目　次

1 几何问题

几何中，常常采用"算两次"的方法.

例 1 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切，它们的半径分别为 r_1，r_2. 外公切线 EF 切 $\odot O_1$ 于 E、切 $\odot O_2$ 于 F. $\odot O$ 与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 及 EF 相切(如图 1). 求证 $\odot O$ 的半径 r 满足

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

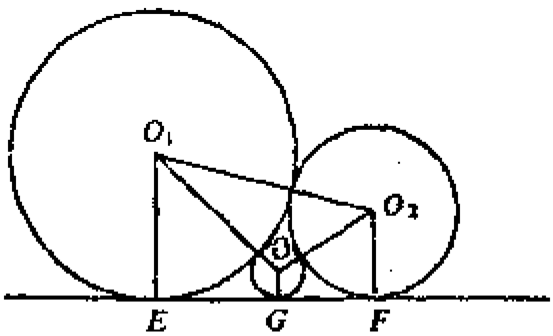

图 1

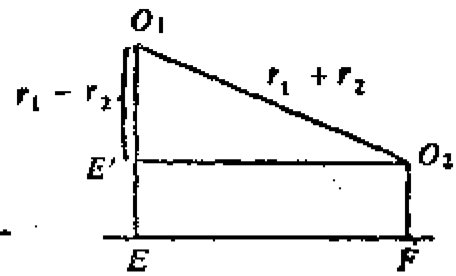

图 2

解 设 $\odot O$ 与 EF 相切于 G. 由已知

$$O_1O_2=r_1+r_2,\ O_1O=r_1+r,\ OO_2=r+r_2.$$

在图 2 中，过 O_2 作直线 $O_2E'//FE$，交 O_1E 于 E'. 易知 $O_1E'=r_1-r_2$.

$$EF=O_2E'=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}. \tag{2}$$

EF 还有另一种算法，即

$$EF=EG+GF. \tag{3}$$

而与(2)类似，我们有

$$EG=2\sqrt{r_1 r},\ GF=2\sqrt{r r_2}. \tag{4}$$

将(2)、(4)代入(3)得

$$2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1 r}+2\sqrt{r r_2}. \tag{5}$$

(5)式两边同除以 $2\sqrt{r_1r_2r}$ 便得到(1).

极为普通的(3)式却是本题的关键(熟悉解析几何的读者不难看出(3)实际上就是 $\triangle O_1OO_2$ 的三条边在 EF 上的射影之和为"0"). 下面的例2与此类似.

例 2 直线 l 过 $\triangle ABC$ 的重心 G, 与边 AB, AC 分别相交于B_1, C_1. $\frac{AB_1}{AB}=\lambda$, $\frac{AC_1}{AC}=\mu$. 求证

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3. \tag{6}$$

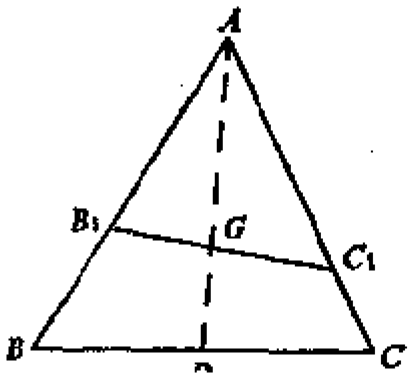

图 3

解 作 BC 的中线AD(图3), G 当然在 AD 上.

考虑面积. 设 $\triangle ABC$ 的面积为1, $\triangle AB_1C_1$ 的面积为 S. 我们用两种方法来计算 S.

一方面,

$$S=\frac{S}{1}=\frac{AB_1\times AC_1}{AB\times AC}=\lambda\mu. \tag{7}$$

另一方面,

$$S=S_{\triangle AB_1G}+S_{\triangle AGC_1}. \tag{8}$$

而与(7)类似有

$$S_{\triangle AB_1G}=\frac{2\lambda}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{\lambda}{3},\quad S_{\triangle AGC_1}=\frac{\mu}{3} \tag{9}$$

代入(8)得

$$S=\frac{\lambda+\mu}{3} \tag{10}$$

综合以上两个方面，产生

$$\lambda\mu=\frac{\lambda+\mu}{3} \tag{11}$$

两边同乘$\frac{3}{\lambda\mu}$即得(1).

下面的例3是第6届巴尔干数学竞赛（1989年）的试题（由于参加国中罗马尼亚，保加利亚与南斯拉夫都是数学竞赛的强国，所以试题难度甚大，但例3是其中最容易的一道）.

例 3 直线 l 分别交 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 于 B_1, C_1, 并且 $\triangle ABC$ 的重心 G 与 A 在 l 的同侧. 证明

$$S_{BB_1GC_1}+S_{CC_1GB_1}\geqslant\frac{4}{9}S_{ABC} \tag{12}$$

解法一 过 G 作 l 的平行线 l', l', 分别交 AB, AC 于 B_1', C_1'（图4）.

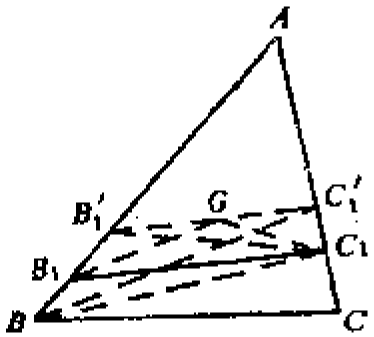

图 4

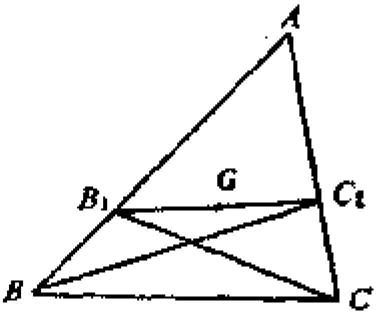

图 5

由于 C_1' 到 AB 的距离小于 C_1 到 AB 的距离，所以

$$S_{BB_1GC_1}=S_{BB_1C_1}+S_{B_1GC_1}=S_{BB_1C_1}+S_{B_1B_1'C_1}$$
$$=S_{BC_1B_1'}>S_{BC_1'B_1'}.$$

同样

$$S_{CC_1GB_1}>S_{CC_1'B_1'}.$$

因此要证明(12)，只需证明

$$S_{BC_1'B_1'}+S_{CC_1'B_1'}\geqslant\frac{4}{9}S_{ABC}.$$

换句话说，我们可以认为 l 过重心 G（否则用 l' 代替 l），在这一条件下来证明(12).

在图 5 中，设 $\frac{AB_1}{AB}=\lambda$，$\frac{AC_1}{AC}=\mu$. 则

$$S_{BC_1B_1}=(1-\lambda)S_{BC_1A}=(1-\lambda)\mu S_{ABC}.$$

同样

$$S_{CB_1C_1}=(1-\mu)\lambda S_{ABC}.$$

问题化为证明不等式

$$(1-\lambda)\mu+(1-\mu)\lambda\geqslant\frac{4}{9}. \tag{13}$$

由例 2，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$. 从而 $\lambda+\mu=3\lambda\mu$,

$$(1-\lambda)\mu+(1-\mu)\lambda=\lambda+\mu-2\lambda\mu=\frac{1}{3}(\lambda+\mu)$$

$$=\frac{1}{9}(\lambda+\mu)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\geqslant\frac{4}{9}\sqrt{\lambda\mu}\cdot\sqrt{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu}}=\frac{4}{9}.$$

于是(13)、(12)成立.

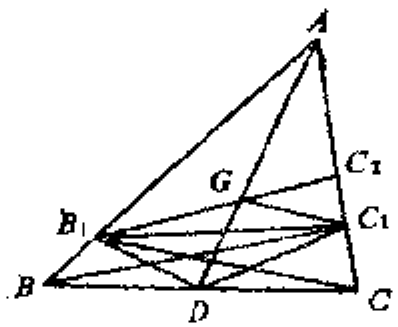

图 6

解法二 不妨设 $S_{ABC}=1$. 取 BC 的中点 D，连 DB_1，DC_1，AD（图 6），则 G 在 AD 上，

$$S_{BB_1GC_1}+S_{CC_1GB_1}$$
$$=2S_{GB_1C_1}+S_{BB_1C_1}+S_{CB_1C_1}$$
$$=2S_{GB_1C_1}+2S_{BCB_1C_1}-S_{BCB_1}-S_{BCC_1}$$

$$=2(S_{GB_1C_1}+S_{BCB_1C_1}-S_{DBB_1}-S_{DCC_1})$$
$$=2(S_{GB_1C_1}+S_{DC_1B_1})=2S_{DC_1GB_1}$$
$$=2(S_{GB_1D}+S_{GC_1D})=S_{AB_1G}+S_{AGC_1}$$
$$=\frac{\lambda}{3}+\frac{\mu}{3},$$

这里 $\lambda=\frac{AB_1}{AB}$, $\mu=\frac{AC_1}{AC}$.

设 B_1G 的延长线交 AC 于 C_2, $\frac{AC_2}{AC}=\mu'$, 则由例 2,

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu'}=3,$$

而 $\mu\geqslant\mu'$, 所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\leqslant\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu'}=3$,

$$\frac{\lambda}{3}+\frac{\mu}{3}\geqslant\frac{1}{9}(\lambda+\mu)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\geqslant\frac{4}{9}.$$

两种解法都多次将同一块面积用不同的形式表出.

例 4 $\triangle XYZ$ 是 $\triangle ABC$ 的内接三角形: X, Y, Z 分别在边 BC, CA, AB 上. 如果 $\angle ZXY$、$\angle XYZ$、$\angle YZX$ 分别与 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 相等, 试确定 X, Y, Z 的位置, 使 $\triangle XYZ$ 的面积为最小.

解 当 X, Y, Z 为三边中点时, $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 的角对应相等. 我们猜测这时 $\triangle XYZ$ 的面积达到最小值.

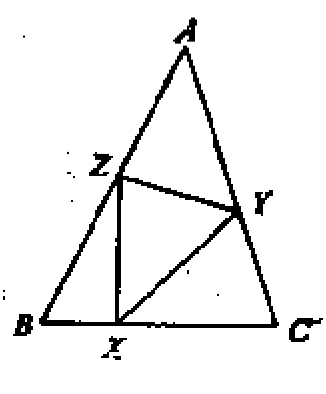

图 7

证明的第一个关键是注意$\triangle XYZ$, $\triangle AYZ$, $\triangle BXZ$, $\triangle CXY$ 的外接圆相等. 这可以由 A, X 对线段 YZ 所张的角相等(或正弦定理)立即得出.

第二个关键是注意 BC 有两种算

法：设$\triangle ABC$的外接圆半径为1，$\triangle XYZ$的外接圆半径为r，则一方面，在$\triangle ABC$中，由正弦定理

$$BC=2\sin A \tag{14}$$

另一方面，与(3)类似，

$$BC=BX+XC, \tag{15}$$

容易知道

$$\angle BZX+\angle XYC=\angle BAC+\angle YXZ=2\angle A$$

(例如连AX，利用$\angle BZX=\angle ZAX+\angle ZXA$，$\angle XYC=\angle XAY+\angle AXY$即得)．我们设

$$\angle BZX=\angle A-\alpha, \qquad \angle XYC=\angle A+\alpha,$$

则与(14)类似，

$$BX=2Y\sin(A-\alpha), \qquad XC=2r\sin(A+\alpha) \tag{16}$$

将(14)、(16)代入(15)得

$$2\sin A=2r\sin(A-\alpha)+2r\sin(A+\alpha)=4r\sin A\cos\alpha,$$

从而

$$r=\frac{1}{2\cos\alpha}\geqslant\frac{1}{2}.$$

最小值$r=\dfrac{1}{2}$在$\alpha=0$时达到．易知这一条件等价于X，Y，Z为三边的中点．

下面举几个立体几何中的例子．

例5 圆锥的母线为l，侧面的展开图是一个圆心角为α的扇形．求圆锥的底面半径r．

解 这是一个很容易的问题．一方面，展开图中扇形的弧长为$l\alpha$．另一方面，这弧长就是圆锥底面的周长$2\pi r$．因此，

$$l\alpha=2\pi r,$$

$$r=\frac{\alpha l}{2\pi}.$$

例 6 四面体$ABCD$ 的每一组对棱的和都不超过 1．证明它的四个面中，至少有一个的内切圆半径不超过$\frac{\sqrt{3}}{12}$.

解 首先证明对于三角形，恒有

$$r \leqslant \frac{s}{3\sqrt{3}}, \tag{17}$$

这里 r 为内切圆半径，s 为半周长．为了证明（17），考虑面积的两种表示方法得

$$rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

这里 a，b，c 为边长．于是

$$\begin{aligned} r&=\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &\leqslant\frac{1}{\sqrt{s}}\sqrt{\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3}=\frac{s}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

设四面体 $ABCD$ 的四个面的内切圆半径分别为 r_1，r_2，r_3，r_4，半周长分别为 s_1，s_2，s_3，s_4．则

$$\begin{aligned} 2(s_1+s_2+s_3+s_4)&=2(AB+BC+CA+AD+BD+CD)\\ &\leqslant 2\times 3, \end{aligned}$$

即

$$s_1+s_2+s_3+s_4\leqslant 3. \tag{18}$$

由(17)、(18)，

$$r_1+r_2+r_3+r_4\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}(s_1+s_2+s_3+s_4)=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

从而 r_1，r_2，r_3，r_4 中至少有一个不超过

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

最后一步利用了计数论证(第 6 节).

下例需要利用凸多面体的欧拉公式

$$v-e+f=2, \tag{19}$$

其中 v, e, f 分别为多面体的顶点、棱、面的个数.

例 7 设凸多面体的顶点 A_i $(1\leqslant i\leqslant v)$ 处的面角之和为 α_i, 则 $2\pi-\alpha_i$ 称为 A_i 处的角亏. 证明凸多面体各个顶点处的角亏的总和为 4π.

解 熟知在平面几何中凸多边形的外角和为 4π. 因此, 要证明的结论可以看成是外角和定理在三维空间中的推广, 它是笛卡尔首先发现的.

和 $\Sigma\alpha_i$ 可以用另一种方法计算: 先求出各个面的面角之和, 然后再求这些和的和.

设多面体有 f_3 个面为三角形, f_4 个为四边形, …. 则由于凸 K 边形的内角和为 $(K-2)\pi$, 我们有

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha_i&=\Sigma(K-2)\pi f_K\\&=\pi\Sigma Kf_K-2\pi f\ ,\end{aligned}\tag{20}$$

其中 $f=\Sigma f_K$ 是多面体的面数.

注意 ΣKf_K 是各个面的边数的总和, 也就是多面体棱数 e 的 2 倍(每条棱属于两个面), 所以角亏的和

$$\begin{aligned}\Sigma(2\pi-\alpha_i)&=2\pi v-\Sigma\alpha_i\\&=2\pi v-\pi\Sigma Kf_K-2\pi f\\&=2\pi(v-e+f)=4\pi.\end{aligned}$$

2 图的启发

图形可以给我们很多启发．本节举一些与自然数有关的例子．

一个图，可以横看，可以竖看．各种不同的看法结合起来便可导出有用的公式或所需的证明．

例 1

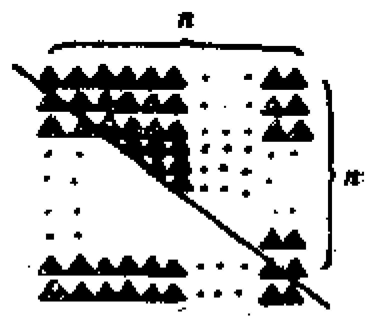

图 8

图 8 中共有 $n(n+1)$ 个▲，对角线上方占总数的一半．于是

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

这就是传说中高斯童年时导出的公式．它是算两次（用两种方法计算右上方的▲的个数）的产物．

我们称 $1+2+\cdots+n$ 为三角（形）数，并记为 t_n．（1）即

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2}. \quad (2)$$

例 2 在上图中去掉最后一行，所得的图表明

$$n^2=t_n+t_{n-1}. \quad (3)$$

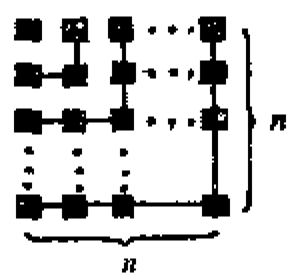

图 9

例 3 图 9 中正方形的个数为 n^2．如果先计算每个曲尺形 ⅃ 上的正方形的个数，然后再求总数，两种算法导出公式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \quad (4)$$

例 4 正 k 边形点阵中点的个数称

为 k 角数．4 角数就是平方数．记第 n 个 6 角数为 h_n，则图10表明

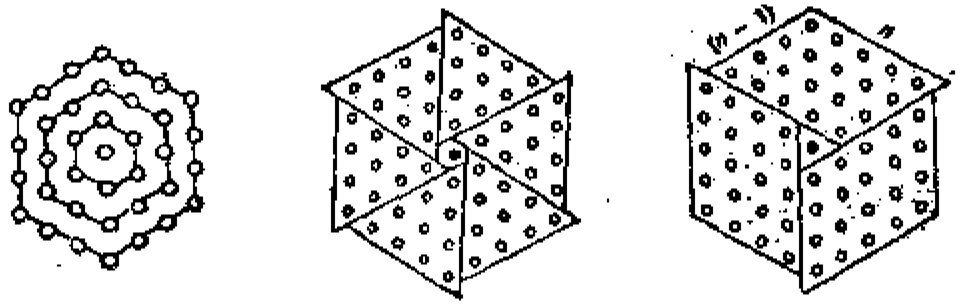

图 10

$$h_n=6t_{n-1}+1=3n(n-1)+1. \tag{5}$$

例 5 证明

$$h_1+h_2+\cdots+h_n=n^3. \tag{6}$$

解 将每边由 n 个点组成的立方体点阵"剥去"下、左、后三个"表面"，得到一个每边由 $n-1$ 个点组成的立方体点阵．这三个面共有点 $3n(n-1)+1$（见图11自明）．由(5)，这就是 h_n．由此易知(6)式成立．

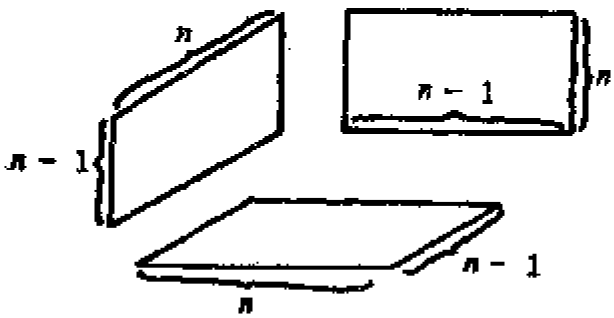

图 11

例 5 不借助图形也不难证明（只需利用(5)及 $n^3-(n-1)^3=3n(n-1)+1$）．但下面的一些问题则以利用图形为好．

例 6 d_K 表示某城市中住人不少于 K 名的房子数（显然 $d_1\geqslant d_2\geqslant d_3\geqslant\cdots$），$c_K$ 表示该市中住人数为第 K 位（依从大到小排列）的那种房子中的人数（显然 $c_1\geqslant c_2\geqslant c_3\geqslant\cdots$）．证明

$$(a)\quad c_1+c_2+c_3+\cdots=d_1+d_2+d_3+\cdots,$$

(b) $c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots=d_1+3d_2+5d_3+\cdots$,

(c) $d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots=c_1+3c_2+5c_3+\cdots$.

解 考虑下图

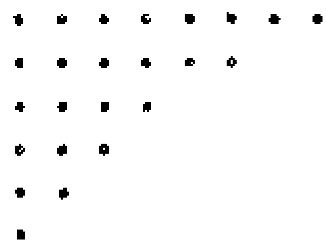

图 12

其中第一列有 c_1 个点，第二列有 c_2 个点，…．于是总点数为

$$c_1+c_2+c_3+\cdots.$$

另一方面，第一行中的点数即 d_1(点数不少于 1 的列的个数)，第二行中的点数即 d_2，…．因此，总点数为

$$d_1+d_2+d_3+\cdots.$$

两种方法计算的结果应当相同，所以 (a) 成立．

如果把图中的点“加权”，然后再算总和便可以产生(b)．这里所加的权就是第一行的每个点作为一个点（乘以“权”1），第二行的每个点作为三个点(乘以“权”3)，…，第 K 行的每个点作为 $2K-1$ 个点，…．

一方面，先按行来算再求和得到加权后的总和为

$$d_1+3d_2+5d_3+\cdots.$$

另一方面，第j列加权后的和为

$$1+3+5+\cdots+(2c_j-1)=c_j^2,$$

因而总和为

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots,$$

即 (b) 成立．

(c) 的证明与 (b) 类似．

整数的分拆中有很多问题与图形有关．

设 n 为正整数，将 n 分成若干个正整数的和的一种方法称为 n 的一种分拆．例如

$$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1$$

$=2+1+1+1=1+1+1+1+1,$

即 5 有 7 种不同的分拆（仅仅加数顺序不同的算作同一种分拆），其中包括仅由 5 组成的“分拆”.

用 $p(n)$ 表示 n 的分拆数. 例如 $p(5)=7$.

有时对分拆添加一些要求. 如要求分成的每一份（每一个加数）都不超过某个正整数 m 或每一份都必须是奇数等等.

例 7 将 n 分为每份不超过 m 的分拆数等于将 n 分为不超过 m 份(即加数的个数 $\leqslant m$) 的分拆数.

解 分拆

$$n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_K,\quad a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_K \tag{7}$$

可以用图表示，图的第一行有 a_1 个点，第二行 a_2 个点，…. 每行的第一个点对齐，以后按同样距离排列. 例如

$$18=7+4+3+3+1 \tag{8}$$

可以表示成图13.

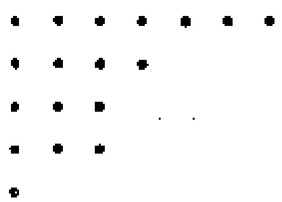

图 13

上面的图也可以逐列读出，产生 n 的另一个分拆，称为原先那个分拆的共轭分拆. 例如从上图可以得到

$$18=5+4+4+2+1+1+1. \tag{9}$$

它就是(8)的共轭分拆(例 6(a)的两边正是共轭的分拆).

显然，n 的每份不超过 m 的分拆，有一个份数不超过 m 的共轭分拆. 两者是一一对应的，因此个数相同.

同时，我们也证明了：

n 的份数为 m 的分拆数等于最大加数为 m 的分拆数.

更巧妙地运用上面的技巧，可以得到

例 8 设 a, b, c 都是大于 1 的自然数，$a>b$, $a>c$. 则 $a-c$ 的、份数为 $b-1$ 的分拆数等于 $a-b$ 的、份数为 $c-1$

的分拆数.

解 我们可以按照图14将每个$a-c$的、份数为$b-1$的分拆变为$a-b$的、份数为$c-1$的分拆.

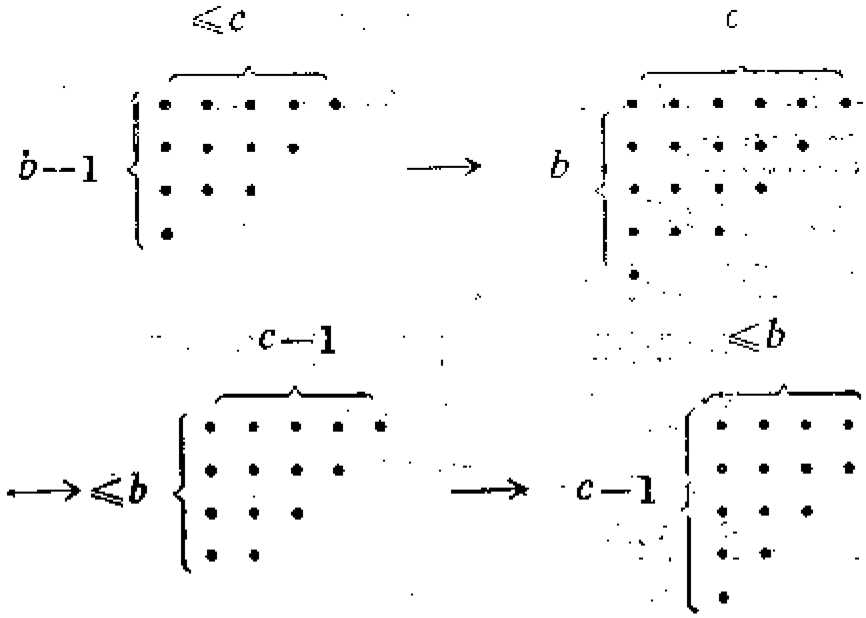

图 14

第一步是添上一行(最上面一行)由c个点组成. 第二步是删去最左面的一列. 第三步是取共轭,也就是把点阵转置,行变为列,列变为行.

上面的过程是可逆的,因而建立了两种分拆之间的一一对应.

如果一个分拆的图是(关于对角线)对称的,那么这个分拆与自身共轭. 例如分拆

$$15=6+3+3+1+1+1$$

为图15,所以这个分拆是自共轭的.

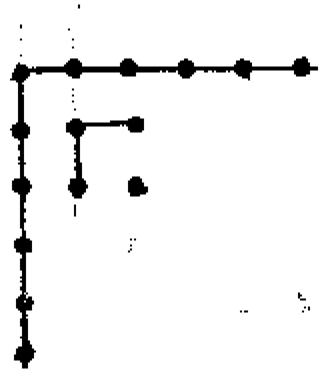

图 15

例 9 将n分为互不相同的奇数的和,这种分拆的个数恰好是n的自共轭的分拆数.

解 上面的图由几个曲尺形「．组成最外面的那一个由11个点组成，第二个由 3 个点组成，第三个由一个点组成．因而对应于

$$15=11+3+1.$$

这是15的由不相同的奇数组成的分拆．我们把一般情形的论证细节留给读者完成．

例 10 将 n 分为奇数的和，与将 n 分为互不相同的数的和，这两种分拆的个数相等．

解 $45=1+1+3+5+5+5+5+7+13$

是奇数的和．在用图来表示时，我们稍为变通一下．依照从小到大的顺序，第一行、第二行各放 1 个点，第三、四、五、六、七、八、九行分别放 3 、 5 、 5 、 5 、 5 、 7 、13 个点．并且，将各行的中间对齐（由于每行奇数个点，恰有一个点在中间）．

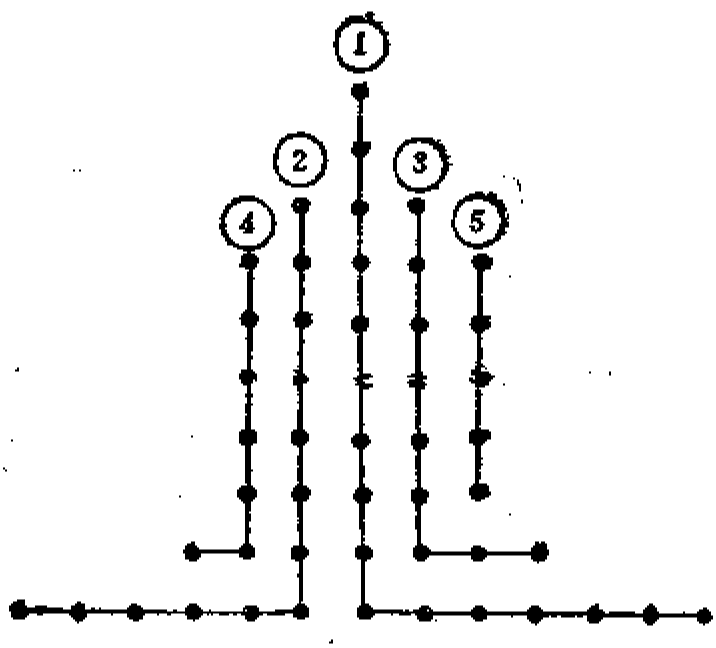

图 16

现在采用另一种方式将点分组．如图16，每一组是一个曲尺形（可能退化为一列或一行），即图中的①、②、③、④、⑤．容易看出每个曲尺形至少比它后面的曲尺形多一个点．因此，我们得到一个加数互不相同的分拆．

注意图中的曲尺形有以下特点：

(a)　曲尺(1)与(2),(3)与(4),…的水平部分在同一高度，并且前者的水平部分比后者的水平部分（(1)比(2)，(3)比(4),…)多1个点.

(b)　②与③，④与⑤,…的最高点在同一水平.

(c)　最后一个曲尺形的号码如果是奇数，例如⑤，则由一列组成；如果是偶数，则由一行组成．包括退化为一个点的情况.

根据 (a)、(b)、(c) 这三点，我们可以将1个由不同的数组成的分拆变为全由奇数组成的分拆．例如

$$45=13+10+8+7+5+2,$$

先排⑥：由2个点组成的行，再排⑤：水平部分含3个点并且与⑥在同一高度，这样倒推上去便得图17.

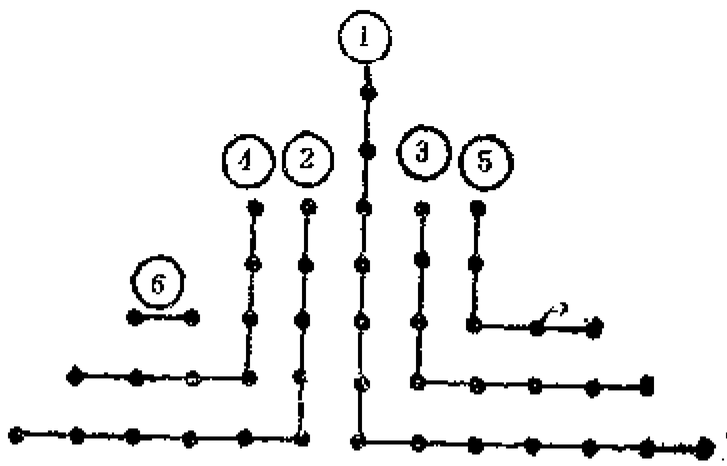

图　17

我们建立了两种分拆之间的一一对应，因而两种分拆的个数相等.

n的各项不等的分拆可以分为两类：第一类的项数为偶数，第二类的项数为奇数，利用图形可以证明第一类的个数与第二类的个数相等或者相差1．即

(第一类分拆数)－(第二类分拆数)

$$=\begin{cases}(-1)^m, & 若\ n=\dfrac{m(3m\pm1)}{2}.\\ 0, & 其它情况.\end{cases}$$

请参看华罗庚《数论导引》第八章定理2.

分拆是数论中一个重要的课题，有许多深刻的结果与问题，需要利用高深的工具（例如椭圆模函数的理论）.

3 格点计算

坐标为整数的点称为格点（整点）.

计算格点时，常常利用高斯函数 $[x]$. 它表示实数 x 的整数部分，也就是不超过 x 的最大整数. 在 $x \geqslant 0$ 时，它表示不超过 x 的自然数的个数，即

$$[x]=\sum_{n \leqslant x} 1,$$

其中 $n \in \mathbf{N}$.

例如 $[\pi]=3$, $[\sqrt{2}]=1$, $[-\lg 102]=-3$.

近来，有许多作者喜欢将 $[x]$ 写成 $\lfloor x \rfloor$，并称之为地板函数. 它的孪生兄弟 $\lceil x \rceil$，即不小于 x 的最小整数，称为天花板函数.

显然，在 x 为整数时，$\lfloor x \rfloor=\lceil x \rceil=x$.

例 1 设 p, q 为互质的自然数，证明

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}. \quad (1)$$

解 考虑坐标平面内的矩形 $OABC$（图18），这里 O 为原点，A, B, C 的坐标分别为 $(q, 0)$, (q, p), $(0, p)$. 连 OB. 由于 p, q 互质，所以对于区间 $(0, q)$ 内的整数 x, $y=\frac{p}{q}x$ 决不是整数. 也就是说，线段 OB 的内部没有格点.

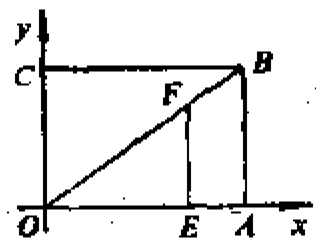

图 18

我们用两种方法计算 $\triangle OAB$ 内部（不包括边界）的格点

个数 s.

一方面，过 x 轴上的整点 $E(k, 0)$ $(0<k<q)$ 作 x 轴的垂线与 OB 相交于 F. F 的纵坐标为 $y=\frac{kp}{q}$. 所以在线段 EF 内部（不包括端点）有 $\left[\frac{kp}{q}\right]$ 个格点. 这样

$$s=\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]. \tag{2}$$

另一方面，矩形 $OABC$ 内部(不包括边界)共有 $(p-1)\cdot(q-1)$ 个格点. 线段 OB 内部没有格点，$\triangle OAB$ 与 $\triangle BCO$ 内部的格点关于 OB 的中点对称（即格点 (x, y) 与格点 $(q-x, p-y)$ 一一对应），所以各占总数的一半，即

$$s=\frac{(p-1)(q-1)}{2}. \tag{3}$$

综合(2)、(3)，即得(1).

例 2 设 p, q 为互质的自然数，证明

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}(q-1)\right]}\left[\frac{kp}{q}\right]+\sum_{l=1}^{\left[\frac{1}{2}(p-1)\right]}\left[\frac{lq}{p}\right]=\left[\frac{p-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{q-1}{2}\right]. \tag{4}$$

解 与例 1 类似，我们考虑矩形 $OABC$ 内部的格点个数 s，这里 O, A, B, C 的坐标分别为 $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}q, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}p\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}p\right)$. 即比图18缩小了一半.

一方面，$\triangle OAB$ 内部的格点数为 $\sum_{k=1}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]}\left[\frac{kp}{q}\right]$，$\triangle OBC$ 内部的格点数为 $\sum_{l=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left[\frac{lq}{p}\right]$，$OB$ 内部无格点，所以

$$s=\sum_{k=1}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]}\left[\frac{kp}{q}\right]+\sum_{l=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left[\frac{lq}{p}\right] \tag{5}$$

（与例 1 不同，两个三角形内部的格点未必对称，所以我们要把两个和都写出来）.

另一方面，显然有

$$s=\left[\frac{p-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{q-1}{2}\right]. \tag{6}$$

综合(5)、(6)即得(4).

高斯利用(4)证明了重要的二次互反律(他称之为"数论的酵母").

例 1、例 2 都是例 3 的特殊情况.

例 3 设 $y=f(x)$ 为严格的增函数，它的反函数为 $x=\phi(y)$，$f(0)=0$，$f(a)=b, a, b$ 都是正数．曲线 $y=f(x)$ 的从 $O(0,0)$ 到 $B(a,b)$ 的这段弧上(包括端点 B，不包括 O) 有 L 个格点．则有

$$\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{h=1}^{[b]}[\phi(h)]-L=[a]\cdot[b]. \tag{7}$$

解 考虑矩形 $OABC$ 内的格点个数 s（包括除去 C 点的线段 CB 与除去 A 点的线段 AB，不包括线段 OA，OC）. 这里 A，C 坐标分别为 $A(a,0)$，$C(0,b)$.

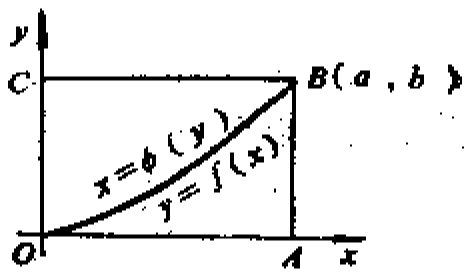

图 19

一方面，曲边三角形 OAB 内，每条直线 $x=k$ (k 为不超过 a 的自然数)上有 $[f(k)]$ 个格点(包括弧 OB 上可能有的一个格点，不包括格点 $(k,0)$)．曲边三角形 OCB 内，每条直线 $y=h$ (h 为不超过 b 的自然数)上有 $[\phi(h)]$ 个格点.

OB 上的 L 个点被重复计算了一次. 所以

$$s=\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{h=1}^{[b]}[f(h)]-L. \qquad (8)$$

另一方面，显然有

$$s=[a]\cdot[b]. \qquad (9)$$

综合(8)、(9)，得到(7).

例 4 设 n 为自然数，证明

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n^2}]=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5) \qquad (10)$$

解 取 $f(x)=\sqrt{x}$，$a=n^2$，$b=n$. 则 $L=n$. 由例 3 (7)得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}]&=n^3+n-\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=n^3+n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5).\end{aligned}$$

例 5 证明对任一大于 1 的正整数 n,

$$\begin{aligned}&[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]\\&=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n]. \qquad (11)\end{aligned}$$

解 考虑曲线 $y^x=n$ 与直线 $x=2$，$y=2$ 所成的曲边三角形的格点个数 s（包括曲边三角形的边界）.

一方面，每条竖线 $x=k$（k 为区间 $[2, n]$ 内的整数）与曲线 $y^x=n$ 相交于点 $(k, \sqrt[k]{n})$. 所以这条线对 s 的"贡献"为 $[\sqrt[k]{n}]-1$（即这条线上有 $[\sqrt[k]{n}]-1$ 个格点属于所说的曲边三角形）. 从而

$$s=\sum_{k=2}^{n}([\sqrt[k]{n}]-1)=\sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}]-(n-1) \quad (12)$$

另一方面，每条横线 $y=h$（h 为区间[2, n]内的整数）与曲线 $y^x=n$ 相交于点 $(\log_h n, h)$. 所以这条线对 s 的贡献为 $[\log_h n]-1$. 从而

$$s=\sum_{h=2}^{n}([\log_h n]-1)=\sum_{h=2}^{n}[\log_h n]-(n-1). \quad (13)$$

综合(12)、(13)即得(11).

注 容易看出在曲边三角形内，点 (x, y) 的坐标满足 $x\leqslant\log_2 n<n$, $y\leqslant\sqrt{n}<n$. 所以(12)中的求和实际上只到 $[\log_2 n]$ 就应当结束. 但为了方便起见，我们让和号延伸到 n，增添一些值为 0 的项 $[\sqrt[k]{n}]-1$. (13)式也是如此.

例 6 n 为自然数. 证明

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)=\sum_{k=1}^{n}k\left[\frac{n}{k}\right]. \quad (14)$$

解 考虑曲线 $y=\frac{n}{x}$ 与坐标轴所围成的区域内的格点.

设 k 为自然数，过点 $E(k, 0)$ 的直线 $x=k$ 交 $y=\frac{n}{x}$ 于 F，则 EF 上有 $\left[\frac{n}{k}\right]$ 个格点(不包括 E. 在 F 为格点时包括 F). 这些格点的横坐标都是 k，它们的和为 $k\left[\frac{n}{k}\right]$. 从而所说区域内的格点的横坐标的和 s 为(14)的右边(当 $k>n$ 时，$\left[\frac{n}{k}\right]=0$，所以只需求 n 项的和).

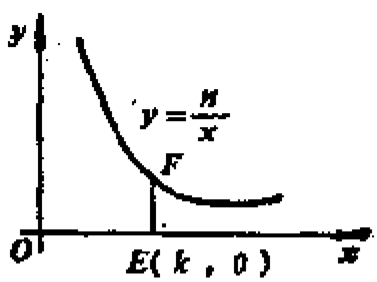

图 20

另一方面，在每一条平行于 x 轴的直线 $y=h$（h 为自然数）上，有 $\left[\frac{n}{h}\right]$ 个属于所述区域的格点，它们的横坐标分别为 $1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{h}\right]$，和为

$$1+2+\cdots+\left[\frac{n}{h}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{h}\right]\left(\left[\frac{n}{h}\right]+1\right).$$

因此 s 等于(14)的左边.

于是(14)成立.

最后，我们介绍著名的圆内整点问题.

例 7 设 x 为正实数，在圆 $u^2+v^2=x$ 内的格点数记为 $R(x)$，则

$$\pi(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2<R(x)<\pi(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2. \quad (15)$$

解 以圆内每个格点为左下方的顶点作边与坐标轴平行的单位正方形．由于这正方形的对角线为 $\sqrt{2}$，所以正方形内每一点到原点 $(0, 0)$ 的距离不大于 $\sqrt{x}+\sqrt{2}$，即所作的正方形都在圆

$$u^2+v^2=(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2 \quad (16)$$

内．因而(15)右边的不等式成立.

对于圆

$$u^2+v^2=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2 \quad (17)$$

内的每一点 C，必有一个格点 D，以 D 为左下方顶点的、边与坐标轴平行的单位正方形含有 C 点．这个正方形内的点与原点的距离不大于

$$\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{x},$$

所以这正方形在圆 $u^2+v^2=x$ 内．从而以圆 $u^2+v^2=x$ 内的

格点为左下方顶点所作的在圆 $u^2+v^2=x$ 内的单位正方形覆盖圆(17). 因而(15)左边的不等式成立.

从(15)可以知道 $R(x)\sim\pi x$, 即 $R(x)$ 与 πx 大致相当. 它们的差 $R(x)-\pi x$ 与 x 的比随 x 的增大而趋于0. 事实上, 由(15)可以看出

$$R(x)=\pi x+O(x^{1/2}),\tag{18}$$

这里 $O(x^{\alpha})$ 表示与 x^{α} 的比值(当 x 趋于无穷时)是有界的. 可以证明(18)中的 $\alpha=\frac{1}{2}$ 能用更小的数代替. 我国数学家华罗庚, 陈景润先后得到 α 可取 $\frac{13}{40}+\varepsilon$, $\frac{12}{37}+\varepsilon$, 其中 ε 为任意小的正数. 猜测 α 的最佳值为 $\frac{1}{4}+\varepsilon$ (已经证明 α 必须大于1/4), 这是一个非常困难的问题.

如果用 $r(n)$ 表示

$$u^2+v^2=n\tag{19}$$

的整数解 (u, v) 的个数(例如

$r(0)=1$, 因为 $0=0^2+0^2$,

$r(4)=4$, 因为 $4=(\pm2)^2+0^2=0^2+(\pm2)^2$

$r(8)=4$, 因为 $8=(\pm2)^2+(\pm2)^2$

$r(10)=8$, 因为 $10=(\pm1)^2+(\pm3)^2$

$\qquad\qquad\qquad\quad =(\pm3)^2+(\pm1)^2$).

则

$$R(x)=\sum_{n=0}^{[x]}r(n)\tag{20}$$

数论中有一个著名的结论: 在 n 为自然数时,

$$r(n)=4(A-B),\tag{21}$$

其中 A 是 n 的 $\equiv 1 \pmod 4$ 的正因数的个数, B 是 n 的 $\equiv 3$

(mod 4) 的正因数的个数.

例 8 试导出柳维耳 (Liouville) 恒等式

$$[\sqrt{x}]+[\sqrt{x-1^2}]+[\sqrt{x-2^2}]+\cdots$$
$$=\left[\frac{x}{1}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]-\left[\frac{x}{7}\right]+\cdots \tag{22}$$

及莱布尼兹的公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots. \tag{23}$$

解 用两种方法计算圆 $u^2+v^2=x$ 的、位于第一象限的格点个数 S (包括正 v 轴上的格点，不包括 u 轴上的格点).

一方面，在每条竖线 $u=k$ (k 为 $\leqslant[\sqrt{x}]$的非负整数)上，有 $[\sqrt{x-k^2}]$ 个格点. 所以

$$s=[\sqrt{x}]+[\sqrt{x-1^2}]+[\sqrt{x-2^2}]+\cdots \tag{24}$$

(共 $[\sqrt{x}]+1$ 项)

另一方面，$s=\frac{1}{4}(R(x)-1)$. 由(20)、(21)，

$$s=\sum_{n=1}^{[x]}(A-B). \tag{25}$$

每个 n 有正因数 1，对(25)中的和贡献 1，总贡献为 $[x]$. 有因数 3 的 n，这因数对和贡献 -1，总贡献为$\left[\frac{x}{3}\right]$. 有因数 5 的 n，这因数对和贡献 $+1$，总贡献为$\left[\frac{x}{5}\right]$，…. 因此，有

$$s=\left[\frac{x}{1}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]-\left[\frac{x}{7}\right]+\cdots. \tag{26}$$

由(24)、(26)即得(22).

为了得到(23)，我们注意

$$0\leqslant\left[\frac{x}{2k+1}\right]-\left[\frac{x}{2k+3}\right]+\left[\frac{x}{2k+5}\right]-\cdots\leqslant\left[\frac{x}{2k+1}\right],$$

所以

$$s=\left[\frac{x}{1}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]+\cdots+(-1)^{k-1}\left[\frac{x}{2k-1}\right]$$
$$+(-1)^{k}\left[\frac{x}{2k+1}\right]\cdot\theta,$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$. 取 $k=[\sqrt{x}]$, 则

$$s=\frac{x}{1}-\frac{x}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot\frac{x}{2k-1}$$
$$+\sqrt{x}\cdot\theta'+(-1)^{k}\sqrt{x}\,\theta'',$$

其中 $0\leqslant\theta'\leqslant1$, $0\leqslant\theta''\leqslant1$.

由(15),

$$\frac{\pi}{4}\left((\sqrt{x}-\sqrt{2})^{2}-1\right)\leqslant s\leqslant\frac{\pi}{4}\left((\sqrt{x}+\sqrt{2})^{2}-1\right), \tag{27}$$

所以

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{s}{x}=\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{k}}{2k-1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

4 组 合 论 证

有些恒等式或不等式，可以通过组合上的考虑而获得证明.这种方法称为组合论证.

例 1 证明组合恒等式

$$C_{n+1}^{k}=C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}, \tag{1}$$

其中 k, n 都是自然数，并且 $k\leqslant n$.

解 从 $n+1$ 个元素 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n+1} 中选取 k 个，产生的 k 元子集共有 C_{n+1}^{k} 个.

另一方面，这些 k 元子集可以分为不交的两类：第一类含有 a_{n+1}，第二类不含 a_{n+1}.

第一类中的子集是从 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 中选取 $k-1$ 个，再添上 a_{n+1} 而得到的. 因此共有 C_{n}^{k-1} 个.

第二类中的子集是从 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 中选取 k 个得到的.共有 C_{n}^{k} 个.

综合以上两个方面便得(1).

用同样的方法不难证明

$$C_{m+n+1}^{n+1}=C_{m+n}^{n}+C_{m+n-1}^{n}+\cdots+C_{n+1}^{n}+C_{n}^{n} \tag{1'}$$

例 2 n, h, k 都是非负整数，并且 $n\geqslant k+h$. 证明

$$C_{n}^{k+h}\geqslant C_{n-k}^{h}, \tag{2}$$

等号何时成立?

解 在 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 中取 $k+h$ 个元，产生 $k+h$ 元子集的方法有 C_{n}^{k+h} 种. 其中，先取前 k 个元 a_1, a_2, $\cdots$, a_k; 再从 a_{k+1}, a_{k+2}, $\cdots$, a_n 这 $n-k$ 个元中取 h 个的方法

有 C_{n-k}^{h} 种．显然后者不大于前者，这就是(2)．

等号成立时，$n=k+h$（否则总有不全含 a_1, a_2, $\cdots$, a_k 的 $k+h$ 元子集）．反过来，$n=k+h$ 时，显然有 $C_n^{k+h}=C_{n-k}^{h}=1$.

例 3 $n\in\mathrm{N}$（以下均如此，不再申明），证明

$$C_{2n}^{n}<2^{2n}. \qquad (3)$$

解 $2n$ 元集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{2n}\}$ 的子集共 2^{2n} 个．其中 n 元子集有 C_{2n}^{n} 个．

例 4 证明

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n. \qquad (4)$$

解 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的子集共 2^n 个．其中 k 元集共 C_n^k 个（$k=0, 1, \cdots, n$）．

例 5 证明

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0. \qquad (5)$$

解 在 $\{a_1, a_2,\cdots,a_n\}$ 的奇子集（含奇数个元素的子集）与偶子集(含偶数个元素的子集)之间建立对应关系如下：

设 A 为奇子集，若 A 含有 a_1，则

$$A\longmapsto A\setminus\{a_1\}.$$

若 A 不含有 a_1，则

$$A\longmapsto A\cup\{a_1\}.$$

显然在奇子集 $B\neq A$ 时，B 的象（$B\setminus\{a_1\}$ 或 $B\cup\{a_1\}$）与 A 的象不同．并且，每一个偶子集也都是奇子集的象(这个奇子集可由偶子集添上 a_1 或去掉 a_1 得到)．因此，偶子集与奇子集一一对应，两者的个数相等．即

$$C_n^1+C_n^3+\cdots=C_n^0+C_n^2+\cdots.$$

从而(5)成立．

例 6 证明在 $n\geqslant m$ 时，

$$\sum_{k=0}^{n-m} C_n^{m+k} C_{m+k}^{m} = 2^{n-m} \cdot C_n^m. \qquad (6)$$

解 考虑从 n 人中选出 m 名正式代表及若干名列席代表的选法(列席代表不限人数，可以为 0).

一方面，先选定正式代表，有 C_n^m 种方法，然后从 $n-m$ 个人选列席代表，有 2^{n-m} 种方法，因此共有

$$2^{n-m} \cdot C_n^m \qquad (7)$$

种选法.

另一方面，可以先选出 $m+k$ 人 ($k=0, 1, \cdots, n-m$)，然后再从中选出 m 名正式代表，其余的 k 人为列席代表. 对每个 k，这样的选法有 $C_n^{m+k} \times C_{m+k}^m$ 种，从而，总选法的种数为

$$\sum_{k=0}^{n-m} C_n^{m+k} C_{m+k}^m. \qquad (8)$$

综合(7)、(8)即得(6).

例 7 m, n, r 都是自然数. 证明

$$C_{n+m}^r = C_n^0 C_m^r + C_n^1 C_m^{r-1} + C_n^2 C_m^{r-2} + \cdots + C_n^r C_m^0. \qquad (9)$$

(9)称为范德蒙 (Vandermonde) 恒等式.

解 从 n 位太太与 m 位先生中选出 r 位的方法有 C_{n+m}^r 种.

另一方面，从这 $n+m$ 人中选出 k 位太太与 $r-k$ 位先生的方法有 $C_n^k C_m^{r-k}$ 种，$k=0, 1, \cdots, r$. 所以从这$n+m$人中选出 r 位的方法有 $C_n^0 C_m^r + C_n^1 C_m^{r-1} + \cdots + C_n^r C_m^0$ 种.

综合以上两方面即得(9).

通常约定在 $r>n$ 或 $r<0$ 时，$C_n^r=0$. 所以(9)(或其它类似的式子)在 $r>n$ 时也是成立的.

例 8 证明

$$(C_n^1)^2+2(C_n^2)^2+\cdots+n(C_n^n)^2=nC_{2n-1}^{n-1}. \qquad (10)$$

解 从 n 名先生、n 名太太中选出 n 人，这 n 人中有一人担任主席，并且必须为太太．考虑有多少种选法．

一方面，先选一名太太任主席有 $C_n^1=n$ 种方法，再从其余的 $2n-1$ 人中选 $n-1$ 人有 C_{2n-1}^{n-1} 种方法．所以共有 nC_{2n-1}^{n-1} 种选法．

另一方面，对于 $k=1,2,\cdots,n$，从 n 名太太中选 k 人，再从 k 人中选一人任主席，有 kC_n^k 种方法，从 n 名先生中选 $n-k$ 人有 $C_n^{n-k}=C_n^k$ 种方法（即在 n 名选生中选 k 人不去充当"代表"）．于是共有 $\sum\limits_{k=1}^{n}k(C_n^k)^2$ 种方法．

综合以上两个方面，便得(10)．

(10)也可由（9）得出（令 $r=m=n-1$ 并利用 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$）．

例 9 证明

$$n!=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^rC_n^r(n-r)^n. \qquad (11)$$

解 左边显然是 n 个元素的（无重复元素的）排列个数．我们要寻找另一种计算这个量的方法．

n 个元素的允许重复的排列个数为 n^n．其中至少有 1 个元素不出现的有 $C_n^1\cdot(n-1)^n$ 种，至少有 2 个元素不出现的有 $C_n^2\cdot(n-2)^n$ 种，…，$n-1$ 个元素不出现的有 $C_n^{n-1}\cdot 1^n$．因此，根据容斥原理，恰有 n 个元出现的（全）排列数为

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^rC_n^r(n-r)^n.$$

这也就是 n 个元的（无重复元素的）排列数．

例 10 证明

$$C_n^1C_n^n-C_n^2C_{2n}^n+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nC_{nn}^n$$
$$=(-1)^{n+1}\cdot n^n. \tag{12}$$

解 设有编号为 1, 2, …, n 的 n 个盒子及编号为 1, 2,…, n 的 n 种球，每种球各 n 个.

在每个盒子中各放一个球的放法，即 n 个数(球的号码)的允许重复的排列数，应为 n^n (每一只盒子里可放 n 种球的任一种).

另一方面，用 (i, j) 表示在第 i 个盒子里放第j号球. 则 n 个"点"

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_n, j_n) \tag{13}$$

(其中 i_k, $j_k\in\{1, 2, \cdots, n\}$, $k=1, 2, \cdots, n$) 表示将 n 个球 j_1, j_2, …, j_n (号码允许重复) 分别放入盒子 i_1, i_2, …, i_n 里(盒子的号码也允许重复，即允许有些盒子里放几个球，有些盒子空着).

由于 i, j 都有 n 种选择，所以点 (i, j) 共有$nn=n^2$个. 形如(13)的 n 个点的点组共有 C_{nn}^n 个.

其中 1, 2, …, n 至少有一个不在横坐标中出现的点组有

$$C_n^1\times C_{(n-1)n}^n$$

个，至少有两个不在横坐标中出现的点组有

$$C_n^2\times C_{(n-2)n}^n$$

个，….

根据容斥原理，1, 2, …, n 都在横坐标中出现的点组有

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^kC_{(n-k)n}^n \tag{14}$$

个，这种点组也就是在每只盒子里各放一只球的放法. 所以

$$n^n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^kC_{(n-k)n}^n. \tag{15}$$

由于 $C_n^k=C_n^{n-k}$，(15)就是(12).

例 11 设 a，A 都是自然数，$A\geqslant a$. 证明

$$\frac{a}{A}+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{a}{A-1}+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdot\frac{a}{A-2}+\cdots+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdots\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a}{a}=1. \tag{16}$$

解 设想一个袋中有 A 个大小相同的球，其中有 a 个是白的，其余的是黑的. 每次摸出一个球，不放回去，直到摸到白球为止.

这是一个必然事件(迟早摸到白球)，所以概率为 1 .

另一方面，第一次摸到白球的概率为$\frac{a}{A}$. 第一次未摸到白球，第二次摸到白球的概率为$\frac{A-a}{A}\cdot\frac{a}{A-1}$，…，第$k$次才摸到白球的概率为 $\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdots\frac{A-a-(k-2)}{A-(k-2)}\cdot\frac{a}{A-(k-1)}$ ($k=2, 3, \cdots, A-a+1$). 因此，摸到白球的概率为(16)式的左边，从而(16)成立.

在概率论中有不少恒等式，可以用类似的手法证明.

5 三步舞曲

"算两次"的典型做法是选择一个适当的量，从两个方面去考虑它，"一方面，另一方面，综合起来可得"．好象三步舞曲，这种舞曲在组合数学中常常听到．

例 1 在凸 n 边形内任取 m 个点，以任意的方式作一些线段，连结这些点及多边形的顶点，使得每两条线段的内部没有公共点，并且整个多边形被分成若干个三角形．这样的过程称为三角剖分，如图 21 所示．

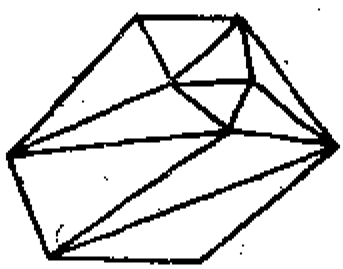

图 21

问一共有多少个（内部不包含已知点的）三角形？

解 考虑所有三角形的内角之和．

一方面，每个三角形的内角和为 $180°$，如果三角形的个数为 t，则总和为 $t\cdot 180°$．

另一方面，凸 n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，而在已取的 m 个点处，各角的和组成 $360°$ 的周角．因此，总和为

$$(n-2)\times 180°+m\times 360°.$$

综合起来得到

$$t\times 180°=(n-2)\times 180°+m\times 360°,$$

即

$$t=2m+n-2.$$

例 2 $n, k\in \mathbf{N}$，S 为平面上 n 个点的集合，对于 S 中任一点 A，S 中至少有 k 个点到 A 的距离相等．证明

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}\quad. \tag{1}$$

解 以 S 的点为圆心作 n 个圆，根据已知条件，我们可以使每一个所作的圆上至少有 k 个点属于 S.

称两个端点都在 S 中的线段为"好线段". 我们考虑好线段的条数.

一方面，好线段的条数显然为 C_n^2.

另一方面，在每个所作的圆上至少有 C_k^2 条弦是好线段. n 个圆有 nC_k^2 条好线段，其中有一些是公共弦被重复计算了. 由于每两个圆至多有一条公共弦，所以公共弦的条数 $\leqslant C_n^2$. 从而好线段的条数 $\geqslant nC_k^2-C_n^2$.

综合起来得到

$$C_n^2\geqslant nC_k^2-C_n^2,$$

即

$$k(k-1)\leqslant 2(n-1),$$

从而

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}\quad.$$

三步曲中，如果两个方面都是精确的结果，综合起来得到一个等式. 如果至少有一个方面采用了估计，那么综合起来得到一个不等式.

有时，需要讨论的不是所取的量的数值，而是它的性质，例如奇偶性. 下面的例 3 至例 8 均是如此.

例 3 将正三角形 ABC 的每一条边 n 等分，过各分点作其它两边的平行线. 这些平行线构成 n^2 个小正三角形，每一个的边长是 $\triangle ABC$ 的 $1/n$. 将它们的顶点染上红、蓝、白三种颜色之一，并且 AB 上的点不染红色，BC 上的点不染

蓝色，CA 上的点不染白色．证明一定有一个小正三角形，它的三个顶点颜色不同．

解 每个小正三角形t有三条边，设其中有x_t条边两端颜色不同，考虑所有 x_t 的和 S.

一方面，如果三角形t的边不在 AB, BC 或 CA 上，那么这条边还属于另一个小三角形 t'，因而它对和 S 的贡献为偶数 0 或 2．AB 上的点染上蓝白两色，并且 A 一定是蓝色，B 一定是白色，所以从 A 经过 AB 上的各个分点到 B 时，颜色改变奇数次，即 AB 上有奇数条属于小正三角形的边两端异色，BC，CA 上也是如此．它们对 S 的贡献均为奇数．所以 S 为奇数．

另一方面，如果每个三角形 t 中至少有两个顶点同色，那么每个三角形有 0 或 2 条两端异色的边．它对和 S 的贡献为偶数，从而 S 为偶数．

两方面所得结果不一致．这矛盾表明必有小的正三角形三个顶点颜色不同．

例 4 矩形 R 是若干个小矩形 R_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的并集，R_i 互不重叠，边与坐标轴平行，并且每个 R_i 至少有一条边的长为整数．证明 R 也至少有一条边为整数．

解 不妨设矩形 R 的顶点 O 为原点，顶点 A，C 分别在 x 轴与 y 轴的正方向上．

考虑每个矩形 R_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的顶点中整点的个数之和 S.

一方面，由于每个 R_i 至少有一条边的长为整数，它的整顶点的个数为 0，2 或 4．从而和 S 为偶数．

另一方面，每个 R_i 的顶点，除去 R 的四个顶点 O, A, B, C 均属于 2 或 4 个小矩形（图 22），对 S 的贡献为偶

数．如果 R 的边长均不是整数，那么 O, A, B, C 中只有 O 为整点，并且 O 只属于一个小矩形．因此 S 为奇数．

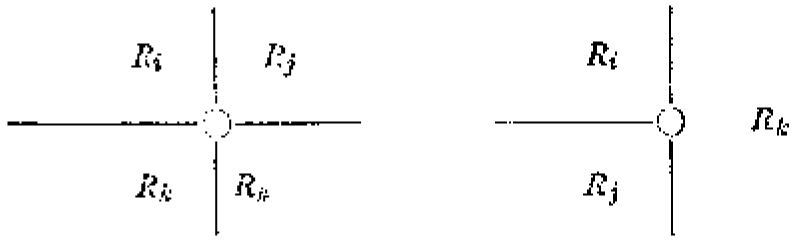

图　22

两方面的结果产生矛盾，这表明 R 至少有一条边的长为整数．

用两种不同的方法计算同一个量，有时会导出矛盾．如果计算是正确的，那么产生矛盾的原因是有一种计算采用了某个错误的前提 A．矛盾恰好证明了命题 $\overline{A}$（非 A，即命题 A 的否定）是正确的．因此，运用反证法时，这种矛盾正是我们所期望的．

当然，反证法是可以避免的．在例4中，得出 S 为偶数后，便可导出 O, A, B, C 中必有偶数个整点，从而 A, B, C 中至少有一个整点，R 至少有一条整数边长．

例 5　一个立方体的顶点标上 $+1$ 或 -1．面上标一个数，它等于这个面的 4 个顶点处的数的乘积．这样所标的14个数的和能否为 0？

解　考虑这 14 个数的积 S．

将每个面所标的数写成 4 个顶点处的数的乘积．这样，在 S 中，每个顶点所标的数将作为乘数出现 4 次（因为过这点有三个面），从而它对 S 的贡献为 1．因此，$S=1^8=1$．

14 个数的积 S 为 1，所以这 14 个 $\in\{\pm1\}$ 的数中，-1 的个数为偶数．由于 -1 的个数不为7，这 14 个数的和不为 0．

也可以采用反证法(如例3、例4那样做). 不过，我们不一定非套用"三步曲"的格式. 其实，重要的并不是形式. 在许多问题中，困难的倒是选择什么量来考虑. 选准了，问题迎刃而解. 选不好，事倍功半.

例 6 九只兵组成 3×3 的正方形，放在 8×8 的棋盘的左下角. 每只兵可以跳过他身边的另一只兵到一个空着的方格，即可以关于它的邻格的中心作对称运动(可以横跳、竖跳或沿着斜线跳). 要求这些兵跳到棋盘的另一个角(另一个 3×3 的正方形)，如果是

(*a*) 左上角，

(*b*) 右上角，

这一要求能否实现?

解 (*a*)、(*b*) 均不能实现.

自左下角起，每个方格可以用一组数(坐标)来表示.(自下而上)第 i 行、(自左而右)第 j 列的方格记为 (i, j). 问题的关键是考虑九只兵(所在方格)的纵坐标的和 S.

一方面，每跳一次，S 增加 0 或 2，因而 S 的奇偶性不变.

另一方面，右(左)上角 9 个方格的纵坐标的和比左下角 9 个方格的纵坐标之和大

$$5\times9=45$$

这是一个奇数.

综合以上两个方面即知九只兵不能全跳至右(左)上角的那个 3×3 的正方形里.

本题如果将纵横坐标加在一起来考虑，则比较麻烦，问题不能顺利解决.

例 7 对有限集 X 的子集族 S，定义

$$S'=\{A\,|\,A\text{ 是 }S\text{ 中奇数个集的子集}\}.$$

证明

$$(S')'=S. \tag{2}$$

(例如 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$，$S=\{\{1\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$，则 $S'=\{\phi,\ \{1\},\ \{3\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$. $(S')'=S$).

解 对任一子集 $A\subset X$，考虑满足条件：

$$A\subset B\subset C\in S \tag{3}$$

的子集的对 B，C 的个数 n.

一方面，对固定的 C，满足(3)的 B 有

$$2^{|C|-|A|} \tag{4}$$

个($|B|$ 表示集 B 的元数). 当且仅当 $C=A$ 时，(4)是奇数. 因此，

$$n=\sum_{A\subset C\in S}2^{|C|-|A|} \tag{5}$$

当且仅当 $A\in S$ 时，n 是奇数.

另一方面，对每个固定的 B，当且仅当 $B\in S'$ 时，有奇数个 C 满足(3). 因此

n 是奇数$\Longleftrightarrow$有奇数个 $B\in S'$ 满足 $B\supset A\Longleftrightarrow A\in(S')'$.

综合以上两个方面得

$$A\in S\Longleftrightarrow A\in(S')',$$

即(2)式成立.

奇偶性无非是一种(将整数)分类的方法. 根据问题的需要，也可以考虑 mod 3 的剩余类，即按照除以 3 的余数将整数分类，或者，更一般地，按照 mod m (m 是自然数)的剩余类(即按照除以 m 的余数)分类.

例 8 在凸 n 边形中连 $n-3$ 条对角线，这些对角线在

多边形的内部不相交．如果所得的图是可以一笔画成的圈（即可以从一个顶点出发，经过图中各条线段恰好一次，最后回到出发点），证明 n 是 3 的倍数．

解 $n-3$ 条对角线将 n 边形分为 $n-2$ 个三角形．

不难证明（例如用归纳法）可以将这些三角形染成红色或蓝色，使得每两个相邻（即有公共边）的三角形颜色不同．

由于这个图是可以一笔画成的圈，所以每个顶点处有偶数条线（有一条从这个顶点画出的线，就有一条画回这个顶点的线）．因而有奇数个三角形以这个顶点为顶点．于是以顶点 A_1 为顶点的、最外面的两个三角形（也就是分别以多边形的边 A_1A_2，A_1A_n 为边的两个三角形）同色．

对多边形的每一个顶点，同样的结论成立．于是，最外面的三角形（即至少有一条边是原多边的边的那些三角形）同色．不妨设同为红色．

考虑蓝色三角形的边数的和 S

一方面，多边形的边都不属于蓝色三角形，每一条对角线属于两个三角形，一红一蓝．所以蓝色三角形的边数之和 S 等于对角线的条数 $n-3$．

另一方面，每个三角形有 3 条边．所以 S 是 3 的倍数．

综合以上两个方面，得到 $n-3$ 是 3 的倍数，从而 n 是3的倍数．

我们常常从两个方面来估计一个量，分别得出它的上界与下界（例 2 中得出 k 的上界）．如果上界与下界恰好相等，这个量就完全确定了．

例 9 设 k 是自然数，

$$S_k=\{(a,\ b)\mid a,\ b=1,\ 2,\ \cdots,\ k\}.$$

对于 $(a,\ b)$、$(c,\ d)\in S_k$，如果

$$\begin{cases} a-c\equiv 0 \quad 或\pm 1 \quad (\mathrm{mod}\, k) \\ b-d\equiv 0 \quad 或\pm 1 \quad (\mathrm{mod}\, k) \end{cases} \tag{6}$$

就称 $(a,\ b)$ 与 $(c,\ d)$ 是无法区分的．否则称为可区分的．例如 $(1,\ 1)$与$(2,\ 5)$ 在 S_5 中是不可区分的．

设 $A\subset S_k$，A 的元素是两两可区分的．这种 A 的元素个数的最大值记为 r_k．求 r_k．

解 设想有一个 k 行 k 列的象棋棋盘，它的上端与下端，左端与右端连结在一起，形成一个环面．问题就是：

“在这个环面棋盘上，最多能放几只帝，它们互不相吃（帝放在横线与竖线的交叉处，可沿横线、竖线或斜线移动一格并吃掉在该格的棋子）？”

我们证明

$$r_k=\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right] \tag{7}$$

当 k 为偶数时，将相邻的 4 个格点（它们组成 1×1 的正方形）作为一组．共有$\dfrac{k^2}{4}$个互不相交的组，每一组中至多能放一只帝．所以

$$r_k\leqslant\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right] \tag{8}$$

当 k 为奇数时，首先注意每相邻两行中至多放 $\left[\dfrac{k}{2}\right]$ 个帝．事实上，不妨设第 1 列有一个帝，按前面的方法，把这两行分为$\left[\dfrac{k}{2}\right]$组，每组 4 个格点构成 1×1 的正方形，但第 k 列、第 1 列、第 2 列的 6 个格点为一组．每一组中至多有 1 个帝，两行至多$\left[\dfrac{k}{2}\right]$个帝．

第 i, $i+1$, $i+2,\cdots,k$, 1, 2, …, $i-2$ 行，每两行一组. 根据上面所证，这 $k-1$ 行中至多放$\frac{k-1}{2}\left[\frac{k}{2}\right]$个帝（$i=1, 2, \cdots, k$）.

于是，每连续 $k-1$ 行(第 k 行与第 1 行作为连续的行)中帝的个数的和 S_i 的和 S 满足

$$S\leqslant k\cdot\frac{k-1}{2}\left[\frac{k}{2}\right]. \tag{9}$$

另一方面，设放了 r_k 只帝，所放的每只帝在 $k-1$ 个 S_i 中出现，所以

$$r_k\cdot(k-1)=S. \tag{10}$$

综合(9)、(10)得

$$r_k\leqslant\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]. \tag{11}$$

由于 r_k 是整数，所以由(11)得到(8).

(8)是 r_k 的上界. 另一方面，我们证明

$$r_k\geqslant\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right]. \tag{12}$$

为此，采用构造法.

当 k 为偶数时，棋盘可分为$\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}$个 2 行 2 列的“子棋盘”. 将帝放在每个子棋盘的左上角，则这$\frac{k^2}{4}$个帝互不相吃.

当 $k=4n+1$ 时，将帝放在

$(1,\ 4n+1)$, $(3,\ 4n)$, …,

$(4n-1,\ 2n+2)$, $(4n+1,\ 2n+1)$,

$$(1,\ 4n-1),\ (3,\ 4n-2),\ \cdots,$$
$$(4n-1,\ 2n),\ (4n+1,\ 2n-1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(1,\ 2n+3),\ (3,\ 2n+2),\ \cdots,$$
$$(4n-1,\ 4),\ (4n+1,\ 3),$$
$$(2,\ 2n),\ (4,\ 2n-1),\ \cdots,\ (4n,\ 1),$$
$$(2,\ 2n-2),\ (4,\ 2n-3),\cdots,(4n,\ 4n),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(2,\ 2),\ (4,\ 1),\ \cdots,\ (4n,\ 2n+4)$$
这 $n(2n+1)+n\cdot 2n=n(4n+1)$ 个点上.

当 $k=4n+3$ 时，将帝放在

$$(1,\ 4n+3),\ (3,\ 4n+2),\ \cdots,$$
$$(4n+1,\ 2n+3),\ (4n+3,\ 2n+2),$$
$$(1,\ 4n+1),\ (3,\ 4n),\ \cdots,$$
$$(4n+1,\ 2n+1),\ (4n+3,\ 2n),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(1,\ 2n+5),\ (3,\ 2n+4),\ \cdots,$$
$$(4n+1,\ 5),\ (4n+3,\ 4),$$
$$(2,\ 2n+2),\ (4,\ 2n+1),\ \cdots,\ (4n+2,\ 2),$$
$$(2,2n),\ (4,\ 2n-1),\ \cdots,\ (4n+2,\ 4n+3),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(2,\ 2),\ (4,\ 1),\ \cdots,\ (4n+2,\ 2n+5)$$
这 $n(2n+2)+(n+1)(2n+1)=(n+1)(4n+1)$ 个点上.

因此，总有(12)式成立.

综合(11)、(12)即得(7).

例 10 取集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的一批三元子集，其中每两个(取出的三元子集)至多有一个公共元素. 记 $f(n)$ 为

这批三元子集的个数的最大值．证明

$$\frac{1}{6}(n^2-4n)\leqslant f(n)\leqslant\frac{1}{6}(n^2-n). \tag{13}$$

解 先估计 $f(n)$ 的上界．每个三元子集 $\{a, b, c\}$ 可以"一气化三清"，产生三个二元子集：$\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$.

如果两个三元子集至多有一个公共元，那么所产生的二元子集互不相同．

互不相同的二元子集共有 C_n^2 个，所以

$$3f(n)\leqslant C_n^2,$$

即(13)的右边的不等式成立．

估计 $f(n)$ 的下界还是采用构造法，造出一批三元子集，个数 $\geqslant\frac{1}{6}n(n-4)$，每两个的交至多含一个元素．

为此，考虑所有满足条件

$$a+b+c\equiv 0 \pmod n \tag{14}$$

(即 $a+b+c$ 被 n 整除)的三元子集 $\{a, b, c\}$.

如果有 $a'=a$, $b'=b$, 并且

$$a'+b'+c'\equiv a+b+c\equiv 0 \pmod n,$$

那么

$$c'\equiv c \pmod n. \tag{15}$$

在 c, $c'\in\{1, 2, \cdots, n\}$ 时，(15)就是 $c'=c$. 所以满足(14)的每两个(不同的)三元子集至多有一个公共元素．

现在来计算满足(14)的三元子集 $\{a, b, c\}$ 的个数 S. 首先取 a, 取法有 n 种．a 取定后再取 b. 只要 $b\neq a$, 并且 b 不满足同余方程

$$2a+b\equiv 0 \pmod n$$

(即在 $2a<n$ 时，$b\neq n-2a$；在 $2a\geqslant n$ 时，$b\neq 2n-2a$）及

$$a+2b\equiv 0 \pmod n$$

$\left(即\ b\neq\dfrac{n-a}{2},\quad b\neq\dfrac{2n-a}{2}\right)$. 因此，$b$ 至少有 $n-4$ 种选择.

在 a,b 确定后，c 也随之确定. 所以 $s\geqslant\dfrac{1}{6}n(n-4)$. 从而(14)式的另一半成立.

6 计 数 论 证

本节继续讨论组合数学中的问题（也有其他方面的问题）．所用的方法是"计数论证"．

例 1 将 1，2，…，10 这十个数依任意顺序排成一圈．证明其中必有三个相邻的数，它们的和不小于 17．

解 每三个相邻的数作为一组，这样的三元组一共 10 个．设这 10 个三元组的和分别为 S_1，S_2，…，S_{10}．考虑和 $S=S_1+S_2+\cdots+S_{10}$．

一方面，由于 1，2，…，10 中每一个数在三个 S_i 中出现，所以

$$S=3(1+2+\cdots+10)=\frac{3\times10\times11}{2}=165. \qquad (1)$$

另一方面，如果每个 $S_i<17$，那么

$$S\leqslant16\times10=160. \qquad (2)$$

(1)与(2)矛盾，这表明至少有一个 $S_i\geqslant17$．

例 1 也可以直接从正面说，不采用反证法．即由(1)可知 10 个三元组的平均数为

$$165\div10=16.5,$$

而各个 S_i 都是整数，其中必有一个 >16，即不小于 17．

这种处理方法可以说成"从总和经平均到单独"，也有人称为平均原则．它与狄利克雷（Dirichlet）的抽屉原则是一回事．当代数学家厄尔多斯（Erdös）运用这种方法解决了许多问题，大大地丰富与发展了这个方法．由于其中的要点

是对总和进行计数，我们依照厄尔多斯的说法，称之为计数论证.

例 2 在半径为1的圆周上给出两个点集 A, B. 它们都由有限多条互不相交的弧组成. B 的每段长度都等于 $\frac{\pi}{m}$, m 为自然数. A^j 表示将 A 绕圆沿反时针方向转动 $\frac{j\pi}{m}$ 所得的集合（$j=1, 2, \cdots$）. 证明存在自然数 k, 使

$$l(A^k\cap B)\geqslant\frac{1}{2\pi}l_{(A)}l_{(B)}.$$

这里 $l_{(M)}$ 表示集 M 中所有弧的长度之和.

解 B 由 $t=\frac{l_{(B)}}{\pi/m}$ 条弧组成. 设它们为 B_1, B_2, $\cdots$, B_t. 用 B^j, B_1^j, $\cdots$, B_t^j 表示将 B, B_1, $\cdots$, B_t 绕圆沿顺时针方向转动 $\frac{j\pi}{m}$ 所得的点集（$j=1, 2, \cdots$）. 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2m}l(A^j\cap B)&=\sum_{j=1}^{2m}l(A\cap B^j)\\&=\sum_{j=1}^{2m}\sum_{i=1}^{t}l(A\cap B_i^j)\\&=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{2m}l(A\cap B_i^j)\\&=\sum_{i=1}^{t}l(A)\\&=tl_{(A)}\\&=\frac{l_{(A)}l_{(B)}}{\pi/m}.\end{aligned}$$

于是(经平均到单独)存在自然数 k, 使

$$l(A^k\cap B)\geqslant\frac{1}{2m}\cdot\frac{l_{(A)}l_{(B)}}{\pi/m}=\frac{1}{2\pi}l_{(A)}l_{(B)}.$$

例 3　D, E, F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上. 证明 $\triangle AEF$, $\triangle BFD$, $\triangle CDE$ 中至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 的 $\frac{1}{4}$.

解　设 $\triangle ABC$ 的面积为 1. 又设

$$\frac{BD}{BC}=\lambda,\quad \frac{CE}{CA}=\mu,\quad \frac{AF}{AB}=\nu.$$

则

$$S_{AEF}=\nu(1-\mu),$$
$$S_{BFD}=(1-\nu)\lambda,$$
$$S_{CDE}=(1-\lambda)\mu.$$

于是积(类似于例 1、例 2 中的和)

$$S_{AEF}\cdot S_{BFD}\cdot S_{CDE}=\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)\nu(1-\nu)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^6,$$

从而 S_{AEF}, S_{BFD}, S_{CDE} 必有一个 $\leqslant\frac{1}{4}$.

例 4　6 个点，每两个点之间有一条线相连，线染上红色或蓝色. 证明一定有两个以这些点为顶点的三角形，每个三角形的边是同一种颜色(可能有公共的边).

解　我们称三边同色的三角形为同色三角形. 设有 x 个这样的三角形，则三边不全同色的三角形的个数是 C_6^3-x.

考虑这个图中同色角(即由两条同色的边所组成的角)的个数 S.

一方面，每个同色三角形中有 3 个同色角，每个边不全同色的三角形中有一个同色角，所以

$$S=3x+(C_6^3-x)=2x+C_6^3=2x+20.\qquad(3)$$

另一方面，如果一个顶点引出 r 条红色的边，那么以这

个顶点为顶点的同色角的个数

$$C_r^2+C_{5-r}^2\geqslant C_3^2+C_2^2=4.$$

所以

$$S\geqslant 6\times 4=24. \tag{4}$$

综合(3)、(4)得$x\geqslant 2$.

本例可以看成由平均数($\geqslant 4$)来估计总数S.

例4有一个直接的推论：

“任意6个人中，必有3个人互相认识或者互不相识.”

它相当于将6个点的连线(共C_6^2条)染上两种颜色，所得的图中有一个同色的三角形.

类似的技术还可以解下面的例5.

例5 某俱乐部有$3n+1$名成员. 对每一个人，其余的人中恰好有n个愿与他打网球，n个愿与他下象棋，n个愿与他打乒乓. 证明俱乐部中有3个人，他们之间玩的游戏三种俱全.

解 将每个人作为点. 每一点引出n条红边，n条蓝边，n条黑边，分别代表打网球，下象棋及打乒乓. 要证明图中有一个三边颜色全不相同的三角形.

考虑异色角(即两条异色的边所构成的角)的个数S.

每个顶点处有$3n^2$个异色角，所以

$$S=3n^2(3n+1).$$

平均每个三角形有

$$\frac{3n^2(3n+1)}{C_{3n+1}^3}=\frac{6n}{3n-1}>2$$

个异色角. 因此，至少有一个三角形有3个异色角，这个三角形的三条边当然互不同色.

本题也可从同色角的个数入手，两种解法并无实质上的

差别.

例 6 所谓图，是由一些点及连结这些点的一些边组成. 如果点数为 n，图中没有（以这些点为顶点的）三角形，那么边的条数 $e\leqslant\frac{n^2}{4}$.

解 设点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 自点 x_i 引出的边数为 $d(x_i)$，并称为 x_i 的次数（$i=1, 2, \cdots, n$）.

如果点 x_i 与 x_j 相连，由于图中无三角形，所以

$$d(x_i)+d(x_j)\leqslant n. \tag{5}$$

对所有相连的 x_i，x_j 求和得

$$\Sigma(d(x_i)+d(x_j))\leqslant ne. \tag{6}$$

注意对每个 i，

$$\sum_{\substack{j\\ x_j\text{与}x_i\text{相连}}} 1=d(x_i), \tag{7}$$

所以（6）的左边等于

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\sum_{\substack{j\\ x_j\text{与}x_i\text{相连}}} 1=\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i). \tag{8}$$

由 Cauchy 不等式，

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\right)^2=\frac{1}{n}(2e)^2. \tag{9}$$

综合（6）、（8）、（9）得

$$\frac{1}{n}(2e)^2\leqslant ne,$$

即

$$e\leqslant\frac{n^2}{4}. \tag{10}$$

对（5）求和，是从局部到整体（总和）. 与平均的方法相反相成.

例 6 的结论也可以说成："n个点的图，如果边数 $e>\frac{n^2}{4}$，那么图中一定有三角形."

这个结果不是最佳的，它可以进一步加强．这就是下面的例 7.

例 7 如果边数 $e>\frac{n^2}{4}$，那么图中一定有$\left[\frac{n}{2}\right]$个三角形.

解 为叙述清楚起见，设n为偶数 $2m$(n为奇数的情况与之类似)．我们用归纳法证明：

$e\geqslant m^2+1$ 时，图中有 m 个三角形.

奠基是显然的．设命题对于 m 成立，考虑有 $2(m+1)$个点，$(m+1)^2+1$ 条边的图.

由例 6，我们知道图中有一个 $\triangle A_1A_2A_3$．设点 A_i 向其它点(A_1，A_2，A_3 以外的点)引出的边数为 $a_i(i=1,\ 2,\ 3)$．这时有两种情况：

情况 1　$a_1+a_2+a_3\leqslant 3m-2$.

由于 $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_1)\leqslant 2(3m-2)$，而

$$\frac{2(3m-2)}{3}<2m-1, \tag{11}$$

所以 a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_1 中必有一个$\leqslant 2m-2$．不妨设

$$a_1+a_2\leqslant 2m-2. \tag{12}$$

删去 A_1，A_2 及自这两点引出的边．图中至少还有

$$(m+1)^2+1-(2m-2)-3=m^2+1$$

条边．根据归纳假设，应有 m 个三角形．故原来的图中有 $m+1$个三角形(增加了一个三角形，即 $\triangle A_1A_2A_3$).

情况 2　$a_1+a_2+a_3\geqslant 3m-1$.

由于图中除去 A_1，A_2，A_3 外，仅有 $2m-1$ 个点．如果这些点各向 $\triangle A_1A_2A_3$ 的某个顶点引一条边，一共 $2m-1$条，还差

$$(3m-1)-(2m-1)=m$$

条．将这些边添上，每添一条就产生一个三角形．因此，图中有 $m+1$ 个三角形．

当 $n=2m+3$ 时，需将证明中 $3m-2$，$2m-1$，$2m-2$，$2m-1$，$2m-1$ 等相应地改为 $3m-1$，$2m$，$2m-1$，$3m$，$2m$（即各增加 1）．

例 7 的结果是最佳的．事实上，考虑由$\left[\frac{n}{2}\right]$个点组成的集 X与由$\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个点组成的集 Y．将 X 的每一点与 Y 的每一点相连，共得

$$\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$$

条边．再将 Y 的某一对点相连，则边数 $e>\frac{n^2}{4}$．而三角形的个数为$\left[\frac{n}{2}\right]$．

情况 1 中，求 a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_1 的平均值，而不是求 a_1，a_2，a_3 的平均值．这一点值得注意．在例 1 中已经用过这一方法，那时这样做是显然的（或者说是当然的）．现在则不一定能看出它是问题的关键（不这样做比较麻烦）．究竟对什么量来求平均，是一个非常重要的技术，这取决于所考虑的问题，不可生搬硬套．

例 8　考题为 4 道选择题，每题有 3 个供选择的答案．参加考试的人中，每三个人都有一个问题，他们的答案各不相

同．问至多有多少个学生？

解 至多有9个学生．

设第i道题的答案为a_i，b_i，c_i三种（$i=1, 2, 3, 4$）．

如果人数$\geqslant 10$，设a_1，b_1，c_1中最多的两种为a_1，b_1，a_1，b_1出现的次数之和（与例7的情况1类似，但现在是最多的两种，而不是最少的两种）

$$\geqslant\left\lceil\frac{2\times 10}{3}\right\rceil=7. \tag{13}$$

（$\lceil x\rceil$ 的定义见第3节．）

考虑7个人，他们对问题1的答案是a_1或b_1．设这些人对第2个问题的答案以a_2，b_2为最多，则a_2，b_2出现的次数之和

$$\geqslant\left\lceil\frac{2\times 7}{3}\right\rceil=5.$$

同样，上面的五个人中有$\left\lceil\frac{2\times 5}{3}\right\rceil=4$个人对问题3的答案为$a_3$或$b_3$．

在这4个人中，有两个人对问题4的答案相同．这两个人与（上述4个人中的）另一个人，对每一个问题的答案均至少有两个是相同的．所以总人数$\leqslant 9$．

容易验证，如果9个人的答案如表1所示，则每三个人

表 1

人＼问题	1	2	3	4	人＼问题	1	2	3	4
1	a	b	a	b	6	c	c	a	a
2	b	c	b	b	7	a	c	c	c
3	c	a	c	b	8	b	a	a	c
4	a	a	b	a	9	c	b	b	c
5	b	b	c	a					

都至少有一个问题，他们的答案各不相同.

例 9 证明在任意的n个人中，一定有两个人，使得其余的$n-2$个人中至少有$\left[\frac{n-3}{2}\right]$个人，他们都认识这两个人或者都不认识这两个人.

解 将人用点表示. 对互相认识的人，在相应的两点之间连一条红线. 否则，连一条蓝线.

与例4类似，设某点引出r条红边，则顶点在这点的同色角的个数为

$$C_r^2+C_{n-1-r}^2=\frac{1}{2}\Big(r^2-r+(n-1-r)^2-(n-1-r)\Big)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(n-1)^2-(n-1)\Big)$$
$$=\frac{(n-1)(n-3)}{4}.$$

所以同色角的总数

$$S\geqslant\frac{n(n-1)(n-3)}{4}.$$

图中有C_n^2个由两个点组成的二点组. 由总数S取平均得

$$\frac{S}{C_n^2}\geqslant\frac{n-3}{2}.$$

即存在一个二点组，边分别经过这二点组(的两个点)的同色角的个数不小于$\left[\frac{n-3}{2}\right]$. 证毕.

例 10 集M由平面上的格点(x, y)，$1\leqslant x\leqslant 12$，$1\leqslant y\leqslant 13$组成. 将M的点分别染上红、蓝、黑三种颜色. 证明其中必有四个同色的点，它们组成一个边与坐标轴平行的矩形.

解 设红色的点最多，则它的个数不少于

$$\frac{12\times 13}{3}=52.$$

我们可以证明更强的结论：如果 M 中红色点至少有 49 个，那么其中必有 4 个红点组成一个边与坐标轴平行的矩形.

为此，设各行的红点数分别为 a_1, a_2, $\cdots$, a_{13},

$$a_1+a_2+\cdots+a_{13}=49. \tag{14}$$

考虑同一行上红点的二点组. 这样的二点组共有

$$S=C_{a_1}^2+C_{a_2}^2+\cdots+C_{a_{13}}^2 \tag{15}$$

个. 与例 4 类似，(15)在 a_1, a_2, $\cdots$, a_{13} 差不多全相等时最小，确切地说

$$S\geqslant C_4^2+C_4^2+\cdots+C_4^2+C_3^2+C_3^2+C_3^2 \tag{16}$$

(在 a_1+a_2 为偶数时，$a_1^2+a_2^2\geqslant 2\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$. 在 a_1+a_2 为奇数时，$a_1^2+a_2^2\geqslant\left(\frac{a_1+a_2+1}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1+a_2-1}{2}\right)^2$. 反复利用这两个式子便可以得出

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{13}^2\geqslant 4^2+4^2+\cdots+4^2+3^2+3^2+3^2,$$

从而(16)成立). 即

$$S\geqslant 10\times\frac{4\times 3}{2}+3\times 3=69. \tag{17}$$

将每两列作为一组，共有

$$C_{12}^2=\frac{12\times 11}{2}=66 \tag{18}$$

个列组.

由(17)、(18)可知，有一个列组中含有两个二点组（因为 69>66，也就是平均值大于 1）. 这样的四个红色点构成边与坐标平行的矩形.

本题如果计算各列的二点组与每两行所成的行组，则由于

$$C_4^2+C_4^2+\cdots+C_4^2+C_5^2=76<C_{13}^2=78,$$

而不能得到加强了的结论.

可以证明 49 不能改为 48，参见第 7 节例 10.

计数论证有种种的变形. 在计算某块面积被覆盖的次数时，有人称之为重叠原理.

例 11 在半径 $R=16$ 的圆中有 650 个红点. 证明存在一个内半径为 2，外半径为 3 的圆环，其中至少含有 10 个红点.

解 以每个红点为中心，作内半径为 2、外半径为 3 的圆环. 这些圆环的面积之和为

$$650\pi\times(3^2-2^2).$$

它们均在半径为 $16+3=19$ 的圆内（圆心即已知圆的圆心），这个圆的面积为 $19^2\pi$.

因为

$$\frac{650\pi\times(3^2-2^2)}{19^2\pi}>9,$$

所以在这个半径为 19 的圆内必有一点 A 至少被 10 个圆环所覆盖.

以 A 为心，内半径 2，外半径 3 作圆环. 这圆环内至少含有 10 个红点，它们是上述 10 个圆环的中心.

关于重叠原理的例子，请参看拙著《覆盖》（上海教育出版社，1983 年出版）.

最后，我们介绍一下著名的 Sperner 定理.

例 12 设 X 为 n 元集，A_1，A_2，…，A_m 为 X 的子集，互不包含. 证明 m 的最大值为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

解 考虑 X 的全排列．其总数为 $n!$．而开头的 $|A_i|$ 个数 $\in A_i$ 的有（$|A_i|$ 表示 A_i 的元数）

$$|A_i|!\cdot(n-|A_i|)!$$

个（$i=1, 2, \cdots, m$）．由于 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不包含，所以这些排列互不相同．于是

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|!\cdot(n-|A_i|)!\leqslant n!, \tag{19}$$

即

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1. \tag{20}$$

众所周知，C_n^k 在 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$时最大，所以由(20)得

$$\frac{m}{C_n^{[n/2]}}\leqslant 1,$$

即

$$m\leqslant C_n^{[n/2]}. \tag{21}$$

在 X 中，可以取 $m=C_n^{[n/2]}$ 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，每一个含$\left[\frac{n}{2}\right]$个元素．这些子集显然互不包含．

上述证明由 D. Lubell (1966)最早完成．其实质就是在全排列中，“头”属于某个集 A_i 的概率 q_i 的平均值$\leqslant\frac{1}{m}$．而每个 q_i 均 $\geqslant\frac{1}{C_n^{[n/2]}}$，从而$\frac{1}{m}\geqslant\frac{1}{C_n^{[n/2]}}$，这就是(21)．

7 集合、元素

许多关于集合的问题，可以从两个方面去考虑：一个集合含有哪些元素，一个元素属于哪些集合．然后将这两个方面综合起来，导出结论．

集合与元素的从属关系常常用一个数表(矩阵)来表示：

元素 集合	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
A_1				
A_2				
$\vdots$				
A_m				

如果元素 a_j 属于集合 A_i，就在第 i 行第 j 列的交叉处标上 1，否则就标上 0．这样，第 i 行的 1 就表示集合 A_i 含有哪些元素，第 i 行的数的和（行和）就表示集 A_i 的元数 $|A_i|$．第 j 列的 1 表示元素 a_j 属于哪些集合，第 j 列的数的和(列和)就表示元素 a_j 属于多少个集合．

例 1 对集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的每一个非空子集定义"交错和"如下：将该子集的元素依递减次序排列，然后从最大的数开始交错地减或加后继的数(例如子集 $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ 的交错和是 $9-6+4-2+1=5$．$\{5\}$ 的交错和是 5)．求

全部“交错和”的总和S.

解 直接从定义入手去计算 S，显然是困难重重. 我们寻找另一种计算S的方法.

从元素入手. 每一个小于n的元素 a，如果在不含n的子集A中，那么它也在含n的子集 $\{n\}\cup A$ 中，反之亦然. 如果它对集A的交错和贡献为$+a$（或$-a$），那么它对集$\{n\}\cup A$的交错和贡献为$-a$（或$+a$），反之亦然. 于是，a对各个子集的交错和的贡献两两抵消. a对于总和S的贡献为0.

元素n，对每个含n的子集的交错和，贡献为n. 而含n的子集有2^{n-1}个. 所以n对总和S的贡献为$n\cdot 2^{n-1}$.

综上所述，$S=n\cdot 2^{n-1}$.

例 2 A_1，A_2，…，A_k 都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集，并且每r个的交非空，每$r+1$个的交是空集. 证明 $C_k^r\leqslant n$.

解 A_1，A_2，…，A_k 中每 r 个的交非空，因而有一个元素a在这r个的交集中. 这样得出 C_k^r 个 a，它们互不相同(否则，a属于$r+1$个A_i的交集)，所以 $C_k^r\leqslant n$.

例 3 A_1，A_2，…，A_n 都是集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的二元子集. 并且在$A_i\cap A_j\neq\varnothing$时，$A_i$，$A_j$ 中有一个是 $\{a_i, a_j\}$ (i，$j\in\{1, 2, \cdots, n\}$，$i\neq j$). 证明$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中每一个元素恰好在两个$A_i$中.

解 设元素a_j属于m_j个A_i（$1\leqslant i\leqslant n$）. 本节开始所说的集合与元素的数表中，每行有两个1，所以表中数的总和为 $2n$. 而第j列的列和为m_j，于是

$$\sum_{j=1}^{n} m_j=2n. \tag{1}$$

另一方面，如果有某个$m_j>2$，那么至少有三个子集含

有 a_j，其中有两个为 A_s，A_t（s，t 均不等于 j）．但根据已知条件，由于 $A_s\cap A_t$ 非空（含有 a_j），其中必有一个为 $\{a_s, a_t\}$，不含有 a_j，矛盾！因而每个 $m_j\leqslant 2$.

结合（1）使得每个 $m_j=2$.

例 4 m 为正偶数．集 A_1，A_2，…，A_{m+1} 都是 m 元集，$B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m+1}$，并且

(i) $A_i\cap A_j$ 都是恰含一个元素的集，$i\neq j$，i，$j\in\{1, 2, \cdots, m+1\}$.

(ii) B 中每一个元素 x 至少属于 A_1，A_2，…，A_{m+1} 中的两个集.

问对怎样的 m，能够将集 B 中的每个元素标上 0 或 1，使每个 A_i 中恰有 $\frac{m}{2}$ 个 0？

解 考虑本节开始所说的数表，表中每一行有 m 个 1.

由于（ii），每一列至少有两个 1．如果某一列有 3 个或更多个1，不妨设第一列有三个 1，并且其中有一个在第 $m+1$ 行．这时，第 $m+1$ 行的 m 个1，不妨假定在前 m 列．根据（ii），这前 m 列中每一列至少还有一个 1，而第一列还有两个1．这 $m+1$ 个 1 分布在前 m 行，必有一行含两个（或更多个）1，这与（i）矛盾（$A_i\cap A_{m+1}$ 只含一个元素）．因此，每一列恰有两个1.

如果能将 B 中每个数标上 0 或1，使每个 A_i 中恰有 $\frac{m}{2}$ 个 0．我们将数表中标 0 为元素取消（即将这元素所在的列删去）．这时每一行有 $\frac{m}{2}$ 个 1，共有 $\frac{m(m+1)}{2}$ 个1.

另一方面，每列恰有两个1，因此表中 1 的个数是偶数.

综合起来，得到$\frac{m(m+1)}{2}$是偶数．但m是偶数，所以$m+1$是奇数，$\frac{m}{2}$必须是偶数，即m是4的倍数．

反之，设$m=4k$．作$C_{m+1}^2=\frac{m(m+1)}{2}$个数组$(i,\ j)$，$i,\ j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m+1\}$，$i\neq j$．$B$就是这些(无序的)二元数组的集合．而子集$A_i$就是含$i$的$m$个二元数组所成的集$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m+1)$．不难验证条件(i)、(ii)均成立．

将1，2，…，$m+1$依次排在圆周上．对于i，如果j是它左(右)侧与它相距最近的k个数之一，那么元素$(i,\ j)$就标上1．否则标上0．当j是i左(右)侧与i相距最近的k个数之一时，i也是j右(左)侧与j相距最近的k个数之一，所以上面的标数方法是唯一确定的．容易验证这时每个A_i恰有$\frac{m}{2}$个元素标上0．

例 5　$n\geqslant 2$．对于任意正整数k，求最小的正整数$f(k)$，使得有n个集合A_1，A_2，…，A_n，满足

(i)　$|A_i|=k$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$．

(ii)　$A_i\cap A_{i+1}=\varnothing$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$．$A_{n+1}=A_1$．

(iii)　$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=f(k)$．

解　n为偶数时，$f(k)=2k$．事实上，k元集合$A_1=A_3=\cdots=A_{n-1}$与$A_2=A_4=\cdots=A_n$在$A_1\cap A_2=\varnothing$时满足所有条件．$2k$显然是最小值．

n为奇数$2m+1$时，

$$f(k)=2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right].\tag{2}$$

证明如下：

考虑集 A_1, A_2, $\cdots$, A_{2m+1} 与其元素的关系表(即本节开始时所说的表).

一方面，表中每行有 k 个1，共有 $k(2m+1)$ 个 1.

另一方面，每一列至多 m 个1(由于 (ii))，因此 $f(k)$ 列至多 $mf(k)$ 个1.

从而

$$f(k)\geqslant\frac{k(2m+1)}{m}=2k+\frac{k}{m},$$

即

$$f(k)\geqslant 2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right]. \qquad (3)$$

为了证明(3)中等号成立，取 $2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right]$ 列并且 $k(2m+1)$ 个 1 填入 n 行的表中. 填法是从第一列开始填，行数则按照 1, 3, 5, $\cdots$, $2m+1$, 2, 4, $\cdots$, $2m$, 1, 3, $\cdots$ 的次序，每填 m 个 1 就转入下一列. 这种填法是均匀的，所以 (i) 成立. (ii)、(iii) 也显然成立. 所以

$$f(k)\leqslant 2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right]. \qquad (4)$$

由(3)、(4)即得(2).

特别地，$n=3$ 时，$f(k)=2k$. 数表为表 2.

表 2

元素 / 集合	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\cdots$	x_{3k}
A_1	1			1				
A_2		1			1			
A_3			1			1		1

$n=5$ 时，$f(k)=2k+\left[\frac{k+1}{2}\right]$，数表为表 3.

表 3

集合＼元素	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	…
A_1	1		1			1		
A_2		1			1		1	
A_3	1			1		1		
A_4			1		1			
A_5		1		1			1	

例 6 设 A_1，A_2，…，A_n 是集 $M=\{1, 2, \cdots, m\}$ 的一族子集. 如果对 M 中任一对元素 x，y，总有 A_i，$A_i\cap\{x, y\}$ 恰含一个元素，则称这族子集是可分的. 如果 M 的每一个元素至少属于一个 A_i，则称这族子集是覆盖的. 对给定的 m，求最小的 $n=f(m)$，使得有一族子集 A_1、A_2，…，A_n，既是可分又是覆盖的.

解 考虑前面屡次使用的集合与元素的关系表. 在A_1，A_2，…，A_n 为覆盖的时，每一列至少有一个 1. 在 A_1，A_2，…，A_n 为可分的时，每两列均不完全相同.

由于表有 n 行，表中每个元素为 0 或 1，所以至多可以组成 2^n-1 个两两不同的列，每列元素不全为 0. 于是

$$2^n-1\geqslant m,$$

即

$$f(m)\geqslant[\log_2 m]+1. \tag{5}$$

另一方面，取 n 满足

$$2^n-1\geqslant m\geqslant 2^{n-1}, \tag{6}$$

作出 m 个不同的、由 0 与 1 组成并且不全为 0 的、长为 n 的列（因为 $2^n-1\geqslant m$，这是可以办到的）. 则这表的 n 行所代表的 n 个集既覆盖又可分. 因此，

$$f(m)\leqslant[\log_2 m]+1. \qquad (7)$$

综合(5)、(7)得

$$f(m)=[\log_2 m]+1.$$

例 7 $A_1, A_2, \cdots, A_{30}$ 都是 $\{1, 2, \cdots, 1990\}$ 的子集，每个 A_i 中至少有 660 个元素. 证明有两个集 A_i, A_j $(i\neq j,\ i,\ j\in\{1, 2, \cdots, 30\})$ 的交至少有 200 个元素.

解 不妨设每个 $|A_i|=660$（否则去掉一些元素）.

在集合、元素的关系表中，每行有 660 个 1，因此，30 行共有 30×660 个1.

设第 j 列有 m_j 个 1 $(j=1, 2, \cdots, 1990)$，则

$$\sum_{j=1}^{1990} m_j=30\times 660. \qquad (8)$$

每个元素 j 属于 $C_{m_j}^2$ 个交集 $A_s\cap A_t$，因此

$$\sum_{j=1}^{1990} C_{m_j}^2=\sum_{1\leqslant s<t\leqslant 30}|A_s\cap A_t|. \qquad (9)$$

由 Cauchy 不等式

$$\sum_{j=1}^{1990} C_{m_j}^2=\frac{1}{2}(\Sigma m_j^2-\Sigma m_j)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1990}(\Sigma m_j)^2-\Sigma m_j\right),$$

所以必有 $i\neq j$，满足(参见第 6 节)

$$|A_i\cap A_j|\geqslant\frac{1}{C_{30}^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1990}(\Sigma m_j)^2-\Sigma m_j\right)$$

$$=\frac{(\Sigma m_j)\times(\Sigma m_j-1990)}{30\times 29\times 1990}$$

$$=\frac{30\times660\times(30\times660-1990)}{30\times29\times1990}>200.$$

数表(矩阵)除了表示集合、元素的关系，还有多种用途.

例 8 设

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \tag{10}$$

为前 n 个自然数 1, 2, …, n 的一个排列. g_k 表示序列(10) 中 a_k 左面（即 a_1, a_2, …, a_{k-1} 中）$>a_k$ 的数的个数，f_k 表示序列(10)中 a_k 右面（即 a_{k+1}, a_{k+2}, …, a_n 中）$<a_k$ 的数的个数. 证明

$$\sum_{k=1}^{n}f_k=\sum_{k=1}^{n}g_k. \tag{11}$$

解 考虑一个 $n\times n$ 的矩阵（数表）. 它的第 i 行第 j 列（$j=1$, 2, …, $i-1$）交叉处的数在 $a_i<a_j$ 时为1，否则为0（$i=1$, 2, …, n）. 表中其他的数均为 0 .

这表的第 k 行的数的和为 g_k，所以表中所有数的和是 $\sum\limits_{k=1}^{n}g_k$.

另一方面，如果在第 k 列、第 i 行的数为1，那么 $k<i$ 并且 $a_k>a_i$. 所以第 k 列的1表示 a_{k+1}, a_{k+2}, …, a_n 中 $<a_k$ 的数 a_i，从而第 k 列的数的和为 f_k，所以表中所有数的和是 $\sum\limits_{k=1}^{n}f_k$.

综合以上两个方面，即得(11).

例 9 证明不存在一个 11 项的数列，每连续五项的和为负值，每连续 7 项的和为正值.

解 设有一个数列 a_1, a_2, …, a_{11}. 每连续五项的和为负值，每连续 7 项的和为正值.

作出5×7的表

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\
a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{12}
\end{array}$$

一方面，每一行和为正，总和为正.

另一方面，每一列和为负，总和为负.

两方面的结果矛盾！这表明满足题述条件的数列不存在.

例 10 作 $\{1, 2, \cdots, 13\}$ 的 13 个子集，每个子集含 4 个元素，每个元素恰在 4 个子集中出现，并且每两个子集恰有一个公共元.

解 考虑表 4.

表 4

集合 \ 元素	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A_1	1	1	1	1									
A_2	1				1	1	1						
A_3	1							1	1	1			
A_4	1										1	1	1
A_5		1			1			1			1		
A_6		1				1			1			1	
A_7		1					1			1			1
A_8			1		1				1				1
A_9			1			1				1	1		
A_{10}			1				1	1				1	
A_{11}				1	1					1		1	
A_{12}				1		1		1					1
A_{13}				1			1		1		1		

这13个集 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 5, 6, 7\}$, $\{1,8,9,10\}$, $\{1, 11, 12, 13\}$, $\{2, 5, 8, 11\}$, $\{2, 6, 9, 12\}$, $\{2, 7, 10, 13\}$, $\{3, 5, 9, 13\}$, $\{3, 6, 10, 11\}$, $\{3, 7, 8, 12\}$, $\{4, 5, 10, 12\}$, $\{4,6,8,13\}$, $\{4,7,9,11\}$即为所求.

由于每两个子集只有一个公共元素，上面的数表（将第i行第j列当作格点(i, j)）也表明在13×13个格点的集合$\{(i, j), 1\leqslant i, j\leqslant 13\}$中，含有一个52个点的子集，其中任意4个点不构成一个边与坐标轴平行的矩形.

而前12行表明在集合$\{(i, j), 1\leqslant i\leqslant 12, 1\leqslant j\leqslant 13\}$中，有一个48个点组成的子集，其中任意4个点不构成边与坐标轴平行的矩形.

例 11 A, B, C, D, E五个人参加一次考试，试题七道，都是判断题，认为正确的就打✓，认为错误的就打×. 每题答对的得1分，答错的扣1分，不答的得0分. 五人的答案见表5. 如果A, B, C, D各得2分，问E得多少分？正确的答案应当是什么？

表 5

题＼人	A	B	C	D	E
1	✓	✓		×	✓
2		×	✓	×	✓
3	×	✓	×	×	×
4	✓	✓	×	✓	
5	×	×	✓	✓	✓
6	✓	×	×		×
7	✓		✓	×	✓

解 暂时去掉第五列．这时将每一行中的✓与×抵消，得出七行的行和分别为✓、×、2个×、2个✓、0、×、✓．✓与×共8个．由于A，B，C，D各得2分，共得8分．所以上面每个符号都是该行的正确答案，各代表1分．即第一、二、三、四、六、七的正确答案分别为✓、×、×、✓、×、✓．再与A比较即知第五题答案为✓．从而E得4分．

例 12 30名朋友互相访问．每人每天可以访问许多朋友，但有朋友来访问的那天，他不能外出访问，为了使每个人访问了所有的朋友，

(i) 5天是不够的．

(ii) 7天是够的．

试证明上面的结论．

解 (i) 考虑一个30×5的数表，如果第i个人在第j天不外出访问，就在第i行第j列交叉处写上1，否则就写上0．

显然，每一行不能全为0（若第i行全为0，则没有人访问i），也不能全为1（i没有访问其他人）．

每一行都是由0，1组成的五项的数列，不全为0、不全为1．这样的数列至多

$$2^5-2=30$$

个．

如果有两行相同，设第一、二行相同，则1，2不可能互访，所以每两行互不相同，从而各是上述30个数列中的一个；

不妨设第一行是(1,0,0,0,0)，第二行是(1,1,0,0,0)，则1未访问2．这表明5天总是不够的．

(ii) 考虑30×7的数表．由于

$$C_7^3=35>30,$$

我们将每一行写上3个1，这些1所在的列i，j，k，分别对应于7列中取3列(共有35种方法)的一个排列．不同的行对应于不同的排列．

这样写好后，对于人i，j，由于A_i与A_j不同，必有一列k，第i行第k列为1而第j行第k列为0，这表明j在第k天访问i．所以7天是足够的．

8 交换和号

下面是一个 m 行 n 列的矩阵(数表).

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \tag{1}$$

第 i 行的和 ($i=1, 2, \cdots, m$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in},$$

记为 r_i. 第 j 列的和 ($j=1, 2, \cdots, n$)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj},$$

记为 c_j. 显然行和的和与列和的和相等,并且都等于矩阵中所有元素的和,即

$$\sum_{i=1}^{m} r_i=\sum_{j=1}^{n} c_j=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij}. \tag{2}$$

(2)也可以写成

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \tag{3}$$

即二重和的和号(求和次序)可以交换.

对于有限多项的和来说,这个结论是显然的,它是加法交换律的简单应用. 当项数变为无穷或者(一个或两个)和号

变为积分号时，往往要增添一些条件，相应的结论才能成立。其中最著名的是关于二重积分的富比尼定理．这也正是“算两次”被冠以富比尼原理的缘由．

和号的交换是解决很多问题的关键，这是一种简单实用的方法．

例 1 设 $a_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$．证明

$$\frac{a_1}{1\times(1+1)}+\frac{a_1+2a_2}{2\times(2+1)}+\cdots+\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$$

$$<\sum_{i=1}^{n}a_i. \tag{4}$$

解 左边 $=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k}ia_i}{k(k+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{ia_i}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{ia_i}{k(k+1)}\quad\text{（交换和号）}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}ia_i\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}ia_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$<\sum_{i=1}^{n}ia_i\cdot\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

其中交换和号的那一步，需要注意“哑标” k，i 的变化范围．我们是对一个“上三角阵”求和：

$i \backslash k$	1	2	3	$\cdots$	n
1	$\frac{a_1}{1\cdot 2}$	$\frac{a_1}{2\cdot 3}$	$\frac{a_1}{3\cdot 4}$	$\cdots$	$\frac{a_1}{n(n+1)}$
2		$\frac{2a_2}{2\cdot 3}$	$\frac{2a_2}{3\cdot 4}$	$\cdots$	$\frac{2a_2}{n(n+1)}$
3			$\frac{3a_3}{3\cdot 4}$	$\cdots$	$\frac{3a_3}{n(n+1)}$
$\vdots$				$\ddots$	$\cdots$
n					$\frac{na_n}{n(n+1)}$

这个矩阵的左下方全是 0．所以第 k 列的和只有 k 项相加（i 从 1 到 k），而第 i 行的和则从第 i 个数开始（前 $i-1$ 个数为 0）直加至第 n 个数．

在交换和号时，一定要正确地确定求和的范围．熟练之后，是不难迅速地做到这一点的．

例 2 设 $a_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$．证明

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}. \qquad (5)$$

解 由 Cauchy 不等式，

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i}\cdot\frac{i}{\sqrt{a_i}}\right)^2=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

所以

$$\begin{aligned}(5)\text{式左边}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right)\cdot\left(\frac{2}{k(k+1)}\right)^2\right)\\&=4\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k}{k^2(k+1)^2}\cdot\frac{i^2}{a_i}\right)\end{aligned}$$

$$=4\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{k}{k^2(k+1)^2}\quad(\text{交换和号})$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

例 2 与例 1 类似，交换和号之后，“内和”$\left(\sum\frac{1}{k^2(k+1)}\right.$ 或 $\left.\sum\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right)$可以计算或者估算，这正是为什么要交换和号的理由.

有许多组合恒等式(含有组合数的恒等式)可以用交换和号的方法来证明.

例 3 证明

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}kC_{n-k}^{r-1}=C_{n+1}^{r+1}. \tag{6}$$

解 左边$=\sum_{k=1}^{n-r+1}C_{n-k}^{r-1}\sum_{i=1}^{k}1$

$$=\sum_{i=1}^{n-r+1}\sum_{k=i}^{n-r+1}C_{n-k}^{r-1}\quad(\text{交换和号})$$

$$=\sum_{i=1}^{n-r+1}1\,C_{n-i+1}^{r}\quad(\text{第 4 节}(1'))$$

$$=C_{n+1}^{r+1}\quad(\text{第 4 节 }(1').$$

我们将 k 变为和 $\sum_{i=1}^{k}1$，从而产生了双重和号(于是可以交换和号)，这一技巧值得注意.

例 4 证明李善兰(清末数学家)恒等式

$$\sum_{j\geqslant 0} C_k^j C_l^j C_{n+k+l-j}^{k+l} = C_{n+k}^k C_{n+l}^l. \tag{7}$$

解 利用第 4 节例 7 的范德蒙恒等式,

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \sum_{j\geqslant 0} C_k^j\ C_l^j \sum_{v\geqslant j} C_{n+k}^{k+v}\ C_{l-j}^{l-v} \\
&= \sum_{v\geqslant 0} C_{n+k}^{k+v} \sum_{j\geqslant 0} C_k^j\ C_l^j\ C_{l-j}^{l-v} \\
&= \sum_{v\geqslant 0} C_{n+k}^{k+v}\ C_l^v \sum_{j\geqslant 0} C_k^j\ C_v^{v-j} \\
&= \sum_{v\geqslant 0} C_{n+k}^{k+v}\ C_l^v\ C_{k+v}^v \\
&= C_{n+k}^k \sum_{v\geqslant 0} C_n^{n-v}\ C_l^v \\
&= C_{n+k}^k\ C_{n+l}^n.
\end{aligned}$$

证明的第一步利用范德蒙恒等式生出一和,最后又两次利用这个恒等式来求和.

和号中的哑标未写出上界,这是由于 C_m^n 在 $n>m$ 或 $n<0$ 时,值为 0 . 利用这一约定往往是方便的(无需考虑哑标的取值范围).

例 5 证明在自然数 $h\leqslant n$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n} 4^h \cos^{2h} \frac{k\pi}{2n+1} = (2n+1)\, C_{2h-1}^{h-1} - 2^{2h-1}. \tag{8}$$

解 由于 $\cos^2\dfrac{(2n+1)-k}{2n+1}\pi = \cos^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$, 所以(8)等价于

$$\sum_{k=0}^{2n} 4^h \cos^{2h} \frac{k\pi}{2n+1} = 2(2n+1)\, C_{2h-1}^{h-1}. \tag{9}$$

(9)式的左边是(8)式左边的两倍加上 4^h (即 $k=0$ 的那一项). 它是一个"完整和",即求和符号遍及 0, 1, …, $2n$ 这 $2n+1$ 个连续整数.

熟知在 $|l|<m$ 时(由等比数列求和公式)，"完整和"

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi ikl/m} = \begin{cases}0, & l\neq 0\\ m, & l=0\end{cases} \tag{10}$$

所以

$$\begin{aligned}(9)\text{式左边} &= \sum_{k=0}^{2n}\left(e^{\frac{k\pi i}{2n+1}} - e^{-\frac{k\pi i}{2n+1}}\right)^{2h}\\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2h} C_{2h}^{j}\, e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}(h-j)}\\ &= \sum_{j=0}^{2h} C_{2h}^{j} \sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}(h-j)}\\ &= C_{2h}^{h}\cdot(2n+1),\end{aligned}$$

即(9)式成立.

在计算含单位根的指数和（或与之密切相关的三角和）时，常常先配成"完整和"，然后再交换和号，以便利用(10).

下面的例6也要利用(10)，但生成内和的手法稍微复杂一些.

例 6 证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}} = \frac{n^2-1}{3}. \tag{11}$$

解 不难证明

$$|1-e^{2\pi ki/n}|^2 = 4\sin^2\frac{k\pi}{n} \tag{12}$$

及

$$\sum_{h=0}^{n-1} h e^{2\pi khi/n} = \frac{n}{e^{2\pi ik/n}-1}\quad(1\leqslant k\leqslant n-1). \tag{13}$$

((13)的证法很多. 例如：在 $q^n=1$ $(q\neq 1)$ 时，

$$\begin{aligned}&(q-1)(q+2q^2+\cdots+(n-1)q^{n-1})\\ &\quad= q^2+2q^3+\cdots+(n-1)q^n-q-2q^2-\cdots-(n-1)q^{n-1}\end{aligned}$$

$$=-q-q^2-\cdots-q^{n-1}-q^n+n=n.\text{)}$$

所以，

$$(11)\text{式左边}=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n^2}{|1-e^{2\pi ki/n}|^2}$$

$$=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1}h\ e^{2\pi khi/n}\sum_{h'=0}^{n-1}h'e^{-2\pi kh'i/n}$$

$$=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{h'=0}^{n-1}hh'e^{2\pi ik(h-h')/n}\right.$$

$$\left.-\sum_{h=0}^{n-1}h\sum_{h'=0}^{n-1}h'\right)$$

$$=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{h'=0}^{n-1}hh'\sum_{k=0}^{n-1}e^{2\pi ik(h-h')/n}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2\right)$$

$$=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{h=0}^{n-1}h^2n-\frac{n^2(n-1)^2}{4}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(n-1)(2n-1)-(n-1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)(n+1)=(11)\text{式右边}.$$

在数论中，交换和号的例子更多.

例 7 设 $r(n)$ 为 n 除以 1，2，…，n 所得的 n 个余数的和. 证明有无穷多个 n，使

$$r(n)=r(n-1)\tag{14}$$

成立.

解 设 n 除以 k 所得余数为 r_k，$0\leqslant r_k<k$. 则有

$$n=k\left[\frac{n}{k}\right]+r_k,\tag{15}$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分(第3节)．由(15)，

$$r_k=n-k\left[\frac{n}{k}\right],$$

所以 $r(n)$ 的表达式为

$$r(n)=\sum_{k=1}^{n} r_k=\sum_{k=1}^{n}\left(n-\left[\frac{n}{k}\right]k\right)$$

$$=n^2-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]k. \tag{16}$$

现在我们在(16)的和号中再“生出”一和．

注意

$$\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{m\leqslant\frac{n}{k}} 1,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]k=\sum_{k=1}^{n} k\sum_{m\leqslant\frac{n}{k}} 1. \tag{17}$$

改记 mk 为 l，则 $l\leqslant n$，$k\mid l$ (k 整除 l)，

$$\sum_{k=1}^{n} k\sum_{m\leqslant\frac{n}{k}} 1=\sum_{k=1}^{n} k\sum_{\substack{l\leqslant n\\ k\mid l}} 1$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k\mid l} k=\sum_{l=1}^{n}\sigma(l), \tag{18}$$

这里

$$\sigma(l)=\sum_{k\mid l} k \tag{19}$$

表示 l 的(正)因数的和．

由(16)、(17)、(18)得

$$r(n)-r(n-1)=n^2-(n-1)^2-\sum_{l=1}^{n}\sigma(l)+\sum_{l=1}^{n-1}\sigma(l)$$

$$=2n-1-\sigma(n). \tag{20}$$

因此，(14)等价于

$$\sigma(n)=2n-1. \tag{14'}$$

取 $n=2^m$，则 n 的正因数为 1，2，2^2，…，2^m.

$$\sigma(n)=1+2+2^2+\cdots+2^m=2^{m+1}-1=2n-1.$$

这样的 n 显然有无穷多个，它们使(14')，从而(14)成立.

和(17)与$\left(\text{曲线 } y=\dfrac{n}{x}\text{下方的}\right)$格点有关，参见第3节例6.

很多交换和号的问题与麦比乌斯 (Möbius) 函数 $\mu(n)$ 有关. 这是一个奇妙的函数，定义极简单，用处却非常之大.

定义

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1.\\ (-1)^k, & n\text{ 为 }k\text{ 个不同质数的积}.\\ 0, & n\text{ 被一个质数的平方整除}.\end{cases} \tag{21}$$

$\mu(n)$ 有一种重要的性质，即下面的(22).

例 8 证明 $$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{若 } n=1.\\ 0, & \text{若 } n>1.\end{cases} \tag{22}$$

解 $n=1$ 时，(22)显然成立. 设 $n>1$ 的分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}. \tag{23}$$

由于在 d 含平方因数时，$\mu(d)=0$，所以

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\sum_{d\mid p_1p_2\cdots p_k}\mu(d).$$

表达式

$$(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k) \tag{24}$$

展开后就得出 $p_1p_2\cdots p_k$ 的所有因数之和，将其中的 p_i 均换为 -1，则每个因数 d 换成了 $\mu(d)$，所以

$$\sum_{d\mid p_1p_2\cdots p_k}\mu(d)=(1-1)(1-1)\cdots(1-1)=0.$$

即(22)成立.

例 9 证明

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]=1. \tag{25}$$

解 左边$=\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{k\leqslant\frac{n}{d}} 1$

$$=\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\substack{l\leqslant n\\ d\mid l}} 1$$

$$=\sum_{l=1}^{n} \sum_{d\mid l} \mu(d)$$

$$=1.$$

最后一步利用了(22)：仅在 $l=1$ 时，内和不是 0．

例 10 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不超过 n、并且与 n 互质的自然数的个数．证明

$$\varphi(n)=n\sum_{d\mid n} \frac{\mu(d)}{d}. \tag{26}$$

解 由定义，$\varphi(n)$ 可表成和式：

$$\varphi(n)=\sum_{\substack{m\leqslant n\\ (m,n)=1}} 1. \tag{27}$$

利用(22)可将条件 $(m, n)=1$ (m, n 互质)化为(生成)一个和：$\sum_{d\mid(m,n)} \mu(d)$．因此由(27)，

$$\varphi(n)=\sum_{m=1}^{n} \sum_{d\mid(m,n)} \mu(d)$$

$$=\sum_{d\mid n} \mu(d) \sum_{\substack{m=1\\ d\mid m}}^{n} 1$$

$$=\sum_{d\mid n} \mu(d)\cdot\frac{n}{d},$$

即(26)成立.

最后一步是由于 1，2，…，n 中，d 的倍数恰有 $\left[\dfrac{n}{d}\right]=\dfrac{n}{d}$ 个（由于 $d\mid n$）.

设 n 的分解式为(23)，则与例 8 证明中的步骤类似，由(26)可得

$$\varphi(n)=n\sum_{d\mid p_1p_2\cdots p_k}\frac{\mu(d)}{d}$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

（在(24)中 将 p_i 换为 $-\dfrac{1}{p_i}$）. 这是 $\varphi(n)$ 的计算公式.

函数 $\mu(n)$ 在所谓反演公式中起重要的作用.

例 11 设 $f(n)$，$g(n)$ 为自然数集 N 上的函数，则

$$f(n)=\sum_{d\mid n}g(d) \tag{28}$$

与

$$g(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right) \tag{29}$$

等价. 即由(28)可导出(29)，反之亦然.

解 设(28)成立，则

$$f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{\delta\mid\frac{n}{d}}g(\delta),$$

所以

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{\delta\mid\frac{n}{d}}g(\delta)$$

$$=\sum_{\delta\mid n}g(\delta)\sum_{d\mid\frac{n}{\delta}}\mu(d)$$

$$=g(n).$$

最后一步利用了(22)：仅在 $\delta=n$ 时，内和不是 0.

反之，设(29)成立，则

$$g(d)=\sum_{\delta\mid d}\mu(\delta)f\left(\frac{d}{\delta}\right)=\sum_{t\mid d}\mu\left(\frac{d}{t}\right)f(t),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}g(d)&=\sum_{d\mid n}\sum_{t\mid d}\mu\left(\frac{d}{t}\right)f(t)\\&=\sum_{t\mid n}f(t)\sum_{\substack{\frac{d}{t}\mid\frac{n}{t}\\ t\mid d}}\mu\left(\frac{d}{t}\right)\\&=f(n).\end{aligned}$$

如果 $f(n)$，$g(n)$ 满足(28)，则 $f(n)$ 称为 $g(n)$ 的麦比乌斯变换，而 $g(n)$ 称为 $f(n)$ 的麦比乌斯逆变换.

(26)表明 n 是 $\varphi(n)$ 的麦比乌斯变换，所以由例11(反演公式)，

$$n=\sum_{d\mid n}\varphi(d). \tag{30}$$

下面再举几个使用反演公式(28)或(29)的例子（例 12—例14).

例 12 用黑白两种颜色的珠子作项链．如果共用珠 m 颗，$l\mid m$，每隔 l 颗(第 1 颗与第 $l+1$ 颗，第 2 颗与第 $l+2$ 颗等等)颜色总是相同的，并且 l 是具有这一性质的最小的数(即 l 是"最小正周期")．问这样的项链有多少种?

解 设这样的项链有 $A(l)$ 种，每一种由长为 l 的一段完全确定．在这一段中，每个珠子可白可黑,共有 2^l 种不同的排列．它们产生以 l 为最小周期的，或者以 l 的某一因数 d 为最小周期的项链.

以 d 为最小周期的有 $A(d)$ 种．将每一种向前平移 0，

1，…，$d-1$ 颗珠子得到的是同一种项链，但在长为 l 的那一段中产生 d 种不同的排列（如0101…移动后变成1010…，形成 2 种不同的排列），所以

$$2^l=\sum_{d\mid l}dA(d) \tag{31}$$

(31)表明 2^l 是函数 $lA(l)$ 的麦比乌斯变换，由反演公式

$$lA(l)=\sum_{d\mid l}\mu(d)\cdot 2^{l/d},$$

即以 l 为最小正周期的项链种数为

$$A(l)=\frac{1}{l}\sum_{d\mid l}\mu(d)\cdot 2^{l/d}. \tag{32}$$

例 13 用黑白两种颜色的珠子作项链．证明由 m 颗珠子组成的项链共有

$$\frac{1}{m}\sum_{d\mid m}\varphi(d)\cdot 2^{m/d} \tag{33}$$

种，其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数．

解 项链的种数为

$$\begin{aligned}
\sum_{l\mid m}A(l)&=\sum_{l\mid m}\frac{1}{l}\sum_{d\mid l}\mu(d)\cdot 2^{l/d}\\
&=\sum_{t\mid m}\sum_{d\mid\frac{m}{t}}\frac{\mu(d)}{td}\cdot 2^t \quad (\text{设 } l=td)\\
&=\sum_{t\mid m}\frac{2^t}{t}\cdot\frac{\varphi\left(\frac{m}{t}\right)}{\frac{m}{t}} \quad ((26))\\
&=\frac{1}{m}\sum_{t\mid m}\varphi\left(\frac{m}{t}\right)\cdot 2^t\\
&=\frac{1}{m}\sum_{d\mid m}\varphi(d)\cdot 2^{m/d}.
\end{aligned}$$

例 14 多项式 $(1-x)^{b_1}(1-x^2)^{b_2}\cdots(1-x^{32})^{b_{32}}$，其中 b_j $(1\leqslant j\leqslant 32)$ 为正整数，具有如下性质：将它乘开后，如果忽略 x 的高于32次的那些项，留下的是 $1-2x$. 试求 b_j $(1\leqslant j\leqslant 32)$.

解 我们需要对数函数的展开式

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right). \tag{34}$$

在等式

$$(1-x)^{b_1}(1-x^2)^{b_2}\cdots(1-x^{32})^{b_{32}}\equiv 1-2x \pmod{x^{33}}$$

两边取对数后再展开. 左边成为

$$\sum_{j=1}^{32} b_j \ln(1-x^j)=-\sum_{j=1}^{32} b_j \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{nj}}{n},$$

右边(略去高于32次的项)成为

$$\ln(1-2x)\equiv-\sum_{k=1}^{32}\frac{2^k}{k}x^k \pmod{x^{33}}.$$

由于

$$-\sum_{j=1}^{32} b_j \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{nj}}{n}=-\sum_{j=1}^{32} b_j \sum_{\substack{k=1\\ j\mid k}}^{\infty}\frac{jx^k}{k}$$

$$\equiv-\sum_{k=1}^{32}\left(\sum_{j\mid k}\frac{jb_j}{k}\right)x^k \pmod{x^{33}},$$

比较 x^{33} 的系数得

$$2^k=\sum_{j\mid k} jb_j.$$

因此由反演公式

$$b_j=\frac{1}{j}\sum_{d\mid j}\mu(d)\cdot 2^{j/d},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ 32.$$

这恰巧是例12中的 $A(j)$.

例 15 证明对欧拉函数 $\varphi(n)$，有

$$\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\left[\frac{n}{d}\right]=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (33)$$

解 与例9相同，在左边的和中生和得

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\left[\frac{n}{d}\right]&=\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\sum_{k\leqslant n/d}1\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{d\mid j}\varphi(d)\ (\text{设}\ j=kd\ \text{并交换和号})\\&=\sum_{j=1}^{n}j\ \ (\text{利用}(30))\\&=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

首先写出一个和式，再在和式里面"生出"一个和式，然后交换和号．这是数论中惯用的手法．例7、例15都是这样做的．

9 函数、运算

函数方程，给出了计算函数值的两种(或几种)方法.

例 1 函数f定义在自然数集 N 上，并且具有性质：

(i) $f(f(n))=4n+9$，对所有 $n\in N$.

(ii) $f(2^k)=2^{k+1}+3$， 对所有 $k\in N\cup\{0\}$.

求$f(1789)$

解 性质 (i) 使我们可以用两种方法计算$f(f(f(n)))$，从而有

$$f(4n+9)=f(f(f(n)))=4f(n)+9. \qquad (1)$$

由于

$$\begin{aligned}1789&=4\times 445+9,\\445&=4\times 109+9,\\109&=4\times 25+9,\\25&=4\times 2^2+9,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f(1789)&=4f(445)+9\\&=4(4f(109)+9)+9\\&=4^2f(109)+4\times 9+9\\&=\cdots\\&=9+4\times 9+4^2\times 9+4^3\times 9+4^4f(2^2)\\&=9+4\times 9+4^2\times 9+4^3\times 9+4^4(2^2+2^2+3)\\&=1789+4^4\times(2^2+3)\\&=3581.\end{aligned}$$

例 2 设f为 $[0,1]$ 上的函数，满足

(i) $f(0)=0,\quad f(1)=1.$

(ii) 对所有 $x,\ y\in[0,1]$，$\quad x\leqslant y$，

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=(1-a)f(x)+af(y),$$

其中a是一个实数，$0<a<1$.

求 $f\left(\dfrac{1}{7}\right)$.

解 由性质 (ii) 得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=(1-a)f(0)+af(1)=a,\qquad(2)$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=af\left(\frac{1}{2}\right)=a^2,$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)=(1-a)f\left(\frac{1}{2}\right)+af(1)$$

$$=2a-a^2.$$

由于有了$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$、$f\left(\dfrac{3}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$可以用另一种方法来计算：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}\right)=(1-a)a^2+a(2a-a^2).\qquad(3)$$

综合(2)、(3)得

$$a=(1-a)a^2+a(2a-a^2),$$

从而

$$a(a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)=0,$$

求得 $a=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$.

特别地，取 $x=0$ 得

$$f\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(y).$$

于是

$$f\left(\frac{2}{7}\right)=2f\left(\frac{1}{7}\right),\quad f\left(\frac{4}{7}\right)=2f\left(\frac{2}{7}\right)=4f\left(\frac{1}{7}\right).$$

另一方面，

$$f\left(\frac{4}{7}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{7}+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{7}\right)+1\right),$$

所以

$$4f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{7}\right)+1\right),$$

$$f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}.$$

例 3 设函数 f：$N\to N$（即定义域为 N，函数值也在 N 中），满足

(i) f 严格增.

(ii) 对所有 m，$n\in N$，$f(mn)=f(m)f(n)$.

(iii) $f(2)=4$.

求 $f(1991)$.

解 由 (ii)，

$$f(n)=f(1)f(n),$$

所以 $f(1$

设对于 $\leqslant n$ 的数 $x\in N$，均有 $f(x)=x^2$.

若 $n+1$ 为合数，设 $n+1=ab$，$1<a$，$b<n+1$.

$$f(n+1)=f(ab)=f(a)f(b)=a^2b^2=(n+1)^2.$$

若 $n+1$ 为质数，则 $n+2$ 为合数，从而与上面相同，

$$f(n+2)=(n+2)^2.$$

一方面，

$$f^2(n+1)=f((n+1)^2)>f(n(n+2))=n^2(n+2)^2,$$

从而

$$f(n+1)\geqslant(n+1)^2. \qquad (4)$$

另一方面，取整数 $k>(n+1)^4$. 设 $h\in N$ 满足 $n^{h-1}<(n+1)^k<n^h$，则

$$f((n+1)^k)<f(n^h)=n^{2h}<(n+1)^{2k+2}<k(n+1)^{2k-2}$$
$$<((n+1)^2+1)^k,$$

从而

$$f(n+1)<(n+1)^2+1. \qquad (5)$$

综合(4)、(5)，即得 $f(n+1)=(n+1)^2$.

于是，恒有 $f(n)=n^2$. 特别地，

$$f(1991)=1991^2.$$

例 3 ($n+1$ 为质数时) 的证明是从两个方面来考虑 $f(n+1)$，(4)给出下界，(5)给出上界. 由上、下界的估计来确定一个量的技术我们已使用(并强调)过，请参考第五节例 9 .

例 4 a 为固定的自然数，求函数 f: N→R，满足：对任意 x、$y\in N$，$xy>a$ 均有

$$f(x+y)=f(xy-a). \qquad (6)$$

解 一个数可以用几种方式表示成两个数的和 $x+y$，利用这点就可以求出 f.

设 $t\in N$，则 $t+a=1\cdot(t+a)$，所以由(6)，

$$f(t)=f(1+(t+a))$$
$$=f((a+1)+t)=f((a+1)t-a)$$

$$=f(((t-1)a+t-1)+1)$$
$$=f(((t-1)a+t-1)-a)$$
$$=f(((t-2)a+t-2)+1)=\cdots$$
$$=f(1\cdot a+2)=f((a+1)+1)$$
$$=f((a+1)-a)=f(1).$$

即f是常数.

一个数集S中的运算$\circ$是$S\times S\to S$的一个二元函数，即对于S中的每两个元素a，b，S中有一个唯一的元素c与之对应，并记为

$$c=a\circ b.$$

例 4 在实数集R中定义一种运算$\circ$，具有性质：

(i) 对所有$a\in \mathrm{R}$，$0\circ a=a$.

(ii) 对a，b，$c\in \mathrm{R}$，

$$(a\circ b)\circ c=c\circ(ab)+(a\circ c)+(b\circ c)-2c.$$

求$(6\circ 4)\circ 1989$.

解 在(ii)中取$a=0$，并利用(i)得

$$b\circ c=(0\circ b)\circ c=c\circ 0+c+(b\circ c)-2c,$$

化简得

$$c\circ 0=c \tag{7}$$

(题中未假定$\circ$适合交换律，所以(7)不能由(i)直接推出).

再在(ii)中取$c=0$，并利用(7)得

$$a\circ b=(a\circ b)\circ 0=ab+a+b.$$

从而

$$(6\circ 4)\circ 1989=34\circ 1989=69649.$$

例 5 在实数集R中定义运算$\square$，满足

(i) $(x+y)(x\square y)=x^2\square y^2$（任意$x$，$y\in\mathrm{R}$）.

(ii) $x\square y=(x+z)\square(y+z)$（任意$x$，$y$，$z\in\mathrm{R}$）.

(iii) $1\square 0=1$.

求　$1991\square 1912$.

解　减法运算显然满足 (i)、(ii)、(iii)，我们证明

$$x\square y=x-y$$

确实成立.

在 (i) 中令 $x=y+1$，并利用 (ii)、(iii) 得 (i) 的左边

$$(2y+1)((y+1)\square y)=(2y+1)(1\square 0)=2y+1.$$

而 (i) 的右边

$$(y+1)^2\square y^2=(2y+1)\square 0.$$

因此

$$2y+1=(2y+1)\square 0.$$

即对任意 $x\in\mathrm{R}$，

$$x\square 0=x, \tag{8}$$

从而由 (ii)、(8)，

$$x\square y=(x-y)\square 0=x-y.$$

特别地

$$1991\square 1912=79.$$

例 6　在实数集R中定义运算 $*$ 满足

(i) $x*0=1$　(任意 $x\in\mathrm{R}$).

(ii) $(x*y)*z=(z*xy)+z$　(任意 $x, y, z\in\mathrm{R}$).

求　$31*32$.

解　在 (ii) 中取 $y=0$ 并利用 (i) 得

$$1*z=1+z. \tag{9}$$

于是，$(1*y)*1$ 有两种算法：利用 (ii)，

$$\begin{aligned}(1*y)*1&=(1*(1\cdot y))+1=(1*y)+1\\&=1+y+1=y+2;\end{aligned}$$

而由(9),

$$(1*y)*1=(1+y)*1.$$

综合上述二式得

$$(1+y)*1=y+2,$$

即

$$x*1=x+1. \tag{10}$$

于是,$(x*y)*1$ 有两种算法:由(10),

$$(x*y)*1=(x*y)+1;$$

由(ii)

$$(x*y)*1=(1*xy)+1=(xy+1)+1=xy+2.$$

综合上述二式得

$$x*y=xy+1.$$

特别地,

$$31*32=31\times 32+1=993.$$

代数学,研究的是各种代数系的构造.所谓代数系就是定义了某种(或某几种)运算的集合.

如果集 S 中的运算 $\circ$(通常称为乘法)适合结合律,即

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c), \tag{11}$$

我们称 S(对于运算$\circ$)为半群.

例 7 设 S 为半群,并且在 $a\neq b$ 时,

$$a\circ b\neq b\circ a.$$

证明对 S 中任意元素 a, b, c,

$$(a\circ b)\circ c=a\circ c \tag{12}$$

解 已知条件即

$$a\circ b=b\circ a\Longrightarrow a=b. \tag{13}$$

由于结合律,

$$(a\circ a)\circ a=a\circ(a\circ a).$$

由(13)得

$$a\circ a=a. \tag{14}$$

利用(14)得(由于结合律，我们省去一些括号)

$$a\circ(a\circ b\circ a)=(a\circ a)\circ b\circ a=a\circ b\circ a=(a\circ b\circ a)\circ a.$$

从而由(13)得

$$a\circ b\circ a=a. \tag{15}$$

最后利用(15)，

$$\begin{aligned}((a\circ b)\circ c)\circ(a\circ c)&=a\circ b\circ(c\circ a\circ c)=a\circ b\circ c\\&=(a\circ c)\circ(a\circ b\circ c).\end{aligned}$$

由(13)得

$$(a\circ b)\circ c=a\circ c.$$

在这个证明中，我们多次利用了同一个量的不同的表达式.

值得注意的是，我们先建立了(14)、(15)以备引用. 这些“根据地”既是初步的战果，又是全面胜利的条件. 在复杂的问题中，常常需要“步步为营”，得出一系列引理，以利问题的解决.

例 8 设 S 为半群，并且是有限集，证明 S 中存在元素 a，满足

$$a\cdot a=a. \tag{16}$$

解 设 $b\in S$，由于 S 为有限集，

$$b,\ b^2=b\circ b,\ b^3=b\circ b\circ b,\ b^4,\ b^5,\ \cdots$$

中必有相同的. 设 $h=k+t$，使得

$$b^k=b^h. \tag{17}$$

由于(17)，

$$b^k=b^h=b^{k+t}=b^{h+t}=b^{k+2t}=b^{h+2t}=b^{k+3t}=\cdots,$$

所以总可以假定 $h-k\geqslant k$ (否则用 $k+nt$ 代替 h)，从而

$$b^{2l}=b^{2(h-k)}=b^{h+(h-2k)}=b^{k+(h-2k)}=b^{h-k}=b^{l},$$

即 $a=b^l$ 满足(16).

如果 $e\in S$，对于 S 中任意一个元素 x，均有

$$e\cdot x=x\cdot e=x, \tag{18}$$

我们称 e 为 S 的单位元(么元).

例 9 设 S 为半群，并且有一个元素 a 具有性质：对任意 $x\in S$，存在 u，$v\in S$，满足

$$a\circ u=v\circ a=x.$$

证明 S 中有单位元.

解 由已知条件(取 $x=a$)，存在 $e\in S$，满足

$$a\circ e=a. \tag{19}$$

对于任意 $x\in S$，由已知条件，存在 $v\in S$，

$$v\circ a=x. \tag{20}$$

于是由(20)、(19)，

$$x\circ e=(v\circ a)\circ e=v\circ a=x. \tag{21}$$

另一方面，存在 e'，满足

$$e'\circ a=a. \tag{19'}$$

与(21)的证明类似可得

$$e'\circ x=x \tag{21'}$$

对任意 $x\in S$ 成立.

由(21)、(21′)，

$$e=e'\circ e=e'.$$

因此

$$x\circ e=e\circ x=x.$$

对所有 $x\in S$ 满足(21)的 e 称为右单位元，满足(21′)的 e' 称为左单位元. 如果 e 既是右单位元，又是左单位元，那么它就是单位元.

如果 S 是有单位元 e 的半群，并且 S 中任一元素 u 都可逆，即有 $v\in S$，使

$$u\circ v=v\circ u=e, \tag{22}$$

那么 S 称为群.

群是一个极为重要的数学概念.

例 10 如果半群 S 具有左单位元 e，并且

(i) 每一元素 $u\in S$ 有左逆元，即有 $v\in S$ 使

$$v\circ u=e.$$

(ii) 左消去律成立. 即对任意的 a，b，$c\in S$，

$$a\circ b=a\circ c\Longrightarrow b=c.$$

证明 S 是群.

解 对任意的 $u\in S$，有 $v\in S$，使

$$v\circ u=e,$$

从而

$$(v\circ u\circ v)\circ u=e=e\circ e=(v\circ u\circ v)\circ u\circ e. \tag{23}$$

由(23)消去 $v\circ u\circ v$ 得

$$u=u\circ e,$$

即 e 也是右单位元，从而 e 是单位元.

$$(v\circ u\circ v)\circ e=v\circ u\circ v=v\circ u\circ v\circ v\circ u\circ v,$$

消去 $v\circ u\circ v$ 得

$$e=u\circ v.$$

因此 v 也是 u 的右逆元，从而 u 可逆，S 为群.

例 11 S 中至少有两个元素. S 中的运算☆满足

(i) $(a☆b)☆a=a$.

(ii) $(a☆b)☆b=(b☆a)☆a$,

其中 a，b 为 S 中任意元素. 证明在 S 中交换律、结合律均不成立.

解 由 (i)，

$$a☆(a☆b)=((a☆b)☆a)☆(a☆b)=a☆b, \tag{24}$$

所以

$$\begin{aligned} a☆a &\overset{(i)}{=}((a☆b)☆a)☆a \\ &\overset{(ii)}{=}(a☆(a☆b))☆(a☆b) \\ &\overset{(24)}{=}(a☆b)☆(a☆b). \end{aligned} \tag{25}$$

从而

$$\begin{aligned} a☆a=(a☆b)☆(a☆b) &\overset{(25)}{=}((a☆b)☆b)☆((a☆b)☆b) \\ &\overset{(ii)}{=}((b☆a)☆a)☆((b☆a)☆a) \\ &\overset{(25)}{=}(b☆a)☆(b☆a)\overset{(25)}{=}b☆b. \end{aligned} \tag{26}$$

如果 $a☆b=b☆a$，那么

$$\begin{aligned} a &\overset{(i)}{=}(a☆b)☆a=(b☆a)☆a \\ &\overset{(ii)}{=}(a☆b)☆b=(b☆a)☆b\overset{(i)}{=}b. \end{aligned}$$

但 S 中有两个不同的元素，所以交换律在 S 中不成立.

如果结合律成立，那么

$$a☆b\overset{(24)}{=}a☆(a☆b)=(a☆a)☆b\overset{(26)}{=}(b☆b)☆b\overset{(i)}{=}b,$$

从而 (ii) 成为 $b=a$. 但 S 中有不相同的元素，所以结合律不成立.

例 12 集 S 中有运算 $\circ$，适合交换律、结合律. 又有一个函数 $f: S\to S$，满足

$$f(f(a)\circ b)\circ f(f(a)\circ f(b))=a, \tag{27}$$

其中 a, b 为 S 中任意元素. 证明对任意 $a\in S$，

(i) $f(f(a))=a$,

(ii) $a\circ a=a$.

解　为简便起见，将 $f(a)$ 改记为 $\bar a$，并且略去 $a\circ b$ 中的 $\circ$ 号，记之为 ab. 这样(27)可改写为

$$a=\overline{\bar a\,b}\;\;\overline{\bar a\,\bar b}. \tag{28}$$

对于任意的 a，$b\in S$，

$$a\bar a=(\overline{\bar a\,\bar b}\;\;\overline{\bar a\,\bar{\bar b}})(\overline{\bar{\bar a}\,\bar b}\;\;\overline{\bar{\bar a}\,\bar{\bar b}})$$

$$=(\overline{\bar b\,\bar a}\;\;\overline{\bar b\,\bar{\bar a}})(\overline{\bar{\bar b}\,\bar a}\;\;\overline{\bar{\bar b}\,\bar{\bar a}})=b\bar b.$$

这表明 $a\,\bar a$ 是 S 中一个固定的元素，与 a 的选择无关，记这个元为 β，并称之为吸收元. 我们有

$$\beta=a\;\bar a=\bar a\;\bar{\bar a}=\bar{\bar a}\;\bar{\bar{\bar a}}=aa\;\overline{aa}=\beta\bar\beta. \tag{29}$$

于是

$$\bar{\bar a}\overset{(28)}{=\!=}\overline{\bar{\bar{\bar a}}\,\bar a}\;\;\overline{\bar{\bar{\bar a}}\,\bar{\bar a}}\overset{(29)}{=\!=}\overline{\bar{\bar{\bar a}}\,\bar a}\;\;\overline{\bar{\bar a}\,\bar a}\overset{(28)}{=\!=}a, \tag{30}$$

这就是 (i)，

$$a\,\beta\overset{(29)}{=\!=}a\;a\;\bar a\overset{(28)}{=\!=}a\,a\,(\overline{\bar{\bar a}\;a}\;\;\overline{\bar{\bar a}\;\bar a})$$

$$\overset{(30)}{=\!=}(a\,a\;\;\overline{a\,a})\;\overline{a\,\bar a}\overset{(29)}{=\!=}\beta\;\bar\beta\overset{(29)}{=\!=}\beta. \tag{31}$$

(31)表明 β 可以“吸收”任意的 $a\in S$.

称 $\bar\beta$ 为单位元，我们有

$$\bar\beta\overset{(28)}{=\!=}\overline{\bar{\bar\beta}\cdot a}\;\;\overline{\bar{\bar\beta}\;\bar a}\overset{(30)}{=\!=}\overline{\beta\;a}\;\;\overline{\beta\;\bar a}\overset{(31)}{=\!=}\bar\beta\;\;\bar\beta, \tag{32}$$

$$a\;\bar\beta\overset{(28)}{=\!=}\overline{\bar a\;\beta}\;\;\overline{\bar a\;\bar\beta}\;\;\bar\beta\overset{(31)}{=\!=}\bar\beta\;\;\overline{\bar a\;\bar\beta}\;\;\bar\beta\overset{(32)}{=\!=}\bar\beta\;\;\overline{\bar a\;\bar\beta}=a. \tag{33}$$

最后，在(30)中将 a 换为 $\bar a$ 得

$$\bar a=\overline{\bar{\bar{\bar a}}\;\bar{\bar a}}\;\;\overline{\bar{\bar{\bar a}}\;\bar{\bar{\bar a}}}\overset{(30)}{=\!=}\overline{a\;a}\;\;\bar\beta\overset{(33)}{=\!=}\overline{a\;a}\overset{(28)}{=}\overline{a^2}.$$

所以

$$a=\bar{\bar a}=\overline{\overline{a^2}}=a^2,$$

即 (ii) 成立.

本例是一个相当困难的问题(其中吸收元、单位元的性质(31)、(32)、(33)都是我们的"滩头阵地",它们保证了"登陆战斗"的胜利),值得仔细玩味.

一个集合中的运算可以有好几种(例如整数集中有加法与乘法),研究这些运算之间的关系(例如分配律)是有意义的.

例 13 集 S 中有运算"+",对任意 $a, b, c\in S$,

$$(a+c)+(b+c)=a+b, \tag{34}$$

并且 S 中有一元素 e,对任意的 $a\in S$,

$$a+e=a, \tag{35}$$

$$a+a=e. \tag{36}$$

定义另一种运算 $*$ 为:

$$a*b=a+(e+b), \tag{37}$$

证明 $*$ 适合结合律,即对任意 $a, b, c\in S$,

$$(a*b)*c=a*(b*c). \tag{38}$$

解 看一下性质(34),(35),(36)就知道这里的"+"不是通常的加法,毋宁说它是减法(理解为除法亦无不可),其中 e 就相当于通常的 0(或通常的 1).关系(37)可将 $*$ 换为由 + 号组成的式子,所以(38)等价于

$$(a+(e+b))+(e+c)=a+(e+(b+(e+c))). \tag{39}$$

由于

$$e+(b+a)\overset{(36)}{=}(a+a)+(b+a)\overset{(34)}{=}a+b, \tag{40}$$

所以

$$a+(e+(b+(e+c)))=a+((e+c)+b). \tag{41}$$

而

$$(a+(e+b))+(e+c)\overset{(35)}{=}(a+(e+b))+((e+c)+e)$$

$$\overset{(34)}{=}(a+(e+b))+(((e+c)+b)+(e+b))$$

$$\overset{(34)}{=}a+((e+c)+b). \tag{42}$$

由(41)、(42)即得(39).

如果集 S 中有一种运算+，S 对于+是交换群即+法结合律、交换律成立，S 中有一个元 0，对任意 $a\in S$，有

$$a+0=0+a=a.$$

并且存在 $b\in S$(通常记为 $-a$)，满足

$$a+b=b+a=0.$$

S 中又有一种运算·，S 对于·是有单位元 1 的半群，即·法结合律成立，并且对任意 $a\in S$,

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

对于任意的 a, b, $c\in S$，分配律

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$$

成立．我们称 S 为环．全体整数，全体有理数，全体实数，全体复数对于通常的加法与乘法都是环．在环中，除去乘法交换律外，其它性质均与整数集类似．例如，我们将 $a+(-b)$ 记为 $a-b$，并且有

$$c(a-b)=ca-bc.$$

环中元素 a 不一定可逆，即不一定有 $b\in S$ 使

$$ab=ba=1. \tag{43}$$

如果 a 可逆，称满足(43)的元素 b 为 a 的逆元，通常记为 a^{-1}.

例 14 设元素 $a,b\in S$,并且 $1-ab$ 可逆，即存在 $c\in S$，使

$$c(1-ab)=(1-ab)c=1. \tag{44}$$

则 $1-ba$ 也可逆，即存在 $d\in S$，满足

$$d(1-ba)=(1-ba)d=1. \tag{45}$$

解 $d=1+bca$ 满足(45)．事实上，

$$\begin{aligned}(1-ba)(1+bca)&=1+bca-ba-babca \quad (\text{分配律})\\ &=1-ba+b(1-ab)ca\\ &=1-ba+b\cdot 1\cdot a=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+bca)(1-ba)&=1-ba+bca-bcaba\\ &=1-ba+bc(1-ab)a\\ &=1-ba+b\cdot 1\cdot a=1.\end{aligned}$$

例 15 如果 a, b, $ab-1$ 都是环 S 中的可逆元素．证明 $a-b^{-1}$, $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ 也可逆．

解

$$(a-b^{-1})b=ab-1, \tag{46}$$

所以

$$(a-b^{-1})b(ab-1)^{-1}=1, \tag{47}$$

$$(ab-1)^{-1}(a-b^{-1})b=1. \tag{48}$$

在(48)两边用 b 去左乘得

$$b(ab-1)^{-1}(a-b^{-1})b=b. \tag{49}$$

再用 b^{-1} 去右乘(49)得

$$b(ab-1)^{-1}(a-b^{-1})=1. \tag{50}$$

(47)、(50)表明 $a-b^{-1}$ 可逆，而且 $b(ab-1)^{-1}$ 是它的逆元．于是

$$\begin{aligned}&((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})(ab-1)a\\ &=(b(ab-1)^{-1}-a^{-1})(ab-1)a\\ &=ba-a^{-1}(ab-1)a=ba-(b-a^{-1})a\\ &=ba-ba+1=1,\end{aligned}$$

$$(ab-1)a((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})$$

$$=(ab-1)a(b(ab-1)^{-1}-a^{-1})$$
$$=(ab-1)ab(ab-1)^{-1}-(ab-1)$$
$$=(ab-1)(ab-(ab-1))(ab-1)^{-1}$$
$$=(ab-1)\cdot 1\cdot(ab-1)^{-1}=1.$$
即 $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ 可逆，而且 $(ab-1)a$ 是它的逆元。

例15是我国数学家华罗庚发现的定理。下面的例16、例17也都是华罗庚教授的结果。

例 16 设 S 是环，函数 $f: S\to S$，并且对任意的 a，$b\in S$，

$$f(a+b)=f(a)+f(b), \tag{51}$$
$$f(ab)=f(a)f(b) \text{ 或 } f(b)f(a). \tag{52}$$

证明恒有 $f(ab)=f(a)f(b)$ 或者恒有 $f(ab)=f(b)f(a)$。

解 设有 a，$b\in S$ 使

$$f(ab)=f(a)f(b)\neq f(b)f(a). \tag{53}$$

我们证明对一切 $c\in S$，

$$f(ac)=f(a)f(c). \tag{54}$$

不然的话，设有 $c\in S$，使

$$f(ac)=f(c)f(a)\neq f(a)f(c), \tag{55}$$

则
$$f(ab)-f(ac)=f(a)f(b)-f(c)f(a), \tag{56}$$

但(56)的左边即

$$f(ab-ac)=f(a(b-c)),$$

由已知，

$$f(a(b-c))=f(a)f(b-c)$$
$$=f(a)(f(b)-f(c))$$
$$=f(a)f(b)-f(a)f(c)$$

或
$$f(a(b-c))=f(b-c)f(a)$$
$$=(f(b)-f(c))f(a)$$

$$=f(b)f(a)-f(c)f(a),$$
无论哪一种情况，均不等于(56)的右边．矛盾！

这表明 (54) 恒成立．用同样的方法可以证明对一切 $d\in S$，

$$f(db)=f(d)f(b). \tag{57}$$

于是，对 S 中任意元素 c，d，由于(54)成立，所以(将(57)中 b 换为 c)

$$f(dc)=f(d)f(c).$$

这就是要证明的结论．

例 17 设环 S 中，每个非零元均可逆．函数 $f:S\to S$，$f(1)=1$，并且

$$f(a+b)=f(a)+f(b). \tag{58}$$

在 $a\neq 0$ 时，$f(a)\neq 0$，

$$f(a)^{-1}=f(a^{-1}). \tag{59}$$

证明对所有的 a，$b\in S$，恒有

$$f(ab)=f(a)f(b) \tag{60}$$

或恒有

$$f(ab)=f(b)f(a). \tag{61}$$

解 $f(a)=f(a+0)=f(a)+f(0)$，所以

$$f(0)=0.$$

当 a，b 中有一个为 0 时，

$$f(ab)=f(0)=0=f(a)f(b)=f(b)f(a).$$

当 $ab=1$ (即 $b=a^{-1}$) 时，

$$\begin{aligned}f(ab)&=f(1)=1=f(a)f(a)^{-1}=f(a)f(a^{-1})\\&=f(a)f(b)=f(b)f(b)^{-1}=f(b)f(b^{-1})\\&=f(b)f(a).\end{aligned}$$

当 a，b 均不为 0，并且 $ab\neq 1$ 时，a，b，$ab-1$ 均可逆，由

例15

$$((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1}=aba-a, \tag{62}$$

所以 $f(aba)-f(a)=f(aba-a)=f((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1}$

$$=(f(a-b^{-1})^{-1}-f(a)^{-1})^{-1}$$

$$=((f(a)-f(b)^{-1})^{-1}-f(a)^{-1})^{-1}$$

$$=f(a)f(b)f(a)-f(a)$$

(最后一步是利用(62)，但其中的 a, b 分别换为 $f(a)$, $f(b)$)，从而

$$f(aba)=f(a)f(b)f(a). \tag{63}$$

由(63)，

$$f(b)f(b)=f(b)f(1)f(b)=f(b\cdot 1\cdot b)=f(bb). \tag{64}$$

$$\begin{aligned}f((a+c)b(a+c))&=f(a+c)f(b)f(a+c)=(f(a)\\&+f(c))f(b)(f(a)+f(c))=f(a)f(b)f(a)\\&+f(c)f(b)f(c)+f(c)f(b)f(a)+f(a)f(b)f(c)\\&=f(aba)+f(cbc)+f(c)f(b)f(c)+f(a)f(b)f(c),\end{aligned}$$

$$f((a+c)b(a+c))=f(aba+cbc+cba+abc),$$

所以 $f(c)f(b)f(a)+f(a)f(b)f(c)=f(cba+abc)$. (65)

由(63),(64),(65)

$$\begin{aligned}&(f(ab)-f(a)f(b))(f(ab)-f(b)f(a))\\&=f(ab)f(ab)-f(a)f(b)f(ab)\\&\quad-f(ab)f(b)f(a)+f(a)f(b)f(b)f(a)\\&=f(ab\cdot 1\cdot ab)-f(abab+abba)\\&\quad+f(abba)=0.\end{aligned}$$

若 $f(ab)-f(a)f(b)\neq 0$，则在上式两边左乘 $(f(ab)-f(a)f(b))^{-1}$ 得 $f(ab)-f(b)f(a)=0$. 所以

$$f(ab)=f(a)f(b) \text{ 或 } f(b)f(a).$$

由例16即知(60)与(61)中有一个恒成立。

10 转换观点

算两次，即从两个方面来考察.

世界上有许多复杂的事件，只有从多个侧面去观察，才能把握它的实质. 解数学题也是如此. 如从一个方面不能解决，就必须改从其他方面考虑，决不坚持一条道走到黑，这就是算两次的精神所在.

当然，算两次也并不是说只能从两个方面，不能从一个方面或三个方面去考虑. 咬定"两次"，也是胶柱鼓瑟. 或许，某些时候用"转换观点"、"换一个角度看问题"等说法比"算两次"稍为确切一些.

例 1 设 r 为正整数，证明任意 r 个连续整数的乘积被 $r!$ 整除.

解 仅从数论(算术)的角度考虑，比较麻烦（需要计算质数 p 在 $r!$ 中出现的次数）. 换从组合的角度来看，结论则是显然的：在 $n\geqslant r$ 时，$\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=C_n^r$，从 n 个元素中选取 r 个的方法当然有整数种；在 $n<0$ 时，只需取绝对值就化为前一种情况；在 $0\leqslant n<r$ 时，$n(n-1)\cdots(n-r+1)=0$，是任何非零整数的倍数.

例 2 设 $0<a<1$，$0<b<1$，证明

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-a)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}. \qquad (1)$$

解 简单的解法是画一个图，图23中$ABCD$是边长为1的正方形.容易看出(1)式左边$=AI+CI+BI+DI\geqslant AC+BD=2\sqrt{2}$.

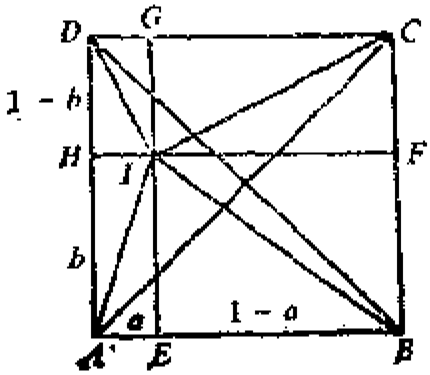

图 23

例 3 x,y,z都是实数，并且

$$0<x<y<z<\frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

求证

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$$
$$>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z. \quad (3)$$

解 受例2的启发，这一道题也以用图来解为好.

或许有读者觉得这是不说也知道的事，然而我们曾作过试验，在第31届(1990年)国际数学奥林匹克我国集训队练习时，24名优秀的中学生，只有一个想到用图来解. 可见看别人的解答或在某种提示下做解答，与完全独立地解答，是很不相同的.

(3)中的$\frac{\pi}{2}$暗示我们要用半个单位圆.

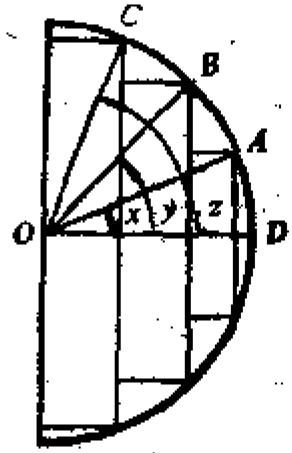

图 24

图24中 $\angle AOD$, $\angle BOD$, $\angle COD$分别为x, y, z. A, B, C的横坐标分别为 $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$，纵坐标分别为$\cos x$, $\cos y$, $\cos z$. 由于易知图中三个矩形的面积分别为

$$2\sin x(\cos x-\cos y),\ 2\sin y(\cos y-\cos z),\ 2\sin z\cos z.$$

它们的和显然小于半圆的面积$\pi/2$，即(3)成立.

不用图来解，相当困难(读者不妨试一试). 下面的解法是广东梁栋刚同学给出的，他得到的结果比(3)强一些，解法简洁优美(看上去简单，但并不容易想到，这正是证不等式的困难之一).

$$
\begin{aligned}
&\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-2\sin x\cos y-2\sin y\cos z\\
=&\frac{1}{2}((\sin 2x+\sin 2y)+(\sin 2y+\sin 2z)\\
&+(\sin 2z+\sin 2x))-2\sin x\cos y-2\sin y\cos z\\
\leqslant&\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(y+z)\cos(y-z)\\
&+\sin(z+x)\cos(z-x)-2\sin x\cos y\cos(x-y)\\
&-2\sin y\cos z\cos(y-z)\\
=&\sin(y-x)\cos(x-y)+\sin(z-y)\cos(y-z)\\
&+\sin(z+x)\cos(z-x)\\
=&\sin(z-x)\cos(2y-x-z)+\sin(z+x)\cos(z-x)\\
\leqslant&\sin(z-x)+\cos(z-x)\leqslant\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

$\sqrt{2}$ 还可以改成更小的数(需借助微积分).

例 4 设 x，y 为区间 $(0，1)$ 中的实数，证明 x^2+xy+y^2, $x^2+x(y-1)+(y-1)^2$, $(x-1)^2+(x-1)y+y^2$, $(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2$ 中最小的至多为 $\frac{1}{3}$.

解 考虑上述4个函数在坐标平面上的单位正方形 $\{(x,y)|0\leqslant x，y\leqslant 1\}$ 内的值的最小值.

由于将 x，y 互换，或将 $(x，y)$ 换为 $(1-y，1-x)$，这最小值不变，我们只需考虑由原点 $O(0，0)$，点 $B(1，0)$，$C\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$构成的三角形区域(图25).

这个区域可分为两个部分：由 O, $A(1/2,0)$, $D(1/3,1/3)$

构成的三角形(区域)与由 A, B, C, D 构成的四边形.

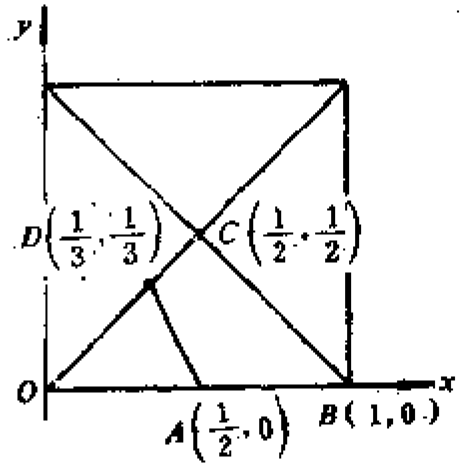

图 25

由于点 O, A, D 都在椭圆 $x^2+xy+y^2=\frac{1}{3}$ 内(将各点坐标代入 x^2+xy+y^2, 所得的值均 $\leqslant\frac{1}{3}$), 所以$\triangle OAD$内的点 (x, y) 都满足 $x^2+xy+y^2\leqslant\frac{1}{3}$. 同样,四边形$ABCD$内的点$(x,y)$ 都满足 $(x-1)^2+(x-1)y+y^2\leqslant\frac{1}{3}$.

于是，本题结论成立.

如果仅从代数角度考虑，问题难以解决.

几何问题，当然也可从代数方程的角度去考虑，这就是笛卡儿发明的解析几何.

例 5 每次放三枚围棋子到一个3×3的正方形棋盘的同一行或同一列中. 在同一格中出现黑子与白子时，则将其中同样多的黑子与白子取走. 证明不可能使某一格的棋子比其它格均多1枚.

解 如果有某一格的棋子比其它格均多1枚，不妨设这一格在左上角的2×2的正方形中(图26).

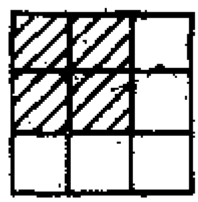
图 26

解答本题的关键就在于放过3×3的棋盘，把视线转到这左上角的2×2的正方形中(前几节已有类似的做法).

对这个2×2的正方形来说，每次放入(取走)的棋子总是

偶数枚. 所以不论进行到什么时候, 棋子数的奇偶性永远与原始状态(0枚)保持一致, 即永远为偶数.

另一方面, 其中有一格比其它格均多1枚时, 棋子总数为奇数 $4k+1$.

矛盾表明不可能有一格的棋子比其它格均多1枚.

例 6 甲、乙两各出7名队员按预先按排好的顺序出场参加围棋擂台赛, 双方的1号队员首先比赛, 负者被淘汰, 胜者继续与对方的2号队员比赛, …, 直至一方队员全被淘汰为止. 试求比赛过程有多少种不同的情况?

解 有人认为"关键是求出胜方动用了 k 名 $(1\leqslant k\leqslant 7)$ 队员才获胜的所有可能出现的比赛过程的种数 S_k", 其实并非如此.

正确的方法是甲方的7名队员看作7个同样的白球(队员的顺序已事先排好, 所以我们不必考虑这些球的顺序), 乙方的7名队员看作7个同样的黑球, 将这14个排成一列.

每种比赛过程可以看作一种排法, 每种排法也可以看作一种比赛过程, 两者一一对应: 在第 $j(1\leqslant j\leqslant 7)$ 个白(黑)球前面的黑(白)球就表示被甲(乙)方前 j 名队员击败的乙(甲)方队员, 最后一个是白(黑)球, 则表明甲(乙)方获胜.

而这14个球的排法显然有

$$C_{14}^{7}=\frac{14!}{7!7!}=3432$$

种. 所以比赛过程共有3432种.

排列组合的计算问题, 常常化为投球入盒的问题(加上种种限制). 可以从球这方面考虑, 也可以从盒子这方面考虑. 这种例子俯拾皆是, 我们就不多举了.

例 7 数轴上 n 个互不相交的区间 $[a_i, b_i]$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 组成集合 M. 如果每一条长度不大于1的线段都可以放在数轴上，使它的两端均属于集 M（的区间）. 证明 n 个区间 $[a_i, b_i]$ 的长度之和 $\geqslant \frac{1}{n}$.

解 设 $d_i=b_i-a_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$). 对于区间 $[0,1]$ 中的点 c，我们知道长为 c 的线段可以放在数轴上，两端属于 M. 我们就着眼于如何放置这样的线段，其中 c 从0增长至1.

首先，设 $d_k=\max d_i$. 当 $c\leqslant d_k$ 时，长为 c 的线段可以整个放在 $[a_k, b_k]$ 里.

假定长 $\leqslant c$ 的线段均可以放在数轴上，两端属于 M，并且长为 c 的线段一端在 $[a_i, b_i]$ 内，另一端在 $[a_j, b_i]$ 内. 不妨设一端就是 b_i，另一端是 a_j（否则用较小的数 a_j-b_i 代替 c）. 这时长度 $\in[c, c+d_i+d_j]$ 的线度，均可放在数轴上，一端在 $[a_i, b_i]$ 内，另一端在 $[a_j, b_j]$.

由此可见，$[0, 1]$ 中的点 c_1，当 $c_1\geqslant d_k$ 时，必被一个形如 $[c, c+d_i+d_j]$ 的长为 d_i+d_j 的区间盖住，从而

$$d_k+\sum_{i\neq j}(d_i+d_j)\geqslant 1. \qquad (4)$$

在和号中，每个 d_i 出现 $n-1$ 次（与其余的 $n-1$ 个 d_j 搭配），所以（4）的左边不大于 $n(d_1+d_2+\cdots+d_n)$，从而

$$d_1+d_2+\cdots+d_n\geqslant\frac{1}{n}. \qquad (5)$$

从长为 c ($0\leqslant c\leqslant 1$) 的线段如何放置入手，发现区间 $[0,1]$ 被 $[0, d_k]$ 及长为 d_i+d_j ($1\leqslant i<j\leqslant n$) 的区间覆盖，是解决本题的关键.

例 8 集 S 中的数称为“好的”. 已知 0，1都是好的.

并且对于 $x, y\in S$，$x-y\in S$，$\frac{1}{x}\in S$（当 $x\neq 0$ 时）．证明：若 $x, y\in S$，则

（i）$x+y\in S$．

（ii）$xy\in S$．

解 本例的关键是寻求一个数的种种表示方法，这在前面（特别是第9节）已经多次使用．

（i）$x+y=x-(0-y)$．$0-y\in S$，所以 $x+y\in S$．

（ii）当 x 或 y 中有一个为0或1时，结论显然，设 x，y 均不为0，1．

容易逐步推出 $x-1$，$\frac{1}{x-1}$，$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}$，$x(x-1)$，$x^2$ 都是好的（如 $x=0$或1，则 $x^2=0,1$显然是好的）．

于是，$(x+y)^2$，x^2，$y^2\in S$，从而

$$2xy=(x+y)^2-x^2-y^2\in S,\quad \frac{1}{2xy}\in S,$$

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\in S,$$

最后 $xy\in S$．

例 9 证明在任意五个无理数中，总可以选出三个数，这三个数中，每两个的和是无理数．

解 将这五个数用五个点表示，如果两个数的和为有理数，就在相应的两点间连一条线．问题就化为一个图．从图论的观点来看，就是要证明有三个点，两两不相邻（没有线相连），即存在一个由三个点组成的“内固集”．

如果图中有三个点 x，y，z，两两有线相连，那么 $x+y$，$y+z$，$z+x$ 都是有理数，从而推出 x,y,z 都是有理数，与已知矛盾．所以图中无三角形．同理，图中也无五边形（即

顺次连结五个点，这五条边组成的圈)．

如果有一个点 x 引出的线 $\geqslant 3$．设 x 与 y，z，u 相连，那么 y，z，u 彼此均不相连（否则产生以 x 为一个顶点的三角形)，这三个点即为所求．

设每个点至多引出两条线．如果点 x 至多与一个点 v 相连．那么由于点 y，z，u 不构成三角形，所以必有两个点，例如 y，z，不相连．x，y，z 即为所求．

于是，图中每个点恰好引出两条线．由一笔画的理论易知这个图是一个五条边组成的圈．这与上面所说矛盾，因而这种情况不会发生．

例 10 一条直线上有 k 个已知点．以其中每一对点为直径作圆，并将每个圆染上 n 种颜色中的某一种（k 个已知点不染)．如果每两个外切的圆染的颜色均不相同，证明 $k \leqslant 2^n$．

解 假设 $k>2^n$．我们证明必有两个外切的圆染的颜色相同．

2^n 启发我们考虑 n 种颜色的集的全部子集．

对已知点 A，设集 M_A 为过 A 点并且在 A 点左侧的那些圆所染颜色的集合．

由于 $k>2^n$，必有两个集 M_A，M_B 相同．不妨设 B 在 A 的右侧．以 AB 为直径的圆，在 B 的左侧，它所染的颜色 $\in M_B$，因而也 $\in M_A$．而在 A 点左侧有一个过 A 的圆染上同样的颜色，且这两个圆互相外切．

例 11 101个长方形，边长都是不超过100的整数．证明这些长方形中必有三个，第一个可以放在第二个中，第二个可以放在第三个中．

解 将每个长方形作为直角坐标系中的整点，横坐标 x

为长方形的长，纵坐标 y 为长方形的宽，$1\leqslant y\leqslant x\leqslant 100$.

问题就是证明在这101个格点中，必有3个点 (x_i, y_i)，$i=1,2,3$，满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$，$y_1\leqslant y_2\leqslant y_3$.

为此，考虑图27中的50个曲尺形上. 第一个曲尺形的三个端点为(1,1)，(100, 1)，(100, 100)，第二个的端点是(2, 2)，(99,2)，(99, 99)，…，最后一个曲尺形退化为一个点(50, 50).

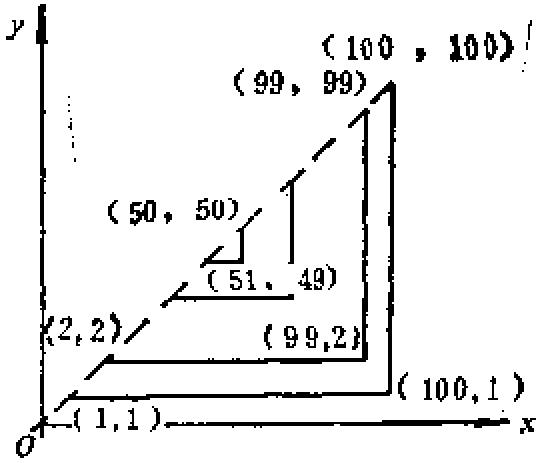

图 27

由于已知点有101个，所以必有一个曲尺形中含有三个已知点，这三个已知点即为所求.

所谓灵活性，在很大程度上说，就是善于从各种不同的角度来看问题，转换观点，从正面，从反面（反证法）；从这一方面，从那一方面，从组合、代数、几何、概率…. 决不拘泥于一种程式、固守某种一成不变的观点. 测定智力高低的标准就在于摒弃谬误的速度. 学习数学，可以提高灵活性，使人变得聪明.

习　题

1. 一次竞赛有 $n\geqslant 2$ 名选手参加，历时 k 天，每天选手的得分恰好组成集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 如果在第 k 天末，每两名选手的总分均为26分，求出使这件事成为可能的所有数对 (n, k).
2. 设已知19个在 1 与90之间的、互不相等的整数，证明在两两的差中，至少有三个相等.
3. 在一次象棋比赛中，每人至多得 k 分（每盘胜者得 1 分，负者 0 分，平局各1/2分），证明有一个参加者比赛的盘数不超过 $2k$.
4. 12名矮子住在树林里，每人将自己的房子染成红色或白色. 在每年的第 i 月，第 i 个矮子访问他所有的朋友（这12名矮子的一个子集）. 如果他发现大多数朋友的房子与自己颜色不同，那么他就将自己房子的颜色改变，与大多数朋友保持一致，证明不久以后，这些矮子就不需要改变颜色了.
5. 将正 n 边形的顶点染上颜色(至少两种)，使得同一种颜色的点都组成一个正多边形，证明这些正多边形中，必有两个全等.
6. 已知点 A、B、P_1、P_2、$\cdots$、P_n 在同一平面内，证明 P_1A，P_2A $\cdots$，P_nA，P_1B，P_2B，$\cdots$，P_nB 中至少有 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ 个不同的值.
7. 实数集 R的子集 S 称为"超稳定的"，如果对于每个 $a>0$，都存在一个唯一的 b，使得

$$x\in S \Longleftrightarrow ax+b\in S.$$

求出所有超稳定的集.

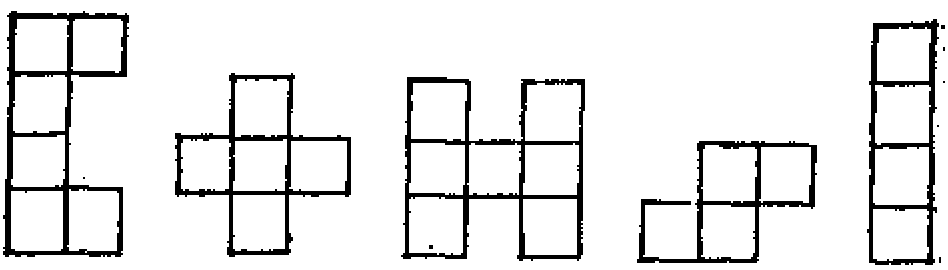

图　28

8. 能否用图28中各种形状的纸片拼成一个边长为1991的正方形（图中每个方格的边长为 1)?

9. 一个半径为 ρ 的圆与 $\triangle ABC$ 的边AB，AC 相切，圆心 K 到 BC 的距离为d. 证明

$$a(\rho-d)=2s(\rho-r).$$

这里 r，$2s$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径与周长，并约定K与 A 在 BC 同侧时 $d>0$，否则 $d\leqslant 0$.

10. 若上题的圆 K 交 BC 于 D，E. 证明

$$DE=\frac{4\sqrt{r r_1(\rho-r)(r_1-\rho)}}{r_1-r}.$$

这里 r_1 为 $\triangle ABC$ 的(在 $\angle A$ 内的)傍切圆半径.

11. 设 $0<r\leqslant n$，$\mathscr{A}$ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一些 r 元子集所成的族，$\mathscr{B}=\{B: |B|=r-1$ 并且 $B\subset A$，$A\in\mathscr{A}\}$. 证明

$$\frac{|\mathscr{B}|}{C_n^{r-1}}\geqslant\frac{|\mathscr{A}|}{C_n^r},$$

当且仅当 $\mathscr{A}=\phi$ 或 $\mathscr{A}$ 含 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部 r 元子集时，等号成立.

12. 设 $2\leqslant r<\frac{n}{2}$，$\mathscr{A}$为 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一些 r 元子集所成的族。如果$\mathscr{A}$中每两个元素 (X的 r 元子集)的交非空，那么

$$|\mathscr{A}|\leqslant C_{n-1}^{r-1}$$

当且仅当 $\mathscr{A}=\{A|A$ 为 X 的 r 元子集并且含有 X 中一固定元素 $x\}$ 时，等号成立 (Erdös-Ko-Rado 定理)

13. 设 $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$. 在 2^n 个和

$$\sum_{i\in A}x_i \quad (A\text{ 是 }\{1,2\cdots,n\}\text{ 的子集})$$

中，至多可以选出多少个，使得每两个选出的和相差不到 1？(当 A 为空集时，约定相应的和为 0).

14. 给定 n 个实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，证明：存在一个实数 y，使得

$\{x_1-y\}+\{x_2-y\}+\cdots+\{x_n-y\}\leqslant\frac{n-1}{2}$. 这里 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分.

15. 边长为 1 的正方形边界上有四个点，已知其中任意两点的距离不小于 1 . 证明这四个点必为正方形四个顶点.

16. 设正整数 x_1, x_2, $\cdots$, x_{503} 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{503}=x_1x_2\cdots x_{503}$, 证明 $x_1+x_2+\cdots+x_{503}\geqslant 513$.

17. 试确定形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_i=\pm1,\ 0\leqslant i\leqslant n)$ 的全体多项式，使每个多项式的零点都是实数.

18. 给定平面上 n 个相异点，证明其中距离为 1 的点对少于 $2n^{3/2}$ 对.

19. 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为任意正整数，用 b_k 记 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 中满足条件 $a_i\geqslant k$ 的数的个数，证明：

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots.$$

20. 设 p 是素数，$a\geqslant b\geqslant 0$ 为整数，证明：

$$C_{pb}^{pa}\equiv C_b^a\ (\mathrm{mod}\ p).$$

21. 设集合 S 含有 n 个元素. $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 S 的一族不同子集，它们两两的交非空，而 S 的其他子集不能与 A_1, A_2, $\cdots$, A_k 都相交，证明. $k=2^{n-1}$.

22. 设一个凸 n 边形中任意三条对角线都不共点，试问所有对角线将这个 n 边形的内部分成了多少个区域?

习题解答

1．k 天的分数总和，有两种算法，从而得出方程

$$k\times(1+2+\cdots+n)=26n$$

即

$$k(n+1)=52.$$

从而 $(n, k)=(51, 1)$，$(25, 2)$，$(12, 4)$，$(3, 13)$. 其中只有 $(51, 1)$这一数对不是问题的解.

2．设这19个数为

$$(1\leqslant)a_1<a_2<\cdots<a_{19}\quad(\leqslant 90).$$

最大值 a_{19} 与最小值 a_1 的差还有一种算法：

$$a_{19}-a_1=(a_{19}-a_{18})+(a_{18}-a_{17})+\cdots+(a_2-a_1).\qquad(1)$$

（1）式左边 $\leqslant 90-1=89$. 如果两两的差中至多两个相等，那么（1）式右边(18个差的和)

$$\geqslant 2\times(1+2+\cdots+9)=(1+9)\times 9=90.$$

矛盾!

3．设有 n 人参赛，比赛盘数最少的人赛了 m 盘，考虑总盘数 S. 一方面，$S\geqslant\frac{nm}{2}$. 另一方面，$S\leqslant nk$. 从而 $m\leqslant 2k$.

4．将12名矮子当作12个点，如果两名矮子是朋友，就在相应的两点之间连一条线. 并且在他们的房子颜色相同时，这条线为蓝色，不同时，为黑色.

考虑蓝色线的总数 S.

一方面，S 是有上界的(例如 $S\leqslant C_{12}^2$).

另一方面，每名矮子变更房子颜色时，S严格增加(至少增加1).

因此，在有限多次变更后，这些矮子就不需要变更了.

5．将这 n个点顺次记为0，1，…，$n-1$.设染了 k 种颜色，第 i 种颜色的顶点组成 n_i 边形，则$n_i|n$. 设 $n_i'=\frac{n}{n_i}$，则这 n_i 边形的顶

点可记为 $a_i+j\cdot n_i'$ ($j=0, 1, 2, \cdots, n_i-1$). 由于

$$\{0, 1, \cdots, n-1\}=\bigcup_{i=1}^{k}\{a_i+j\cdot n_i' | j=0, 1, \cdots, n_i-1\},$$

并且右边的各个集合互不相交，所以

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{n_i-1}x^{a_i+j\cdot n_i'},$$

即

$$\frac{1-x^n}{1-x}=\sum_{i=1}^{k}\frac{x^{a_i}(1-x^n)}{1-x^{n_i'}},$$

约去 $1-x^n$ 得

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{i=1}^{k}\frac{x^{a_i}}{1-x^{n_i'}}. \tag{1}$$

如果 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 互不相同，那么 $n_1', n_2', \cdots, n_k'$ 也互不相同，不妨设 $(1<)\ n_1'<n_2'<\cdots<n_k'$. 令 $x=re^{\frac{2\pi i}{n_k'}}$, $r\to1^-$, 则(1)式右边的 $\frac{x^{a_k}}{1-x^{n_k'}}\to\infty$，而其余各项及(1)式左边均为有界，矛盾！

6. 作 $\odot(A, AP_i)$, $\odot(B, BP_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$.

考虑这些圆的交点的总数 S. 一方面，每个点 P_i 都是交点，所以 $n\leqslant S$. 另一方面，设以 A 为心的圆有 a 个，以 B 为心的圆有 b 个，则 $S\leqslant 2ab$. 所以

$$\max\{a, b\}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

7. 记 $b=f(a)$，则对任意正数 a_1, a_2,

$$\begin{aligned}x\in S&\Longleftrightarrow a_1x+f(a_1)\in S\Longleftrightarrow a_2(a_1x+f(a_1))+f(a_2)\in S\\&\Longleftrightarrow a_2x+f(a_2)\in S\Longleftrightarrow a_1(a_2x+f(a_2))+f(a_1)\in S\\&\Longleftrightarrow a_1a_2x+f(a_1a_2)\in S.\end{aligned}$$

由 $f(a_1a_2)$ 的唯一性得

$$a_2f(a_1)+f(a_2)=a_1f(a_2)+f(a_1),$$

从而

$$\frac{f(a_1)}{a_1-1}=\frac{f(a_2)}{a_2-1},$$

即$\frac{f(a)}{a-1}$为常数 c，$f(a)=c(a-1)$.

若 $x>(<)-c$，$x\in S$，则对任意$y>(<)-c$，$a=\frac{y+c}{x+c}>0$，从而

$S\supset\{y\ \underset{(<)}{>}-c\}$. 由此易知超稳定集为空集、$\{-c\}$、$\{y>-c\}$、$\{y<-c\}$及这些集的补集.

8. 不能. 将1991×1991的正方形中，每个单位正方形方格染上黑色或白色，使每两个相邻的方格颜色不同. 由于1991×1991为奇数两种颜色的方格数相差为1. 另一方面，每一种纸片中，两种颜色的方格数相差为0或3. 如果它们能拼成一个大正方形，那么其中两种颜色之差必为3的倍数. 矛盾!

9. 作直线$l//BC$并且与⊙k相切，l交AB于B'、交AC于C'（图29）. 这时⊙k是$\triangle AB'C'$的内切圆. 设$\triangle ABC$、$\triangle AB'C'$的（BC、$B'C'$边上的）高分别为h、h'. 则由$\triangle ABC\sim\triangle AB'C'$得

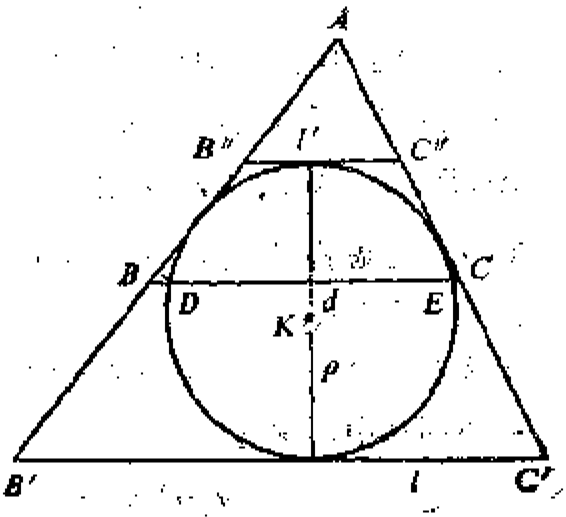

图.29

$$\frac{\rho-r}{r}=\frac{h'-h}{h}=\frac{\rho-d}{h}.$$

由于$rs=\frac{1}{2}ha$（$=\triangle ABC$面积），结合上式即得结论.

10. 在⊙k上面作直线$l''//BC$，交AB于B''、交AC于C''（图29）. 这时⊙k是$\triangle AB''C''$的傍切圆，与上题类似，

$$\frac{r_1-\rho}{r_1}=\frac{\rho+d}{h}.$$

由于$r_1(s-a)=\frac{1}{2}hs$，所以

$$a(\rho+d)=2(s-a)(r_1-\rho).$$

结合上题得

$$DE=2\sqrt{\rho^2-d^2}=\frac{4\sqrt{s(s-a)(r_1-\rho)(\rho-r)}}{a}$$

$$=\frac{4\sqrt{r r_1(\rho-r)(r_1-\rho)}}{r_1-r}.$$

11. 考虑集合对 (A, B): $B\subset A$, 的个数 S.
每个 A 含 r 个 B, 所以 $S=|\mathscr{A}|\cdot r$.
另一方面, 每个 B 至多在 $n-r+1$ 个 A 中, 所以
$S\leqslant|\mathscr{B}|\cdot(n-r+1)$.
综合以上两方面即得结论.

12. 假设 $|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}$, 我们证明 $\mathscr{A}=X_x$, 这里

$$X_x=\{A\,|\,x\in A\subset X,\ |A|=r\}.$$

(显然 X_x 中不能再增添 X 的 r 元子集 B, 而仍保持两两的交非空. 例如从集 $X\setminus B$ 中取 x 及另外 $r-1$ 个元组成 A, 则 $A\in X_x$, $A\cap B=\phi$. 因此, $|\mathscr{A}|$ 的最大值就是 C_{n-1}^{r-1}).

首先, 考虑将 1, 2, …, n 这 n 个数依任意顺序排到圆周上, 排法共 $(n-1)!$ 种. 其中, 将某个 $A\in\mathscr{A}$ 排成一个区间(即 A 的 r 个元素在圆周上是相继的)的排法有 $r!\ (n-r)!$ 种. 因此, 平均每一种顺序中, $\mathscr{A}$有

$$|\mathscr{A}|\cdot r!(n-r)!/(n-1)!=r$$

个元素成为区间.

另一方面, 对每一种顺序, 如果$\mathscr{A}$中元素 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ 成为区间, 那么$\mathscr{A}$中其它的区间均与 A 相交, 而将 a_i 与 a_{i+1} 分开的区间至多 1 个, 所以至多有 r 个区间.

综合以上两方面, 在每一种顺序中, $\mathscr{A}$恰有 r 个区间. 设它们为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}, \{a_2, a_3, \cdots, a_r, a_{r+1}\},$$
$$\cdots, \{a_r, a_{r+1}, \cdots, a_{2r-1}\},$$

这里 a_{i+1} 接在 a_i 的后面.

现在只需证明 X 中任一含 a_r 的子集 $\{a_r, c_{r+1}, \cdots, c_{2r-1}\}\in\mathscr{A}$

(即 $\mathscr{A}=X_{a_r}$).

取 $b\notin\{a_1, a_2, \cdots, a_{2r-1}\}$. 考虑圆周顺序

$$b,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r,\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ \cdots,\ a_{2r-1}.$$

由于 $\{b, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}\cap\{a_r, a_{r+1}, \cdots, a_{2r-1}\}=\phi$, 所以 $\{b, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}\notin\mathscr{A}$. 而 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}\in\mathscr{A}$, 所以在这个顺序中，属于$\mathscr{A}$的 r 个区间是

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\},\ \{a_2, a_3, \cdots, a_{r+1}\},$$
$$\{a_3, a_4, \cdots, a_{r+2}\},\ \cdots,\ \{a_r, a_{r+1}, \cdots, a_{2r-1}\}.$$

这定理是柯召等人于1961年发现的，被誉为集族的极端理论的基石，上面的证法是1972年 Katona 给出的.

13. 如果两个和相差不到 1，那么相应的子集 A_1，A_2 互不包含，所以由 Sperner 定理，选出的和不超过 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个. 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，恰好能选出 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个.

14. 不难验证，对于任意实数 x 有

$$\{x\}+\{-x\}=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为整数.}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 不为整数.}\end{cases}$$

故 $\{x\}+\{-x\}\leqslant 1$.

设 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\{x_j-x_i\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $S_1, \cdots, S_n$ 的均值(应用上面说的结论)

$$\sum_{i=1}^{n}S_i=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\{x_j-x_i\}+\{x_i-x_j\})$$
$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\{(x_j-x_i)\}+\{-(x_j-x_i)\})\leqslant C_n^2.$$

从而 $S_1, \cdots, S_n$ 中必有一个（无妨设为 S_i）满足 $S_i\leqslant\frac{1}{n}C_n^2=\frac{n-1}{2}$，即问题中说的 y 可取为 x_i.

15. 如图30所示，设正方形边界上四点为A，B，C，D. 则一方面(由已知条件)

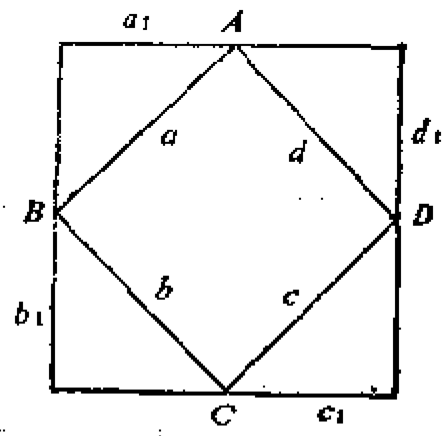

图 30

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 4.$$

另一方面，由勾股定理

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+d^2&=a_1^2+(1-a_1)^2+b_1^2+(1-b_1)^2+c_1^2\\&\quad+(1-c_1)^2+d_1^2+(1-d_1)^2\\&=2a_1(a_1-1)+2b_1(b_1-1)\\&\quad+2c_1(c_1-1)+2d_1(d_1-1)\\&\quad+4\leqslant 4.\end{aligned}$$

结合两个方面易知A，B，C，D四点为正方形顶点.

16. 设$x_i=a_i+1$，a_i为非负整数($1\leqslant i\leqslant 503$). 则一方面

$$\sum_{i=1}^{503}x_i=\sum_{i=1}^{503}a_i+503\geqslant 503>2^9.$$

另一方面，由$1+a_i\leqslant 2^{a_i}$ ($1\leqslant i\leqslant 503$) 可见

$$\sum_{i=1}^{503}x_i=(1+a_1)\cdots(1+a_{503})\leqslant 2^{a_1+\cdots+a_{503}}.$$

综合起来得出$\sum\limits_{i=1}^{503}a_i>8$，从而$\sum\limits_{i=1}^{503}a_i\geqslant 9$.

为了证明本题结论，只需重复上面的论证. 此时，一方面

$$\sum_{i=1}^{503}x_i=\sum_{i=1}^{503}a_i+503\geqslant 9+503=512=2^9.$$

另一方面，我们有严格的不等式

$$(1+a_1)\cdots(1+a_{503})<2^{a_1+\cdots+a_{503}},$$

故$\sum\limits_{i=1}^{503}a_i\geqslant 10$，即$\sum\limits_{i=1}^{513}x_i\geqslant 513$.

17. 可以只考虑$a_0=1$的情形，设$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$的$n$个实根为$x_1$，…，$x_n$，则一方面，由韦达定理知，

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=a_1^2-2a_2\ ;$$

另一方面，根据算术-几何平均不等式得

$$x_1^2+\cdots+x_n^2\geqslant n\sqrt[n]{(x_1\cdots x_n)^2}=n\,(a_n^2)^{\frac{1}{n}}.$$

当且仅当 $x_1^2=\cdots=x_n^2$ 时取等号，故有

$$\frac{a_1^2-2a_2}{n}\geqslant(a_n^2)^{\frac{1}{n}}.$$

对于本题，上式成为 $\frac{1\pm2}{n}\geqslant1\Rightarrow n\leqslant3$. 据此及上面的论证，不难求出符合要求的全体多项式为：

$\pm(x-1)$，$\pm(x+1)$，$\pm(x^2+x-1)$，$\pm(x^2-x-1)$，

$\pm(x^3+x^2-x-1)$，$\pm(x^3-x^2-x+1)$.

18. 对于平面上的点 P_1，$\cdots$，P_n，以 d_i 表示与 P_i 相距为 1 的点 P_j 的个数（$1\leqslant i\leqslant n$），则相距为 1 的点对数目为 $\frac{1}{2}(d_1+\cdots+d_n)$.

对每个 i，以 P_i 为圆心，作半径为 1 的圆 C_i. 因每对圆至多有 2 个交点，故所有的 C_i 至多有 $2C_n^2$ 个交点，其中点 P_i 作为诸 C_j 的交点共出现 $C_{d_i}^2$ 次（若 $d_i\leqslant1$，约定 $C_{d_i}^2=0$）. 故

$$\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2\leqslant2\,C_n^2\ .$$

另一方面，我们可以先考虑 $d_i\geqslant1$ 的情形，由柯西不等式得出

$$\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)^2\geqslant\frac{1}{2n}\Big[\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)\Big]^2,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)<\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{2}},$$

所以$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i \leqslant \frac{1}{2}(n+\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{2}})<2n^{\frac{3}{2}}$.

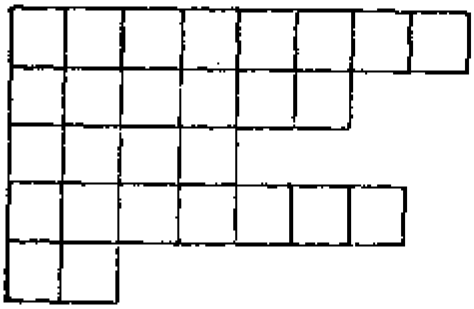

图 31

19. 如图31所示，第i行画着a_i个正方形(边长为1)，于是b_j即为第j列中的正方形数目.由此易得结果.

20. 由p是素数，易证

$C_p^i \equiv 0 \pmod p$，$(1 \leqslant i \leqslant p-1)$，于是

$$(1+x)^p \equiv 1+x^p \pmod p.$$

从而

$$(1+x)^{pa} \equiv [(1+x)^p]^a \equiv [1+x^p]^a \equiv \sum_{j=0}^{a} C_a^j\ x^{jp} \pmod p.$$

另一方面

$$(1+x)^{pa} \equiv \sum_{k=0}^{pa} C_{pa}^k x^k \pmod p,$$

故

$$\sum_{k=0}^{pa} C_{pa}^k\ x^k \equiv \sum_{j=0}^{a} C_a^j\ x^{jp} \pmod p.$$

这样，x同次幂的系数必对于模p同余，即对$b=0,1,\cdots,a$成立

$$C_{pa}^{pb} \equiv C_a^b \pmod p.$$

21. 先证明$k \leqslant 2^{n-1}$. 若$k>2^{n-1}$，由于S共有2^n个子集，我们将它们配成2^{n-1}对，每一对中两个子集互补. 因$k>2^{n-1}$，故$A_1,\cdots,A_k$中有两个互补的子集，从而它们的交为空集，与题设矛盾.

再证明$k \geqslant 2^{n-1}$. 假设$k<2^{n-1}$，我们可以从S中除$A_1,\cdots,A_k$外，选取一对互补的子集X和Y. 由题设$A_1,\cdots,A_k$中有一个A_i满足$A_i \cap X=\phi$，从而$A_i \subset Y$. 同理还有一个A_j满足$A_j \cap Y=\phi$，故$A_j \subset X$. 由此可知，$A_i \cap A_j \subset X \cap Y=\phi$，即$A_i \cap A_j$

$=\phi$，仍与题设矛盾。

结合两个方面，可知 $k=2^{n-1}$.

22. 设 n_k 表示 n 边形内所分成的诸区域中 k 边形的个数 $(3\leqslant k\leqslant m)$，所有这些多边形的顶点数目(包括重复的在内)为

$$3n_3+4n_4+5n_5+\cdots+mn_m.$$

另一方面，每个内部顶点都是两条对角线的交点，所以是 n 边形内部四个区域的公共顶点，因而在上述和式中，每个内部顶点都重复计数了四次。又 n 边形周界上的每个顶点显然恰为 $n-2$ 个三角形的顶点，故计数了 $n-2$ 次，此外，所有内部顶点与周界顶点中所有可能的四个顶点的组合成一一对应，即为 n 边形周界顶点四元组的个数。从而

$$3n_3+4n_4+\cdots+mn_m=4\,C_n^4+(n-2)\cdot n. \qquad (1)$$

现在我们把所有多边形的角加起来。k 边形各角之和 $(k-2)\cdot180°$，所以全部多边形(显然均是凸的)角度之和为

$$n_3\cdot180°+n_4\cdot360°+n_5\cdot540°+\cdots+n_m(m-2)\cdot180°.$$

上述角度之和还有一个算法：在内部顶点处四个角之和是 $360°$，所以所有内部顶点处各角之和为 $C_n^4\cdot360°$. 在 n 边形周界上诸顶点处各角之和为 $(n-2)\cdot180°$，于是

$$n_3\cdot180°+n_4\cdot360°+\cdots+n_m(m-2)\cdot180°$$
$$=360°\cdot C_n^4+180°(n-2),$$

即

$$n_3+2n_4+3n_5+\cdots+(m-2)n_m=2C_n^4+(n-2). \qquad (2)$$

(1)-(2)，得

$$2n_3+2n_4+\cdots+2n_m=2\,C_n^4+(n-1)(n-2).$$

从而所求的区域数为 $n_3+n_4+\cdots+n_m=C_n^4+C_{n-1}^2$. 上述解法多次运用了"两种方法计算同一个量"这一想法。