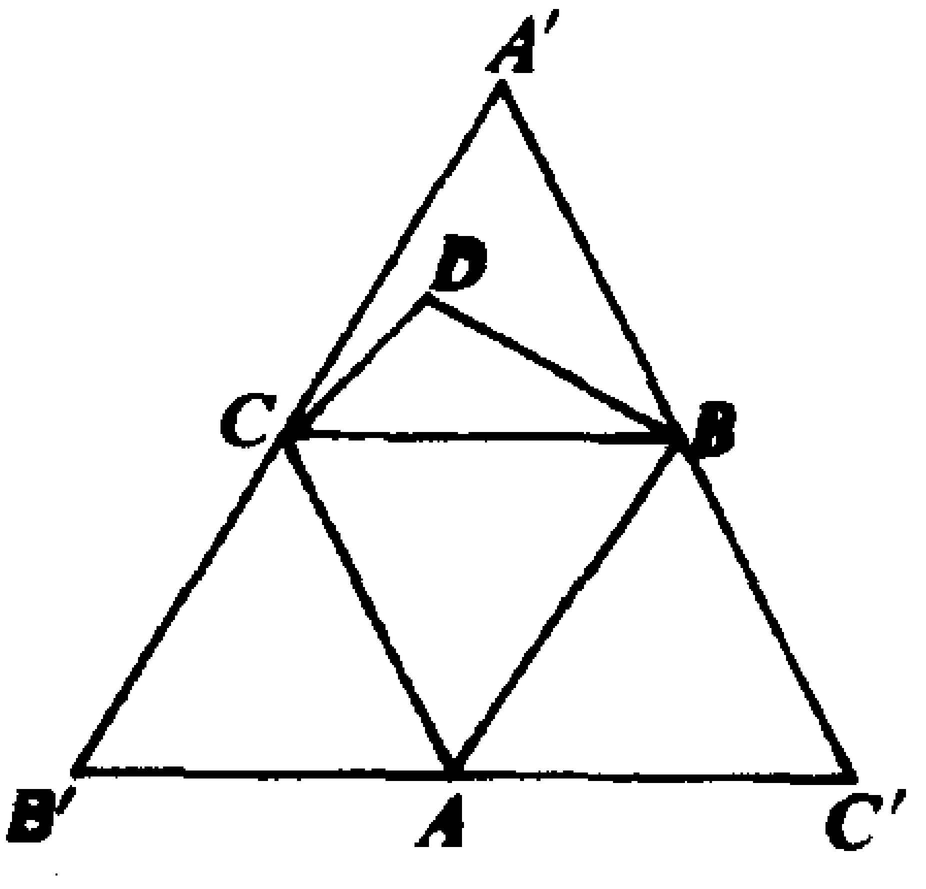

图 6.5

如果D和E均在$\triangle ABC$的内部(图6.6),连结DE,则A,B,C三点必有两点在直线DE的同侧,设其为B,C,这时四边形$BDEC$是凸四边形.

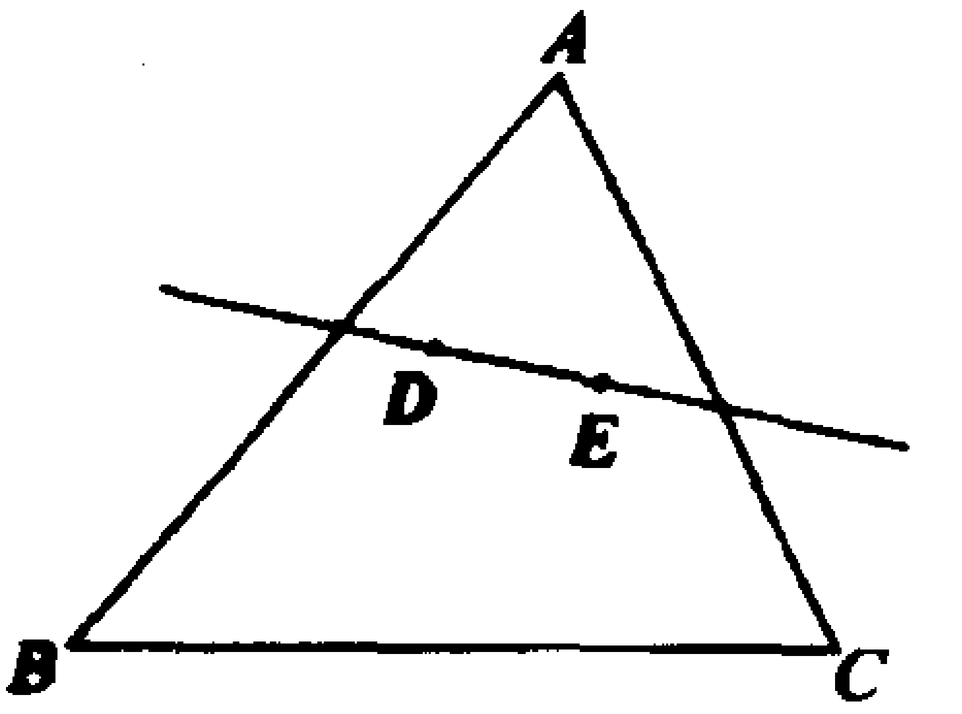

图 6.6

由以上可知,平面上任意三点都不共线的五个点中,必有四点是凸四边形的顶点.

例6.6是一个很有用的命题,因为有不少关于平面上有限点集的问题都可以把平面上的五个点作为基本情形来考虑,而平面上的五点又能出现凸四边形,这无疑有益于解题.

下面的三个例子都要用到例 6.6 的结论.

例 6.7 平面上有 1994 个点，任意三点都不共线，证明：存在一种点的结对法，使得 1994 个点结成 997 个点对，连结同一点对的两点得到 997 条线段，并且这些线段至少有 498 个交点.

一个最明显的想法就是每一个凸四边形的两条对角线必有一个交点. 因此对本题来说只要出现 498 个凸四边形即可. 而保证凸四边形出现的基本图形是平面上的五点集，即每有五个点就能出现一个凸四边形，每一个凸四边形就有一个线段的交点，所以问题就归结为从 1994 个点中找出最多的五点集. 具体的证法是这样的：

证 作直线 l，使所给的 1994 个点都在 l 的同侧，并把这些点按与 l 的距离从小到大编号为 $P_1, P_2, \cdots, P_{1994}$.

考虑 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 这五点，必有四点构成凸四边形的顶点；余下一点与 P_6, P_7, P_8, P_9 共五点，又有四点构成凸四边形的顶点；又余下一点，这点与 $P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}$ 共五点，其中又有四点构成凸四边形；如此类推可得到 498 个凸四边形. 对每一个凸四边形，以它的相对顶点结成一对，可得到 997 条线段，并至少可得到 498 个交点.

例 6.8 和例 6.9 依次是第 11、12 届国际数学奥林匹克试题，解这两个题都需要用到例 6.6 的结果. 不过这两个题目涉及组合数的概念，没有学过组合数的读者可以把它们略去.

例 6.8 在平面上给出了 $n(n>4)$ 个点，其中任意三点都不共线，证明：至少存在 C_{n-3}^2 个以上述点为顶点的凸四边形.

其中符号 C_{n-3}^2 表示从 $n-3$ 个不同元素中每次取出两个元素的所有不同取法的数目，其计算方法是 $C_{n-3}^2=\frac{(n-3)(n-4)}{2}$，一般地 $C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}$.

证 若 $n=5$，则对五点一定有一个凸四边形. 由于 $C_{5-3}^2=C_2^2=1$，所以命题成立.

若 $n>5$，则从 n 点中任意取出五个点，其中都有某四个点构成凸四边形，所以连同重复计算在内，至少有 C_n^5 个凸四边形. 由于每个这样的凸四边形的四个顶点与其余的 $n-4$ 个点可以构成 $n-4$ 个不同的五点组，所以每个凸四边形最多可能被重复计算了 $n-4$ 次，故知不同的凸四边形的数目不会少于

$$\begin{aligned}\frac{C_n^5}{n-4}&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120\times(n-4)}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{C_n^5}{n-4}-C_{n-3}^2\\=&\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}-\frac{(n-3)(n-4)}{2}\\=&\frac{n-3}{120}[n(n-1)(n-2)-60(n-4)]\\=&\frac{n-3}{120}(n^3-3n^2-58n+240)\\=&\frac{1}{120}(n-3)(n-5)(n-6)(n+8),\end{aligned}$$

所以当 $n>5$，即 $n\geqslant 6$ 时，上式大于或等于 0，则

$$\frac{C_n^5}{n-4}\geqslant C_{n-3}^2,$$

即至少存在 C_{n-3}^2 个以已知点为顶点的凸四边形.

例 6.9 在平面上给出 100 个点，其中任何三点都不共线. 考察以上述点为顶点的所有可能的三角形，证明：其中至多只有 70% 的三角形可能是锐角三角形.

证 我们首先证明下面的命题：

平面上给出的五点中，如果任何三点都不共线，则至少存在三个以上述点为顶点的非锐角三角形.

由于若五点中任三点都不共线必有一个凸四边形产生，我们可以考察第五个点相对于凸四边形的位置. 设这个凸四边形为 $ABCD$，第五点为 E.

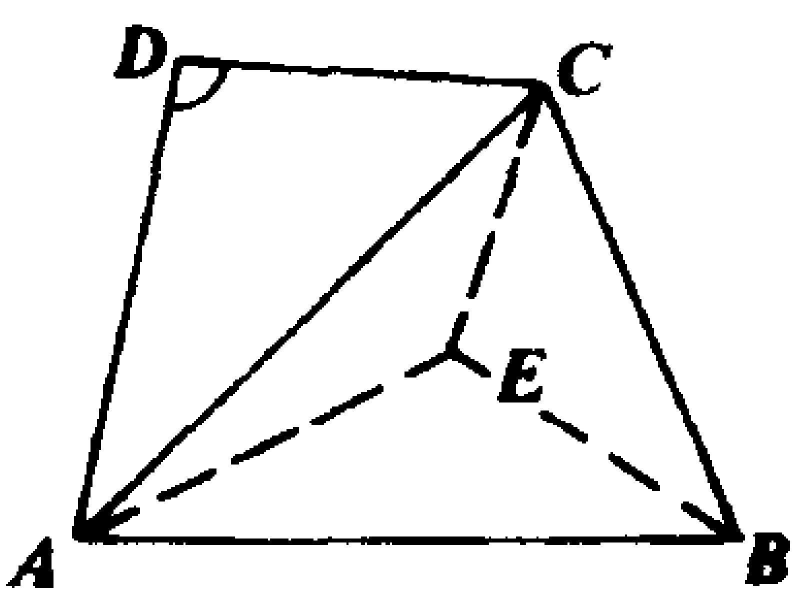

图 6.7

若 E 在四边形 $ABCD$ 的内部，由于四边形 $ABCD$ 的内角和为 360°，所以其中至少有一个内角为非锐角，设 $\angle D$ 为非锐角，于是 $\triangle ADC$ 为非锐角三角形. 由于任三点都不共线，则 E 或在 $\triangle ACD$ 的内部或在 $\triangle ABC$ 的内部，不妨设 E 在 $\triangle ABC$ 的内部(图 6.7). 连结 EA, EB, EC，则由 $\angle AEB + \angle BEC + \angle CEA = 360°$ 可知，$\angle AEB, \angle BEC, \angle CEA$ 中至少有两个非锐角. 因此至少有三个非锐角三角形.

若 E 在四边形 $ABCD$ 的外部，则 $ABCDE$ 为凸五边形，因为凸五边形的内角和是 540°，所以至少有两个内角为非锐角，从而产生两个非锐角三角形. 这两个非锐角可能是相邻的，如 $\angle A$ 和 $\angle B$(图 6.8(a))，也可能是不相邻的，如 $\angle A$ 和

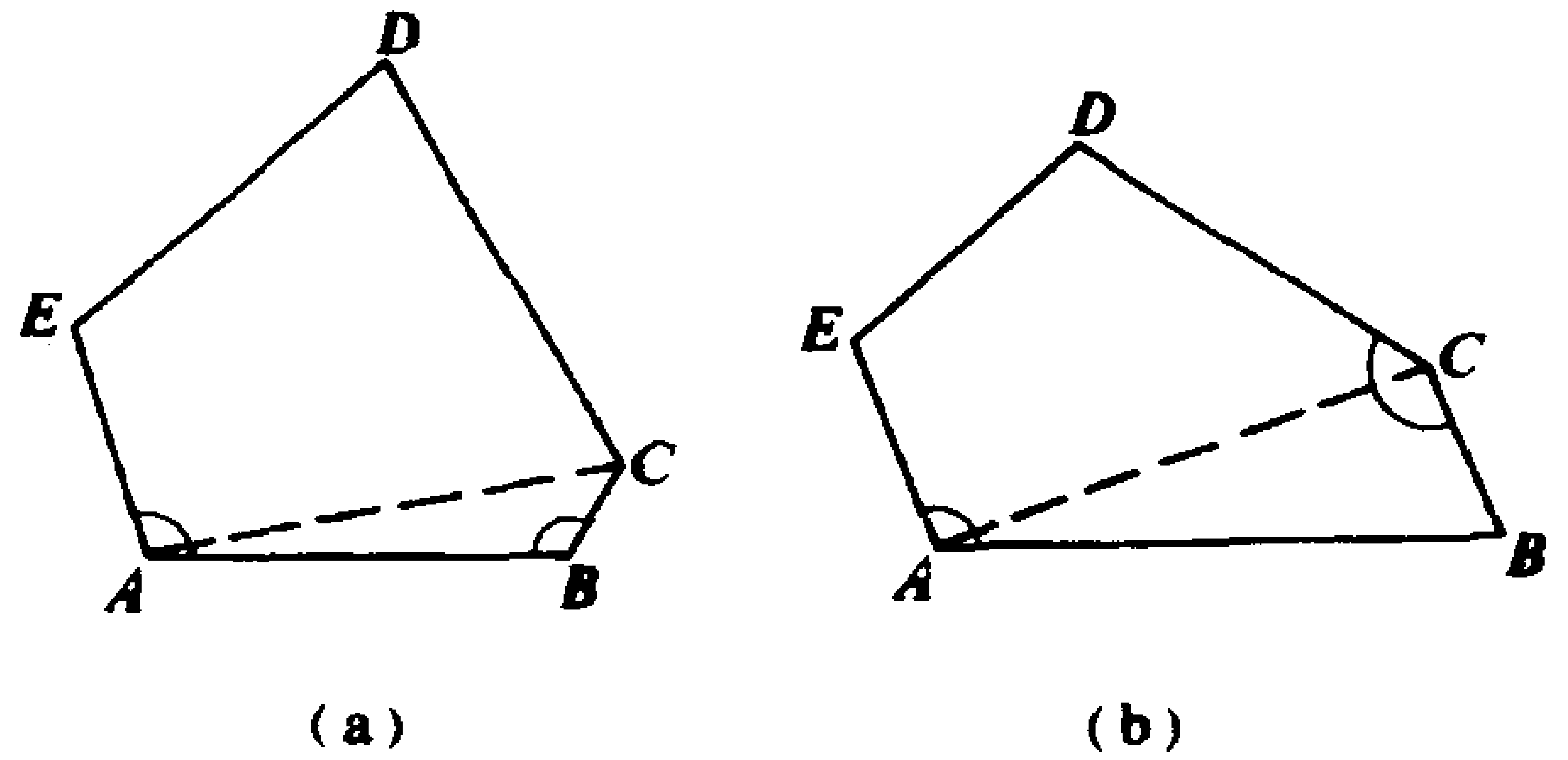

图 6.8

$\angle C$(图 6.8(b)),在这两种情形下,均连结 AC,则凸四边形 $ACDE$ 还至少有另一个非锐角.因此至少有三个非锐角三角形.

有了以上的准备,本题就容易解决了.

由于 100 个点共有 C_{100}^5 个不同的五点组,每个五点组中都至少有三个非锐角三角形,而每一个非锐角三角形的三个顶点都可属于 C_{97}^2 个不同的五点组,所以最多可能被重复计算了 C_{97}^2 次,因此以这 100 个点为顶点的三角形中至少有 $3\cdot\dfrac{C_{100}^5}{C_{97}^2}$ 个非锐角三角形.容易算出:

$$3\cdot\frac{C_{100}^5}{C_{97}^2}=C_{100}^3\times 30\%,$$

所以其中锐角三角形所占的比例不会超过 70%.

7

考虑数的大小的极端情况

在有限个实数组成的集合中必有一个最大数也必有一个最小数，在无限个自然数组成的集合中必有一个最小数，这些关于数的大小的极端原理，对于解决一些与数有关的存在性问题往往会发挥一定的作用. 我们还是用例题来说明这一点.

例 7.1 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正整数，令

$$a=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

$$b=\frac{b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

求证：在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中必存在两数 x_i,x_j，使不等式

$$|a-b|\leqslant|a-x_i|\leqslant|x_j-x_i|$$

成立.

证 先计算 $|a-b|$ 的值.

$$|a-b|=\left|a-\frac{b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\right|$$

$$=\frac{|b_1(a-x_1)+b_2(a-x_2)+\cdots+b_n(a-x_n)|}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$\leqslant\frac{b_1|a-x_1|+b_2|a-x_2|+\cdots+b_n|a-x_n|}{b_1+b_2+\cdots+b_n}. \tag{7.1}$$

在 $|a-x_1|$, $|a-x_2|$, $\cdots$, $|a-x_n|$ 中必有一个最大者,设为 $|a-x_i|$,则

$$b_1|a-x_1|+b_2|a-x_2|+\cdots+b_n|a-x_n|$$

$$\leqslant(b_1+b_2+\cdots+b_n)|a-x_i|.$$

于是(7.1)化为

$$|a-b|\leqslant\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)|a-x_i|}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=|a-x_i|. \tag{7.2}$$

再计算 $|a-x_i|$ 的值.

$$|a-x_i|=\left|\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-x_i\right|$$

$$=\frac{|a_1(x_1-x_i)+a_2(x_2-x_i)+\cdots+a_n(x_n-x_i)|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$\leqslant\frac{a_1|x_1-x_i|+a_2|x_2-x_i|+\cdots+a_n|x_n-x_i|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}. \tag{7.3}$$

在 $|x_1-x_i|$, $|x_2-x_i|$, $\cdots$, $|x_n-x_i|$ 中必有一个最大者,设为 $|x_j-x_i|$,则

$$a_1|x_1-x_i|+a_2|x_2-x_i|+\cdots+a_n|x_n-x_i|$$

$$\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)|x_j-x_i|,$$

于是(7.3)化为

$$|a-x_i|\leqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)|x_j-x_i|}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=|x_j-x_i|.\quad(7.4)$$

综合(7.2),(7.4)可知,存在 x_i,x_j 满足

$$|a-b|\leqslant|a-x_i|\leqslant|x_j-x_i|.$$

从这个题目的证明过程中可以看出,在 $|a-x_1|$, $|a-x_2|,\cdots,|a-x_n|$ 中存在最大者,以及在 $|x_1-x_i|$, $|x_2-x_i|,\cdots,|x_n-x_i|$ 中存在最大者,是解题的关键.

例 7.2 已知两个无穷数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,\quad(7.5)$$

$$b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots,\quad(7.6)$$

它们的元素都是自然数,并且对于 $i\neq j$ 有 $a_i\neq a_j,b_i\neq b_j$. 求证:存在两个下标 k,l 且 $k<l$,满足

$$a_k<a_l,\quad b_k<b_l.$$

这个题目实质上是从两个无穷数列中找到两个共同的位置,在这两个位置上的数,前面的比后面的小. 从这个意义考虑,我们应该从这两个数列中挑出一些共同位置的数,使它们从小到大排列,由于在无穷自然数列中一定存在最小数,因此上述工作是可以完成的.

证 由于(7.5)是无穷自然数列,所以必有最小数,设其为 a_{k_1}.

考虑 a_{k_1} 后面所有各项构成的数列

$$a_{k_1+1},a_{k_1+2},\cdots,$$

这个数列也必有最小数,设其为 a_{k_2},显然 $a_{k_1}<a_{k_2}$, $k_1<k_2$.

再考虑 a_{k_2}后面所有各项构成的数列

$$a_{k_2+1},\ a_{k_2+2},\cdots,$$

这个数列也必有最小数 a_{k_3}，显然 $a_{k_1}<a_{k_2}<a_{k_3}$，$k_1<k_2<k_3$.

如此继续下去就得到(7.5)的一个子数列

$$a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_i},\cdots. \tag{7.7}$$

这是一个严格递增的数列，即

$$a_{k_1}<a_{k_2}<\cdots<a_{k_i}<\cdots.$$

再考虑与子数列(7.7)相应的(7.6)的子数列

$$b_{k_1},b_{k_2},\cdots,b_{k_i},\cdots, \tag{7.8}$$

这个数列的大小顺序是没有规律的，我们仍然像处理数列(7.5)那样，从(7.8)中选出一个递增的子数列

$$b_{k_{i_1}},b_{k_{i_2}},\cdots,b_{k_{i_j}},\cdots \tag{7.9}$$

满足

$$b_{k_{i_1}}<b_{k_{i_2}}<\cdots<b_{k_{i_j}}<\cdots,$$

考虑与数列(7.9)相应的(7.7)的子数列

$$a_{k_{i_1}},a_{k_{i_2}},\cdots,a_{k_{i_j}},\cdots, \tag{7.10}$$

它同样满足

$$a_{k_{i_1}}<a_{k_{i_2}}<\cdots<a_{k_{i_j}}<\cdots.$$

对于(7.9)和(7.10)，我们任意取一个 $k=k_{i_j}$，而 l 为大于 k_{i_j}的 k_{i_t}，则必有

$$a_k<a_l,\quad b_k<b_l.$$

例 7.3 设$\frac{m}{n}$是真分数($n>m>0$，m,n 为整数)，证明：存在$\frac{m}{n}$的一种不等的倒数分拆，即存在自然数

$$n_1<n_2<\cdots<n_k,$$

使得
$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}.$$

考虑本题的结论，如果$\frac{m}{n}$能够进行不等的倒数分拆，则n_1是所有分母$n_1,n_2,\cdots,n_k$中最小的，并且$\frac{1}{n_1}\leqslant\frac{m}{n}$. 这就启发我们从考虑小于$\frac{m}{n}$的分子为1的分数$\frac{1}{r}$入手，先寻求最小的$r$作为$n_1$，作出$\frac{m}{n}$与$\frac{1}{n_1}$的差，然后考虑小于$\frac{m}{n}-\frac{1}{n_1}$的分子为1的分数$\frac{1}{r}$，再寻求最小的$r$作为$n_2$，等等. 因此获得下面的解法.

证 考虑满足不等式

$$\frac{1}{r}\leqslant\frac{m}{n} \tag{7.11}$$

的所有自然数r，显然这是一个无穷集合，必有最小数，记这个最小数为n_1，则

$$\frac{1}{n_1}\leqslant\frac{m}{n}.$$

如果$\frac{1}{n_1}=\frac{m}{n}$，则本题已得证.

如果$\frac{1}{n_1}<\frac{m}{n}$，由于

$$0<\frac{m}{n}-\frac{1}{n_1}=\frac{mn_1-n}{nn_1}<\frac{m}{n},$$

令$m_1=mn_1-n$，则$m_1>0$，且$m_1<m$（否则，若$m_1\geqslant m$，则$mn_1-m\geqslant n$，$\frac{1}{n_1-1}\leqslant\frac{m}{n}$，与$n_1$是适合(7.11)的最小数矛盾），再考

虑满足不等式

$$\frac{1}{r}\leqslant\frac{m_1}{nn_1}$$

的所有自然数 r，同样存在一个最小的自然数 $r=n_2$.

如果$\frac{1}{n_2}=\frac{m_1}{nn_1}$，则

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{n_1}+\frac{mn_1-n}{nn_1}=\frac{m}{n},$$

从而本题得证.

如果$\frac{1}{n_2}<\frac{m_1}{nn_1}$，则

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}=\frac{mn_1n_2-nn_2-nn_1}{nn_1n_2}>0.$$

令 $m_2=mn_1n_2-nn_2-nn_1>0$，且 $m_2<m_1$，考虑满足不等式

$$\frac{1}{r}\leqslant\frac{m_2}{nn_1n_2}$$

的所有自然数 r，在无穷多个自然数 r 中必有最小者，设其为 n_3.

如果$\frac{1}{n_3}=\frac{m_2}{nn_1n_2}$，则可得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}.$$

如果$\frac{1}{n_3}<\frac{m_2}{nn_1n_2}$，又可找到 n_4. 如此下去，可得到

$$n_1<n_2<\cdots<n_k,$$

又
$$m>m_1>m_2>\cdots,$$

因此必有 $m_k=0$，从而有

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}.$$

综上所述，本题得证.

例 7.4 求证：对任何整数 $a,b(b\neq 0)$，存在唯一的整数 q 和 r，使得

$$a=bq+r,\quad 0\leqslant r<|b|.$$

这是数论中的一个十分重要的命题，正是由于这个带有余数的除法，使得整数集合可以按照被 $|b|$ 除的余数为 $0,1,2,\cdots,|b|-1$，分成 $|b|$ 类，由此使一些整除或同余的问题得以顺利解决. 例如 $b=2$，此时 $r=0$ 或 1，把整数分为 $a=2q+1$ 型和 $a=2q$ 型的数，即分为奇数和偶数，进行奇偶性分析就是解整数问题的一个常用的解题方法. 证明这个命题的目标是证明 q 和 r 的存在和唯一，而存在性证明就可以用到极端原理.

证 考虑由非负整数 $a-x|b|$（x 是整数）组成的集合 M. 显而易见，M 不是空集. 因为若 $a\geqslant 0$，只要取 $x=0$，则 $a-x|b|=a\geqslant 0$ 就是 M 中的元素；若 $a<0$，只要取 $x=a$，则 $a-x|b|=a(1-|b|)\geqslant 0$ 就是 M 中的元素.

非空的非负整数集 M 必有最小数，设这个最小数为 $a-t|b|$，并设 $r=a-t|b|$，则 $r\geqslant 0$. 为证明 r 的存在性，只须证明 $r<|b|$.

如果 $r<|b|$ 不成立，即 $r\geqslant|b|$，则

$$a-(t+1)|b|=a-t|b|-|b|=r-|b|\geqslant 0,$$

从而 $r-|b|$ 也是 M 中的一个元素，并且

$$r-|b|<r,$$

这与 r 是 M 中的最小元素相矛盾. 于是存在 r，使得 $0\leqslant r<|b|$.

当 $b>0$ 时，取 $q=t$，则

$$r=a-qb, \quad a=qb+r.$$

当 $b<0$ 时，取 $q=-t$，也有 $a=qb+r$.

因而 q 也存在.

下面证明 q 和 r 的唯一性.

设有 q'，r' 也满足

$$a=q'b+r', \quad 0\leqslant r'<|b|,$$

又因为
$$a=qb+r, \quad 0\leqslant r<|b|,$$

则
$$b(q-q')+(r-r')=0,$$

$$b(q-q')=r'-r.$$

于是 $r'-r$ 是 b 的倍数. 又由于

$$-|b|<r-r'<|b|,$$

所以必有 $r-r'=0$，$r=r'$，从而 $q=q'$. 唯一性得证.

例 7.5 设 S 是一个整数的非空集合，满足

(1)如果 x 和 y 都是 S 中的元素，那么 $x-y$ 也是 S 的元素；

(2)如果 x 是 S 中的元素，那么 x 的任意整数倍也是 S 的元素.

求证：在 S 中存在一个正整数 d，使得 S 中的所有元素都是 d 的倍数.

从题目的求证可以分析出来，若 S 中所有元素都是 d 的

倍数，d 一定是某一个范围内的最小数，所以解此题时须考虑使用极端原理.

证 如果 S 中只有一个元素 0，则满足题目中(1)，(2)这两个要求，命题显然成立.

如果 S 中除 0 之外还有其他元素，可以证明 S 中必有正整数.

事实上，若整数 c 是 S 中的元素，则由条件(1)，$0-c=-c$也是 S 中的元素，而 c 与 $-c$ 之中一定有一个是正整数.

在 S 中的所有正整数元素中，一定有一个最小数 d.

由条件(2)，d 的所有倍数都是 S 中的元素. 欲证明 S 的所有元素都是 d 的倍数，只要证明不是 d 的倍数便不在 S 之中即可.

设 $h=kd+r$，若 h 不是 d 的倍数，则有 $0<r<d$，且设 h 是 S 的元素，由条件(1)，(2)，

$$r=h-kd$$

也是 S 中的元素，但 $r<d$，与 d 是 S 中所有正整数元素中的最小者相矛盾，所以 h 不是 S 中的元素，即不是 d 的倍数就不在 S 中.

由以上可得，存在一个正整数 d，使得 S 中的所有元素都是 d 的倍数.

例 7.6 我们称一个非负实数集合 S 是一个“好集合”，是指对 S 中所有的 x 和 y，或者 $x+y$ 在 S 中，或者 $|x-y|$ 在 S 中. 例如若 r 是一个正实数，n 是一个正整数，则 r 的倍数的集合 $\{0,r,2r,\cdots,n-r\}$ 就是一个“好集合”，集合 $\{0\}$ 也是一个

“好集合”.

证明：每一个除$\{0\}$以外的有限个元素的“好集合”，要么它的全部元素都是某个正实数 r 的倍数，要么恰巧有 4 个元素.

证 若 A 是一个除$\{0\}$以外的由有限个元素组成的“好集合”，则它含有一个最小的正数 r 和一个最大的正数 m.

考虑集合 A 中满足 $a+b>m$ 的任何两个数 a 和 b，且 $a<b$，由于 $a+b$ 不在 A 中，则 $b-a$ 在 A 中. 因此，对 A 中的任何元素 a，$m-a$ 也是 A 的元素，特别地，$0=m-m$ 也是 A 中的元素.

如果 $m=r$，则 A 只有两个元素 0 和 r，这两个元素都是 r 的倍数，A 是一个“好集合”.

如果 $m\neq r$，则 $m-r$ 是 A 的一个元素.

若 $m-r=r$，则 $m=2r$. 这时 A 中已有 3 个元素：$0,r,2r$. 如果此时 A 中还有第 4 个元素 a，则 $r<a<2r$，于是 $2r-a$ 在 A 中，但是 $0<2r-a<r$，与 r 是 A 中的最小正数相矛盾. 于是 A 中只有 3 个元素：$0,r,2r$，这 3 个元素都是 r 的倍数，A 是一个“好集合”.

若 $m-r\neq r$，则 A 中有 4 个元素：$0,r,m-r,m$. 如果 A 中没有其他元素，这时 A 是一个“好集合”，并且 A 恰好有 4 个元素.

下面考虑 A 有 5 个或 5 个以上元素的情况. 设

$$A=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\},\ n\geqslant 4.$$

其中 $x_0=0,x_1=r,x_n=m$，即有

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=m.$$

因为对于所有的 $i\left(1\leqslant i<\frac{n+1}{2}\right)$，$m-x_i$ 是 A 中的元素，故必然有 $m-x_i=x_{n-i}$.

注意到对于 $i<j<\frac{n}{2}$，有

$$x_{n-i}+x_{n-j}>m,$$

由此推出

$$x_{n-i}-x_{n-j}=(m-x_i)-(m-x_j)=x_j-x_i,$$

并且由好集合的定义及 r 是最小正数又必有 $x_2-x_1=x_1=r$，$x_3-x_1=x_2=2r$，等等，以至于对于 $1\leqslant i<\frac{n}{2}$，x_i 依次为 r 的整数倍.

先考虑 n 为偶数的情形.

由于对于 $1\leqslant i<\frac{n}{2}$，x_i 依次为 r 的整数倍，则对于整数 $q\geqslant 2$，有 $qr<m-qr$，且 A 中的元素从小到大为

$$0,r,2r,\cdots,qr,m-qr,m-(q-1)r,\cdots,m-r,m.$$

由于 $(m-r)+qr>m$，则 $(m-r)+qr$ 不是 A 中的元素，从而 $m-r$ 与 qr 的差即 $(m-r)-qr=m-(q+1)r$ 是 A 中的元素，由于 $m-(q+1)r<m-qr$，所以由 A 的元素的排列知，它只能等于 qr，从而 $m=(2q+1)r$，因此 A 的全部元素为

$$0,r,2r,\cdots,qr,\cdots,(2q+1)r.$$

于是若 A 是“好集合”，则 A 中的元素都是 r 的整数倍.

再考虑 n 为奇数的情形.

对于整数 $q\geqslant 1$，且 $qr<\frac{m}{2}$，则 A 中元素从小到大依次为

$$0, r, 2r, \cdots, qr, \frac{m}{2}, m-qr, \cdots, m-r, m.$$

由于$(m-r)+\frac{m}{2}>m$,因此$(m-r)-\frac{m}{2}=\frac{m}{2}-r$是$A$中的元素,它只能等于$qr$,从而$m=2(q+1)r$,因此$A$的全部元素为

$$0, r, 2r, \cdots, qr, \cdots, 2(q+1)r.$$

于是若A是"好集合",则A中的元素都是r的整数倍.

总之,当"好集合"A有2个元素,3个元素以及大于4个的有限个元素时,这些元素都是某个正实数r的整数倍;而当"好集合"A的所有元素不都是r的整数倍时,它恰有4个元素:$0, r, m-r, m$.

例7.7 设$f(n)$是一个在自然数集N上有定义并在N中取值的函数,试证:如果对于每个$n\in N$,不等式

$$f(n+1)>f(f(n))$$

都成立,则对所有$n\in N$,都有

$$f(n)=n.$$

显然,解这个题目的关键是证明$f(n)$是一个严格递增的函数,道理很简单,因为$f(n)$的定义域和值域都是自然数(值域也许是自然数集的一个子集),如果函数是递增的,则必有$f(n)\geqslant n$,又由$f(n+1)>f(f(n))$就有$f(n)<n+1$,从而必有$f(n)=n$.因此我们证明本题就要从证明$f(n)$的递增性出发.

证 首先证明

$$f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$$

是严格递增的，即对所有的 $n\in N$，都有

$$f(n)<f(n+1).$$

换句话说，对任何 $k\in N$，$f(k)$是数列

$$f(k),f(k+1),f(k+2),\cdots \tag{7.12}$$

中的唯一最小值.

若不然，假设 $f(1),\cdots,f(k-1)$是递增的，而数列(7.12)不是递增的，设 k 是使 $f(k)$不是(7.12)中唯一最小项的最小自然数，于是在无穷个自然数

$$f(k+1),f(k+2),\cdots,f(k+t),\cdots$$

中必有一个最小项，设其为 $f(k+m)$，因为

$$f(1)<f(2)<\cdots<f(k-1)<f(k+m),$$

注意到 $f(i)(i=1,2,\cdots,k-1)$均在 N 上取值，$f(k+m)$又是最小的，并且 $f(k+m)>f(i)$，所以必然有

$$f(k+m)\geqslant k.$$

考虑到 $n=k+m-1\geqslant k$，因为 $f(k+m)$最小，所以

$$f(k+m)\leqslant f(k+m-1),$$

即

$$f(n)\geqslant f(k+m)\geqslant k.$$

$$f(f(n))\geqslant f(k)\geqslant f(k+m),$$

从而

$$f(k+m)\leqslant f(f(k+m-1)),$$

与已知条件 $f(n+1)>f(f(n))$矛盾. 因此$\{f(n)\}$严格递增.

下面证明 $f(n)=n$. 假设 k 是使 $f(n)=n$ 不成立的最小自然数，则必有

$$f(k)\geqslant k+1.$$

由 $f(n)$的严格递增性，则有

$$f(f(k)) \geqslant f(k+1).$$

但由已知

$$f(f(k)) < f(k+1),$$

出现矛盾.因此对所有的 $n \in N$,必有 $f(n)=n$.

例 7.8 已知 $n \geqslant 2$,求证:如果 k^2+k+n 对于整数 k,且 $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$ 是质数,则 k^2+k+n 对于所有满足 $0 \leqslant k \leqslant n-2$ 的 k 都是质数.

这是 1987 年举办的第 28 届国际数学奥林匹克的第六题,这个题目是证明 k^2+k+n 是质数.大家知道,质数的分布是没有太多的规律可循的,特别是没有一个函数表达式来表示质数,因此证明一个数是质数的问题通常都是用反证法来解决的.对于本题即假定 $k^2+k+n(0 \leqslant k \leqslant n-2)$ 是合数,由于这是有限个合数,必有一个处于极端状态的合数,即最小合数,我们从分析这个最小合数所具有的特征入手找出矛盾,便可达到证明的目的.

证 假设对所有的 $k(0 \leqslant k \leqslant n-2)$,$k^2+k+n$ 不都是质数,即存在一些满足 $0 \leqslant k \leqslant n-2$ 的 k,使得 k^2+k+n 是合数,显然这样的合数只有有限个,因而必有一个最小的合数.

设 $k_0^2+k_0+n$ 是合数 $k^2+k+n(0 \leqslant k \leqslant n-2)$ 中最小的一个,则 $k_0 \leqslant n-2$.

因为 $k_0^2+k_0+n$ 是合数,它的质因数也只能有有限个,因而必有一个最小质因数,设它为 q,则必有

$$q^2 \leqslant k_0^2+k_0+n.$$

首先我们证明 $q>2k_0$.

仍用反证法. 如果 $q\leqslant 2k_0$，考察差

$$(k_0^2+k_0+n)-(k^2+k+n)=(k_0-k)(k_0+k+1),$$

其中 k 是小于 k_0 的非负整数，这时的 k^2+k+n 是质数(因为 $k_0^2+k_0+n$ 是合数中最小者).

我们取 $k=0,1,\cdots,k_0-1$ 时，可以算出

$$k_0-k=1,2,\cdots,k_0,$$

$$k_0+k+1=k_0+1,k_0+2,\cdots,2k_0.$$

这就是说，k_0-k 与 k_0+k+1 遍取 $1,2,\cdots,2k_0$ 诸数. 由于 $q\leqslant 2k_0$，所以 q 必定是$(k_0-k)(k_0+k+1)$中某一个数的约数. 设 q 是$(k_0-k')(k_0+k'+1)$的约数，即 q 是$(k_0^2+k_0+n)-(k'^2+k'+n)$的约数. 因为 q 是 $k_0^2+k_0+n$ 的约数，则 q 是 $k'^2+k'+n$的约数，而 q 和 $k'^2+k'+n$ 都是质数，所以

$$q=k'^2+k'+n.$$

另一方面，

$$k_0-k'\leqslant k_0\leqslant n-2<n+k'+k'^2=q,$$

$$\begin{aligned}k_0+k'+1&\leqslant(n-2)+k'+1\\&=n+k'-1<n+k'+k'^2\\&=q,\end{aligned}$$

因此 q 不可能整除$(k_0-k')(k_0+k'+1)$，从而导致矛盾. 这就意味着 $q\leqslant 2k_0$ 不成立，即 $q\geqslant 2k_0+1$. 于是可得到不等式

$$k_0^2+k_0+n\geqslant q^2\geqslant(2k_0+1)^2=4k_0^2+4k_0+1,$$

即
$$3k_0^2\leqslant n-1-3k_0\leqslant n-1<n,$$

$$k_0<\sqrt{\frac{n}{3}}.$$

然而由已知，对满足 $k_0<\sqrt{\frac{n}{3}}$ 的 k_0，$k_0^2+k_0+n$ 应是质数，与假设 $k_0^2+k_0+n$ 是合数矛盾，因此这样的 k_0 不存在，从而对 $0\leqslant k\leqslant n-2$，$k^2+k+n$ 都是质数.

这个题目还有一个证法，从下面的证法大家可以看出，虽然证法不相同，但有一点是相同的，就是必须使用极端原理，通过对最小合数以及最小质因数的分析来解题.

又证 假设存在一些满足 $0\leqslant k\leqslant n-2$ 的 k，使得 k^2+k+n 不是质数，而是合数. 设 $k_0^2+k_0+n$ 是所有上述合数中的最小合数，q 是它的最小质因数.

(1)如果 $q\leqslant k_0$，则可设 $k_0=q+b\quad(b\geqslant 0)$，

$$k_0^2+k_0+n=q(q+2b+1)+b^2+b+n.$$

因为
$$b^2+b+n<k_0^2+k_0+n,$$

所以 b^2+b+n 是质数. 又因为 q 是 $k_0^2+k_0+n$ 及 $q(q+2b+1)$ 的约数，则 q 也是 b^2+b+n 的约数，因此

$$q=b^2+b+n>n-2.$$

而实际上 $q\leqslant k_0\leqslant n-2$，发生矛盾，所以 $q\leqslant k_0$ 不成立.

(2)如果 $q>k_0$，则可设 $q=k_0+b$，于是

$$k_0^2+k_0+n=q(q-2b+1)+(b-1)^2+(b-1)+n.$$

若 $b-1<k_0$，可以证出

$$q=(b-1)^2+(b-1)+n,$$

从而
$$k_0^2+k_0+n=q(q-2b+1)+q.$$

于是有

$$q^2 \leqslant k_0^2 + k_0 + n = q^2 - 2bq + 2q.$$

由此得 $$2bq \leqslant 2q, \quad b \leqslant 1.$$

因此 $b=1$,从而 $q=n$,又

$$q = k_0 + b = k_0 + 1 = n,$$

$$n = k_0 + 1 \leqslant n - 2 + 1 = n - 1,$$

出现矛盾. 于是 $b-1 \geqslant k_0$,$b \geqslant k_0+1$. 即

$$q = k_0 + b \geqslant 2k_0 + 1.$$

以下的证法与第一种方法相同.

8

考虑数的和的极端情况

有些关于若干个数的和的存在性问题，它的存在常常出现在某些数的和的极端情形之中，即某些数的最大和或最小和与存在性有关，也有些数的存在性命题，与某些数的整体情况有关，这时考虑这些数的和的极端情形，也往往有助于解题.

例 8.1 现有 1995 个人，其中某些人相互认识. 证明：可以将这 1995 个人以某种方式分成两组，使得每个人都至少有一半熟人不跟他分在同一组.

由于本题的分组目标是使每个人都至少有一半熟人不跟他同组，又由于这里是要求“每个人”而不是“某个人”，所以我们应对每个人的不在同组的那些熟人的整体进行考察，显然，这些

熟人人数之和越大，目标越容易实现，题目要求的分组方法很可能就出现在每个人的不在同组的那些熟人人数之和的最大值时，我们的解法就从这里开始. 下面的解法只不过是将上述解题思路用数学符号表达出来而已.

证 设这 1995 个人为 $A_1, A_2, \cdots, A_{1995}$. 又设 A_i 有 a_i 个熟人，在 a_i 个熟人中有 b_i 个不跟他同一组. 分组方法不同，b_i 的值也不同.

本题相当于证明：存在某种分组法，使得对每个 i 都有 $b_i \geqslant \frac{1}{2}a_i \quad (i=1,2,\cdots,1995)$.

考虑不在同一组的熟人人数之和，即

$$b=b_1+b_2+\cdots+b_{1995}.$$

显然每一个分组方法都对应一个 b 值，分法不同，b 值不同.

由于人数总共有 1995 人，所以分法也是有限的，因而 b 只能在有限个正整数中取值，所以必存在一个最大值，设其为 b'.

我们证明，与 b' 相应的分组方法就是合乎要求的分法. 用反证法.

假设 $b'=b_1+b_2+\cdots+b_{1995}$ 是所有 b 中的最大者，但甲组中有某个成员 A_i，他在乙组中的熟人数目为 b_i，且 $b_i<\frac{1}{2}a_i$.

这时我们将 A_i 调往乙组，这时甲组中原有的 a_i-b_i 个 A_i 的熟人不再与 A_i 同组，而乙组中 b_i 个熟人却与 A_i 同组了，并且这 b_i 个人由于 A_i 的调入而减少了一个不同组的熟人，除此之外，其他的熟人关系没有发生变化，我们研究调动前后熟人

之和的变化情况.

设调动后的熟人之和为 b,调动前为 b',考虑 b 与 b' 的差(注意到 $b_i<\frac{1}{2}a_i$):

$$b-b'=(a_i-b_i)-b_i=a_i-2b_i>0,$$

因而 $b>b'$,这与 b' 的最大性发生矛盾,再由甲、乙两组的对称性,本题得证.

例 8.2 设在一环形公路上有 n 个汽车站,每一站存有汽油若干桶(其中有的站可以是零桶),n 个站的总存油量恰够一辆汽车沿此公路行驶一周.现在使一辆原来没油的汽车依逆时针方向沿公路行驶,每到一站即把该站的存油全部带上(出发的站也如此).试证:n 站之中至少有一站,可以使汽车从这站出发环行一周,而不致在中途因缺油而停车.

证 设这些汽车站记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,并设它们按逆时针方向依次布列在环形公路上.

又设 A_i 的储油量与汽车由该站到下一站所需油量之差为 h_i(图 8.1),于是各站上述差数之和为 0,即

$$h_1+h_2+\cdots+h_n=0.$$

我们从 h_1 起计算下面的和:

$$H_1=h_1,H_2=h_1+h_2,\cdots,H_i=h_1+h_2+\cdots+h_i,$$

$$\cdots,H_n=h_1+h_2+\cdots+h_n.$$

显然 $H_n=0$,又因为 h_i 可以大于 0,等于 0,也可以小于 0.若 $h_i>0$,则说明从 A_i 到 A_{i+1}之后还有剩余的油量.

在所有的和数 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中一定有一个最小者,设

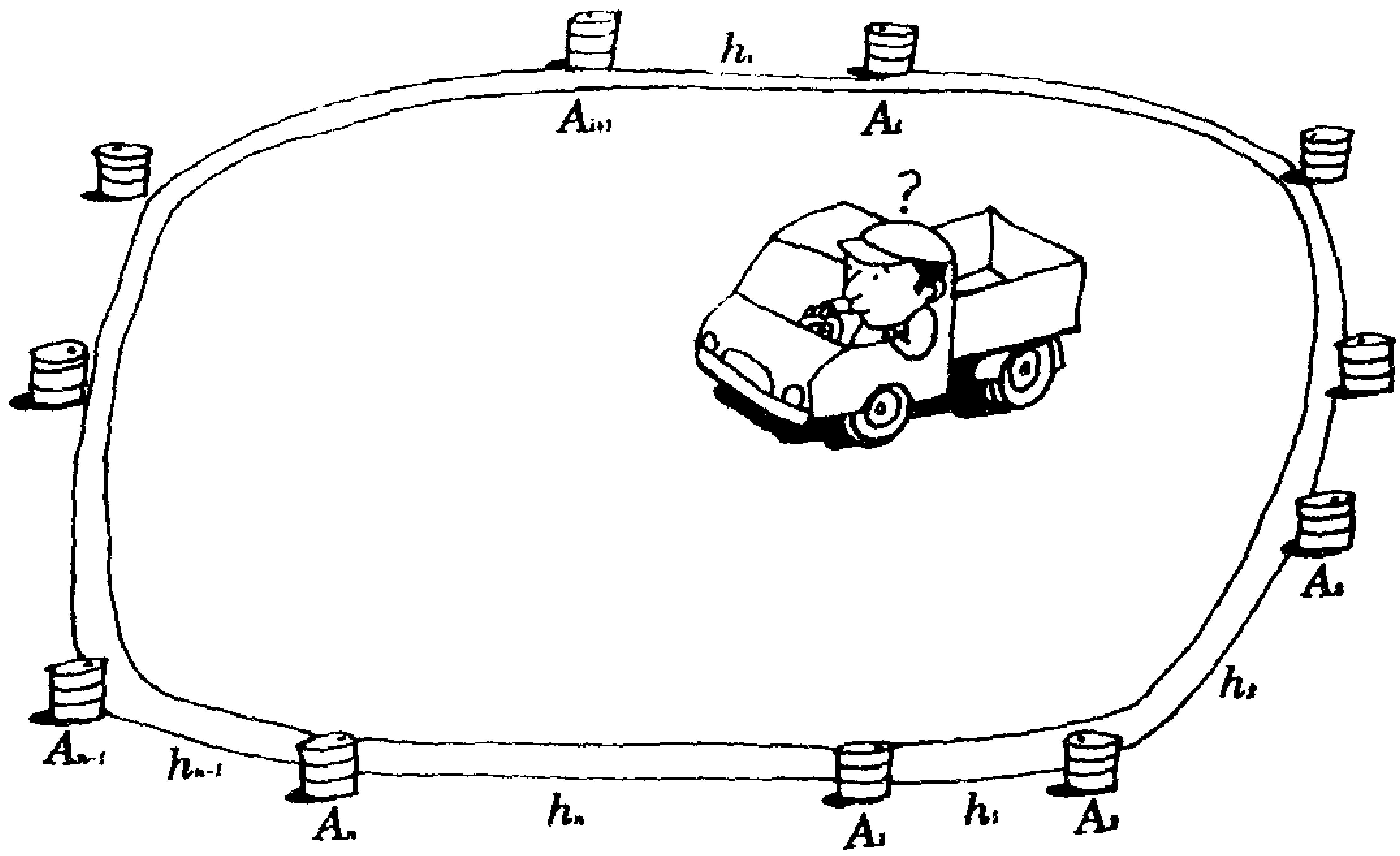

图 8.1

其为 H_j，则

$$H_j \leqslant H_n = 0.$$

若 $H_j = 0$，则汽车从 A_1 出发，可利用这些油逆时针环行一周回到 A_1.

若 $H_j < 0$，这时汽车从 A_{j+1} 出发就可环行一周. 事实上，由 H_j 的最小性，则 $H_{j+1} - H_j = h_{j+1} > 0$，从而可以从 A_{j+1} 到 A_{j+2} 而不致缺油，同样由 $H_{j+2} - H_j = h_{j+1} + h_{j+2} > 0$，也必能从 A_{j+1} 到 A_{j+3}，如此下去，由 H_j 的最小性，从 h_{j+1} 开始的逆时针累加之和均为非负，从而可以利用这些油使汽车环行一周.

以上这个题目的解题思路也是很自然的，为了使汽车能环行一周，我们找一段公路(包括若干相邻站)，使汽车在这段路上的总剩油量最少(可以是负数)，那么从下一站开始，剩油

量就为非负数,汽车利用这些油自然能环行一周.

例 8.3 已知实数列$\{a_k\}(k=1,2,3,\cdots)$具有下列性质:存在自然数 n,满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$$

及
$$a_{n+k}=a_k \quad (k=1,2,\cdots).$$

证明:存在自然数 N,使当 $k=0,1,2,\cdots$时满足不等式

$$a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}\geqslant 0.$$

我们首先理解题意.已知条件给出一个无穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.所谓存在 n 满足 $a_{n+k}=a_k$,意即此数列以 n 为周期变化.比如 $n=5$,则对 $k=1,2,\cdots$就有

$$a_6=a_1,a_7=a_2,a_8=a_3,\cdots,a_{5+k}=a_k,\cdots$$

即这个数列的各项以 5 为周期变化,此外有

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0,$$

同样还有
$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0,$$
$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=0.$$

等等,即数列的相邻 5 项的和均为零.上面我们是以 5 为例,若对某个确定的 n,则该数列以 n 为周期变化,并且任意连续 n 项之和均为零.

再来研究题目的求证.如果令 $S_j=a_1+a_2+\cdots+a_j$,那么求证中的 $a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}=S_{N+k}-S_{N-1}$.为使 $S_{N+k}-S_{N-1}$对所有的 $k=0,1,2\cdots$都是非负数,一个自然而合理的愿望就是使 S_{N-1}最小,为使 S_{N-1}最小,由于 S_j 是实数,必须使 S_j 只有有限个,而这一点由数列的周期性可以立即得到.

证 记 $S_j=a_1+a_2+\cdots+a_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$

由题设 $a_{n+k}=a_k\quad(k=1,2,\cdots)$ 可得

$$\begin{aligned}&S_{n+j}\\&=S_j+a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_{j+n}\\&=S_j+a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=S_j.\end{aligned}$$

这就表明，对于无穷个和 $S_1,S_2,\cdots,S_j,\cdots$，只有有限个不同值，因而必有一个最小者，设其为 S_{N-1}.

因此，对所有 $k=0,1,2,\cdots$，都有

$$S_{N+k}-S_{N-1}\geqslant 0,$$

即
$$a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}\geqslant 0.$$

例 8.4 有 10 个男生在一次比赛中所得分数均不超过 20 分，有 20 个女生在这次比赛中所得分数均不超过 10 分（得分均为自然数）. 证明：一定有一些男生所得分数之和等于一些女生所得分数之和.

证 设 10 个男生所得分数依次为

$$a_1,a_2,\cdots,a_{10}.$$

20 个女生所得分数依次为

$$b_1,b_2,\cdots,b_{20}.$$

由题设，$a_i\leqslant 20,b_j\leqslant 10,i=1,2,\cdots,10,j=1,2,\cdots,20$，且 a_i 和 b_j 都是自然数.

记 $S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i,\quad i=1,2,\cdots,10,$

$T_j=b_1+b_2+\cdots+b_j,\quad j=1,2,\cdots,20.$

不妨设 $S_{10}\geqslant T_{20}$.

由于 $S_{10}\geqslant T_{20}$，所以一定存在一些差 S_i-T_j 为非负整数，并且是有限个，固定 j，在非负整数 S_i-T_j 中一定有一个最小的自然数 t_j，使 $S_{t_j}-T_j\geqslant 0$ 成立（从而 $S_{t_j-1}-T_j<0$）.

对于所有的 j，考察 20 个差：

$$C_j=S_{t_j}-T_j=S_{t_j-1}+a_{t_j}-T_j<a_{t_j}\leqslant 20.$$

因为 $0\leqslant C_j<20$，所以 C_j 只能取 $0,1,2,\cdots,19$ 中的某一个整数.

若 $C_j\neq 0$，即 $S_{t_j}\neq T_j$，则 $C_1,C_2,\cdots,C_{20}$ 这 20 个差中只能取 19 个数，必有两个差相等，设 $C_k=C_j$，即

$$(S_{t_k}-T_k)-(S_{t_j}-T_j)=0.$$

从而

$$S_{t_k}-S_{t_j}=T_k-T_j.$$

而 $S_{t_k}-S_{t_j}$ 恰为某些 a_i 之和，T_k-T_j 恰为某些 b_i 之和，所以有某些 a_i 之和等于某些 b_i 之和. 本题得证.

若 $C_j=0$，则

$$S_{t_j}=T_j,$$

本题也得证.

例 8.5 设 a 是正实数，k 为自然数，r 为整数，且 $0\leqslant r\leqslant k-1$. 求证：

$$ra+a^{k-r}\leqslant\max\{ka,a^k\}.$$

其中记号 $\max\{c,d\}$ 表示 c 和 d 中的最大者.

证 先考虑几种特殊情况.

当 $a=1$ 时，$ra+a^{k-r}=r+1$.

由已知 $r+1\leqslant k$，又 $k\geqslant 1$，于是满足

$$r+1\leqslant k=\max\{k,1\},$$

即 $a=1$ 时结论成立.

当 $a\neq 1$，但 $k=1$ 时，$r=0$，则

$$ra+a^{k-r}=a,$$

于是 $a\neq 1$，$k=1$ 时结论成立.

当 $a\neq 1$，但 $k=2$ 时，$r=0$ 或 $r=1$，则

$$ra+a^{k-r}=ra+a^{2-r}.$$

当 $r=0$ 时，$ra+a^{2-r}=a^2\leqslant\max\{2a,a^2\}$，

当 $r=1$ 时，$ra+a^{2-r}=2a\leqslant\max\{2a,a^2\}$.

于是 $a\neq 1$，$k=2$ 时结论成立.

下面证明 $a\neq 1$，且 $k>2$ 时结论成立.

注意到当 r 取 $0,1,2,\cdots,k-1$ 这 k 个整数时，$ra+a^{k-r}$ 至多取 k 个不同的值，从而必有最大值. 现考虑 $ra+a^{k-r}$ 取得最大值时的情形.

如果当 r 满足 $0<r<k-1$ 时，使得 $ra+a^{k-r}$ 达到最大值，则必有

$$ra+a^{k-r}\geqslant(r+1)a+a^{k-(r+1)},\tag{8.1}$$

且
$$ra+a^{k-r}\geqslant(r-1)a+a^{k-(r-1)}.\tag{8.2}$$

由(8.1)可得

$$a^{k-r}\left(1-\frac{1}{a}\right)\geqslant a,\tag{8.3}$$

由(8.2)可得

$$a\geqslant a^{k-r}(a-1).\tag{8.4}$$

由(8.3)，(8.4)可得

$$a^{k-r}\left(1-\frac{1}{a}\right) \geqslant a^{k-r}(a-1),$$

$$1-\frac{1}{a} \geqslant a-1,$$

即

$$(a-1)^2 \leqslant 0. \tag{8.5}$$

由 $a \neq 1$，则(8.5)不成立. 因此不可能在 r 满足 $0<r<k-1$ 时使 $ra+a^{k-r}$ 取得最大值. 但最大值一定存在，因此只有当 $r=0$ 或 $r=k-1$ 时，$ra+a^{k-r}$ 才能达到最大值.

$r=0$ 时，$ra+a^{k-r}=a^k$，

$r=k-1$ 时，$ra+a^{k-r}=ka$.

于是必有

$$ra+a^{k-r} \leqslant \max\{a^k, ka\}.$$

9

考虑元素个数的极端情况

如果我们研究的对象与具有某种性质的集合有关，这时我们的着眼点常常是具有这种性质的最多元素或最少元素组成的集合，题目求证的结果往往就出现在这些集合之中.

例 9.1 有 n 个男生和 m 个女生($n,m\geqslant 2$)，每个男生至少与一女生彼此相识，每个女生不全认识这 n 个男生. 证明：他们当中一定有两个男生和两个女生，其中每个男生恰好认识其中一个女生，每个女生恰好认识其中一个男生.

从题目的求证中可以看出，本题涉及彼此相识的集合，比如每一个女生都对应这样一个男生的集合，这些男生都和该女生相识；每个男生也都对应这样一个女生的集合，这些女生都

和该男生相识.这些集合的元素个数可能不同.显然为了达到求证的目的,从认识男生最多的集合来考虑问题是很自然的事.

证 对每一个女生都对应一个她所认识的男生的集合,其中必有一个集合的人数最多,设 A_1 是认识男生最多的那个女生.

由题设,每个女生不全认识 n 个男生,则 A_1 至少与一个男生不相识,设 A_1 与男生 B_1 不相识.

由题设,每个男生至少与一个女生相识,则 B_1 虽然不与 A_1 相识,也至少与另一个女生相识,设此女生为 A_2.

因为 A_2 认识的男生不会比 A_1 认识的男生多,所以必有这样一个男生(设为 B_2),他与 A_1 相识,却不与 A_2 相识.

这样,女生 A_1 和 A_2,男生 B_1 和 B_2 满足题目要求:A_1 恰与 B_2 相识(而不与 B_1 相识),A_2 恰与 B_1 相识(而不与 B_2 相识).

例 9.2 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛,其中每个成员至少参加一场比赛.求证:在这种安排中,必有 6 场比赛,其 12 个参赛者各不相同.

本题考虑的对象应该是每一对单打选手组成的集合,为使 6 场比赛的 12 名选手均不相同,则应考虑在选手对的集合中那些选手都不相同的子集合.

证 记参加第 j 场比赛的选手对为 (a_j,b_j),并记

$$S=\{(a_j,b_j)\mid j=1,2,\cdots,14\}.$$

设 M 为 S 的一个子集,如果 M 中所含选手对中出现的

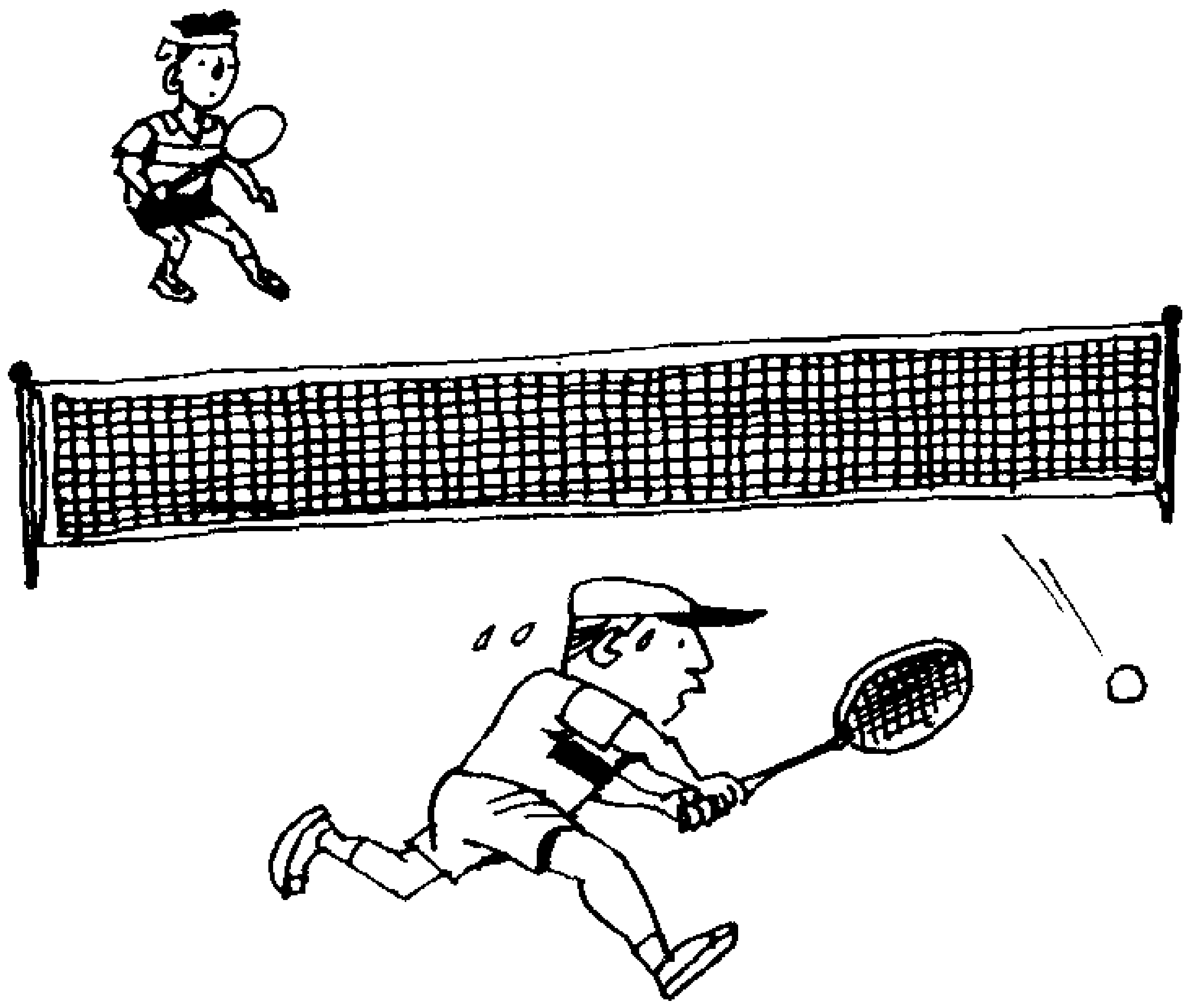

图 9.1

所有选手互不相同，就称 M 为 S 的一个“好子集”.

显然，这样的“好子集”只有有限多个. 在这有限多个“好子集”中一定有一个子集的元素个数最多，设这个元素个数最多的“好子集”为 M_0，它的元素的个数为 r.

本题就相当于证明 $r \geqslant 6$.

M_0 中共出现 $2r$ 个选手，由于 M_0 是最大的“好子集”，所以在 M_0 中未出现过的 $20-2r$ 名选手之间互相没有比赛，否则与 M_0 的最大性矛盾.

这就意味着这 $20-2r$ 名选手所参加的比赛一定是同 M_0 中的 $2r$ 名选手进行的.

由于已知每名选手至少参加一场比赛，所以除了 M_0 中的 r 场比赛之外，至少还要进行 $20-2r$ 场比赛.

如果 $r \leqslant 5$，则总比赛场数至少为

$$r+(20-2r)=20-r\geqslant 15,$$

与总比赛场数为 14 矛盾. 所以 $r\leqslant 5$ 不成立，即 $r\geqslant 6$. 于是必有 6 场比赛，其 12 名参赛者各不相同.

例 9.3 在一次无秩序的拳击比赛中，许多场比赛的举行都完全是随机的，在比赛之后，组织者决定按以下方式有秩序地将拳击手划分成 n 个队($n>1$)，使得对每个拳击手来说，在他所在的队里至多安排与总人数的 $1/n$ 进行比赛，问这种划分是否总有可能?

同例 9.2 一样，我们思考的目标还应该是拳击手对的集合，不过与例 9.2 不同的是，本题是要求“至多”参加比赛的人数，因此应从拳击手对最少这一极端情况出发.

解 这种划分总是可能的. 下面给予证明.

对所有拳击手的任何一个编组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，我们把同一组 A_i 中，曾经交过手的每对拳击手的对数记作 m_i，并记 $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

每一种编组方式都对应于一个曾交过手的拳击手的总对数 m，由于这种可能的划分的数目是有限的，所以 m 的个数也是有限的，故必有一个最小者. 我们证明，最小的 m(设为 m_0)对应的分组方式满足题目的条件.

假定在 m_0 所对应的分组方式中有一个拳击手 L，与该拳击手在同一组中且交过手的人数超过与 L 交过手的总人数的 $1/n$. 由于共有 n 个队，则必有另一队，它所包含的与 L 交过手的人数小于与 L 交过手的人数的 $1/n$，把 L 调到这一队仍然满足题目要求，但这时 m 的数值减小了，与 m_0 最小矛

盾.

所以题目要求的划分是可能的.

例 9.4 给定 $mn+1$ 个正整数

$$a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1},$$

且满足

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{mn+1}.$$

证明:或者存在 $m+1$ 个数,使它们中没有一个数能被另一个数整除;或者存在 $n+1$ 个数,使得它们从小到大排成序列,除前面的一个数之外,每个数都能被它前面的数整除.

对这个题目的思考显然要以具有"每个数都能被它前面的数整除"这种特征的一串数作为研究对象,如果这一串数的个数超过 $n+1$ 则满足求证的第二个要求,如果没有 $n+1$ 个数就设法证明满足求证的第一个要求.

证 对任何一个数 a_i,我们都可以构造一个整除链

$$a_i = a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{\alpha(i)}},$$

使得除 a_i 之外,每个数都能被它前面的数整除,并称 $\alpha(i)$ 为这条整除链的长度.

所有这种从 a_i 开始的整除链中,使 $\alpha(i)$ 最大的,我们称之为从 a_i 开始的最大整除链,其长度记为 $A(i)$. 对于 $A(1)$, $A(2), \cdots, A(mn+1)$,必有一个最大者,记为 $A(j)$.

如果 $A(j) \geqslant n+1$,那就说明从 a_j 开始的最大整除链长 $\geqslant n+1$,取前面的 $n+1$ 个数,则这 $n+1$ 个数中,除前面的一个数之外,每个数都能被它前面的数整除.

如果不存在长度 $\geqslant n+1$ 的最大整除链,即对所有的 i,

$A(i)\leqslant n$,则 $mn+1$ 个正整数 $A(1),A(2),\cdots,A(mn+1)$ 只能取 $1,2,\cdots,n$ 中的值,故至少有 $[\frac{mn+1}{n}]+1=m+1$ 个相同(其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如 $[3.14]=3$,$[-1.5]=-2$,等等).

我们设 $A(i_1),A(i_2),\cdots,A(i_{m+1})$ 相同,即

$$A(i_1)=A(i_2)=\cdots=A(i_{m+1})=k,$$

则这些数对应的最大整除链的第一个数

$$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{m+1}}$$

没有一个能被另一个整除.这是因为如果其中有一个能被另一个整除,设 a_{i_2} 能被 a_{i_1} 整除,那么从 a_{i_2} 开始的最大整除链(其链长为 k),在 a_{i_2} 的前面加上 a_{i_1},则得到一个从 a_{i_1} 开始的一条整除链,该链的长度为 $k+1$,即从 a_{i_1} 开始的最大整除链长 $A(i_1)\geqslant k+1$,与 $A(i_1)=k$ 矛盾.

所以 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{m+1}}$ 这 $m+1$ 个数中没有一个数能被另一个数整除.

下面的例 9.5 是在 1990 年 1 月举行的中国第五届数学冬令营试题,中国数学冬令营即中国数学奥林匹克,是中国国内最高水平的竞赛,所以这道试题有一定的难度.

例 9.5 设 X 是一个有限集合,法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(偶数个元素组成的子集)都对应一个实数 $f(E)$,且满足条件:

(1)存在一个偶子集 D,使得 $f(D)>1990$;

(2)对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A 和 B,有

$$f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1990.$$

求证：存在 X 的子集 P 和 Q，满足

(1) $P\cap Q=\varnothing$，$P\cup Q=X$.

(2)对 P 的任何非空偶子集 S，有 $f(S)>1990$.

(3)对 Q 的任何偶子集 T，有 $f(T)\leqslant1990$.

证 因为集合 X 为有限集，所以它的偶子集也只有有限多个. 对每一个偶子集 E 对应的实数 $f(E)$ 也只有有限多个，因此必有 $f(E)$ 的最大值. 设 P 是使 $f(E)$ 取得最大值的所有偶子集中元素数目最少的一个偶子集，Q 是 P 相对于 X 的补集.

我们下面证明这样选取的 P 和 Q 符合题目要求. 显然有 $P\cap Q=\varnothing$，$P\cup Q=X$，因而满足题设要求(1).

由条件(1)及 P 的取法可知，

$$f(P)\geqslant f(D)>1990.$$

由于空集 $\varnothing$ 是偶子集，且 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing$，则由条件(2)可得

$$f(\varnothing)=f(\varnothing)+f(\varnothing)-1990,$$

所以有

$$f(\varnothing)=1990.$$

因此 P 不是空集.

对于 P 的任何非空偶子集 S，令 $\overline{S}$ 是 S 相对于 P 的补集，则 $\overline{S}$ 也是一个偶子集，且

$$S\cap\overline{S}=\varnothing,\quad S\cup\overline{S}=P.$$

我们证明 $f(S)>1990$. 如果 $f(S)\leqslant1990$，则由题设条件(2)可知

$$\begin{aligned} f(P) &= f(S \cup \overline{S}) \\ &= f(S) + f(\overline{S}) - 1990 \\ &\leqslant f(\overline{S}), \end{aligned}$$

从而有 $f(\overline{S}) \geqslant f(P) > 1990$.

由于 S 非空，则 $\overline{S}$ 的元素个数少于 P 的元素个数，且 $f(\overline{S})$ 的值不小于 $f(P)$ 的值，这与 P 的取法矛盾，所以必有 $f(S) > 1990$. 因而满足题目要求(2).

下面证明对 Q 的任何偶子集 T，有 $f(T) \leqslant 1990$. 任取 Q 的偶子集 T，由于 $P \cap T = \varnothing$，如果 $f(T) > 1990$，则由条件(2)得

$$f(P \cup T) = f(P) + f(T) - 1990 > f(P).$$

由于 $P \cup T$ 的元素个数不少于 P 的元素个数，并且 $f(P \cup T) > f(P) > 1990$，这又与 P 的取法矛盾，所以 $f(T) \leqslant 1990$. 因而满足题目要求(3).

于是本题得证.

下面我们再给出一个本题的构造性证明，大家通过这两个证明的对比可以看出，用极端原理解这个题比较简洁.

又证 首先证明，存在一个 X 的二元子集 A，使得 $f(A) > 1990$.

事实上，由条件(1)，存在 X 的一个偶子集 D，使得 $f(D) > 1990$. 设集合 D 中元素个数为 $2k$. 因为

$$f(\varnothing) = f(\varnothing \cup \varnothing) = f(\varnothing) + f(\varnothing) - 1990,$$

所以
$$f(\varnothing) = 1990.$$

于是由 $f(D) > 1990 = f(\varnothing)$ 知，集合 D 非空，从而 $k > 0$.

将有 $2k$ 个元素的集合 D 任意划分为 k 个二元子集 A_1，$A_2,\cdots,A_k$，且这 k 个子集不相交，由题设条件(2)易得

$$\begin{aligned} f(D)&=f(A_1)+f(A_2)+\cdots+f(A_k)-(k-1)\times1990 \\ &>1990 \\ &=k\times1990-(k-1)\times1990, \end{aligned}$$

即 $$f(A_1)+f(A_2)+\cdots+f(A_k)>k\times1990.$$

因此存在一个二元子集，不妨设其为 $A_1=\{a,b\}$，使得 $f(A_1)>1990$.

现从集合 A_1 出发构造集合 P.

若存在一个元素 c，使得

$$f(\{a,c\})>1990,f(\{b,c\})>1990,$$

则将 c 添加到 A_1 中去，构成集合 $A_2=\{a,b,c\}$.

若又存在一个元素 d，使得

$$f(\{a,d\})>1990,f(\{b,d\})>1990,$$
$$f(\{c,d\})>1990,$$

则再将 d 添加到 A_2 中去，构成集合 $A_3=\{a,b,c,d\}$. 继续上述操作，由于 X 是有限集，因此经过有限次操作后，再不能有元素继续加入，此时构成的集合即为 P，X 中其余元素则构成集合 Q.

下面证明集合 P,Q 符合题设要求.

题设要求(1)显然满足.

对于 P 中任一非空偶子集 S，设其所含元素的个数为 $2t$，将其划分为 t 个不相交的二元子集 $B_1,B_2,\cdots,B_t$，则

$$f(S)=f(B_1)+f(B_2)+\cdots+f(B_t)-(t-1)\times1990$$

$$>1990,$$

因此满足题设要求(2).

我们用反证法证明满足要求(3).事实上,若 Q 中有某两个元素 e,f,使

$$f(\{e,f\})>1990,$$

则由于 e,f 都不是 P 中的元素,这时有两种可能:或者存在 P 中的元素 a,b 使得

$$f(\{a,e\})\leqslant 1990, f(\{b,f\})\leqslant 1990, \tag{9.1}$$

或者仅存在 P 中的一个元素 m,使得

$$f(\{m,e\})\leqslant 1990, f(\{m,f\})\leqslant 1990. \tag{9.2}$$

对(9.1),一方面有

$$f(\{a,b,e,f\})=f(\{a,b\})+f(\{e,f\})-1990>1990,$$

另一方面又有

$$f(\{a,b,e,f\})=f(\{a,e\})+f(\{b,f\})-1990\leqslant 1990.$$

出现矛盾.

对(9.2),可将 m 从 P 中取出,而在 P 中添入 e,f,这时便得到一个满足要求而元素更多的集合 P,这与 P 的构造矛盾.

于是,对 Q 的任一二元子集 C,都有 $f(C)\leqslant 1990$,从而 Q 满足题设要求(3).

从而本题得证.

10

考虑方程解的极端情况

关于不定方程的自然数解、整数解、有理数解或质数解的问题是数论研究的一个重要课题，对于简单的不定方程的求解和证明也是考查和训练中学生数学思维的灵活性与创造性的一个主要题目来源. 对于一些不定方程问题，特别是证明一些不定方程解的不存在性问题，极端原理有较多的用武之地. 这是因为，如果要证明方程没有自然数解，可以先假定它有解，当然就必有最小解，从这个最小解出发，如果又得到更小解，就会导致矛盾，从而否定了该方程解的存在.

我们把证明 $\sqrt{2}$ 是无理数作为第一个例题. 大家知道，关于 $\sqrt{2}$ 是无理数的证法很多，但是把它归结为证明一个不定方程无整数解则

是相当简捷的方法.

例 10.1 求证 $\sqrt{2}$ 是无理数.

证 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,并设 $\sqrt{2}=\frac{x}{y}$,其中 x 和 y 都是正整数.于是有不定方程

$$x^2=2y^2. \tag{10.1}$$

当 $\sqrt{2}$ 是有理数时,方程(10.1)一定有自然数解,设 $x=m, y=n$ 是(10.1)的自然数解中 x 取值最小的解.

由方程(10.1),显然有 $m>n$,且由 $m^2=2n^2$ 知,m 是偶数.

设 $m=2m_1$,其中 m_1 也是自然数,代入(10.1)得

$$(2m_1)^2=2n^2,$$

$$n^2=2m_1^2.$$

于是 $x=n, y=m_1$ 也是方程的一组自然数解,然而这时有 $n<m$,与 $x=m$ 是取值最小的解矛盾.所以方程(10.1)没有自然数解,从而 $\sqrt{2}$ 是无理数.

例 10.2 证明:在自然数范围内,方程

$$8x^4+4y^4+2z^4=t^4 \tag{10.2}$$

没有解.

证 假设方程(10.2)有自然数解

$$x=m, y=n, z=p, t=r,$$

并且这组解是所有解中 x 最小的一组.

由(10.2)可得,$t=r$ 是偶数.设 $r=2r_1$,代入(10.2)得

$$8m^4+4n^4+2p^4=16r_1^4,$$

$$4m^4+2n^4+p^4=8r_1^4.$$

因而 p 是偶数，设 $p=2p_1$，因此，

$$4m^4+2n^4+16p_1^4=8r_1^4,$$

$$2m^4+n^4+8p_1^4=4r_1^4.$$

因而 n 是偶数，设 $n=2n_1$，因此，

$$2m^4+16n_1^4+8p_1^4=4r_1^4,$$

$$m^4+8n_1^4+4p_1^4=2r_1^4.$$

因而 m 是偶数，设 $m=2m_1$，因此，

$$16m_1^4+8n_1^4+4p_1^4=2r_1^4,$$

$$8m_1^4+4n_1^4+2p_1^4=r_1^4. \tag{10.3}$$

由(10.3)可知，$x=m_1, y=n_1, z=p_1, t=r_1$ 是方程(10.2)的一组解，但因为 $m_1<m$，这与假设解 m,n,p,r 为 x 取最小值的那一组解矛盾. 因此，原方程在自然数范围内无解.

例 10.3 证明：不定方程

$$x^2+y^2+z^2=2^n xyz \tag{10.4}$$

没有 n 为正整数、x,y,z 不全为零的整数解.

证 假设 x,y,z,n 是一组满足方程(10.4)的解，由(10.4)可知，x,y,z 至少有一个为正整数，设 x 为正整数，并设 x_1,y_1,z_1,n_1 是满足(10.4)的所有解中，x_1 为最小正整数的解，即

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=2^{n_1}x_1y_1z_1. \tag{10.5}$$

显然，x_1,y_1,z_1 不可能全为奇数或两个偶数一个奇数，否则(10.5)的左边为奇数，右边为偶数，不可能相等.

此外，x_1,y_1,z_1 也不可能为两个奇数一个偶数，否则

(10.5)的左边为 $4k+2$ 型、右边为 $4k$ 型的数，不可能相等. 因此，x_1, y_1, z_1 都是偶数.

设 $x_1=2x_2, y_1=2y_2, z_1=2z_2$. 代入(10.5)得

$$4x_2^2+4y_2^2+4z_2^2=2^{n_1+3}x_2y_2z_2,$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=2^{n_1+1}x_2y_2z_2,$$

取 $n_2=n_1+1$，则 x_2, y_2, z_2, n_2 为满足条件的一组解，但 $x_2<x_1$，这与 x_1 为最小自然数解矛盾. 因此，原方程没有符合要求的整数解.

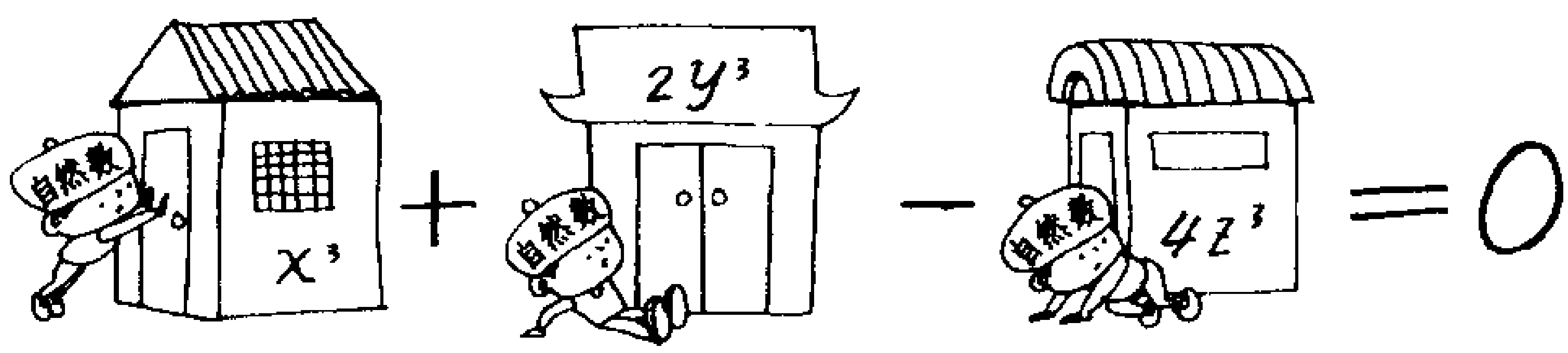

图 10.1

例 10.4 求证：方程

$$x^3+2y^3-4z^3=0 \tag{10.6}$$

没有自然数解 x, y, z.

证 假设方程(10.6)有正整数解，且 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ 是方程(10.6)的所有正整数解中 x 值最小的一组解.

由(10.6)可知，x_1 是偶数，设 $x_1=2x_2$，则

$$8x_2^3+2y_1^3-4z_1^3=0,$$

$$4x_2^3+y_1^3-2z_1^3=0,$$

显然 y_1 是偶数，设 $y_1=2y_2$，则

$$4x_2^3+8y_2^3-2z_1^3=0,$$

$$2x_2^3+4y_2^3-z_1^3=0.$$

显然 z_1 是偶数，设 $z_1=2z_2$，则

$$2x_2^3+4y_2^3-8z_2^3=0,$$

$$x_2^3+2y_2^3-4z_2^3=0.$$

从而 $x=x_2,y=y_2,z=z_2$ 是方程(10.6)的一组自然数解，但 $x_2<x_1$，与 x_1 最小矛盾. 因此，原方程没有自然数解 x,y,z.

例 10.5 证明：方程

$$x^4+y^4=z^2 \tag{10.7}$$

没有不全为零的整数解.

证 显然，只要证明方程(10.7)没有正整数解 x,y,z 即可.

假设(x_0,y_0,z_0)是方程(10.7)的一组正整数解，且是所有正整数解中 z_0 最小的一组解.

首先我们证明 x_0,y_0,z_0 两两互质. 假设 x_0,y_0 不互质，且 x_0,y_0 有公约数 $p,p>1$，这时 p^4 能整除 $x_0^4+y_0^4$，因而能整除 z_0^2，从而 p^2 能整除 z_0，这样$\left(\frac{x_0}{p},\frac{y_0}{p},\frac{z_0}{p}\right)$也是方程(10.7)的一组解，但这时$\frac{z_0}{p}<z_0$，与 z_0 最小矛盾. 因而 x_0 和 y_0 互质. 类似可证 x_0 和 z_0 互质，y_0 和 z_0 互质.

于是(x_0,y_0,z_0)是方程(10.7)的一组两两互质的正整数解，从而(x_0^2,y_0^2,z_0)是方程

$$x^2+y^2=z^2 \tag{10.8}$$

的一组互质的正整数解.

于是 x 和 y 至少有一个是偶数，否则，若 x 和 y 都是奇数，则(10.8)的左边为 $4k+2$ 型的数，而 $4k+2$ 型的数不可能

是完全平方数，这时(10.8)不可能成立．不妨设 y 为偶数，即 y_0 为偶数，则由(10.8)的解的公式可得

$$x_0{}^2=u^2-v^2,$$

$$y_0{}^2=2uv,$$

$$z_0=u^2+v^2.$$

其中 u 和 v 互质，并且一为奇数一为偶数，$u>v>0$.

如果 u 为偶数，v 为奇数，则 u^2 能被 4 整除，v^2 被 4 除余 1，此时 u^2-v^2 被 4 除余 3，不能为完全平方数，因而 $u^2-v^2=x_0{}^2$ 不成立.

如果 u 为奇数，v 为偶数，则由于

$$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2=u\cdot\frac{v}{2},$$

以及 u 和 $\frac{v}{2}$ 互质，所以必有

$$u=r^2,\quad \frac{v}{2}=s^2.$$

其中 r 和 s 是互质的正整数，并且 r 是奇数．于是有

$$x_0{}^2=u^2-v^2=r^4-4s^4,$$

$$x_0{}^2+4s^4=r^4,$$

其中 $2s^2$ 和 x_0 互质，从而 $(x_0,2s^2,r^2)$ 是方程(10.8)的一组解，又有

$$x_0=a^2-b^2,\quad 2s^2=2ab,\quad r^2=a^2+b^2,$$

其中 $a>b>0$ 且 a 和 b 互质.

由于 $s^2=ab$，所以

$$a=f^2,\quad b=g^2,$$

其中 f 和 g 是互质的正整数.

这样(f,g,r)是方程(10.7)的一组解,然而

$$r\leqslant r^4<r^4+4s^4=u^2+v^2=z_0,$$

即正整数解(f,g,r)中 r 的值比(x_0,y_0,z_0)中 z_0 的值还小,这与 z_0 的最小性相矛盾.

综上所述,方程 $x^4+y^4=z^2$ 没有不全为零的整数解.

大家从以上五个例题中可以看出,虽然题目不相同,但解题思路却相同,都是从方程若有正整数解,必有某个未知数的最小解出发,然后再推导出矛盾,从而证明原方程无解.在有些不定方程的题目中,我们有时不是从某个未知数最小这一前提出发,而是考察几个未知数的整体情况,即通过几个未知数的和或平方和存在最小值这一极端情况进行讨论.请看下面的几个例子.

例 10.6 证明:方程

$$x^2+y^2=3(z^2+u^2) \tag{10.9}$$

不存在正整数解.

我们注意到这个方程的左右两边都是以未知数的平方和的形式出现的,所以考虑未知数的平方和的极端情况可能会自然一些.

证 假设方程(10.9)有正整数解,并且(x_0,y_0,z_0,u_0)是使 x^2+y^2 最小的一组解.

由方程(10.9)可知 ${x_0}^2+{y_0}^2$ 是 3 的倍数,这时 x_0 和 y_0 都必须是 3 的倍数.事实上,若 x_0 和 y_0 中一个是 3 的倍数,一个不是 3 的倍数,由于不是 3 的倍数的平方即$(3k\pm1)^2$ 被 3

除余 1，所以 $x_0^2+y_0^2$ 被 3 除余 1，从而不是 3 的倍数；若 x_0 和 y_0 都不是 3 的倍数，则 $x_0^2+y_0$ 被 3 除余 2，从而也不是 3 的倍数. 因此 x_0 和 y_0 都是 3 的倍数. 因此可设

$$x_0=3m, \quad y_0=3n, \tag{10.10}$$

其中 m 和 n 都是正整数，代入(10.9)得

$$9m^2+9n^2=3z_0^2+3u_0^2,$$

$$z_0^2+u_0^2=3(m^2+n^2),$$

于是(z_0,u_0,m,n)也为方程(10.9)的一组正整数解. 但是由

$$x_0^2+y_0^2=3(z_0^2+u_0^2)$$

可知，

$$z_0^2+u_0^2<x_0^2+y_0^2,$$

这与 $x_0^2+y_0^2$ 为最小的选择相矛盾. 所以已知方程不存在正整数解.

例 10.7 是 1988 年在澳大利亚举办的第 29 届国际中学生数学奥林匹克的第六题，关于这个题目还有一段轶闻. 从举办第一届国际数学奥林匹克以来，负责命题的主试委员会都没有能办成这样一件事：编出一道试题，难倒每位参赛的中学生. 即竞赛中的每道试题都有选手能解出，相反地，却的确有一道试题(即例 10.7)，由领队们组成的主试委员会中谁都未做出来. 这道数论题后来给澳大利亚四位数论专家去解，每一位都花了一整天的时间，可是谁也没解出来. 而参加第 29 届国际数学奥林匹克的选手中却有 11 名学生在指定时间(4.5 小时解三道题)作出了解答，正所谓“宣父犹能畏后生，丈夫未可轻年少.”(唐 · 李白《上李邕》)解这个题目的一个简单方法

就要用到极端原理.

例 10.7 已知正整数 a 与 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2，求证：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$是某个正整数的平方.

证 设$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k$，由题设 k 是正整数. 这时有

$$a^2+b^2=k(ab+1),$$

于是(a,b)是不定方程

$$x^2+y^2=k(xy+1) \tag{10.11}$$

的一组整数解.

假设 k 不是某个整数的完全平方，这时 x 和 y 均不为 0，因而有

$$k(xy+1)=x^2+y^2>0,$$

$$xy>-1.$$

于是由 x,y 是整数得 $xy\geqslant0$，又 x,y 均不为 0，所以 $xy>0$，从而 x 和 y 同号. 我们可以只研究方程(10.11)的正整数解的情形.

现在设(a_0,b_0)是方程(10.11)的所有正整数解中，使 $x+y$ 为最小的一组解，并且 $a_0\geqslant b_0$.

把(10.11)看作是关于 x 的二次方程

$$x^2-kb_0x+({b_0}^2-k)=0, \tag{10.12}$$

则 a_0 是方程(10.12)的整数解.

设方程(10.12)的另一个解为 a_1，由韦达定理知，

$$a_1=kb_0-a_0$$

也是(10.12)的一个整数解. 再由韦达定理

$$a_1a_0=b_0^2-k$$

可知 a_1 不等于 0，否则 $b_0^2=k$ 为平方数. 于是 (a_1,b_0) 也是不定方程的一组正整数解. 但是

$$a_1=\frac{b_0^2-k}{a_0}\leqslant\frac{b_0^2-1}{a_0}\leqslant\frac{a_0^2-1}{a_0}<\frac{a_0^2}{a_0}=a_0,$$

于是

$$a_1+b_0<a_0+b_0,$$

这与 a_0+b_0 为最小相矛盾. 因此 k 为某个整数的平方.

顺便说一句，以上七个例题所用的方法就是有名的无穷递降法，这种方法在解不定方程问题时经常用到，其原理以例 10.7 为例就是，如果 k 不是平方数，不定方程(10.11)有解 (a_0,b_0)，进而(由韦达定理)又有解 (a_1,b_1)，且 $a_1+b_1<a_0+b_0$，再继续下去又有解 (a_2,b_2)，并且 $a_2+b_2<a_1+b_1$，并将无穷继续下去，从而得到一串无穷递降的值

$$a_0+b_0>a_1+b_1>a_2+b_2>\cdots,$$

但对正整数来说这是不可能的. 我们在上面的证法中，先用极端原理从假设存在的正整数解中选取最小的，然后又得到更小的，这又不可能，即不可递降，于是获得了题目的证明.

11

考虑得分多少的极端情况

有一些关于比赛的数学题,这类题目往往给出一定的比赛规则或比赛结果,再去证明比赛过程或比赛结果发生的情况。对这一类题目,有时通过考虑比赛中胜场最多(或得分最多)或胜场最少(或得分最少)的队员或代表队,可以使问题明朗化.

例 11.1 在一次乒乓球循环赛中,参赛的 $n(n\geqslant 3)$ 名选手中没有全胜的. 证明:一定可以从中找出三名选手 A,B,C,有 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A.

证 在整个循环赛中,由于只有 n 名选手,所以比赛的总场数是有限的,必有一个胜的最多的选手,设该选手为 A. 由于 n 名选手中没有全胜的,因此必存在选手胜 A,设该选手为 C,

即 C 胜 A.

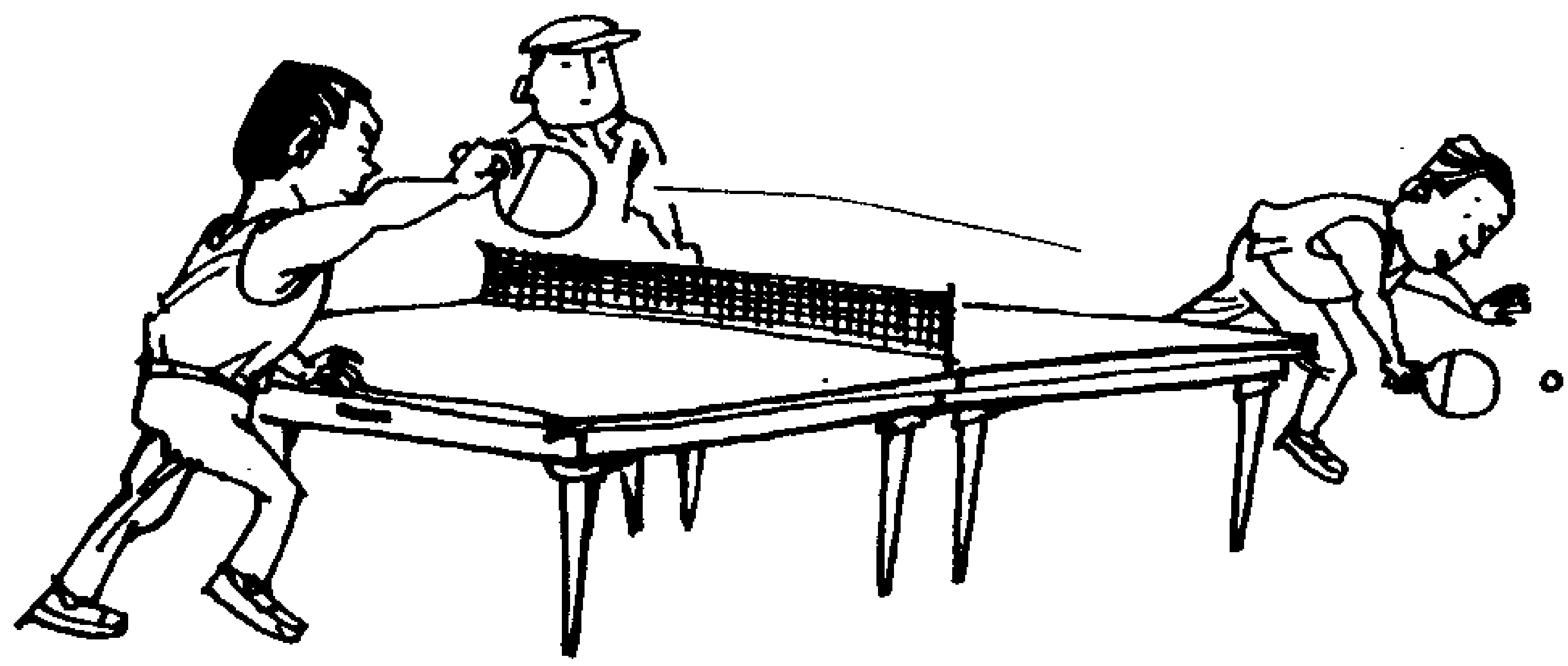

图 11.1

此外，由于 A 胜的最多，则他一定有一些手下败将，在他的手下败将中一定有一个选手(设为 B)胜 C. 否则，若 A 的每一位手下败将都不胜 C，由于乒乓球比赛中没有平局，则 C 就战胜 A 的所有手下败将，C 又胜 A，这时 C 就成为胜的最多的选手，导致矛盾.

于是必有 A 的手下败将 B 胜 C，即存在三名选手 A,B,C，有 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

例 11.2 某足球邀请赛有 16 个城市参加，每个城市派出甲、乙两队. 根据比赛规则，每两队之间至多赛一场，并且同一城市的两个队之间不进行比赛. 比赛若干天之后进行统计，发现除 A 市甲队外，其他各队已比赛过的场次各不相同. 问 A 市乙队赛过多少场？请证明你的结论.

解 由于共有 32 个队参加比赛，根据规则，同一城市的两个队之间不进行比赛，因此每队至多赛 30 场.

又由题设，除 A 市甲队外的 31 个队比赛过的场次各不相同，因此这些队比赛过的场数分别为 0，1，2，…，30 场.

我们把这些队编号，设赛过 k 场的队为 $T(k)$ 队. 显然赛过场数最多的队为 $T(30)$ 队，我们首先考察 $T(30)$ 队.

由于 $T(30)$ 队已赛过 30 场，又由于其他城市的每一个队都与它比赛过，而只有 $T(0)$ 队未与 $T(30)$ 队比赛过，于是 $T(30)$ 队和 $T(0)$ 队必为同一城市的队.

下面再考虑除 $T(30)$ 队之外赛过场数最多的队，这当然是 $T(29)$ 队，$T(29)$ 队与除 $T(0)$ 队及本市的另一队之外的所有各队都比赛过，而 $T(1)$ 队只与 $T(30)$ 队比赛过，也就是说，$T(1)$ 队与 $T(29)$ 队也未比赛过，所以 $T(29)$ 队与 $T(1)$ 队只能是同一城市的两个队.

同理可以推出：$T(28)$ 队与 $T(2)$ 队，$T(27)$ 队与 $T(3)$ 队，…，$T(16)$ 队与 $T(14)$ 队各为同一城市的两个队.

所以，$T(0)$，$T(1)$，$T(2)$，…，$T(14)$，$T(16)$，…，$T(29)$，$T(30)$ 各队都不可能是 A 市乙队，因此 A 市乙队只能是 $T(15)$ 队，即 A 市乙队赛过 15 场.

例 11.2 是 1985 年举行的全国高中数学联合竞赛第二试的一道试题. 两年之后，在 1987 年的全国高中数学联合竞赛第二试中也有一道与比赛内容有关，并需使用极端原理的题目，这就是例 11.3.

例 11.3 n 名($n>3$)乒乓球选手单打比赛若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同. 试证明：总可以从中去掉一名选手，而使余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同.

证 如果去掉选手 H，能使余下的选手中，任意两个选

手已赛过的对手仍然都不完全相同，那么我们称选手 H 为可去选手. 我们的问题就是证明存在可去选手.

显然，可去选手可能是处于某种极端情况下的选手，我们从已赛过最多对手的选手考虑.

设 A 是已赛过最多对手的选手. 假设不存在可去选手，则去掉 A 之后，一定存在两个选手 B 和 C，使得与 B 赛过的对手集合同与 C 赛过的对手集合完全相同.

这样，就能够得到两个结论.

第一个结论：B 与 C 没有赛过. 否则，若 B 有对手 C，C 有对手 B，则与 B 和 C 的对手集合相同矛盾.

第二个结论：B 和 C 二人中，一个人与 A 赛过(设为 B)，另一人没与 A 赛过(设为 C). 否则，若 B 和 C 都与 A 赛过(或没赛过)则与题设的“任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同”矛盾.

去掉与 A 没赛过的选手 C 之后，一定存在选手 D 和 E，他们赛过的对手集合相同. 同样可证，D 和 E 中有一人(设为 D)与 C 赛过，而另一人(设为 E)没与 C 赛过.

因为 D 与 C 赛过，而 C 与 A 没赛过，所以 D 不是 A.

因为 D 与 C 赛过，而 C 与 B 没赛过，所以 D 不是 B.

因为 D 与 C 赛过，而 B 与 C 赛过的对手集合相同，所以 D 与 B 赛过.

因为 D 与 B 赛过，而 D 与 E 赛过的对手集合相同，所以 B 与 E 赛过.

因为 B 与 E 赛过，E 与 C 没赛过，而除去 A 之后，B 与 C

赛过的对手集合又相同，所以 E 就是 A.

但是 E 没与 C 赛过，而 D 与 C 赛过，则 E(即 A)赛过的对手比 D 少 1，与假设 A 是已赛过的对手最多的选手矛盾. 所以一定存在可去选手.

例 11.4 某次体育比赛，每两名选手都进行一场比赛，每场比赛一定决出胜负，通过比赛确定优秀选手. 选手 A 被确定为优秀选手的条件是：对任何其他选手 B，或者 A 胜 B，或者存在选手 C，A 胜 C，且 C 胜 B. 如果按上述规则确定的优秀选手只有一名，求证这名选手胜所有其他选手.

证 由于只有有限个选手参加比赛，则在比赛中一定有胜的场数最多的选手，设该选手为 A. 首先我们证明 A 为优秀选手.

为方便计，记 $A \to B$ 表示 A 胜 B.

若 A 没有败给任何一名选手，则 A 为优秀选手.

若存在 $B \to A$，由于 A 是胜的场数最多的选手，所以必有一选手 C 存在，使得 $C \to B$ 且 $A \to C$.

由题设 A 为优秀选手. 下面我们证明：若 A 为唯一的优秀选手，则 A 胜所有其他选手.

若 A 没有胜所有其他选手，设有选手 $P \to A$. 由于 A 胜的场数最多，则对每一个败给 A 的选手 Q，必有 $P \to A \to Q$，从而 P 也是优秀选手，与 A 是唯一优秀选手相矛盾. 从而本题得证.

例 11.5 有 n 位选手参加象棋比赛，计分方法是：每局比赛胜者得 2 分，负者得 0 分，平局各得 1 分，比赛中途的积

分表上得分最多者得了 k 分. 证明:这时至少有一位选手比赛局数不多于 k.

本题与前几题不同的是,须求证存在一选手的比赛局数不多于 k. 因此我们考虑问题时不是从比赛最多的局数出发,而是从比赛最少的局数出发.

证 设这时所有选手的得分之和为 S,由题意知,

$$S\leqslant kn. \tag{11.1}$$

在所有选手中一定有一个人比赛局数最少,设此选手为 A,且 A 赛过 m 局. 这时赛过的总局数应不少于$\frac{mn}{2}$.

由于每比赛一局得 2 分,所以有

$$S\geqslant 2\cdot\frac{mn}{2}=mn. \tag{11.2}$$

由(11.1),(11.2)可得

$$mn\leqslant S\leqslant kn,$$

即

$$m\leqslant k.$$

于是至少有一位选手(例如 A)比赛局数不多于 k.

例 11.6 在一次有 n 名选手参加的循环赛(每一对选手赛一场,胜者得 1 分,负者得 0 分)中,没有平局,各选手所得分数分别是 $S_1,S_2,\cdots,S_n$. 求证:有某三名选手 A,B,C,使得 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A 的情况存在的充要条件是

$$S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2<\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

证 对任意一次竞赛的结局 T,令

$$U(T)=S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2.$$

当且仅当一个竞赛结局不存在 A,B,C 三名选手 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A 的情况时，我们就称循环赛的这个结局为传递的. 在这种情况下，“胜”是在选手集合中的一个传递的有序关系.

所以我们可以将选手分别编号为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，使得当且仅当 $i>j$ 时，P_i 胜 P_j. 这样，选手们结局的得分分别是 0，1，2，$\cdots$，$n-1$. 因而，在这种传递情况下有

$$\begin{aligned}U(T)&=0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\\&=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.\end{aligned}$$

可见，给定的条件是充分的.

现在考虑竞赛的一个非传递性结局，即存在三个选手 A，B，C，使得 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

记 A,B,C 的得分分别为 S_A,S_B,S_C，在这三个数中一定有一个最小的，设 S_A 最小，则

$$S_A\leqslant S_B.$$

我们颠倒 A 与 B 的胜负，就得到一个新的结局，这时 A 的得分为 S_A-1，B 的得分为 S_B+1，而其他选手的得分不变. 由于

$$(S_A-1)^2-S_A^2+(S_B+1)^2-S_B^2=2(S_B-S_A)+2>0,$$

所以 $U(T)$ 增加了. 于是任意非传递性竞赛的结局能改变 $U(T)$ 的值，并使 $U(T)$ 增加，但这不能永远改变下去，因为可能的结局数目是有限的. 所以从一个非传递性结局开始，经过有限次改变之后，结局就成为传递性的，并且 $U(T)$ 增加到

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

于是对一个非传递性结局 T 有

$$U(T)<\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

因而给定条件是必要的.

12

覆盖问题与极端原理

如果图形 F 的所有点都在图形 G 的内部或边界上，我们就说图形 G 盖住了图形 F. 研究一个图形或几个图形能不能盖住另一个图形，最少用几个相同或不同的图形能盖住某个图形，是否存在盖住某个图形的最小图形（如最小覆盖圆，最小覆盖正方形等等），或者用一个图形最多能覆盖几个给定的图形，诸如此类的问题都称为覆盖问题. 为了研究覆盖问题，通常要考虑所涉及图形的极端情况.

例 12.1 平面上放了 1995 个圆，假设它们所盖住的面积为 1，这些圆可能彼此相离、相切，也可能彼此相交. 试证明：一定可以从这组圆中去掉若干个圆，使得剩下的圆互不相交，而且它们可盖住的面积不小于 1/9.

这个题目的求证有两个要求：一个是去掉一些圆之后，剩下的圆互不相交，一个是剩下的圆的面积尽可能地大(面积不小于 1/9). 为了满足这两个要求，应该留下什么样的圆，去掉什么样的圆呢？显然，留下的圆越大越好，这就启发我们，当我们留下第一个圆时，应该是所有圆中最大的一个，而由极端原理，这个半径最大的圆是存在的. 当然，留下这个大圆之后，就要去掉与它相交或相切的圆，并应对所涉及的圆形面积作一番估计，于是就获得了下面的解法.

证 由于只有 1995 个圆，所以一定有一个半径最大的圆，设该圆的圆心为 O_1，半径为 r_1，面积为 A_1. 与 $\odot O_1$ 相交的所有圆必落在以 O_1 为圆心、$3r_1$ 为半径的圆内(图 12.1)，去掉与 $\odot O_1$ 相交的圆，则剩下的圆与 $\odot O_1$ 不相交.

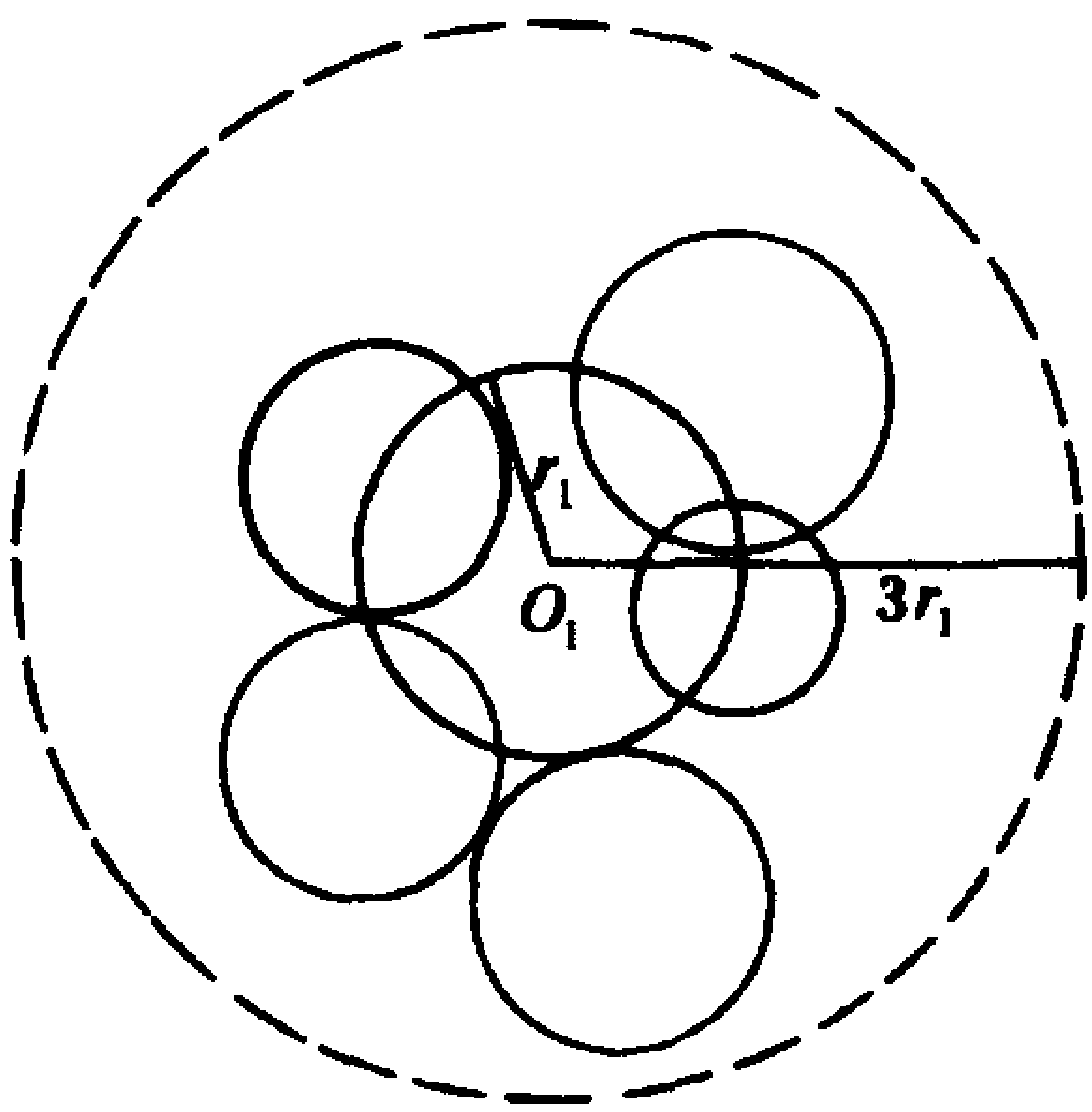

图 12.1

设被去掉的圆与 $\odot O_1$ 所盖住的总面积为 S_1，则

$$S_1 \leqslant 9\pi r_1^2, \quad A_1 = \pi r_1^2 \geqslant \frac{1}{9} S_1.$$

在与 $\odot O_1$ 不相交的有限多个圆中，再取半径最大的圆，设该圆的圆心为 O_2，半径为 r_2，面积为 A_2，去掉与 $\odot O_2$ 相交的圆，剩下的圆与 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 都不相交，设被去掉的圆与 $\odot O_2$

所盖住的总面积为 S_2，则

$$S_2\leqslant 9\pi r_2^2,\quad A_2\geqslant\frac{1}{9}S_2.$$

在与$\odot O_1$，$\odot O_2$ 都不相交的圆中，还有一个最大的，记为$\odot O_3$，如此继续下去.

由于只有 1995 个圆，最终一定能做到使它们互不相交. 设此时有 m 个互不相交的圆，由

$$A_i\geqslant\frac{1}{9}S_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

可得

$$A_1+A_2+\cdots+A_m\geqslant\frac{1}{9}(S_1+S_2+\cdots+S_m).$$

因为 $S_1+S_2+\cdots+S_m$ 是整个覆盖面积，即

$$S_1+S_2+\cdots+S_m=1,$$

因而 m 个不相交的圆的面积之和

$$A_1+A_2+\cdots+A_m\geqslant\frac{1}{9}.$$

把本题的圆变为线段，面积变为长度，结论自然就要把$\frac{1}{9}$变为$\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$，这就成为例 12. 2.

例 12. 2 一条直线上的有限条线段覆盖了长度为 1 的区间. 求证：可以从中选出一些两两无公共点的线段，使得它们的长度之和不小于 1/3.

证 在这有限条线段中一定有一条线段最长，设其为 l_1，其长度为 $|l_1|$.

显然，l_1 连同与其有公共点的线段覆盖区间的长度 $L_1 \leqslant 3|l_1|$. 留下线段 l_1，去掉与 l_1 有公共点的所有其他线段，则剩下的线段与 l_1 不相交.

在与 l_1 不相交的所有线段中，还有一条最长的线段，设其为 l_2，其长度为 $|l_2|$. 留下线段 l_2，去掉与 l_2 有公共点的所有其他线段，则剩下的线段与 l_1, l_2 都不相交，此时有 $L_2 \leqslant 3|l_1|$，

依此类推，可得线段 $l_1, l_2, \cdots, l_m$，显然它们两两无公共点，由于原有的线段覆盖了长度为 1 的区间，即

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_m = 1,$$

于是有

$$1 \leqslant 3(|l_1| + |l_2| + \cdots + |l_m|),$$

$$|l_1| + |l_2| + \cdots + |l_m| \geqslant \frac{1}{3}.$$

即所选的线段互不相交且它们的长度之和不小于 1/3.

例 12.3 已知平面上有 100 个点，任意两点间的距离不大于 1，且以任意三点为顶点都组成一个钝角三角形. 证明：存在一个半径为 1/2 的圆将这 100 个点全部盖住.

证 在每两点的距离中一定有两点距离最大，设这两点为 A, B. 由题设 $AB \leqslant 1$.

事实上，以 AB 为直径的圆就能把全部 100 个点完全盖住. 设 C 为 100 个点中除 A, B 之外的任一点. 由题设，$\triangle ACB$ 是钝角三角形，又因为 AB 是 $\triangle ACB$ 的最大边，所以 $\angle ACB$ 是钝角，因此 C 点在以 AB 为直径的圆内. 于是，以 AB 为直

径的圆能够将这 100 个点全部盖住. 又因为 $AB\leqslant 1$,则以 AB 的中点为中心,$\frac{1}{2}$为半径的圆能够盖住以 AB 为直径的圆,从而盖住全部 100 个点.

例 12.4 已知由 25 个点组成的点集 M,每三点中都有两点的距离小于 1. 证明:用半径为 1 的圆能覆盖 M 中的 13 个点.

本题中的 25 个点,如果每两点的距离都小于 1,则结论是明显的;如果有两点的距离大于 1,这时如何找出能盖住 M 中 13 个点的圆则是解题的关键,因此这个题目需分两种情况证明.

证 第一种情况:在 25 个点中,每两点的距离都小于或等于 1.

这时我们在这 25 个点中任取一点为圆心,作以 1 为半径的圆,必能盖住全部 25 个点,当然能盖住其中的 13 个点.

第二种情况:不是每两点的距离都小于或等于 1,那么,在这所有的每两点的距离中一定有两点距离最大,设这两点为 A,B,显然 $AB>1$.

由题设,每三点中都有两个点的距离小于 1,于是对于异于 A,B 的任意一点 C,则或者 $AC<1$ 或者 $BC<1$.

分别以 A,B 为圆心,以 1 为半径作$\odot A$ 和$\odot B$,则 C 点总会落入$\odot A$ 或$\odot B$ 内. 于是除 A,B 两点之外,其余 23 个点总会落入$\odot A$ 或$\odot B$ 中的一个,因此有一个圆内至少有 12 个点,不妨设其为$\odot A$,连同圆心 A,则$\odot A$ 至少覆盖 M 中的 13 个点.

例 12.5 设 A 和 B 是两个没有公共点的有限平面点集，A 和 B 的所有点中任意三点都不共线. 如果 A 和 B 之一至少包含 5 个点，证明：存在一个三角形，它的顶点都在 A 中或都在 B 中，而内部不含另一集合的点.

证 不失一般性，设集合 A 至少有五个点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5. 由于 A 是有限点集，则一定存在一个以 A 集中的五个点为顶点的最小的五边形，在这五边形内不含有 A 集中的其他点（否则可以用更小的五边形来代替）.

以 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 为顶点的五边形有下面三种可能：

(1) $A_1A_2A_3A_4A_5$ 为凸五边形.

在 $\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_4A_5$ 这三个三角形中，若有一个三角形的内部没有 B 中的点，则这个三角形即为所求；若这个三角形的每一个内部都有 B 中的点，设为 B_1,B_2,B_3（图 12.2），则 $\triangle B_1B_2B_3$ 的内部没有 A 中的点（否则与 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 最小矛盾），此时 $\triangle B_1B_2B_3$ 即为所求.

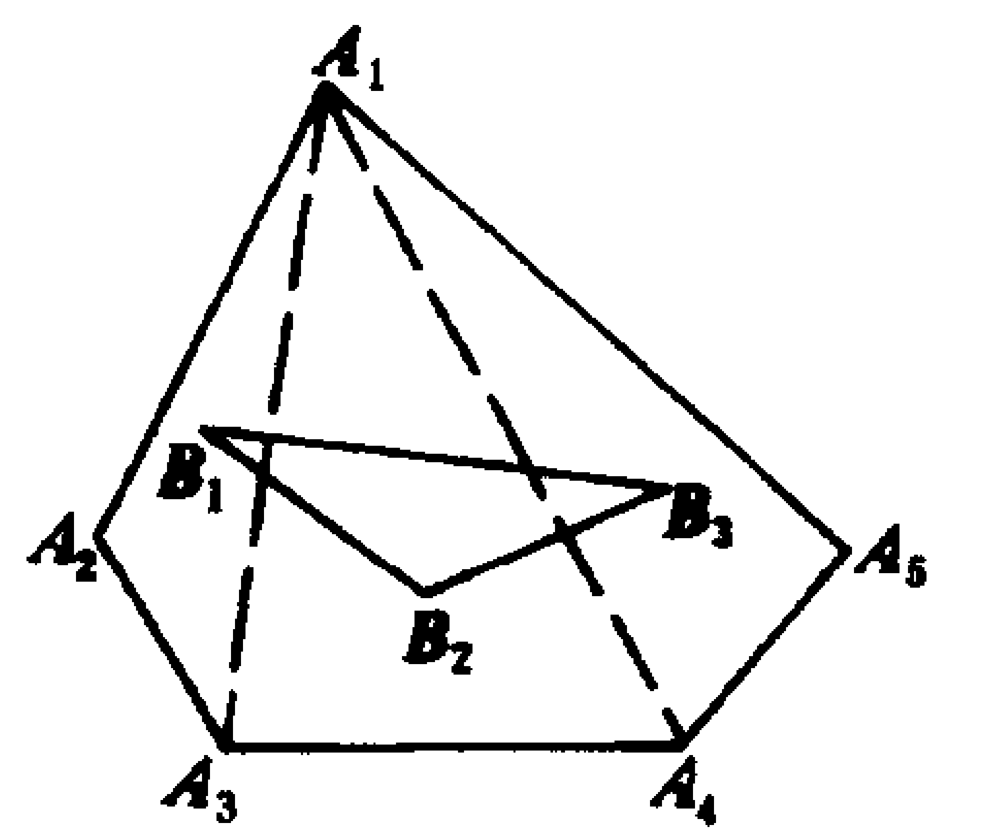

图 12.2

(2) A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 中有一点在其余四点构成的凸四边形的内部，不妨设 A_3 在四边形 $A_1A_2A_4A_5$ 的内部（图 12.3）.

在 $\triangle A_3A_1A_2$，$\triangle A_3A_2A_4$，$\triangle A_3A_4A_5$，$\triangle A_3A_5A_1$ 中，若有一个三角形的内部没有 B 中的点，则这个三角形即为所求；若

这四个三角形的每一个内部都有 B 中的点，设为 B_1, B_2, B_3, B_4（图 12.3），在 $\triangle B_1B_2B_3$ 和 $\triangle B_1B_4B_3$ 中，A_3 只能在其中一个三角形的内部，不妨设其在 $\triangle B_1B_4B_3$ 内部，则 $\triangle B_1B_2B_3$ 即为所求.

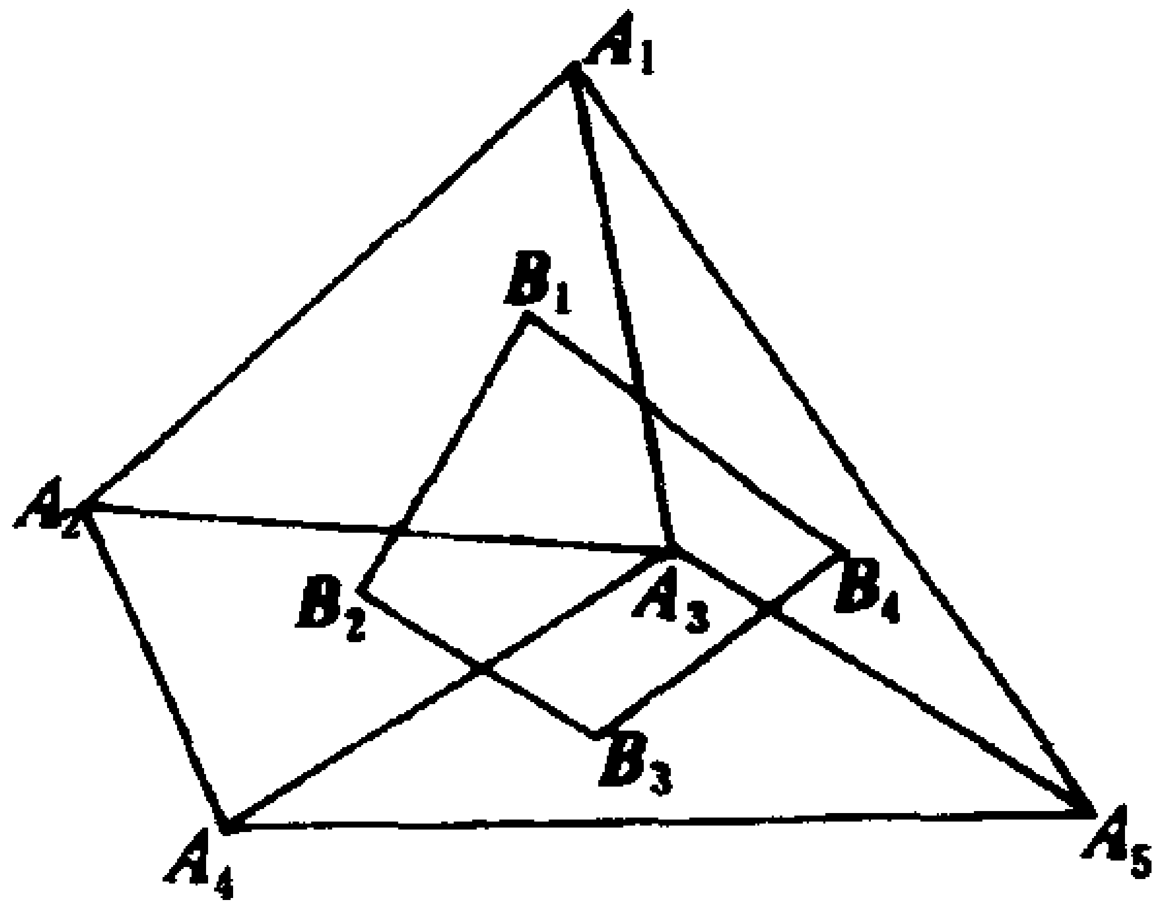

图 12.3

(3) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 中有两个点在其余三点组成的三角形的内部，不妨设 A_4, A_5 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内部（图 12.4）.

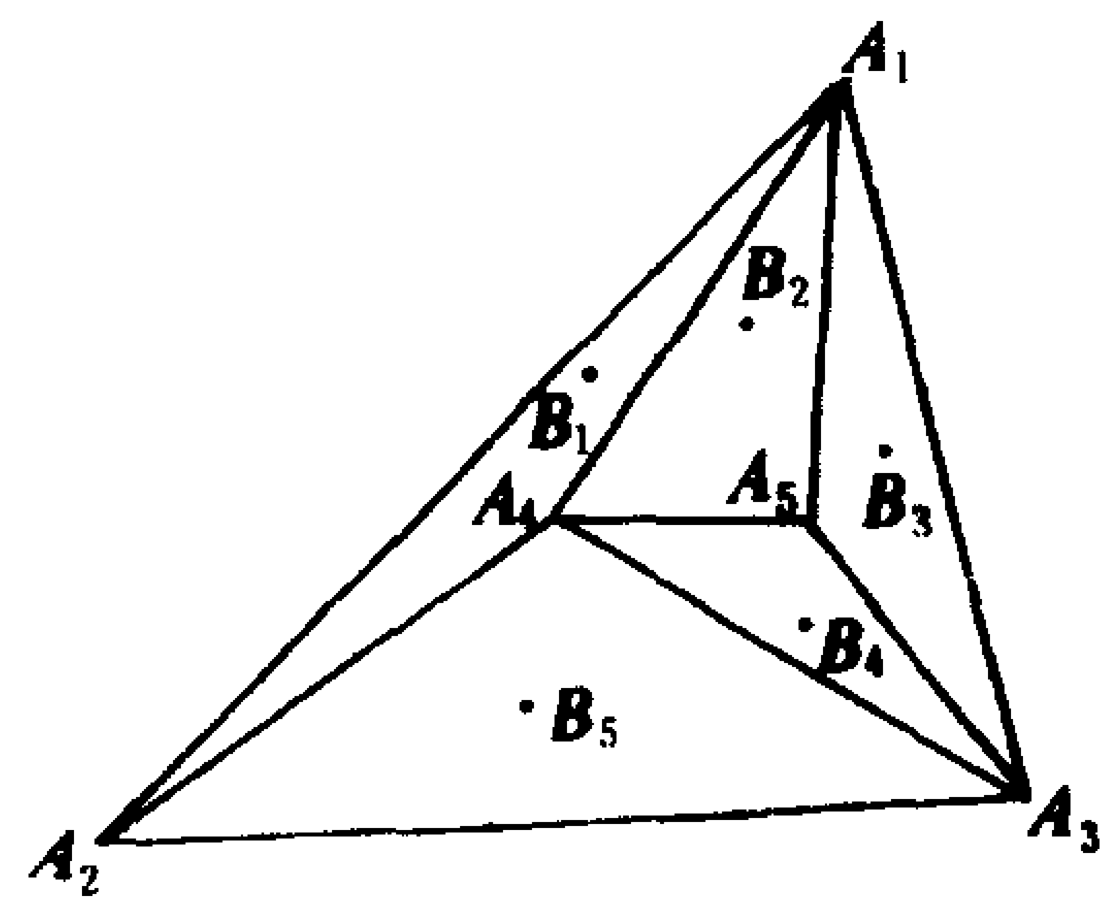

图 12.4

若 $\triangle A_1A_4A_5$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_4A_2A_3$，$\triangle A_4A_5A_3$，$\triangle A_1A_3A_5$ 这五个三角形中，有一个三角形内部没有 B 中的点，则这个三角形即为所求；若每个三角形内部都有一个 B 中的点，设其为 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5（图 12.4），由于这五个点被直线 A_4A_5 分成两部分，则在 A_4A_5 的一侧至少有三个点，不妨设其为 B_1, B_2, B_3，由于 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的最小性，则 $\triangle B_1B_2B_3$ 的内部不可能有 A 中的点，$\triangle B_1B_2B_3$ 即为所求.

综上所述，一定存在一个三角形，它的顶点都在 A 中或都在 B 中，而内部不含另一集合的点.

例 12.6 已知 A,B,C,D 为平面上两两距离均不超过 1 的任意四点，求能够盖住这四个点的圆的最小半径.

解 在 A,B,C,D 的两两距离中必有两点的距离最大，设其为 A,B，则 $AB\geqslant AC$，$AB\geqslant AD$，$AB\geqslant BD$，$AB\geqslant BC$，$AB\geqslant DC$.

在 $\triangle ACB$ 中，因为 AB 最大，所以 $\angle ACB\geqslant 60^\circ$.

在 $\triangle ADB$ 中，因为 AB 最大，所以 $\angle ADB\geqslant 60^\circ$.

于是以 AB 为弦，作一含有圆周角为 60° 的圆，则 A,B,C,D 均被此圆所覆盖，由正弦定理可知，此圆半径最小者为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

这是一个在给定条件下求能盖住四个点的最小覆盖圆问题，下面考虑一个平面上 n 个点的最小覆盖圆问题.

例 12.7 平面上有 n 个点，其中任意三点可被一半径为 1 的圆盖住，但总有三点不能被任何半径小于 1 的圆盖住. 求可以盖住所有 n 个点的最小圆的半径.

解 我们证明，可以用一个半径为 1 的圆盖住所有 n 个点.

因为任意三点可被一个单位圆盖住，所以任意两点的距离都不大于 2. 因此，以这 n 个点中的任意一点为圆心，以 2 为半径所作的圆便能盖住所有的点. 由此可知，存在一个能够盖住所有 n 个点的最小圆 C，设圆 C 的半径为 r，则 $r\geqslant 1$.

下面我们证明 $r\leqslant 1$.

在圆 C 的圆周上如果只有 n 个点中的一点或一个点也

没有，那么一定能找到一个半径比 r 小的圆盖住所有的点，这样 C 就不是盖住所有点的最小圆. 因此这种情况不可能，所以最小覆盖圆 C 上至少有 n 个已知点中的两个点.

假定在圆 C 上恰好有两点(设其为 P,Q)，我们证明这两点恰好是圆 C 直径的两个端点.

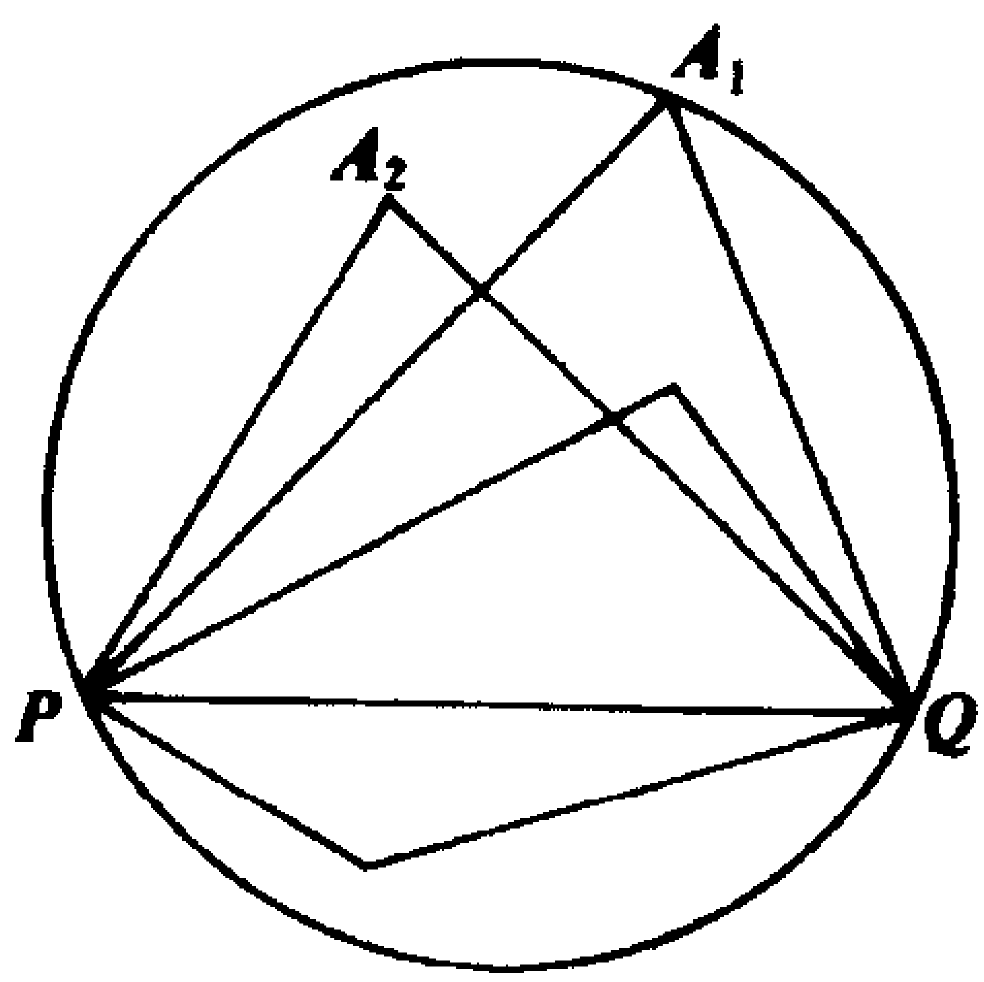

图 12.5

用反证法. 若 P,Q 不是直径的两个端点，即 PQ 是圆 C 的一条弦，考虑其余 $n-2$ 个点 A_1，A_2，…，A_{n-2}(这些点都在圆 C 内)对 PQ 的张角，并设它们满足

$$\angle PA_1Q \leqslant \angle PA_2Q \leqslant \cdots \leqslant \angle PA_{n-2}Q,$$

考虑这些张角中最小的一个，即 $\angle PA_1Q$.

如果 $\angle PA_1Q > 90°$，则以 PQ 为直径的圆 C' 也包含了 A 中的全部点，且半径比圆 C 的半径小，与圆 C 是最小覆盖圆矛盾.

如果 $\angle PA_1Q \leqslant 90°$，则过 P,Q,A_1 三点的圆 C'' 同样也盖住了全部 n 个点(图 12.5)，考虑到正弦定理及 A_1 在圆 C 内，当圆 C 上 PQ 的圆周角为 α 时，有 $\frac{PQ}{\sin\angle PA_1Q} < \frac{PQ}{\sin\alpha}$，因而圆 C'' 的半径比圆 C 的半径小，这也与圆 C 最小矛盾.

所以如果圆 C 上恰好有两个点 P,Q，则 PQ 是圆 C 的直

径，因为任两点的距离都不大于 2，所以 $PQ\leqslant 2$，即圆 C 的半径 $r\leqslant 1$.

假定在圆 C 的圆周上有不少于三个点，则从中可选出三个点 P,Q,T，它们构成的三角形是直角三角形或锐角三角形. 否则，若圆 C 的圆周上任意三点构成的三角形都是钝角三角形，则它们都位于圆 C 的一段劣弧上. 这时，我们可作一个比圆 C 小的圆，它能盖住这段劣弧及所有 n 个点，这与圆 C 的最小性矛盾. 因此圆 C 是盖住 P,Q,T 这三点的最小圆. 由于盖住这三点的半径为 1 的圆完全可以盖住圆 C，所以 $r\leqslant 1$.

由于 $r\geqslant 1$ 且 $r\leqslant 1$，则 $r=1$. 即盖住所有 n 个点的最小圆半径为 1.

以本题的结论为基础，1991 年日本数学奥林匹克有这样一道试题：

例 12.8 A 是平面上 $n(n\geqslant 2)$ 个点的集合，证明：存在以集合 A 的某两点为直径的端点的圆，该圆（含周界）内至少含有集合 A 的 $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ 个点（其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）.

证 由于只有有限个点，所以一定存在一个最小覆盖圆，设此圆为圆 C.

由例 12.7 可知，或者圆 C 上恰有 A 中的两个点，这两点是圆 C 的直径的两个端点，这时圆 C 能盖住所有 n 个点，当然能盖住 A 中的 $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ 个点.

或者圆 C 的圆周上有不少于 A 中的三个点，并且其中有

三个点(设为 P,Q,T)是锐角或直角三角形的顶点,此时以 PQ,QT,TP 为直径所作的三个圆完全能盖住圆 C,因为覆盖了 A 中的 n 个点,这三个圆中至少有一个圆盖住了 A 中的至少 $\left[\frac{n}{3}\right]$ 个点.

本节的最后一个例题是著名的数学家伽莱(T. Gallai)提出的.

例 12.9 已知有 n 个圆,每两个都有公共点.证明:存在七个点,使得每个圆至少包含这七个点中的一个点.

这个例题的一个形象说法是:有 n 张圆形纸片,每两张纸片都有公共点,则可以用七个图钉把这 n 张纸片全部钉住.

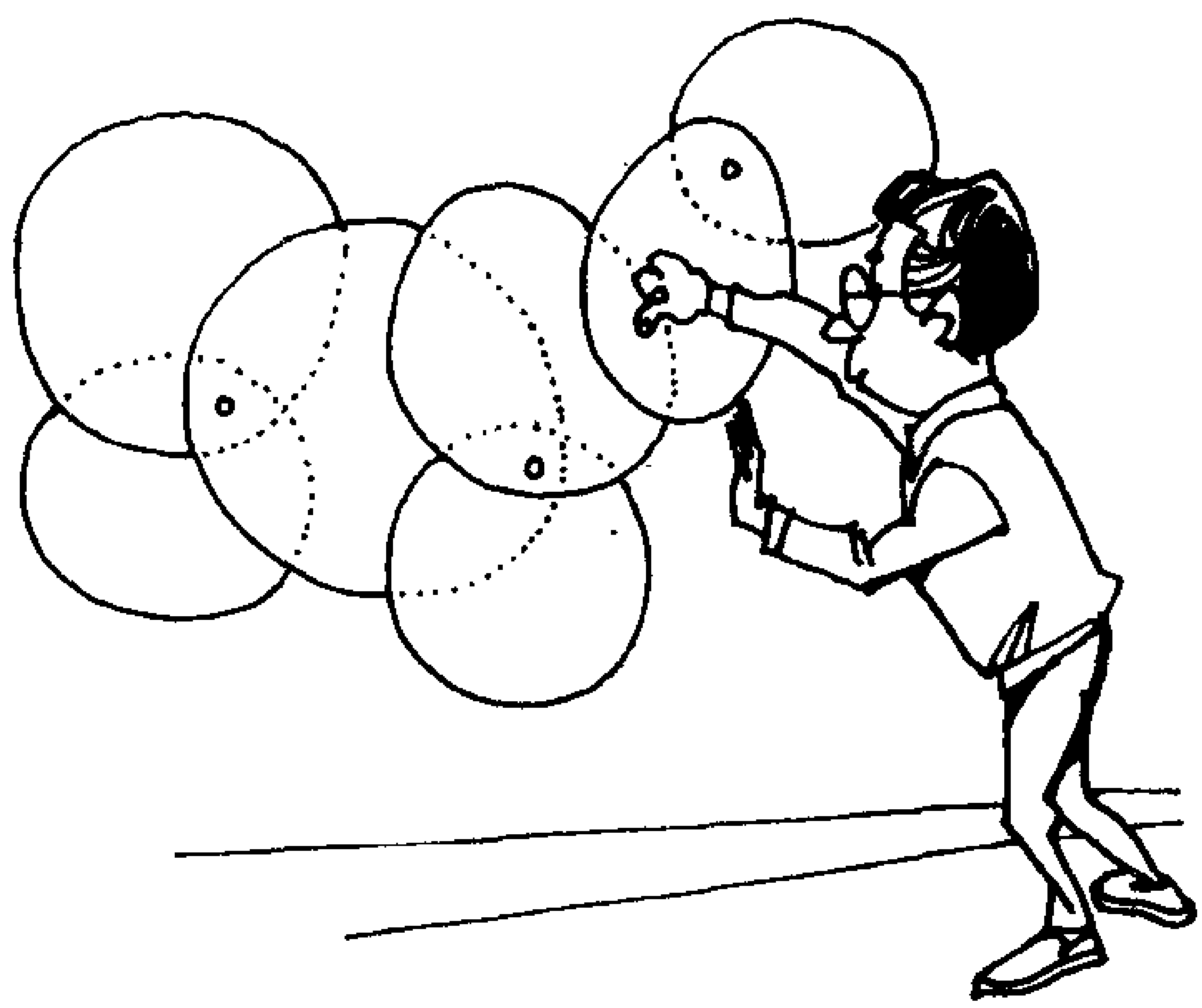

图 12.6

从题意中可以理解,大圆纸片被图钉钉住的机会比较多,而小圆纸片被图钉钉住的机会比较少,所以第一个图钉应该先钉住最小的圆纸片,这就是解题的出发点.

证 由于有 n 个圆，则必有一个半径最小的圆. 设此圆的圆心为 O，半径为 1.

以 O 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径作圆，并作此圆的内接正六边形 $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$. 我们证明：将七个图钉钉在点 $O,O_1,O_2,O_3,O_4,O_5,O_6$ 上，每一个已知圆一定被某个图钉钉住.

设以 a 为半径的圆 A 是一个已知圆. 因为$\odot A$ 与$\odot O$ 有公共点，所以 $OA=b\leqslant a+1$.

如果 O 在$\odot A$ 的内部，则$\odot A$ 被图钉 O 钉住.

如果 O 不在$\odot A$ 的内部，则必有 $b\geqslant a$，于是有

$$a\leqslant b\leqslant a+1.$$

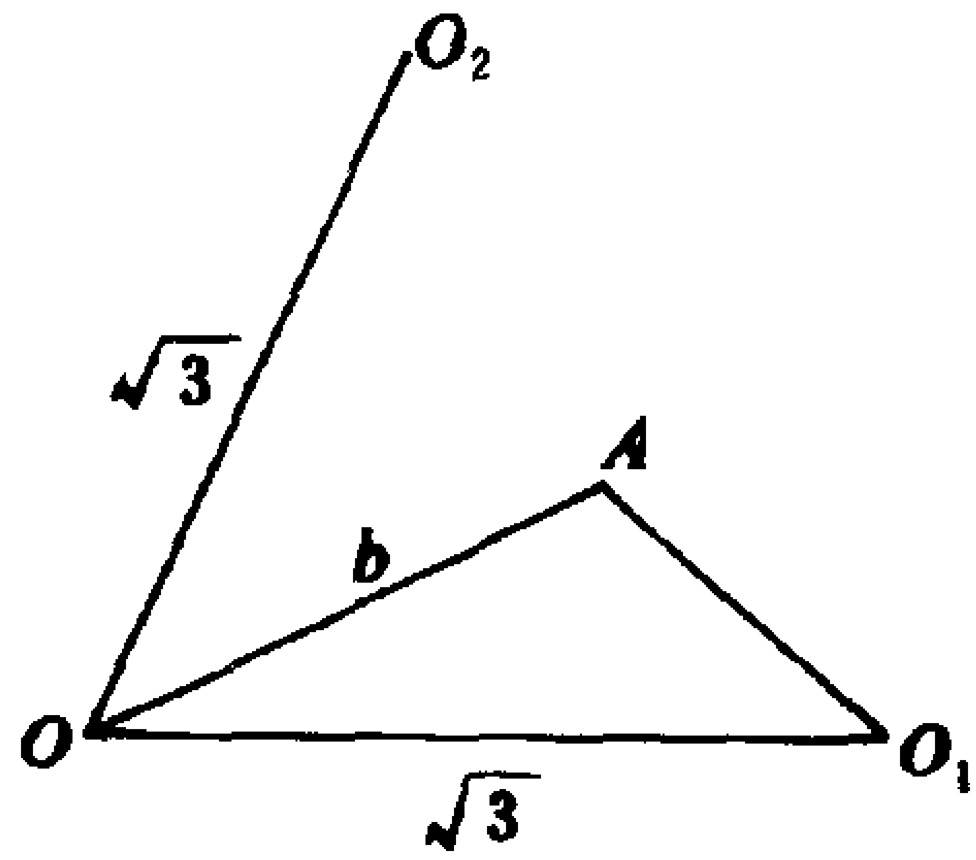

图 12.7

A 点必在 O 点与正六边形 $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ 各顶点的连线所形成的某个角区域内，不妨设 A 在$\angle O_1OO_2=60°$的内部，且 A 靠近 OO_1 的一侧(图 12.7)，即$\angle AOO_1\leqslant 30°$.

我们证明$\odot A$ 被图钉 O_1 钉住.

由余弦定理得

$$\begin{aligned}AO_1^2&=b^2+3-2\sqrt{3}\,b\cos\angle AOO_1\\&\leqslant b^2+3-2\sqrt{3}\,b\cos 30°\\&=b^2-3b+3.\end{aligned}$$

考察二次函数

$$y=f(x)=x^2-3x+3,$$

由于 $a\leqslant b\leqslant a+1$，则 $f(x)$在 b 处的值不大于在 a 处的值与在

$a+1$ 处的值的最大值，即

$$f(b)\leqslant\max\{f(a),f(a+1)\}.$$

由于⊙O 是最小圆，其半径为 1，则 $a\geqslant 1$. 因而有

$$(a^2-3a+3)-a^2=3-3a\leqslant 0,$$

即
$$a^2-3a+3\leqslant a^2.$$

又因为

$$[(a+1)^2-3(a+1)+3]-a^2=1-a\leqslant 0,$$

即
$$(a+1)^2-3(a+1)+3\leqslant a^2,$$

于是有
$$f(a)\leqslant a^2,f(a+1)\leqslant a^2,$$
$$f(b)\leqslant\max\{f(a),f(a+1)\}\leqslant a^2,$$
$$AO_1^2\leqslant b^2-3b+3\leqslant a^2,$$

即
$$AO_1\leqslant a.$$

于是⊙A 被图钉 O_1 钉住.

综上所述，所有圆纸片能被七个图钉钉住.

从以上证明可以看出，半径 $\sqrt{3}$ 的选取不仅与 $\cos 30°$ 的值有关，而且这样得到的函数 $f(x)$，恰使 $f(b)\leqslant a^2$ 成立，因此 $\sqrt{3}$ 的选取也是本题得证的一个关键.

13

考虑其他极端情况

除了以上讲过的各种极端情况之外，还有其他一些形形色色的题目需要运用极端原理，下面我们再列举几个题目.

例 13.1 在 $n\times n$ 的正方形棋盘上，放置棋子遵循下列规则：每个小格内最多只能放置一个棋子，若某一小格内没放棋子，则放在过这格的行与列上的棋子总数不少于 n. 求证：在棋盘上放置的棋子个数不少于 $\frac{n^2}{2}$.

证 我们考察棋盘上水平方向的 n 行与竖直方向的 n 列，在这所有的 $2n$ 行与列中，一定有一行(或一列)放置棋子的数目最少(如果有若干行或列放置的棋子数目最少，则选择其中一行或列)，不妨设某一行所放的棋子最少，设此行的棋子数为 k.

如果 $k\geqslant\frac{n}{2}$，则 n 行中每一行的棋子数都不少于 $\frac{n}{2}$，因此棋盘上所有棋子总数不少于 $n\cdot\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$，本题得证.

如果 $k<\frac{n}{2}$，则这一行中应有 $n-k$ 个空格，由规则，通过这些空格的每一列应放有不少于 $n-k$ 个棋子. 于是，所有过这 $n-k$ 个空格的 $n-k$ 列上放有不少于 $(n-k)^2$ 个棋子. 依据 k 的最小性可知，剩下的 k 列上每列都有不少于 k 个棋子，于是，这 k 列有不少于 k^2 个棋子. 这时按列统计，共放置了不少于 $(n-k)^2+k^2$ 个棋子. 下面我们只要证明 $(n-k)^2+k^2\geqslant\frac{n^2}{2}$ 就可以了.

事实上，有

$$
\begin{aligned}
&\left[(n-k)^2+k^2\right]-\frac{n^2}{2}\\
=&\frac{n^2}{2}-2nk+2k^2\\
=&2\left(\frac{n^2}{4}-nk+k^2\right)\\
=&2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

即
$$(n-k)^2+k^2\geqslant\frac{n^2}{2}.$$

故本题得证.

本题的另一种叙述方式是：在 $n\times n$ 的正方形表格中，每个格里都写上一个非负整数，如果在某一行与某一列的交汇处的数是 0，那么该行和该列上所填各数之和不小于 n. 求证：表中所有数的和不小于 $\frac{n^2}{2}$.

从这个意义上讲，本题是从“行或列的各 n 个数之和一定有一个最小和”这一极端情况出发的.

例 13.2 设有 $2n\times 2n$ 的正方形方格棋盘，在其中任意 $3n$ 个方格中各放一枚棋子. 求证：可以选出 n 行和 n 列，使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中.

显然，为了让全部的 $3n$ 枚棋子都在选出的 n 行和 n 列中，我们可以先选 n 行(或 n 列)，让这 n 行的棋子尽量地多，如果这 n 行的棋子数不少于 $2n$ 枚，那么剩下的不多于 n 枚的棋子一定会位于某 n 列(或 n 行)中. “选一行，使这行的棋子尽量多”就是本题的解题思路.

证 在各行棋子中，一定有一行棋子最多，设这一行有 p_1 枚棋子. 再从剩下的 $2n-1$ 行中找一行棋子最多的，设这一行有 p_2 枚棋子. 如此下去，共找出 n 行，这 n 行共有

$$p_1+p_2+\cdots+p_n$$

枚棋子，而剩下的 n 行共有

$$p_{n+1}+p_{n+2}+\cdots+p_{2n}$$

枚棋子.

我们证明所选出的 n 行至少有 $2n$ 枚棋子. 否则，若所选出的 n 行至多有 $2n-1$ 枚棋子，即

$$p_1+p_2+\cdots+p_n\leqslant 2n-1,$$

这时，至少有一个 $p_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$. 不然的话，若每个 $p_i\geqslant 2$，则 $p_1+p_2+\cdots+p_n\geqslant 2n$，出现矛盾.

由于共有 $3n$ 枚棋子，从而

$$p_{n+1}+p_{n+2}+\cdots+p_{2n}\geqslant n+1.$$

这时，至少有一个 $p_{n+k}>1\quad(k=1,2,\cdots,n)$，不然的话，若每个 $p_{n+k}\leqslant 1$，则 $p_{n+1}+p_{n+2}+\cdots+p_{2n}\leqslant n$，出现矛盾.

但是，$p_i\leqslant 1$，$p_{n+k}>1$ 就导致了与“$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 比 p_{n+1}，$p_{n+2},\cdots,p_{2n}$都大”的矛盾，因此必有

$$p_1+p_2+\cdots+p_n\geqslant 2n.$$

由于所选出的 n 行共有不少于 $2n$ 枚棋子，则其余的不多于 n 枚棋子从 n 列中去选即可. 这样，所有的 $3n$ 枚棋子就都在所选出的 n 行和 n 列之中.

上面这个例题是 1990 年全国初中数学联赛第二试的最后一道试题，而在本书第三节我们曾研究过 1990 年全国高中数学联赛第二试的最后一道试题. 在同一年的初、高中数学联赛的最后一题中都用极端原理证明存在性问题，这大概是一种巧合吧!

例 13.3 在听一个长达一天的报告的过程中，1987 个听众每人都恰好瞌睡了两次，每两个听众都恰有一个时刻同时打瞌睡. 证明：一定有一个时刻至少有 663 个听众打瞌睡.

证 我们考虑这样一个极端情况：每个听众第一次打瞌睡中最晚打瞌睡的人. 设此人第一次打瞌睡是在中午.

如果至少有 663 人在这时打瞌睡，则结论已经成立.

若这时至多有 662 人打瞌睡，则至少有

$$1987-662=1325$$

人在中午没打瞌睡. 现在，我们仅考虑这 1325 人，显然他们在上午和下午都各有一次打瞌睡.

如果听众 A,B 在上午有一个时刻同时打瞌睡就记为

图 13.1

$[A,B]$，否则记为(A,B). 用 $I(A,B)$表示 A 与 B 在下午至少有一个同时打瞌睡的区间.

对于上午没有同时打瞌睡的 A 与 B 同 C 与 D，即(A,B)，(C,D)，我们证明 $I(A,B)$与 $I(C,D)$必有重叠部分.

如果 A,B,C,D 在下午有相同的瞌睡时刻，则结论显然成立.

如果 A,B,C,D 是四个不同的人，$I(A,B)$与 $I(C,D)$无重叠，则根据题设条件"每两个听众都恰有一个时刻同时打瞌睡"，必有

$$[A,C],[A,D],[B,C],[B,D].$$

由于 A,B,C,D 上午只有一次打瞌睡，故有

$$[A,C],[A,D]\Rightarrow[C,D],$$

$$[A,C],[B,C]\Rightarrow[A,B],$$

$$\cdots\cdots$$

这便同(A,B)，(C,D)的假设发生矛盾. 因此，所有的 $I(A,$

$B)$,$I(C,D)$,…都有一公共时刻 t.

如果至少有 663 个人在时刻 t 打瞌睡，则结论成立.

否则，若至多有 662 个人在时刻 t 打瞌睡，则至少有

$$1325-662=663$$

人在时刻 t 没打瞌睡，每两个这样的人 E,F 必有 $[E,F]$，因而这 663 个人在上午某一时刻同时打瞌睡，结论也成立.

下面这个例题是第 16 届全俄罗斯数学奥林匹克的一道试题，题目中涉及俄罗斯货币“卢布”和“戈比”，其换算关系是 1 卢布 = 100 戈比.

例 13.4 有总值为 4 卢布的若干个硬币，硬币的面值分为 1 戈比，2 戈比，3 戈比，5 戈比四种. 证明：用这些硬币总可以凑出 3 卢布.

证 将所有的硬币按面值分为四组：A 组为 1 戈比的，B 组为 2 戈比的，C 组为 3 戈比的，D 组为 5 戈比的.

在这四组中，一定有一组的硬币总值最多，由于总共有 4 卢布的硬币，则币值最多的一组硬币总值不少于 1 卢布.

假设这组为 A 组、B 组或 D 组中的一组，那么由于 1，2 和 5 都是 100 的约数，用这一组硬币很容易凑出 1 卢布. 剩下的硬币便是 3 卢布.

若币值最多的一组为 C 组，则 C 组的硬币不少于 1 卢布. 由于 C 组是 3 戈比的硬币，则可以从中取出 90 戈比或 96 戈比或 99 戈比，这时分别凑上两个 5 戈比或两个 2 戈比或一个 1 戈比的硬币，均可得到 1 卢布，也即得到了 3 卢布. 如果没有两个 5 戈比、两个 2 戈比的硬币，即所有的钱不多于一个

5 戈比，一个 2 戈比，又不完全是 1 戈比的硬币，那么应该有不少于

$$\frac{400-5-2}{3}=131$$

个 3 戈比或可凑成 3 戈比的硬币，而这些 3 戈比硬币中的 100 枚即可凑成 3 卢布.

例 13.5 空间中给出 8 个点，其中任意 4 个点都不在同一个平面上，在它们之间连有 17 条线段. 证明：这些线段至少形成了一个三角形.

证 这 8 个点中，一定有一个点所连出的线段条数最多，设该点为 A，并设它共连出 n 条线段.

如果所有 17 条线段都没有形成三角形，那么与 A 相连的 n 个点之间彼此都没有线段相连，而其余的 $7-n$ 个点中每一点所连出的线段条数不多于 n 条(由 A 的极端性). 因此，线段的总条数不超过

$$n+(7-n)n=n(8-n)\leqslant\left(\frac{n+8-n}{2}\right)^2=16.$$

(此处用到平均不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.)这与已知共有 17 条线段相矛盾. 因此这些线段至少形成了一个三角形.

例 13.6 已知 $a_1=1,a_2=2$，且对 $n=1,2,\cdots$有

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & 当\ a_n\cdot a_{n+1}为偶数时,\\ a_{n+1}-a_n, & 当\ a_n\cdot a_{n+1}为奇数时.\end{cases}$$

试证：对一切自然数 n，都有 $a_n\neq 0$.

根据题设条件可以推出

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=5\times 2-3\times 1=7,$$

$$a_4=5\times7-3\times2=29,\quad a_5=29-7=22,$$

$$a_6=5\times22-3\times29=23,\quad \cdots$$

我们不用再递推下去，因为即使再递推下去，也不能保证对所有的 n，$a_n\neq0$. 但是我们发现，上述各数都不是 4 的倍数，也都不是 3 的倍数，而 0 既是 4 的倍数，又是 3 的倍数，所以我们的目标可转移为证明 a_n 不是 4 的倍数或 a_n 不是 3 的倍数，于是获得了下面的两个证法.

证 1 我们证明所有的 a_n 都不是 4 的倍数，为此用反证法.

如果有一些 a_n 能被 4 整除，则被 4 整除的所有 a_n 中，必有一个下标最小的，设 m 是能被 4 整除的 a_n 的最小下标，即 a_m 能被 4 整除，则由我们计算的 $a_1\sim a_6$ 的值可知，$m>5$.

由 a_m 是偶数可知，a_{m-1}，a_{m-2}均为奇数，a_{m-3}为偶数(由 $a_1=1$，$a_2=2$ 知，二相邻项不可能都为偶数，于是若 a_{m-1}，a_{m-2}为一奇一偶，则由 $5a_{m-1}-3a_{m-2}=a_m$ 得 a_m 为奇数，出现矛盾，因而 a_{m-1}，a_{m-2}均为奇数，进而推得 a_{m-3}为偶数)，

$$\begin{aligned}a_m&=a_{m-1}-a_{m-2}\\&=5a_{m-2}-3a_{m-3}-a_{m-2}\\&=4a_{m-2}-3a_{m-3}.\end{aligned}$$

由此可得 a_{m-3}也是 4 的倍数，但这与 m 是能被 4 整除的 a_n 的最小下标矛盾.

所以，所有的 a_n 都不能被 4 整除，因而对所有的 n，$a_n\neq0$.

证 2 我们证明所有的 a_n 都不是 3 的倍数.

假定有一些 a_n 能被 3 整除，设 m 是能被 3 整除的所有 a_n 中的最小下标.

若 $a_m=5a_{m-1}-3a_{m-2}$是 3 的倍数，则 a_{m-1}也是 3 的倍数，与 m 是最小下标相矛盾.

若 $a_m=a_{m-1}-a_{m-2}$，这意味着 a_{m-1}与 a_{m-2}都是奇数. 如果 a_{m-3}为奇数，则由 $a_{m-2}\cdot a_{m-3}$为奇数可知，$a_{m-1}=a_{m-2}-a_{m-3}$，因而 a_{m-1}为偶数，出现矛盾，于是 a_{m-3}为偶数，从而有

$$\begin{aligned} a_m &= a_{m-1}-a_{m-2} \\ &= 5a_{m-2}-3a_{m-3}-a_{m-2} \\ &= 4a_{m-2}-3a_{m-3}. \end{aligned}$$

由此可得 a_{m-2}为 3 的倍数，与 m 的最小性矛盾.

因而所有 a_n 都不是 3 的倍数，即对所有的 n，$a_n\neq 0$.

例 13.7 在有限项的实数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n \tag{13.1}$$

中，如果有一段数 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+l-1}$的算术平均数大于 1988，那么我们把这一段数叫作一条“龙”，并把 a_k 称为这条龙的“龙头”(如果某一项 $a_m>1988$，那么单独这一项也是龙). 假定(13.1)中至少存在一条龙，证明：(13.1)中全体可做龙头的项的算术平均数必定大于 1988.

这是 1988 年全国中学生数学冬令营的一道试题，1988 年恰为农历龙年，本题巧妙地把 1988 与龙结合在一起，很有趣味，题目的证法也比较多，我们在这里只介绍运用极端原理的一种证法.

证 设 a_{k_1}是第一个龙头，取以 a_{k_1}为龙头的最短龙

$$a_{k_1},a_{k_1+1},\cdots,a_{k_1+l_1-1},$$

把已知数列的前 k_1+l_1-1 项去掉,再取余下的项的第一个可作为龙头的项 a_{k_2},同样可取一条以 a_{k_2}为龙头的最短龙

$$a_{k_2},a_{k_2+1},\cdots,a_{k_2+l_2-1},$$

继续同样的步骤,可把已知数列的一切项取完.

这样可得到若干条最短龙排列的数列

$$\left.\begin{array}{l} a_{k_1},a_{k_1+1},\cdots,a_{k_1+l_1-1} \\ a_{k_2},a_{k_2+1},\cdots,a_{k_2+l_2-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k_m},a_{k_m+1},\cdots,a_{k_m+l_m-1}. \end{array}\right\} \tag{13.2}$$

每条最短龙都有这样的性质,任意截去其前面几项之后余下的项仍是一条龙,因此最短龙的每一项都可以做龙头,而把已知数列变成最短龙数列时去掉的项不能做龙头,所以(13.2)中的所有项的全体就是已知数列中可做龙头项的全体(例如 1,2,6000 是一条以 1 为龙头的最短龙,则去掉 1 之后,2,6000 还是一条以 2 为龙头的龙,去掉 1,2 之后,6000 也是一条龙,否则与最短龙的定义不符,但 6000,2,1 就不是最短龙).

由"龙"的定义,每一条龙的算术平均数大于 1988,则(13.2)中所有各项的算术平均数也大于 1988,即(13.1)中全体可做龙头的项的算术平均数必定大于 1988.

例 13.8 设 n 是大于 1 的正整数,n^2 能整除 2^n+1,求证:n 是 3 的倍数.

证 因为 2^n+1 是奇数，所以 n 也必为正奇数.

设 p 是 n 的最小素因数，则 p 是奇数，显然 $p\geqslant 3$，p 能整除 2^n+1.

由于 p 能整除 2^n+1，故所有形如 2^n+1 的数中一定有一个最小数能被 p 整除. 设 i 是使 p 能整除 2^i+1 成立的最小自然数.

我们证明 $1\leqslant i<p-1$. 不然的话，若 $i\geqslant p-1$，则可设

$$i=(p-1)t+r, \quad 0\leqslant r<p-1.$$

由著名的费马小定理（如果 p 是素数，那么对于任何整数 a，a^p-a 都是 p 的倍数）可知，p 能整除 $2^{p-1}-1$，又

$$2^i+1=(2^{p-1})^t\cdot 2^r+1.$$

因为 2^{p-1} 被 p 除余 1，所以由上式可知，当 p 能整除 2^i+1 时，p 能整除 2^r+1，因为 $p\geqslant 3$，从而 $r\neq 0$，$1\leqslant r<p-1\leqslant i$，这与 i 的最小性矛盾. 因而有 $i<p-1$.

把 n 写成

$$n=is+r_1, \quad 0\leqslant r_1<i,$$

则有

$$2^n+1=(2^i+1-1)^s 2^{r_1}+1.$$

当 p 能整除 2^n+1 时，显然有 p 能整除 $(-1)^s 2^{r_1}+1$.

若 s 为偶数，则 p 能整除 $2^{r_1}+1$，由 $r_1<i$ 及 i 的最小性可知 $r_1=0$.

若 s 为奇数，则 p 能整除 $2^{r_1}-1$，如果 $r_1>0$，令 $i=r_1+b$，$1\leqslant b<i$，于是由

$$2^i+1=(2^{r_1}-1)2^b+2^b+1$$

知，p 能整除 2^b+1，此与 i 的最小性矛盾，因此也有 $r_1=0$.

这就证明了 $n=is$，但 p 是 n 的最小素因数，又知 $1\leqslant i<p-1$，则只能有 $i=1$，所以 $p=3$，即 n 是 3 的倍数.

14

条件隐含在极端情况之中

前面各节我们介绍了运用极端原理解题的若干例子,这些例题的共同特点是,题目中给出的条件一定会有极端情况出现,而题目的存在性又与出现的极端情况有关.本节将介绍这样一类问题:题目中给出了一些条件,而这些条件本身隐含着极端情况,比如题目的条件仅当最大值出现或最小值出现时才成立,或仅当不等式中的等号出现时才成立,因此解这类题目时同样要考虑极端情况.

例 14.1 证明:如果 O 是面积为 S 的四边形 $ABCD$ 内的一个点(图 14.1),且

$$2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2,$$

则四边形 $ABCD$ 是正方形,且点 O 是它的中心.

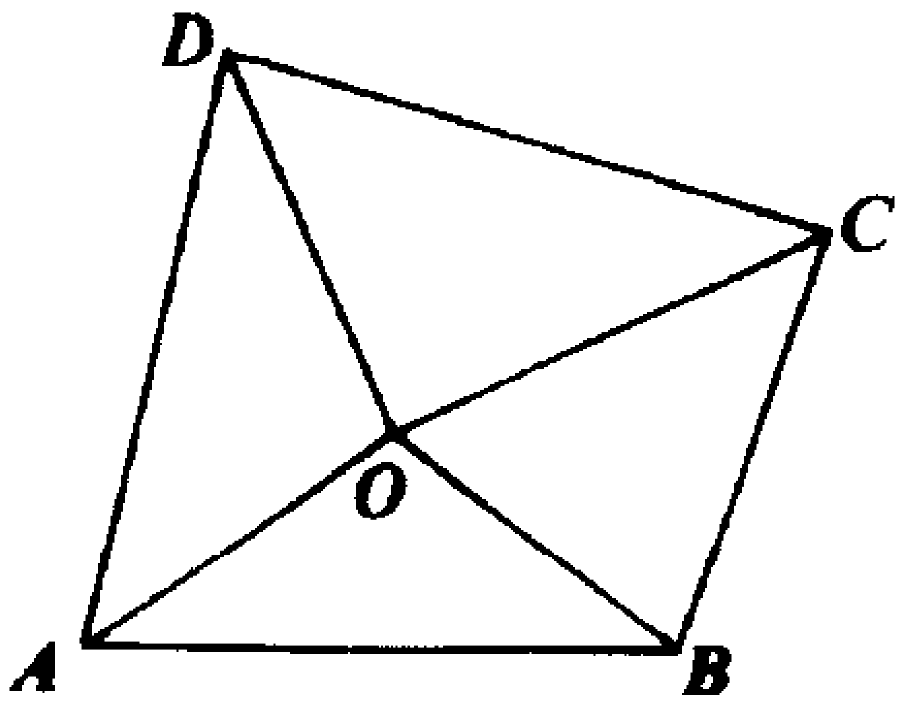

图 14.1

本题只给一个条件，从表面上看，要证明四边形 $ABCD$ 是正方形，条件是不够充分的，但是如果题目的条件是某种极端情况的产物，情形就大不相同了.

证 设 $\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，$\angle COD=\gamma$，$\angle DOA=\theta$，则

$$\begin{aligned}
&OA^2+OB^2+OC^2+OD^2\\
&=\frac{OA^2+OB^2}{2}+\frac{OB^2+OC^2}{2}+\frac{OC^2+OD^2}{2}+\frac{OD^2+OA^2}{2}\\
&\geqslant OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA\\
&=2\left(\frac{S_{\triangle AOB}}{\sin\alpha}+\frac{S_{\triangle BOC}}{\sin\beta}+\frac{S_{\triangle COD}}{\sin\gamma}+\frac{S_{\triangle DOA}}{\sin\theta}\right)\\
&\geqslant 2(S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOA})\\
&=2S.
\end{aligned}$$

而题目给出的是 $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=2S$，即必须使上面的不等式的等号成立，而等号成立的充要条件是 $OA=OB=OC=OD$ 且 $\alpha=\beta=\gamma=\theta=90°$，此时 $ABCD$ 是正方形，O 是它的中心.

例 14.2 设$\triangle ABC$ 的面积为 S，且 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，a，b，c 边上的高为 h_a，h_b，h_c，且

$$6S=ah_b+bh_c+ch_a.$$

求证：$\triangle ABC$ 是正三角形.

证 $ah_b+bh_c+ch_a$

$$=bh_b\ \frac{a}{b}+ch_c\ \frac{b}{c}+ah_a\ \frac{c}{a}$$

$$=2S\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\geqslant 6S\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}$$

$$=6S.$$

为满足题设条件必须使等号成立，此时必须有$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，即$a=b=c$，所以$\triangle ABC$ 是正三角形.

例 14.3 设等腰梯形的最大边长为 13，周长为 28，面积为 27，求它的其他边的长.

解 我们先研究哪条边是最大边. 如图 14.2 所示，设 AD 是等腰梯形 $ABCD$ 较大的底边，BH 是梯形的高.

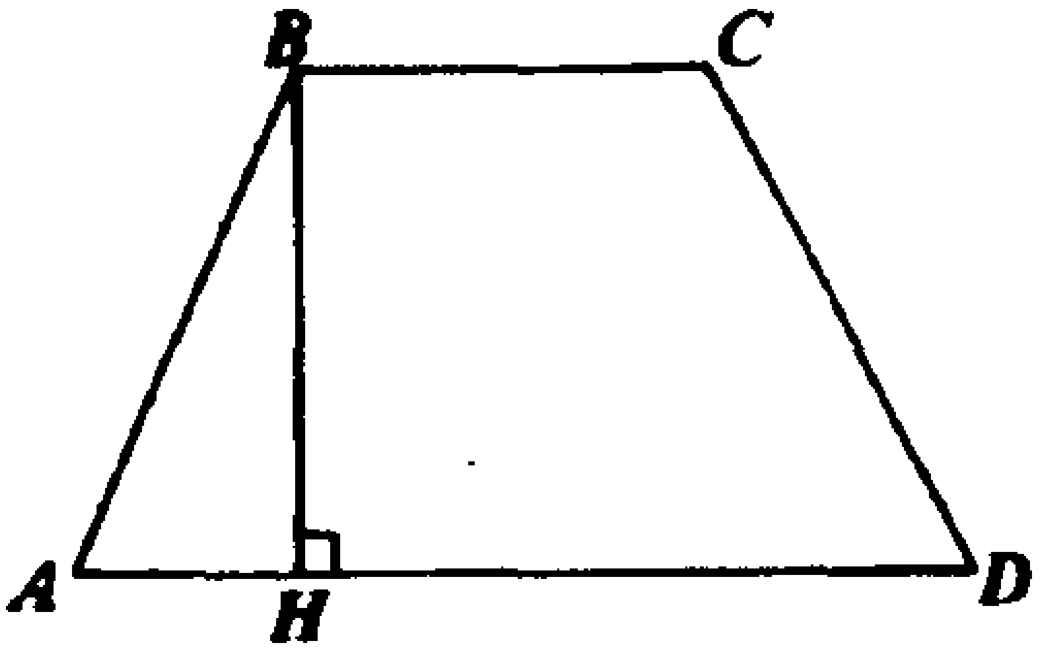

图 14.2

如果腰是最大边，即 $AB=CD=13$，则 $AD+BC=28-2\times13=2$，此时

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot BH=BH<AB=13<27.$$

与已知条件矛盾. 所以最大边不是腰，而是 AD，因此 $AD=13$.

设 $AB=CD=x$，则 $BC=28-13-2x=15-2x$，

$$AH=\frac{13-(15-2x)}{2}=x-1,$$

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{x^2-(x-1)^2}=\sqrt{2x-1}.$$

设梯形 $ABCD$ 的面积为 S，则

$$\begin{aligned}S=27&=\frac{(28-2x)\sqrt{2x-1}}{2}\\&=\sqrt{(2x-1)(14-x)^2}\\&\leqslant\sqrt{\left[\frac{(2x-1)+(14-x)+(14-x)}{3}\right]^3}\\&=27.\end{aligned}$$

上式必须等号成立，当且仅当 $2x-1=14-x$，即 $x=5$ 时，梯形 $ABCD$ 的面积 27 是它的最大值. 由此可得梯形的另三边的长均为 5.

例 14.4 求满足条件

$$\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}{a\sin\beta+b\sin\gamma+c\sin\alpha}=\frac{p}{9R}$$

的三角形三边 a,b,c 之比. 其中 α,β,γ 依次是 a,b,c 的对角，p 是周长，R 是外接圆半径.

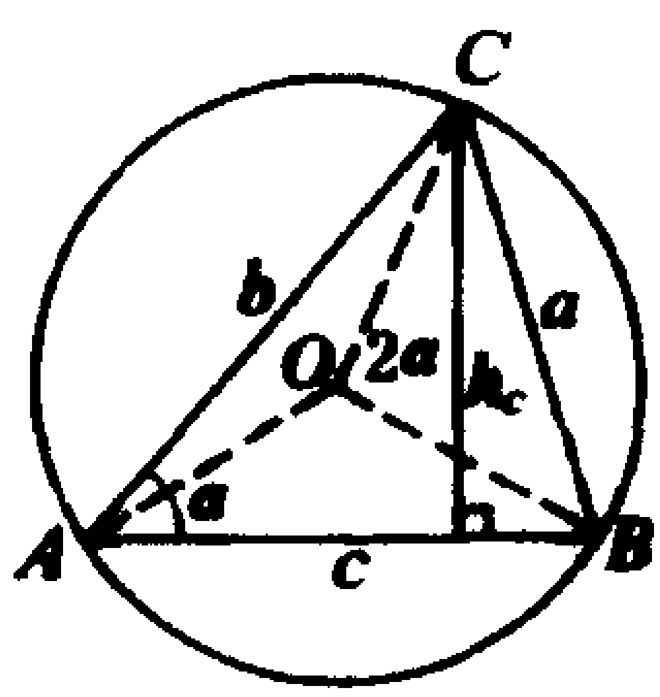

图 14.3

解 设 h_a,h_b,h_c 为题设三角形三边的高，S 是它的面积，则

$$a\sin\beta=h_c,$$

$$b\sin\gamma=h_a,$$

$$c\sin\alpha=h_b.$$

从而已知等式化为

$$\begin{aligned}&p(h_a+h_b+h_c)\\&=9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma).\end{aligned}$$

且由图 14.3 可知，

$$S=\frac{1}{2}R^2(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma).$$

故有

$$\begin{aligned}&9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)\\=&9R(2R\sin\alpha\cos\alpha+2R\sin\beta\cos\beta+2R\sin\gamma\cos\gamma)\\=&9R^2(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)\\=&18S.\end{aligned}$$

另一方面有

$$\begin{aligned}18S&=p(h_a+h_b+h_c)\\&=(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)\\&\geqslant9\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{h_ah_bh_c}\\&=9\sqrt[3]{(ah_a)(bh_b)(ch_c)}\\&=9\sqrt[3]{(2S)^3}\\&=18S.\end{aligned}$$

上式必须等号成立，而等号成立的充要条件是 $a=b=c$ 且 $h_a=h_b=h_c$，从而三角形三边之比为 1∶1∶1.

下面的几个例题是证明不存在问题，这些图形之所以不存在，是因为题设条件在极端情况下都不可能成立，所以在一般情况下更不成立.

例 14.5 证明：不存在这样的平行四边形，它的两条边长分别为 1 和$\frac{1}{2}$，对角线的夹角为 60°.

证 假设存在满足条件的平行四边形 $ABCD$(图 14.4)，且 $AB=a=1$，$BC=b=\frac{1}{2}$，$\angle BOC=\alpha=60°$，则由图 14.4 可知，

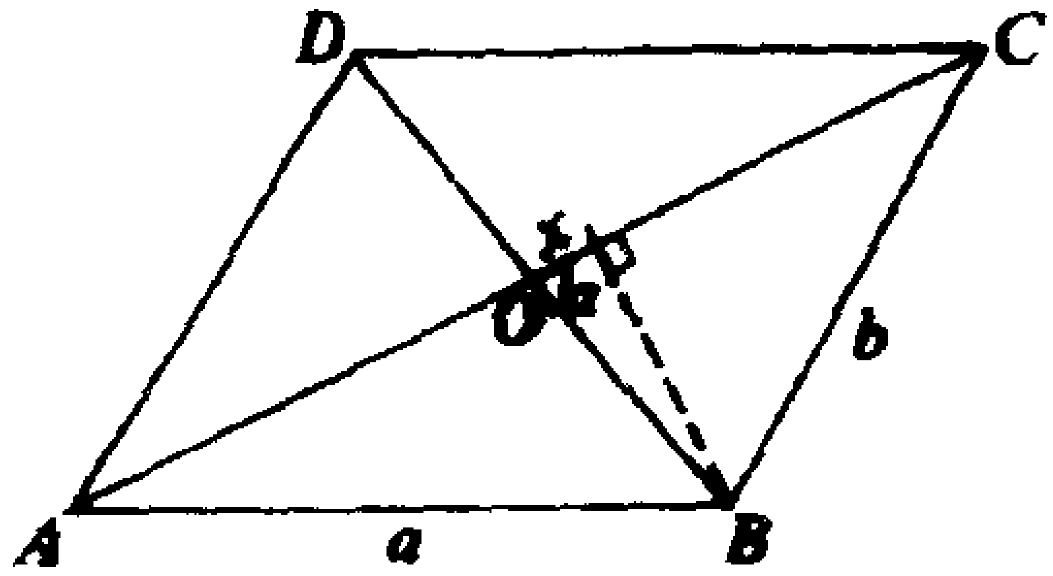

图 14.4

$$a^2=(OA+x)^2+(OB^2-x^2),$$

$$b^2=(OA-x)^2+(OB^2-x^2),$$

$$2(OA^2+OB^2)=a^2+b^2,$$

$$b^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\alpha,$$

$$b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-2OA\cdot OB\cdot\cos 60°,$$

于是 $$OA\cdot OB=\frac{3}{8}.$$

设$\triangle BOC$的面积为$S_{\triangle BOC}$,平行四边形$ABCD$的面积为S,则

$$\begin{aligned}S&=4S_{\triangle BOC}\\&=4\cdot\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin 60°\\&=\frac{3\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

然而平行四边形面积的最大值是当它为矩形时取得的,即面积的最大值为$1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.由于

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}>\frac{1}{2},$$

这说明假定存在的那个平行四边形的面积比平行四边形的最大面积还大,这是不可能的,所以题设的平行四边形不存在.

例 14.6 求证:不存在这样的三角形,其周长为16,内切圆半径为1,三个旁切圆半径之和为$2\sqrt{33}$.

证 设 I_A 为 $\triangle ABC$ 的旁心，r 为内切圆半径，r_a, r_b, r_c 为旁切圆半径，p 为 $\triangle ABC$ 周长之半，S 为 $\triangle ABC$ 的面积，则

$$S = rp$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

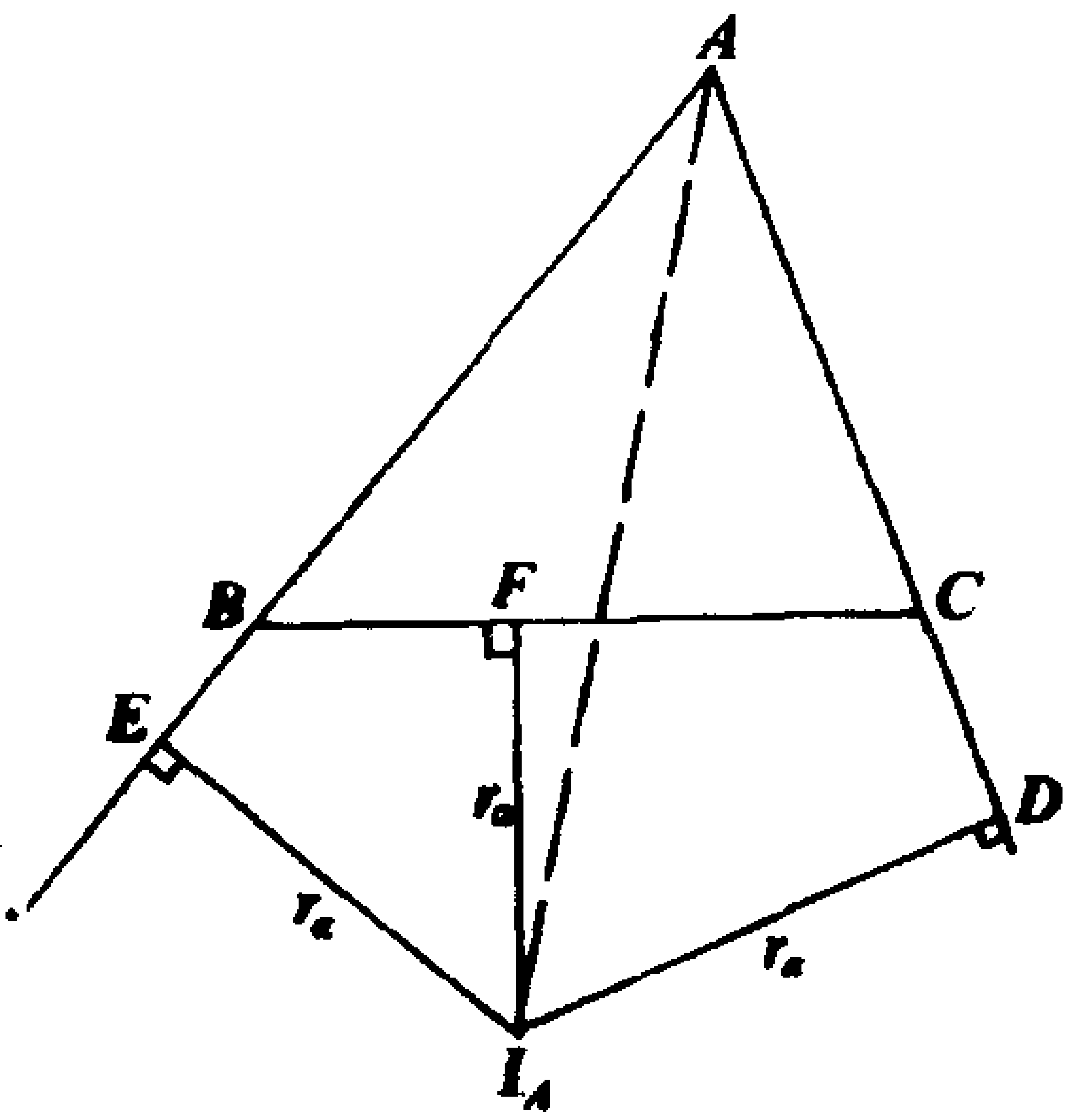

图 14.5

作 $I_AD \perp AC$ 并交 AC 的延长线于 D，$I_AE \perp AB$ 并交 AB 的延长线于 E，$I_AF \perp BC$（图 14.5），则

$$AD = AE = p.$$

$$\begin{aligned} S_{AEI_AD} &= S + S_{I_ADCF} + S_{I_AEBF} \\ &= rp + FCr_a + FBr_a \\ &= rp + r_a a. \end{aligned} \tag{14.1}$$

又
$$\begin{aligned} S_{AEI_AD} &= S_{\triangle AI_AD} + S_{\triangle AI_AE} \\ &= \frac{1}{2}ADr_a + \frac{1}{2}AEr_a \\ &= pr_a \end{aligned} \tag{14.2}$$

由(14.1)，(14.2)得

$$rp + r_a a = pr_a,$$

$$r_a = \frac{rp}{p-a}.$$

同理得 $$r_b = \frac{rp}{p-b}, \quad r_c = \frac{rp}{p-c}.$$

$$\begin{aligned} r_a r_b r_c &= \frac{rp}{p-a} \cdot \frac{rp}{p-b} \cdot \frac{rp}{p-c} \\ &= \frac{r^3 p^3}{S^2/p} \\ &= \frac{r^3 p^4}{r^2 p^2} \\ &= p^2 r = 64. \end{aligned}$$

$$r_a + r_b + r_c \geqslant 3\sqrt[3]{r_a r_b r_c} = 12.$$

然而，由已知

$$r_a + r_b + r_c = 2\sqrt{33} = \sqrt{132} < 12,$$

所以这样的三角形不存在.

例 14.7 在空间是否存在这样的四点 A,B,C,D，满足 $AB=CD=8$，$AC=BD=10$，$AD=BC=13$.

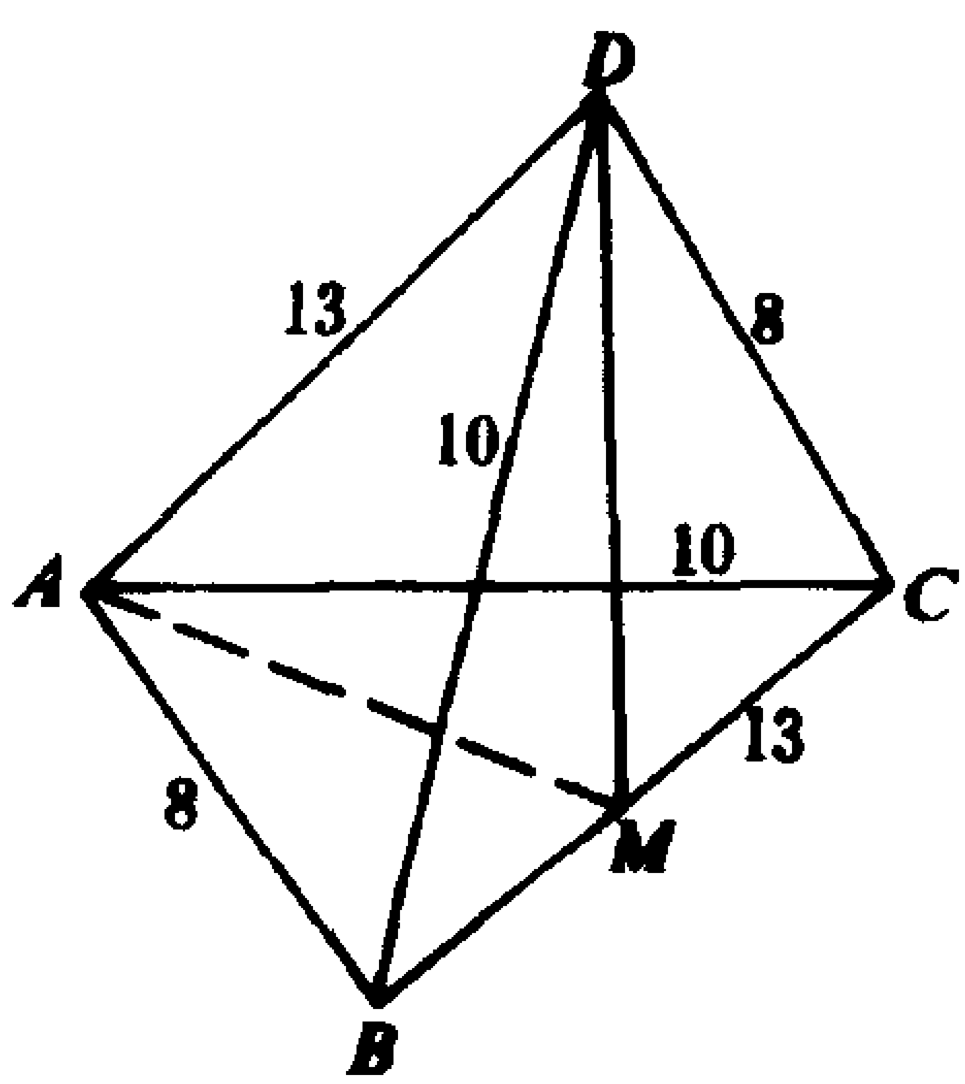

图 14.6

解 作$\triangle ABC$，使 $AB=8$，$AC=10$，$BC=13$.

以 BC 为一边继续作三角形 BCD，使$\triangle ABC$ 与$\triangle BCD$ 不在同一个平面上，$BD=10$，$CD=8$，将 BC 中点记为 M(图 14.6)，在$\triangle AMD$ 中，则有

$$AD \leqslant AM + MD.$$

其中等号当且仅当 D 在平面 ABC 上成立.

现在考虑$\triangle BCD$ 的一个极端位置，即把$\triangle BCD$ 与$\triangle ABC$ 平放在同一个平面上，这时 A,M,D 共线，将使 $AD=$

$AM+MD$,而此时构成了平行四边形 $ABDC$. 这就说明当$\triangle ABC$ 与$\triangle BCD$ 在同一平面时,AD 最大.

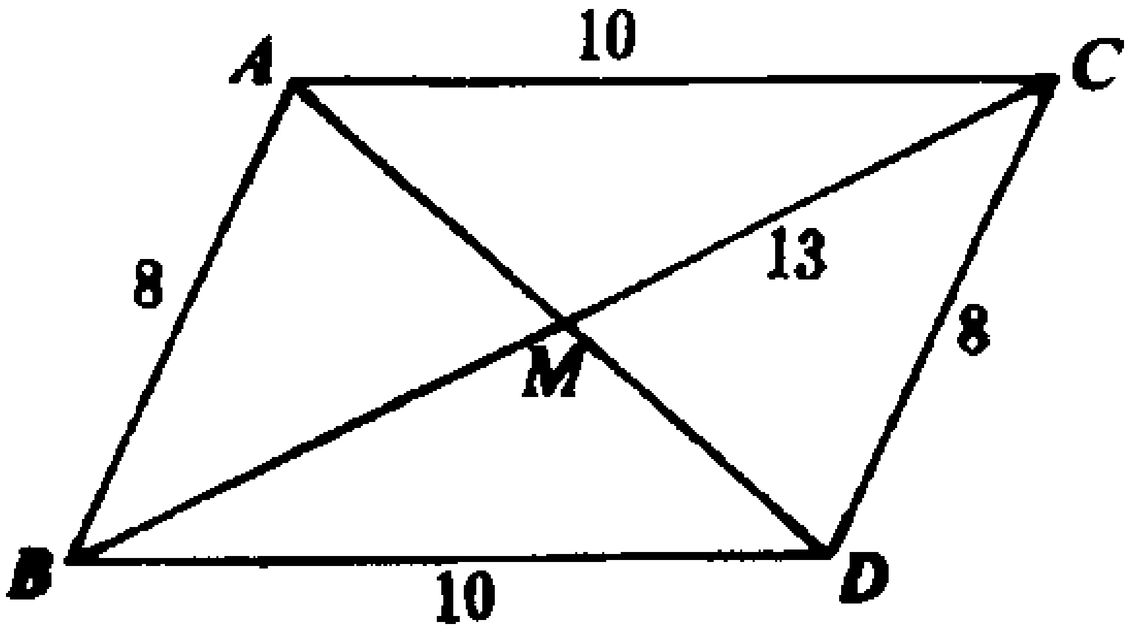

图 14.7

现在我们计算 AD 的最大值. 由

$$AD^2+BC^2=2(AB^2+BD^2)$$

可得 $$AD^2=2(8^2+10^2)-13^2=159<169=13^2.$$

即 AD 的最大值小于 13,因此 $AD=13$ 不可能,也即满足条件的四点 A,B,C,D 不存在.

有一些解方程和不等式的题目,从表面上看,解起来有些困难,但是当我们考虑到极端情况时,题目便会迎刃而解.

例 14.8 解方程

$$\cos\frac{x^2+x}{2}-2^{x-1}-2^{-(x+1)}=0.$$

这个方程可化为

$$\cos\frac{x^2+x}{2}=2^{x-1}+2^{-x-1},$$

方程的两边,一边是余弦函数,一边是指数函数,再继续进行恒等变形就困难了,我们只能分而治之,分别考虑方程两边的极端情况.

解

$$\begin{aligned}&2^{x-1}+2^{-x-1}\\=&\frac{2^x}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^x}\\\geqslant&2\sqrt{\frac{2^x}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2^x}}=1,\end{aligned}\tag{14.3}$$

即 $2^{x-1}+2^{-x-1}$ 的极小值是 1. 而

$$\cos\frac{x^2+x}{2}\leqslant 1, \tag{14.4}$$

即 $\cos\frac{x^2+x}{2}$ 的极大值是 1.

因此，为使方程成立，必须使 $2^{x-1}+2^{-x-1}$ 的极小值等于 $\cos\frac{x^2+x}{2}$ 的极大值，即使(14.3)与(14.4)的等号成立. 当且仅当

$$x-1=-x-1,$$

即 $x=0$ 时，(14.3)取等号，此为(14.4)也取等号. 所以方程有唯一实数解 $x=0$.

例 14.9 解方程

$$x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}\,x^2+3=0.$$

这是一个三次方程，系数中又有无理数，直接去解，不特别容易. 但是，如果我们把题设的方程看作是某种变化状态的极端情况，问题可能解决得顺利一些.

解 显然方程无零根. 由已知方程可得

$$x^3+3=\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}\,x^2,$$

$$x+\frac{3}{x^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}, \tag{14.5}$$

所以有

$$x+\frac{3}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{x^2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}.$$

由（14.5）可知，上述不等式仅等号成立，于是有 $\frac{x}{2}=\frac{3}{x^2}$，$x^3=6, x=\sqrt[3]{6}$.

因此，$x=\sqrt[3]{6}$ 是方程的一个根. 这样就可以对原方程的左边进行因式分解：

$$x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}x^2+3=(x-\sqrt[3]{6})^2\left(x+\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)=0.$$

于是方程的根为 $x_1=x_2=\sqrt[3]{6}, x_3=-\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$.

例 14.10 解方程组

$$\left.\begin{aligned} 2y&=x+\frac{17}{x}, \\ 2z&=y+\frac{17}{y}, \\ 2w&=z+\frac{17}{z}, \\ 2x&=w+\frac{17}{w}. \end{aligned}\right\}$$

解 由第一个方程知 x, y 同号，由第二个方程知 y, z 同号，以下是 w, z 同号，x, w 同号，从而 x, y, z, w 同号，并且若有一组正数解 (x_0, y_0, z_0, w_0)，则必有一组负数解 $(-x_0, -y_0, -z_0, -w_0)$（这只须把每一个方程都乘以 -1 即可）.

不妨设 x, y, z, w 都是正数，且

$$x\leqslant y\leqslant z\leqslant w.$$

把题中的四个方程相加得

$$x+y+z+w=17\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)\leqslant\frac{17\times 4}{x},$$

又因为
$$x+y+z+w\geqslant 4x,$$

于是得
$$4x\leqslant\frac{17\times 4}{x},$$

$$x^2\leqslant 17,$$

所以
$$0<x\leqslant\sqrt{17}. \tag{14.6}$$

另一方面,由平均不等式有

$$2x=w+\frac{17}{w}\geqslant 2\sqrt{w\cdot\frac{17}{w}}=2\sqrt{17},$$

$$x\geqslant\sqrt{17}. \tag{14.7}$$

对照(14.6),(14.7)得

$$x=\sqrt{17}.$$

同理有 $y=\sqrt{17}$,$z=\sqrt{17}$,$w=\sqrt{17}$.

从而方程有唯一一组正数解

$$(x,y,z,w)=(\sqrt{17},\sqrt{17},\sqrt{17},\sqrt{17}),$$

同时必有一组负数解

$$(x,y,z,w)=(-\sqrt{17},-\sqrt{17},-\sqrt{17},-\sqrt{17}).$$

15

数学解题的特殊化策略

在前面各节，我们在解题时，把极端情况作为考虑问题的出发点，对于不少存在性问题，极端情况也是问题的归宿. 考虑极端情况是数学解题的一个特殊化策略. “矛盾的普遍性即寓于矛盾的特殊性之中”，这是一条重要的辩证法原理，解数学题从特殊性入手就是这条原理的具体运用.

著名数学家希尔伯特（Hilbert，1862－1943）曾经这样讲过：“在讨论数学问题时，我相信特殊化比一般化起着更为重要的作用. 我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因，就在于这样的事实，即有一些比手头问题更简单、更容易的问题没有完全解决，这一切都有赖于找出这些比较容易的问题，并且用尽可能完善的

方法和能够推广的概念来解决它们.”

数学解题的特殊化策略是一种“以退为进”的策略，华罗庚教授曾经这样说过：“先足够地退到我们所最容易看清楚问题的地方，认透了，钻深了，然后再上去.”运用以退为进的策略，可以从一般退到特殊，从复杂退到简单，从抽象退到具体，从多元退到少元，从较强命题退到较弱命题.

下面我们再通过几个例题介绍一些特殊化的解题策略.

例 15.1 在给定的锐角三角形 ABC 中，求作一个正方形 $DEFG$，使 D，E 两点落在 BC 上，G 落在 AB 上，F 落在 AC 上.

这个题目要求正方形的四个顶点全都在三角形的边上，如果作这个正方形难以入手，不妨先考察它的某些简单情形，比如先使正方形的三个顶点落在三角形的边上，而这一问题是容易解决的.

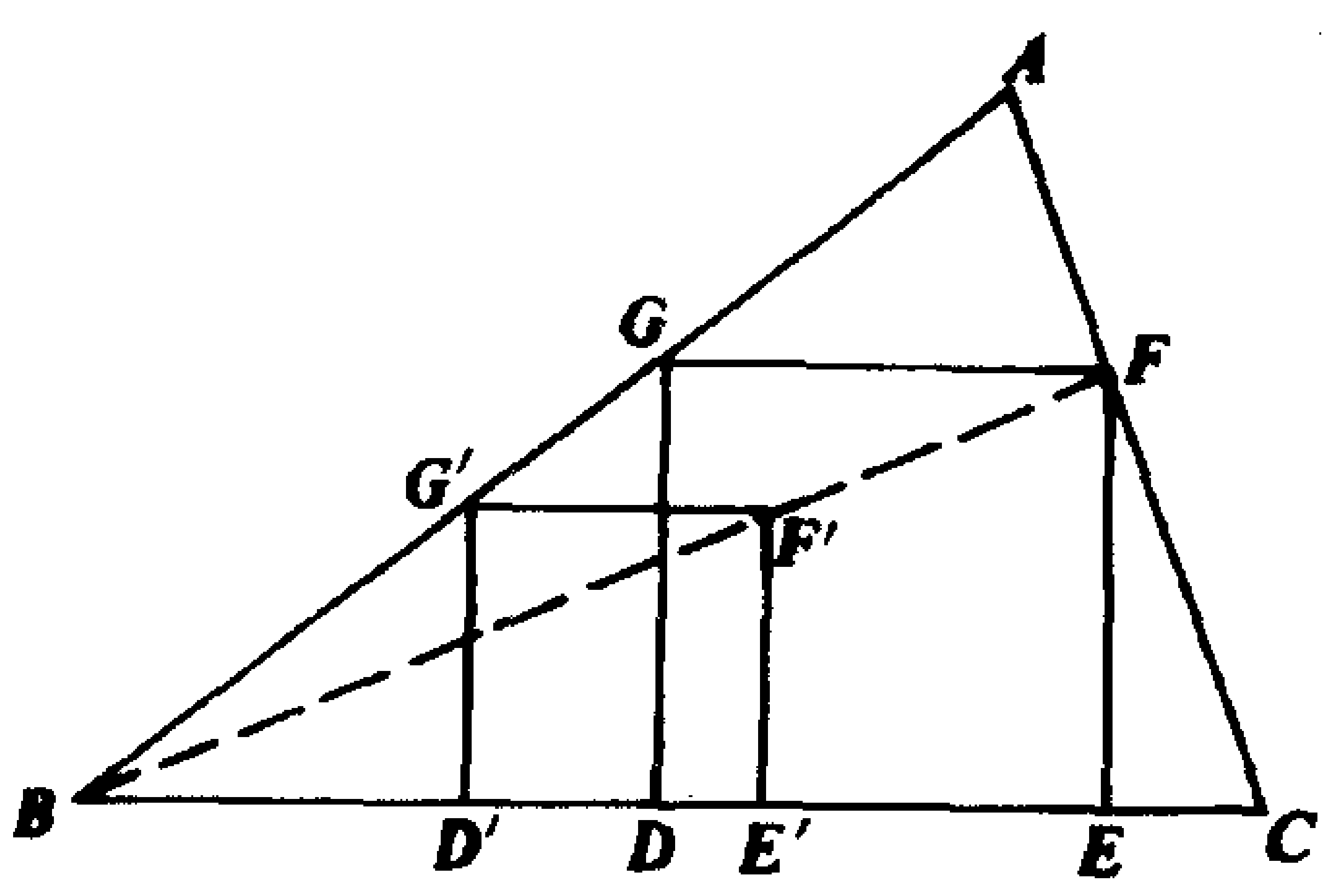

图 15.1

比如作出正方形 $D'E'F'G'$，使 D'，E' 落在 BC 上，G' 落在 AB 上，而 F' 在 $\triangle ABC$ 的内部（也可以在外部）. 事实上，这只须在 AB 上找一点 G'，作 $G'D' \perp BC$，D' 为垂足，然后以 $G'D'$ 为一边作正方形 $D'E'F'G'$ 就可以

了.

这个特殊的简单的问题解决了，下面的问题就是使正方形的四个顶点都落在三角形的边上. 这只要以 B 为位似中心，作一个位似变换就可以了：即连结 BF'，使直线 BF' 交 AC 于 F，过 F 作 $FG/\!/F'G'$，$FE/\!/F'E'$，作 $GD/\!/G'D'$，分别交 AB，BC 于 G，E，D，则这样得到的四边形 $DEFG$ 就是符合题目要求的正方形(图 15.1).

一些复杂的命题，往往隐藏或混淆了条件与结论之间的关系，一时很难得出解法，这时就需要我们从简单的、特殊的情况着手去探索，在直觉的引导下去发现规律，探测出解题的途径，确定解题方案.

例 15.2 一个盒中装有 1995 个小球，甲、乙二人轮流从盒中取球，每次最多取 7 个，最少取 1 个，取到最后一个小球者胜，现在由甲先取，问甲怎样才能取胜?

由于盒中的小球数太多，每个轮次甲、乙二人从盒中取小球的方式也比较多，由题意，每个轮次有 49 种取法，如甲取 7，乙取 7；甲取 7，乙取 6；…；甲取 7，乙取 1；甲取 6，乙取 7；甲取 6，乙取 6；…；甲取 1，乙取 1 等等. 这样看来，问题是很复杂的.

现在我们采取特殊化策略，考虑一个等价的简单的模型：将盒中的小球数减少到 10，并假定甲、乙二人每次从盒中最多取 2 个，最少取 1 个，取到最后一个小球者胜.

情况简单了，结论就容易得到. 若甲要取胜，必须且只须在最后一轮时，甲后取，并且此轮可取的球数为 $2+1=3$. 这

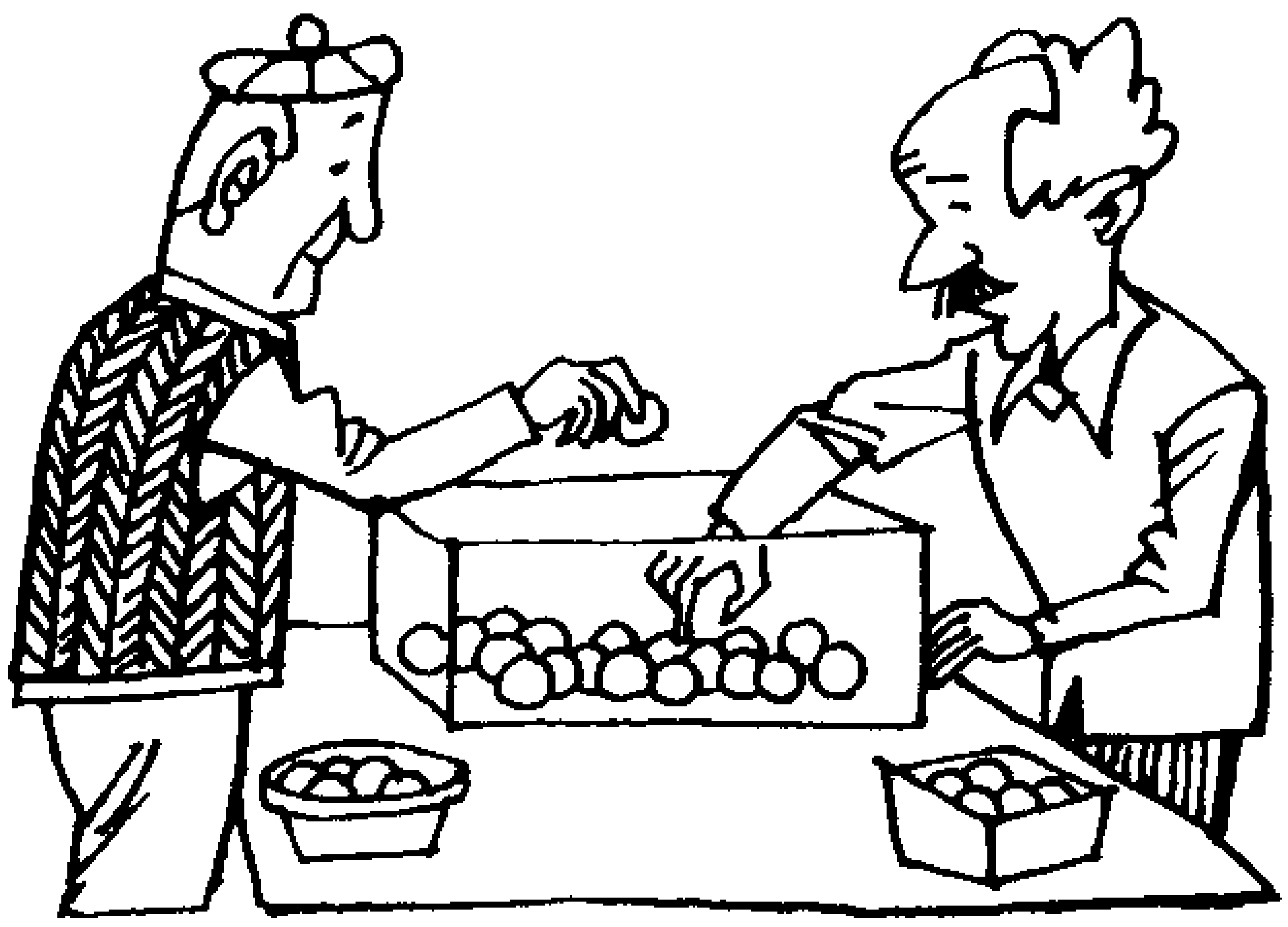

图 15.2

是因为乙最多能取 2 个，剩下 1 个以便由甲来取. 逆推回去，甲为了获得主动，第一次取完球之后，剩下的球应是 3 的倍数，即第一次甲取 1 球，以后变成乙先取甲后取，只要乙取 $k(k=1,2)$ 个，则甲就取 $3-k$ 个，这样甲就必胜.

由以上的分析，本题的解法随之而出：

解 由于 1995 除以 $7+1=8$ 的余数是 3，所以甲第一次取 3 个，剩下的 1992 是 8 的倍数，只要乙取 $k(k=1,2,\cdots,7)$ 个，甲就取 $8-k$ 个，从而甲必胜.

例 15.3 设 n 是不小于 3 的自然数，以 $f(n)$ 表示不是 n 的约数的最小自然数(例如 $f(12)=5$)，如果 $f(n)\geqslant 3$，又可作 $f(f(n))$，类似地，如果 $f(f(n))\geqslant 3$，又可作 $f(f(f(n)))$，等等. 如果

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{个}f}(n)\cdots))=2,$$

就把 k 叫作 n 的长度. 如果用 l_n 表示 n 的长度，试对任意的自然数 $n(n\geqslant 3)$ 求 l_n，并证明你的结论.

这道题是 1988 年全国数学冬令营试题，题目相当抽象，我们可以采用特殊情况引路的方法，从具体数的运算中去发现规律.

第一种情况：我们先考虑最简单的情形，由于 $f(n)$ 表示不是 n 的约数的最小自然数，并且 1 是任何数的约数，所以我们可以考虑什么时候会出现 $f(n)=2$，显然 2 不是任何奇数的约数，因此，当 n 为奇数时，必然有 $f(n)=2$，如

$$f(3)=2,\quad f(5)=2,\quad f(1995)=2,\cdots$$

这时 n 的长度等于 1.

第二种情况：我们考虑第一次取函数值为奇数时的情形，因为这时就化为第一种情况了. 比如 24 是一个偶数，显然，不是 24 的约数的最小自然数是 5. 类似地，我们可以举出下面一些特殊情况：

$$f(2^3\cdot 3)=5,\quad f(5)=2,$$

$$f(2^3\cdot 3\cdot 5)=7,\quad f(7)=2,$$

$$f(2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7)=9,\quad f(9)=2,$$

$$f(2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9)=11,\quad f(11)=2,$$

等等，这时 n 的长度是 2.

第三种情况：我们考虑第二次取函数值才得奇数的情况，这时第一次取函数值一定是 2 的幂，继续第二种情况的取法，我们做一些试验：

$$f(2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11)=13,$$

$$f(2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13)=15,$$

$$f(2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15)=16=2^4,$$

好了，我们继续做下去，$f(2^4)=3$，$f(3)=2$，这时 $n=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15$ 的长度是 3.

从以上的分析可以看出，$f(n)$ 只能等于 2 的幂或者奇数

这两种情况，因此启发我们从分析 $f(n)$ 的形状入手，就可获得本题的解法.

解 设 $f(n)=m=2^a\cdot b$，其中 $n\geqslant 3, m\geqslant 2$，$b$ 为正奇数，a 为非负整数.

由题设，m 不是 n 的约数，又因为 2^a 和 b 互质，所以 2^a 和 b 都不可能是 n 的约数，并且有 $2^a\leqslant m, b\leqslant m$. 由 $f(n)$ 的定义，m 为不是 n 的约数的最小自然数，所以必有

$$f(n)=2^a \quad 或 \quad f(n)=b.$$

当 $f(n)=2^a$ 时，

若 $a=1$，则 $f(n)=2$，此时 $l_n=1$.

若 $a>1$，则 $f(f(n))=f(2^a)=3, f(f(f(n)))=2$，此时 $l_n=3$.

当 $f(n)=b$ 时，因 b 是正奇数，故 $f(b)=2$，即 $f(f(n))=2$，此时 $l_n=2$.

于是 $l_n=1,2,3$.

以上两个题都是采取以退为进的策略，为了解题的需要，先退一步考虑一些比较简单的特殊的情况，从中悟出一些道理，进而发现一条摆脱疑难、绕过障碍的途径，这是一条行之有效的解题途径.

在数学解题中发挥特例的作用还可以证明一些命题或否定一些命题. 如下面解选择题的特例分析法就是一个成功的例子.

例 15.4 从盛满 20 升纯酒精的容器里倒出 1 升，然后用水填满，再倒出 1 升混合溶液，又用水填满，这样继续进行，

如果倒第 k 次($k\geqslant1$)时共倒出纯酒精 x 升,倒第 $k+1$ 次时,共倒出纯酒精 $f(x)$升,则 $f(x)$的函数表达式为(　　).

(A)$f(x)=\frac{19}{20}x$.　　(B)$f(x)=\frac{19}{20}x+1$.

(C)$f(x)=\frac{x}{20}$.　　(D)$f(x)=\frac{x}{20}+1$.

解这个题目用直接法求解是可以的.解法是这样的:

倒出的酒精构成了 $a_1=1$,公比 $q=\frac{19}{20}$的等比数列.由已知

$$x=S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k,$$

则

$$\begin{aligned}qx&=qS_k=a_1q+a_2q+\cdots+a_kq\\&=a_2+a_3+\cdots+a_{k+1},\\a_1+qx&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}\\&=S_{k+1}.\end{aligned}$$

于是由 $a_1=1,q=\frac{19}{20},S_{k+1}=f(x)$得

$$f(x)=1+\frac{19}{20}x,$$

因此应选(B).

但是考虑到数学选择题的四个选择支有且只有一个是符合题目要求的,这时我们取一个特例:$k=1,x=a_1=1$,这时 $f(x)=a_1+a_2=1+\frac{19}{20}$.而把 $k=1,x=1$ 代入四个选择支,只有(B)正确.

在一些较复杂的探索题中,通过特例也可以帮助探索解题途径,启发我们去猜测结论.

例 15.5 设函数 $f(x)$ 的定义域是实数集 R，对于任意实数 x, y 都有

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

且存在正数 c，使 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$. 试问 $f(x)$ 是不是周期函数？如果是，找出它的一个周期；如果不是，说明理由.

这个题目是判断是否存在非零常数 T，使得对一切实数 x 都有

$$f(x+T)=f(x).$$

观察题目给出的函数等式

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

我们可以想到满足该式的一个特例，这就是三角函数的和差化积公式：

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y.$$

由于存在正数 $c=\pi$，使

$$\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

成立，所以余弦函数 $f(x)=\cos x$ 就是符合题意的一个特例.

由于余弦函数是周期为 $2\pi(2\pi=2c)$ 的函数，所以可以推测 $f(x)$ 是一个周期函数，并且可以类推出其周期为 $2c$.

在特例的导引下，我们的解题目标豁然明朗了，即要设法证明 $f(x+2c)=f(x)$. 因为

$$\begin{aligned}
&f(x+c)+f(x)\\
&=f(x+\frac{c}{2}+\frac{c}{2})+f(x+\frac{c}{2}-\frac{c}{2})\\
&=2f(x+\frac{c}{2})f(\frac{c}{2})=0,
\end{aligned}$$

所以有 $$f(x+c)=-f(x).$$

又 $$\begin{aligned} f(x+2c)&=f(x+c+c)\\ &=-f(x+c)\\ &=f(x). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$是以 $2c$ 为周期的周期函数.

从以上几例大家可以看出,特殊化策略是一个重要且有用的解题策略,将抽象的理论放到具体而简单的背景下去考察,从特殊的、简单的或极端的情况入手去分析、认识复杂的事物,去探索规律,去建立解题方案,发挥特例的作用去肯定或否定一些命题,这些都是特殊化策略的主要体现.