组合数学的问题与方法

单　墫

人民教育出版社

组和数学的问题与方法
单 墫 编著
责任编辑 易熔
●
人民教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京顺义冠中印刷厂印装
开本787×1092 1/32 印张 2.625 字数46,000
1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷
印数 1—1,920
ISBN 7-107-10130-7
G·861 定价0.94元

前　言

组合数学，这个数学分支正在迅猛地发展．它是古老的，又是年轻的．它的地位日益重要，它的应用极其广泛．从生物学、化学到社会经济，从电路网络到政治生活，都可以见到它的踪影．对于计算机科学，更是“不可一日无此君”．

不但在各种数学竞赛题中，它所占的比重越来越大，而且还悄悄地渗入了中学的教材．由于它有助于提高学生的学习兴趣，培养学生的能力，激发学生的才智，已经有不少有识之士预计它将要取过去平面几何的地位而代之．

那么，什么是组合数学呢？

一位组合数学家回答得很妙：

“组合数学就是咱们组合数学家所研究的对象．”

这个答案乍听起来有点循环定义的味道，好象什么也没有说．但再想一下，却颇有道理．既然组合数学正在发展，没有定型，硬要规定什么内容是组合数学，什么不是，岂不是削足适履，作茧自缚．

另一位组合数学家谨慎地下了一个定义：

“组合数学研究的是安排一组事物成各种模式的问题．”

这样笼统、模棱的语句，除了一点心理上的安慰外（谢天谢地，我们总算有了一个定义），恐怕也没有多大用处．

对于中学同学，与其勉勉强强地下个正面的定义，倒不如说凡是不属于几何、三角、概率统计、微积分，也不属于代数与数论(算术)的问题全属于组合数学.

这本小册子，当然无法显示组合数学的全豹，只希望通过一些实例，使读者对于组合数学的问题与方法能产生一点印象：

“哦，这就是组合数学！”

作 者

目　录

第一部分　计数问题

“我赴圣地爱弗西(*Ives*)，
途遇妇女数有七，
每人七袋手中提，
一袋七猫数整齐，
一猫七崽紧相依．
妇与布袋猫与崽，
几何(多少)同时赴圣地?”

这是一首古老的英国童谣．假设它说的是事实的话(我们很怀疑每位妇女手中能提那么多的猫咪)，不难算出

妇　女	7	名
布　袋	$7^2=49$	个
猫	$7^3=343$	只
崽	$7^4=2401$	只
总　数	2800	

有很多问题与这首童谣类似．例如：一个军有三个师，一个师有三个旅，一个旅有三个团，一个团有三个营，一个营有三个连，一个连有三个排，一个排有三个班，一个军有多少个班?

显然，答案是

$$3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=3^7=2187.$$

即使问题中出现的数不一定全部相同(全是7或全是3)，但计算的方法也是一样的：采用乘法．下面的例1便

是如此.

例1 从甲地到乙地有三条路，从乙地到丙地有四条路(如图1.1)，问从甲地到乙地再到丙地有多少种不同的走法.

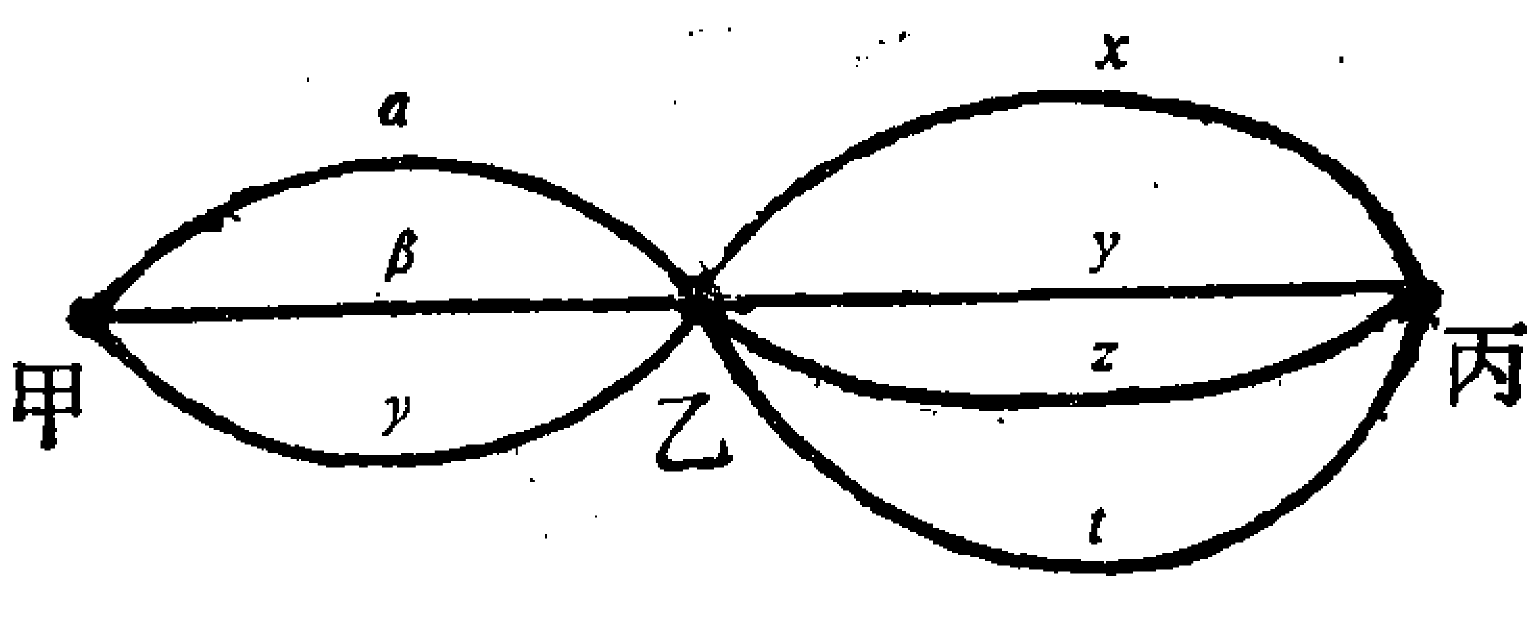


图 1.1

走法共有$3\times4=12$种. 我们可以把这12种走法全部列举出来，即

$$\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z,\ \alpha t,$$
$$\beta x,\ \beta y,\ \beta z,\ \beta t,$$
$$\gamma x,\ \gamma y,\ \gamma z,\ \gamma t.$$

其中αx表示先经路α到乙，再经路x到丙.

例1与下面的问题实质上是一样的：

“如果一棵树有三个枝，一个枝有四朵花，一棵树有几朵花?”

从这些简单的问题可以总结出一个重要的原理，即

乘法原理 **如果做第一件事有l种方法，第一件事做完后做第二件事有m种方法，第一、二件事做完后做第三件事有n种方法，…. 那么先做第一件事，再做第二件事，然后再做第三件事，…就有**

$$l\times m\times n\times\cdots$$

种方法.

这个原理看来简单，却极为重要，有着广泛的应用．

例2　一项比赛有6名运动员参加，要定出第一名、第二名、第三名，有多少种不同的结果？

首先选第一名，有6种可能：每位运动员都有可能当第一名．第一名选好后再选第二名，有5种可能．第一、二名选好后再选第三名，有4种可能．因此（根据乘法原理），选出前三名有

$$6\times5\times4=120$$

种不同的结果．

用完全同样的推理，可以知道从n个不同的元素中选出r个元素排成一列，不同的排列数为

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$$

（选排在第一位的有n种方法，再选排在第二位的有$n-1$种方法，…，最后选排在第r位的有$n-r+1$种方法）．

如果用P_n^r来表示从n个不同的元素中选出r个元素的排列数，就有公式

$$P_n^r=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1).$$

如果$r=n$，就得到n个元素的**全排列公式**（即将n个元素排成一列的不同排列的种数）

$$P_n(\text{即}P_n^n)=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1=n!.$$

$n!$（读做n的阶乘）就是$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$的缩写．为了方便起见，规定

$$0!=1.$$

上面的排列公式也可改写成

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

例3 五个人排成一列照相，有多少种不同的排法？

答案是 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

例4 用1，2，5，6，8这五个数字组成三位数，如果(1)三位数中数字不重复出现，(2)数字可以重复出现．可以组成多少种不同的三位数？

第一个小问题的答案是

$$P_5^3=5\times4\times3=60.$$

第二个小问题的答案是

$$5\times5\times5=125.$$

理由与本节开始的童谣相同：第一位数字有5种选法，第二位数字也有5种选法(允许第一位数字重复出现)，第三位数字也有5种选法，因而根据乘法原理，共有$5\times5\times5$种选法．

更一般地，从n个元素中选出r个排成一列，如果每个元素都可以重复选取，那么排列数为

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{个}}=n^r$$

这是允许重复的排列公式．不过，重要的不是死背公式，而是如何去运用乘法原理(例4的两个问题都可以用乘法原理解决，请读者体会这两个问题的差别)．

例5 用数字0，1，2，4，5可以组成多少个没有重复数字的三位数？

先考虑百位数字，有4种选法(0不能在首位)，再考虑十位数字与个位数字，可知答案是

$$4\times4\times3\quad(\text{或}4\times P_4^2)=48.$$

例6 将字母 a，a，a，b，c，d，e排成一列，有多少种不同的排法？

如果是 7 个不同的字母a_1，a_2，a_3，b，c，d，e，那么排成一列的排法(全排列)是

$$7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1.$$

现在的问题是 7 个字母中有三个是相同的a.为了解决这个问题，我们运用一个非常重要的思想：**对应**.

对 7 个不同的字母 a_1，a_2，a_3，b，c，d，e 的一种排列，有a，a，a，b，c，d，e的一种排列与它对应，对应的方法是略去 a_1，a_2，a_3 的下标，把它们变成同一个字母a.例如排列

$$a_1ba_2cdea_3 \longrightarrow abacdea$$

(这里$\longrightarrow$表示对应).

显然，a_1，a_2，a_3，b，c，d，e的每一种排列都有一个确定的a，a，a，b，c，d，e 的排列与它对应. 但这个对应并不是一一对应.例如与

$$a_1ba_3cdea_2,\quad a_1ba_2cdea_3,\quad a_2ba_1cdea_3,$$

$$a_2ba_3cdea_1,\quad a_3ba_1cdea_2,\quad a_3ba_2cdea_1$$

对应的都是同一个：$abacdea$. 事实上，[illegible] e的每一个排列对应于a_1，a_2，a_3，b，c，d，e的6个排列 这6 $(=3!)$种排列是将下标1，2，3添到三个(在不同位置的)a上的不同的添法的个数.

这样看来，a，a，a，b，c，d，e的排列数应当是 7 个字母a_1，a_2，a_3，b，c，d，e的全排列的$\frac{1}{6}$，即

$$\frac{7!}{3!} = 7\times6\times5\times4 = 840$$

种.

例6所讨论的问题称为**有重复元素的全排列**.运用对应

的思想可以(和例6同样地)推出：

将l个a，m个b，n个c，…排成一列，不同的排法有

$$\frac{(l+m+n+\cdots)!}{l!\,m!\,n!\cdots}$$

种.

例7 从6名运动员中选出三名组成一个代表团，有多少种不同的选法?

这一题与例2是不相同的. 例2中选出的三名分别为第一名、第二名、第三名，是一个排列问题. 同样的三个人，但名次排列的顺次不同算作不同的选法. 在本例中，选出的是三个人的组合，不考虑他们的排列. 这种问题称为**组合问题**.

这两种问题也是有联系的. 每个排列，如果不考虑顺序(名次)，就是一个组合，所以每个排列有一个组合与它相对应.

另一方面，每个由三个人组成的组合，如果将这三个人分别排为第一名、第二名、第三名，就得到一个排列. 由于这三个人排名次的方法有$3!=6$种，所以每个组合对应于$3!$个排列.

这样，从6名运动员中选出三名的组合数是选出三名的排列数的$\frac{1}{6}$，即

$$\frac{1}{6}\times 6\times 5\times 4=20.$$

一般地，将n个元素中选出r个的组合数记为C_n^r，则根据上面的推理有

$$C_n^r=\frac{1}{r!}\times P_n^r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\times(r-1)\times\cdots\times 1}.$$

组合数当然是整数，所以我们得到一个“副产品”：

任意的 r 个连续整数的乘积被前 r 个自然数的乘积整除.

例8 集合 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 有多少个子集？(空集也算作S的子集)

这个问题可以用两种方法来处理. 第一种方法是：考虑集合S有多少个1元子集，多少个2元子集，…，多少个n元子集.

显然，每个r元子集就是从1，2，…，n这 n 个元素中取r个形成的组合，因此r元子集的个数是C_n^r.从而 S 的子集共有(取$r=0, 1, 2, \cdots, n$)

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$$

个. 其中 $C_n^0=\frac{n!}{0!\,n!}=1$表明空集算作集合$S$的子集.

第二种方法是注意到S的每一个子集都是从 S 中选取若干个元素组成的，所以每个子集对应于这 n 个元素的一种取舍方式.元素1可能被选入(某个子集)，也可能未被选入，即有两种可能. 同样元素 2、3、…、n 也各有两种可能：被选入或未被选入. 这样从S 中选元素来组成子集，(根据乘法原理)就有

$$2\times2\times2\times\cdots\times2=2^n$$

种方式，也就是说S的子集有2^n个.

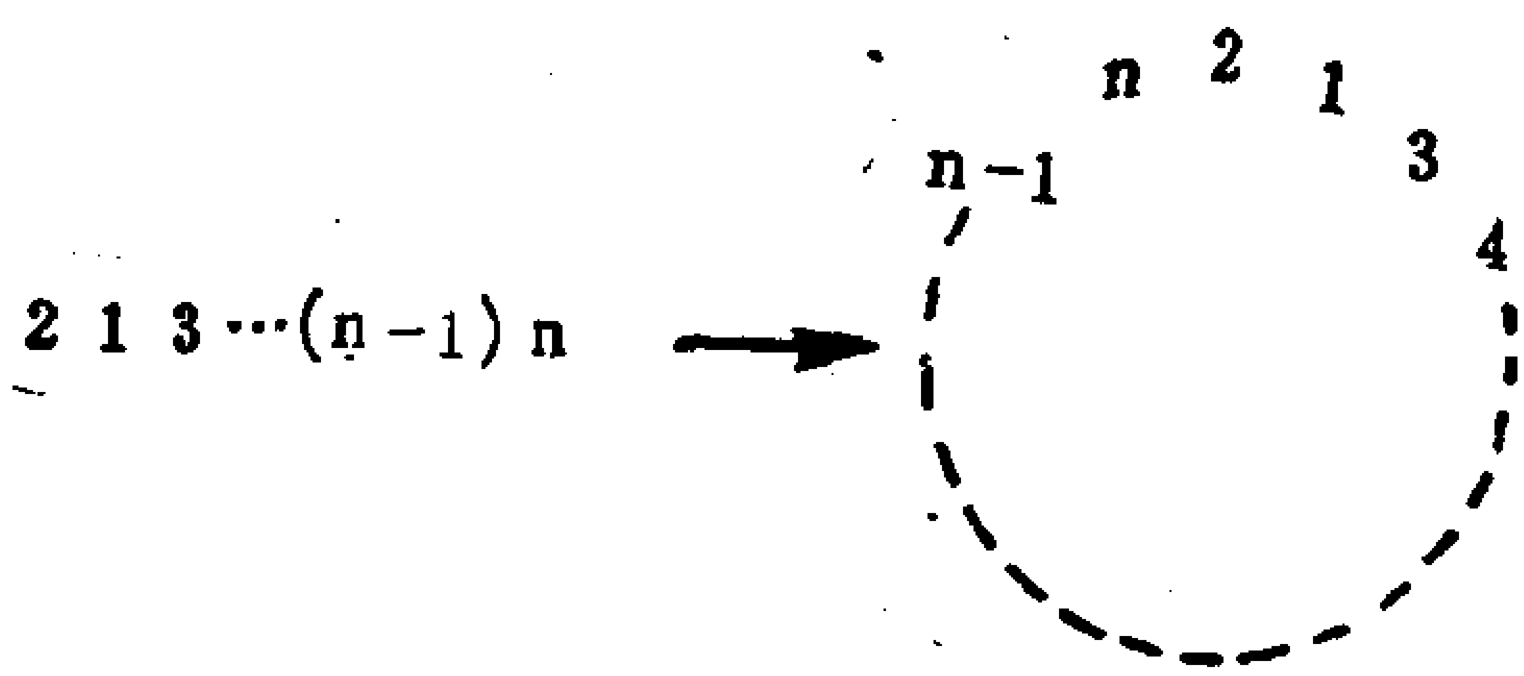
两种方法所得的结果应当相同. 因此，我们又获得一个“副产品”：

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n.$$

例9 将 n 个元素1，2，…，n排在一个圆周上，有多少种不同的排法？

我们仍然采用对应．将这个问题与n个元素排成一列的全排列联系起来．

每一个全排列，有一个圆周排列与它对应，方法是将这个全排列的首尾衔接起来，并且从首经过全部元素到尾的方向是顺时针方向(以下的问题中，凡将直线衔接或将圆周剪开时均作这样的约定，不再一一声明)．例如



这个对应不是一一对应．事实上，每一个圆周排列对应于 n 个全排列，因为可以在任意两个元素之间将圆周剪开．例如，将上面的圆周排列在2、1之间剪开得到

$$1\ 3\ 4\cdots(n-1)\ n\ 2$$

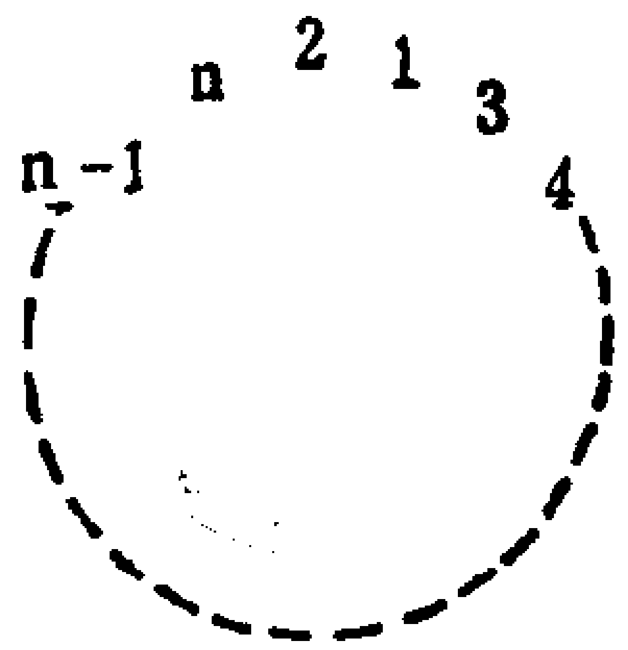
在1、3之间剪开得到

$$3\ 4\ 5\cdots(n-1)\ n\ 2\ 1$$

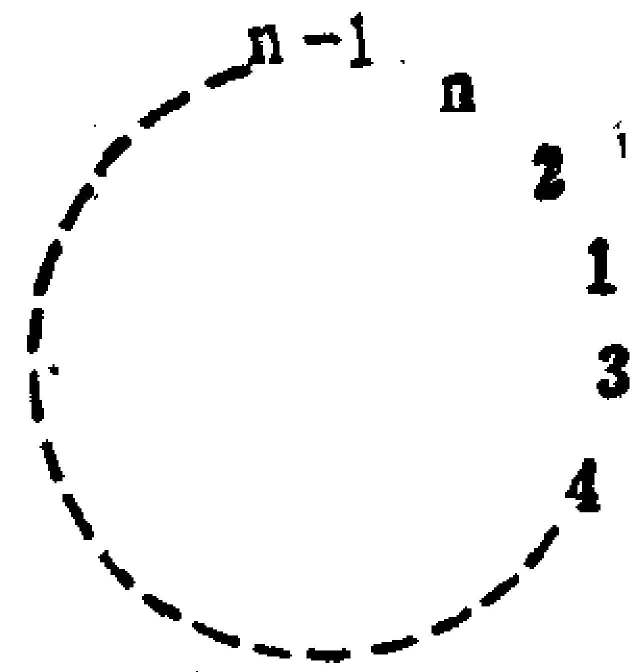
等等．于是圆周排列的个数是全排列的$\frac{1}{n}$，即为

$$\frac{1}{n}\times n!=(n-1)!.$$

注　我们把



与



当作相同的圆周排列．即只考虑这 n 个元素的相互次序，而不问它们在圆周上的那一个点(位置)．如果认为圆周上的n个位置是互不相同的，那么将n个元素放在这 n 个位置的放法仍然是$n!$（与全排列公式相同）．

例10 七种颜色：赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫的宝石各一颗，串成一个项链，有多少种不同的串法？

答案是

$$\frac{1}{2}\times\frac{7!}{7}=\frac{1}{2}\times(7-1)!=\frac{1}{2}\times 6!=360.$$

因为每一种项链对应于两个圆周排列，这两个圆周排列中，七种颜色的次序是一样的，但一个依反时针方向排列，一个依顺时针方向排列．例如，对于图1.2的两个不同的圆周排列，与它们对应的是同一个项链．

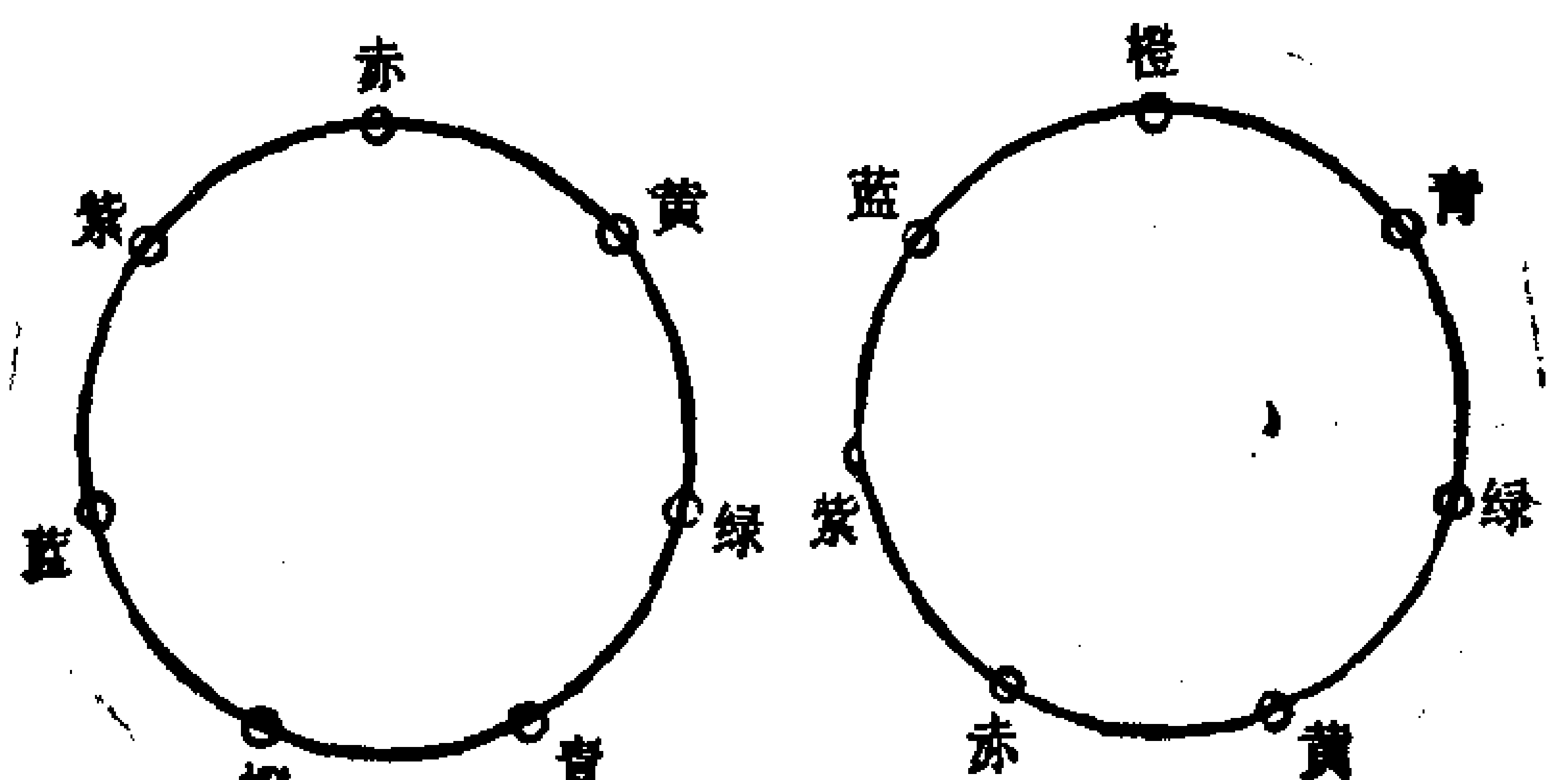


图 1.2

例11 n个元素排成一列，从中取出 r 个，并要求这r个元素中没有两个原来是相邻的，问有多少种选法.

我们把这 n 个元素顺次记为1、2、…、n.如果选出的r个元素为

$$(1\leqslant)a_1<a_2<\cdots<a_r(\leqslant n),$$

由于每两个元素不相邻，

$$(1\leqslant)a_1<a_2-1<a_3-2<\cdots<a_r-(r-1)$$
$$(\leqslant n-(r-1)).$$

将 $\{a_1,\ a_2-1,\ a_3-2,\ \cdots,\ a_r-(r-1)\}$ 与 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r\}$对应，前者是从$n-(r-1)$个元素1，2，…，$n-(r-1)$中取$r$个的一个组合.

反过来，从$n-(r-1)$个元素1，2，…，$n-(r-1)$中取r个的一个组合

$$(1\leqslant)b_1<b_2<\cdots<b_r(\leqslant n-(r-1)),$$

也恰好对应于一个符合题意的组合

$$(1\leqslant)b_1<b_2+1<b_3+2<\cdots<b_r+(r-1)\ (\leqslant n),$$

因为这里b_1，b_2+1，…，$b_r+(r-1)$中每两个的差大于1.

于是，这里的对应是一一对应，两者的个数相等，所求的答案是

$$C_{n-(r-1)}^{r}=C_{n-r+1}^{r}$$

种.

还可以用一种更形象的说法来建立对应(这是华东师大肖刚教授告诉作者的)：先将 n 个元素排好，所取的r个元素涂上黑色(每两个黑的互不相邻)，如下图1.3.

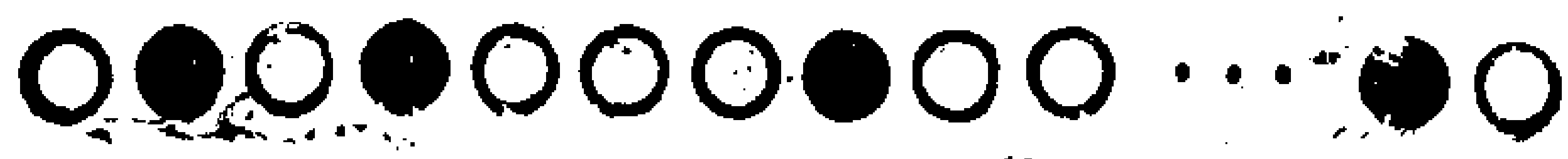


图 1.3

然后，使黑的“吃掉”紧跟它的那个元素，但最后一个黑的不吃，得到(见图1.4)

○●　●　○○●　○···●○

图　1.4

这时元素的总数为$n-(r-1)$，而涂上黑色的元素表示从$n-(r-1)$中选出r个的一个组合．

反过来，从$n-(r-1)$中选出r个的一个组合可以得出一个符合题意的组合．方法是使前$r-1$个涂黑的元素各“吐出”一个元素紧跟着它．

这样的对应是一一对应．读者可以发现这与前面所建立的对应是一致的．

*北京一〇一中学学生严毅松有一种巧妙的解法：

考虑排成一列的$n-r+1$个房间，每两个房间用一个“档板”隔开，共有$n-r$个档板．从$n-r+1$个房间中选出r个的方法显然是C_{n-r+1}^{r}种．对于每一种选法，我们将选出的r个房间与$n-r$个档板都看成“球”，r个房间就是从这n个排成一列的球中选出的r个球，这r个球每两个不相邻．

反过来，如果从一条直线上的n个球中取出r个两两不相邻的球，把剩下的球看作“档板”，取出的r个球就是在(被档板隔成的)$n-r+1$个房间中选出的r个房间．

这样，从$n-r+1$个房间中选r个房间的组合与从直线上n个元素(球)中选r个．两两不相邻的组合是一一对应的，所以后者的个数(即本题的答数)也是C_{n-r+1}^{r}．

例12　n个元素1，2，…，n(依顺时针顺序)排在圆周上，现从中取出r个，这r个元素中没有两个是在圆周上相

邻的.问有多少种不同的取法.

这个问题显然与例11有密切的关系. 我们将介绍三种解法.

第一种解法 将圆周从第一个元素1与第n个元素n之间剪开. 这时每一个合于题意的取法变成例11中的一种取法, 即从排成一列的n个元素中取r个, 这r个元素中没有两个相邻的一种取法.

反过来, 例11中的一种取法, 如果没有同时取第一个元素1与最后一个元素n, 那么把首尾(1与n)衔接起来也就得到一个符合本题要求的取法. 因此, 这两者是一一对应的.

而例11中的一种取法, 如果同时取1与n, 那么2与$n-1$一定都没有取, 在剩下的从3至$n-2$这$n-4$个排成一列的元素中取出了$r-2$个, 并且每两个不相邻. 所以在例11中同时取1与n的取法应当有

$$C_{n-4-(r-2)+1}^{r-2}=C_{n-r-1}^{r-2}$$

种(即在例11的结果中用$n-4$代替n, $r-2$代替r).

从而例11中, 不同时取1与n的取法有

$$\begin{aligned}
&C_{n-r+1}^{r}-C_{n-r-1}^{r-2}\\
&=\frac{(n-r+1)!}{r!(n-2r+1)!}-\frac{(n-r-1)!}{(r-2)!(n-2r+1)!}\\
&=\frac{(n-r-1)!}{r!(n-2r+1)!}[(n-r+1)(n-r)-r(r-1)]\\
&=\frac{(n-r-1)!}{r!(n-2r+1)!}\times n(n-2r+1)\\
&=\frac{n\times(n-r)!}{(n-r)\times r!(n-2r)!}
\end{aligned}$$

$$=\frac{n}{n-r}C_{n-r}^{r}.$$

这也就是本题的答案.

第二种解法 对每一种合乎题意的取法，我们将圆周上要取出的r个元素涂黑，然后将圆周剪开拉成直线，使最后的一个元素为白．由于这时有$n-r$个白的元素，所以每一个合乎题意的取法导出$n-r$个在直线上的取法.

如果合乎题意的取法共x种，那么将导出$(n-r)x$个在直线上的取法.

对上述$(n-r)x$个取法，我们将其中每n个对应于同一个，也就是取消原来的n个元素的标号，将这些元素当作没有差别的球，这样每n个取法变为同一种取法(见图1.5).例如

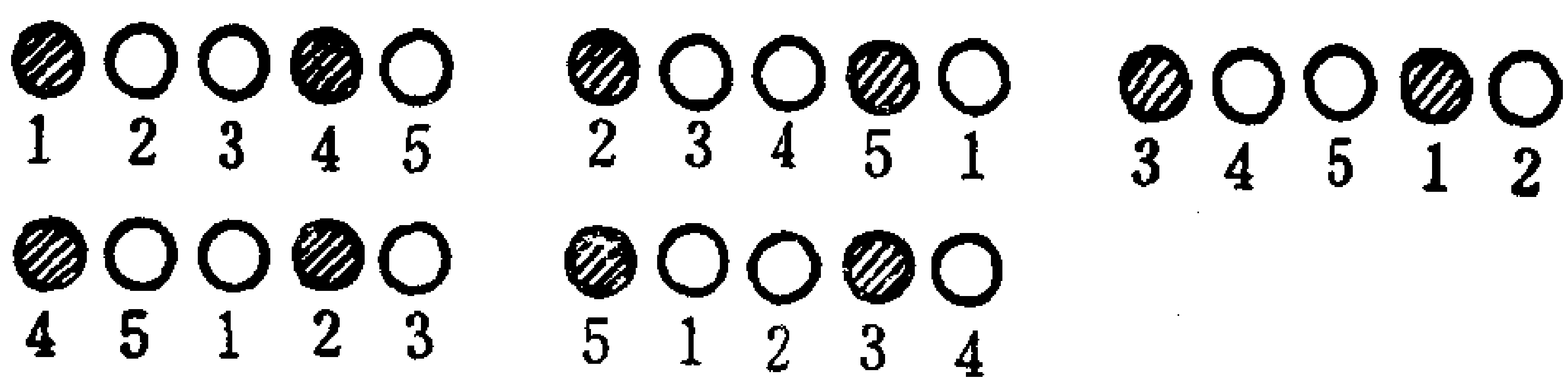


图 1.5

这5个不同的取法对应于同一个取法，如图1.6,

图 1.6

于是，这样对应后，得到的取法有$\frac{n-r}{n}x$种，每一种都是从n个排成一列的球中取r个，并且这r个中每两个互不相邻，没有在最后的一种取法.

现在使每个黑的“吃掉”紧跟在它后面的一个元素，变

为从$n-r$个元素中取r个的组合.因此

$$\frac{n-r}{n}x=C_{n-r}^{r},$$

即答案是

$$x=\frac{n}{n-r}C_{n-r}^{r}.$$

第三种解法 如果将圆周剪开使黑的元素在最后，那么由于黑的元素有r个，所以可以得到rx个在直线上的取法. 除消标号后，形成$\frac{rx}{n}$种不同的取法.

每种取法的最后一个元素为黑，所以第一个元素与倒数第2个元素(第$n-1$个元素)都是白的，去掉这三个元素(第1个、第$n-1$个与第n个元素).剩下的$n-3$个元素中取$r-1$个，每两个不相邻的取法有

$$C_{n-3-(r-1)+1}^{r-1}=C_{n-r-1}^{r-1}$$

种，所以

$$\frac{rx}{n}=C_{n-r-1}^{r-1}$$

即

$$x=\frac{n}{r}C_{n-r-1}^{r-1}=\frac{n}{n-r}C_{n-r}^{r}.$$

注1 显然$2r\leqslant n$ (即$r\leqslant n-r$)，否则合乎题意的取法是不存在的，也就是在这时，取r个元素使每两个都不相邻的取法只有0种.

注2 为了方便起见，通常约定在$r>n$或n为负数时，$C_{n}^{r}=0$.

注3 通过例12,我们顺便证明了$\frac{n}{n-r}C_{n-r}^{r}$一定是整

数．

注4　有编号与无编号的区别在计数问题中是很重要的．

例13　一只小虫沿着方格纸（见下图1.7）上的横线与竖线前进，从坐标原点爬到点(m, r)．如果小虫走的是最短的路线，它有多少种不同的走法？

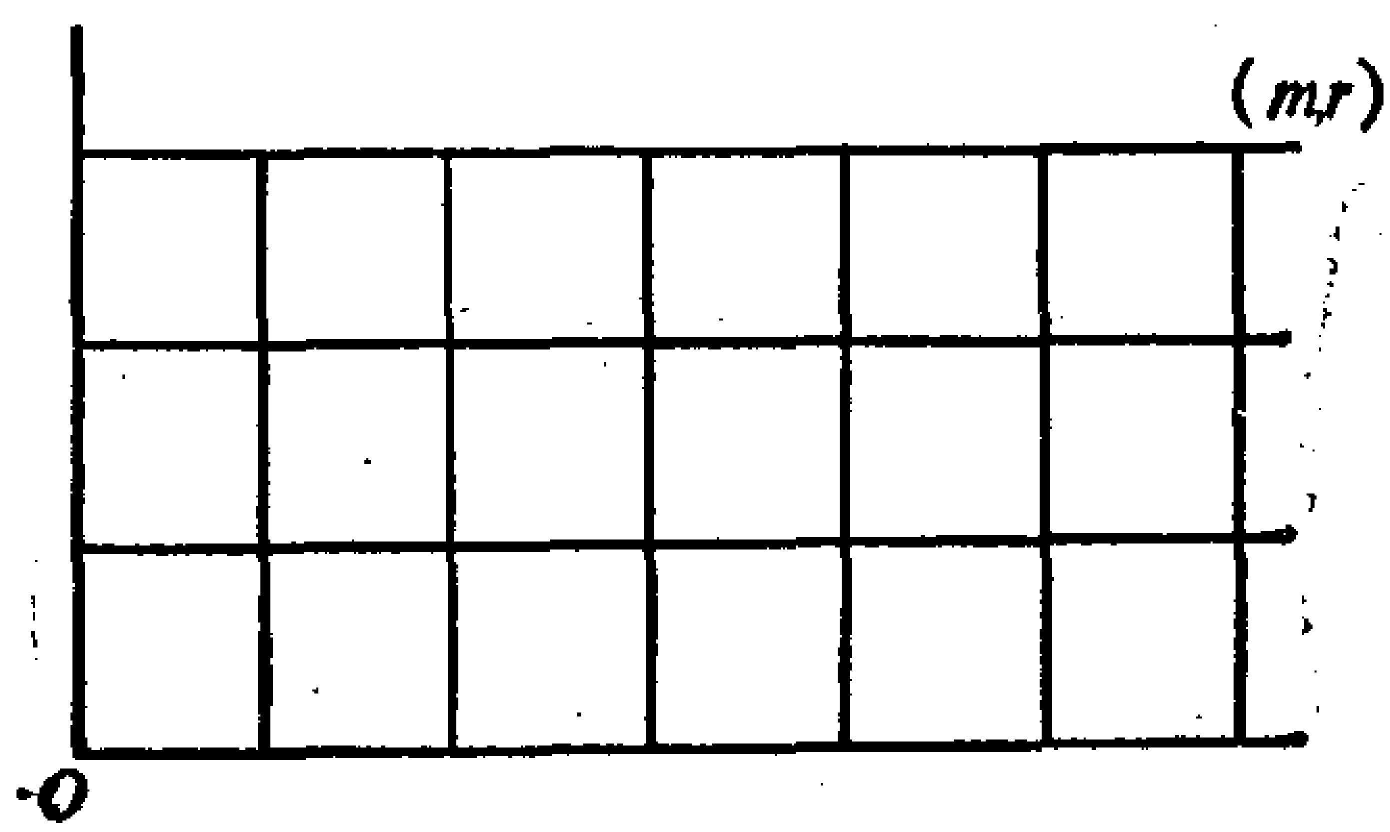


图　1.7

每条最短的路线由$m+r$条长为1的线组成，其中r条竖线，m条横线．因此，每条（最短的）路线恰对应于从$m+r$个位置中选出r个（放竖线）的一个组合，从而这种路线的种数是C_{m+r}^{r}．

例14　如果我们与小虫开个玩笑，在上图中擦去从$A(n, k)$到$B(n, k+1)$　$(n\leqslant m,\ k\leqslant r-1)$，也就是假设这条“道路”被水冲垮，不能通行．试问这时小虫从原点到点(m, r)的最短路线有多少条。

在例13中已经算出最短路线的总数是C_{m+r}^{r}．现在我们来算一下其中有多少条是经过线段AB的．

从原点O走到$A(n,k)$的最短路线有C_{n+k}^{k}条．

从$B(n, k+1)$走到(m, r)的最短路线有

$$C_{m-n+r-(k+1)}^{m-n}=C_{m+r-n-k-1}^{m-n}$$

条．因此，根据乘法原理，从O到$A(n, k)$，再经AB，最后到(m, r)的最短路线有

$$C_{n+k}^{k}\times C_{m+r-n-k-1}^{m-n}$$

条．因而这时小虫的最短路线有

$$C_{m+r}^{r}-C_{n+k}^{k}\times C_{m+r-n-k-1}^{m-n}$$

条．

例15 n种不同颜色的球，每种颜色的球至少有r个并且完全相同，问从这些球中选出r个组成一组，可以有多少种不同的选法．

这个问题称为允许重复的组合．它与例4后面的允许重复的排列不同(这里是组合，与r个球的排列顺序无关)，也与例7后面所说的组合不同(这里允许同种颜色的球重复出现)．

我们解决这个问题的方法仍然是对应．

第一种解法 我们将例13中的m改写为$n-1$，则那里的最短路线有C_{n+r-1}^{r}种，这也恰好是本题的答案．

为了证明这个事实，我们注意每条最短路线中有r条长为1的竖线，每条竖线上的下方的端点的横坐标$\in\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，这$r$个横坐标(可能有相同的)就是从$n$个元素0，1，2，…，$n-1$($n$种球)中取$r$个的允许重复的一个组合．这样，每一条最短路线对应于一个从n个元素中取r个的允许重复的组合．对应是一对一的，因此所求的组合数是C_{n+r-1}^{r}．

第二种解法 从n个元素1，2，…，n(n种球)中取r个的允许重复的组合

$$(1\leqslant)a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r(\leqslant n),$$

我们可以用

$$(1\leqslant)a_1<a_2+1<a_3+2<\cdots<a_r+(r-1)$$
$$(\leqslant n+r-1)$$

与它对应．后者是从 $n+r-1$ 个元素 1，2，…，$n+r-1$ 中取 r 个元素（不允许重复）的组合，这种组合的总数是 C_{n+r-1}^{r}．由于对应是一对一的，所以从 n 个元素（n 种球）中选 r 个的允许重复的组合数是 C_{n+r-1}^{r}（与例 11 的解法颇为相似）．

第三种解法 考虑 n 间房间，每两间房间有一个"挡板"隔开，共有 $n-1$ 个挡板．

(1) |(2) |(3) |…|(n)

对每个允许重复的组合

$$(1\leqslant)a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_r(\leqslant n) \qquad (1)$$

将其中等于1的数（第一种球）放入第 1 个房间，等于2的数放入第 2 个房间，….由于(1)中有等号，可能有些房间中不只放了一个球，也可能有些房间中没有球．这样，总有一个形如

$$0\,|\,0\;0\,|\,|\,0\,|\cdots|\,0\;0\;0 \qquad (2)$$

的排列与(1)对应．

(2)是由 $n-1$ 个挡板"|"和 r 个"0"组成的全排列，根据例 6 后面的公式，(2)的个数为

$$\frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\,r!}=C_{n+r-1}^{r}.$$

(2)也可以看作是从 $n+r-1$ 个位置中选出 r 个放"0"（其余的放"1"），由组合公式导出(2)的个数为 C_{n+r-1}^{r}，这两种算法是一致的．

于是，(1)的个数，即从 n 个元素中取 r 个的允许重复的组合数为 C_{n+r-1}^{r}（可与例11的解法比较）．

例16　求不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$$

有多少组非负整数解.

对于从n个元素1，2，…，n中取r个的允许重复的组合(1)，如果其中1出现x_1次，2出现x_2次，…，n出现x_n次，那么这些数出现的总次数

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r \qquad (3)$$

因而有不定方程(3)的非负整数解(x_1，x_2，…，x_n)与(1)对应.

反过来，对于(3)的每一组非负整数解(x_1，x_2，…，x_n)，我们取x_1个1，x_2个2，…，x_n个n. 这r个数组成一个允许重复的组合(3)，它与解(x_1，x_2，…，x_n)对应.

这样，上述对应是一一对应，所以(由例15)不定方程(3)的非负整数解的个数是C_{n+r-1}^{r}.

小结　计数问题是组合数学的一个重要内容. 本节介绍了一些常见的、基本的计数方法，如排列、全排列、有重复元素的全排列、允许重复的排列、圆周排列、组合、允许重复的组合. 特别值得注意的是乘法原理与对应. 乘法原理是很多计数方法的基础，有极广泛的应用. 对应将一种计数问题化为另一种计数问题，灵活、有力.

第二部分　存在问题

下面的例 1 是脍炙人口的七桥问题．大数学家欧拉(Euler，1707—1783)在1736年解决了这个问题．

例1　帕瑞格尔河从哥尼斯堡(现名加里宁格勒．大哲学家康德，大数学家希尔伯特与闵可夫斯基都诞生在这里)城中穿过，河中有两个岛A与D，河上有七座桥连结这两个岛及河的两岸B、C(图2.1)

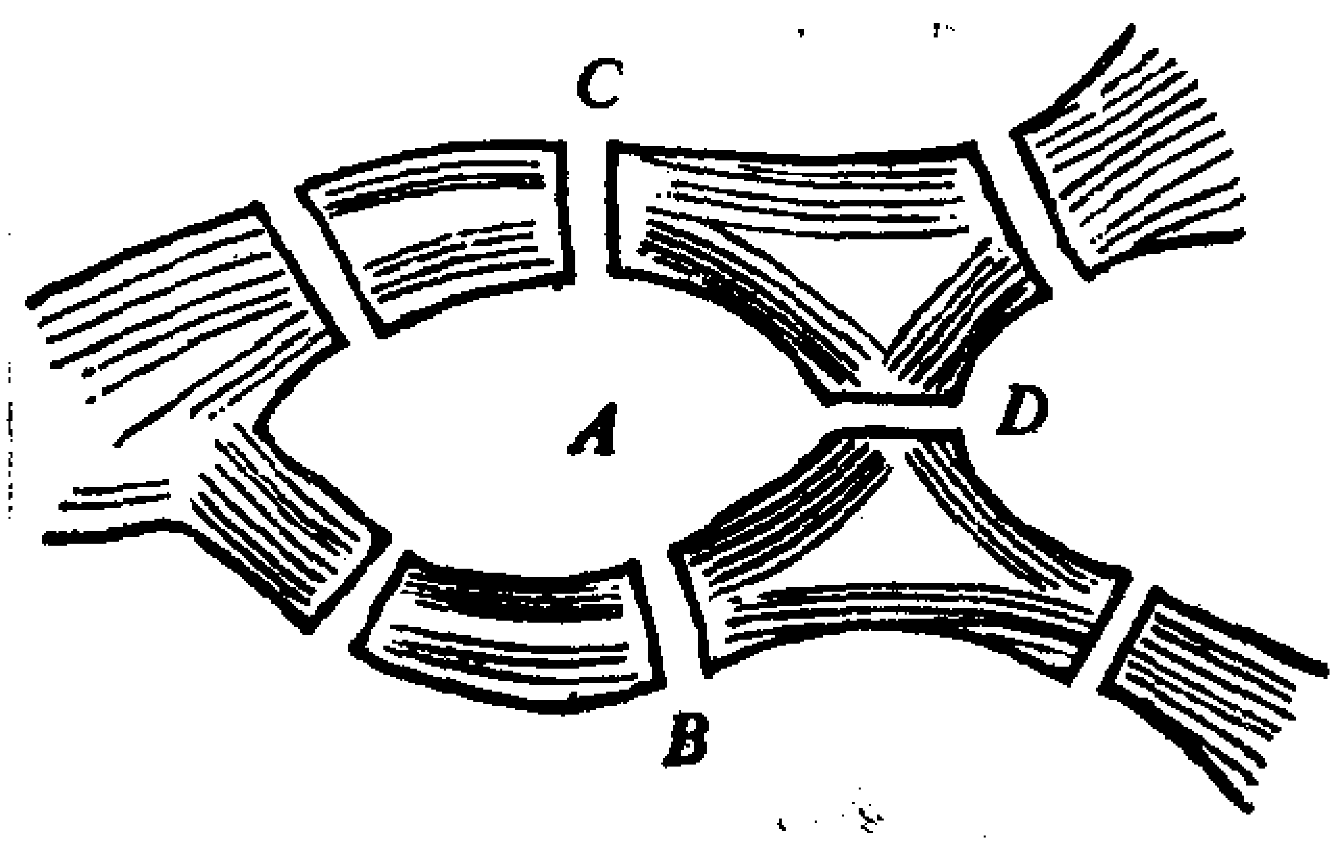


图　2.1

问：(1)一个旅行者能否经过每座桥恰好一次，既无重复也无遗漏？(2)能否经过每座桥恰好一次并且最后能够回到原来的出发点？

这类问题称为存在问题．它的答案可能是肯定的：能(存在一条旅游路线经过每座桥恰好一次)，也可能是否定的：不能(经过每座桥恰好一次的路线是不存在的)．

欧拉仔细地考察了这个问题．他先将图2.1变为图2.2

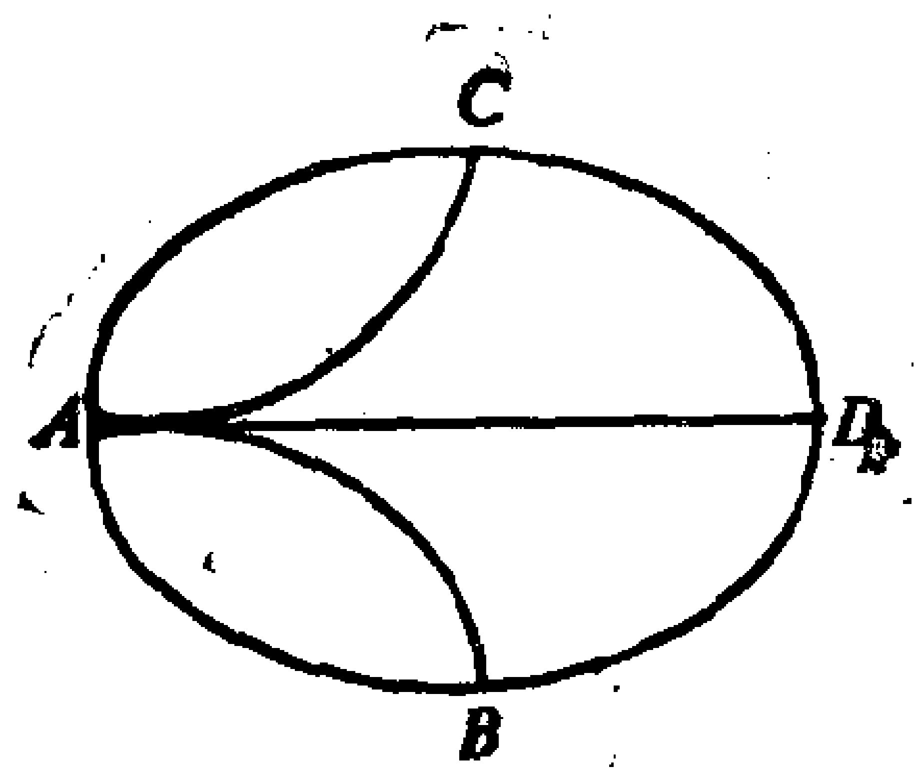


图 2.2

A、B、C、D变为四个顶点，七座桥变为连结这些顶点的七条边（七条线）．这样，七桥问题就变成了通常所说的一笔画的问题：能否一笔画出这个图（每条边都无重复地画到）？或能否一笔画出这个图并且最后可以回到原来的出发点？

解决这个问题的关键是奇偶性．

如果一个顶点引出奇数条线，我们称它为奇顶点．否则称为偶顶点．图2.2中，四个顶点A、B、C、D都是奇顶点．

欧拉注意到：如果一个图能够一笔画成，那么除去首尾两个顶点外，其余的顶点都是偶顶点，因为对于这些"中间点"，每有一条"进入"它的边，就有一条紧跟着的边"离开"它．于是得到如下的结论：

如果一个图能一笔画成，它至多有两个奇顶点．

图2.2中有四个奇顶点，因而不能一笔画成．这也就是说经过每座桥恰好一次的路线是不存在的．

欧拉抓住了问题的关键，他的工作简洁优雅，是组合数学的光辉典范．

例2 在黑板上写三个自然数，然后擦去一个，改换成其它两个数的和减1．经过若干次这样的操作，最后得

到三个数：17，1967，1983.原来写的三个数能够是

(1) 2，2，2，

(2) 3，3，3，

吗？

第一小题的答案是否定的：不能.请注意奇偶性.如果原来的三个数是三个偶数(例如三个2)，那么经过一次操作，其中一个偶数改换成奇数(因为偶数加偶数再减1总是奇数)，形成两个偶数一个奇数的局面.再操作一次，如果擦去的是偶数，改换后的数仍然是偶数（因为偶数加奇数减1是偶数)；如果擦去的是奇数，改换后的数仍然是奇数(因为偶数加偶数减1是奇数)，所以，仍然保持两个偶数一个奇数的局面. 无论进行多少次操作，这两个偶数一个奇数的局面都不会打破. 因此，从三个2出发是不能得到三个奇数17，1967，1983的.

第二个小题的答案是肯定的：能.事实上(我们用→表示一次操作)，

3，3，3→3，3，5→3，7，5→3，7，9→3，11，9→3，11，13→3，15，13→3，15，17→31，15，17→31，47，17→63，47，17→63，79，17→85，79，17→…→1935，1951，17→1967，1951，17→1967，1983，17.

两个小题说明了两种不同的方法. 如果答案是否定的(不存在)，通常采用机敏的反证(利用奇偶性或其他技巧).如果答案是肯定的(存在)，通常采用构造法，把具体的操作过程写出来或者把满足要求的对象造出来.

例3 桌上有七只茶杯，杯口朝上.将其中四只茶杯同时翻转，称为一次运动. 问能否经过若干次运动，使七只茶杯全变为杯口朝下？

答案：否．为了证明这点，我们将杯口朝上的茶杯记为$+1$(与$+1$对应)，杯口朝下的茶杯记为-1(与-1对应)．翻转一只茶杯就相当于将对应的数乘以-1，改变它的符号．

考虑表示7只茶杯的7个数的乘积S．每次运动将4只茶杯翻转，也就是将S中的4个因数各乘以一个-1，这时S应当变为$(-1)^4\cdot S$．但$(-1)^4=1$，所以经过运动，S保持不变．

由于开始时，7只茶杯杯口朝上，7个数全是$+1$，乘积$S=1$．既然经过运动S不变，所以S永远是$+1$，不可能使7只茶杯全都杯口朝下，因为这时7个数的乘积是$(-1)^7=-1$．

经过运动、变换、操作，保持不变的量称为不变量．例3中的乘积S就是一个不变量．不变量或半不变量(变化有简单规律可循的量)往往是问题的关键所在，抓住了它，困难就迎刃而解了．

显然例3中的7与4可以换为奇数m与偶数n，答案仍然是不能．

例4 桌上有m只茶杯，杯口朝上．每次运动将其中n($\leqslant m$)只茶杯同时翻转．证明在

(1) n为奇数

或

(2) m、n同为偶数

时，都能经过若干次运动，使茶杯全部杯口朝下．

这次我们采用构造法．

先看第一小题．将茶杯编上号码1，2，…，m，并列出数列

$$1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ 1,\ 2,\ \cdots,m,\ \cdots,1,2,\cdots,m. \quad (*)$$

它是由数列1，2，…，m重复n次而得到的，共有mn个数．

依着从左到右的顺序，将（＊）中每n个归入一组（共有m组），每次运动使编号在同一组中的n个茶杯同时翻转，m次后恰好将（＊）中的m组全部翻完．由于每个号码（每只茶杯）在（＊）中出现n次，所以每只茶杯被翻了n次，n是奇数，所以每只茶杯被翻成杯口朝下．

在第二小题中，可以设$m<2n$（如果$m\geqslant 2n$，可以先搞几次运动使得剩下的、杯口朝上的茶杯少于$2n$只）．由于m、n都是偶数，差$m-n=2k$，k是自然数或0．

第一次运动将其中n只茶杯翻成杯口朝下，剩下$2k$只杯口朝上．然后在n只口朝下的茶杯中取$n-k$只，将它们与k只杯口朝上的茶杯同时翻转．经过这第二次运动，剩下

$$(n-k)+k=n$$

只茶杯杯口朝上．第三次运动恰好使它们全部变成杯口朝下．

例5 自然数$n\geqslant 4$．x_1，x_2，…，x_n都是＋1或－1．如果

$$\begin{aligned}&x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+\cdots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\\&+x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1+x_{n-1}x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3=0 \quad (*)\end{aligned}$$

求证n是4的倍数．

这个问题要分两步走．我们先解决一个较为简单的问题："求证n是偶数"．实际上，由于x_1，x_2，…，x_n都是＋1或－1，每4个数的积也是＋1或－1．在（＊）式的左边，＋1与－1的个数应当相等，和才能为0．设它们各有k个，那么$n=2k$（（＊）式左边恰好有n项）．

第二步是证明k是偶数（从而n是4的倍数）．考虑（＊）式左边的n项的积（这是我们在例3中使用过的手法）．

一方面，由于 n 项中有 k 项为 -1，k项为 $+1$.所以积是$(-1)^k$.

另一方面，这乘积是(每个字母出现 4 次)

$$x_1^4x_2^4x_3^4\cdots x_n^4=1.$$

于是(用两种不同方法计算同一个对象，必导出一个等式)

$$(-1)^k=1$$

即k是偶数.

例6 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=aek+bfg+cdh-gec-hfa-kbd \qquad (*)$$

中的字母全是非零实数. 证明(*)式右边的 6 项中一定有负数，也一定有正数(请注意，项是连同符号一道考虑的，例如(*)式右边第四项是$-gec$，但它不一定是负数，因为字母g、e、c不一定代表正数).

证法仍然是考虑积.(*)式右边的 6 项的积是

$$-a^2b^2c^2d^2e^2f^2g^2h^2k^2<0$$

因而 6 项不能全部为正数，也不能全部为负数.

例7 数列

$$1,9,8,7,\cdots\cdots \qquad (*)$$

中，自第 5 项起，每一项等于在它前面的 4 项的和的个位数字.证明 1，9，8，8 决不会作为四个连续的项在(*)中出现.

问题的关键还是奇偶性.我们将奇数记为1，偶数记为0，则有简便的算法

$$0+0=0,\ 0+1=1+0=1,\ 1+1=0.$$

最后一个等式有点古怪，不过它只是表示奇数加奇数得到

的和是偶数.

只考虑奇偶性(这是问题的本质)，可将(＊)改记为

1，1，0，1，…　　　　　　(＊＊)

由于一个数的奇偶性取决于它个位数字的奇偶性，因而可以认为(＊＊)中，自第5项起,每一项等于它前面4项的和，这样就得出(用简便算法或不用均可)数列(＊＊)为

1,1,0,1,1,1,1,0,1,1,…　　　　　　(＊＊)

我们发现它是“循环”的，“循环节”是“1,1,0,1,1”，即这五个数依此顺序在数列中重复出现. 事实上，由于计算规律(递推关系)完全相同，每项为前4项的和，所以只要某5项分别等于其前5项时，后面5项也分别等于这5项,从而(＊＊)将按循环节“1，1，0，1，1”循环.

于是1，1，0，0不能作为(＊＊)中连续4项出现（数列中没有连续的0)，1，9，8，8也就不能作为(＊)中连续的4项.

例8　6只盘子排成一列. 每次取两只盘子，将它们移到相邻(或左或右)的位置上，盘子可以重叠. 问能否这样移若干次后，使6只盘子叠在一起.

大概尝试几次，就可以发现这样操作不可能把6只盘子叠在一起.

为了证明这点，我们设想盘子的位置是数轴上的整数点1，2，3，4，5，6.每次把两只盘子移到新的整数上,新的数与原来盘子的位置是相邻的整数,因而奇偶性不同.每次移动改变了两个位置的奇偶性.

原来有奇数个(3个)盘子在奇数位置.每次移动将两个奇数位置的盘子移到偶数位置或者将两个偶数位置的盘子移到奇数位置或者将一个奇数位置一个偶数位置的盘子移

到一个偶数位置与一个奇数位置．因此，每次移动后仍有奇数个盘子在奇数位置上．这就表明不可能把6只盘子叠在一起，因为6只盘子叠在一起时，奇数位置上的盘子是偶数个(6或0)．

本题中，奇数位置上的盘子个数的奇偶性是一个不变量．

例9 n为正奇数．数表(也称为矩阵)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

是对称的，也就是 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$，并且

$$\{1, 2, \cdots, n\}\subseteq\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\}(i=1,2,\cdots, n).$$

求证

$$\{1, 2, \cdots, n\}\subseteq\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}.$$

我们先把题目“消化”一下．条件

$$\{1, 2, \cdots, n\}\subseteq\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\}(i=1,2,\cdots,n)$$

表示在每一行，数1、2、…、n都出现．由于每一行只有n个数，所以在每一行1、2、…、n都恰出现一次．这样，在整个数表中，1、2、…、n都恰出现n次．

另一方面，条件$a_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$表明在对角线$\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$下方的1的个数等于对角线上方的1的个数．因而，在数表中，除去对角线$\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$后，剩下的1共有偶数个（等于对角线下方的1的个数的两倍)．

由于n是奇数，数表中有奇数个1，对角线外有偶数个1.

所以对角线上必然有1.同样对角线上也有2、3、…、n.即

$$\{1,2,\cdots,n\}\subseteq\{a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}\}.$$

组合数学要求我们从各个方面来考察问题."一方面","另一方面",最后把各个方面考察的结果综合起来,获得所冀的结论.例9正是这样的标本.

例10也是一个关于矩阵(数表)的问题.

例10 n是正偶数,证明在矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ & & \cdots & & \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

中找不到一组1,2,…,n,其中每两个都既不在同一行,也不在同一列.

采用反证法.假定有一组数1、2、…、n,其中每两个都不在同一行,也不在同一列.

这时,这组数的行数的和与列数的和都是

$$1+2+3+\cdots+n.$$

由于n是偶数,将1与$n-1$,2与$n-2$,…,$\frac{n}{2}-1$与$\frac{n}{2}+1$两两相加都是n的倍数,剩下中间一项$\frac{n}{2}$不是n的倍数,因而列数的和$1+2+\cdots+n$不是n的倍数.

另一方面,设这些数1、2、…、n分别在第i_1、i_2、…、i_n行,则由这矩阵的特点可知这个1在第

$$n+2-i_1$$

列(如果这列数$>n$,需要减去n变为$2-i_1$),同样2、3、…、

n分别在第$n+3-i_2$，$n+4-i_3$，…，$n+1-i_n$列(凡大于n的数都需减去n).因此，列数的和为

$(n+2-i_1)+(n+3-i_2)+(n+4-i_3)+\cdots+(n+1-i_n)-n$的倍数$=(1+2+\cdots+n)-(i_1+i_2+\cdots+i_n)+n$的倍数

$=n$的倍数(因为行数之和$i_1+i_2+\cdots+i_n=1+2+\cdots+n$).

两方面所得结果矛盾，因而找不到一组1、2、…、n，其中每两个数既不在同一列也不在同一行.

例11 能否把1，1，2，2，3，3，…，1986，1986这2×1986个数排成一行，使两个1之间夹一个数，两个2之间夹两个数，…，两个1986之间夹一千九百八十六个数？

假设满足要求的排法存在．将这些数从左到右逐一编上号码1，2，…，2×1986.

一方面，所有号码之和

$$1+2+\cdots+2\times1986=993\times(2\times1986+1)$$

是一个偶数.

另一方面，由于两个i($1\leqslant i\leqslant1986$)之间夹$i$个数，后一个$i$的号码等于前一个的号码加上$(i+1)$.因此，这两个号码的和是偶数加上$(i+1)$．全部号码的和应当是偶数再加上

$$(1+1)+(2+1)+\cdots+(i+1)+\cdots+(1986+1).$$

这个和等于偶数1986加上奇数$993\times(1986+1)$，因而是一个奇数.

两方面的结果矛盾！因而满足要求的排法不存在.

容易(根据完全同样的推理)知道，将1986换为$4n+1$或$4n+2$，满足要求的排列都是不存在的.

在例11中，我们用两种方法去计算同一个量：号码的

和.所得结果不同，因而产生矛盾.在前面曾经指出，如果不产生矛盾，那就会导出一个等式.

例12 m、n都是大于1的整数，能否将mn个自然数1，2，3，…，mn分成n组，每组m个数，并且各组的和都相等？

我们知道

$$1+2+3+\cdots+mn=\frac{(mn+1)mn}{2},$$

因此每一组的和应当是

$$\frac{(mn+1)m}{2}.$$

如果m是奇数，n是偶数.这时$(mn+1)m$是奇数，所以$\frac{(mn+1)m}{2}$不是整数.这表明，在这种情况下，不可能将1，2，…，mn分为n组，使每组的和都相等.

如果m是偶数，按照图2.3，先在第一行从左到右放

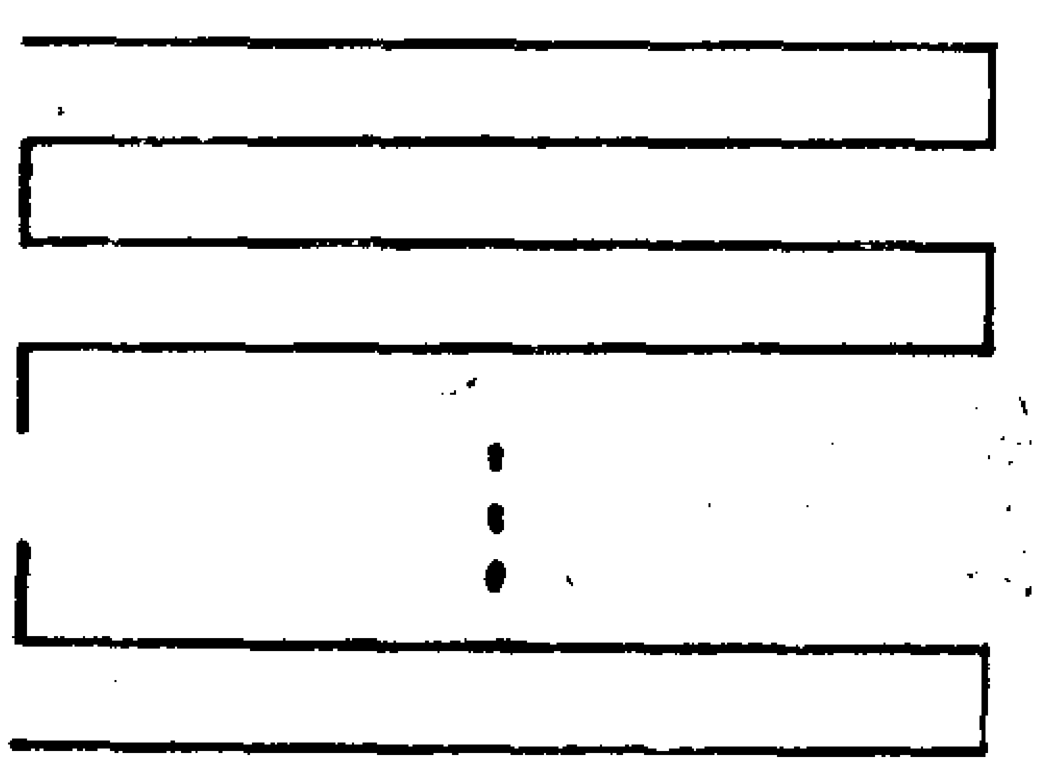


图 2.3

上1、2、…、n.然后转入第二行，从右到左，放上$n+1$，$n+2$，…，$2n$.再转入第三行，从左到右，放上$2n+1$至$3n$，依此类推，直到第m行将所有的mn个数放完.

将每一列作为一组，则每相邻两组的和必定相等，因为右边一组在第一行比左边一组多1，第二行少1，第三行多1，第四行少1，…，第$m-1$行多1，第m行少1(m是偶数).于是每两组的和相等，这样的分组合乎要求(显然，对任意的mn个连续整数，同样结论成立).

如果m、n都是奇数.设$n=2k-1$，先将前$3n$个数分成n组，每组3个数，并且各组的和都相等.方法如下表，表中第二行的每个元素应当加上n，第三行的每个元素应当

1	2	3…	k	$k+1$	$k+2$	…		$2k-1$
k	$k+1$	$k+2$	…	$2k-1$	1	2	…	$k-1$
$2k-1$	$2k-3$	$2k-5$	…	1	$2k-2$	$2k-4$	…	2

加上$2n$，但为了简明起见，我们故意省略了这些n的倍数.表的每一列代表一组，显然每一组的和都是$3k$(加上$3n$).

再将后面的$(m-3)n$个数用图2.3所指示的方法分为n组，各组的和相等并且每一组$m-3$个数.

将前面所得的组各与后面的一个组合并起来就得到合乎题意的分组.

下面的例13也是一个著名的问题，几乎每一本组合数学的书都要提到它.

例13 (剪残了的棋盘) 图2.4是国际象棋的棋盘，如果剪去左上角与右下角的两个小方格，这个剪残了的棋盘能否用31张纸牌完全覆盖？这里的纸牌是由两个小方格构成的矩形(图2.4右).

答案又是否定的：不可能.

请注意，通常的国际象棋棋盘上，方格分为两种，一种涂上黑色，一种涂上白色(或不涂色)，每两个相邻的方格颜色不同(图2.4).如果31张纸覆盖这个剪残了的棋盘，

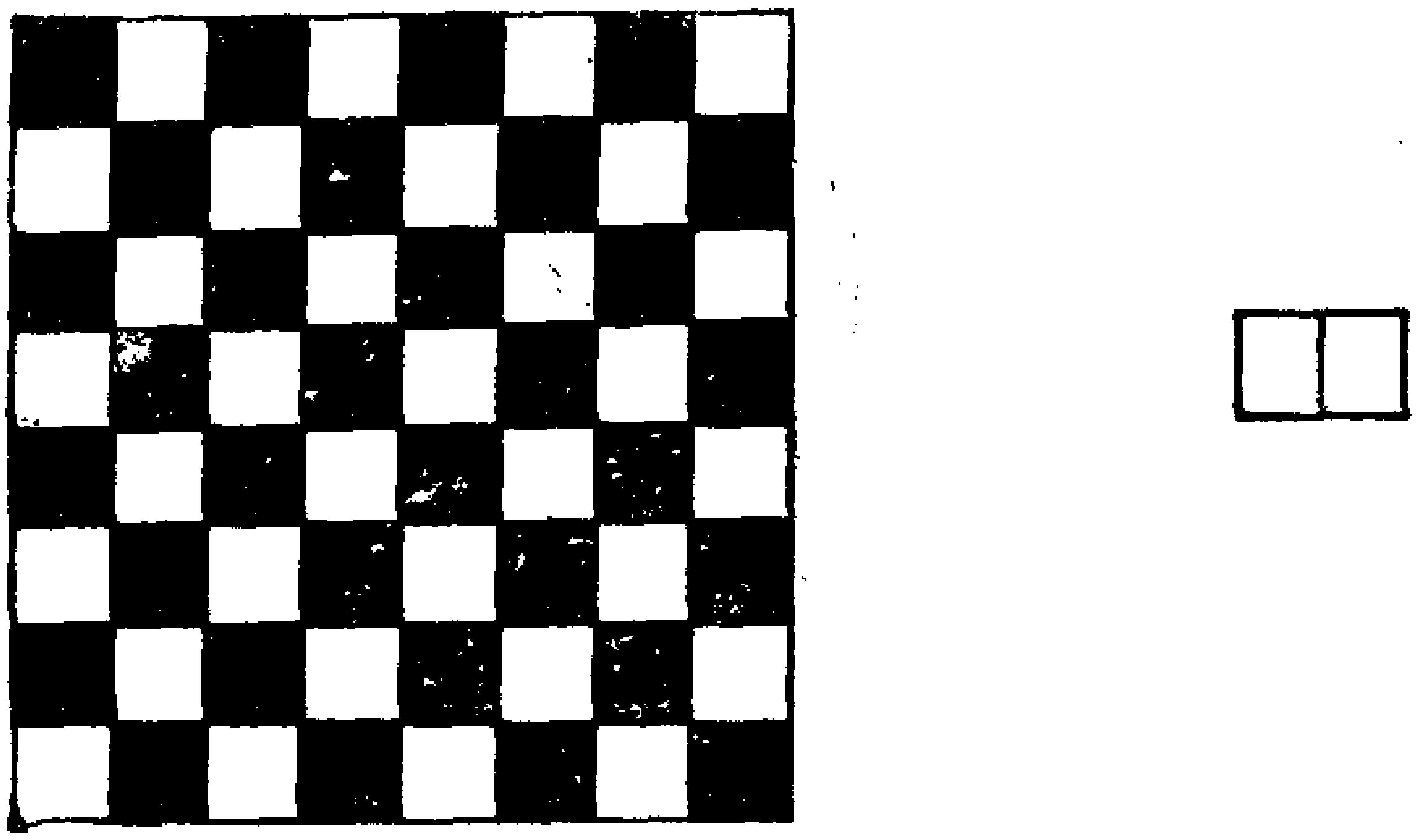


图 2.4

那么每张纸牌恰好覆盖一个黑格一个白格．从而，黑格与白格的个数应当都等于31．但(另一方面)图2.4中的棋盘被剪去左上角与右下角后，黑格的个数为30，白格的个数为32．因此，不可能用31张纸牌把这剪残了的棋盘完全覆盖．

这里采用的方法是涂色．涂色与奇偶性都是分类的方法．如果涂两种颜色，这与将自然数分为正奇数与正偶数两类是完全一致的．涂色，可以说是分类的一种直观表示．

如果在图2.4中剪去两个颜色不同的小方格（一黑一白），那么剪残了的棋盘一定能用31张纸牌覆盖．证明这个结论的方法是构造法．

首先，我们注意沿着图2.5中的路线，可以从任一个方格出发，一格一格地、不重复地走遍整个棋盘再回到出发点．现在沿着这条路线来放纸牌．如果剪去的方格是A与B，将第一张纸牌放在A的旁边，然后沿着这条路线铺放下去．由于A、B是两个颜色不同的方格，所以铺放到B（B本身不算在内)时，恰好放了整数张纸牌．越过方格B，沿着这条路线继续放纸牌，一直放到A的旁边，便将整个棋盘(除去剪去的两个方格A、B)完全覆盖．

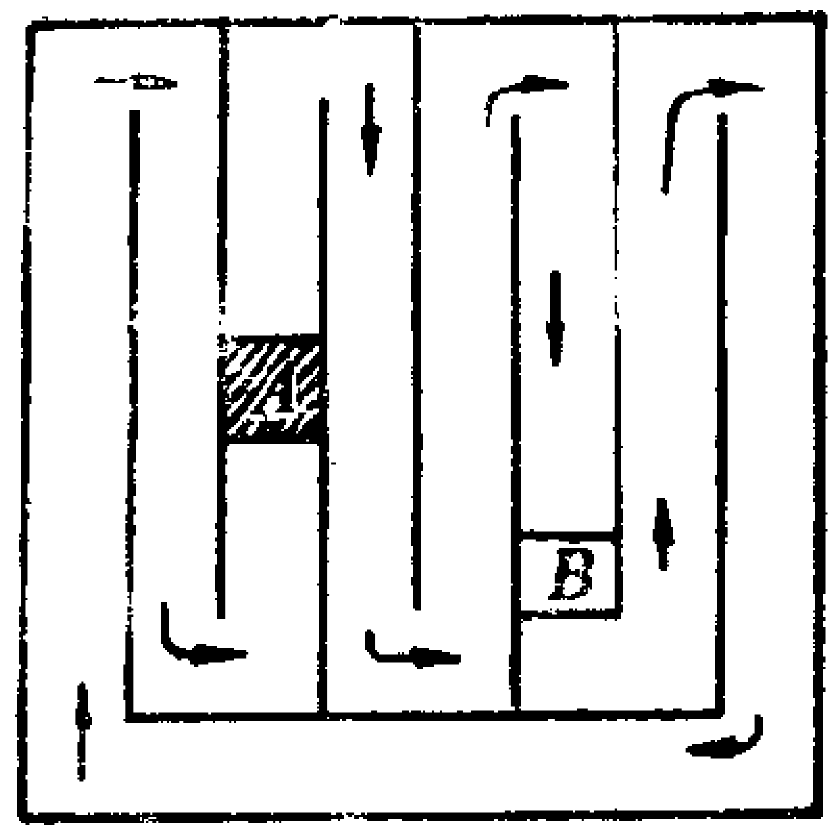


图 2.5

本节的最后一道例题是近年匈牙利的竞赛题.

例14 $\triangle A_1B_1A_2$、$\triangle B_1A_2B_2$、$\triangle A_2B_2A_3$、…、$\triangle B_{13}A_{14}B_{14}$、$\triangle A_{14}B_{14}A_1$、$\triangle B_{14}A_1B_1$都是刚性的正三角形（刚性指这个三角形是不能变形的，譬如说用三条钢棒焊成的三角形）.这些三角形组成的图形可以沿棱A_1B_1、B_1A_2、…、$A_{14}B_{14}$、$B_{14}A_1$折叠.问能否将这28个三角形折叠到一个平面上.

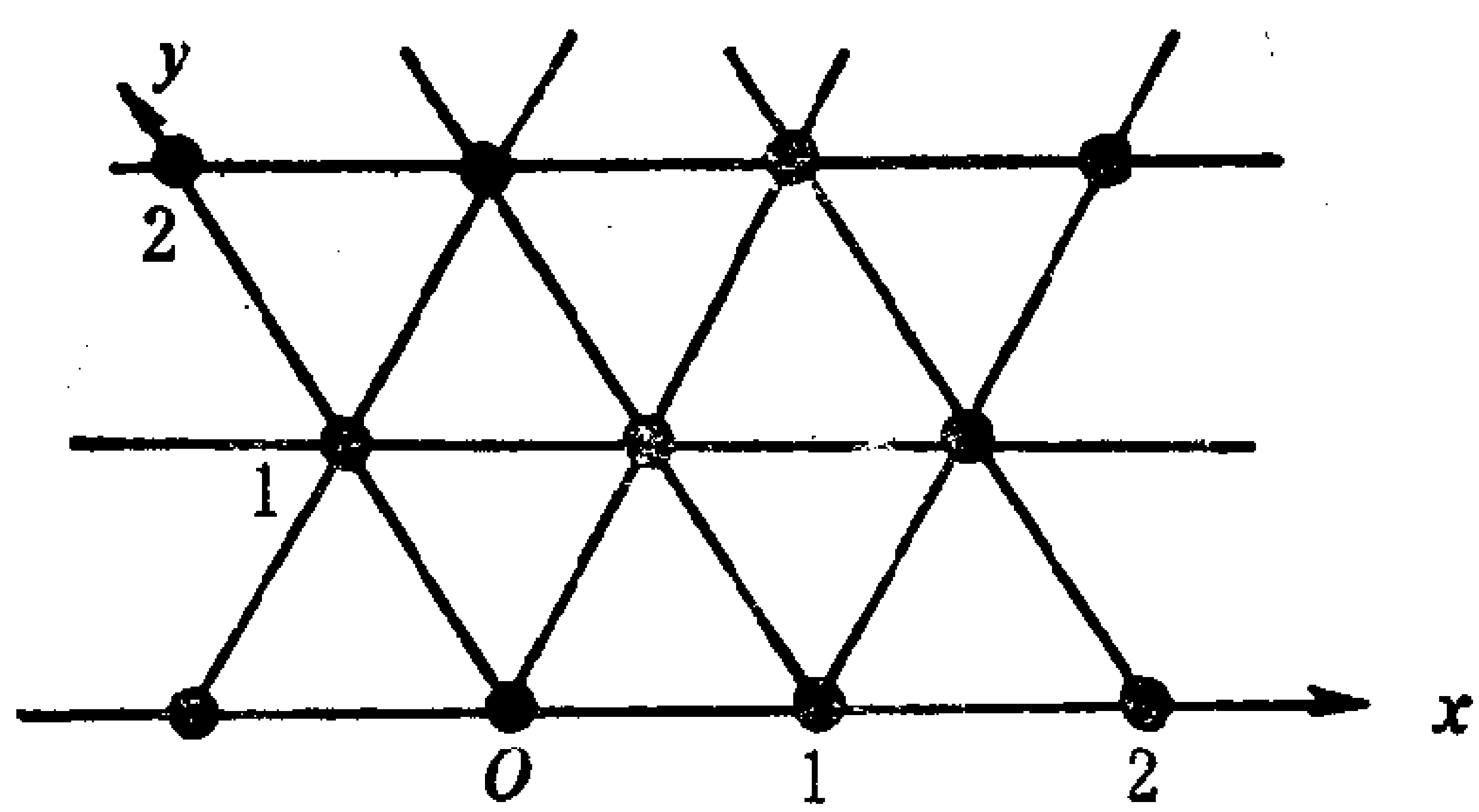


图 2.6

假如能折叠到一个平面上．这些三角形构成平面上的一个网格(的一部分)．这网格由三组平行线组成，每两组线的夹角是60°(图2.6)．

三组平行线的交点称为格点．各个刚性三角形折叠到这平面上，每个顶点都是格点．

取两条相交的线分别作x轴与y轴，建立坐标（与通常直角坐标类似，只不过现在是“斜坐标系”），这时格点的两个坐标都是整数(所以格点也称为整点)．

将格点分为三类(或更直观地说涂上三种颜色)．分类的方法是考虑格点P的坐标和除以3所得的余数：

如果余1，P就在第1类；

如果余2，P就在第2类；

如果余0，P就在第3类．

显然，每两个相邻的格点不在同一类（它们的坐标和相差1或2)．

不妨假定A_1是原点，B_1的坐标为(1，0)，A_2的坐标为(1，1)．这时B_1在第1类，A_2在第2类，因而与它们都相邻的B_2必定在第3类．依照同样的理由，可逐步推出A_3在第1类，B_3在第2类，….即下面的28个点

$$A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4\cdots B_{13}A_{14}B_{14}$$

所属于的类依次为

$$3，1，2，3，1，2，3，1，2，\cdots，3，1，2，3.$$

但B_{14}与A_1是相邻的，它们不可以同属第3类．这个矛盾表明28个三角形不可能折叠到一个平面上．

任取一个大于1的整数m，可以把整数分为m类．各类中的数分别具有km，$km+1$，$km+2$，…，$km+(m-1)$的形式(k是整数)．这些类称为模m的同余类．

例如$m=2$时，分成的两个类就是奇数与偶数．例15是将坐标的和模3($mod 3$)分类的．

小结 本部分介绍了存在问题．如果问题的答案是肯定的，通常采用构造法．如果答案是否定的，通常采用反证法，利用奇偶性、涂色等进行分类，巧妙地导出矛盾．当然，也可以利用奇偶性来进行肯定的证明(如例9)，利用构造法来显示有某种反例存在．

不变量常常是解决问题的关键，特别值得注意．

第三部分　图 论 问 题

若干个顶点，有些点之间有边相连，这就构成了一个图.例如第二部分例 1 的七桥问题中，欧拉所画的图2.2就是一个有 4 个顶点 7 条边的图.

近年来，图论(图的理论)发展很快，有人认为它已经可以从组合数学中独立出去，自成一个分支了．这部分只介绍图论中的一些基本知识.

例1　在每一次舞会上，跳舞次数为奇数的人数总是偶数.试证明这个命题.

我们把人用顶点表示.如果两个人跳过一次舞,就在对应的两个顶点之间连一条边.

从一个顶点引出的边的条数,称为这个顶点的次数.在本例中，这就是对应的人的跳舞次数．各个顶点的次数的和应该等于边数的2倍(因为每一条边被计算了两次),即有

$$\text{总次数}=2\times\text{边数} \tag{1}$$

这是一个简单而重要的结论.

从(1)可以看出总次数是偶数,因而其中次数为奇数的点必有偶数个，也就是跳舞次数为奇数的人数是偶数.

例2　一次舞会有 7 名男生与 7 名女生参加.会后统计出各人的跳舞次数为(依从小到大的顺序)

$$3,3,3,3,3,5,6,6,6,6,6,6,6,6.$$

证明其中必有错误.

如果将其中的5(或其它奇数)改为偶数,那么由例1就

可导出(其中必有错误的)结论.现在的情况要复杂一些.

首先要说明，在舞会上，男生不与男生跳舞，女生不与女生跳舞．如果将男生用蓝点表示，女生用红点表示，两个人每跳过一次舞就用一条线相连，那么红点之间无边相连，蓝点之间也无边相连（有人把这样的图称为二部分图或偶图）.我们有等式

所有红点的次数的和＝所有蓝点的次数的和 (2)

因为上式两边都等于图的边数.

但在3,3,3,3,3,5,6,6,6,6,6,6,6,6,这14个数中只有5这一个数不被3整除.如果5出现在(2)的左边（5是某个女生的跳舞次数)，那么(2)的左边不被3整除，而右边被3整除,矛盾.同样，5出现在(2)的右边也导致矛盾.因此上边的统计必有错误.

例2用了模3的分类.

例3 n个顶点，每两个点用一条边相连，得到的图称为完全图，记为K_n．K_n有多少条边？

每一条边，由它的两个端点确定.从n个顶点中选两个点的方法有C_n^2种，因此K_n共有C_n^2条边.

n个队进行循环赛，每两个队比赛一次，比赛的局数正好是C_n^2.

下面又是一个著名的问题.

例4 世界上任意的6个人中，必定有3个人互相认识或三个人互不相识(我们约定甲认识乙,则乙也认识甲).

用6个顶点表示6个人，作一个完全图K_6．如果两个人认识，就将对应的边涂成红色，否则涂成蓝色．要证明的结论就是：

“如果K_6的每条边涂上两种颜色中的一种，那么必有

一个同色三角形(即三条边颜色相同的三角形).”

证明并不困难，只有几行字：从顶点 v_1 引出的边有5条．其中至少有三条边是同一种颜色，不妨设v_1v_2，v_1v_3，v_1v_4都是红色.如果$\triangle v_2v_3v_4$有一条边，比如v_2v_3，是红色，那么$\triangle v_1v_2v_3$就是同色三角形(三边同为红色).如果$\triangle v_2v_3v_4$的边都不是红色，那么$\triangle v_2v_3v_4$就是三边同为蓝色的三角形.

刚刚证明的结论是拉姆赛(Ramsey)定理的一种简单情况，它有不少应用.

例5 平面上任给六点，每三点不在一条直线上，以这些点为顶点可组成一些三角形，证明其中必有一个三角形的最大边同时是一个三角形的最小边.

我们将每个三角形的最大边（如果是等腰三角形或正三角形，可能有两条或三条最大边）都涂上红色，然后将剩下的边涂上蓝色.

根据例 4 中的结论，一定有一个同色三角形存在．这个同色三角形的三条边中必有一条最大边，它是红色的.因此，这个三角形的三条边都是红色的．它的最小边是红色的，因而是一个三角形的最大边.

例6 空间 6 条直线，每三条线不在同一平面上，证明其中存在三条直线满足以下三个条件之一：

(1) 两两异面，

(2) 互相平行，

(3) 相交于一点.

我们将这 6 条线用 6 个点表示.如果两条直线异面，就在相应的两个点之间连一条红线；否则就连一条蓝线．根据例 4 中的结论，存在一个同色三角形.

如果是红色三角形，那么对应的直线两两异面.

如果是蓝色三角形，那么对应的三条直线两两共面．设直线b，c在平面P上；直线c，a在平面Q上；直线a，b在平面R上．我们分两种情况来讨论：

(1) $a // b$．这时$a //$平面P，因而过a的平面Q与平面P的交线$c // a$．即三条直线a、b、c互相平行．

(2) a与b相交于一点A．这时A也是过a的平面Q与过b的平面P的公共点，从而A在平面P、Q的交线c上．即a、b、c相交于一点．

例7 18个队进行比赛．在每一轮比赛中，每个队与另一个队比赛一场，并且在以后的各轮中这两个队之间不再比赛．现在比赛进入第9轮，证明在前8轮比赛中，一定有三个队，彼此之间尚未赛过．

我们用18个点代表18个队．如果两个队在前8轮比赛过，就在对应的两个点之间连一条线．要证明的是，在所得的图中，一定有三个点彼此之间没有线相连．

由于每个点的次数为8，所以一定有两个点互不相连，设v_0与v_9不相连，v_0与v_1、v_2、…、v_8相连．

如果v_1、v_2、…、v_8中有一个点与v_9相连，那么在8个点v_{10}、v_{11}、…、v_{17}中必有一点不与v_9相连(因为v_9次数为8)．设v_{10}不与v_9相连，那么v_0、v_9、v_{10}就是彼此不相连的三个点．

如果v_1、v_2、…、v_8都不与v_9相连．考虑第一轮比赛，不妨设在这一轮v_0与v_1比赛，这时v_2、v_3、…、v_8至多配成三对进行比赛，因而必有一个队与v_{10}、v_{11}、…、v_{17}中某个队比赛．不失一般性，设v_2与v_{10}相连(比赛)．由于v_2的次数为8，除去v_2v_0、v_2v_{10}这两条边，v_2至多与6个点相连．因此，v_2不与v_3、v_4、v_5、v_6、v_7、v_8、v_1中某个点相连．设v_2不与v_3相连，

则v_0、v_2、v_3就是彼此不相连的三个点．

枚举法，即将问题分为几种情况逐一加以讨论，也是组合数学中常用的方法．

例8 一次大型会议有500名代表参加，如果每名代表认识的人数为400，是否一定能选出6名代表，每两名互相认识？

答案是不一定．我们举一个例子表明即使每名代表认识的人数为400，仍然选不出 6 名代表，每两名互相认识．这个例子要利用完全图．

取 5 个完全图 K_{100}，如果每个顶点代表一个人，那么500个顶点就是500名代表．如果两个顶点之间有边相连，我们就认为两名代表互不认识．如果两个顶点之间无边相连，我们就认为两名代表互相认识．由于每个完全图K_{100}的顶点与这个完全图的其它顶点均相连，而不与其他 4 个完全图的顶点相连，所以每名代表认识的人数为400．因为每6个顶点中，至少有 2 个顶点在同一个完全图K_{100}中(完全图只有5个)，这 2 个顶点有边相连，也就是说每 6 名代表中，必有两名代表互不相识．

构造正面或反面的例子，也是数学中常常需要的．

例9 在例 8 中，如果每名代表认识的人数>400，证明一定能找到 6 名代表，每两名互相认识．

我们仍然用500个点表示500名代表．如果两名代表互相认识，就在对应的两个点之间连一条边(请注意，这里是互相认识时连边，与例 8 中所举的例子恰好相反．不过，这只是为了叙述上的方便，并非本质的差异)．

由于每名代表认识的人数>400，所以每个点的次数>400．

任取一个顶点v_1. 与v_1相连的顶点的集合记为A_1，那么A_1中的点的个数$|A_1|>400$.

在A_1中任取一个顶点v_2，与v_2相连的顶点的集合记为A_2，同样$|A_2|>400$.

考虑$A_1\cap A_2$(也就是与v_1、v_2都相连的顶点的集合).我们知道

$$|A_1\cap A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cup A_2|. \qquad (*)$$

因此

$$|A_1\cap A_2|>400\times 2-500>0.$$

这就是说$A_1\cap A_2$不是空集. 在$A_1\cap A_2$中任取一个顶点v_3，类似地定义A_3为与v_3相连的点集，这时有$|A_3|>400$及

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2|+|A_3|-|(A_1\cap A_2)\cup A_3|$$
$$>(400\times 2-500)+400-500=400\times 3-500\times 2>0$$

于是$A_1\cap A_2\cap A_3$不是空集，取$v_4\in A_1\cap A_2\cap A_3$，类似地定义$A_4$，可得

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_4|-|(A_1\cap A_2$$
$$\cap A_3)\cup A_4|>(400\times 3-500\times 2)+400-500$$
$$=400\times 4-500\times 3>0,$$

再取$v_5\in A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$，同样定义$A_5$并得出

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|>400\times 5-500\times 4=0$$

于是，有$v_6\in A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5$.这样得到的$v_1$，$v_2\cdots$，$v_6$两两相连，也就是说有 6 位代表互相认识.

例 9 中的(*)式称为容斥原理或逐步淘汰原则，十分重要. 用同样方法可将例 8 与例 9 推广为更一般的形式(Turan的一个定理).

下面介绍一种非常重要的图——树.

设想我们从一个图的一个顶点V出发，沿着图的边前

进，如果能走到这个图的任何一个顶点，那么就称这个图是连通的．例如图3.1是不连通的，它由两个图组成，每个图都是一个连通图．

图3.1左边的那个图有圈，也就是说，如果从顶点V_3出

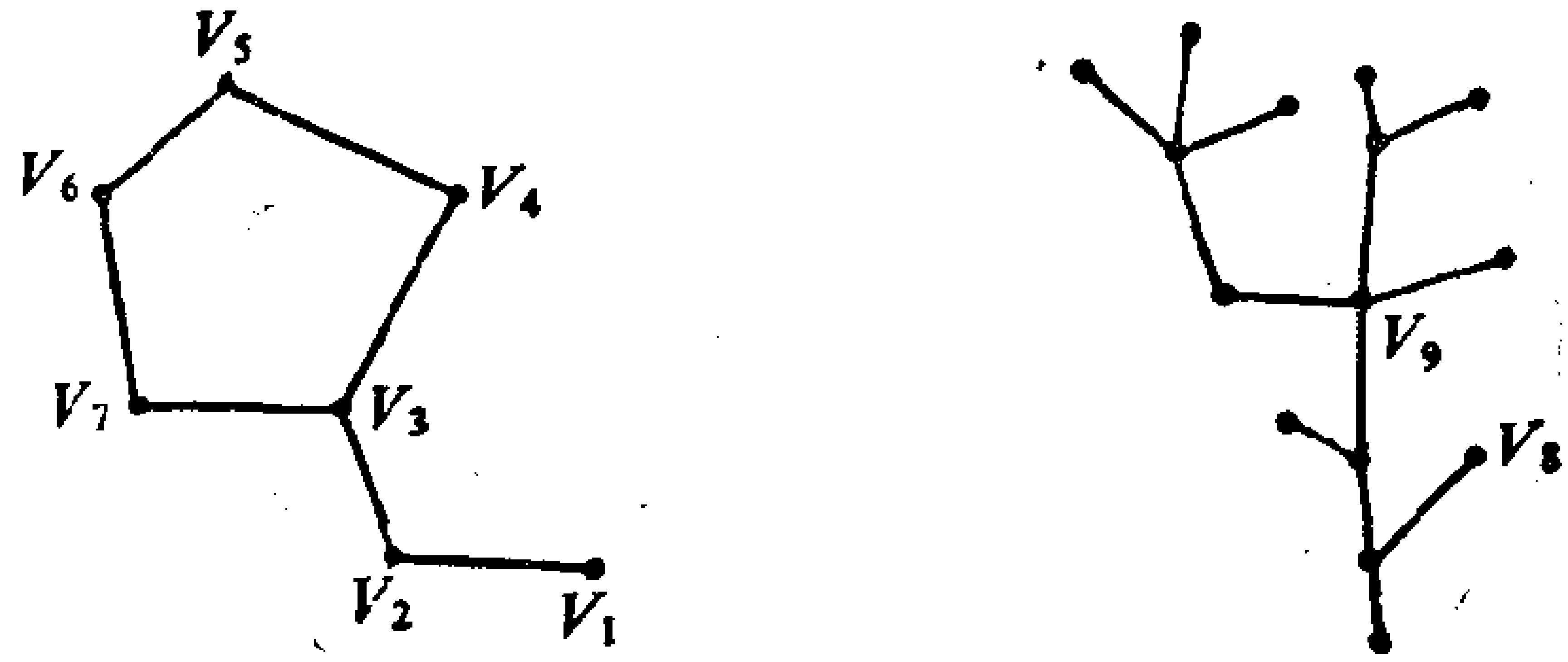


图　3.1

发，可以不重复地经过边V_3V_4，V_4V_5，…，最后回到V_3．图3.1右边的那个图没有圈．

没有圈的连通图称为树．图3.1右边的图就是一棵树，它与我们平常见到的树是一致的．有n个顶点的树记为T_n．

例10　树T_n至少有两个端点（也称为悬挂点），端点就是次数为1的顶点．

设想我们从树T_n的一个顶点v出发，乘车沿着T_n的边旅行，走过的边绝不重复．

由于T_n没有圈，所以经过的顶点也绝不会重复出现，我们的旅行在经过若干个点（至多n个点）后必然终止．这个终点就是次数为1的端点（如果次数大于1，还可以继续旅行）．因此T_n至少有一个端点．

如果我们一开始就从端点v出发，那么旅行的终点就是一个不同于v的端点．因此T_n至少有两个端点．

现在，我们给定n个顶点v_1、v_2、…、v_n，然后添上一

些边，使它形成一个有n个顶点的树．添的边不同，得到的树也不相同．数学家凯利(Cayley)曾经计算过不同的树的个数，得到的结论是共有n^{n-2}个不同的树，具有给定的顶点v_1、v_2、…、v_n．当n增大时，n^{n-2}急剧增加，所以树的形状是千姿百态！这是一个有趣的计数问题．

但是，不管树的形状如何，要把n个顶点连结成树，都必须(不多不少)添$n-1$条边．

例11 证明树T_n的边数为$n-1$．

在例10中，我们已经知道树有端点．将端点v所发出的唯一的边连同v一起取消(把这根树枝折掉)，剩下的图仍然是树(仍然连通、没有圈)，但少了一个顶点，变成T_{n-1}．

对树T_{n-1}采取同样措施，又折掉一根树枝．这样继续下去，最后得到两个顶点的树T_2．

T_2只有一条边．由于我们共折掉$n-2$条边，所以树T_n有$n-1$条边．

例12 n个镇，每个镇都可以通过一些中转镇与另一个镇通话．证明至少有$n-1$条直通的电话线路，每条连结两个镇．

还是用n个点表示n个镇．每两个镇之间如果有直通电话，就用一条边连结．

题目的条件表明得到的图是连通图．但这个图可以有圈．如果有圈，我们就去掉这个圈的一条边，这时图少了一条边，但仍然是连通的．如果还有圈，再去掉圈的一条边，这样继续下去，直到图中没有圈．这个图当然是树，它有$n-1$条边(例11)．因此原来的图至少有$n-1$条边，这就是要证明的结论．

上面所得到的树称为原来的(连通)图的生成树，在生

成树上添上若干条边，就可以得到(生成)原来的图.

每个连通图都有生成树，因而有n个顶点的连通图中，边数最少的是树.

例13 n个镇之间的道路被水冲毁.如果原来可以从一个镇走到任一个镇，问修复(不是新建)几条道路，就可以从一个镇走到任一个镇.

原来的地图是连通的，它有一个生成树，这树有$n-1$条边，至多修复这$n-1$条边就可以恢复连通.

例14 一个n行n列的矩阵(数表)，每两行都不完全相同.证明一定可以去掉某一列，除掉这一列后，每两行仍然不完全相同.

我们用n个点 V_1、V_2、…、V_n，分别代表矩阵的第一行、第二行、…、第n行.

假如结论不成立，那么去掉任何一列后必有两行完全相同. 这时，去掉第一列后，至少有两行相同，我们在相对应的两个点之间连一条线，并标上数1.同样地，我们连上$n-1$条边，并标上数2、3、…、n.

这样得到的图有n条边，n个顶点.它也许不是连通图，但它总可以分为几个部分，每一个部分是连通图，并且这些部分中至少有一个的边数≥顶点数.

由于树的边数<顶点数，所以这个(边数≥顶点数的)部分不是树，它至少有一个圈，设为

$$V_1V_2,\ V_2V_3,\ \cdots,\ V_{k-1}V_k,\ V_kV_1$$

又设这些边上所标的数为i_1、i_2、…、i_k(图3.2). 这些标号互不相同(分别为1，2，…，n中的一个数).一方面，由于V_1与V_k相连的边标号为i_k，V_1与V_k所表示的行仅有第i_k个元素不同，其余元素全相同.另一方面，V_1与V_2的第i_k个

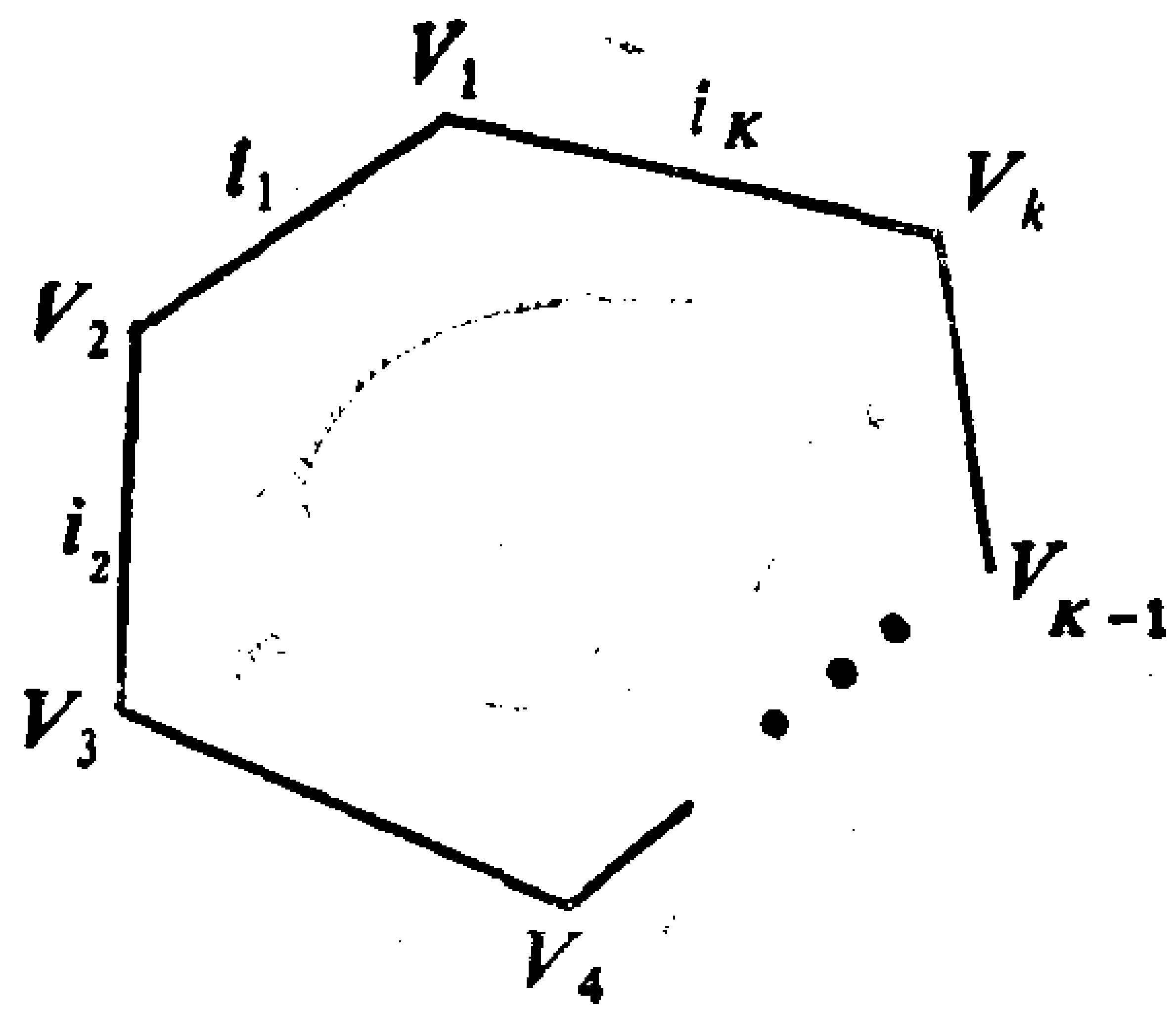


图 3.2

元素相同(仅第i_1个元素不同),V_2与V_3的第 i_k个元素相同,…, V_{k-1}与V_k的第i_k个元素相同, 从而 V_1与V_k的第i_k个元素相同, 矛盾!于是原题结论成立.

对于一个图,如果从顶点V可以沿着边走到顶点V',并且至少要经过c条边, 我们就说V与V'的距离为c, 并记为

$$d(V, V')=c.$$

如果从顶点 V 不能沿着边走到顶点 V' (这时图是不连通的),我们就说V与V'的距离为无穷大, 记为

$$d(V, V')=\infty.$$

例15 某镇有居民1000人. 每人每天把昨天听到的消息告诉自己认识的人.已知任何消息,只要镇上有人知道,都会经过这样的方式逐渐地为全镇的人知道. 证明可以选出90名代表, 使得同时向他们报告一个消息, 经过10天,这一消息就为全镇的人知道.

作一个有1000个顶点的图. 两个顶点如果有边相连就表示对应的两个人互相认识.

根据题意, 这图是连通的. 可以认为这个图是树 T_{1000}(否则用这个图的生成树来代替它).

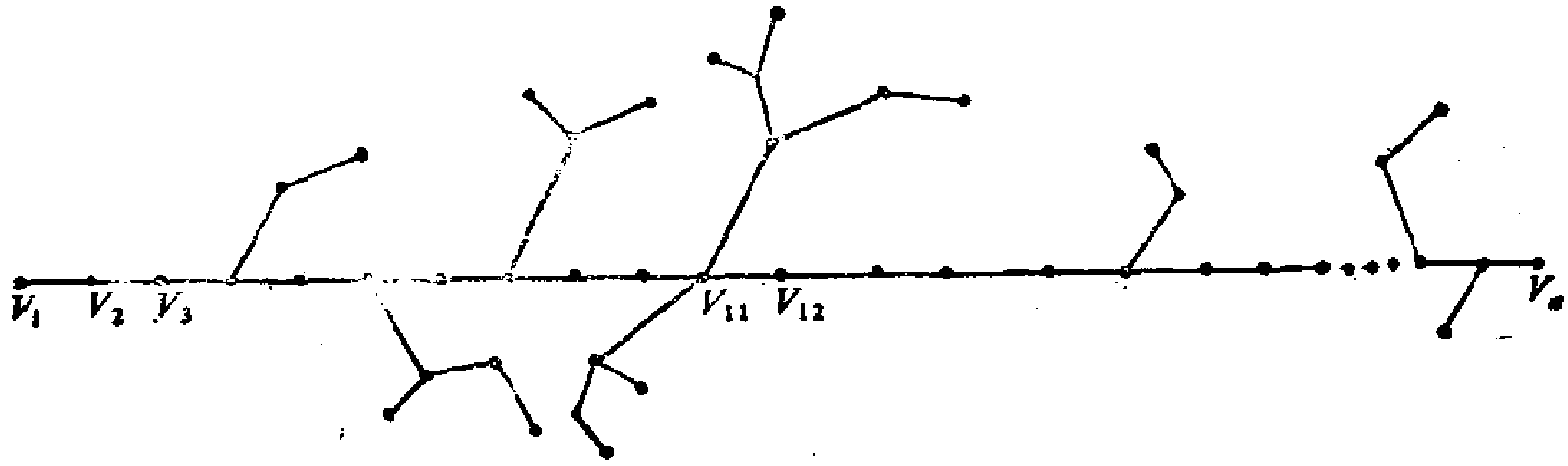


图 3.3

在树 T_{1000} 中，可以找到一条“路”，由边

$$V_1V_2,\ V_2V_3,\ V_3V_4,\ \cdots,\ V_{n-1}V_n(n\leqslant 1000)$$

组成，其中 V_1、V_n 是距离最大的两个端点(图3.3).

取 V_{11} 作为一个“居民代表”并将边 $V_{11}V_{12}$ 取消.这时 T_{1000} 被分成两棵树．前一棵树中，每个顶点 V 到 V_{11} 的距离 $\leqslant 10$ (否则在树 T_{1000} 中，V 到 V_n 的距离大于 V_1 到 V_n 的距离)．于是，代表 V_{11} 所知道的消息，前一棵树的(顶点所表示的)人在10天之内都能够知道．

对后一棵树，也有一条“最长的路”

$$V_1'V_2',\ V_2'V_3',\ \cdots,\ V_{m-1}'V_m',$$

这里 $m\leqslant 1000-11=989$.同样地，取 v_{11}' 作为一个代表并取消边 $V_{11}'V_{12}'$，将这棵树再分为两棵树．

这样继续进行下去，陆续得出代表，

$$V_1,\ V_1^{(1)},\ \cdots,V_1^{(88)}$$

每个代表都可以把一个消息在10天之内通知他那个“选区”(一棵树)中的“选民”.

最后剩下一棵树，至多有

$$1000-11\times 89=21$$

个顶点.在它的直径——最长的路上取代表 $V_{11}^{(89)}$，则这棵树的每一个点到它的距离 $\leqslant 10$.

这样选出的90个代表

$$V_1,\ V_1^{(1)},\ V_1^{(2)},\cdots,V_1^{(89)}$$

就满足题目的要求.

注　在以上的过程中，如果某一步的直径上点数少于11，就取直径的一个端点作为代表. 这时代表总数可能少于90.

例16　某市发生流行性感冒.患感冒的人只生一天病，并且痊愈后至少有一天的免疫力. 已知第一天有一些人患上感冒，并且凡与病人接触的健康的人，如果没有免疫力，第二天就受传染而患感冒.证明：

(1) 如果有一部分人在第一天有免疫力，那么流感可能无限地延续下去.

(2) 如果第一天谁也没有免疫力，那么流感迟早要结束.

初看起来有点奇怪，第一天有免疫力反倒可能成为一件坏事.下面的推理表明确实如此.

首先举一个例子来说明(1).设三个人A、B、C互相接触，A在第1天有免疫力，B患感冒，C健康(无免疫力)，并且假定免疫力只持续1天.那么可以得到下表

天数	1	2	3	4	5	6	…
A	免	健	病	免	健	病	…
B	病	免	健	病	免	健	…
C	健	病	免	健	病	免	…

第4天的情况与第1天完全相同，可见这三个人的状况将按上表无限地循环下去，每天都有1个人患病.

现在来证明(2).还是用点来表示人，用边表示对应的两个人互相接触.

将顶点(也就是人)分为若干个无公共元素的集合

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots$$

M_0由第1天患感冒的人组成.M_1由这样的点组成：它至少与M_0中一个点的距离为1(有边相连)，也就是至少与M_0中一个人接触.M_2由这样的点组成：它与M_0中每个点的距离都$\geqslant 2$(因而它不在M_1中)并且至少与M_0中一个点的距离$=2$.依此类推，一般地，

$M_k=\{v\mid$对M_0中每一点v'，$d(v,\ v')\geqslant k$，并且等式至少对一个v'成立$\}$.最后，与M_0中任一点的距离为无限大的点组成集合M_∞.显然M_∞中的点(人)永远不会感冒，可以不予考虑.这样，顶点被分为$n+1$个集

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n.$$

我们证明第$n+2$天流行感冒就停止了.

事实上，第1天只有M_0中的人患感冒，第2天患感冒的是M_1中的人，第3天患感冒的是M_2中的人，…，假定第k天患感冒的人是M_{k-1}中的点(人)，第$k+1$天患感冒的人是M_k中的人，那么第$k+2$天患感冒的必然是M_{k+1}中的人.这是因为M_{k+1}中的任一个点v_{k+1}与M_0中一点v_0的距离为$k+1$，所以从v_0出发经过k条边到达M_k中一点v_k，然后再到v_{k+1}.v_k在第k天生病，所以v_{k+1}在第$k+1$天生病(v_{k+1}不在M_{k-1}中，所以第$k+1$天无免疫力).同时，任一个在第$k+1$天生病的点v_{k+1}，必定与M_k中某个点v_k相连，并且v_{k+1}不在M_{k-1}中(否则它在第$k+1$天有免疫力)，也不在M_0，M_1，…，M_{k-2}中(否则可以从v_0经过少于$k-1$条边到v_{k+1}，然后再到v_k，这样$d(v_0,\ v_k)<k$，矛盾)，因而v_{k+1}在M_{k+1}中.

这样，在第n天生病的是M_{n-1}，在第$n+1$天生病的是

M_n.在第$n+2$天，M_n中的点已经痊愈，M_{n-1}中的点有免疫力，其余的点与M_n(第$n+1$天生病的)没有边相连，因而在第$n+2$天谁也不会生病，流行感冒到此结束.

小结 用点表示所研究的对象，用连结一对点的边表示对应的对象之间有某种关系，这样就得到一个图. 图论中有很多重要定理(如拉姆赛定理)，但大多数初等的图论问题都可以用枚举法，分为若干种情况逐一加以讨论. 有时讨论分为几层，需要象抽茧剥蕉那样逐步深入.

例1中的(1)，例2（两部分图)中的(2)以及完全图、树的性质，都是常用的基本知识.

第四部分　灵活多样的问题

从前面几部分，可以看出组合数学有一个显著的特点：灵活多样．它很象下棋，“始以正合，终以奇胜，贵在变通，最忌执一”．虽然也要学一些基本的“招式”，但在许多场合，需要自己创造“新招”，以“无招胜有招”．下面再介绍一些问题供读者“试招”．

例1　证明任意的52个自然数中，一定有两个数，它们的和或差能够被100整除．

我们制取51个“抽屉”．将除以100所得余数为1或99的数，放在第1个抽屉．将除以100所得余数为2或98的数，放在第2个抽屉，…….依此类推，将余数为49或51的放在第49个抽屉，余数为50的放在第50个抽屉．最后，被100整除的数放在第51个抽屉里．

由于抽屉只有51个，所以已给的52个自然数一定有两个在同一个抽屉里，这两个数除以100所得的余数应当相等或者两个余数的和为100．因此，这两个数的和或差被100整除．

例1所采用的方法称为**抽屉原则**或**迪里赫勒原则**，它是德国数学家迪里赫勒(Dirichlet)首先明确提出来的．抽屉原则也是解决存在性的一个重要方法．它的要点是构造某种“抽屉”，然后通过计数的方法，证明“苹果”的个数大于抽屉的个数(在例1中苹果就是已知的52个数)，从而必有两个苹果落到同一个抽屉之中，由这个事实导出所需要

的结论.

第三部分例 4 中所提到的拉姆赛定理是抽屉原则的推广.

例2　证明可以将整数1，2，…，1986 涂上两种颜色(分为两类)，使得同一种颜色的数不能组成一个有18项的等差数列.

我们先来看一看从1，2，…，1986中选出18个数组成等差数列有多少种.

设这个等差数列的首项为a，公差为d，则

$$a+17d\leqslant 1986$$

因此

$$d\leqslant\left[\frac{1986-a}{17}\right].$$

其中$[x]$表示x的整数部分(即不超过x的最大整数).

于是，对每个固定的a，有$\left[\frac{1986-a}{17}\right]$个以$a$为首项的、18项的等差数列(在$\{1, 2, \cdots, 1986\}$中).而显然

$$a\leqslant 1986-17=1969.$$

从而所求的种数

$$S=\sum_{a=1}^{1969}\left[\frac{1986-a}{17}\right].$$

我们并不需要具体算出S的值，需要的是一个S的上界估计：

$$\begin{aligned}S&\leqslant\frac{1}{17}\sum_{a=1}^{1969}(1986-a)=\frac{1}{17}\sum_{b=17}^{1985}b\\&\leqslant\frac{1}{17}\times\frac{1969\times(1985+17)}{2}=\frac{1}{17}\times1969\times1001\\&<\frac{2^{11}\times2^{10}}{2^4}=2^{17}.\end{aligned}$$

现在将1、2、…、1986涂上两种颜色．这是第一部分例 4 中所说的允许重复的排列，由于每一个数都有2种不同的涂法，所以总的涂法为2^{1986}.

另一方面，含有同色的、18项的等差数列的涂法不超过$2\times S\times 2^{1986-18}=S\times 2^{1986-17}$.这是因为选出 18 项成等差数列的方法为 S；这 18 项颜色相同，有两种涂法；其余的1986－17项有$2^{1986-17}$种不同的涂法(这里我们又用了乘法原理，但算出来的涂法有些是重复计算了，所以$S\times 2^{1986-17}$是一个上界).

由于$S<2^{17}$，因而

$$S\times 2^{1986-17}<2^{1986}$$

这就表明并非所有的涂法中都包含18项同色的等差数列.

本题也是从两个方面考虑，一方面是涂法的总数，另一方面是符合某种要求的涂法的种数.如果后者小于前者，那么就有不符合某种要求的涂法存在．这种方法是当代著名数学家厄尔多斯(Erdös)所钟爱的.

如果1986改为某个充分大的数N，那么，不论如何涂色，都一定有18项同色的等差数列．更一般地，对任意给定的自然数l，都存在一个自然数N_l，使得在$n\geqslant N_l$时，将数1，2，…，n任意地涂上两种颜色，都一定有一个长为l的同色的等差数列存在.这是数学家范德瓦尔登(Van der Waerden)在 1926 年证明的一个著名定理，围绕这个定理的讨论，人们获得了许多有趣的结论.

下面的例 3 也是这种类型的问题.

例3 能否从1，2，…，10^5中选出1987个不同的数，使其中的任何三个都不构成等差数列?

答案是肯定的，我们采用构造法来证明.

首先，在前5个自然数中有4个数

$$1, 2, 4, 5, \tag{1}$$

其中每三个不成等差数列

然后，在前$15=5\times3$个自然数中有$8=4\times2$个数

$$1, 2, 4, 5, 11, 12, 14, 15 \tag{2}$$

其中每三个不成等差数列．(2)是在(1)后面添上4个数，这4个数分别为(1)中4个数加上2×5.

一般地，如果在前n个自然数中有k个数

$$a_1<a_2<\cdots<a_k,$$

其中每三个不成等差数列，那么在前$3n$个自然数中有$2k$个数

$$a_1<a_2<\cdots<a_k<2n+a_1<2n+a_2<\cdots<2n+a_k,$$

其中每三个不成等差数列(这是不难验证的).

按照这个方法，我们在前$45=5\times3\times3$个自然数中可以取出$4\times2\times2$个数，其中每三项不成等差数列．在前5×3^3个自然数中可以取4×2^3个数，其中每三项不成等差数列….在$1, 2, \cdots, 5\times3^9=98415$中可以取$4\times2^9=2048$个数，每三项不成等差数列.当然从$1, 2, \cdots, 10^5(>98415)$中更可以取出$1987(<2048)$个数，每三项不成等差数列.

下面的例4与例5是构造所谓的斯坦纳(Steiner, 1796—1863，瑞士数学家)三元系与寇克满(Kirkman, 1806—1895，英国数学家)三元系.

例4 能否由9个人建立12个小组，使得以下条件成立：

(1) 每个小组有三个人.

(2) 每个人出现在4个小组里.

(3) 每两个人恰好有一次在同一个小组里.

造出这样的12个小组并不困难.首先作下面的矩阵(每个数代表1个人)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$$

然后取这个矩阵的三横行、三纵行及不在同行同列的每三个数所成的6个组(即相应的三阶行列式展开后的6项):

(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(1,4,7),(2,5,8),(3,6,9),

(1,5,9),(2,6,7),(3,4,8),(3,5,7),(1,6,8),(2,4,9).

更一般地,能否由v个不同元素组成b个小组,满足以下条件:

(1) 每个小组恰有3个元素,

(2) 每个元出现在r个小组内,

(3) 每两个元恰好有一次在同一个小组里?

这样的b个三元组,如果存在,称为一个v阶斯坦纳三元系.我们来看看三元系在什么时候存在.

首先,由(1),b个小组的元数之和为$3b$;但由(2),每个元被重复算了r次,所以

$$3b=rv. \qquad (*)$$

其次,对一个固定元素x,由(2),它出现在r个小组内.由(3),其余的$v-1$个元恰好有一次与它在同一个小组里。r个小组除去x外,还有$2r$个元,所以

$$v-1=2r \qquad (**)$$

由(* *)可知v是奇数.由(* *)与(*)可知

$$b=\frac{(v-1)v}{6}$$

因为b是整数,所以

$$v = 6k + 1 \text{或} 6k + 3 \quad (k\text{是整数}) \qquad (A)$$

(A)式是 v 阶斯坦纳三元系存在的必要条件，可以证明这个条件也是充分的，这是寇克满在1847年所做的工作。

在(A)式成立时，v 阶三元系通常有很多个．如果两个三元系没有一个小组（或称为区组）是相同的，就说这两个三元系是不相交的．用 $D(v)$表示两两不相交的三元系的最大个数．由于v个元素所能构成的三元组共

$$C_v^3 = \frac{v(v-1)(v-2)}{6}$$

个，而每个三元系有

$$b = \frac{v(v-1)}{6}$$

个三元组，所以至多有

$$C_v^3 / b = v - 2$$

个三元系两两不相交，即

$$D(v) \leqslant v - 2.$$

长期以来，猜测在(A)成立时，只要$v > 1$，$v \neq 7$就有

$$D(v) = v - 2$$

（$D(7) = 2$ 是已知的结果）．这个问题为我国组合数学家陆家羲在1981年基本解决．

陆家羲（1935—1983）是包头九中物理教员，长期钻研上述问题，他在论文《不相交Steiner 三元系大集 Ⅰ－Ⅵ》中证明了以下的大集定理：

“如果(A)成立，$v > 1$，$v \neq 7$，那么在 $v \neq 141$，283，501，789，1501，2365时，

$$D(v) = v - 2\text{”}$$

1983 年，陆家羲宣布以上六种可能的例外（即 141，283，501，789，1501，2365）是可以取消的，并将发表在

关于三元系大集的论文Ⅶ中．遗憾的是，他的文章尚未完成，即因积劳成疾，突然去世．

如果一个斯丹拿三元系的b个区组（小组）可以分为r个类，使得每个元素恰在每一类中出现一次．这样的三元系称为寇克满三元系．

最著名的寇克满三元系，是寇克满在1850年提出来的，通常称为十五个女生的问题（$v=15$，$r=7$，$b=35$的情况）．这个问题，寇克满在翌年公布了答案．

例5 十五个女生，每天分为五组散步，每组3个人．要求每一周的7天中，每两个女生恰有一次在一起散步．

寇克满的解答如下（用1，2，…，15表示15个女生）：

星期日	星期一	星期二	星期三
(1,2,3)	(1,4,5)	(1,6,7)	(1,8,9)
(4,8,12)	(2,8,10)	(2,9,11)	(2,12,14)
(5,10,15)	(3,13,14)	(3,12,15)	(3,5,6)
(6,11,13)	(6,9,15)	(4,10,14)	(4,11,15)
(7,9,14)	(7,11,12)	(5,8,13)	(7,10,13)

星期四	星期五	星期六
(1,10,11)	(1,12,13)	(1,14,15)
(2,13,15)	(2,4,6)	(2,5,7)
(3,4,7)	(3,9,10)	(3,8,11)
(5,9,12)	(5,11,14)	(4,9,13)
(6,8,14)	(7,8,15)	(6,10,12)

当然这并不是唯一的答案．

我们来看一看寇克满三元系存在的条件．由于在每一类中，v个元素各出现一次，所以每一类都应当由$\frac{v}{3}$个

三元区组组成，即v是3的倍数.结合(A)便得

$$v=6k+3 \quad (k\text{为整数}) \qquad (B)$$

这是寇克满三元系存在的必要条件.(B)也是寇克满三元系存在的充分条件，这一事实直到1971年才被两位数学家解决.

斯坦纳三元系与寇克满三元系都是某种区组设计.区组设计，无论在理论还是实践方面，都是一个重大的研究课题.

下面的例6与例7的解法利用了某种量的最大或最小.

例6 平面上已给两个有限点集A、B.连结点集A中任意两点的线段内部都至少含有点集B中一个点.连结点集B中任意两点的线段内部也都至少含有点集A中的一个点.证明：集A与集B的点在同一条直线上.

假如集A的点全在一条直线上，不难证明结论成立.因为在这条直线l上必有一点$b\in B$，如果有$b'\in B$，而b'不在直线l上，那么线段bb'内部的点$a\in A$也不在l上，矛盾.所以B的点与A的点全在同一条直线l上.

同样，如果B的点全在一条直线上，结论也成立.

现在假定A、B的点都不全在一条直线上.考虑顶点全在点集A或全在点集B中的三角形.由于A、B都是有限点集，这些三角形的个数有限，因而其中必有一个面积最小.不妨假定，这个面积最小的三角形的三个顶点都属于A.在这个三角形的每一条边的内部各有一个点属于B，这三个点组成的三角形显然比原来的三角形面积为小，这与原来的三角形面积最小矛盾.这矛盾表明A、B的点都不全在一条直线上是不可能发生的.

例7 会议有n名代表参加.证明可以将这n个人分为两组，使得每一个人在另一组中认识的人数不少于他在同一组中认识的人数.

将n个人任意地分为两组，每个人 v_i 在另一组中认识的人数为d_i($i=1, 2, \cdots, n$).考虑和

$$s=d_1+d_2+\cdots+d_n.$$

由于分组的方法有限（用第一部分中的知识容易算出有多少不同的分法），所以在各种分组中，有一种分组使得和s为最大.我们就采用这一种分组.

在这种分组中，如果有一个人在同一组中认识的人数大于他在另一组中认识的人数，比如说v_1 在同一组中认识d_1'个人，而

$$d_1'>d_1.$$

那么，我们将v_1换到另一组去.这时，s 发生了变化. 首先d_1应当用d_1'来代替.其次，与v_1原来在同一组的d_1'个人，每人在另一组中认识的人数增加 1，而与 v_1 原来不在同一组的d_1个人，每人在另一组中认识的人数减少1.所以s变为

$$s-d_1+d_1'+d_1'-d_1=s+2(d_1'-d_1)>s.$$

这与s的最大性相矛盾. 因此，对于和s最大的分组方法，每个人在另一组中认识的人数不少于他在同一组中认识的人数.

将我们研究的对象(三角形、分组方法等等)与某种量(三角形的面积，$s=d_1+d_2+\cdots+d_n$)对应，通过对后者的研究来解决问题，是数学中常用的方法.

例8 将若干球分为n堆，然后合并起来，重新分为$n+k$堆. 证明至少有$k+1$个球第二次是在比第一次小的堆中.

这个题目看似容易，却颇困难．解决它需要巧妙的想法．其关键就是将每一个球与一对数（一个二元数组）相对应．

如果一个球第一次所在的堆中有 a 个球，第二次所在的堆中有b个球，我们就将这个球与它的“坐标”

$$\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$$

相对应．为什么不用(a, b)作坐标反而用$\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$，这一点看到下文自然明白．

考虑“纵坐标”与“横坐标”的差

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$$

我们希望至少有$k+1$个差是正的（差是正的等价于 $b<a$）．

当然，对每一个球，题目中没有给出任何条件以帮助我们判明这个差的正负．但是，我们可以考虑这所有差的总和S．

S 可以这样计算：先算出所有纵坐标的和与横坐标的和，再将二者相减．

同一堆中b个球的纵坐标之和是（由此可见为什么用$\frac{1}{b}$作纵坐标）

$$b\times\frac{1}{b}=1$$

$n+k$ 堆中的所有球的纵坐标之和是

$$(n+k)\times 1=n+k.$$

同样，n堆中所有球的横坐标之和是n．因此，

$$S=(n+k)-n=k. \qquad (1)$$

注意每一个差

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\leqslant 1-\frac{1}{a}<1.$$

所以S中至少有$k+1$个差是正的，才能使(1)式成立.这就证明了结论.

例9　数列

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3,\ \cdots \qquad (1)$$

中，每一项等于它前面6项的和的末位数字．证明没有连续的6项构成0，1，0，1，0，1．

这个问题似乎与第二部分的例7相同，但这种相同只是表面的.那个问题可以用奇偶性解决，这个问题难得多.

问题的关键在于作一个对应：将数列(1)中每连续的6项x，y，z，u，v，w对应于一个数，即

$$2x+4y+6z+8u+10v+12w\text{的个位数字}.$$

(也可以换一个说法：作一个六个自变量x，y，z，u，v，w的函数$f(x,y,z,u,v,w)=2x+4y+6z+8u+10v+12w$的个位数字．两种说法是一致的，因为函数的本质就是对应).例如对于开始的六项1，0，1，0，1，0，对应的数就是

$2\times1+4\times0+6\times1+8\times0+10\times1+12\times0=18$的个位数字8.

如果x，y，z，u，v，w，r是顺次的7项，那么y，z，u，v，w，r所对应的数减去x，y，z，u，v，w所对应的数所得的差等于

$$\begin{aligned}&(2y+4z+6u+8v+10w+12r)-(2x\\&+4y+6z+8u+10v+12w)\\&=12r-2(x+y+z+u+v+w)\end{aligned}$$

$=12(x+y+z+u+v+w)-2(x+y+z+u+v+w)$（因为$r$是$x+y+z+u+v+w$的个位数字）

$=10(x+y+z+u+v+w)$的个位数字

即差为0．所以在每一项换成它后面一项时，连续6项所对应的数保持不变．即对于数列(1)中，每连续6项，所对应的数永远是8．

如果0，1，0，1，0，1作为数列(1)的连续六项出现，这时对应的数为

$$2\times0+4\times1+6\times0+8\times1+10\times0+12\times1$$

$=24$的个位数字4．

与上面的结论矛盾($4\neq8$)．所以0，1，0，1，0，1不能作为数列(1)的连续6项出现．

在本例中又出现了一个“不变量”．前面已经说过这种不变量往往是解决问题的关键．有些时候，找出的量虽然不是不变的，但它的规律易于掌握(常常是单调增加或单调减少的)，这样的量可以称为“半不变量”，它也是很有用的．

例10 一个矩阵(数表)，它的元素(即表中的数)都是实数．将这个矩阵的同一行或同一列的元素同时改变符号，称为一次运动．证明可以用若干次运动使得这个矩阵的每一行与每一列的元素的和都变为非负的．

我们把运动分为两种，把某一行或某一列的元素的和由负变为正的运动称为正运动，否则称为负运动．下面只考虑正运动．

矩阵中所有元素的和S是本例中的“半不变量”．如果有一行或一列的元素的和为负，我们就将这行(列)的所有元素同时改变符号．经过这次正运动，这行(列)的和由负

变为正，其它各行(列)元素的和保持不变，所以S严格地增加.

因此，每经过一次正运动，原来的矩阵变为一个新的矩阵，这样得到的矩阵互不相同(对应的S互不相同)，但它们的不同仅仅是元素的符号不全相同．这种在同一位置上的元素的绝对值分别相同的矩阵只有有限多个(如果矩阵有m行n列，共mn个元素，那么由于每个元素前面可放$+$号或$-$号，所以共有2^{mn}个各对应元素的绝对值相同的矩阵)，所以上面的正运动不能无限地进行下去，也就是说经过若干次正运动后，矩阵的每行与每列的元素的和都是非负的.

例11 幼儿园的小朋友围成一圈，各得到一些糖果，如果手中的糖果是奇数，老师再补发一个，然后每个人把自己的糖果分出一半给左边的小朋友．这样进行若干次后，各人手中的糖果必然相同.

我们设糖果最多的小孩有糖果a颗，不妨设a是偶数．经过一次调整，糖果最多的不超过a颗，即使老师添一颗给奇数糖果的，情况仍然如此．理由是，每个人手中的糖果成为

$$\frac{b}{2}+\frac{c}{2},\ b、c\text{为偶数}\leqslant a,\ \text{且}\frac{b+c}{2}\text{是偶数；}$$

或

$$\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+1,\ b、c\text{为偶数}\leqslant a,\ \text{且}\frac{b+c}{2}\text{是奇数.}$$

前者，显然有$\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\leqslant\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$．后者由于$\frac{b+c}{2}$是奇数，$a$是偶数，所以$\frac{b}{2}+\frac{c}{2}<a$，从而$\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+1\leqslant a$.

这样，不论调整多少次，糖果最多的不超过a颗.

另一方面，设糖果最少的小孩有糖果b颗，那么调整后每个小孩手中的糖果一定不少于b，这是因为他自己的一半或别人给他的一半都不少于$\frac{b}{2}$. 并且，只有在他自己手中的糖与右面小朋友手中的糖果都为b颗时，调整后他的糖果才恰好等于b颗，否则他的糖果将多于b颗.

如果小朋友的糖果不全相等，总有一个小朋友手中有b颗糖而他右面的小朋友手中的糖果多于b颗，调整一次后这个手拿b颗糖果的小朋友手中的糖果多于b颗. 这样，每次调整后，拿b颗糖果的朋友的个数至少减少1. 所以调整几次后，就没有拿b颗糖果的小朋友.设这时拿糖果最少的小朋友拿b'颗，那么$b'>b$.于是，经若干次调整，最少的糖果数b严格增加. 但最多的糖果数不超过a，所以最后所有小朋友的糖果数(最多的与最少的)必然相等.

一个严格递增而且有上界的、由自然数组成的数列只能有有限多项.一个严格递减的自然数数列(下界当然是1)也只能有有限多项. 这些简单浅易的道理有不少用处. 例11就用到了这点.

例11中的a与b都可以说是“半不变量”.

例12 有$2n+1$个自然数，任取出其中一个后，其余的数可分为两组，两组的和相等，证明这$2n+1$个数全都相等.

我们称$2n+1$个数具有性质P：如果任取出其中一个后，其余的数可分为两组，两组的和相等.

容易验证，如果a_1，a_2，…，a_{2n+1}这$2n+1$个数具有性质P，那么a_1+1，a_2+1，…，$a_{2n+1}+1$和$\frac{a_1}{2}$，$\frac{a_2}{2}$，

…，$\frac{a_{2n+1}}{2}$也都具有性质P.

已给的$2n+1$个数具有性质P，取出其中一个数x后，其余的数可分为和相等的两组，所以其余的数的总和是偶数（每组的和的2倍）. 从而x的奇偶性与这$2n+1$个数的和的奇偶性相同.x是这$2n+1$个数中的任一个数，所以这$2n+1$个数的奇偶性都相同（都与和的奇偶性相同）.

如果这$2n+1$个数全是偶数，将每个数都除以2. 如果这$2n+1$个数全是奇数，先将它们加1然后再除以2. 这样得到的$2n+1$个数仍然是自然数，而且根据前面所说，仍然具有性质P.

对所得的$2n+1$个数按刚说的方法进行"处理"，这样继续进行下去，只要$2n+1$个数中最大的不是1，每次产生的新的$2n+1$个数中最大的严格减少.由于严格减少的自然数组成的数列只能有有限多项，所以上面的"处理"在有限多步后必然停止，这时$2n+1$个自然数中最大的是1，因而这$2n+1$个自然数都等于1.

由于在每次处理时，每个数都除以2或都先加1再除以2，所以如果处理后的$2n+1$个数全相等，那么处理前的$2n+1$个数也相等.从而原来已给的$2n+1$个数一定相等.

本题不仅对于$2n+1$个自然数成立，而且把"自然数"改为"实数"或"复数"，结论仍然成立，当然证明要稍难一些.

数学归纳法也是组合数学中常用的方法.

例13 1985个点分布在同一圆周上，每个点标上$+1$或-1.称一个点为"好点"，如果从这个点开始，依任一方向绕圆周前进到任一点时，所经过的各数（包括起点和终

点)的和都是正的．证明：如果标有-1的点少于662时，圆周上至少有一个好点．

这是一个与自然数有关的问题．凡与自然数有关的问题都应该想到是否能用数学归纳法．

本题可以采用数学归纳法来证明更一般的结论：如果圆周上有$3n+1$个点标上$+1$或-1，并且-1的个数不超过n，那么圆周上至少有一个好点．

在$n=1$时，有三个标有$+1$的点，中间的一个就是好点．

假设结论对于$n-1$成立．任取一个标有-1的点A，自A出发绕圆前进，沿顺时针方向到达的第一个标有$+1$的点为B，沿逆时针方向到达的第一个标有$+1$的点为C．将A、B、C去掉，剩下的$3n-2=3(n-1)+1$个点中，标-1的点不超过$n-1$个，因而(根据归纳假设)其中必有好点D．D不在含A点的$\overset{\frown}{BC}$内部，因为$\overset{\frown}{BC}$内部的点全是-1．

在原来的$3n+1$个点中，D也是好点．因为在原来的图中，自点D出发沿逆(顺)时针绕圆周前进，一定先遇到$B(C)$，然后才遇到A，所以经过的各个数的和必然都是正的．这就证明了结论对任意的自然数n均成立．例13是$n=661(3n+1=1984)$的特殊情况．

例14 2^n个$+1$或-1标在一个圆周上．将每个数换成与它相邻的两个数的乘积，称为一次操作，证明经过有限多次操作后，圆周上的数全变为$+1$．

$n=1$时结论是显然的，因为x_1的左邻与右邻都是x_2，所以一次操作后x_1变为$x_2^2=1$，x_2变为$x_1^2=1$．

假设命题对于$n-1$成立，考虑n的情况．设圆周上的

2^n个数为

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots,\ x_{2^n} \tag{1}$$

经过一次操作变为

$$x_2x_{2^n},\ x_1x_3,\ x_2x_4,\ x_3x_5,\ \cdots,\ x_{2^n-1}x_1. \tag{2}$$

再经过一次操作变为

$$x_1^2x_3x_{2^n-1},\ x_2^2x_4x_{2^n},\ x_1x_3^2x_5,\ \cdots,\ x_{2^n}^2x_2x_{2^n-2}. \tag{3}$$

由于$x_1^2=x_2^2=\cdots=x_{2^n}^2=1$，所以经过两次操作，得到的数就是

$$x_3x_{2^n-1},\ x_4x_{2^n},\ x_1x_5,\ \cdots,\ x_2x_{2^n-2} \tag{3'}$$

如果我们只注意(1)中奇数位上的2^{n-1}个数

$$x_1,\ x_3,\ \cdots,\ x_{2^n-1} \tag{1'}$$

那么经过两次操作它们变为(3′)中奇数位上的

$$x_3x_{2^n-1},\ x_1x_5,\ \cdots,\ x_{2^n-3}x_1 \tag{2'}$$

这也就是说每两次操作相当于对2^{n-1}个数x_1，x_3，$\cdots$，x_{2^n-1}(不考虑其他的数)直接进行一次操作.

根据归纳假设，对(1′)直接进行操作若干次后，这2^{n-1}个数全变为$+1$.所以对(1)进行若干次操作(是上述操作次数的2倍)后，(1′)的数全变为$+1$. 同理，这时偶数位上的数也都变为$+1$，这就证明了结论.

从上面的推理还可以看出至多2^{n-1}次操作，就可以把所有的数都变为$+1$.

下面的例15是一个比较复杂的问题.

例15 以任意方式将圆周上$4K$个点标上数1，2，$\cdots$，$4K$.证明：

(1) 可以用$2K$条两两不相交的弦联结这$4K$个点，使得每条弦的两端的标数之差不超过$3K-1$.

(2) 对于任意的自然数K，(1)中的数$3K-1$不能再减

少.

我们先来解第(1)小题.这题需要分两步进行.首先,解一个较为容易的问题,或者说先证明一个如下的引理.

引理　圆周上有n个黑点和n个白点,一定能用n条两两不相交的弦联结这$2n$个点,每条弦的两端颜色不同.

证明采用归纳法.$n=1$时,引理显然成立,将1个黑点与1个白点连结起来就可以了.假设引理对于$n-1$成立.考虑n的情形.

由于圆周上既有黑点又有白点,所以必有两个相邻的点一黑一白,将这两点用弦连接起来.

根据归纳假设,其余的$n-1$个点可以用$n-1$条两两不相交的弦连接起来,这些弦两端的颜色不同.

我们得到了n条符合要求的弦,因此引理成立.

现在进入第二步.将$1,2,\cdots,4K$分为两组:

$$A=\{1,2,\cdots,K\}\cup\{3K+1,3K+2,\cdots,4K\},$$

$$B=\{K+1,K+2,\cdots,3K\}.$$

在引理中取$n=2K$(显然集合A、B各有$2K$个元素),并将A中的数作为“白点”,B中的数作为“黑点”.根据引理,可以用$2K$条两两不相交的弦把这$4K$个点连接起来,使得弦的两端分别属于A、B.

显然A中任意一个数与B中任意一个数的差$\leqslant 3K-1$,所以上面所说的$2K$条弦就是符合要求的弦.

一个复杂的数学问题,往往需要分为若干步去解决.有时先证明一两个引理,为解决问题创造条件,就象在攻打城堡之前,制造一些攻城的器械.

第(2)小题更加困难.首先要搞清题意,知道要做的是什么事情.

所谓“(1)中的数 $3K-1$ 不能再减少”就是如果把(1)中的 $3K-1$ 改为更小的数 $3K-2$，(1)就不再成立(当然改为比 $3K-2$ 小的数更不能成立)．换句话，这时(1)的否命题应当成立．

为了写出这个否命题，先把命题(1)准确、完整地叙述如下：

“以任意方式将圆周上 $4K$ 个点标上数 $1, 2, \cdots, 4K$．一定能用 $2K$ 条两两不相交的弦连接这 $4K$ 个点，使得每条弦的两端标数之差不超过 $3K-2$”．

在否定一个命题时，应当把“全称”的词，如“任意的”、“每一个”，改为“特称”的词“有一个”、“某一个”，特称的词则改为全称的词．

要证明的否命题是

“有一种方式将圆周上 $4K$ 个点标上数 $1, 2, \cdots, 4K$．如果用 $2K$ 条两两不相交的弦连接这 $4K$ 个点，一定有某条弦的两端标数之差 $>3K-2$”．

我们应该学会写出一个稍繁杂的命题的否命题，这是很重要的．在目前的问题中，这是首要的一步．

这个否命题的证明应分为两步：

第一步　设计一种将圆周上 $4K$ 个点标上数 $1, 2, \cdots, 4K$ 的方法．

第二步　证明对于你设计的方法，如果用 $2K$ 条两两不相交的弦连接这 $4K$ 个点，一定有某条弦的两端标数之差 $>3K-2$．

第一步是关键．第一步做好了，第二步才能进行．这实际上是用构造法来证明(一种标数方法的)存在性．

与第(1)小题类似，我们考虑两个集合

$$A=\{1,2,\cdots,K\}\cup\{3K+1,3K+2,\cdots,4K\}$$
$$B=\{K+1,K+2,\cdots,3K\}.$$
将集合A的点标在上半圆，并且使

$$A_1=\{1,2,\cdots,K\}$$

与

$$A_2=\{3K+1,3K+2,\cdots,4K\}$$

互相交错．将B的点标在下半圆．如图4.1所示．

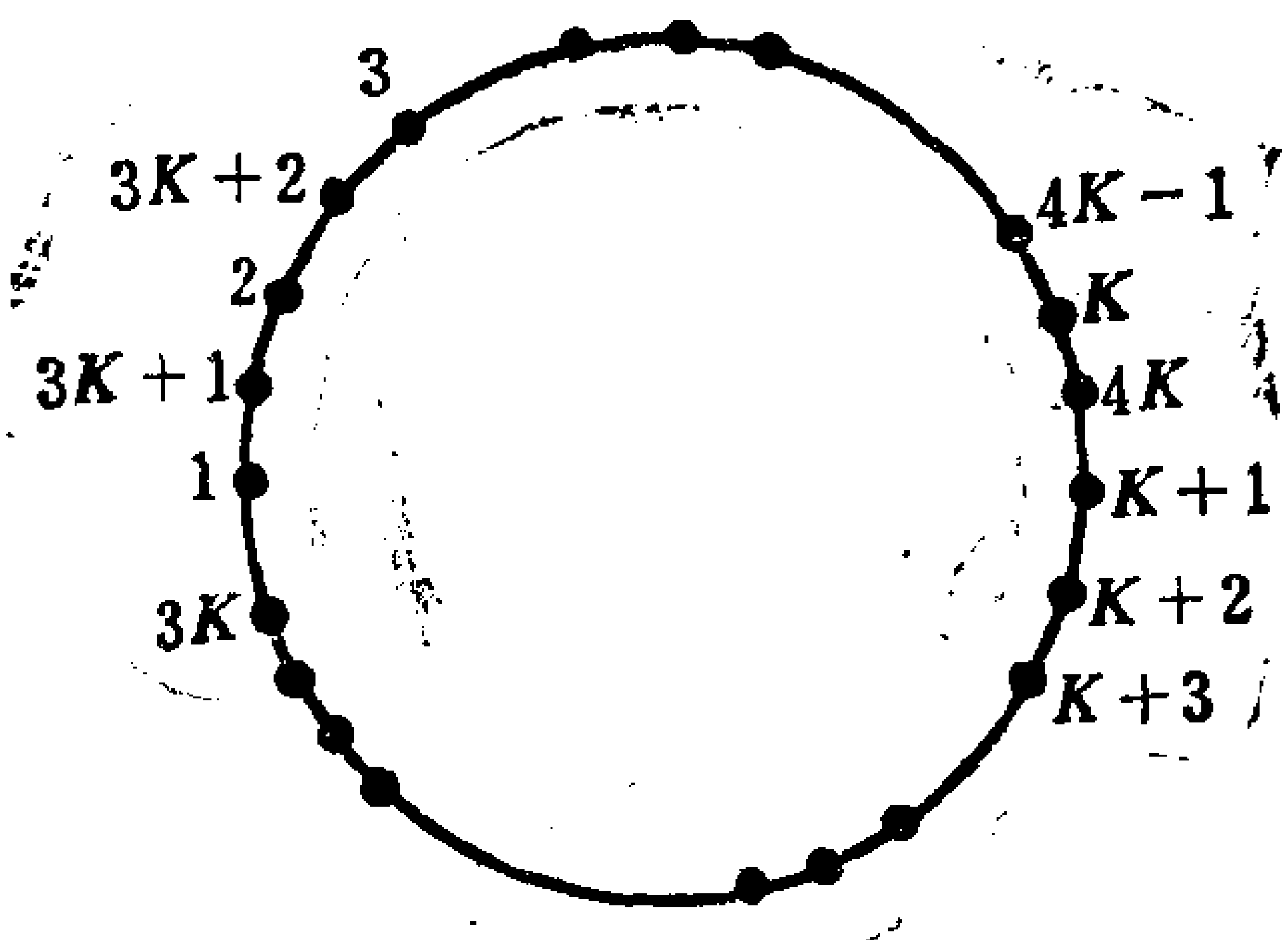


图 4.1

现在进入第二步．假定 $4K$ 个数已经用两两不相交的弦连接起来，要证明必有某条弦两端标数之差$>3K-2$.

分两种情况来讨论．

第一种情况．上半圆的数i与上半圆的数j相连．在弦ij所截的上半圆的弧内，每一个标数的点只能与这弧内的点相连(否则所连的弦与弦ij相交)．这样将弧内标数的点两两相连，最后或者剩下一个标数的点无法与其他点相连，或者有两个相邻的标数的点相连．而两个相邻的点所标的数分别属于A_1与A_2，它们的差$\geqslant 3K>3K-2$.

第二种情况．上半圆的数都与下半圆的数相连．由于集

合 A、B 中元素的个数一样多，所以每个下半圆的数也都与上半圆的数相连（两者是一一对应）．这时$3K$必然与 1 相连（否则$3K$与上半圆的数相连的弦、1 与下半圆的数相连的弦必然相交），它们的差$>3K-2$．

这道题解完了，趁着解法在头脑中还是新鲜的时候，最好回顾一下我们所做的一切，这可能有利于探究刚才克服的困难的实质．

下面的例16比较容易．

例16 能否将数1，2，…，13安排在圆周上，使相邻二数的差（的绝对值）都至少为3，至多为5？

答案是不能．为了证明这点，把1，2，…，13分为两组：

$$A=\{1,2,3\}\cup\{11,12,13\},$$
$$B=\{4,5,6,7,8,9,10\}.$$

这种"两头"在一组，"中间"在一组的分法，在例15中刚刚见过（其实，早在例 3 中就已经用了类似的作法）．

A 中的点决不能相邻，因为A中每两个数的差不是大于5，就是小于3．所以，在圆周上集 A 的 6 个点（图4.2中用·表示）形成的 6 条弧中均有集B的点（图4.2 中用×表示）．

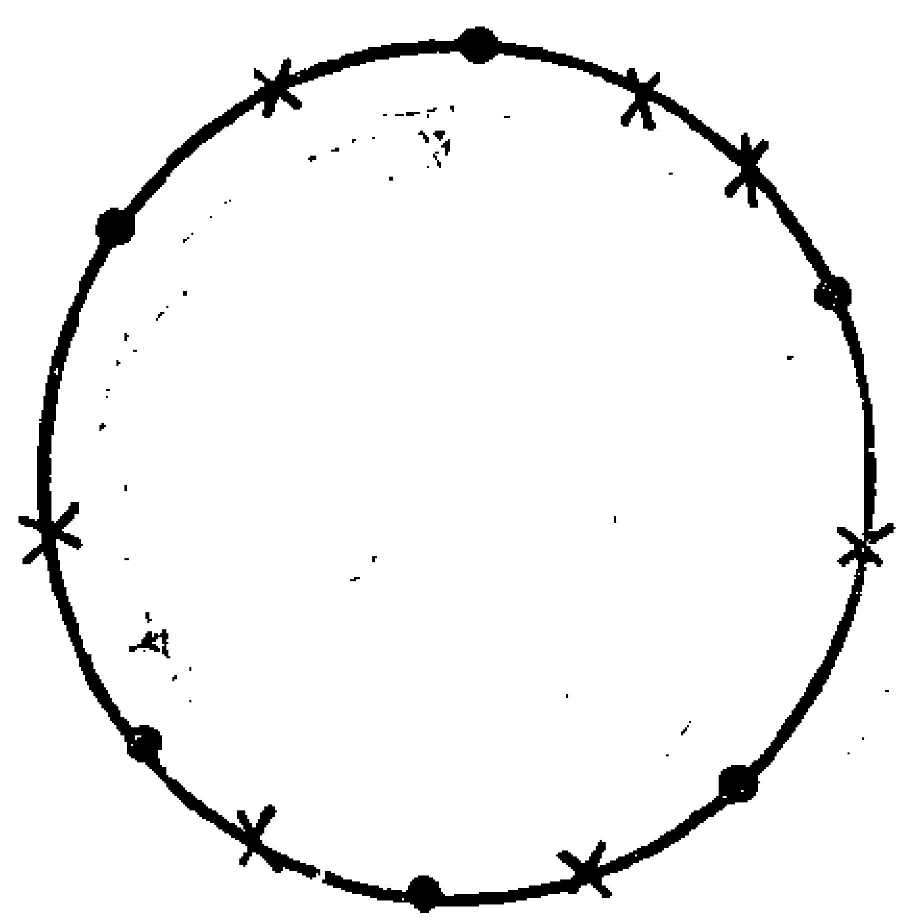


图 4.2

但集B只有 7 个点．上述的 6 条弧中必定有 5 条弧里各含一个 B的点，一条弧里含两个B的点．换句话说，B中只有两个点是与一个 A中

的点相邻，其余的点都各与两个A中的点相邻.

4只能与A中一个点(即1)相邻，10也只能与A中一个点(即13)相邻.因而这两个数就是图4.2中的相邻的两个×.但它们的差为6>5，所以它们是不应当相邻的.

下面是一道图论的问题.

例17 n个顶点，每两点之间至多连一条边，共连q条边并标以数$1,2,\cdots,q$. 证明可以沿着这个图的边前进，走过m条边，边的标号由大到小，并且$m\geqslant\frac{2q}{n}$.

假定从顶点v出发，沿着边依标号由大到小的次序前进最多能经过$L(v)$条边.

我们希望能找到某个顶点v，使$L(v)\geqslant\frac{2q}{n}$. 但题目中并没有给出这方面的线索，所以得象例8那样考虑所有$L(v)$的和. 如果n个$L(v)$的总和

$$\sum L(v)\geqslant 2q \tag{1}$$

那么其中至少有一个$L(v)\geqslant\frac{2q}{n}$.

现在用归纳法来证明(1).归纳是对边数q进行的. $q=1$是显然的，因为一条边的两个端点各引出一条边，所以$\sum L(v)\geqslant 2$.假设命题对于$q-1$成立，考虑q条边的情况.

设标号为q的边是uw.将这条边取消，得到的图G'有$q-1$条边，对于G'有

$$\sum L'(v)\geqslant 2(q-1) \tag{2}$$

其中$L'(v)$表示在G'中，从顶点v出发，沿着边依标号由大到小的次序前进最多能经过的边数.

由于

$$L(u)\geqslant L'(w)+1$$

(从u出发，可先走到w，然后再从w出发走过$L'(w)$条边)

$$L(w)\geqslant L'(u)+1$$

并且对其它顶点v，

$$L(v)\geqslant L'(v)$$

相加并利用(2)得

$$\sum L(v)\geqslant\sum L'(v)+2\geqslant 2q.$$

因而(1)式对于一切q成立.例17的结论也随之成立.

例17中的方法："最多"、"求和"、"归纳法"前面都曾经出现过.

例18是1986年的国际数学竞赛题.

例18 正五边形的每个顶点对应一个整数，使得这五个整数之和为正．若其中三个相邻顶点相应的整数依次为x、y、z，而中间的$y<0$，则要进行如下的操作：整数x、y、z分别换为$x+y$、$-y$、$z+y$．只要所得的五个整数中至少还有一个为负时，这种操作继续进行．问：是否这种操作进行有限次后必定终止？

首先，要仔细审题，把题意搞清．"正五边形"中的"正"，这个条件在这里是多余的，出题者(这道题是苏联提供的)是故意使人迷惑.题中的"操作"，在这里是不由我们选择的，即只要发现有一个负数就必须进行所述的操作，而不是可以在几个负的中选一个(比如说绝对值最大的)，针对这一个进行操作．如果理解错了，那做的是另一道题(显然，"不选择"比"选择"要难).

答案究竟是肯定的还是否定的，需要我们判断(通俗地说，就是需要我们去猜).如果是肯定的，应当予以证明.如果是否定的，应当构造一个例子，说明操作可以无限进

行下去(这有点象例16的两个小问题)．这两种做法完全不同，所以判断准确非常重要．除了举例进行试验、探索外，判断在很大程度上取决于经验与感觉(数学的直觉)．一个好的学生应当善于猜出答案，或者换句话来说：不会猜答案的学生就不是好学生．

这道题的答案是肯定的：操作进行有限次后必定终止(当然不是每道题的答案都是肯定的!)．

证明的关键是作一个对应，或者说作一个五元函数(这与例9非常相似)：

$$
\begin{aligned}
&f(x,y,z,u,v)=|x|+|y|+|z|+|u|+|v|\\
&+|x+y|+|y+z|+|z+u|+|u+v|+|v+x|\\
&+|x+y+z|+|y+z+u|+|z+u+v|+|u+v+x|\\
&+|v+x+y|+|x+y+z+u|+|y+z+u+v|\\
&+|z+u+v+x|\\
&+|u+v+x+y|+|v+x+y+z|
\end{aligned}
$$

即将(x,y,z,u,v)这组数与这五个数的绝对值、这五个数中每相邻两数的和的绝对值、每连续三数的和的绝对值、每连续4数的和的绝对值相加所得的和对应．

我们证明$f(x,y,z,u,v)$是一个"半不变量"，它的值随着操作而严格减少．

事实上，在$y<0$时，经过操作(x,y,z,u,v)变为$(x+y,-y,z+y,u,v)$，而

$$
\begin{aligned}
&f(x+y,-y,z+y,u,v)=|x+y|+|-y|\\
&+|y+z|+|u|+|v|+|x|+|z|+|y+z+u|\\
&+|u+y|+|v+x+y|+|x+y+z|+|z+u|\\
&+|y+z+u+v|+|u+v+x+y|+|v+x|\\
&+|x+y+z+u|+|z+u+v|+|x+2y+z+u+v|
\end{aligned}
$$

$$+|u+v+x|+|v+x+y+z|.$$

所以

$$f(x+y,-y,y+z,u,v)-f(x,y,z,u,v)$$
$$=|x+2y+z+u+v|-|x+z+u+v|$$
$$=|x+2y+z+u+v|-(x+z+u+v)\text{（因为}x+z+u+v>-y>0\text{）}$$
$$=\pm(x+2y+z+u+v)-(x+z+u+v)$$
$$=x+2y+z+u+v-(x+z+u+v)$$
$$=2y<0$$

或者上式

$$=-(x+2y+z+u+v)-(x+z+u+v)$$
$$=-2(x+y+z+u+v)<0.$$

总之，经过操作后，$f(x,y,z,u,v)$的值严格递减，而这值显然是自然数．严格递减的自然数的数列只能有有限多项，所以操作只能进行有限多次．换句话说，在有限多次后，所得的五个整数都不是负数．

注1　看完解答后再从头细想一遍，便对这个辅助函数的设计有进一步的理解．

注2　辅助函数$f(x,y,z,u,v)$并非只有唯一的设法（所以这是一件很灵活的事），例如可设

$$f(x,y,z,u,v)=(x-z)^2+(y-u)^2+(z-v)^2+(u-x)^2+(v-y)^2,$$

请读者自己去验证．

注3　本题可以作些推广．如将五边形改为n边形（并无实质困难），整数改为实数（困难得多）．

例19　甲、乙二人轮流地从t个集合A_1、A_2、…、A_t的并$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t$中取去一个元素．如果甲能取走$A_1$、$A_2$、

…、A_t中的某一个的全部元素，就算胜利.已知A_1、A_2、…、A_t都是n元集，证明

(1) 在$t<2^{n-1}$时，乙一定能使甲无法取胜.

(2) 在$t\geqslant 2^{n-1}$时，乙不一定能阻止甲取胜.

先解决(2)，因为它比较容易.我们构造一个例子，说明在这种情况里，无论乙怎样阻挠，甲总能取得胜利.

为此，考虑一棵树. 它从根$V^{(1)}$生出两个枝$V^{(1)}V_1^{(2)}$，$V^{(1)}V_2^{(2)}$(参见图 4.3).每个枝上再生两个枝，…，最后得到$t=2^{n-1}$个端点$V_1^{(n)}$，$V_2^{(n)}$，…，$V_t^{(n)}$.

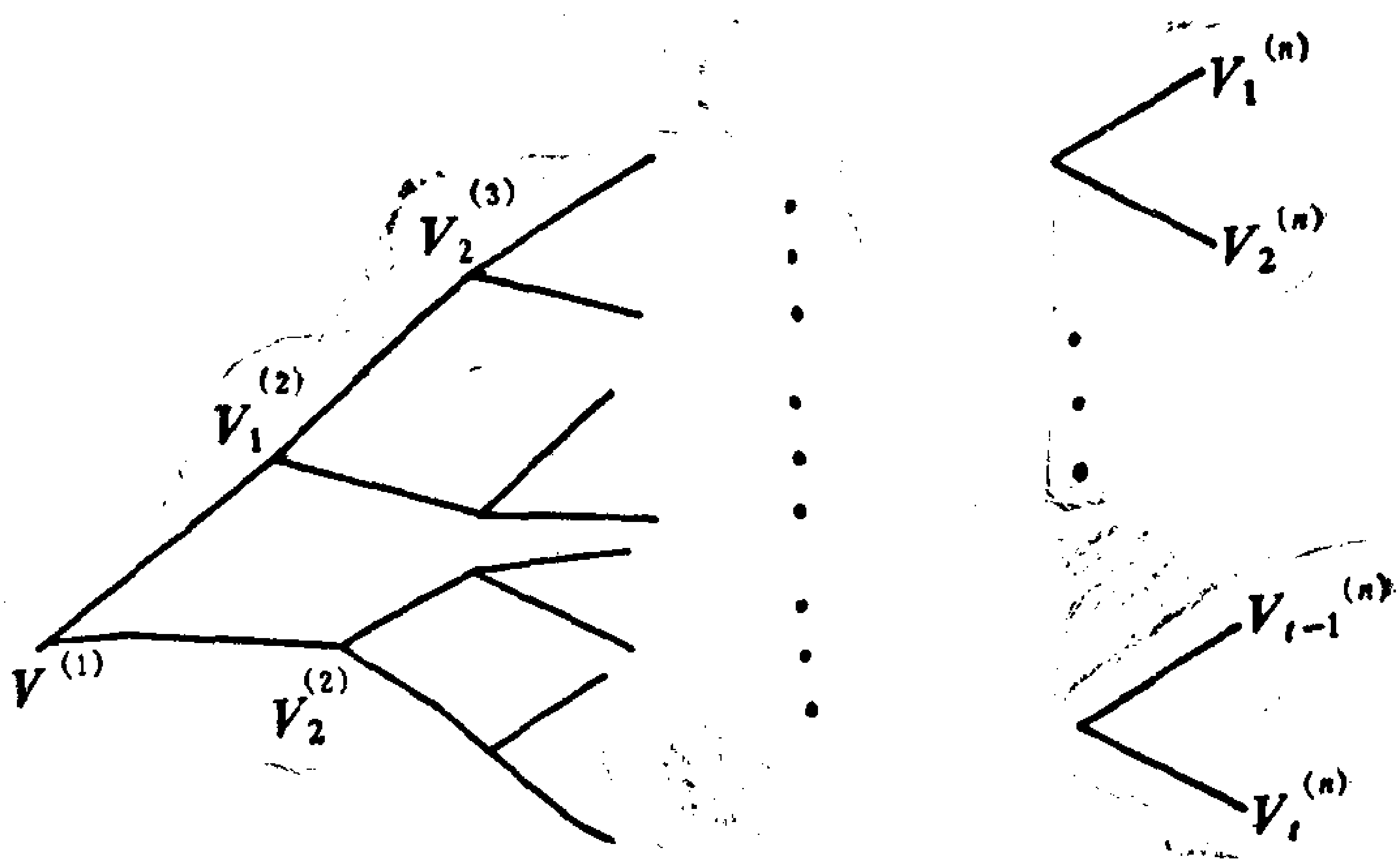


图 4.3

从根$V^{(1)}$到每个端点$V_i^{(n)}$的一条路上恰好有n个点，它们组成集合A_i，这样共有t个集合A_1、A_2、…、A_t.

甲先取根$V^{(1)}$，取走后，这树分成两棵不相连通，乙只能在一棵中取一个点，甲再在另一棵里取“根”，比如说乙在有$V_2^{(2)}$的那棵树里取点，甲就取$V_1^{(2)}$(否则就取$V_2^{(2)}$).如此继续下去，每次将一棵大树分为两棵小树，而甲总能在

乙未取的那棵小树里取根(爱用归纳法的读者也可以采用归纳法). 最后甲总能取到t个端点$V_1^{(n)}$、$V_2^{(n)}$、…、$V_t^{(n)}$中的某一个,即甲可以取完A_1、A_2、…、A_t中某一个的全部元素,赢得胜利.

现在考虑(1).开始有t个集合A_1、A_2、…、A_t.取走$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t$中一个元素后,$A_1$、$A_2$、…、$A_t$变为$t$个集合$A_1'$、$A_2'$、…、$A_t'$(其中可能有与原来相同的集合),乙再取走一个元素后,变为t个集合$A_1^{(2)}$、$A_2^{(2)}$、…、$A_n^{(2)}$,如此继续下去,每取一次后就有t个集合,其中可能有空集(如果甲或乙将某个A_i的元素全取完的话).

将这些集合赋值,也就是对于每个集合,用一个数与它对应(这是我们多次采用过的一种方法). 对应的方法是:如果集合A有r个元素,就用2^{-r}与A对应,这数2^{-r}称为集合A的值,并记为$V(A)$. 即

$V(A)=2^{-|A|}$ (记号$|A|$表示A的元素个数).

消化一下$V(A)$的含义.对于空集,它的值最大,恰好等于$1(2^0=1)$.

如果从集合A中取走一个元素,这时$V(A)$变为$2V(A)$,即扩大2倍.

在甲取走K个元素后,得到t个集合$A_1^{(2K-1)}$、$A_2^{(2K-1)}$、…、$A_t^{(2K-1)}$. 直到这时,乙可能还未在A_1、A_2、…、A_t中的某个或某几个中取元素,我们把$A_1^{(2K-1)}$、$A_2^{(2K-1)}$、…、$A_t^{(2K-1)}$中相应的集合称为(乙的)第K次“禁地”(例如乙尚未在A_1中取过元素,$A_1^{(2K-1)}$就是乙的第K次禁地).这些禁地的值的和记为S_K.如果能够证明对每个K,恒有

$$S_K<1 \qquad (1)$$

那么甲就不可能取完某个A_i中的全部元素,产生一个值

为 1 的禁地(提醒一下：空集就是值为 1 的集)．

在 $K=1$时，(1)式是成立的．因为，设甲取走的元素x含在A_1、A_2、…、A_t的j个之中，不含在其余的$t-j$个中，则A_1'、A_2'、…、A_t'中有j个的值为2^{-n+1}，其余的为2^{-n}，并且这些集都是乙的第一次禁地(乙尚未取)，所以

$$\begin{aligned}S_1&=j\times 2^{-n+1}+(t-j)\times 2^{-n}\\&\leqslant 2^{-n+1}\times(j+(t-j))\\&=2^{-n+1}\times t\\&<1.\end{aligned}$$

最后一步利用了已知条件$t<2^{n-1}$．

假定已有$S_{K-1}<1$．乙应当如何选取元素，使得(1)式成立呢？他的策略当然是使S_K的值尽可能地小，或者说，他应当取走一个值尽可能大的元素．

为此，我们需要对元素赋值，也就是对于

$$A_1^{(2K-3)}\cup A_2^{(2K-3)}\cup\cdots\cup A_t^{(2K-3)}$$

中的每一个元素x，用一个数与它对应，这数称为x的值，用$V(x)$表示，它由下式给出

$$V(x)=\sum_{x\in A_i^{(2K-3)}}V(A_i^{(2K-3)})$$

即x的值等于$A_1^{(2K-3)}$、$A_2^{(2K-3)}$、…、$A_t^{(2K-3)}$中含x的那些集合的值的总和．

乙在第$K-1$次禁地中取一个值最大的元素x(这里最大又发挥了作用)，无论甲怎样选元素y，(1)一定成立．事实上，在乙取走x后，$A_1^{(2K-3)}$、$A_2^{(2K-3)}$、…、$A_t^{(2K-3)}$中含x的已经不是(第K次)禁地，它们的值和为$V(x)$，所以禁地的值S_{K-1}减少为

$$S_{K-1}-V(x).$$

在甲取走y后，禁地中含y的集的值扩大2倍，也就是增加了一倍，而这些集的值的和为$V(y)$，所以

$$S_K = S_{K-1} - V(x) + V(y)$$

但$V(x) \geqslant V(y)$，所以

$$S_K \leqslant S_{K-1} < 1$$

于是，在乙采取正确策略时，(1)永远成立，也就是说甲无法取得胜利.

本部分介绍了许多问题(有些相当困难)以说明组合数学的特点：灵活多样.我们借用当代著名数学家、教育家波利亚(G. Polya)的一段非常精采的话来作为小结：

"解题是一种实践性的技能，就象游泳、滑冰或弹钢琴一样，只能通过模仿与实践来学到它.……你想学会游泳，你就必须下水.你想成为解题能手，你就必须去解题."