• 加德纳趣味数学系列 •

Guoneiwai
Shuxue Quti
Jijin

国内外
数学趣题集锦

余殷石 编著

上海科技教育出版社

Guoneiwai Shuxue Quti Jijin

"我们中出了一个奸细，"琼斯上尉对着他那疲惫不堪的七名部下说，"我们必须把他除掉。"

特种兵第 A83 小队自进入丛林以来，进展很不顺利，已有四位兄弟阵亡。现在只剩下这八人，体力和精神都到了崩溃的边缘。听到队长琼斯这么说，大伙儿面面相觑。

"我们不知道他是谁。但据我所知，上帝很乐意给出暗示，方法是这样的……"

"你疯了？"副队长菲舍中尉喊道，"现在不是开玩笑的时候！"

"我没开玩笑。不这样大伙儿会得死！"

其他人默默无语，木然地点了点头。死亡游戏开始了……

琼斯上尉认为谁是奸细？

ISBN 7-5428-2834-7

9 787542 828347 >

ISBN 7-5428-2834-7/O·278

定价：8.00元

·加德纳趣味数学系列·

余般石 编著

国内外
数学趣题集锦

上海科技教育出版社

责任编辑　朱惠霖
装帧设计　桑吉芳

·加德纳趣味数学系列·
国内外数学趣题集锦
余般石　编著
上海科技教育出版社出版发行
（上海冠生园路393号　邮政编码200235）
各地新华书店经销　常熟兴达印刷有限公司印刷
开本850×1168　1/32　印张4.5　插页1　字数105 000
2002年6月第1版　2002年6月第1次印刷
印数1－6000
ISBN7－5428－2834－7/O·278
定价：8.00元

序　　言

我们无论做什么事，工作、学习、游戏，都需要思考。但是人们的思考能力是有差别的，有的人较强，有的人则稍差。原因是多方面的，其中的一个原因是：有人经常在锻炼思考能力，有人却缺乏锻炼。一般来说，经常锻炼的人，思考能力要强些。锻炼思考能力的方法很多，做些数学趣题，就是一个好方法。

数学趣题与我们课堂上讲的数学题，字面上的差别就是一个"趣"字，实质上的差别有多方面，但主要也是一个"趣"字。现在的家长们很注重自己孩子的智力开发，这当然是很好的。但是在这方面，切忌拔苗助长，急于求成，重要的是培养孩子的学习兴趣。爱因斯坦说过："兴趣是最好的老师。"这话太有道理了！寓知识于趣味之中，寓教益于娱乐之中，由浅入深，循序渐进，乃智力素质教育之真谛。

依据着这样的认识，坚持着"宁肯少些，但要好些"的原则，笔者从平时收集的几百道国内外数学趣题中，挑选出50道，编写了这本小册

子。虽说是“数学”趣题，但有一些题目并不涉及具体的数学知识；其他的若有涉及，其程度一般也不会超过初中水平。然而其中所要求的思考能力，即使是秉性聪慧的人，恐怕也要经过锻炼才能掌握。

题目的编排大致是依着“从易到难”的顺序，每题都在页末给出了倒印着的提示。然而，题目的难易是因人而异的，并没有一定的标准，因此读者可按序试做，也可挑着做。提示也是因人而异的，未经努力思考，就是看了提示恐怕也未必有所领悟，因此先不要看提示，能独立解出最好，实在没有头绪再去看提示，看了提示后能解出，也是一种成功。

看望这本小册子确实能帮助人们提高自己的思考能力，并使人们对数学产生兴超。

余般石

图书在版编目（CIP）数据

国内外数学趣题集锦／余般石编著. — 上海：上海科技教育出版社，2002.6

（加德纳趣味数学系列）

ISBN 7－5428－2834－7

Ⅰ.国…　Ⅱ.余…　Ⅲ.数学—通俗读物
Ⅳ.01－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 033081 号

目　次

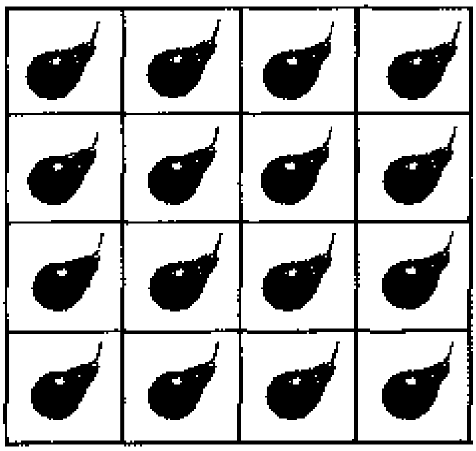
1

请吃梨子

汤姆把 16 个梨子放在一个 4×4 的方格阵内，一个方格内放一个，如下图。

他对亨利说："请你从中取走 6 个梨子，使得这方格阵中剩下的梨子每列每行都成偶数个。如果你能做到这一点的话，这 16 个梨子都归你了。你知道，最近我对梨子不感兴趣。"

亨利怎样才能得到这 16 个梨子?



提示：注意每取走一个梨子，都同时改变了所在行和所在列的奇偶性。

2

种　树

富勒和怀斯都是市政园林工人。这天临下班时，工头吩咐他们明天在一条东西向道路的南北两边种树。由于道路两边要种的树棵数相等，于是他俩商定，一人负责一边。

第二天一大早，富勒就来到道路北边种树，当他种完第三棵树时，怀斯来了。怀斯对富勒说："你是负责种南边的，到北边来干嘛？"富勒无奈，只好到南边去干活。怀斯很快就种完了北边的树，看富勒还没干完，想起富勒刚才为他种了三棵树，就到南边去帮助他。当怀斯在南边种完第六棵树时，南边的树也种完了。

请你在三分钟内回答：

怀斯比富勒多种几棵树？

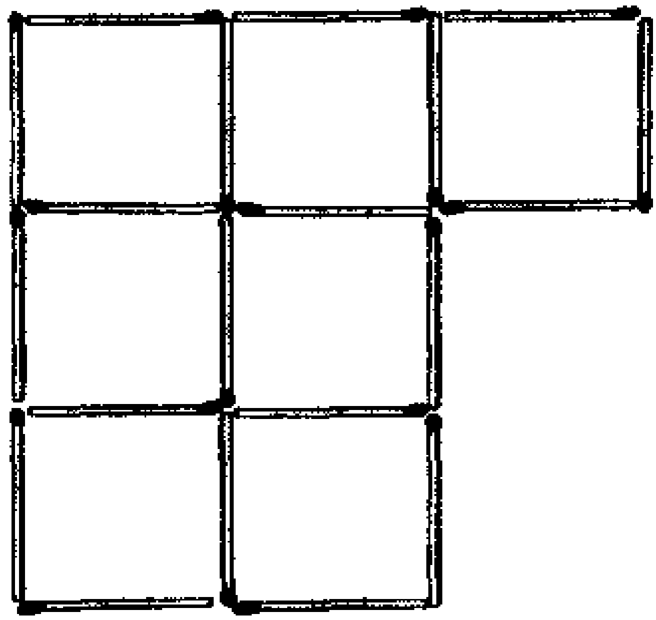
提示：如果你的回答是3棵，那请你最好再想一想。

3

七个变五个

如下图，由一些火柴搭成了七个正方形。现在要把这七个正方形变成五个正方形，但是只能移动其中的三根火柴。

你行吗?



提示：数一下共有多少根火柴，变成五个正方形后每个正方形需要几根火柴。

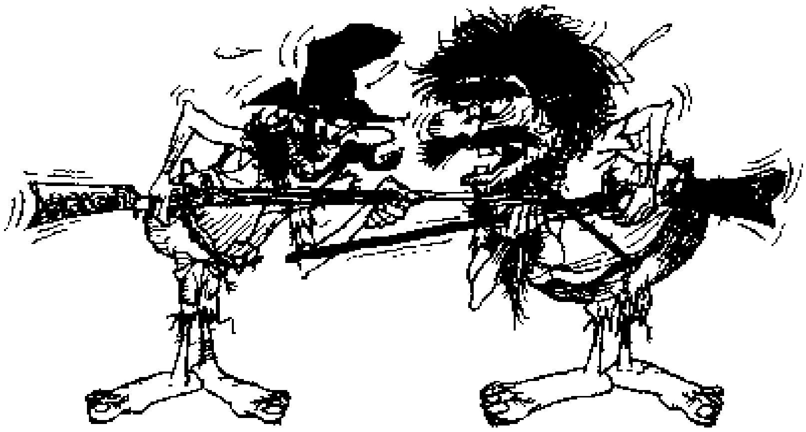
4

骗子们

杰克、查理和李三人结成团伙，专门搞骗人钱财的勾当。警察早就注意上了他们。这天，因为分赃不均，这三个家伙揪成一团，大打出手。警察接报赶来，人赃俱获，逮个正着。

警察先提审李，照例问到他们之间的关系。李如实答道："杰克是我的爸爸的儿子，查理是我的儿子的爸爸。"

杰克和查理是什么亲戚关系？



提示：请考虑一下李的性别。

5

足 球

足球一般是用黑白两种颜色的皮子缝制而成的，如图所示。已知一个足球上黑色皮子共有 12 块，至于白色皮子有多少块，你找个足球来数一数就知道了。不过，现在假定你找不到足球，请你算一下：

白色皮子共有多少块？

提示：注意黑色皮子都是五边形，它们的每条边都与白色皮子拼接，而每块白色皮子的6条边中有一半与黑色皮子拼接。

6

生日礼物

凯西小姐过生日，波莉姑妈送她一份包装得很精美的礼物。

波莉姑妈说，这里面包着 5 盒糖果，而糖果一共有 3 种：巧克力糖、太妃糖和水果糖。每个盒子内装的是同一种糖果，它们的颗数分别是：3，6，9，14，18。现在知道其中巧克力糖只有一盒，而太妃糖的颗数是水果糖的 2 倍。

你能算出其中每种糖果各有多少颗吗？

提示：注意太妃糖与水果糖的总颗数能被 3 整除。

7

最大数

用 0,1,…,9 这十个不同的数字可以拼成许许多多的十位数，例如，9876543210，5432109876，等等。

其中能被 11 整除的最大数是多少？

提示：一个能被 11 整除的正整数的特点是，其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差也能被 11 整除。

8

罗马数字

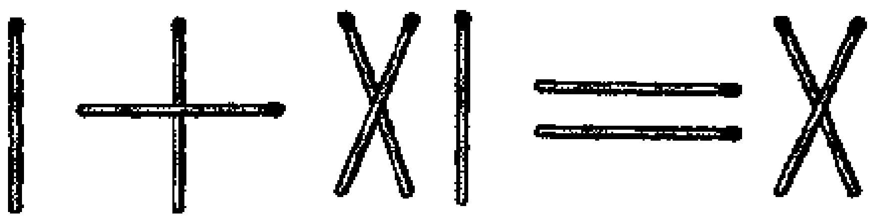
阿伦取出 10 根火柴，在桌子上摆出了一个用罗马数字表示的等式，如下图，它表示：1 + 11 = 10。

“显然，这是错的。”他对站在桌子对面的巴德说，“但只要移动一下，这个等式就成立了。”

“你的意思是问我最少要移动几根火柴？”巴德说。

“可以这样理解。”

如果你是巴德，你会怎样做？



提示：“移动”的对象是什么？

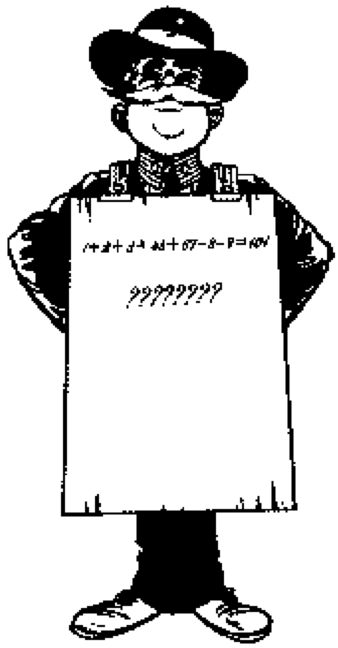
9

只填加减号

在数字 1 2 3 4 5 6 7 8 9之间的空档中填进加号或减号(也可以不填,这时就认为相邻的数字拼成了多位数),使得运算结果等于 101。例如:

$$1+2+3+45+67-8-9=101。$$

你能找出多少个这样的等式?



提示:这种题目除了反复试验寻找外,没有更好的办法。当然,编一个程序让电脑来做这件事,或许是个好主意。

10

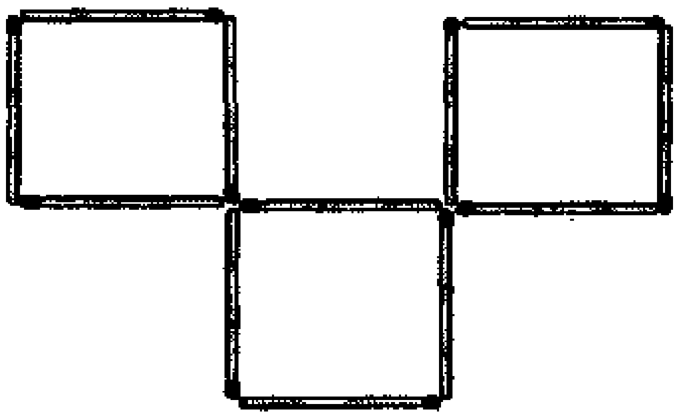
围图形

用 4 根火柴可围成一个正方形，其面积为 1 个单位。用 12 根火柴当然可以围成 3 个面积各为 1 的正方形，它们的面积之和为 3，如下图。

但这 3 个正方形是互不连通的，也就是说，要从一个正方形的内部走到另一个正方形的内部，必须越过它们的边界（顶点也是边界的一部分）。

现在要求用这 12 根火柴围出一个面积为 3 的连通图形。

你能围出几种？



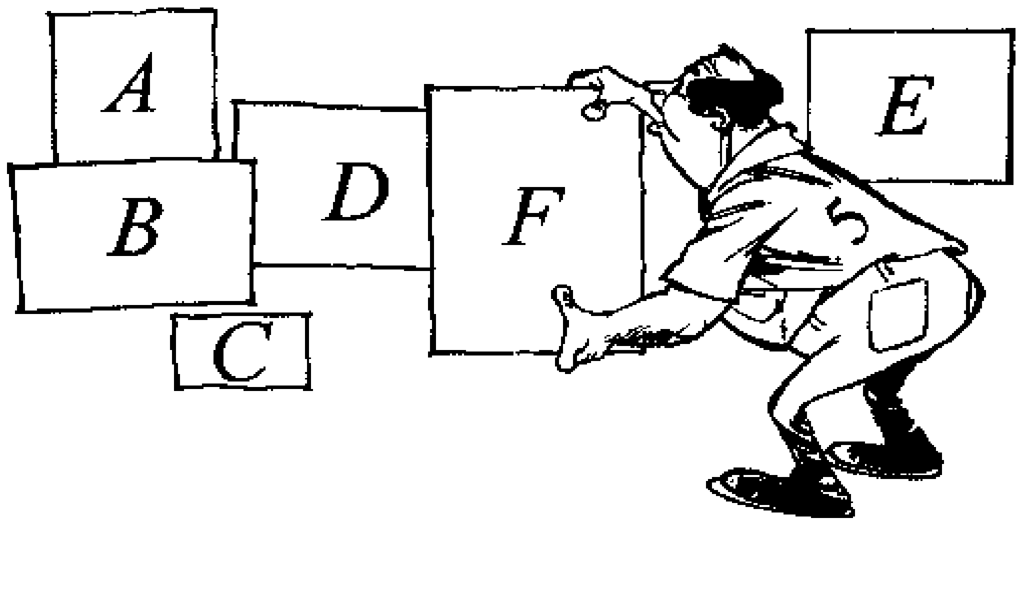
提示：先用这 12 根火柴围出一个规则的图形来，这样的图形的面积一般会大于 3；然后在不减少其周长的前提下，设法减小其面积，比方说把凸图形变为凹图形。

11

六位数

有一个六位数 *ABCDEF*，它的各位数字均不相同。把它乘以 5，得 *FABCDE*，即相当于把它的末位数移到首位。

这个六位数是什么？



提示：一个六位数乘以 5 还是六位数，那么它的首位数只能是 1。从这一点入手进行分析。

12

2001 年

公元 2001 年是 21 世纪的第一年，2001 的 2001 次方是个硕大的天文数字，利用对数，可以知道它共有 6606 位数字。现在把这 6606 位数字加起来，得到一个和，假定是 A；再将 A 的各位数字加起来，又得到一个和，假定是 B；再将 B 的各位数字加起来，又得到一个和，假定是 C。

你知道 C 是多少吗？

注：如果你硬算，那就傻了。

提示：注意 A 至多是五位数，从而 B 至多是二位数，C 肯定小于 18。

13

填数字

下面这个算式中有九个圆圈，现在要把 1 ~ 9 这九个数字分别填入这九个圆圈中，使等式成立。

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc \times \bigcirc\bigcirc = \bigcirc\bigcirc \times \bigcirc\bigcirc = 5568。$$

你能做到吗？

提示：首先对 5568 进行素因数分解，然后考虑各种可能的组合。

14

芳龄几何

卡罗琳娜小姐总是穿着前卫浪漫的服装，说着新新人类的语言，颇引镇上小伙子们的注意。老人们看了却只是摇头，说："小小年纪，就对她如此纵容，她妈妈真是疯了！"然而，卡罗琳娜小姐到底几岁呢？似乎没人知道。据说她的岁数有这样的特点：

（1）它的 3 次方是一个四位数，而 4 次方是一个六位数；

（2）这四位数和六位数的各位数字正好是 0～9 这十个数字。

卡罗琳娜小姐芳龄几何？

提示：首先根据(1)，推出年龄的上下限；然后对符合(1)的可能年龄一一用(2)来检验。

15

铜　环

卡特教授对实验室管理员迪恩大发雷霆，因为他做实验要用到天平，但迪恩这家伙却不知把砝码放哪儿了。

“您别急，教授先生，”迪恩嬉皮笑脸地一边说一边拿出一个铜链圈。“这上面一共有94个铜环，一个连着一个，而且首尾相连，形成一个铜链圈。每个铜环都是1克重，这绝对没问题。你取下其中三个铜环，铜链圈就被截分成一段段的铜链，这些铜环和铜链就能当砝码。用它们可以称出1～94（整数）克重的物品。顺便说一下，每个铜环都有一个扣子，打开扣子，就可把铜环取下，就看您取哪三个了。”

卡特教授应该取下哪三个铜环？

提示：取下三个铜环，就把铜链圈分成了六个部分，相当于六个砝码，其中三个是1克。这三个1克的砝码只能称出1～3克的重量，如果要称出4克的重量，可以有哪几种方案？哪一种方案好呢？

16

乘积最大

把1,2,3,4,5,6,7这七个数字分成两组,分别拼成两个正整数,再计算它的乘积。例如,可分成{1,3,4}和{2,5,6,7}两组,分别拼成341和6725这两个正整数,它们的乘积$341\times6725=2293225$。现在要求你按照这种方法拼出两个正整数,使它们的乘积为最大。

这两个正整数各是什么?

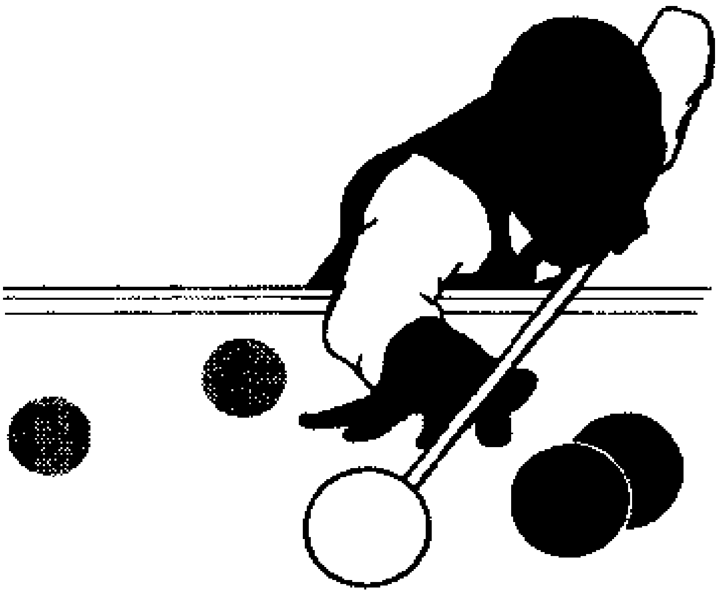
提示:既要考虑把最大的数字放在首位,又要考虑这两个数不能相差太大。

17

六球三色

同样大小的木球六个，其中三个重量相等，另三个重量也相等。它们或涂成红色，或涂成黄色，或涂成白色，每种颜色两球。在同种颜色的两球中，一只较重，一只较轻，但从外形上无法区分。现有一台天平，却无砝码。现在要用这台天平，仅称两次，就把这六个木球的轻重全部区分出来。

你知道怎样称吗？



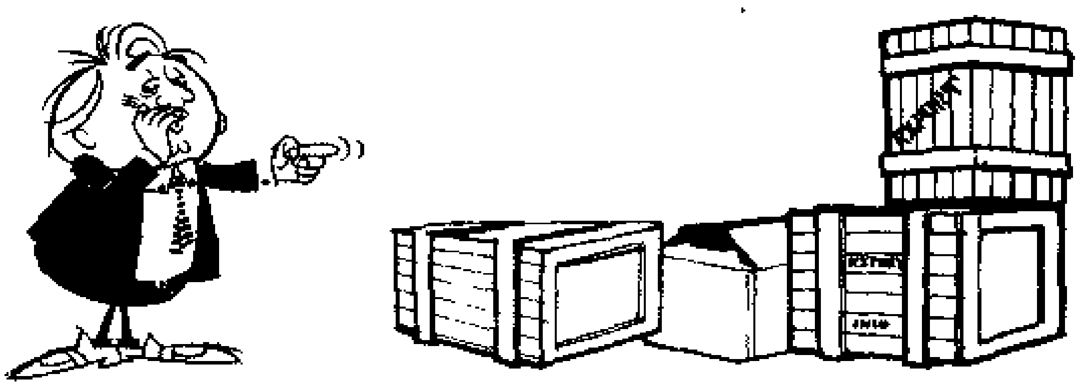
提示：注意任一个木球必与另一种颜色的两个木球中的一个重量相等。

18

缺斤少两的牛肉干

某食品厂包装流水线上的自动秤发生了问题，使得本应10克一袋的牛肉干，装成了9克一袋。当这一情况被发现时，这些缺分量的牛肉干已经装箱——正好装了两箱，每箱100袋。稍稍有点麻烦的是，这两箱牛肉干已经与其他八箱合格的牛肉干（每箱100袋，每袋10克）混在一起了。当然，只要把这十箱牛肉干一一过磅，就能解决问题。但是检验科新来的小伙子贝奇说，他只要称一次，就能把这两箱缺斤少两的牛肉干找出来。

他是怎样称的呢？



提示：设计一种从各箱中取出若干包牛肉干的方法，使得每两箱取出的牛肉干重量之和各不相同。

19

酒鬼们

一群酒鬼聚在一起，要比一比酒量。先上一瓶，各人平分，喝完再说。这酒厉害，一瓶喝下来，当场就倒了几个。于是再来一瓶，在余下的人中平分，结果又有人倒下。现在能坚持的人虽已很少，但总是要决出个雌雄来的，不得已又来一瓶，还是平分。这下子总算有了结果——全倒了。只听见最后倒下的酒鬼中有人咕哝道："嗨，我正好喝了一瓶。"虽然这家伙醉得可以，但这句酒话倒是符合实际情况的。

一共有多少个酒鬼？

提示：设酒鬼有 x 个，第一瓶喝完余下 y 个，第二瓶喝完余下 z 个，则可列出一个方程。设法解这个方程。

20

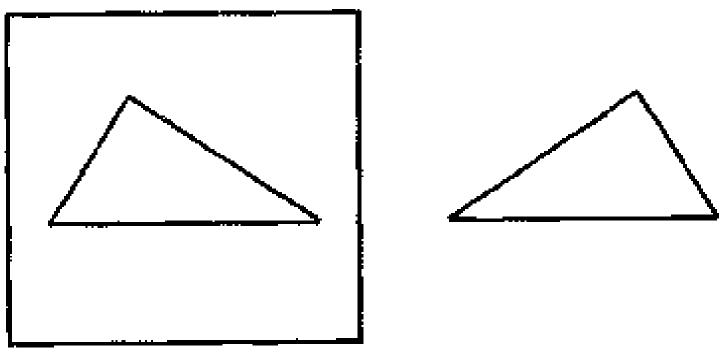
毛皮料子

裁缝匠泰勒正在犯愁。当地的贵族诺布尔派人送来了两块毛色相同的毛皮料子，一块是方形的，中间有一个三角形的洞，另一块是三角形的，形状与方形料中间那三角形洞恰巧一样。来人说老爷吩咐了，请泰勒把那个洞用这块三角形毛皮给补上。

泰勒把这两块毛皮料子放在一起一试，发觉那块三角形毛皮虽然与三角形洞的形状完全一样，但方向相反，如果直接缝补上去，两块毛皮的正反面不一致。

诺布尔可是一位大主顾，泰勒不愿为这种小事让诺布尔看扁了，但一时又想不出什么办法来。

你能帮他解决这个困难吗？



提示：把三角形分成两个直角三角形，再利用"直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半"这个定理。

21

大吉大利之年

今年对贝利来说是个大吉大利之年，村上的格拉斯老人就是这么说的。格拉斯老人常为人看个相算个命什么的，虽然有时没有准头，但有时还是蛮灵的。他说贝利今年将交好运，理由很简单，那是因为贝利今年的年龄刚好是他出生年份的四位数字之和。要知道，这样的事情并不是年年都有的。

贝利今年几岁了？

注：不同的“今年”有不同的答数，而且对有些“今年”没有答数。

提示：设贝利的出生年为19xy年，再根据“今年”的年份，可列出一个二元一次方程。分析这个方程。

22

多瑙河上的爱情

风光旖旎的多瑙河上，一艘游轮正逆水而上。船上的乘客中，有亚当斯和伊丽莎白，他们是一对恋人。游轮徐徐而行，穿过 *B* 桥，来到 *A* 桥。这对恋人情不自禁，相拥热吻。这时，一阵微风，把伊丽莎白那镶有名贵珍珠的薄纱头巾吹落河中，顺流漂走，他们一时竟未察觉。等他们发觉时，时间已过了 3 分钟。只见亚当斯二话没说，纵身跳入河中，奋力划水，顺流向下游追去。巧的是，当他追上那薄纱头巾时，正好到达 *B* 桥。

假设 *A* 桥与 *B* 桥的距离是 300 米，河水的流速恒走不变，亚当斯在静水中的游泳速度与这艘游轮这时的静水速度相等。

河水的流速是多少？

注：或许通过列方程可以解决这道题目，但是不列方程就能简捷地予以解决的人无疑是一名高手。

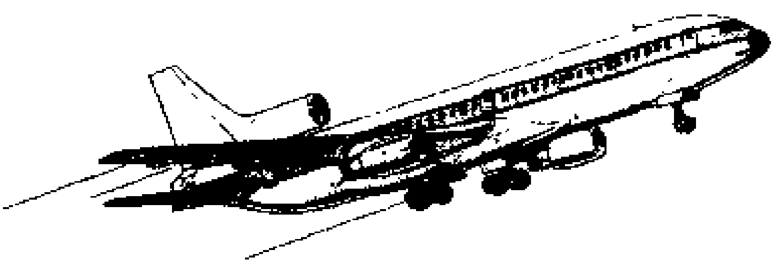
提示：以薄纱头巾为"静止"的参照系，题目便迎刃而解。

23

飞机票价

某航空公司经营 A, B, C, D 这四个城市之间的客运业务。它的部分机票价格如下：A—B 为 2000 元；A—C 为 1600 元；A—D 为 2500 元；B—C 为 1200 元；C—D 为 900 元。现在已知这家公司所规定的机票价格是与往返城市间的直线距离成正比的。

B—D 的机票价格是多少？



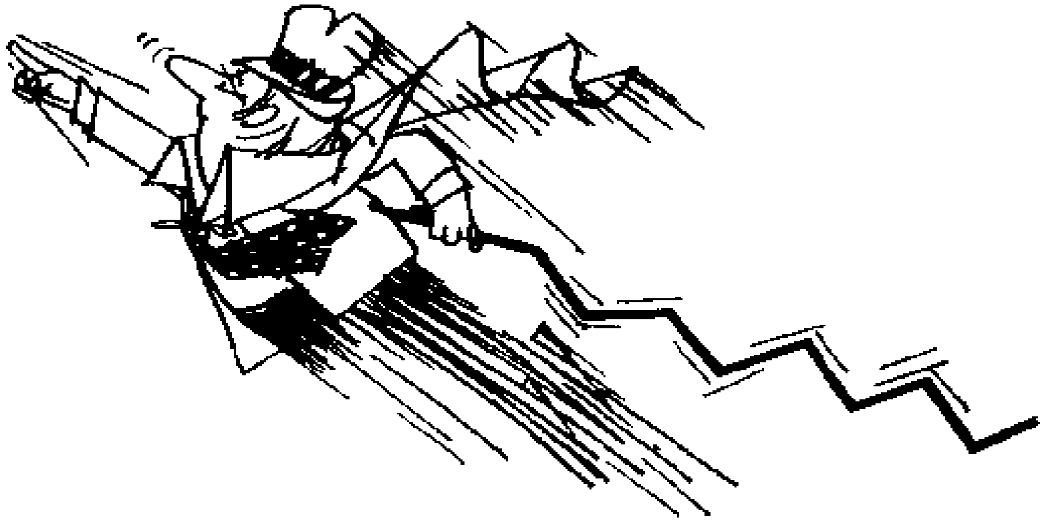
提示：以票价为城市间的距离，并注意勾股定理的逆定理。

24

四个 2

用四个 2，可以组成许许多多的数，如 2222，222^2（= 49284），等等。

在这些数中，最大的是哪一个？



提示：显然应该在幂运算上多动脑筋。

25

横式乘法

下面是一个横式乘法式子，其中 a，b，c 各代表一个十进制数码，即 0～9 中的一个数字；一排数码上面加一条横线表示由这排数码所拼成的那个多位数，例如，设 a 是 1，b 是 2，c 是 3，则 $\overline{abc}$ 就表示 123。现在有

$$\overline{abc} \times \overline{cba} = \overline{acbba},$$

a，b，c 各是什么数？

提示：把此横式列为竖式，先从万位数开始分析。

26

四位运动员

某大学的校运动会上，数学系的亚历山大、巴道夫、康拉德和迪安包揽了10000米赛跑的前四名。当他们上台领奖时，埃蒙教授发现他们身上的运动员号码很有趣：亚历山大的号码数加4，巴道夫的号码数减4，康拉德的号码数乘4，迪安的号码数除以4，得出来的数都相等。且这四个号码中有三个是二位数，只有一个是一位数，而且刚好是这个号码的运动员所得的名次。

这四位运动员的号码各是多少？

提示：从最小的号码着手。

27

诺贝尔奖获得者

前苏联的物理学家巴索夫是 1964 年诺贝尔物理学奖的得主之一，他以及其他两位当年诺贝尔奖得主所创建的理论，为激光器的诞生奠定了基础。获奖后过了若干年，他大儿子过 30 岁生日，这时他发觉自己的出生年份正好是自己年龄的 31 倍。

巴索夫获诺贝尔奖的时候是几岁？

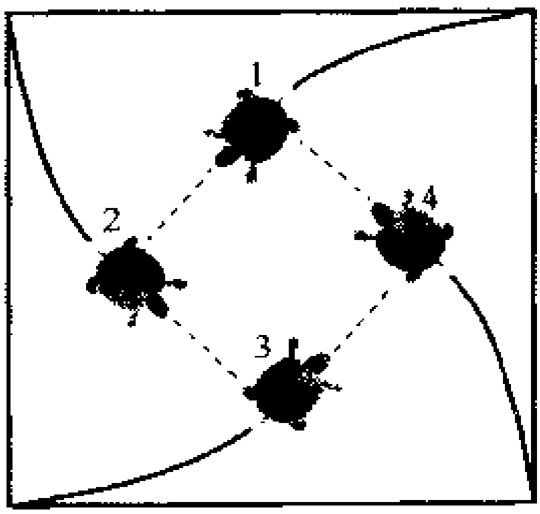
提示：先把小于 1964 且为 31 之倍数的数字列出来。

28

四龟碰头

有四只乌龟，趴在边长为3米的正方形的四个角上。现在它们均以每秒1厘米的速度同时开始爬行，而且1号龟总是对准着2号龟的方向爬，2号龟总是对准着3号龟的方向爬，3号龟总是对准着4号龟的方向爬，而4号龟总是对准着1号龟的方向爬。

经过多少时间它们才能在中心碰头？



提示：在任何时刻，四只乌龟的位置呈现怎样的对称形式？

29

公　牛

德里克和鲁道夫各养了一群牛，两人所养的公牛加起来一共是220头。德里克的牛群里有12.5%是公牛，鲁道夫的牛群里有17%是公牛。

德里克和鲁道夫各养几头公牛？

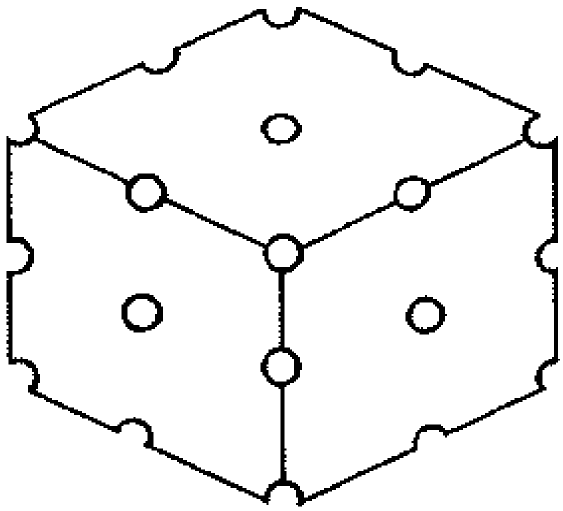
提示：什么数的17%是正整数？

30

立方体的重心

有一个密度均匀的立方体，它的每个角顶、每个面的中心、每条棱的中点都有一个小窝，可以容纳一个小球。现给你三个重量、大小完全相同的小球，要求放进这些小窝。

你应怎么放，才能使立方体的重心不变？



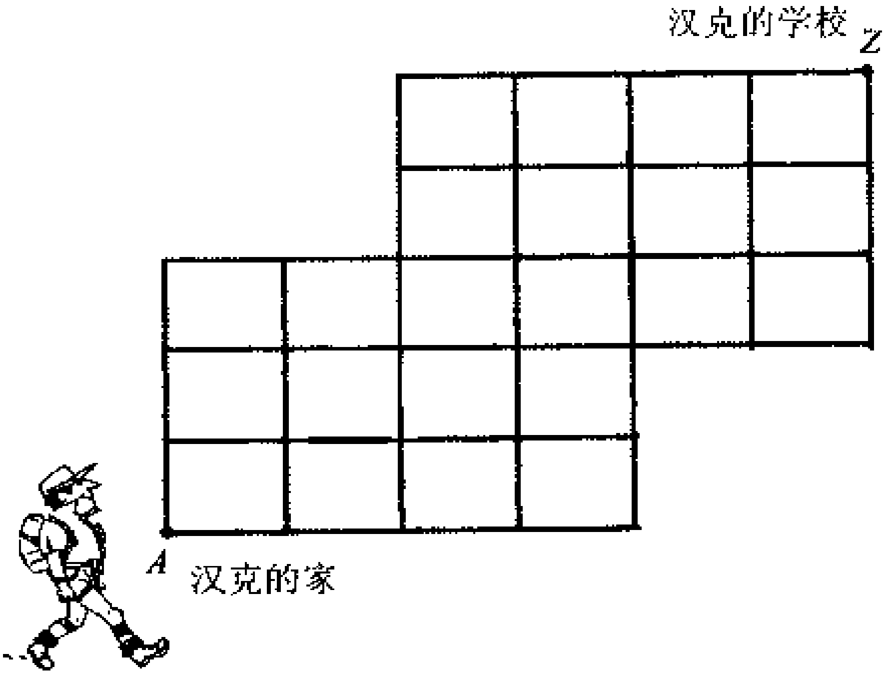
提示：设法使三个小球的重心与立方体的重心重合。

31

上学之路

这是一张街区道路示意图。汉克一家最近迁居，新家就在 A 点，而汉克的学校在 Z 点。为熟悉街道情况，汉克决定每天选择一条不同的最短路线(即不绕圈子的走法)步行上学。已知他每天上学和放学各走一条不同的路线，而且走了一个学期(按 100 天计算)。

汉克把所有的最短路线全都走了一遍吗?



提示：以上学路线为例，所谓"不绕圈子的走法"，即在每个道路交口都只能向东或向北。从 A 点开始逐点推算。

32

河东狮吼

某公司的办公大楼在市中心，而公司总裁温斯顿的家在郊区一个小镇的附近。他每次下班以后都是乘同一次市郊火车回那小镇。小镇车站离家还有一段距离，他的私人司机总是在同一时刻从家里开出轿车，去小镇车站接总裁回家。由于火车与轿车都十分准时，因此火车与轿车每次都是在同一时刻到站。

有一次，司机比以往迟了半个小时出发。温斯顿到站后，找不到他的车子，又怕回去晚了遭老婆骂，便急匆匆沿着公路步行往家里走，途中遇到他的轿车正风驰电掣而来，立即招手示意停车，跳上车子后也顾不上骂司机，命其马上掉头往回开。回到家中，果不出所料，他老婆大发雷霆："又到哪儿鬼混去啦！你比以往足足晚回了 22 分钟……"

温斯顿步行了多长时间?

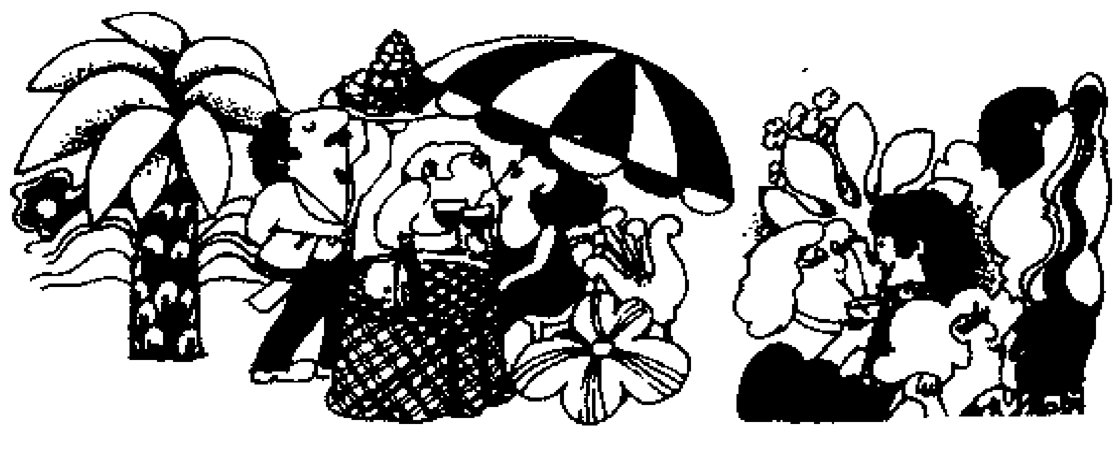
提示：司机迟了 30 分钟，而温斯顿只迟了 22 分钟。这 8 分钟是如何争取回来的?

33

四对夫妻

四对夫妻结伴去旅游。途中他们所喝的饮料一共有 44 杯，其中四位妻子，安妮、贝蒂、西莉亚和黛安，她们所喝的饮料顺次是 2 杯、3 杯、4 杯和 5 杯，而四位丈夫，埃克、弗兰克、盖尔和哈里，他们所喝的饮料顺次是各自妻子所饮杯数的 1 倍、2 倍、3 倍和 4 倍。

谁和谁是夫妻？



提示：妻子们共喝了几杯？丈夫们共喝了几杯？列出方程进行分析。

34

吸了蓝墨水的海绵

一块海绵，不小心掉进了一个蓝墨水缸。连忙捡起，把吸入的蓝墨水挤出来。但无论怎样挤，海绵中总要存留一些蓝墨水。假定我们这块海绵对于密度在1左右的溶液（比方说蓝墨水、清水、蓝墨水溶液）的存留量为10克。现打算用100克的清水对这块吸有10克蓝墨水的海绵进行清洗。把海绵放入这100克清水中，经充分搅动清洗，取出挤压，海绵中存留的蓝墨水溶液其浓度将为多少呢？不难算出，其浓度为 $\frac{10}{100+10}\approx 9.1\%$，效果是不理想的。现在要求清洗后海绵中的蓝墨水浓度在0.3%以下。

怎样才能做到这一点呢？

提示：把清水分成若干份，作多次清洗。

35

错按了乘法键

亨利陪女友南茜在一家商店里购物，南茜挑选了四件小饰物，很便宜，其中有一件价格只有1美元。亨利心算了一下，总共是6.75美元，于是连忙掏钱。突然，他发现店主在用那台电脑计算总价时，按的不是加法键，而是乘法键！他正要交涉，奇怪的是，店主算出的总价也是6.75美元。

这四件小饰物的单价各是多少？

提示：除了那件1美元的小饰件外，其他三件中有几件单价尾数为0.05美元？

36

大牌教练

大牌教练西马斯到某体育学校挑选后备队员，最终选定了伯德、巴克和布尔。但他还要测试一下这三名学生之间高低如何，于是让他们进行多项比赛，按名次计分，以总分比高低。各项比赛中，凡得第一名者，得分均为 P_1；得第二名者，得分均为 P_2；得第三名者，得分均为 P_3。P_1, P_2, P_3 均为正整数，且 $P_1 > P_2 > P_3$。待他们比赛结束后，西马斯宣布："伯德总分为 22 分，巴克和布尔均为 9 分。"

这三名学生进行了几项比赛？已知巴克在 100 米赛跑中得第一名，那么跳高谁得第二名？

提示：设进行了 M 项比赛，列出有关方程。根据方程推出 M 的可能值。对每种可能值进行分析。

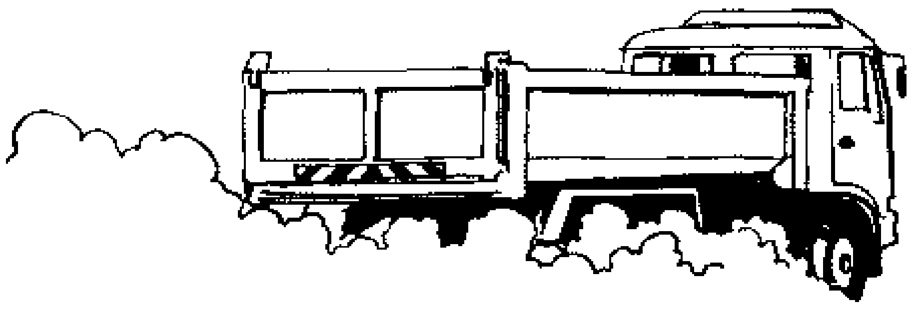
37

运筹帷幄

驻扎在 A 地的某部队突然接到命令，要求派 60 名士兵，在 2 小时 20 分钟内赶到离 A 地 33 千米的 B 地。现仅有一辆能乘坐 30 名士兵（不计司机）的运兵车，行驶速度为 22.5 千米/小时，而士兵步行速度为 9 千米/小时。

你能不能设计一种行军方案，使这 60 名士兵在规定时间内都能到达 B 地？

注：运兵车掉头时间和士兵上下车时间都不计。



提示：总是要让运兵车先装载 30 名士兵出发，另 30 名士兵则步行前进。问题是运兵车在何时何地让前 30 名士兵下车，立即返回接那后 30 名士兵。

38

七十大寿

库尔班大叔七十大寿，打算庆祝一番，于是命家里人去买一些鸡、鸽子和鹌鹑。当地的习惯，一种家禽不论大小，每只价格一样。家里人买了这三种家禽各若干只，总共 23 只，合计花去 211 元。回来向库尔班大叔报账时，人们发现：他们所买每种家禽的只数，正好是这种家禽的单价。

鸡、鸽子、鹌鹑每只售价各为多少？

当然，鸡最贵，鸽子次之，鹌鹑最便宜。

提示：列出两个联立的三元二次方程，设法求其正整数解。

39

免费早餐

一家旅店，为住店的旅客免费供应早餐，品种只有三种：牛奶、面包和蛋糕。旅客要在每天晚餐后登记第二天早餐自己所选的品种，每种一份，选一种、二种或三种均可。某晚，有 42 位旅客登记第二天早餐，各种选择方式都有，而且每种选择方式的采用人数各不相同，最少为 3 人，总共需要牛奶、面包、蛋糕各 27 份。

第二天早餐三种品种都选的有多少人？

提示：总共有多少种不同的选择方式？注意每种选择方式的采用人数各不相同这一点。

40

追 捕

法庭正在审一件刑事案件，犯罪嫌疑人的辩护律师向控方证人——一位警长发问。

“警长先生，”律师问道，“你说，被告从你面前跑了 27 步后，你才开始追他的？”

“是的，先生，”警长答道。

“在追捕中，你发现他每跑 8 步，而你只能跑 5 步。”

“是这样的。”

“那么，根据你的说法，你怎么能抓到他的？”

“那是因为我的步子较长。我跑 2 步的距离等于犯罪嫌疑人跑 5 步的距离，”警长答道。

这位警长跑了多少步才把犯罪嫌疑人抓到？

提示：设警长跑了 x 步才把犯罪嫌疑人抓到，这期间犯罪嫌疑人跑了 y 步。然后列方程解答。

41

握　手

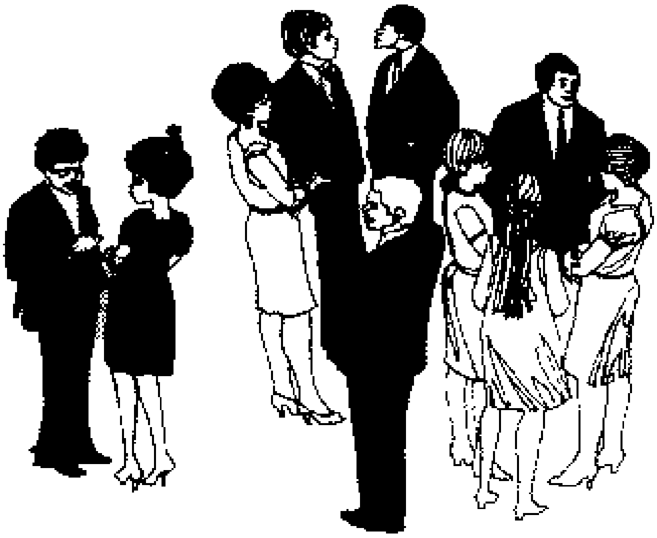
康拉德偕夫人出席一次宴会。出席宴会的还有丹尼尔夫妇、德里克夫妇、利奇夫妇和布伦特夫妇。彼此见面时，除寒暄一番外，有的还握手致意。康拉德记得自己握了4次手，此外：

（1）其余九人的握手次数都不一样；

（2）五位夫人之间没有握手，当然，夫妻之间也不会握手；

（3）任意两人之间最多握一次手。

康拉德夫人握了几次手？



提示：握手次数最多也不过8次，据(1)，知其余九人握手次数分别为0～8次。注意握手0次与握手8次的人的关系。

42

公交车和自行车

谢尔盖每天骑自行车上下班，同时有一路公交车沿着在他上下班的路线运行。谢尔盖一边骑着自行车，一边注意来往的公交车。他发现：每隔 12 分钟有一辆公交车从他身后超过，而每隔 4 分钟有一辆公交车迎面开来。假设谢尔盖和公交车都是匀速行驶，而且公交车的起点站和终点站以相同的时间间隔发车。

应该是几分钟发一辆公交车？

提示：设公交车每隔 x 分钟发一辆。若某时刻在某地点有一辆公交车从谢尔盖身后超过，则过了 x 分钟，该地点又将经过一辆公交车，而这时谢尔盖已前行了一段距离。x 分钟加上这后一辆公交车追上谢尔盖的时间，就是谢尔盖感到的 12 分钟。

43

NBA 总决赛

公牛队与太阳队为争夺 NBA 总决赛冠军，杀得难解难分。这天晚上，又是一场比赛下来，谁胜谁负？不太清楚。只是知道：

(1) 这场比赛双方都没换人；

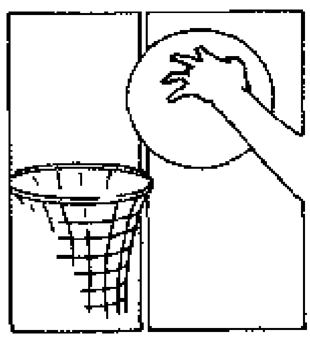
(2) 除了三名队员外，其他队员得分都不相同，这三名队员都是得 22 分，但他们并不在同一个队；

(3) 全场最高个人得分为 30 分，只有三名队员个人得分不到 20 分；

(4) 太阳队中个人得分最多的和最少的只相差 3 分；

(5) 公牛队中个人得分正好成一等差数列。

这次比赛谁胜谁负？比分多少？



提示：据(2)，得22分的三名队员中有两名是一个队的，另一名则属另一队。据(5)，前者必为太阳队，后者必为公牛队。

44

是是非非

艾达、芭芭拉和卡罗琳去某公司求职，她们被要求回答一份试卷。试卷上只有七道是非题，以“○”表示答“是”，以“×”表示答“非”。这三位小姐的具体答题情况如下表：

题号	1	2	3	4	5	6	7
艾达	×	×	○	×	×	×	○
芭芭拉	○	×	×	×	×	○	×
卡罗琳	○	○	○	○	×	○	○

现在已知她们每人都是答对五题，答错两题。

这几道题的正确答案是什么？

提示：先考虑艾达和芭芭拉，她们都答对五题，而一共是七题，因此其中至少有三道题是她们都答对的。

45

国　籍

奥西、巴伯、坎农、迪克、埃米和芬克是在一条游轮上打牌时相识的，后来他们成了好朋友。有趣的是，他们的国籍各不相同，其中一个是美国人，一个是英国人，一个是法国人，一个是德国人，一个是意大利人，还有一个是俄罗斯人。现在已知：

（1）奥西和美国人都是医生；

（2）埃米和俄罗斯人都是教师；

（3）坎农和德国人都是技师；

（4）巴伯和芬克都当过兵，而德国人从未当过兵；

（5）法国人比奥西年长，意大利人比坎农年长；

（6）巴伯与美国人下星期要去英国旅行，而坎农与法国人下星期去瑞士度假。

奥西、巴伯、坎农、迪克、埃米和芬克的国籍各是什么？

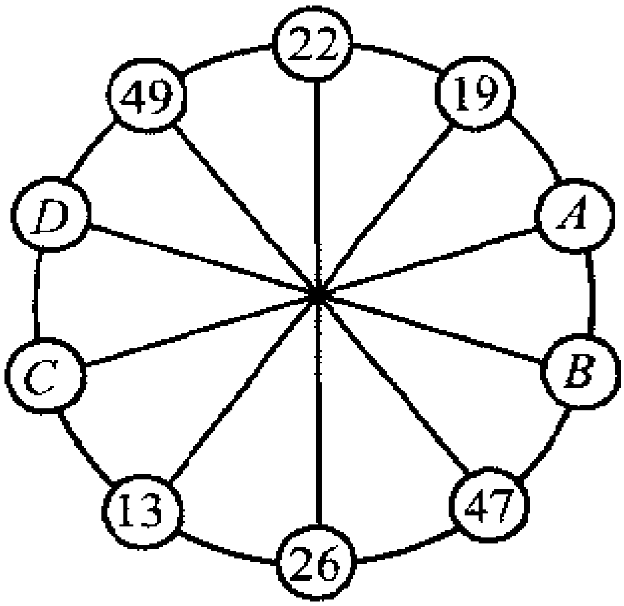
提示：建议先用排除法判定谁是德国人。

46

巧填数字

图中圆周上有十个小圆圈，其中六个中已填有数字。这六个数的特点是：相邻两数的平方和等于直径另一端相邻两数的平方和。即：$49^2+22^2=47^2+26^2$；$22^2+19^2=26^2+13^2$。现余下四个空格 A,B,C,D，其中也能各填入小于 20 的不同正整数，使得所有十个数字都具有上述性质。

你填得出吗？



提示：利用平方差公式。

47

苛刻的任务

情报处的亚当中校接到上司的一项命令，要他在他手下的六名间谍中选出若干名去总部报到，有重要任务。条件是：

(1) 阿瑟和布拉德这两人中至少去一人；

(2) 阿瑟和迪戈里不能一起去；

(3) 阿瑟、厄本和弗里曼这三人中一定要去两人；

(4) 布拉德和克拉克要么都去，要么都不去；

(5) 克拉克和迪戈里两人中必去但只能去一人；

(6) 若迪戈里不去，则厄本也不去。

亚当中校应该派哪几个人去？

提示：从(5)出发进行分析。

48

谁养斑马

有五个不同国籍的人，分别居住在五幢不同颜色的房子里，他们养着不同的动物（每人一种，下同），喝着不同的饮料，抽着不同牌子的香烟。现在已知：

(1)英国人住在红色房子里；

(2)西班牙人有条狗；

(3)绿色房子的主人喝咖啡；

(4)乌克兰人喝茶；

(5)绿色房子在白色房子的右邻（从读者的方向看，下同）；

(6)抽"万宝路"牌香烟的人养蜗牛；

(7)黄色房子的主人抽"三五"牌香烟；

(8)当中那幢房子的主人喝牛奶；

(9)挪威人住在左边第一幢房子；

(10)抽"健"牌香烟的人和养狐狸的人是隔壁邻居；

(11)抽"三五"牌香烟的人和养猫的人是隔壁邻居；

(12)抽"登喜路"牌香烟的人喝橘子水；

(13)日本人抽"摩尔"牌香烟；

(14)挪威人和蓝色房子的主人是隔壁邻居。

谁是喝水的人？谁是养斑马的人？

提示：建议从(9)和(14)开始分析，判定蓝色房子的位置。于是根据(5)，绿色房子与白色房子的位置只有两种可能。

49

生日蛋糕

多萝西过生日，请来七位同学。只见她拿出一块边长为 8 厘米的正六边形大蛋糕，说："现在要把这块蛋糕切成八块，要求它们是全等的图形，而且沿直线向下切，只许切五刀。你们谁行？"

你行不行？

提示：这样的题目只有经过反复尝试才可能找到解答。这里只能提示你，思路不要被中心对称的切割形式所局限。

50

死亡游戏

“我们中出了一个奸细，”琼斯上尉对着他那疲惫不堪的七名部下说，“我们必须把他除掉。”

特种兵第 A83 小队自进入丛林以来，处处受阻，进展很不顺利，已有四位兄弟阵亡。现在只剩下这八人，体力和精神都到了崩溃的边缘。听到队长琼斯这么说，大伙儿面面相觑。

“虽然我们不知道他是谁，而且恐怕上帝就是知道，也不会说。但据我所知，上帝很乐意谕示谁是清白者，方法是这样的。”琼斯说，“从我开始，以顺时针方向，依次是菲舍、加里、哈维、伊恩、卡尔、李、马修，再回到我，围成一个圆圈。我这里有两颗骰子，我同时掷它们，看看掷出一共是几点，记住这个点数，从我开始数起，依顺时针方向一个一个数下去，当数到这个点数时，这个人就离开，再继续数下去……，凡数到这个点数，就离开一人，直到剩下最后一人。按上帝的旨意，此人一定是清白的。把这两颗骰子再掷一次，又得到一个和数，再如此鉴别出一个清白者。依此进行下去，直到最后一个未被上帝谕示为清白的人……”

“你疯了？”副队长菲舍中尉喊道，“现在不是开这种玩笑的时候！”

答案中的答案：共有144种取法。

“我没开玩笑。不这样大伙儿全得死！现在说不定只死一个，其他七人都能活！”

“听他的，就照他说的那样玩一把！”下士卡尔嘴中嚼着树叶，嘟哝道。“反正早晚也得死……”

“被上帝证明为清白者的人就不继续参加这个游戏了吗？”上等兵马修问道。

“不，他还是要继续参加我们的这个游戏，因为清白者有义务帮助我们证明其他的清白者。”琼斯说。

其他人默默无语，木然地点了点头。决定死亡的游戏开始了……

琼斯上尉认为谁是奸细？

提示：两颗骰子的点数之和只可能是哪些数？对这些数按游戏规则做试验，看看谁总不能被鉴别为清白者。

答　案

1.请吃梨子

取走一个梨子,这个梨子所在行的梨子个数就从偶数4变成了奇数3。要使这一行的梨子个数成为偶数,就必须在这一行中再取走1个或3个梨子。

如果再取走3个梨子,这一行的梨子就被全部取完,余下的梨子成4列,每列3个,都是奇数列。现在已经取了4个梨子,剩下只可以取2个梨子,但这2个梨子无论怎么取,都不可能把这4个奇数列都变成偶数列。因此不能在这一行中再取走3个梨子。

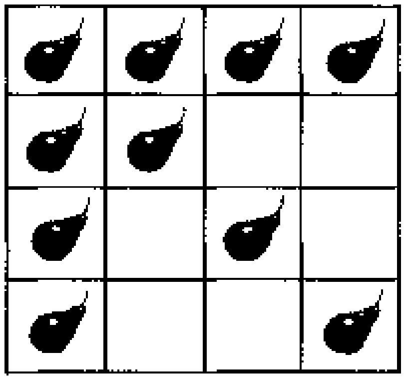
于是只能在这一行中再取走1个梨子,这行中的梨子现在就变成了2个,是偶数,符合要求。但是这样又造成了一个奇数列(3个梨子)。注意取第一个梨子时已造成了一个奇数列,所以现在共有两个奇数列(其余各行各列都是偶数个梨子)。从这两个奇数列中各取走1个梨子,就可以使这两个奇数列都变成偶数列。

如果这2个梨子是同一行的,则把它们取走后这一行仍然是偶数行。这时,虽然各行各列都是偶数个梨子,但至此只取走了4个梨子,按要求还要取走2个梨子。然而,这时这2个梨子无论怎么取,都不能使余下的梨子每行每列都保持偶数个。(取走1个总造成一个奇数行和一个奇数列,再取走1个只能把一个奇数行或奇数列变成偶数行或偶数列,总要留下奇数行或奇数列。)因此,这2个梨子不能是同一行的。

现在让这2个梨子不在同一行,于是造成了两个奇数行。再在这两个奇数行中各取走1个梨子,并使这2个梨子是同一列的,这样不但使这两个奇数行变成了偶数行,而且并没有产生奇数列。

至此，一共取走了6个梨子，而且余下的梨子每行每列都是偶数个，符合题目的要求。

由以上分析可见，本题解答并不唯一，下图仅是一种。



看来亨利要得到这16个梨子并不是很困难。但下面这个问题就有点儿难了：

符合题目要求的不同取法有多少种？(答案在本书中找。)

2.种　树

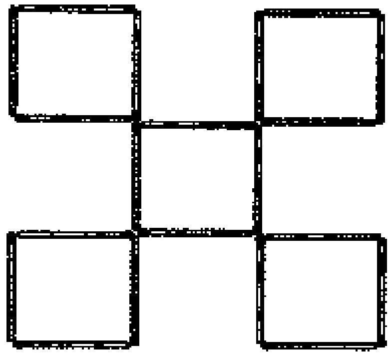
设道路每边要种树 a 棵。富勒先在北边种了3棵，之后，怀斯把他赶到南边去种，北边余下的 $a-3$ 棵由怀斯种完。这时怀斯良心发现，到南边帮富勒种了6棵。因此怀斯一共种了 $a-3+6=a+3$ 棵。而富勒一共种了 $3+(a-6)$ 或 $2a-(a+3)=a-3$ 棵。$(a+3)-(a-3)=6$，**怀斯比富勒多种了6棵。**

奇怪的是，这么简单的一道题目，做对的人却出乎意料的少。这是为什么呢？

3.七个变五个

数一数，一共有20根火柴，要搭成5个正方形，每个正方形派到4根，正好用作4条边。因此，在新搭成的图形中，各个正方形之间不能有公共边，否则就会多出几根火柴用不上。根据

这样的思路,就要在原来的图形中"破坏"各个正方形之间的相邻关系。于是,很快就应该找到解答,如下图。



4. 骗子们

不要以为犯罪和打架是男人的专利,这里因分赃不均而揪成一团的三人中,李是女性。杰克是李的兄弟,查理是李的老公,因此,**杰克是查理的妻舅。**

5. 足　球

注意足球上的黑色皮子都是五边形,而且这些黑色皮子都是与白色皮子相拼接,也就是说,任何一块黑色皮子的任何一条边都是与白色皮子的边拼接在一起的,而且不同的黑色皮子边拼接着不同的白色皮子边。于是,12 块黑色皮子的总共 60 条边,就拼接着白色皮子的 60 条边。这 60 条边属于多少块白色皮子呢?

注意这些白色皮子都是六边形。任何一块白色皮子的 6 条边中,都是 3 条边与黑色皮子拼接,3 条边与其他白色皮子拼接。现在总共有 60 条白色皮子边与黑色皮子边拼接,因此,**总共应该有 $60 \div 3 = 20$ 块白色皮子。**

在化学中,有一种由 60 个碳原子构成的 C_{60}分子,它的结构

就是像足球那样，由 12 个五边形和 20 个六边形组成，碳原子就处在这些多边形的顶点。

6. 生日礼物

由于太妃糖颗数和水果糖颗数的比例是 2:1，因此太妃糖与水果糖的总颗数一定能被 3 整除。注意巧克力糖只有一盒，而五盒糖的颗数分别是 3，6，9，14，18。如果巧克力糖的颗数为 3，则太妃糖与水果糖的总颗数为 6 + 9 + 14 + 18 = 47，不能被 3 整除，所以巧克力糖不是 3 颗。用同样的推理，可证明巧克力糖也不是 6 颗、9 颗或 18 颗，所以，**巧克力糖只能是 14 颗**。

余下的 36 颗，即太妃糖与水果糖，它们的颗数之比为 2:1，所以，**太妃糖 24 颗，水果糖 12 颗**。

此外，我们还可以知道，太妃糖有两盒，一盒是 6 颗，一盒是 18 颗；水果糖也有两盒，一盒是 3 颗，一盒是 9 颗。

7. 最大数

这十个数字能拼成的最大数显然是 9876543210，而一个正整数能被 11 整除的特点是：其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差是 11 的倍数。现在这个数的奇数位（从左数起）数字之和为 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25，偶数位数字之和为 8 + 6 + 4 + 2 + 0 = 20，差为 5，不合要求。

要使这个差变得能被 11 整除，就要在奇数位数字集合{1，3，5，7，9}与偶数位数字集合{0，2，4，6，8}之间进行调配。请注意不管怎样调配，差的变化值总是偶数。这是因为调配后奇数位数字之和增加多少，偶数位数字之和就减小多少，反之亦然。一进一出，二者之差总是这增加（减小）值的两倍。

现在差是 5，离它最近并能被 11 整除的数是 0，但由于上面

所述的原因，在奇偶位数字集合间进行调配不可能把这个差值从5变为0。因此考虑下一个离5较近并且能被11整除的数，那就是11。

从5变到11，变化值是6，奇数位数字之和的增加值（也是偶数位数字之和的减小值）就是3。把奇数位数字集合中的1与偶数位数字集合中的4对换就达到了目的。这样，奇数位数字成了3,4,5,7,9，而偶数位数字成了0,1,2,6,8。读者可以验证这两组数字之和的差值为11。现在把这些奇数位数字和偶数位数字从大到小交错排列，就得到了9876524130。

这个数显然能被11整除，而且是由那十个数字拼成的，但是不是最大的呢？虽然我们是从9876543210这个一般的最大数出发通过数字调配得到这个9876524130的，但是，这个调配过程本身只是用最少的步骤（1次对换）对尽可能小的数字（即1与4，其实3与6、5与8也可以，但涉及的并非是尽可能小的数字）进行了调配，并保证结果能被11整除。这里，“最少的步骤”和“尽可能小的数字”是不是能保证结果的最大性呢？从严格的逻辑意义上说，这一点是需要证明的。

好在证明并不难。我们要证明的是，在由那十个数字拼成的数中，比9876524130还要大的，一定不能被11整除。首先，这些数的开头五位数字一定是98765，因此我们只要考虑后五位数字的变化。其次，后五位数字无论怎样变化，只要0,1,2还是在（十位数的）偶数位上，3,4还是在（十位数的）奇数位上，那么24130显然就是最大的了。最后，如果0,1,2中有些数字跑到了奇数位上，而3,4或它们一起跑到了偶数位上，那么所形成的十位数的奇数位数字之和与偶数位数字的差就不再是11，也不会是11的其他倍数。这是因为：(1)前面说过，差的变化值一定是偶数，于是差不会从11变为22或0；(2)0,1,2与3,4之间无论

怎么调配，差的变化值最大是 12(0,1 与 3,4 对换)．于是差不会从 11 变为 33 或 −11 以及更远的数。

因此，由 **0,1,…,9 这十个数字拼成的能被 11 整除的最大数是 9876524130。**

8．罗马数字

移动一根火柴，把 Ⅰ + Ⅺ = Ⅹ 变成 Ⅰ + Ⅸ = Ⅹ(即 $1+9=10$)，或者变成 Ⅰ + Ⅹ = Ⅺ(即 $1+10=11$)，等式就成立了。

但是，"移动"的对象也可以是巴德自己，他只要走到桌子对面阿伦那一边，他将看到：

Ⅹ = Ⅸ + Ⅰ(即 $10=9+1$)，

等式成立。

这道题目告诉我们，有时候换个角度考虑一下，可能问题就迎刃而解了。

9．只填加减号

一共只有 10 个这样的等式：

(1) $1+2+3+45+67-8-9=101$，

(2) $1+2+34+56+7-8+9=101$，

(3) $1+2-3+4-5+6+7+89=101$，

(4) $1+23+4+5+67-8+9=101$，

(5) $1+23-4+5-6-7+89=101$，

(6) $1-2+3+4+5-6+7+89=101$，

(7) $1-2+34+5-6+78-9=101$，

(8) $12+34+5+67-8-9=101$，

(9) $12-3+4-5+6+78+9=101$，

(10) $123+4+56+7-89=101$。

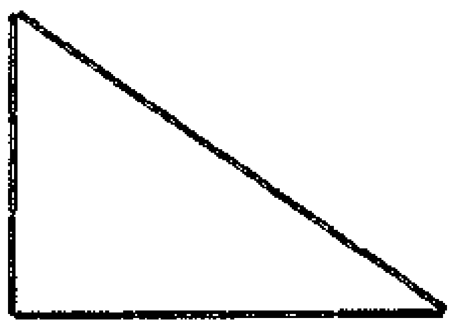
这 10 个等式是怎样找出来的？为什么说一共只有这 10 个等式？回答恐怕很不“数学”：如果是手工查找，除了反复试验调整外，别无良方。其实，在科学技术领域中有许多问题，都没有一种按部就班的现成解决方法，只能尝试各种可能的途径。一条途径走不通，就退出来重新再试，并且尽量避免走上前已证实走不通的途径。这种方法国外叫 trial and erorr，译成中文叫“试错法”。就是在数学领域中，看起来每走一步都要讲清道理，实际上在进行研究的时候，也往往离不开“试错法”。

当然，这道题目还有一种解决方法，那就是穷举法，即把所有可能的填法都找出来，并验算相应的式子，看结果是不是等于 101。这里所有可能的填法一共有 $3^8 = 6561$ 种（一共有 8 个空档，每个空档可有 3 种情况：填加号，填减号，不填），虽然用手工验算原则上是可以完成的，但是不现实。当然是编一个程序用电脑来做这件事为好，上面这 10 个等式便是电脑给出的结果。

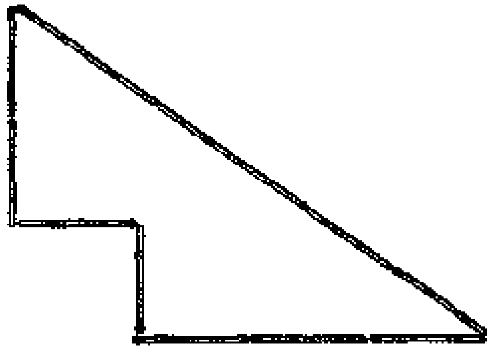
此外，电脑还告诉我们，如果要求等于 100，则一共有 11 个等式；如果要求等于 99，则一共有 17 个等式。有兴趣的读者可以自己编一个程序来看看还有其他什么有趣的结果。

10. 围图形

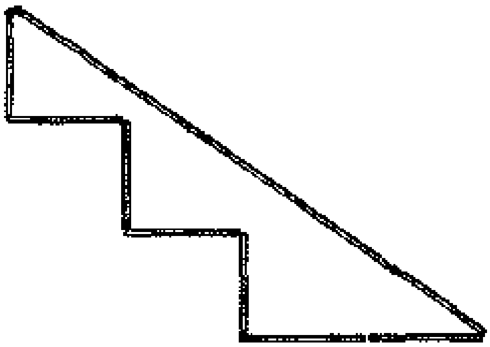
用 12 根火柴能围出些什么较规则的连通图形呢？对了，可以围出一个边长分别为 3，4，5 的直角三角形：



但是它的面积为 6。如果能"挖"掉 3 个单位的面积,那就好了。把直角上的那个小正方形"挖"掉,不就把面积减小了一个单位吗?

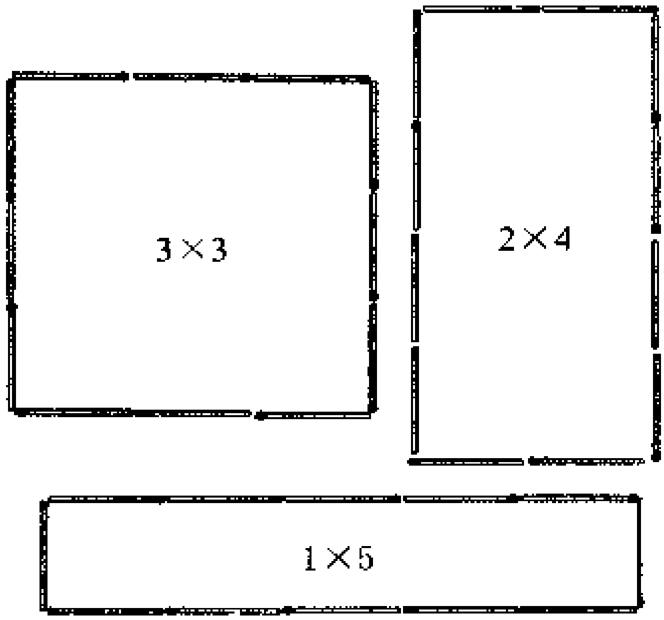


现在出现了两个直角,正好,把相应的两个小正方形"挖"掉,便大功告成:

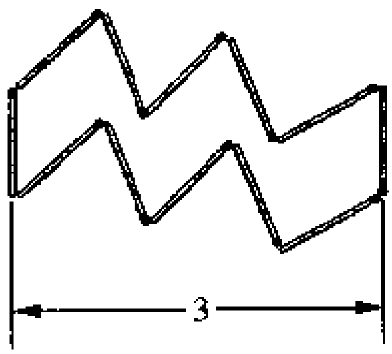


还有没有其他的方法?上面的思路给我们以启发,先围出一个矩形怎么样?试一下,可以围出 3×3,2×4 和 1×5 这三种矩形。如下页图。

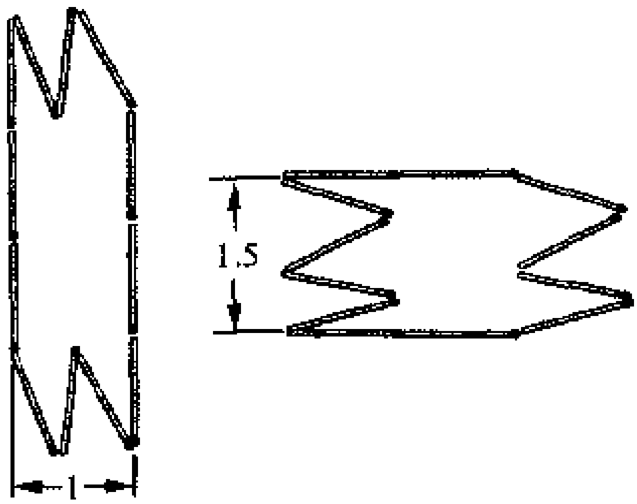
3×3 矩形的面积为 9,2×4 矩形的面积为 8,1×5 矩形的面积为 5。唉,能实施上面这种"挖"法的矩形是前两种,但无论怎么"挖",都不能"挖"到面积为 3。而对后一种矩形,实在是无从"挖"起,要是能把这个矩形从两头"压"一下,把边长"压"成 3 就好了。对了,为什么不能"压"呢?两头一压,那两条长边就不得



不产生曲折，只要这两边上的曲折是“完全相同”的，那么在一边上凹进的部分就正好与另一边上凸出的部分相抵，于是所形成的图形的面积就是短边的长度 1 与两条短边间距离的乘积。你看，现在只要把两条短边间的距离“压”到 3，不就成了？



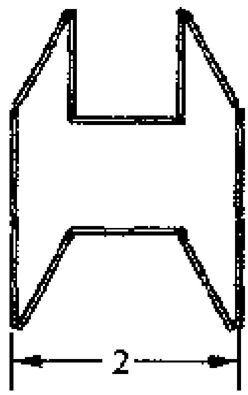
同样，对 3×3 和 2×4 的矩形，也可以用这种“压”的方法。具体地说，对 3×3 矩形，是把一对对边间的距离“压”到 1；对 2×4 矩形，是把一对短边间的距离“压”到 1.5（在“压”的时都须注意不要发生两根火柴合二为一的情况）。注意：虽然有时被“压”的那对边发生了错位，但“压”成的图形面积仍是这对边的



边长乘以这对边之间的距离。

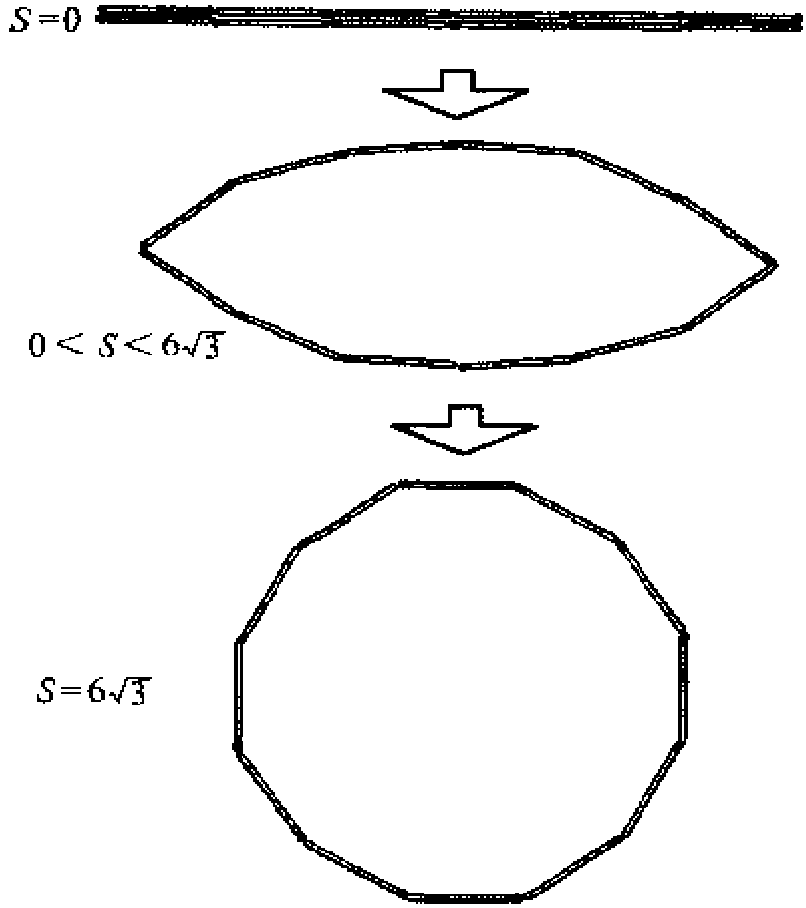
显然,这样"压"成的图形有无穷多种。

除此之外,还有其他一些思路,如下图:



事实上,用 12 根火柴(设火柴长度为 1)不但可以围成面积为 3 的连通图形,而且可以围成面积为任何不大于 $6\sqrt{3}$的指定正实数的连通图形。这是因为:用 12 根火柴能围成的最小面积为 0,如下页图中的上图;而用它们能围成的最大面积为 $6\sqrt{3}$,即一个边长为 1 的正十二边形的面积,如下页图中的下图。

现在我们把下页图中上面那个面积为 0 的"图形"慢慢拉开,最后拉成下面的正十二边形。在这一过程中,图形面积逐渐



增大，从 0 增加到 $6\sqrt{3}$。根据高等数学中的一个定理，图形的面积一定会“经过”从 0 到 $6\sqrt{3}$的每一个实数。如果我们要围成面积为其中某个指定实数——比方说$\sqrt{5}$——的图形，只要当面积经过$\sqrt{5}$时让图形“定格”，就“即得所求”了。

11. 六位数

首先，一个六位数乘以 5 仍为六位数，它必定小于200 000，也就是说，它的首位数 A 只能是 1。其次，由 $F\times 5$ 的个位数为 E，知 E 不是 0 就是 5。

假设 E 为 0，则由 $1BCD0F\times 5=F1BCD0$ 可知，F 必为偶数；而且 F 作为积的首位数，必有 $F\geqslant 1\times 5=5$，故 F 为 6 或 8。

若 F 为6,则 D 为3,C 为5,B 也为6,与各位数字均不相同的已知条件矛盾;若 F 为8,则 D 为4、C 为0,同样产生矛盾。故 E 不可能是0,它一定是5。

既然 E 为5,那么 F 必为奇数,且 $F \geq 5$ 仍然成立,于是 F 为5,7或9。但是 E 已经为5了,故 F 不能为5。F 也不能为9,因为如果 F 为9,则易知 D 也为9。故 F 必为7,从而 D 为8、C 为2、B 为4。

因此,**这个六位数就是142857**。

12.2001年

首先,2001^{2001} 的各位数字都不可能大于9,而且它的末位数肯定是1而不是9,因此它的各位数字之和 A 一定小于 $9 \times 6606 = 59454$。同理,A 的各位数字都不可能大于9,而且它肯定不是99999,因此 A 的各位数字之和 B 就一定小于 $9 \times 5 = 45$。同理,B 的各位数字之和 C 一定小于 $9 \times 2 = 18$。

又因为2001能被3整除,所以 2001^{2001} 肯定能被9整除。再根据"能被9整除的数,其各位数字之和也能被9整除"这条性质,可知 A,B,C 都能被9整除,而小于18且能被9整除的正整数只有9。

因此,$\boldsymbol{C = 9}$。

13.填数字

对5568进行素因数分解,得 $5568 = 2^6 \times 3 \times 29$。因此,要把5568分解成两个二位数的乘积,只有两种可能:

(a1) 96×58,

(a2) 64×87。

要知道把5568分解成一个三位数和一个二位数的乘积有

多少种可能,可分两种情况考虑:

(1) 29 是那二位数的一个素因数,则只有一种可能:

(b1) 192×29,

(2) 29 是那三位数的一个素因数,这种情况又可分为两种情况:

(i) 3 不是那三位数的一个因数,则有三种可能:

(b2) 116×48,

(b3) 232×24,

(b4) 464×12。

(ii) 3 也是那三位数的一个素因数,则有两种可能:

(b5) 174×32,

(b6) 348×16。

由于要求把 5568 分解成这两种乘积时要求用到 1 ~ 9 这九个数字,而且只有九个数位供填写,故这九个数字在乘积分解中不会重复。据此可删去(b1)、(b2)、(b3)、(b4)这 4 种可能。注意无论是(a1)还是(a2),都有数字 8,因此(b6)必须删去。剩下只有(b5)即 174×32,与此相容的只能是(a1)即 96×58。因此,答案是唯一的:

$174 \times 32 = 96 \times 58 = 5568$。

14. 芳龄几何

设卡罗琳娜小姐的年龄为 x,则 x^3 是一个四位数,即 $1\,000 \leqslant x^3 \leqslant 9\,999$,从而 $10 \leqslant x \leqslant 21$。($21^3 = 9\,261, 22^3 = 10\,648$。)而 x^4 是一个六位数,即 $100\,000 \leqslant x^4 \leqslant 999\,999$,从而 $18 \leqslant x \leqslant 31$。($17^4 = 83\,521, 18^4 = 104\,976; 31^4 = 923\,521, 32^4 = 1\,048\,576$。)因此,$18 \leqslant x \leqslant 21$,即 $x = 18, 19, 20$ 或 21。

计算:

$18^3 = 5\ 832, 18^4 = 104\ 976$;

$19^3 = 6\ 859, 19^4 = 130\ 321$;

$20^3 = 8\ 000, 20^4 = 160\ 000$

$21^3 = 9\ 261, 21^4 = 194\ 481$。

显然只有 18 符合题目中(2) 的要求。

卡罗琳娜小姐今年芳龄十八。

15. 铜　　环

由题目可知，总要取下三个 1 克的铜环，也就是说，无论怎么取，总是会有三个 1 克的砝码。用这三个 1 克的砝码显然可称出 1 克、2 克和 3 克的重量。要称出 4 克的重量该怎么办呢？当然，可以再添一个 1 克的砝码（也就是说，在取走那三个铜环的时候，使得被截分下来的三段铜链中有一段只是一个铜环）。但这样仅能称到 4 克重量而已。还有一种方案是再添一个 4 克的砝码，但这最多也只能称到 7 克重量。注意到在用天平称重时，既可以把要称重的物体放在一个秤盘中而砝码全放在另一个秤盘中（天平平衡时物体重量就是另一个秤盘中砝码的总重量），也可以把物体和一些砝码放在同一个秤盘中而另一些砝码放在另一个秤盘中（天平平衡时物体重量即为两个秤盘中砝码总重量之差）。因此可再添一个 7 克重的砝码。由以下式子可见，这样可称出 1 ~ 10 克的重量：

$1 = 1$,

$2 = 1 + 1$,

$3 = 1 + 1 + 1$,

$4 = 7 - (1 + 1 + 1)$,

$5 = 7 - (1 + 1)$,

$6 = 7 - 1$,

7 = 7,

8 = 7 + 1,

9 = 7 + 1 + 1,

10 = 7 + 1 + 1 + 1。

显然这是一个比前两者都要好的方案,值得采纳。依这个思路,要称出大于10克的重量,应再添一个21克的砝码,这样就可称出直到31克的重量。

且慢,因为沿这条思路下去,应该是再添一个63克的砝码。但是在那个铜链圈上取下三个铜环后,截分下来的三段铜链中有两段已被我们取定为含7个铜环和含21个铜环,第三段铜链包含几个铜环已被完全决定,由不得我们了。那么第三段铜链到底有几个铜环呢?算一下:总共94个铜环,取下3个,使得一段是7个,第二段是21个,剩下的第三段应该是94 - 3 - 7 - 21 = 63个,正中下怀!这样一来,我们一直可称到94克的重量。具体称法如下表:

天平左秤盘中所放的待称物体重量(克)	天平左秤盘所放的铜环数	天平右秤盘所放的铜环数
1		1
2		1 + 1
3		1 + 1 + 1
4	1 + 1 + 1	7
5	1 + 1	7
6	1	7
7		7
8		7 + 1
9		7 + 1 + 1
10		7 + 1 + 1 + 1
11	7 + 1 + 1 + 1	21

（续表）

天平左秤盘中所放的待称物体重量(克)	天平左秤盘所放的铜环数	天平右秤盘所放的铜环数
12	7 + 1 + 1	21
13	7 + 1	21
14	7	21
15	7	21 + 1
16	7	21 + 1 + 1
17	7	21 + 1 + 1 + 1
18	1 + 1 + 1	21
19	1 + 1	21
20	1	21
21		21
22		21 + 1
23		21 + 1 + 1
24		21 + 1 + 1 + 1
25	1 + 1 + 1	21 + 7
26	1 + 1	21 + 7
27	1	21 + 7
28		21 + 7
29		21 + 7 + 1
30		21 + 7 + 1 + 1
31		21 + 7 + 1 + 1 + 1
32	21 + 7 + 1 + 1 + 1	63
33	21 + 7 + 1 + 1	63
34	21 + 7 + 1	63
35	21 + 7	63
36	21 + 7	63 + 1
37	21 + 7	63 + 1 + 1
38	21 + 7	63 + 1 + 1 + 1
39	21 + 1 + 1 + 1	63

（续表）

天平左秤盘中所放的待称物体重量(克)	天平左秤盘所放的铜环数	天平右秤盘所放的铜环数
40	21 + 1 + 1	63
41	21 + 1	63
42	21	63
43	21	63 + 1
44	21	63 + 1 + 1
45	21	63 + 1 + 1 + 1
46	21 + 1 + 1 + 1	63 + 7
47	21 + 1 + 1	63 + 7
48	21 + 1	63 + 7
49	21	63 + 7
50	21	63 + 7 + 1
51	21	63 + 7 + 1 + 1
52	21	63 + 7 + 1 + 1 + 1
53	7 + 1 + 1 + 1	63
54	7 + 1 + 1	63
55	7 + 1	63
56	7	63
57	7	63 + 1
58	7	63 + 1 + 1
59	7	63 + 1 + 1 + 1
60	1 + 1 + 1	63
61	1 + 1	63
62	1	63
63		63
64		63 + 1
65		63 + 1 + 1
66		63 + 1 + 1 + 1
67	1 + 1 + 1	63 + 7

（续表）

天平左秤盘中所放的待称物体重量（克）	天平左秤盘所放的铜环数	天平右秤盘所放的铜环数
68	1 + 1	63 + 7
69	1	63 + 7
70		63 + 7
71		63 + 7 + 1
72		63 + 7 + 1 + 1
73		63 + 7 + 1 + 1 + 1
74	7 + 1 + 1 + 1	63 + 21
75	7 + 1 + 1	63 + 21
76	7 + 1	63 + 21
77	7	63 + 21
78	7	63 + 21 + 1
79	7	63 + 21 + 1 + 1
80	7	63 + 21 + 1 + 1 + 1
81	1 + 1 + 1	63 + 21
82	1 + 1	63 + 21
83	1	63 + 21
84		63 + 21
85		63 + 21 + 1
86		63 + 21 + 1 + 1
87		63 + 21 + 1 + 1 + 1
88	1 + 1 + 1	63 + 21 + 7
89	1 + 1	63 + 21 + 7
90	1	63 + 21 + 7
91		63 + 21 + 7
92		63 + 21 + 7 + 1
93		63 + 21 + 7 + 1 + 1
94		63 + 21 + 7 + 1 + 1 + 1

因此,**卡特教授应该先任取一个铜环,然后数过7个铜环,再取下一个铜环,再数过21个铜环,取下最后一个铜环。**

事实上,在天平称重问题中,如果有重量为$3^0(=1),3^1,3^2,\cdots,3^{n-1}$单位的$n$个砝码,那么就可称出从1到$\frac{3^n-1}{2}$的任何整数重量。

但在这道题目中,已经有了三个1克重量的砝码,相应的结论是:如果再有7×3^0克,7×3^1克,7×3^2克这样三个砝码,则可称出从1克到$3+7\times(3^0+3^1+3^2)$克$=94$克的任何整数重量。

一般地,假设已经有了m个重量为1个单位的砝码,那么再增添重量分别为$(2m+1)\times3^0,(2m+1)\times3^1,(2m+1)\times3^2,\cdots,(2m+1)\times3^{n-1}$单位的$n$个砝码,就可称出从1到$m+(2m+1)(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})=3^n(m+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}$的任何整数重量。

16. 乘积最大

把七个数字分成不空的两组,一共有63种分组方法。分组一旦确定,把每组中的数字从大到小排列拼成正整数,显然这样拼成的正整数是在这种分组下最大的,因此它们的乘积也是在这种分组下最大的。由此可见,我们只要对这63种分组一一算出相应的最大乘积,再找出其中最大的,就可解决问题。这种方法就是所谓"穷举法"。在数学上,穷举法固然不失为一种解决问题的办法,但那是没有办法的办法。因为对于63这样不大的数目,穷举法尚可实施(用电脑就更不在话下了),如果数目很大呢?事实上,数学中有许多问题,如果用穷举法来解决的话,即使用目前世界上最快的超高速计算机,恐怕到我们的太阳系已经"死亡",都还只是完成了所有可能情况中极微小的一部分。

因此,在数学上,崇尚的是"以简驭繁","毕无穷于一法"。对

于这道题目，我们尝试用下面这种方法。

首先，我们证明一个不等式。

设 $a < b, c > 0$，则有

$$a(10b + c) < b(10a + c)。$$

证明很简单，上式左边为 $10ab + ac$，右边为 $10ab + bc$，消去 $10ab$，由 $a < b$ 且 $c > 0$ 即得证。

其次，我们证明对这七个数字分组时，应该是三四分组才能得到题目要求的最大乘积。假定我们不是三四分组，那么就是一六分组或二五分组。

如果是一六分组，设 a 是只有一个数字的那组中的一位数，$10b + c$ 是把另一组中的六个数字从大到小排列而拼成的六位数，其中 c 是个位数，b 是前五位数字拼成的五位数，那么这时得到乘积 $a(10b + c)$。但它肯定不会是最大乘积，因为若把 c 移到前一组中，即可与 a 拼成一个二位数 $10a + c$，而后一组中余下的五个数字即拼成 b，这时得到的乘积即 $b(10a + c)$，由于 a 是一位数，b 是五位数，显然有 $a < b$，由上面的不等式，可知 $b(10a + c)$ 是一个比 $a(10b + c)$ 更大的乘积。

如果是二五分组，设 a 是有两个数字那一组中的两个数字以大在前而拼成的二位数，$10b + c$ 是另一组中的五个数字从大到小排列而拼成的五位数，其中 c 是个位数，b 是前四位数字拼成的四位数。同样，这时得到的乘积 $a(10b + c)$ 也不会是最大乘积，因为 a 是二位数，b 是四位数，$a < b$。

因此，要得到最大乘积，一定得三四分组。接下来的问题是，最大的数字 7 在哪一组？如果 7 在有四个数字的那一组，那么设 a 为三个数字那一组所拼成的最大三位数，$10b + c$ 为四个数字那一组所拼成的最大四位数，其中 b 是前三位数字拼成的三位数，它的首位数即为7。因为7是最大的数字，所以 $a < b$。与前同

样，这时不能得到最大乘积。因此 7 一定在三个数字的那一组。

现在考察最小的数字 1 在哪一组。如果 1 在有三个数字的那一组，那么这一组所拼成的最大三位数可写成 $10a+1$，其中 a 是其前二位数；设另一组的最大四位数是 $10b+c$，其中 b 是其前三位数，c 是个位数。显然有 $a<b$，$c\geqslant 2$。这时的乘积是 $(10a+1)(10b+c)$，可以证明，这个乘积小于把 1 与 c 对换后得到的乘积 $(10a+c)(10b+1)$。这是因为

$$
\begin{aligned}
&(10a+1)(10b+c)-(10a+c)(10b+1)\\
&=10ac+10b-10bc-10a\\
&=10(c-1)(a-b)<0。
\end{aligned}
$$

因此 1 一定在四个数字的那一组。

接着考察 2 在哪一组。如果 2 在四个数字的那一组，则该组拼成的最大四位数可写成 $100b+21$，而另一组的最大三位数可写成 $10a+c$。这时的乘积为 $(10a+c)(100b+21)$。注意 a，b 都是二位数，且 a 的首位数是最大的 7，所以有 $a>b$；此外，显然有 $c\geqslant 3$。根据这两个条件，用与上面类似的方法可以证明，如果把 2 与 c 对换，就可得到更大的乘积 $(10a+2)(100b+10c+1)$。具体的证明式子是

$$
\begin{aligned}
&(10a+c)(100b+21)-(10a+2)(100b+10c+1)\\
&=(c-2)[100(b-a)+1]<0。
\end{aligned}
$$

因此 2 必在三个数字的那一组。

同理，可证明 3 必在四个数字的那一组。具体的证明式子是

$$
\begin{aligned}
&(100a+32)(100b+10c+1)-(100a+10c+2)(100b+31)\\
&=10(c-3)[100(a-b)+1]<0。
\end{aligned}
$$

这是因为 a 是一位数 7，b 是二位数，故有 $a<b$；此外，显然有 $c\geqslant 4$。

同理，可证明 4 必在三个数字的那一组。具体的证明式子是

$$(100a+10c+2)(1000b+431)$$
$$-(100a+42)(1000b+100c+31)$$
$$=10(c-4)[1000(b-a)+11]<0。$$

这是因为 a,b 都是一位数,但 a 就是最大的数字7,故有 $a>b$;此外,显然有 $c\geqslant 5$。

至此,三个数字的那一组已全部清楚,其中是 7,4,2;从而另一组中就是 6,5,3,1。

因此,那两个正整数就是 742 和 6531。

它们乘出的最大乘积就是 $742\times 6531=4846002$。

这里的论证或许有点繁琐,但是它具有**一般性**。换句话说,如果给你 1,2,…,9 这九个数字,要求回答同样的问题,用上面的论证,你马上可以写出答案:9642 与 87531。而用穷举法,就要对 255 种可能情况进行计算。

此外,如果给出的是偶数个连续数字,答案是什么呢?如果给出的数字不是连续的,答案又是什么呢?有了上面的论证方法,相信你会感到这种问题简直是太容易了!这就是为什么数学中追求的是能解决一大类甚至无穷多个问题的一般方法,而不是解决个别问题的特殊方法。

17. 六球三色

先把这六个木球标记为红 1、红 2、黄 1、黄 2、白 1、白 2。第一步在天平的两个秤盘中分别放两球:左边是红 1 与黄 1,右边是红 2 与白 1。结果可能有三种情况(下面我们用 + 号表示重量的相加,用 >、<、= 分别表示重量上的大于、小于、等于):

(1) 红 1 + 黄 1 > 红 2 + 白 1,这说明红 1 > 红 2,黄 1 $\geqslant$ 白 1,这是因为:

如果是红 1 < 红 2(注意红 1 不可能等于红 2),黄 1 < 白 1,

则应该有红 1 + 黄 1 < 红 2 + 白 1;

如果是红 1 < 红 2、黄 1 ≥ 白 1,则应该有红 1 + 黄 1 < 红 2 + 白 1(这时黄 1 = 白 1)或红 1 + 黄 1 = 红 2 + 白 1(这时黄 1 > 白 1,注意只有两种重量,故有红 1 = 白 1,红 2 = 黄 1);

如果是红 1 > 红 2、黄 1 < 白 1,则应该有红 1 + 黄 1 = 红 1 + 白 1。

于是第二步在天平两端放黄 1 和白 2,结果有三种:

若黄 1 > 白 2,则红 1 = 黄 1 = 白 1 > 红 2 = 黄 2 = 白 2;

若黄 1 = 白 2,则红 1 = 黄 1 = 白 2 > 红 2 = 黄 2 = 白 1;

若黄 1 < 白 2,则红 1 = 黄 2 = 白 2 > 红 2 = 黄 1 = 白 1。

(2) 红 1 + 黄 1 = 红 2 + 白 1,这说明黄 1 ≠ 白 1。

于是第二步在天平两端放黄 1 和白 1,结果有两种:

若黄 1 > 白 1,则红 2 = 黄 1 = 白 2 > 红 1 = 黄 2 = 白 1;

若黄 1 < 白 1,则红 1 = 黄 2 = 白 1 > 红 2 = 黄 1 = 白 2。

(3) 红 1 + 黄 1 < 红 2 + 白 1,这种情况本质上与情况(1)是一样的,它说明红 1 < 红 2、黄 1 ≤ 白 1。

于是第二步在天平两端放黄 1 和白 2,结果有三种:

若黄 1 < 白 2,则红 2 = 黄 2 = 白 2 > 红 1 = 黄 1 = 白 1;

若黄 1 = 白 2,则红 2 = 黄 2 = 白 1 > 红 1 = 黄 1 = 白 2;

若黄 1 > 白 2,则红 2 = 黄 1 = 白 1 > 红 1 = 黄 2 = 白 2。

18. 缺斤少两的牛肉干

如果你曾经做过一道稍稍简单一点的类似题目,或许对这道题目容易上手些。那道题目的条件是:十箱中只有一箱是错箱。解法是,先把这十箱牛肉干从 0 到 9 编号,然后从 1 号箱里取出 1 包牛肉干,从 2 号箱里取出 2 包,从 3 号箱里取出 3 包,依此类推,直到从 9 号箱里取出 9 包牛肉干。然后把这些取出的牛肉

干放在一起称一下，如果这些牛肉干都是重量合格的，那么称出的总重量应该是 $10+20+\cdots+90=450$ 克，这时说明0号箱是错箱。如果1号箱是错箱，那么称出的总重量就应该比450克少1克，即449克，因为其中只有1包是从1号箱取出的；如果2号箱是错箱，那么总重量就应该比450克少2克，即448克，因为……

我们看到，解决上面这道题目的关键是：首先给每一箱赋以一个特征数，不同的箱赋以不同的特征数。（这里的做法很简单，对 n 号箱就用 n 作为特征数，当然也可以有其他各种各样的做法，比方说，给 n 号箱赋以 $n+1$ 或 $2n$ 等等。其实，只要把 n 个不同的非负整数作为特征数分配给这 n 个箱子，一个箱子一个即可。）然后从每箱中取出数量相当于其特征数的牛肉干，并称出这些取出的牛肉干的总重量。从短缺的重量我们可以推知错箱的特征数，由于不同箱有不同的特征数，而且只有一个错箱，因此我们便可立即判定哪一箱是错箱。

回到我们手头的题目。现在是有两个错箱，怎么办呢？思路与上面是一样的，同样给每箱赋以一个特征数，但要求是：不同的两箱组合有着不同的特征数之和。用集合论的语言来说，就是找一个由10个非负整数组成的集合，它的不同的二元子集有着不同的元素和。

这样的集合是不是存在呢？我们试着构造一个。首先取0和1作为这个集合的元素，下一个待选的数是2，把2加进来会不会产生问题？试一下，集合 $\{0,1,2\}$ 有3个二元子集 $\{0,1\}$，$\{0,2\}$ $\{1,2\}$，它们的元素和分别是1，2，3，各不相同，因此2可以选进来。再下一个3，就不行了，因为集合 $\{0,1,2,3\}$ 的两个二元子集 $\{1,2\}$ 和 $\{0,3\}$ 有着相同的元素和3。于是放弃3，考察4……，依此类推，最后终于得到集合 $\{0,1,2,4,7,12,20,33,54,88\}$，读者可以验证它各个二元子集的元素和互不相同。当然，在构造这

个集合时，不必每添加一个元素就验算一下新集合的每个二元子集。事实上，只要添加的元素为原来集合中两个最大元素之和再加上1即可（为什么？请读者思考）。

现在可以解答我们的题目了。首先按下表从0号箱到9号箱中依次取出相应包数的牛肉干。

箱　号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
取出包数（即特征数）	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88

总计取出221包，然后称出它们的总重量。若它们在重量上都是合格品的话，那么总重量应该是2210克，这时只有0号箱是错箱。但这是不可能的，因为已知有两箱是错箱。因此称出的重量总比2210克少。如果比2210克少1克，则说明0号箱和1号箱是错箱；如果少2克，则说明0号箱和2号箱是错箱；如果少3克，则说明1号箱和2号箱是错箱……。详细情况见下表。

称出的重量（克）	与2210克相比短缺的重量（克）	对应的特征数之和	错箱的号码
2209	1	0 + 1	0,1
2208	2	0 + 2	0,2
2207	3	1 + 2	1,2
2206	4	0 + 4	0,3
2205	5	1 + 4	1,3
2204	6	2 + 4	2,3
2203	7	0 + 7	0,4
2202	8	1 + 7	1,4
2201	9	2 + 7	2,4
2199	11	4 + 7	3,4
2198	12	0 + 12	0,5
2197	13	1 + 12	1,5

(续表)

称出的重量(克)	与2210克相比 短缺的重量(克)	对应的 特征数之和	错箱的号码
2196	14	2 + 12	2,5
2194	16	4 + 12	3,5
2191	19	7 + 12	4,5
2190	20	0 + 20	0,6
2189	21	1 + 20	1,6
2188	22	2 + 20	2,6
2186	24	4 + 20	3,6
2183	27	7 + 20	4,6
2178	32	12 + 20	5,6
2177	33	0 + 33	0,7
2176	34	1 + 33	1,7
2175	35	2 + 33	2,7
2173	37	4 + 33	3,7
2170	40	7 + 33	4,7
2165	45	12 + 33	5,7
2157	53	20 + 33	6,7
2156	54	0 + 54	0,8
2155	55	1 + 54	1,8
2154	56	2 + 54	2,8
2152	58	4 + 54	3,8
2149	61	7 + 54	4,8
2144	66	12 + 54	5,8
2136	74	20 + 54	6,8
2123	87	33 + 54	7,8
2122	88	0 + 88	0,9
2121	89	1 + 88	1,9
2120	90	2 + 88	2,9
2118	92	4 + 88	3,9

（续表）

称出的重量(克)	与 2210 克相比 短缺的重量(克)	对应的 特征数之和	错箱的号码
2115	95	7 + 88	4,9
2110	100	12 + 88	5,9
2102	108	20 + 88	6,9
2089	121	33 + 88	7,9
2068	142	54 + 88	8,9

题目是按照要求做出来了，但是值得思考的问题还很多。

让我们把“各个二元子集的元素和互不相同”这个性质简称为“2-和不同性质”，像{0,1,2,4,7,12,20,33,54,88}就是具有2-和不同性质的10元集合。于是我们有第一个问题：具有2-和不同性质的10元集合是不是“仅此一家”？回答是：当然不是，不但有其他的，而且有很多很多。比方说，把其中的最大数88换为任何一个大于88的正整数都不会影响这个集合的2-和不同性质。类似地，我们可以定义“3-和不同性质”、“4-和不同性质”……，一般地，“n-和不同性质”。容易证明，这样的集合不但存在，而且很多。用这些集合，我们就可以在原则上解决三个错箱、四个错箱……乃至 n 个错箱的问题。但是这里有一个限制条件，那就是需要事先知道有多少个错箱。如果事先知道有两个错箱，就使用具有2-和不同性质的集合；如果事先知道有三个错箱，就使用具有3-和不同性质的集合，如此等等。如果事先不知道有多少个错箱，甚至可能没有错箱，那该怎么办呢？也有办法，因为还有一种集合，它所有子集的元素和都不相同，这种性质可简称为“子集和不同性质”。例如，{1,2,4,8,16,32,64,128,256,512}就是一个典型的具有子集和不同性质的10元集合。用这个集合，只要称一次，就可以判别十箱牛肉干中有几个错箱，哪几个是错箱。不过，这里又出现了一个限制条件，那就是至少

得有一箱至少装有 512 包牛肉干，至少还得有一箱至少装有 256 包……。由于我们现在每箱只装了 100 包，因此如果我们不知道其中有几个是错箱的话，那么就只能用集合 $\{1,2,4,8,16,32,64\}$ 先对其中七箱进行判别，然后对剩下的三箱用集合 $\{1,2,4\}$ 进行判别。能不能找出一个具有子集和不同性质的集合，它有 10 个元素，而且其最大元素不超过 100 呢？这就引出了我们的第二个问题。

在数学上，这个问题是这样表述的：如果一个具有子集和不同性质的集合的最大元素不超过 2^k，那么这个集合最多能有多少个元素？

设在上述条件下，最多能有 m 个元素，那么由于 $\{1,2,4,\cdots,2^k\}$ 是一个具有子集和不同性质的集合，它的最大元素不超过 2^k，且有 $k+1$ 个元素，因此有 $m \geqslant k+1$。更重要的是，数学家已经证明，$m \leqslant k+\frac{1}{2}\log_2 k+1$，但是这里的等号不一定能成立，目前只有当 $k \geqslant 21$ 时，才有 $m = k+2$ 的例子。

同样的问题可以对具有 2-和不同性质的集合（不含 0）提出。这方面的结果是：

$$n^{1/2}(1-\varepsilon) \leqslant m \leqslant n^{1/2}+n^{1/4}+1。$$

这里 n 是集合中元素的上界。

对于具有 3-和不同性质的集合（不含 0），类似的结果是：

$$m \geqslant n^{1/3}(1+o(1))。$$

这里用了一些数论的记号，要解释就要涉及不少专门知识，有兴趣的读者可参看《数论中的问题和结果》（曹珍富编著，哈尔滨工业大学出版社，1996 年版）。

以上是专业数学家的研究方向，这个方向的特点是，在集合的最大元素不超过某个上界的条件下，探索集合最多能有多少

个元素。作为业余爱好者，不妨从另一个角度作一些探索，即在集合元素个数不变的条件下，寻找其最大元素的最小值。比方说，我们构造的具有 2-和不同性质的 10 元集合 $\{0,1,2,4,7,12,20,33,54,88\}$，其最大元素是 88，能不能把这个 88 减小下来呢？换句话说，是不是存在着其他具有 2-和不同性质的 10 元集合，它的最大元素小于 88 呢？回答是肯定的，如 $\{0,1,7,10,13,21,26,41,43,45\}$ 就是这样一个集合，它的最大元素是 45。是不是可以再小一些呢？回答是否定的。可以证明，45 是最小的了。对于具有 2-和不同性质的 10 元集合而言，我们得到了 45 这个最大元素的最小值，那么在一般情况下，对于具有 m-和不同性质的 n 元集合而言(这里设 $n > m$，以下同)，最大元素的最小值是多少呢？

我们把这个最大元素的最小值记为 $e(n,m)$，它显然有以下性质：

(1) 如果一个 n 元集合具有 m-和不同性质，那么它一定也具有 $(n-m)$-和不同性质，而且有 $e(n,m)=e(n,n-m)$，从而以下均设 $n \leqslant [m/2]$，这里的方括号表示取整数部分，例如 $[2]=2$，$[3.5]=3$。

(2) 如果一个 n 元集合具有 m-和不同性质，那么它一定也具有 $(m-1)$-和不同性质，因此有 $e(n,m-1) \leqslant e(n,m)$。

我们已经得到 $e(10,2)=45$，对于一般的 $e(n,m)$，除了能得到 $e(n,m) \leqslant 2^{n-2}$ 这个很平凡的结论外(借助于集合 $\{0,1,2,4,\cdots,2^{n-2}\}$)，你还能得到什么结论吗？

19. 酒鬼们

设共有酒鬼 x 人，喝完一瓶后未醉倒的为 y 人，喝完两瓶后尚能坚持的为 z 人，则那个说正好喝了一瓶的酒鬼第一次喝了

$\frac{1}{x}$ 瓶，第二次喝了 $\frac{1}{y}$ 瓶，第三次喝了 $\frac{1}{z}$ 瓶，加起来正好一瓶，于是有方程：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1。$$

其中 x,y,z 为正整数，且有 $x>y>z$。

这种未知数限定为正整数(或整数)且其个数多于一个(对于方程组来说，是未知数个数多于方程个数)方程(或方程组)，称为不定方程。不定方程是数论研究中的一个主要分支领域。在这里，很少有求根公式，能解决一大类方程的一般方法也不多。就拿这个方程来说，我们也只有就事论事的方法。好在这个方程比较简单，靠“目测”就能得到它的一组解：$x=6,y=3,z=2$。但靠“目测”不能证明它没有其他的解，因此我们不得不作一些数学上的推导。

由于 z 是正整数，故可从 $z=1$ 开始考虑。

如果 $z=1$，则由我们的方程，有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0$。这是不可能的，因此 $z\geqslant 2$。

如果 $z=2$，则由于 $y>z$，故 $y\geqslant 3$。若 $y=3$，则由方程，$x=6$，这就是方程的一组解。若 $z=2$，而 $y\geqslant 4$，则由方程，有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$，而 $\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{4}$，故有 $\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{4}$，$x\leqslant 4\leqslant y$，这与 $x>y$ 矛盾。因此当 $z=2$ 时，仅有我们已知的那一组解。

如果 $z\geqslant 3$，则 $y\geqslant 4$，$x\geqslant 5$，从而有

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{47}{60}<1,$$

因此这时方程不可能有解。

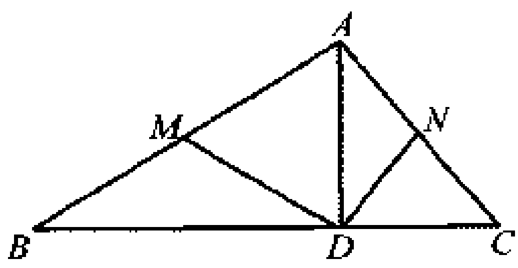
总而言之，**一共有 6 个酒鬼。**

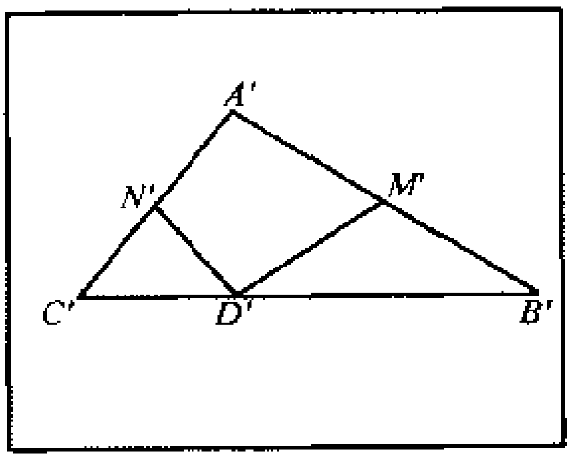
喝完第一瓶醉倒 3 个，余下 3 个，喝完第二瓶又醉倒 1 个，余下最后 2 个，再来一瓶，就全倒了。

顺便说一下，分子为 1 的真分数称为单位分数，又称“埃及分数”，因为据考证，公元 2000 年前的古代埃及人很喜欢把一般的分数表示为单位分数之和。单位分数是不定方程理论中一个很有趣的论题，这里向读者介绍一本入门的小册子《单位分数》（柯召，孙琦著，人民教育出版社，1981 年版），可以一阅。

20. 毛皮料子

如下图，设三角形毛皮为 $\triangle ABC$，设方形料子中间的那个三角形洞为 $\triangle A'B'C'$。由题意，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 虽然是全等的，但方向却相反。也就是说，$\triangle ABC$ 不能通过平移的方法与 $\triangle A'B'C'$ 重合，而必须有一个离开纸面的翻转，才能与 $\triangle A'B'C'$ 重合。但这样一来，三角形毛皮的毛面与方形料子的毛面就不一致了，因此不能直接缝补上去。应该想到，如果这两个三角形是全等的等腰三角形，那么就不存在什么“方向相反”的问题了。当然，题目没有给出它们是等腰三角形的条件，但我们可以把它们分成若干个等腰三角形。现在，进行如下操作：





(1) 在$\triangle ABC$上，过A点作AD垂直于BC，交BC于D点。分别找出AB、AC的中点M、N，连接DM、DN，可得$\triangle BMD$、$\triangle DNC$和四边形$MDNA$。

(2) 同理，$\triangle A'B'C'$也可分成$\triangle B'M'D'$、$\triangle D'N'C'$和四边形$M'D'N'A'$。

(3) 由于直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，所以$\triangle BMD$、$\triangle DNC$、$\triangle B'M'D'$、$\triangle D'N'C'$都是等腰三角形。而且容易证明，$\triangle BMD$与$\triangle B'M'D'$全等，因此它们可以平移重合；$\triangle DNC$与$\triangle D'N'C'$全等，因此它们也可以平移重合。

(4) 同理，$\triangle AMD$与$\triangle A'M'D'$全等，$\triangle AND$与$\triangle A'N'D'$全等，且它们都是等腰三角形，因此把四边形$AMDN$旋转$180°$后，即可与四边形$A'M'D'N'$重合。

经过上述几步分切重拼，泰勒就可以将三角形毛皮料子缝补到方形料子中的三角形洞中去了。

在数学上已经证明，总可以把一个多边形分成若干个“块”，拼成另一个事先给定的同面积多边形。因此这里把一个三角形“切”开，拼成与它成镜像对称的另一个三角形，简直可说是“小菜一碟”。然而，对于具体的“切拼”问题，至少需要“切”成几块，却是个颇伤脑筋的问题。

21. 大吉大利之年

贝利的年龄随“今年”的不同而有着不同的答案。

据题意，如果今年是2002年，则设贝利的出生年为$1900+10x+y$年，其中x，y均是$0\sim9$之间的正整数，于是有

$$2002-(1900+10x+y)=1+9+x+y,$$

$$92=11x+2y。$$

这是一个二元一次不定方程，在数论中有一套完整的解决

方法。但这里不必“杀鸡用牛刀”，因为 x 与 y 不但是正整数，而且是 0 ~ 9 中的整数。

首先，由方程，得 $92-2y=11x$，故 $11x$ 是偶数，即 x 是偶数。其次，同样由方程，得 $y=\frac{92-11x}{2}$。由于 $y\leqslant 9$，故 $92-11x\leqslant 18$，即 $x\geqslant 6\frac{8}{11}$，但 x 是小于 9 的偶数，故 $x=8$，从而 $y=2$。因此，贝利是 1982 年出生的，**他今年 20 岁了。**

如果“今年”是 2003 年，那么我们得到方程

$$93=11x+2y。$$

相应的解是 $x=7$，$y=8$。出生年是 1978 年，“今年”(2003 年) 正好是 $1+9+7+8=25$ 岁。下表给出到 2010 年的相应解答。

“今年”的年份	相应的出生年份	“今年”的岁数
2002	1982	20
2003	1978	25
2004	1983	21
2005	1979	26
2006	1984	22
2007	无解	无解
2008	1985	23
2009	1990	19
2010	1986	24

22. 多瑙河上的爱情

不列方程就能解决这道题目的关键在于设定参照系。一般我们总是以不动的大地作为参照系，我们所说的游轮的静水速度、河水流速、亚当斯的静水游泳速度，都是相对于大地（河岸）的运动速度。但是设定一个运动的物体作为参照系，也就是说，

假定这个物体是不动的，而大地倒是相对它在运动着，有时候会产生意想不到的方便。这道题目就是一个例子。

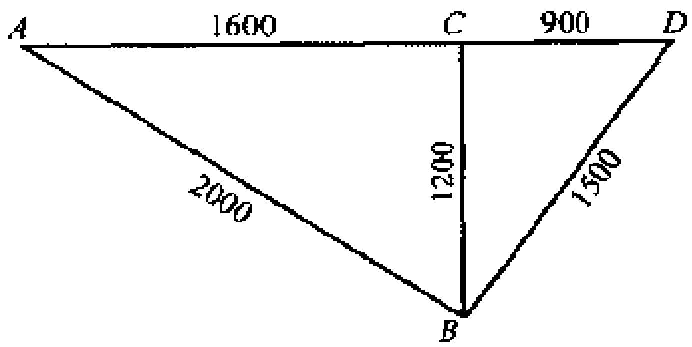
我们以薄纱头巾为参照系。我们可以设想在薄纱头巾上趴着一只小蚂蚁，以它的"感觉"为准。首先，当它离开 A 桥时，感到 B 桥从一个方向上向它"驶"来，速度就是河水流速，而游轮在另一个方向上远离它而去，速度就是游轮的静水速度；过了 3 分钟，亚当斯从游轮上跳下，向它奋力游来，速度就是亚当斯的静水游泳速度，也就是游轮的静水速度。既然游轮离它而去到达亚当斯入水处花了 3 分钟，那么亚当斯游到蚂蚁（薄纱头巾）处也是花 3 分钟。在这总共 6 分钟的时间里，B 桥以河水流速从 300 米远处来到蚂蚁的身边。

因此，**河水的流速就是 $300 \div 6 = 50$ 米/分。**

23．飞机票价

由于机票价格与城市间的直线距离成正比，因此可以用票价的单位 —— 元来作为城市间的距离单位。现在我们就以元为单位试着画出 A, B, C, D 这四个城市间相对位置的示意图。

首先画出 A, B, C，它们形成了 $\triangle ABC$，其中 AB 的长度即城市 A, B 间的距离 2000 元，同样，BC 长 1200 元，AC 长 1600 元。注意 $1200^2 + 1600^2 = 2000^2$，即 $|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$。由勾股定理的逆定理，知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C$ 是直角，AB 是斜边。



现在决定城市 D 的位置。由已知条件，$|AD| = 2500$ 元，$|CD| = 900$，因此 D 应该在以 A 为圆心以 2500 元为半径的圆周与以 C 为圆心以 900 元为圆心的圆周的交点上。但这两个圆的圆心距即 $|AC| = 1600 = 2500 - 900$，故此二圆内切于一点，此点即 D，且 A，C，D 在一条直线上，从而 $\triangle BCD$ 也是直角三角形，$\angle BCD$ 是直角，BD 是斜边。根据勾股定理，可知 $|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{1200^2 + 900^2} = 1500$（元）。

因此，**B—D 的机票价格为 1500 元。**

24. 四个 2

这样的题目，看来只能用穷举法。用穷举法的关键是一定要“穷尽”所有的可能情况，少了任何一种可能情况，或许答案是对的，但在逻辑上是不严格的。

让我们把四个 2 从左至右一个一个地摆放上去，看看有多少种有意义的组成方式。

首先，左数第一个 2，它的左边既没有数字作为底数让它成为指数，也没有数字让它拼上去形成一个多位数，因此它只有一种摆放方式，即作为一个正整数的首位数。

接下来，第二个 2 就有了两种摆放方式：一是作为左边那个 2 的指数，组成 2^2；另一是与左边的 2 拼成 22。

再接下来，第三个 2，对于上述两个摆放结果的每一个，又各有两种方式，一共形成 4 个结果：2^{2^2}，2^{22}，22^2，222。在这里，我们不考虑 2^22 这种不太规范的写法，因为一般应该写成 $2^2 \cdot 2$ 或 $2^2 \times 2$。更何况这种摆放只不过把原来的数翻一番，而“拼成多位数”的方式将至少把原来数（甚至原来数的指数）增加到 10 倍。

最后，第四个 2，对上述四个结果的每一个，各有两种方式，一共形成 8 个结果：$2^{2^{2^2}}$，$2^{2^{22}}$，2^{22^2}，2^{222}，22^{2^2}，22^{22}，222^2，2222。

现在进行大小比较，首先在 4 个底数为 2 的幂中进行比较。因为是同底幂，故只要比较指数的大小。4 个指数是 2^{2^2}，2^{22}，22^2，222。显然 2^{22} 最大，因为 2^{2^2} 只不过是 16，22^2 是个三位数，222 也是三位数，而 $2^{10}=1024$ 就是四位数，更不用说 2^{22} 了。

看来 $2^{2^{22}}$ 很可能是最大的，我们对它进行一下计算。

$$2^{2^{22}} = 2^{2^{10}\times 2^{10}\times 2^2} = 2^{1024\times 1024\times 4} = 2^{4194304}。$$

用对数计算一下，它是个 1262612 位数。于是，22^{2^2}，222^2，2222 就应该望风披靡了。仅剩下 22^{22}，似尚可一争。但细细一算，也不是对手——22^{22} 只是个 30 位数，不能与 $2^{2^{22}}$ 同日而语。

因此，用**四个 2 组成的数中最大的是 $2^{2^{22}}$**。

25. 横式乘法

将此横式写成竖式，如下图。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & c \\
 & \times & c & b & a \\
\hline
 & & a^2 & ab & ac \\
 & ab & b^2 & bc & \\
ac & bc & c^2 & & \\
\hline
a & c & b & b & a \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{万位} & \text{千位} & \text{百位} & \text{十位} & \text{个位}
\end{array}
$$

由万位上的情况可知，ac 是一位数，这说明在个位上 a 与 c 相乘时没有进位，即 $ac = a$。由此得 $a = 0$ 或 $c = 1$。但 a 是首位数，不能为 0，故只有 $c = 1$。

既然 $c = 1$，那么在千位上计算 $ab + bc$ 再加上可能由百位上进位而来的数字时没有发生进位，即 $ab + bc$ 是个一位数。这说明在十位上计算 $ab + bc$ 时没有进位，即有 $ab + bc = b$。由此得 $a + c = 1$ 或 $b = 0$。因 $c = 1, a \neq 0$，所以只有 $b = 0$。

由百位上 $a^2 + b^2 + c^2$ 的末位数是 b，而 $b = 0, c = 1$，知只能是 $a = 3$(进位 1) 或 $a = 7$(进位 5)。但千位上的 $ab +$ "由百位上进位而来的数字" $= c = 1$，而 $b = 0$，这说明 $a = 3$。

因此，$\boldsymbol{a = 3, b = 0, c = 1}$。

26. 四位运动员

可设亚历山大、巴道夫、康拉德和迪安这四位运动员的号码分别为 a, b, c, d。根据题意，我们有

$$a + 4 = b - 4 = 4c = d/4。$$

这是一个不定方程组。因 a, b, c, d 至多是二位数，故它们都是小于 100 的正整数。特别是，因 $d \leqslant 100$，由 $4c = d/4 \leqslant 25$，得 $c \leqslant 6$。即 c 是其中那个唯一的一位数，因此它也是名次。既然此四人包揽了前四名，故 $c \leqslant 4$。

由于只有一个号码是一位数，故 a, b, d 都是二位数。

若 $c \leqslant 3$，则由 $a + 4 = 4c$，或者 $a = 0$，或者 a 是一位数，矛盾。

故必定是 $c = 4$，从而 $a = 12, b = 20, d = 64$。

因此，亚历山大是 12 号，巴道夫是 20 号，康拉德是 4 号，迪安是 64 号。

其中，康拉德的号码是 4，他刚好得的是第 4 名。

27. 诺贝尔奖获得者

据题意，巴索夫的出生年份是 31 的倍数，因此，先把小于 1964 且是 31 的倍数的正整数罗列出来，计有 1953，1922，1891，1860，1829……

如果巴索夫是 1953 年出生的，那么他 1964 年获诺贝尔奖的时候才 11 岁，这显然是不可能的。

如果巴索夫是在 1891 年出生的，那么在他大儿子 30 岁的时候，他的年龄为 1891 ÷ 31 = 61 岁，这时是 1952 年，他还没有获诺贝尔奖，与题目条件矛盾。

如果他是在 1860 年甚至更早的年份出生的，那么在他大儿子 30 岁的时候，他自己最多为 1860 ÷ 31 = 60 岁，这时最晚也只不过是 1920 年，就更不会获诺贝尔奖了。

因此，巴索夫一定是 1922 年出生的，**他 1964 年获诺贝尔奖的时候是 42 岁。**

28. 四龟碰头

这四只乌龟开始时处于一个正方形的四个角上，也就是说，它们的位置呈 90°旋转对称。注意它们的运动速度——包括速度的大小与方向——也是呈 90°旋转对称，于是这种运动导致的结果——即新的位置——也理所当然地保持着 90°旋转对称，也就是说，这四只乌龟始终处在一个正方形的四个角上。这样，每只乌龟的运动方向总是与它所追踪的乌龟的运动方向保持垂直。

现在考察其中两只相邻的乌龟，比方说 1 号龟与 2 号龟，它们二者之间距离的变化取决于它们的运动速度（大小与方向）。它们的速度大小一样，但方向相互垂直——其中 1 号龟的速度

方向始终沿着它们之间的连线指向 2 号龟，2 号龟的速度方向始终与它们之间的连线垂直。这说明：1 号龟的运动速度全部用于缩短它们之间的距离，而 2 号龟的运动速度对它们之间距离的缩短毫无贡献。由于 1 号龟速度的大小为每秒 1 厘米，而它们之间的距离开始时为 300 厘米，因此经过 300 秒即 5 分钟，1 号龟与 2 号龟的距离变为零，即它们碰头。同理，这时 2 号龟与 3 号龟，3 号龟与 4 号龟，4 号龟与 1 号龟，也都碰上了头。由于对称性，它们碰头的位置就在正方形的中心。

因此，**经过 5 分钟，四龟在中心碰头。**

顺便说一下，乌龟的爬行路线显然是一条曲线，这条曲线在数学上称为“等角螺线”。

29. 公 牛

设德里克养了 x 头牛，则其中公牛有 $x/8$ 头，而鲁道夫养了 $(220-x)$ 头牛，其中公牛为 $(220-x)\times 17\%$ 头。

因公牛数是正整数，而 17 是素数，因此 $220-x$ 必为 100 的倍数。又，$220-x$ 必小于 220 而大于 0，故 $220-x$ 或为 200 或为 100，从而 x 或为 20 或为 120。

若 $x=20$，$x/8$ 就不是正整数，故唯有 $x=120$。

因此，**德里克养了 120 头牛，其中公牛为 15 头；鲁道夫养了 100 头牛，其中公牛为 17 头。**

30. 立方体的重心

密度均匀的立方体的重心在其中心，把三个小球放入那些小窝后要使得重心不变，就要让这三个小球所组成的系统的重心与立方体中心重合。由于这三个小球的大小重量完全相同，因此它们所组成的系统的重心就是以它们为顶点的三角形的中

线交点。

为下面叙述的方便，我们先证明三个引理。

引理 1 要使得放入三个小球后立方体重心不变，立方体的同一个面上不能有两个以上的小球。

证明 若某一个面上有三个小球，则这个三小球系统的重心就在这个面上了，根本不能与立方体中心重合。

若某一个面上只有两个小球，则根据那些小窝的位置，第三个小球或在过立方体中心与这个面平行的截面上，或在这个面的对面上。在前一种情况下，相应三小球系统的重心在距离这个面六分之一棱长且与此平面平行的截面上，不可能与立方体中心重合；在后一种情况下，相应三小球系统的重心在距离这个面三分之一棱长且与此平面平行的截面上，也不可能与立方体中心重合。

引理 2 符合题目要求的三小球系统中任何两个小球的连线都不会通过这立方体的中心。

证明 这是因为对于任何非退化的三角形来说，其三条中线绝不会在这三角形的边上相交。

引理 3 符合题目要求的三小球系统中最多只能有一个小球可以放在立方体的角顶点。

证明 假设已有一个小球放在立方体的某个角顶点，注意立方体总有三个面在此相交，于是由引理 1，与这三个面相邻的其他六个角顶点都不能放有小球。剩下的一个角顶点，就是与放有小球的角顶点相对的那个角顶点，但由引理 2，这里也不能放有小球。

现在试着向立方体的那些小窝里放进小球。分三种情况。

(1) 设有一个角顶点已放有一个小球。由引理 3，其他七个角顶点都不能放有小球。此外，由引理 1，相交于放有小球的那

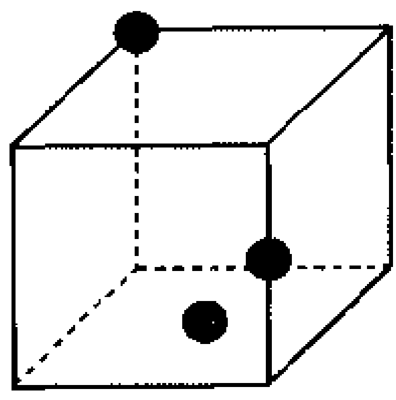
个角顶点的三个面的中心，不能放有小球；所有与这三个面相邻的棱的中点，也不能放有小球。因此，还剩下三个面的中心和三条棱的中点，可以考虑放入第二个小球。

注意这剩下的三条棱，它们的位置相对于已放有小球的角顶点来说并没有实质上的区别，因此，下面的论证虽然是仅对其中一条棱而言，但对所有三条棱都适用。对于那剩下的三个面，也是如此。

（ⅰ）若在其中一条棱的中点放第二个小球，则由引理1，相交于这条棱的两个面的中心，以及与这两个面相邻的棱的中点，都不能放小球了。现在只剩下一个面的中心，可以让我们放入第三个小球。可以证明，这样形成的三小球系统其重心与立方体中心重合。

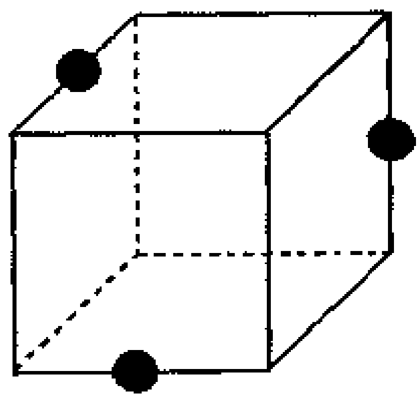
（ⅱ）若在其中一个面的中心放第二个小球，则由（ⅰ）可知，再在一条不与这个面相邻的棱的中点放第三个小球，可形成符合题目要求的三小球系统（即把（ⅰ）中的第三个小球看作这里的第二个，而把（ⅰ）中的第二个看作这里的第三个）。注意两个小球的位置确定后，若能有第三个小球加入而形成符合题目要求的系统，那么这第三个小球的位置只有一个。现在符合要求的放第三个小球的位置已找到，因此不必再考虑其他位置了。

读者应该看出，其实（ⅰ）和（ⅱ）是同一种放法，如下图。



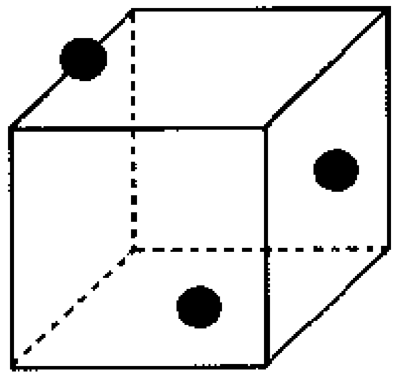
(2) 设没有一个角顶点放有小球,但有一条棱的中点已放有一个小球,则由引理1,相交于这条棱的两个面的中心,与这两个面相邻的棱的中点,都不能放有小球。此外,由引理2,与这条棱通过立方体中心成对称的那条棱的中点,也不能放有小球。这样,还剩下四条棱的中点和四个面的中心,可以考虑放入第二个小球。注意这剩下的四条棱相对于已放有小球的那条棱来说,它们的位置并没有实质上的区别,因此下面的论述虽是仅对其中一条棱而言的,但同样适用于其他三条棱。

(ⅰ) 若在其中一条棱的中点放第二个小球,则由引理1,还剩下一条棱的中点和两个面的中心可放第三个小球。把第三个小球放在那条棱的中点,可以证明这样形成的三小球系统符合要求,如下图。同样由(1)(ⅱ)中的论述,不必再考虑其他位置。注意我们至此实际上证明了这样一个结论:如果符合要求的三小球系统中有两个小球放在棱的中点,那么另一个小球必定也在棱的中点。



(ⅱ) 若在其中一个面的中心放第二个小球,则由(ⅰ)中叙述的结论,第三个小球必定不能放在棱的中点,即第三个小球也在某个面的中心。因此这里无所谓第二第三,我们只要考虑:从剩下的四个面中取两个,在它们的中心各放一个小球,看看这两

个小球是不是能与先前放在棱的中点的那个小球形成符合要求的三小球系统。经试验，如下图这样放入两个小球即可符合要求。至于其他可能的放法，同样由(1)(ⅱ)中的论述，只把这两个小球中的一个放到另外的面上是不能得到符合要求的系统的；而由引理2，把这两个小球分别放到另外的两个面上也是不能符合要求的。



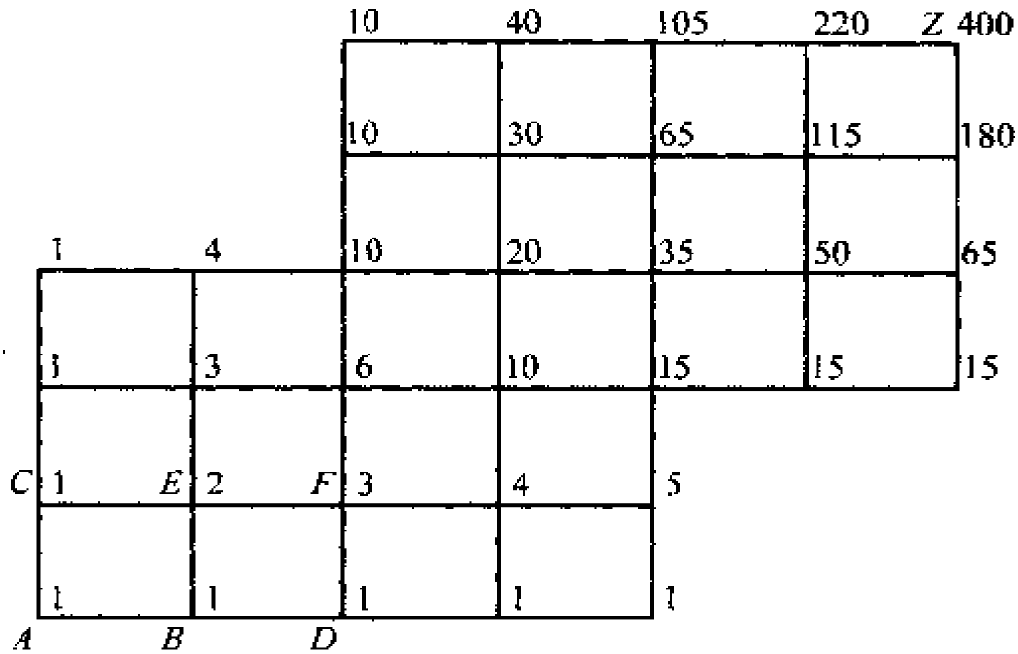
(3) 设没有一个角顶点放有小球，也没有一条棱的中点放有小球。这就是说，三个小球都在面的中心。总共有六个面，这些面之间的位置关系只有两种：相邻和相对。由引理2，三个小球中的任何两个都不能“面对面”；而当其中两个位于相邻的面的中心时，根据(2)(ⅱ)，第三个小球必定位于一条棱的中点。因此三个小球都在面的中心是不可能形成符合要求的系统的。

至此，我们找到了所有符合要求的放法，它们本质上就是上面图示的三种。

31. 上学之路

我们先考虑这样一个问题：汉克从 A 点出发，到达某一个路口，比方说 F 点，一共有几条最短路线？

显然，在任何一个路口，只有向东和向北，走的才是最短路



线。因此,要沿最短路线到达某一个路口,不是经由该路口西面那条路,就是经由南面那条路。比方说,要到达 F 点,不是经由 EF,就是经由 DF。而要经由西面那条路,就必须先到达这条路的西端路口;要经由南面那条路,就必须先到达这条路的南端路口。在我们的例子中,就是要先到达 E 点,或者 D 点。假定从 A 点到达 E 点的最短路线有 f_E 条,从 A 点到达 D 点的最短路线有 f_D 条,那么由上面的分析,可知到达 F 点的最短路线 f_F 就正好有 $f_E + f_D$ 条。

显然,这个结论对每个路口都成立,特别地,对 Z 点也成立,而 f_Z 正是我们要求的。求法是:在图中,从 A 点开始,从左下到右上,用上述关系逐步算出到达各个路口的最短路线数,并把这个数标在相应路口旁边。

首先是 A 点,从 A 点到 A 点可认为只有一条路线,也可认为考虑这没意义。那么就考虑与 A 点相邻的 C 点和 B 点,显然,从 A 点到达 C 点的最短路是 1 条,到达 B 点的也是 1 条,即 $f_C = f_B$

$= 1$，于是把 1 分别标在 C 点和 B 点旁边。

再考虑 E 点。根据上面得到的关系，我们有 $f_E = f_C + f_B = 1 + 1 = 2$。于是把 2 标在 E 点的旁边。

接下来，有 $f_F = f_E + f_D = 2 + 1 = 3$，等等。最后可得到 $f_Z = 400$，也就是说，从 A 点到 Z 点的最短路线有 400 条。

容易明白，一条从 A 点到 Z 点的最短路线，同时也是一条从 Z 点到 A 点的最短路线。汉克每天上学时从 A 点到 Z 点走了这 400 条路线中的某一条，放学时虽然是从 Z 点走到 A 点，但走的也是这 400 条路线中的一条，不过是另一条。因此他每天走了这 400 条路线中的 2 条。一学期 100 天，他一共走了这 400 条中的 200 条。

因此，**汉克并没有把所有的最短路线都走遍。**

32. 河东狮吼

假如温斯顿一直在车站等候，那么由于司机比以往晚了半小时出发，因此也将晚半小时到达车站。也就是说，温斯顿将在车站空等半小时，等他的轿车到达后坐车回家，从而他将比以往晚半小时到家。而现在温斯顿只比平常晚 22 分钟到家，这缩短下来的 8 分钟，是如果总裁在火车站死等的话，司机本来要花在从现在遇到温斯顿总裁的地点到火车站再回到这个地点上的时间。这意味着，如果司机开车从现在遇到总裁的地点赶到火车站，单程所花的时间将为 4 分钟。因此，如果温斯顿等在火车站，再过 4 分钟，他的轿车也到了。也就是说，他如果等在火车站，那么他也已经等了 $30 - 4 = 26$ 分钟了。但是惧内的温斯顿总裁毕竟没有等，他心急火燎地匆匆赶路，把这 26 分钟全都花在步行上了。

因此，**温斯顿步行了 26 分钟。**

33. 四对夫妻

设埃克的妻子喝了 x 杯饮料，弗兰克的妻子喝了 y 杯饮料，盖尔的妻子喝了 z 杯饮料，而哈里的妻子喝了 w 杯饮料。不管怎样，总有

$$x + y + z + w = 2 + 3 + 4 + 5 = 14,$$

$$x + 2y + 3z + 4w = 44 - 14 = 30。$$

下式减上式，得

$$y + 2z + 3w = 16。$$

据题设，这个不定方程的解的值无非是 2,3,4,5。因此我们可以对其中一个未知数，比方说 w，用 2,3,4,5 代入，看看是否能够让其他的未知数也取到允许范围内的值，并且使上面的方程成立。

若 $w = 5$，则 $y + 2z = 1$，但 y 和 z 至少是 2，矛盾。

若 $w = 4$，则 $y + 2z = 4$，同样矛盾。

若 $w = 3$，则 $y + 2z = 7$，只能是 $z = 2, y = 3$。但已有 $w = 3$，据题设，这是不允许的。

因此，只能是 $w = 2$，这时 $y + 2z = 10$。注意 y 只能是偶数，而现在在 y 的取值范围内只剩下 4 是偶数，故 $y = 4$，从而 $z = 3$，而 $x = 5$。

于是有：

埃克的妻子喝了 5 杯，而据题设，喝 5 杯的是黛安；

弗兰克的妻子喝了 4 杯，而喝 4 杯的是西莉亚；

盖尔的妻子喝了 3 杯，而喝 3 杯的是贝蒂；

哈里的妻子喝了 2 杯，而喝 2 杯的是安妮。

因此，**埃克和黛安，弗兰克和西莉亚，盖尔和贝蒂，哈里和安妮，就是这四对夫妻**。

34. 吸了蓝墨水的海绵

将100克清水分为17克、17克、17克、17克、16克、16克共六份，一份一份地对海绵进行清洗。

第一次清洗，加清水17克，与海绵中的10克蓝墨水充分混合，形成27克的蓝墨水溶液，其中蓝墨水含量为10克，因此蓝墨水浓度为10/27。经挤压，这27克溶液中尚有10克留存在海绵中，其余17克被倒掉。

第二次清洗，加清水17克，与海绵中的10克蓝墨水溶液充分混合，形成27克浓度较淡的蓝墨水溶液。这溶液中的蓝墨水含量就是这次清洗前海绵中的蓝墨水含量，为10克 × 10/27，故现在溶液中的蓝墨水浓度减小为$\frac{10\times 10/27}{27}=(10/27)^2$。经挤压，仍有10克这种浓度的溶液留存在海绵中。

第三次清洗，加清水17克，采用同样的分析，易知现在蓝墨水浓度变为$(10/27)^3$。

第四次清洗，蓝墨水浓度继续减小，变成$(10/27)^4$。

第五次清洗，加水量是16克，浓度变成$(10/27)^4(10/26)$。

第六次清洗，加水量也是16克，浓度成为$(10/27)^4(10/26)^2\approx 0.278\% < 0.3\%$，达到了题目的要求。

这里，没有把100克清水分成六等份，主要是想凑成整克数，这样看起来可以自然一些，其实把100克清水分成六等份，经六次清洗后，蓝墨水浓度将变为$\left(\frac{10}{10+\frac{100}{6}}\right)^6$，其近似值也是0.278%，但再精确几位小数，将发现它比$(10/27)^4(10/26)^2$稍稍小一点。可以证明，把100克清水分成若干份进行清洗，在分成同样份数的条件下，总是分成等量比分成不等量更有效。

那么,为什么分成的份数与清洗效果是怎样的关系呢?让我们算一下分成五等份的效果。这种情况下,清洗后蓝墨水浓度为:$\left(\dfrac{10}{10+\dfrac{100}{5}}\right)^5=\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\dfrac{1}{243}\approx 0.412\%$。效果稍差。

分成七等份呢?结果是$\left(\dfrac{10}{10+\dfrac{100}{7}}\right)^7=\left(\dfrac{7}{17}\right)^7\approx 0.201\%$。效果略好。

一般地,分成 n 等份,结果是$\left(\dfrac{10}{10+\dfrac{100}{n}}\right)^n=\left(\dfrac{n}{10+n}\right)^n$。

可以证明,n 越大,$\left(\dfrac{n}{10+n}\right)^n$ 就越小。但把这个结论用到我们这个清洗海绵的问题上是没有意义的,因为分的份数越多,每份的水量就越小,我们知道,水量小到一定程度,就根本无法进行清洗了。况且,$\left(\dfrac{n}{10+n}\right)^n$ 也不是可以无限止地小下去的,可以证明,它不能小于 e^{-10}。确切地说,当 n 趋向无穷大时,$\left(\dfrac{n}{10+n}\right)^n$ 的极限是 e^{-10},其中 e 是一个像 π 那样在数学中很重要很常见的常数。它也是无理数,而且是所谓"超越数",也就是说它不是整系数代数方程的根。e 的近似值是 2.718。一般地,如果要清洗的杂质(如蓝墨水)是 a 克,用来清洗的水是 b 克,则相应的浓度极限是 $e^{-\frac{b}{a}}$。

35. 错按了乘法键

我们以美分为单位,设这四件小饰物的单价分别为 x,y,z,w,显然它们都是正整数。已知有一件单价为 1 美元,因此不妨设

$w=100$(美分)。据题设,这四件小饰物总共6.75美元,这相当于

$$x+y+z+w=x+y+z+100=675,$$

即

$$x+y+z=575。\tag{1}$$

店主以美元为单位,把四件小饰物的单价乘起来,居然也得出6.75美元。这相当于

$$\frac{x}{100}\cdot\frac{y}{100}\cdot\frac{z}{100}\cdot 1=6.75,$$

即

$$xyz=6750000。\tag{2}$$

现在考察 x,y,z 的个位数。我们证明它们中至少有一个其个位数为5。

由(2)和 $6750000=2^4\cdot3^3\cdot5^6$,知 x,y,z 中至少有一个能被5整除,显然这个数的个位数不是5就是0。如果是5,则上述结论已证。

现在假设这个数的个位数是0,则由(1),另两个数中至少有一个其个位数不是0。如果是5,则上述结论已证。

现在假设这第二个数的个位数不是5,由于也不是0,因此一方面我们知道这个数不能被5整除,另一方面由(1),可知剩下的第三个数其个位数既不是5也不是0,也就是说,这第三个数也不能被5整除。但由(2)和 $6750000=2^4\cdot3^3\cdot5^6$,如果 x,y,z 中仅有一个能被5整除,则这个数就要被 $5^6=15625$ 整除,于是它就不会小于15625,而由(1),x,y,z 至多是三位数,这就导致了矛盾。结论证毕。

注意在上述证明的过程中,我们还得到了一个结论:x,y,z 中至少有两个数能被5整除。

现在可以不妨设 x 的个位数为 5，则由(2)易知 y 和 z 中至少有一个为偶数，不妨设 y 为偶数。再由(1)，可知 z 也是偶数。由于除 x 外，至少还有一个数能被 5 整除，因此 y 和 z 中至少有一个既是偶数又能被 5 整除，也就是说，这个数的个位数为 0。不妨设这个数为 y。而由(1)，可知 z 的个位数也为 0。

现在我们知道了这三个数的个位数，它们依次为：5，0，0。于是，这三个数都能被 5 整除。我们设 $x' = x/5$，$y' = y/5$，$z' = z/5$，则 x'，y'，z' 仍是正整数，而且从方程(1)、(2)，我们得到：

$$x' + y' + z' = 115, \tag{1'}$$

$$x'y'z' = 54000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3。 \tag{2'}$$

用几乎与上面同样的论证，可以证明 x'，y'，z' 的个位数依次为：5，0，0。下面仅叙述证明大意及与上面稍有不同的地方。

第一步，证明 x'，y'，z' 中至少有一个其个位数是 5。还是从有一个数能被 5 整除着手，过程可用下图示意：

- 此数个位数为 5，则已证。
- 此数个位数为 0，则由(1')，必有第二个数个位数不为 0。
  - 第二个数个位数为 5，则已证。
  - 第二个数个位数不为 5，则第三个数个位数也不为 0 或 5，于是只有第一个数能被 5 整除。由(2')，这个数就要被 $5^3 = 125$ 整除，但这与(1')矛盾。

第二步，证明 x' 的个位数必为 5。上面已证 x'，y'，z' 中至少有一个其个位数为 5，则由(1')、(2')，另两个数为偶数。同样，由于 x'，y'，z' 中不可能只有一个数被 5 整除，因此另两个数中至少有一个是能被 5 整除的偶数，即其个位数为 0，由(1')，最后一个数的个位数也为 0。现在，如果 x' 的个位数不为 5，则必为 0，从而 $x = 5x'$ 的个位数也为 0，与以上的结论矛盾。

因此，x' 的个位数为 5，从而 y' 和 z' 的个位数均为 0。

接下来再设 $x''=x'/5$，$y''=y'/5$，$z''=z'/5$，则 x''，y''，z'' 仍是正整数，且有

$$x''+y''+z''=23, \qquad (1'')$$

$$x''y''z''=432=2^4\cdot 3^3。 \qquad (2'')$$

注意 x' 的个位数为 5，即 x' 为奇数，故 x'' 也必为奇数。由 $(2'')$，知 x'' 只可能为 3，9 或 27。

首先，由 $(1'')$，x'' 不可能为 27。其次，若 $x''=3$，则有

$$\begin{cases} y''+z''=20, \\ y''z''=144。\end{cases}$$

这个方程组不但没有整数解，甚至在实数范围内也无解。

因此必有 $x''=9$，此时有

$$\begin{cases} y''+z''=14, \\ y''z''=48。\end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} y''=6 \\ z''=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y''=8 \\ z''=6 \end{cases}$。这两解本质上是一回事，我们取前者即可。由此，得 $x=225$，$y=150$，$z=200$。

因此，**亨利为他女友南茜买的那四件小饰物，单价分别是 2.25 美元、1.50 美元、2 美元和 1 美元。**

顺便说一下，在这道题目中，如果没有说其中有一件价格为 1 美元，那么还可有一解：1.20 美元、1.25 美元、1.80 美元和 2.50 美元。如果做加法和做乘法都得到 7.11 美元，那解答为：1.20 美元、1.25 美元、1.50 美元和 3.16 美元。有兴趣的读者可以试着把它们推导出来。

36. 大牌教练

设伯德、巴克和布尔共进行了 M 项比赛，那么由于每项比

赛的参加者仅他们三人,他们的得分之和就是第一名、第二名和第三名的得分之和,而且不管什么比赛这前三名的得分之和都是 $P_1 + P_2 + P_3$,因此 M 项比赛他们一共得分 $M(P_1 + P_2 + P_3)$。另一方面,据题目条件,伯德总分为22分,巴克和布尔均为9分,知他们三人一共得 $22 + 9 + 9 = 40$ 分。由此,我们有方程:

$$M(P_1 + P_2 + P_3) = 22 + 9 + 9 = 40。 \quad (1)$$

又因为 $P_1 > P_2 > P_3 \geqslant 1$,而它们都是正整数,所以有 $P_2 \geqslant 2$, $P_1 \geqslant 3$,从而有

$$P_1 + P_2 + P_3 \geqslant 3 + 2 + 1 = 6。 \quad (2)$$

由(1)、(2),知 $6M \leqslant 40$,从而有

$$M \leqslant 6。 \quad (3)$$

另外,由题设知至少比赛了100米跑和跳高这两个项目,所以有

$$M \geqslant 2。 \quad (4)$$

又由(1),M 为40的因数,故由(3)、(4),M 只能为2,4或5。

如果 $M = 2$,即只有两个比赛项目,那么由于巴克在100米跑中得了第一名,即他在这个项目中拿了 P_1,故即使他在另一个项目跳高中居末位拿 P_3,他的总分也可为 $P_1 + P_3$。现已知他的总分为9分,故有 $P_1 + P_3 \leqslant 9$。由此可知,$P_1 \leqslant 8$,第一名得分最多8分,即使伯德在这仅有的两项比赛中都得第一名,总分也不过16分,而现在已知他得了22分,这就产生了矛盾。

如果 $M = 4$,即有四个比赛项目,那么巴克的总分至少可为 $P_1 + 3P_3$,从而有 $P_1 + 3P_3 \geqslant 9$。又由于 $P_3 \geqslant 1$,故 $P_1 \leqslant 6$。如果 $P_1 \leqslant 5$,那么四项比赛至多得20分,而伯德居然得了22分,这显然是矛盾的。而如果 $P_1 = 6$,则由 $4(P_1 + P_2 + P_3) = 40$,得 $P_2 + P_3 = 4$,只能是 $P_2 = 3$, $P_3 = 1$。又因为伯德不是100米跑第一

名，故伯德最多得3个第一名，他的总分至多是$3P_1+P_2=21<22$，还是矛盾。

故必有 $M=5$，**即这三名学生一共进行了五项比赛。**

这时，由(1)，我们有 $P_1+P_2+P_3=8$。

若 $P_3\geqslant 2$，则有 $P_1+P_2+P_3\geqslant 4+3+2=9>8$，矛盾。故 $P_3=1$。

若 $P_1\leqslant 4$，则五项比赛个人总分最多为 20 分，不到伯德的 22 分，也不可能，因此 $P_1\geqslant 5$。而如果 $P_1\geqslant 6$，那么 $P_2+P_3\leqslant 2$，这又是不可能的，故只有 $P_1=5$，从而 $P_2=2$。

现在设伯德得了 x 个第一名，y 个第二名，z 个第三名，而他的总分是 22 分，于是有

$$x+y+z=5, \tag{5}$$

$$xP_1+yP_2+zP_3=5x+2y+z=22。 \tag{6}$$

下式减去上式，得

$$4x+y=17。 \tag{7}$$

由(5)，$x+y\leqslant 5$。结合(7)，得 $3x\geqslant 12$，即 $x\geqslant 4$。但由(7)，又有 $4x=17-y\leqslant 17$，即 $x\leqslant 4$。故必有 $x=4$，从而 $y=1$，$z=0$。

伯德得了四个第一名、一个第二名，即五项比赛中他只有一项没得第一名，而得了第二名。由题设，这项比赛显然就是巴克得第一名的 100 米跑。在跳高比赛中，伯德得第一名，第二名是谁呢?看一下巴克的情况。

巴克的总分是 9 分，其中 5 分是他 100 米跑第一名的得分，剩下 4 分，是他参加其余四个项目的得分总和。由于不可能有 0 分，因此很显然，巴克在其余四个项目中各得 1 分，即都只得了第三名。

因此，**布尔得跳高第二名。**

有兴趣的读者可把他们三人在五项比赛中的名次和得分情况补齐，虽然其中三项比赛的名称我们无法得知。

37. 运筹帷幄

无论怎么说，总是要让 30 名士兵乘车出发，为了争取时间，另 30 名士兵也不能在 A 地等着，必须同时步行前进。如果运兵车把车上的 30 名士兵送到 B 地后马上掉头回来接那 30 名步行的士兵，那么把这 60 名士兵全部送到 B 地要多少时间呢？让我们来算一下。

运兵车把第一批 30 名士兵从 A 地送到 B 地需要 $33 \div 22.5 = 1\frac{7}{15}$ 小时。这时，另 30 名士兵已步行到离 A 地 $9 \times 1\frac{7}{15} = 13\frac{1}{5}$ 千米的地方。运兵车马上掉头去接这批士兵，这是一个典型的相遇问题，把两者距离除以两者速度之和即得相遇时间，也就是说，运兵车开到与这批士兵碰头的地点需要花 $\left(33 - 13\frac{1}{5}\right) \div (22.5 + 9) = \frac{22}{35}$ 小时。显然，再把这批士兵运到 B 地同样要花 $\frac{22}{35}$ 小时。这样，一共就花了 $1\frac{7}{15} + \frac{22}{35} \times 2 = 2\frac{76}{105}$ 小时。但命令中要求在 2 小时 20 分即 $2\frac{1}{3}$ 小时内赶到，显然 $2\frac{76}{105} > 2\frac{1}{3}$，不能达到命令的要求。怎么办呢？

考察上述运兵过程，发觉第一批士兵的步行能力没有发挥。他们坐着运兵车径直到达 B 地，然后在那儿等着，好像太舒服了点。直觉上感到，在这批士兵身上应有潜力可挖。

事实上，这里的两批士兵，不管一路上他们乘车步行的情况如何，只要在到达 B 地时有先后，就有潜力可挖。这也就是说，任何一种行军方案，只要这两批士兵到达 B 地有先后，就不会

是时间最短的方案。下面我们对这一点给出一个定性的论证。

假设这两批士兵到达 B 地有先后，为方便起见，称先到的那批为“第一批士兵”，称后到的那批为“第二批士兵”，虽然在途中可能有时候第二批士兵赶在第一批的前面。根据到达时士兵是乘车还是步行，逻辑上可分为四种情况：(1) 第一批士兵乘车，第二批士兵步行（均为到达时的状况，下同）；(2) 第一批士兵步行，第二批士兵乘车；(3) 第一批士兵乘车，第二批士兵也乘车；(4) 第一批士兵步行，第二批士兵也步行。

首先，情况(4) 是不可能的。如果是这样的话，那么在路程的最后一段，运兵车到哪儿去了？

其次，情况(1) 可归结为情况(3)。第一批士兵乘车先到达 B 地后，难道让运兵车熄火，等着第二批士兵步行赶来吗？当然是立马掉头，去接第二批士兵，让第二批士兵也乘车到达。

于是我们只要考察情况(2) 和(3)。

在情况(2) 中，第一批士兵到达 B 地时步行，第二批士兵到达 B 地时乘车，第一批比第二批先到，显然第一批士兵途中一定乘过车。当他们最后一次下车步行的时候，第二批士兵肯定是落在他们后面（如果是在他们前面则第二批士兵要先于他们到达 B 地了），于是运兵车立刻掉头往回开，在途中某处迎头遇上正在步行的这第二批士兵，载上他们回头向 B 地进发。当然，整个运兵任务的完成时刻，以第二批士兵的到达时刻为准。

在上述过程中，第一批士兵步行到达 B 地后，在那儿干等，有点浪费。如果把第一批士兵最后一次下车步行的地点往前（即朝着 A 地的方向）挪一点（让他们多走一点路），从而下车的时刻也早一点，那么这时运兵车与第二批士兵的距离就会近一点（当运兵车载着第一批士兵前行而第二批士兵在其后步行的时候，这两者的距离随着时间的推移而增加。现在下车时刻早一

点，两者的距离也就近一点），于是两者碰头的时刻将早一点（从运兵车掉头往回开到两者碰头的时间，是两者的初始距离除以两者速度之和，现在两者距离近一点，到碰头所花的时间也就少一点），从而两者的碰头地点也往前一点，因此第二批士兵上车的时刻将早一点，上车的地点也往前一点。这意味着，有一段本是步行的路程，现在改为乘车了，这样当然就会早一点到达 B 地。由于任务完成以第二批士兵到达为准，因此完成任务的时间可以短一点。这表明，以情况(2) 为终结的行军方案不会是时间最短的方案。

在上面的分析中，我们缩短了第二批士兵的某段步行路程，但延长了第一批士兵的最后一段步行路程，因此在缩短了第二批士兵的行军时间的同时，却延长了第一批士兵的行军时间。如果这样的操作做得太过分，使得第二批士兵先于第一批士兵到达（因此两者的名称要互换一下），这就成了情况(1)，从而归结为下面要分析的情况(3) 了。

在情况(3) 中，第一批士兵乘车到达，第二批士兵随后也乘车到达。由于只有一辆运兵车，因此当第一批士兵乘车到达的时候，第二批士兵肯定正在途中步行。就像情况(2) 中第一批士兵最后一次下车步行时那样，现在只要让我们的第一批士兵早一点下车，也就是说，在不到 B 地的某处就让他们下车，要他们步行完成最后一小段路程，而运兵车立即回头去接第二批士兵，就可使第二批士兵早一点到达，从而缩短整个行军时间。因此，以情况(3) 为终结的行军方案也不会是时间最短的方案。

综上所述，时间最短的行军方案，一定是使两批士兵同时到达 B 地的方案。现在我们就来求索这个方案。为表示所得结论的一般性，我们不用具体的数字，而是令 A，B 两地的距离为 a 千米，运兵车的速度是 v 千米 / 小时，士兵的步行速度是 u 千米 /

小时。

设一批士兵在整个行军过程中步行了 x_1 千米，乘车行进了 y_1 千米；另一批士兵则步行了 x_2 千米，乘车行进了 y_2 千米。由于他们应同时到达，故有

$$\frac{x_1}{u}+\frac{y_1}{v}=\frac{x_2}{u}+\frac{y_2}{v}。 \tag{1}$$

此外，显然有

$$x_1+y_1=x_2+y_2=a。 \tag{2}$$

由(1)、(2)，得 $x_1=x_2, y_1=y_2$。这就是说，两批士兵的步行路程相等，乘车路程当然也就相等。下面我们用 x 来代表 x_1 和 x_2，用 y 来代表 y_1 和 y_2。

从运兵车的角度看，它走了 $2y$ 的前行路程，但是它还走了一些回头路。由于它最终还是到达了 B 地，因此它走多少回头路，就要多走多少前行路。换句话说，运兵车所走回头路的总长度，等于它重复多走的路程。显然运兵车重复多走了 $2y-a$ 千米，于是这就是它所走的回头路的总长度。运兵车所走的总路程就是它的前行路程和回头路程之和，即 $2y+(2y-a)=4y-a$ 千米。由于运兵车运行的时间就是整个行军过程所花的时间，也就是一批士兵从 A 地到 B 地所花的时间，所以有

$$\frac{4y-a}{v}=\frac{x}{u}+\frac{y}{v}。 \tag{3}$$

由(2)，我们还有

$$x+y=a。 \tag{4}$$

解方程(3)、(4)，得

$$x=\frac{2ua}{v+3u}, y=\frac{(v+u)a}{v+3u}。 \tag{5}$$

于是，行军所花的时间为

$$\frac{3v+u}{v(v+3u)}\cdot a(\text{小时})。 \tag{6}$$

用 $a=33$(千米),$v=22.5$(千米/小时),$u=9$(千米/小时)代入(5)式,得 $x=12$(千米),$y=21$(千米)。

根据这两个数据,可设计行军方案:先让一批共 30 名士兵乘上运兵车出发,其余一批 30 名士兵同时步行出发,当车开到离 A 地 21 千米处时(用去 56 分钟),前一批 30 名士兵下车步行去 B 地;空车回头开到离 A 地 12 千米处(又用去 24 分钟),遇到步行的后一批 30 名战士,于是让他们立即上车,直接开到 B 地(也是用去 56 分钟)。结果两批士兵同时到达 B 地,总共用去 136 分钟,即 2 小时 16 分,不到 2 小时 20 分,达到了命令的要求。

用已知数据代入(6)式计算,得到 $2\frac{4}{15}$,亦即 2 小时 16 分钟,与上述方案的结果吻合。

题目是完成了,而且得到了较一般的结果,但是还有可思考的问题。

前面论证的是,两批士兵若不能同时到达,就不是最好的行军方案。从逻辑上说,这相当于在最好的行军方案中,两批士兵一定是同时到达。但这并不等于说两批士兵同时到达就一定是最好的方案。我们以两批士兵同时到达为条件找到了满足此条件的一个方案,完成了题目的要求,但这个方案是不是最好的方案呢?换句话说,是不是还有一个方案,也是让两批士兵同时到达的,但所花的时间更少?

回答是没有了。因为从上面的论证中我们看到,只要是同时到达,就一定是两批士兵步行路程相等,乘车路程也相等,从而一定有(3)、(4)两式,而(5)是(3)、(4)的唯一解,(6)则是(5)的必然结果。因此,最短时间就是(6),不可能再短了。

还有一个问题,如果不是两批士兵,而是三批、四批,甚至一

般的 n 批，情况又如何？其实，上面关于两批的结论很容易推广到 n 批，关键在于各批同时到达。这里仅给出有 n 批士兵情况下的最短时间：

$$\frac{(2n-1)v+u}{v[v+(2n-1)u]}\cdot a(\text{小时})。$$

这里给出的士兵数目是运兵车载人数目的整数倍，如果不是整数倍怎么办？看来没有其他的办法，只能把多下的余数充作一车计算。时间是不能缩短的，但车上有时就有了空额，可以让一些人（比方说指挥官）少走一些路。比方说，在我们的题目中，不是60名士兵，而是58名士兵和一名军官（没有官怎么行？），那么这名军官就可以一直坐在车上不下来。行军方案基本不变，只是军官与29名士兵坐车行驶21千米后，士兵下车步行，军官随车返回，接上同时步行前进的另29名士兵，然后回头向 B 地扬长而去。时间嘛，当然还是2小时16分。

这里只有一辆运兵车，如果有2辆，但人数是90人，即三批，该怎么办？一般地，如果有 m 辆车，n 批人，一辆车只能装一批人，且 $n>m$，时间最短的方案是怎样的呢？我们已经介绍了基本的研究方法，该你自己试试了！

这类问题在性质上属于管理科学，而在方法上则属于运筹学——这是一门独立而庞大的应用数学学科。运筹学产生于20世纪中叶，英文名称为 Operation Research，我国学者据成语“运筹帷幄”，译为“运筹学”。

38. 七十大寿

设鸡、鸽子和鹌鹑的单价依次为 x,y,z 元，据题意，家里人所买的鸡、鸽子和鹌鹑的只数依次也是 x,y,z。因此可列出方程组：

$$\begin{cases} x + y + z = 23(\text{只}), \\ x^2 + y^2 + z^2 = 211(\text{元})。 \end{cases}$$

另知 $x > y > z$，且 x, y, z 必须都是正整数。由 x^2 是小于 211 的正整数，即知 $x \leqslant 14$。。又 $y \leqslant x - 1, z \leqslant y - 1 \leqslant x - 2$，故有 $23 - x = y + z \leqslant 2x - 3$，即 $x \geqslant 9$。

若 $x = 14$，则 $y + z = 9, y^2 + z^2 = 15$。

若 $x = 13$，则 $y + z = 10, y^2 + z^2 = 42$。

若 $x = 12$，则 $y + z = 11, y^2 + z^2 = 67$。

若 $x = 11$，则 $y + z = 12, y^2 + z^2 = 90$。

若 $x = 10$，则 $y + z = 13, y^2 + z^2 = 111$。

若 $x = 9$，则 $y + z = 14, y^2 + z^2 = 130$。

由于两个正整数的平方和不可能是4的倍数减1(请读者证明)，而15,67,111正是4的倍数减1，故 x 为14,12,10的情况即可排除。

注意 $2(y^2 + z^2) - (y + z)^2 = (y - z)^2$ 是个完全平方数，我们用此式来检验余下的三种情况。

由于 $2 \times 42 - 10^2 = -16$，甚至连正数都不是，故 $x = 13$ 的情况可排除。

由于 $2 \times 90 - 12^2 = 36$，是完全平方数，故 $x = 11$ 的情况可能成立。事实上，当 $x = 11$ 时，有 $y = 9, z = 3$，或 $y = 3, z = 9$，但后者不符合 $y > z$ 的条件，舍去。

由于 $2 \times 130 - 14^2 = 64$，是完全平方数，故 $x = 9$ 的情况可能成立。然而，当 $x = 9$ 时，$y = 11, z = 3$，或 $y = 3, z = 11$，这两组解均不合 $x > y > z$ 的条件，均舍去。

因此，只有 $x = 11, y = 9, z = 3$ 这组解符合要求。

因此，库尔班大叔的家里人共买鸡11只(每只11元)，买鸽子9只(每只9元)，买鹌鹑3只(每只3元)。

在上面的解法中，当然也可以依次取 $x=14,x=13,\cdots,x=9$，逐一求解相应的关于 y,z 的方程组，看看是否有符合条件的正整数解。其实，我们在这里已经不得不使用了穷举法。在这种情况下，按数学上的价值标准，一是要设法缩小穷举的范围（我们用了平方和的性质），二是要设法减小对每种情况进行检验时的计算量（我们用了一个代数关系式）。总的来说，就是要减小计算量。当今计算机时代，我们已有了超高速的计算机，似在计算量上不必斤斤计较。其实不然，对计算量的研究是理论计算机科学的一项重要任务，相应的领域叫做“计算复杂性理论”。

39. 免费早餐

有牛奶、面包、蛋糕这三种食品供选择，一共有多少种选择方式?

首先，只选一种食品的方式有 3 种：只选牛奶，只选面包，只选蛋糕。其次，选其中两种食品的方式也有 3 种：选牛奶和面包，选牛奶和蛋糕，选面包和蛋糕。以上 6 种，加上最后一种，即三种食品全选的方式，一共有 7 种选择方式。

现在不妨设只选择牛奶的有 x_1 人，只选择面包的有 x_2 人，只选择蛋糕的有 x_3 人，选牛奶和面包的有 x_{12} 人，选牛奶和蛋糕的有 x_{13} 人，选面包和蛋糕的有 x_{23} 人，三种食品全选的有 x_{123} 人，则据题意，有

$$x_1+x_2+x_3+x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{123}=42, \tag{1}$$

$$x_1+x_{12}+x_{13}+x_{123}=27, \tag{2}$$

$$x_2+x_{12}+x_{23}+x_{123}=27, \tag{3}$$

$$x_3+x_{13}+x_{23}+x_{123}=27。 \tag{4}$$

这7个未知数各不相同，最小的一个为3。由此可知，第二小

的那个未知数至少为 4，第三小的未知数至少为 5……。总之，7 个未知数从小到大，依次至少为 3,4,5,6,7,8,9，因此它的和至少为 $3+4+5+6+7+8+9=42$。但(1)告诉我们，它们的和只能是 42，这意味着，各个未知数只能取其最小的值，也就是说，这些未知数的值就是 3,4,5,6,7,8,9 这 7 个，一个未知数取一个值，不同的未知数取不同的值。现在只是不知道哪个未知数取哪个值。

(2)+(3)+(4)-(1)，得

$$x_{12}+x_{13}+x_{23}+2x_{123}=39。 \tag{5}$$

(5)中有 4 个未知数，其中最大的至多为 9，第二大的至多为 8，第三大的至多为 7，第四大的至多为 6，因此(5)的左端至多为 $6+7+8+2\times9=39$。但(5)的右端表明这个计算值只能为 39，所以这 4 个未知数只能各取其最大的值，虽然 x_{12}，x_{13}，x_{23} 与 6，7，8 怎样对应还不能确定，但 $x_{123}=9$ 却是没有疑义的。

因此，**三种品种都选的有 9 人**。

40. 追　捕

设这位警长跑了 x 步才把犯罪嫌疑人抓到，而在这一时段内，犯罪嫌疑人跑了 y 步，则据题意，从跑的步数来看，有

$$\frac{y}{x}=\frac{8}{5}。 \tag{1}$$

另一方面，对于同一段距离，犯罪嫌疑人一共跑了 $27+y$ 步，警长一共跑了 x 步，而据题意，犯罪嫌疑人跑 5 步的距离与警长跑 2 步的距离相同，因此有

$$\frac{y+27}{x}=\frac{5}{2}。 \tag{2}$$

解(1)、(2)，得 $x=30$，$y=48$。

因此，警长跑了30步才把犯罪嫌疑人抓到。

41. 握　手

由(2)，夫妻之间不握手，由(3)，任意两人之间至多握一次手，故每人最多握手8次。

由(1)，除康拉德之外的九人，握手次数都不一样，而由上述结论，握手次数最多的人只不过握了8次，因此，这九人的握手次数只能分别为8,7,6,5,4,3,2,1,0。

由(2)，五位夫人之间没有握手，又没有同自己丈夫握手，因此她们中握手次数最多的人只不过握了4次，即她们的握手次数只能分别为4,3,2,1,0。

握了8次手的人是男士，他同除自己妻子之外的任何人都握了一次手，也就是说，除他妻子之外的任何人握手次数都不会是0，因此握手次数为0的人只能是他妻子，即握手8次的人与握手0次的人是夫妻。

握了7次手的人是男士，他同除自己妻子和握手0次的人之外的任何人都握了一次手，而这些人都同握手8次的人握过手，也就是说，除握手7次的人的妻子和握手0次的人外，其他人都至少握手2次，而已知握手0次的人是握手8次的人的妻子，因此握手1次的人只能是握手7次的人的妻子。显然，这位夫人只同那位握手8次的男士握过手。

握了6次手的人是男士，他同除自己妻子、握手0次的人和握手1次的人之外的任何人都握了一次手，而这些人同握手8次的人和握手7次的人都握过手，也就是说，除握手6次的人的妻子、握手0次的人和握手1次的人，其他人都至少握手3次，而已知握手0次的人和握手1次的人分别是握手8次的人和握手7次的人的妻子，因此握手2次的人只能是握手6次的人的

妻子。这位夫人只同握手 8 次的和握手 7 次的两位男士握过手。

同理可得，握手 5 次的人与握手 3 次的人是夫妻。

现在，五位夫人中，除了握手 4 次的那位外，其他四位夫人的丈夫，握手次数都不是 4 次，因此他们都不是康拉德。反过来，康拉德夫人就是握了 4 次手的那位。

因此，**康拉德夫人握了 4 次手**。

42. 公交车和自行车

设公交车是每隔 x 分钟发一辆，起点站和终点站一样；再设公交车的速度是 v 米/分，谢尔盖骑自行车的速度是 u 米/分。如果某一时刻在某个地点有一辆公交车从谢尔盖身后超过，那么过了 x 分钟，在这一地点又将经过一辆公交车，而这时我们的谢尔盖已向前骑行了 ux 米。显然，这辆公交车将在 $\frac{ux}{v-u}$ 分钟后追上并超越谢尔盖。在谢尔盖看来，他先是被一辆公交车超越，过了 $x+\frac{ux}{v-u}$ 分钟，又被一辆公交车超越，因此据题设，有

$$x+\frac{ux}{v-u}=12,$$

即

$$\frac{vx}{v-u}=12。\tag{1}$$

另一方面，如果某一时刻在某个地点有一辆公交车与谢尔盖迎面相遇，那么在谢尔盖前面的 vx 米处必有另一辆公交车正在向他驶来。显然，再过 $\frac{vx}{v+u}$ 分钟，这辆公交车将与谢尔盖相遇。同样据题设，我们有

$$\frac{vx}{v+u}=4。\tag{2}$$

$1\div(1)+1\div(2)$，得

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4},$$

故

$$x=\frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}},$$

即

$$x=6。$$

因此，**是 6 分钟发一辆公交车。**

顺便说一下，6 称为 12 和 4 的调和平均数。一般地，若有

$$a=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

则称 a 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的调和平均数。

43. NBA 总决赛

据(1)，双方上场队员各五人。

据(2)，得 22 分的三名队员，两名属一个队，另一名属另一个队。据(5)，有两名队员得 22 分的不可能是公牛队，否则，因公牛队中个人得分成一等差数列，其五名队员得分就都是 22 分了，这与(2)矛盾。因此，公牛队中只有一名队员得 22 分，而太阳队中则有两名队员得 22 分。

据(4)，得 30 分的队员肯定不是太阳队的，即这名队员是公牛队的。

现在知道公牛队中有一人得 30 分，一人得 22 分。因为 30

分是最高得分，而公牛队个人得分又成一等差数列，故可设 30 是这个数列的首项。

若 22 是这个数列的第二项，则公牛队五名队员的得分依次为 30，22，14，6，－2。得分出现负数，显然不合理，故 22 不是这个数列的第二项。

若 22 是这个数列的第四项，则公牛队五名队员的得分依次为 30，$27\frac{1}{3}$，$24\frac{2}{3}$，22，$19\frac{1}{3}$。得分出现分数，故 22 不是这个数列的第四项。

若 22 是这个数列的第五项，则公牛队五名队队员的得分依次为 30，28，26，24，22。于是据(3)，太阳队中除了两名得分为 22 分的队员外，另三名得分均不到 20 分。又据(2)，他们得分不相同，因此至多是 19，18，17。但这样一来，太阳队中个人得分最多的和最少的将至少相差 5 分，与(4)矛盾，故 22 不是这个数列的第五项。

综上所述，22 只能是这个数列的第三项，即公牛队的个人得分为 30，26，22，18，14。这样，据(3)，太阳队中除两人得 22 分外，只有一人得分在 20 分之下。又据(4)，这人的得分必定为 19。再据(2)，其余两人的得分只能为 20 和 21。于是算得公牛队得 110 分，太阳队得 104 分。

因此，**公牛队胜，比分是 110:104。**

44. 是是非非

由表可见，艾达和芭芭拉对第 2 题、第 4 题、第 5 题的答案是一样的。因此，对这三道题的每一道，她们两人的答案同对同错；而对另外四道题的每一道，她们两人的答案一对一错。

由于她们都是答对五道题，答错两道题，因此在那同对同错

的三道题中，如果至少有一道是她们两人都答错的，那么在那一对一错的四道题中，她们都至少要答对三道题，但这是不可能的，因为一人至少答对三道，另一人必定至少答错三道，即至多只能答对一道。因此对那同对同错的三道题，她们两人必定是都答对了。也就是说，这三道题的正确答案，就是艾达和芭芭拉的答案。

同理，第 1 题和第 6 题的正确答案，就是芭芭拉和卡罗琳的答案；而第 3 题和第 7 题的正确答案，就是艾达和卡罗琳的答案。具体如下表：

题　号	1	2	3	4	5	6	7
正确答案	○	×	○	×	×	○	○

45. 国　籍

由(1)、(3)，奥西不是德国人；由(2)、(3)，埃米不是德国人；由(3)，坎农不是德国人；由(4)，巴伯和芬克都不是德国人。因此，**只能是迪克，他是德国人。**

由(1)、(3)，坎农不是美国人；由(2)、(3)，坎农不是俄罗斯人；由(5)，坎农不是意大利人；由(6)，坎农不是法国人。因此，**坎农一定是英国人。**

由(1)，奥西不是美国人；由(1)、(2)，奥西不是俄罗斯人；由(5)，奥西不是法国人。因此，**奥西一定是意大利人。**

由(1)、(2)，埃米不是美国人；由(2)，埃米不是俄罗斯人。因此，**埃米一定是法国人。**

由(5)，巴伯不是美国人。因此，**巴伯一定是俄罗斯人，而芬克一定是美国人。**

46. 巧填数字

不妨用 A,B,C,D 分别表示填在空格 A,B,C,D 的正整数，则根据题目要求，我们有

$$19^2+A^2=13^2+C^2,$$
$$A^2+B^2=C^2+D^2,$$
$$B^2+47^2=D^2+49^2。$$

于是有

$$\begin{aligned}C^2-A^2&=19^2-13^2\\&=(19+13)(19-13)\\&=32\times6=2^6\times3,\\C^2-A^2&=B^2-D^2,\\B^2-D^2&=49^2-47^2\\&=(49+47)(49-47)\\&=96\times2=2^6\times3。\end{aligned}$$

显然，这里本质上只有这样 ·个方程：

$$X^2-Y^2=2^6\times3。$$

即

$$(X+Y)(X-Y)=2^6\times3。$$

令 $U=X+Y,V=X-Y$，则有

$$UV=2^6\times3。$$

据题设，X,Y 为小于 20 的正整数，所以 $U=X+Y<40$。另一方面，由于 $X+Y>X-Y$，所以 $U>V$，从面 $U^2>UV=2^6\times3$，由此得 $U\geqslant14$。

现列出 $2^6\times3$ 的所有因数：

$$1,2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,$$
$$3,2\times3,2^2\times3,2^3\times3,2^4\times3,2^5\times3,2^6\times3。$$

取出其中大于或等于14而小于40的因数，计有$2^4=16,2^3\times3=24,2^5=32$。因此$U=16,24$或$32$，相应地$V=12,8$或$6$。由$U=X+Y,V=X-Y$解得

$$\begin{cases}X=14,\\Y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}X=16,\\Y=8;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}X=19,\\Y=13。\end{cases}$$

即C和B为14,16或19，而A和D为2,8或13。其中19与13已在图中出现过，而A,B,C,D不能相同，因此**只有两组解：**

$$\mathbf{A=8,B=14,C=16,D=2;}$$

$$\text{或}\quad\mathbf{A=2,B=16,C=14,D=8。}$$

47.苛刻的任务

由(5)，若派迪戈里去，则克拉克就不能去；由(4)，布拉德也不能去；再由(1)，阿瑟就一定要去。但这样就与(2)发生了矛盾。因此迪戈里不能去。

现在派克拉克去，迪戈里不去，则由(6)，厄本也不去；由(3)，阿瑟和弗里曼必去；由(4)，布拉德也必去。

因此，只能派阿瑟、布拉德、克拉克和弗里曼这四人去。

48.谁养斑马

由(9)、(14)和(8)，左边第一幢房子住的是挪威人，左边第二幢房子是蓝色房子，左边第三幢房子(即当中那幢房子)的主人喝牛奶。

由(5)，白色房子在绿色房子的左邻，既然蓝色房子已占了左边第二的位置，那么白色房子和绿色房子的位置只有两种可能的情况：一是白色房子是左边第三幢，而绿色房子是左边第四幢；一是白色房子是左边第四幢，而绿色房子是左边第五幢(即右边第一幢)。

下面我们证明前一种情况其实是不可能的，用的是反证法。

假设这种情况成立，则左边第二幢是蓝色房子，左边第三幢是白色房子，左边第三幢是绿色房子，剩下的是黄色房子和红色房子。由(1)，英国人住的是红色房子，于是这幢房子不可能是左边第一幢，因为由(9)，这左边第一幢房子由挪威人住着。因此红色房子只能是左边第五幢，由英国人住着，黄色房子是左边第一幢，由挪威人住着。

现在乌克兰人只可能住中间那蓝、白、绿三幢房子中的一幢，但白色房子的主人喝牛奶，绿色房子的主人喝咖啡(由(3))，而乌克兰人喝茶(由(4))，因此乌克兰人只能住蓝色房子。

由(7)，住黄色房子的挪威人抽“三五”牌香烟；由(12)，抽“登喜路”牌香烟的人喝橘子水，因此挪威人不可能喝橘子水。而住蓝色房子的乌克兰人喝茶，住白色房子的人喝牛奶，住绿色房子的人喝咖啡，他们都不喝橘子水，因此，只能是住红色房子的英国人喝橘子水，这样，他抽的就是“登喜路”牌香烟。

现在考察日本人，显然，他只可能住白色房子或绿色房子。

若日本人住白色房子，则剩下的西班牙人只能住绿色房子。由(13)，住中间白色房子的日本人抽“摩尔”牌香烟，此外，黄色房子让抽“三五”牌香烟的挪威人占了，而红色房子让抽“登喜路”牌香烟的英国人占了，于是，抽“万宝路”牌香烟的人只能住蓝色房子或绿色房子。由(6)，这个抽“万宝路”牌香烟的人养的是蜗牛。然而，若他住绿色房子，那他就是西班牙人，由(2)，他应该养狗；若他住蓝色房子，那他就是乌克兰人，与抽“三五”牌香烟的挪威人是隔壁邻居，由(11)，他应该养猫。这些都与他养蜗牛发生了矛盾。

若日本人住绿色房子，则西班牙人只能住白色房子。同理，抽“万宝路”牌香烟的人只能住蓝色房子或白色房子，由(6)，他

养的是蜗牛。同样，若他住白色房子，那他就是西班牙人，由(2)，他应该养狗；若他住蓝色房子，那他就是乌克兰人，由(11)，他应该养猫。同样发生矛盾。

这些矛盾说明，前一种情况，即白色房子是左边第三幢而绿色房子是左边第四幢是不可能的。

因此只能是后一种情况，即白色房子在左边第四幢，绿色房子在左边第五幢。同样由(1)和(9)，左边第一幢是黄色房子，住的是挪威人；左边第三幢是红色房子，住的是英国人，他喝牛奶。由(3)，住绿色房子的喝咖啡，于是喝茶的乌克兰人(由(4))只可能住蓝色房子或白色房子。下面用反证法证明乌克兰人只可能住蓝色房子。

假设喝茶的乌克兰人住了白色房子，那么由于喝牛奶的英国人已住了红色房子，喝咖啡的人已住了绿色房子，因此喝橘子水的人只能住黄色房子或蓝色房子。由(12)，喝橘子水的人抽“登喜路”牌香烟，而由(7)，住黄色房子的挪威人抽“三五”牌香烟，因此喝橘子水抽“登喜路”牌香烟的人只能住蓝色房子。由(13)，日本人抽“摩尔”牌香烟，因此日本人不可能住蓝色房子，而黄色房子有挪威人，红色房子有英国人，白色房子有乌克兰人，故日本人只能住绿色房子，从而西班牙人只能住蓝色房子。但由(11)，住蓝色房子的人养猫，而(2)说，西班牙人养狗，这就产生了矛盾。这个矛盾说明喝茶的乌克兰人不可能住白色房子，他住的一定是蓝色房子。

既然喝茶的乌克兰人住蓝色房子，喝牛奶的英国人住红房子，喝咖啡的人住绿房子，那么喝橘子水的人只能住黄色房子或白色房子。但由(12)，喝橘子水的人抽“登喜路”牌香烟，而由(7)，住黄色房子的挪威人抽“三五”牌香烟，故喝橘子水抽“登喜路”牌香烟的人只能住白色房子。由(13)，日本人抽“摩尔”牌香

烟。现在黄色房子由挪威人住着，蓝色房子由乌克兰人住着，红色房子由英国人住着，白色房子由抽"登喜路"牌的人住着，故日本人只能住绿色房子，从而住白色房子的只能是西班牙人，由(2)，他养了一条狗。

现在考察抽"万宝路"牌香烟的人。既然黄色房子的主人抽"三五"牌香烟，白色房子的主人抽"登喜路"牌香烟，绿色房子的主人抽"摩尔"牌香烟，那么抽"万宝路"牌香烟的人只可能住蓝色房子或红色房子。但由(6)，抽"万宝路"牌香烟的养蜗牛，而由(11)，住蓝色房子的乌克兰人养猫，故抽"万宝路"牌香烟养蜗牛的人只能是住红色房子喝牛奶的英国人。于是抽"健"牌香烟的必定是住蓝色房子的乌克兰人，他的右邻是养蜗牛的英国人，他的左邻是挪威人。由(10)，这位挪威人养的是狐狸。至此，可把已经推得的结果列于下表：

房子位置	左一	左二	左三	左四	左五
房子颜色	黄色	蓝色	红色	白色	绿色
主人国籍	挪威	乌克兰	英国	西班牙	日本
所养动物	狐狸	猫	蜗牛	狗	
所喝饮料		茶	牛奶	橘子水	咖啡
所抽香烟	三五	健	万宝路	登喜路	摩尔

表中的空白格子就是我们要补上的唯一答案：

喝水的是挪威人，养斑马的是日本人。

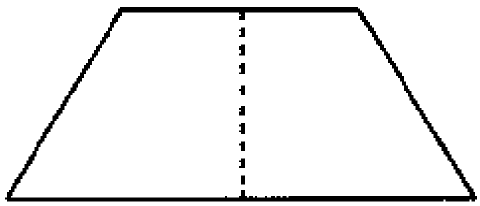
49. 生日蛋糕

这样的题目是没法用逻辑推理的方法解决的，我们只能用"试错法"。

首先，分成的八块全等蛋糕在原来的大蛋糕上要呈中心对

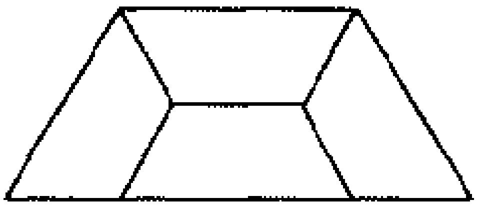
称是不可能的。因为如果是这样的话，那么这块大蛋糕就要呈 $\frac{360°}{8}$ 即 45°旋转对称，也就是说，这块大蛋糕转过 45°样子不变。但我们知道，这块大蛋糕只是呈 60°旋转对称。要它同时呈 45°旋转对称，那它必须是 15°旋转对称，遗憾的是它并非如此。

其次，分成的八块蛋糕是全等的这一事实，还是强烈地提示我们：它们在大蛋糕上的位置很可能呈某种非中心的对称。于是我们考虑上下对称。为此，先把这块大蛋糕一分为二，横切成两个等腰梯形。按题目要求，每一个等腰梯形都要分成四块全等的连通图形。我们可仅考虑上面那个等腰梯形



这等腰梯形呈左右对称，这诱使我们从中间自上而下垂直地切一刀，把它分成全等的两块。但是这样一来，要把切下的蛋糕（直角梯形）再分成全等的两块却无论如何也不可能了。

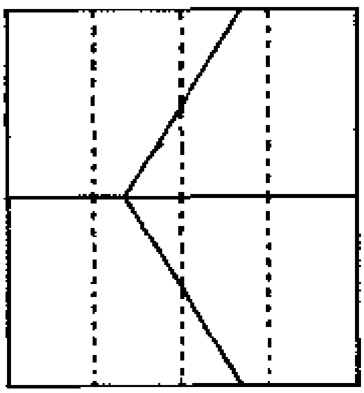
于是重新考虑。注意这等腰梯形的上边与两腰相等，这提示我们可把这三条边作为分下的蛋糕的边。但要分成四块蛋糕，而现在只有三条相等的边，于是第四条边应该在底边上找。同样出于对称的考虑，这第四条边应该在底边上居中。这样，底边上两端剩下的线段应该与两腰分别相配，分别成为分下的蛋糕的一对邻边。由于分下的蛋糕是全等的，因此底边上的第四条边也应有相应的邻边，而且一端一条。把这两条邻边的另一端相连，再把这两个另一端与那等腰梯形的两个上顶点分别相连，成了！



可是不对！我们忘了题目要求——只切五刀。现在半只蛋糕就切了五刀，另半只也要切五刀，加上把整只蛋糕一分为二的那一刀，一共十一刀，大大超过了题目的限制。

是不是还有其他的方法？注意在我们刚才那条失败的思路中出现了两个直角梯形，而两个全等的直角梯形可拼成一个矩形！我们来拼拼看。

现在可得注意切的刀数了。切了两刀后，把左上角的直角梯形同右下角的直角梯形拼起来，得到一个矩形；把右上角的直角梯形同左下角的直角梯形拼起来一下，也得到一个矩形。把这两个矩形放在一起，再垂直切三刀(一共是五刀)，就把蛋糕分成了全等的八块。但是，其中有好几块是由更小的块拼成的，这样符合要求吗？



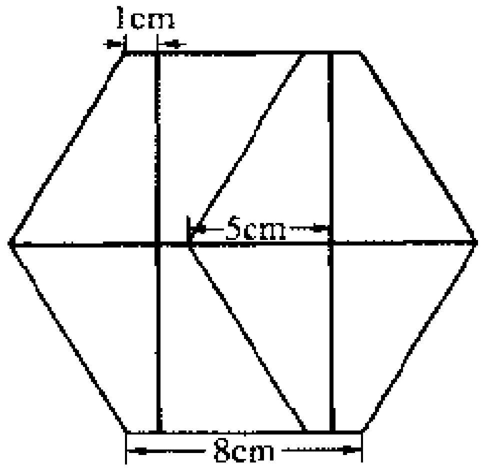
虽然题目没有明确要求切下来的蛋糕块必须是连在一起的，但如果在一个生日 Party 上真的像这样把奶油蛋糕切了拼，拼了切，恐怕是不能令人满意的。以数学的价值观，这样的解法

充其量只能说是一种取巧，称不上干净利落。

我们需要寻求一种“标准”的解法，其中不允许把切下来的蛋糕块拼起来再切，而且切好的每块蛋糕都是整块的。

仍然是“两个全等的直角梯形能拼成一个矩形”给我们以启发。由于不允许“拼”，我们应考虑这个命题的逆命题：“一个矩形能分成两个全等的直角梯形。”既然现在已经出现了四个直角梯形，那么是不是能想个法子“腾”出两个矩形来？因为两个矩形可以分成四个直角梯形，加上原来的四个，不就是八个了吗？

有了！在上面那个“取巧”的方法中，我们把自上而下通过中心所切的第二刀（其实这样等于又走上了寻求中心对称的老路）改为自上而下且左右对称的两刀。这样，这两刀之间就形成了上下两个矩形，而两刀的外侧仍然是直角梯形。只要适当地取两刀间的距离，就可保证这两个矩形所分成的直角梯形与刀外侧的直角梯形全等。于是，我们终于得到了令人满意的方法，而且只用了五刀。



50. 死亡游戏

我们先用实验的方法给出这道题目的答案，然后介绍一下

有关的背景。

为了叙述的方便，我们用数字给这八名特种兵编号。从琼斯开始，沿着顺时针方向，用自然数顺次编号。琼斯为1号，非舍为2号，加里为3号，等等。

两颗骰子掷出的点数之和，无非是2，3，…，12。如果是2，则按他们离开圆圈的先后次序排列，为2号，4号，6号，8号，3号，7号，5号，最后留下的是1号，琼斯上尉。

若掷出的点数之和为3，则离开次序为：3，6，1，5，2，8，4，最后留下的是7号，李。

若掷出的点数之和为4，则离开次序为：4，8，5，2，1，3，7，最后留下的是6号，卡尔。

若掷出的点数之和为5，则离开次序为：5，2，8，7，1，4，6，最后留下的是3号，加里。

若掷出的点数之和为6，则离开次序为：6，4，3，5，8，7，2，最后留下的是1号，琼斯。

若掷出的点数之和为7，则离开次序为：7，6，8，2，5，1，3，最后留下的是4号，哈维。

若掷出的点数之和为8，则离开次序为：8，1，3，6，5，2，7，最后留下的是4号，哈维。

若掷出的点数之和为9，则离开次序为：1，3，6，4，5，2，7，最后留下的是8号，马修。

若掷出的点数之和为10，则离开次序为：2，5，1，8，4，6，3，最后留下的是7号，李。

若掷出的点数之和为11，则离开次序为：3，7，5，6，2，8，1，最后留下的是4号，哈维。

若掷出的点数之和为12，则离开次序为：4，1，8，3，2，7，6，最后留下的是5号，伊恩。

你可用实验的方法得出以上 11 个离开次序。取八张扑克牌，点数分别为 1(A),2,3,4,5,6,7,8，代表这八名特种兵，把它们在桌子顺次围成一圈。然后设定两颗骰子的点数之和，比方说 3，按顺时针方向从 A 开始，一二三一二三地数，凡数到 3，就把数到的那张牌移开，放到另一个地方，后移开的牌放在先移开的下面，直到所有八张牌都被移开。这时移开的牌的点数从上到下就给出了相应于点数之和为 3 的离开次序。对于其他的点数之和，可按同法得到相应的离开次序。

回到我们的题目。从上面 11 个离开次序可见，除了 2 号菲舍，其他 7 个人都能被鉴别为清白者，只要这个死亡游戏进行得足够长，把 2,3,…,12 这 11 个点数都掷出来。琼斯上尉显然是想用这种方法把菲舍除去，可见**琼斯认为菲舍是奸细。**

这道题目的背景是所谓约瑟夫斯问题。约瑟夫斯是公元 1 世纪的犹太历史学家，他领导了反抗罗马人的武装起义，但是失败了。他和四十名犹太士兵被罗马人围困在一个山洞中。这四十名犹太士兵宁死不屈，决定杀身成仁。约瑟夫斯却另有想法，但在这种情况下，又不便公开反对。于是他灵机一动，装模作样地说："就是死，也得有个规矩。我看我们大家围成一个圆圈，从某个人开始，一二三一二三地数，凡数到三的人，就让他旁边的人成全他，让他升天。直到剩下最后一个人，这个人就采用自杀的方法。"一心赴死的犹太士兵自然不会反对，于是随便指定了一个人作为开始，大伙儿围成了一圈。反正早晚都是死，位置在哪儿似乎并不重要。但是有一个人不是这样想的，这个人就是约瑟夫斯。他有意地选择了第 31 号位置。结果，他就是剩下的最后一个人，然而他没有自杀，而是苟且偷生，走出山洞，投降了罗马人……

41 个人围成一圈，从某个人开始数，每数到 3 就把数到的

人淘汰，那么最后一个被淘汰的人开始时应该处在第几号位置上？（以开始被数的人为 1 号，并按数的方向顺次编号。）这就是约瑟夫斯问题的最初提法。约瑟夫斯知道这个问题的答案是 31，并因此而求得活命。

一般地，设有 n 个人，以 $1,2,\cdots,n$ 编号，按编号顺序排列，并围成一圈，从 1 号开始，每数到 m 就淘汰一人，则最后淘汰的人应是第几号？这就是后来对约瑟夫斯问题的一般提法。

令 $L(n,m)$ 为上述最后被淘汰的人的号码，于是我们已知有 $L(41,3)=31$。对于具体的 n 和 m，我们总能用上述实验的方法求出 $L(n,m)$ 的具体值。当然，编一个程序让电脑来做这个实验更是省心。不过，从数学的价值观来看，最好能有一个计算 $L(n,m)$ 的公式。当 $m=2$ 时，这样的公式是有的：

$$L(n,2)=1+2n-2^{1+[\log_2 n]}。$$

其中方括号表示取整数部分。这个公式看上去不太简洁，其实它还有一种表示方式。让我们先把 n 写成 2^a+b 的形式，其中 a 和 b 都是非负整数，而且 a 要尽可能的大。比方说 100，可以写成 2^5+68，也可以写成 2^6+36，但是不能写成 2^7 再加上一个非负整数，因此它就必须写成 2^6+36，即 $a=6,b=36$。接下来的事情简单得有点不可思议：

$$L(n,2)=2b+1。$$

例如，$L(100,2)=73$。

还有一种计算方法，虽然本质上同上面的方法一样，但十分有趣。它要求先把 n 写成二进制数，比方说写成 $1b_ib_{i-1}\cdots b_0$。其首位数肯定为 1，这是因为在二进制中，各位数字不是 1 就是 0，而同十进制数一样，首位数不能为 0。接下来的事同样十分简单：把首位的 1 移到末位，得 $b_ib_{i-1}\cdots b_01$，这就是 $L(n,2)$ 的二进制表示。当然，b_i,b_{i-1} 等前几位数字可能是 0。若是 0，不写出来

就是了，即由左往右，从第一个不为 0 的数字写起。同样取 $n=100$ 为例，100 的二进制写法是 1100100，把首位的 1 移到末位，得 1001001，即十进制的 73。

上面都是 $m=2$ 时的情况，如果 $m=3,4,\cdots$，或者就是一般的 m，那有没有公式呢？有没有不知道，反正现在还没有人找到。上世纪初，有一位数学家叫泰特的，发表了一种递推算法，可以对任意的 n,m，求出 $L(n,m)$。具体地说，就是

$$L(1,m)=1,$$

$$L(k+1,m)\equiv L(k,m)+m\ (\bmod\ n+1)。$$

这里用了同余号"$\equiv$"，尚不知道同余概念的读者，可去查阅任何一本初等数论教材。

显然，这种算法比上面的实验方法要省力得多。利用这些式子，泰特还设计了一种成批算出 $L(n,m)$ 方法，详情可参看《数学游戏与欣赏》(劳斯·鲍尔，考克斯特著，杨应辰等译，上海教育出版社，2001 年版)。

约瑟夫斯问题后来因下面这个传说而有了新的版本。相传有一艘船在大海上遇到了强风暴雨，船长不得不把船上 30 名乘客中的 15 名抛入大海。决定把哪 15 人抛入大海的方法如上，只是每数到9(即 $m=9$) 抛一个人。而这 30 名乘客中，正好一半是基督徒，一半是土耳其人，当然，基督徒要设法保全自己人，这就要求回答这样一个问题：这 15 名基督徒开始时应该占据哪些位置？

在这个新版本的约瑟夫斯问题中，我们要求的不仅是最后一个人，而且是最后一批人。其实，就像在解答我们那道题目时那样，可以用实验的方法，把 1 到 30 这 30 个编号按被淘汰的先后次序形成一个新的排序(前面我们称之为"离开次序")，这个排列的后 15 个编号就是基督徒应该占据的位置。

一般地，对于任意的 n 和 m，用上述淘汰方法，都可以相应地产生一个按被淘汰次序形成的排列，我们称之为约瑟夫斯排列，并记为 $J(n,m)$。例如，我们有 $J(8,3)=(3,6,1,5,2,8,4,7)$；而对于上面这个基督徒与土耳其人的问题，我们有 $J(30,9)=(9,18,27,6,16,26,7,19,30,12,24,8,22,5,23,11,29,17,10,2,28,25,1,4,15,13,14,3,20,21)$。也就是说，基督徒应该占据其中后 15 个编号的位置，即 1,2,3,4,10,11,13,14,15,17,20,21,25,28,29 这 15 个编号的位置。

对 $J(n,m)$ 的研究可说是对约瑟夫斯问题的最彻底的研究了，因为 $J(n,m)$ 包括了这一淘汰过程的所有信息。

固定 m，对 $J(n,m)$ 有一种递推的计算方法。下面我们令 $m=3$，让 $n=1,2,3,\cdots,10$，给出相应的 $J(n,m)$。请你从中“看”出这种递推的计算方法。

$J(1,3)=(1)$，

$J(2,3)=(1,2)$，

$J(3,3)=(3,1,2)$，

$J(4,3)=(3,2,4,1)$，

$J(5,3)=(3,1,5,2,4)$，

$J(6,3)=(3,6,4,2,5,1)$，

$J(7,3)=(3,6,2,7,5,1,4)$，

$J(8,3)=(3,6,1,5,2,8,4,7)$，

$J(9,3)=(3,6,9,4,8,5,2,7,1)$，

$J(10,3)=(3,6,9,2,7,1,8,5,10,4)$。

如果“看”不出，那么请再“做”一些实验，多收集一些“实验结果”作分析。如果还是不行，那么我们在这里给出如下的提示。

首先，显然有 $J(1,m)=(1)$。

其次,当 $1 < n \leqslant m$ 时,$J(n,m)$ 的第一个元素即为 n 除 m 所得的余数;而当 $n > m$ 时,$J(n,m)$ 的第一个元素即为 m。

接下来请注意 $J(n,m)$ 的第二个元素到最后一个元素与 $J(n-1,m)$ 的第一个元素到最后一个元素的关系:当 n 个人围成的一圈中首先有一个人被淘汰后,人们面临的情况就相当于 $n-1$ 个人围成一圈正准备开始按上述规则进行淘汰。这时紧接在已被淘汰者后面的人就相当于 $n-1$ 人情况下的 1 号……明白了吗?

如果我们固定 n,让 $m = 1,2,\cdots$,会有一些什么结果呢?

首先,当 $m = 1,2,\cdots$ 时,相应地会得出一个又一个由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素构成的排列 $J(n,m)$,以至无穷。但是我们知道,由 n 个元素构成的排列一共只有 $n!$($n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$)个。因此当 m 顺次取自然数时,总会有某对自然数 m' 和 m'',使得 $J(n,m') = J(n,m'')$。

其次,对于任何一个由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素构成的排列,是不是一定存在一个自然数 m,使得 $J(n,m)$ 等于这个排列呢?

事实上,设 $l(n)$ 为 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数的最小公倍数,那么 $J(n,m)$ 只有 l 种,它们就是当 m 分别为 $1,2,\cdots,l(n)$ 时的 l 个 $J(n,m)$。

当 $n \geqslant 4$ 时,$n! > l(n)$。因此当 $n \geqslant 4$ 时,并非任何一个由 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列都可以成为某个 m 的 $J(n,m)$。

那么,怎样的排列可以是某个 m 的 $J(n,m)$,怎样的排列肯定不会是任何一个 m 的 $J(n,m)$ 呢?确实,关于约瑟夫斯排列 $J(n,m)$,人们还可以有许多问题可问。世界上有不少职业数学家和业余爱好者正在研究这些问题,而且,约瑟夫斯问题本身已成为计算机编程的典型练习题。有兴趣的读者可到因特网上去查询。

最后还是回到我们的题目。这道题目只不过利用了约瑟夫斯排列中的一个具体事实，即当 $m = 2,3,\cdots,12$ 时，$L(8,m) \neq 2$。这是一种十分特殊的情况，因为当 $m = 19$ 时，$L(8,19) = 2$，$J(8,19) = (3,8,1,6,4,5,7,2)$。而且可以证明，对于任意的 n，当 $m = 1,2,\cdots,l(n)$ 时，$L(m,n)$ 的取值覆盖从 1 到 n 的所有自然数。