翻 译 说 明

本书是根据美国著名数学教育家査·特里格编著的《数学机敏》一书编译而成的。这是一本饶有趣味的数学读物，而不是普通的习题集。

原书收集的趣味数学问题及其解答，都是编著者从1932—1972年《美国数学月刊》等五种杂志上几千道题中挑选出来的。这些题目不仅类型广泛多样，较全面地包含了初等数学的内容，而且还有一定的思考性、综合性。许多问题初看似乎很难，需要用复杂的方法去解。但是，编著者充分应用各种数学知识，打破常规，广开思路，从各个角度去认真思索，别出心裁，巧辟捷径，使许多表面上看十分棘手的问题迅速迎刃而解，颇出人意外。阅读此书，我们既可学习许多解题技巧，增长数学知识，加强思维锻炼，培养分析问题和解决问题的能力，又可感受到解数学题的乐趣。

但是，原书内容过于庞杂，题目深浅悬殊，有的解题过程因过于简单而令人费解。提交正式出版时，为了弥补这些不足，故采用编译形式，对原书内容进行了删减，只保留其中的350道题，并对有些题目的解题过程作了必要的补充和注释，然后按其内容分为代数、平面几何，立体几何、解析几何和平面三角五章。

本书适合中等以上文化程度的读者阅读，同时也是中学数学兴趣小组和数学墙报的有益的参考材料。

本书的翻译工作得到了有关方面的热情支持，林仁荣和许秉瑢两同志提出了宝贵意见，在此一并表示深切的感谢。

限于水平，译文难免有缺点错误，恳望读者批评指正。

郑元禄

1983.1.

目　　录

1

代　　数

1. 证明：当 n 为任意整数时，表达式 n^5-n 可被 30 整除.

证 1　一个整数和它的五次幂总以同一数字为个位数. 因此，n^5-n的值以 0 为个位数，故可被 2 和 5 整除.

其次，将n^5-n分解成因数

$$(n-1)n(n+1)(n^2+1),$$

显然，前三个因数之一必定可被 3 整除.

因此，n^5-n可被$2\cdot3\cdot5=30$整除.

证 2　
$$\begin{aligned}n^5-n&=n(n^2-1)(n^2+1)\\&=n(n^2-1)[(n^2-4)+5]\\&=n(n^2-1)(n^2-4)+5n(n^2-1)\\&=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\\&\quad+5(n-1)n(n+1).\end{aligned}$$

五个连续整数可被 $2\cdot3\cdot5=30$ 整除；三个连续整数可被$2\cdot3=6$整除，再乘以 5 可被30整除.

因此，n^5-n可被30整除.

2. 设$a-1$与$a+1$都是大于10的素数(这对素数称为孪生

素数），证明：a^3-4a可被120整除.

证 先证一个更强的结论. 为此注意，数

$$(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$$

是五个连续整数的乘积，从而其中一个因数可被 3 整除，另一个因数可被5整除. 若$a-1$与$a+1$都是素数，则$a-2$，a，$a+2$是连续偶数，因而其中至少有一个可被 4 整除，其余两个可被 2 整除. 因此，与大于 5 的两个孪生素数相邻的三个整数之积可被

$$3\cdot5\cdot4\cdot2\cdot2=240$$

整除. 换句话说，a^3-4a可被240整除.

实际上，如果 a 是一个奇数的 2 倍，例如42，那么a^3-4a可被 240 整除. 在最后这种情形下，孪生素数是 $6k-1$ 与 $6k+1$，其中 k 是奇数.

3. 证明：大于 $(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数可被2^{m+1}整除（m是正整数）.

证 考虑表达式

$$I=(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-1)^{2m}.$$

因为

$$\begin{aligned}I&=(4+2\sqrt{3})^m+(4-2\sqrt{3})^m\\&=2^m[(2+\sqrt{3})^m+(2-\sqrt{3})^m]\\&=2^{m+1}[2^m+2^{m-2}\cdot\frac{3m(m-1)}{2}+\cdots],\end{aligned}$$

所以此式是一个可被2^{m+1}整除的整数.

因为

$$(\sqrt{3}-1)^{2m}<1,$$

所以 I 与大于 $(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数相等，命题得证.

4. 证明：当$n=0$，1，2，…时，数$2^{5n+1}+5^{n+2}$可被27

整除.

证 要证明命题成立，只需注意

$$2^{5n+1}+5^{n+2}=2(27+5)^n+5^n(27-2)=27k.$$

5. 设a，m，n都是正整数，且n是奇数. 证明：a^n-1与a^m+1的最大公因数不大于 2 .

证 设d是a^n-1与a^m+1的最大公因数. 于是存在整数k与r，使等式

$$a^n=kd+1,\ a^m=rd-1$$

成立.

因此，对于某个整数t，

$$a^{mn}=(a^n)^m=(kd+1)^m=td+1;$$

对于某个整数u，

$$a^{mn}=(a^m)^n=(rd-1)^n=ud-1,$$

其中n是奇数.

因此

$$td+1=ud-1,$$

即

$$(u-t)d=2.$$

由此得出 $d=1$ 或 $d=2$.

6. 试求一个数，使1108，1453，1844,2281被它除时，有相同的余数.

解 因为

$$1453-1108=345,$$

$$1844-1453=391,$$

$$2281-1844=437,$$

而

$$437-391=391-345=46=2\cdot 23;$$

又因为若要有相同的余数，则所求的除数一定是奇数，所以由关系式

$$(N_1d+r)-(N_2d+r)=d(N_1-N_2)$$

得知所要求的数为23，余数都是 4．

7．设 $\overline{abc}=100a+10b+c$．试求一个由互不相同的非零数字组成的九位数，使它的平方根具有 $\overline{ababc}$ 的形式，其中 $\overline{ab}=c^3$．

解 由 $\overline{ab}=c^3$ 知 c 只可能是数 3 或 4．若 $c=4$，则 64644^2 是一个十位数．因此，本题只有唯一解：

$$27273^2=743816529.$$

8．试求两个数，使它们的差与商都是 5．

解 因为两个数的商为 5，所以它们的差中，较大的数比较小的数大 4 倍．因此，较小的数为 $\frac{5}{4}$，较大的数为 $\frac{25}{4}$．

一般说来，如果

$$x-y=\frac{x}{y}=a,$$

那么

$$x=\frac{a^2}{a-1}, \qquad y=\frac{a}{a-1}.$$

9．取一个以任意进位制写成的数，再把它的数字以任意的方式重新排列．证明：这两个数之差可被比这进位制的底数小 1 的数整除．

证 如果进位制的底数为 b，那么这个数可以写成

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b^{n-i}.$$

以 a_{i_p} 表示重新排列后，在位置 a_i 上的数字，于是这两个

数之差为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} a_{i_p} b^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i_p}) b^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i_p})(b^{n-i}-1) + \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i_p}).$$

显然，后面一项和式的值为 0．可以用归纳法证明：当 $i=0, 1, \cdots, n$ 时，$b^{n-i}-1$可被$b-1$整除．命题得证．

10． 在哪一种进位制中，数35与58是互质的？

解 以(x, y)表示x和y的最大公因数，于是

$$(35, 58)=(35, 23)=(12, 23)$$
$$=(12, 11)=(1, 11)=1.$$

因此，在任何底数大于 8 的进位制中，数35与58是互质的．

11． 证明：不存在这样的三个连续奇数，使得其中每个数是两个非零平方数之和．

证 每个整数可写成下列形式之一：

$$4k, \ 4k+1, \ 4k+2, \ 4k+3.$$

因此，整数的平方可表示为$4k$或$4k+1$．两个这样的平方数之和可以写成$4k$或$4k+1$或$4k+2$．任意一个奇数可写成$4k+1$或$4k+3$．因此，不仅在三个甚至在两个连续奇数之间，一定有一个数不能表示成为两个平方数的和．

12． 设a, b, c是不为 1 的互质整数，令$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$．证明：$a+b$，$a-c$和$b-c$都是完全平方数．

证 如果

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c},$$

那么

$$a+b=\frac{ab}{c}.$$

因为a和b都是整数，所以c可以分解为乘积．例如$c=qr$，其中一个因数可以整除a，另一个可以整除b，于是

$$a=mq,\ b=pr.$$

因此

$$mq+pr=\frac{mpqr}{qr}=mp.$$

因a，b，c互质，故m与r互质（即m整除p），p与q互质（即p整除m）．因此，$m=p$.

从而

$$p(q+r)=p^2,\ q+r=p.$$

由此得

$$a+b=pq+pr=p(q+r)=p^2,$$
$$a-c=pq-qr=q(p-r)=q^2,$$
$$b-c=pr-qr=r(p-q)=r^2.$$

13. 是否存在这样的五个连续整数，使得前四个数的四次幂之和等于第五个数的四次幂？

解 可以把任一偶数$2n$（n为正整数）的四次幂$(2n)^4$表示为$4k$（k为正整数）．把任一奇数$2n+1$的四次幂$(2n+1)^4$表示为$4k+1$．因此，任意四个连续整数的四次幂之和是$4k+2$，显然不等于第五个整数的四次幂．所以不存在这样的五个连续整数．

14. 证明：存在无穷多个素数．

证 假设不然，存在一个最大素数p．考虑这样一个数，它比不大于p的所有素数的乘积大1，即

$$Q=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots\cdots p+1.$$

因为Q不能被上面乘积中的任一素数整除（Q被其中任一素数除时，余数为1），所以Q是素数，而$Q>p$，矛盾.

因此不存在最大的素数，即素数有无穷多个.

√**15**. 证明：如果一个直角三角形的边长都是整数，那么它的两条直角边长不能用孪生素数表示.

证 设p和$p+2$是这样的两个孪生素数，使得

$$p^2+(p+2)^2=k^2,$$

其中k是整数，p是奇数，于是

$$2p^2+4p+4=k^2$$

由此得出k^2（即k）是偶数.

设$k=2n$，那么上式可改写成

$$2p^2+4p+4=4n^2,$$

即

$$p^2+2p+2=2n^2.$$

此式左边是奇数（因p是奇数），右边是偶数，因此，这个等式是矛盾的．命题得证.

16. 设p_1和p_2是两个连续奇素数，而$p_1+p_2=2q$．证明：q是一个合数.

证 数

$$q=\frac{p_1+p_2}{2}$$

是p_1和p_2的算术平均值，从而$p_1<q<p_2$．又p_1和p_2是连续素数，因此q是一个合数.

√**17**. 试求数1000027的素因数.

解 $1000027=100^3+3^3$

$$=(100+3)(10000-300+9)$$

$$=103\cdot 9709$$
$$=103\cdot 7\cdot 1387$$
$$=103\cdot 7\cdot 73\cdot 19.$$

18. 试证 $2222^{5555}+5555^{2222}$ 可被 7 整除.

证 原数可改写成

$$\begin{aligned}&2222^{5555}+5555^{2222}\\&=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})\\&\quad-(4^{5555}-4^{2222}).\end{aligned}$$

考虑三个括号内的数. 因当 n 为奇数时，a^n+b^n 可被 $a+b$ 整除，故第一个括号内的数可被

$$2222+4=2226=7\cdot 318$$

整除. 因 a^n-b^n 可被 $a-b$ 整除，故第二个括号内的数可被

$$5555-4=5551=7\cdot 793$$

整除. 第三个括号内的数可写成

$$4^{2222}(4^{3333}-1)=4^{2222}(64^{1111}-1).$$

此数显然可被

$$64-1=63=7\cdot 9$$

整除.

因此，原数可被 7 整除.

19. 四个连续奇数的乘积等于哪个平方数?

解 如果 n 是一个奇数，并且

$$n(n+2)(n+4)(n+6)=m^2,$$

那么

$$(n^2+6n+4)^2=m^2+16.$$

因为在平方数中，只有 0 和 9 才具有 a^2-16 的形式，而 m^2 是奇数，所以要求的平方数应为

$$9=(-3)(-1)(1)(3).$$

20. 设 $\overline{abc}=100a+10b+c$. 试求一个形如 $\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ 的九位数，使此数是四个不同素数的平方之积，并且

$$\overline{b_1b_2b_3}=2(\overline{a_1a_2a_3})\quad (a_1\neq 0).$$

解 注意，设该数为 N^2，则有

$$\begin{aligned}N^2&=\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}\\&=\overline{a_1a_2a_3}\cdot 1002001\\&=\overline{a_1a_2a_3}\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2.\end{aligned}$$

因此，数 $\overline{a_1a_2a_3}$ 等于素数 p 的平方，其中 $p\neq 7$，11和13；其次

$$a_1\neq 0,\quad \overline{b_1b_2b_3}<1000,$$

因此

$$10<p<23,\ p=17\ 或\ 19,$$
$$\overline{a_1a_2a_3}=289\ 或\ 361.$$

从而本题有两解：

$$N^2=289578289\ 或\ 361722361.$$

21. 证明：对于任意一个正整数 n，数

$$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$$

都不能是一个完全平方数.

证 因为

$$\begin{aligned}(n^2+n)^2&=n^4+2n^3+n^2\\&<n^4+2n^3+2n^2+n+1\\&<n^4+2n^3+3n^2+2n+1\\&=(n^2+n+1)^2,\end{aligned}$$

所以题中所给的数介于两个连续平方数之间，它不可能是一个完全平方数.

22. 数11111在哪种进位制中是一个完全平方数？

解 如果进位制的底数是B，$B>1$，那么可以写出

$$11111=B^4+B^3+B^2+B+1.$$

其次

$$\left(B^2+\frac{B}{2}\right)^2<B^4+B^3+B^2+B+1<\left(B^2+\frac{B}{2}+1\right)^2,$$

如果中项是一个完全平方数，那么应当满足等式

$$\left(B^2+\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=B^4+B^3+B^2+B+1,$$

从而

$$\frac{B^2}{4}-\frac{B}{2}-\frac{3}{4}=0,$$

$$(B-3)(B+1)=0.$$

因为$B>1$，所以$B=3$，得$11111=102^2$.

23. 证明：在十进制中，用两个或两个以上数字写成的任一完全平方数至少包含两个不同的数字.

证 对十进制的平方表的研究表明：

(1) 平方数只能以0，1，4，5，6或9作为末位数；

(2) 如果平方数的个位数是6，那么它的十位数是奇数，否则相应的数字是偶数.

$N\cdots$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$19\cdots$
$N^2\cdots$	100	121	144	169	196	225	256	289	324	$361\cdots$

因此，平方数的所有数字都不能相同，只要它们不等于4（由一个0组成的平方数显然没有意义）. 但是

$$\cdots 444=4(\cdots 111),$$

因为括号内的数的十位数字是奇数，所以得出结论：在十进制中，任一平方数都不可能由相同的数字组成.

24. 证明：用奇数底数的进位制写成的整数，当且仅当

它含有奇数个奇数数字时，才是奇数.

证 在以 r 为底数的进位制中，任何一个数可表示为

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n r^0.$$

如果在几个整数的乘积中，只要有一个因数是偶数，那么乘积是偶数；相反，它是奇数．其次，如果 r 是奇数，那么r^k也是奇数．因此，上述和中的每个加数$a_k r^{n-k}$的奇偶性与a_k的奇偶性一致

如果把任意个偶数或偶数个奇数相加，那么和是偶数；如果把奇数个奇数相加或把偶数与奇数相加，那么和是奇数．因此，用奇数底数的进位制写成的整数，当且仅当它含有奇数个奇数数字时，才是奇数.

25. 在十进制中，以如下方式构成一个小数：

$$x = x_0 . x_1 x_2 x_3 \cdots,$$

设$x_0 = 1$，x_n是$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$被 9 除时所得的最小正余数．证明：$x$ 是有理数.

证 由等式

$$9n + x_{k+1} = x_k + x_{k-1} + \cdots + x_1 + x_0$$
$$= x_k + x_k + 9m$$

容易看出，x_k是

$$2^{k-1} x_0 = 2^{k-1}$$

被 9 除时的余数.

现在来证明一个更一般的结果．考虑由数$r^k x_0$除以 n 所得余数组成的数列$\{x_{k+1}\}$．在以$b>n$为底数的进位制中，借助于这个数列写出数$x_0 . x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots$．因为不同余数的个数是有限的，所以至少存在两个相等的数字x_k和x_{k+p}．因此

$$x_{k+j} = r^j x_k + np = r^j x_{k+p} + np$$

$$=x_{k+p+j}+nm,$$

其中$j=0, 1, \cdots, p-1$. 由此得出等式

$$x_{k+j}=x_{k+p+j},$$

因为$0\leqslant x_i\leqslant n-1$，所以，数$x_0.x_1x_2x_3x_4\cdots$由有$p$个数字的重复循环节组成，是有理数.

✔**26**. 试求这样的六个不同的最小整数，使得其中任意五个数的乘积等于第六个数的倒数用循环小数表示时的循环节. 例如41的倒数写成的小数是

$$\frac{1}{41}=0.0243902439\cdots,$$

那么这个循环节等于02439.

解 如果b表示a的倒数写成的循环小数，那么乘积ab的所有数字都是9.

其次

$$99=9\cdot 11,\ 999=3\cdot 9\cdot 37,$$
$$9999=9\cdot 11\cdot 101,\ 99999=9\cdot 41\cdot 271,$$
$$999999=3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 37.$$

最后六个数3，7，9，11，13，37就是所求的满足题设条件的最小整数. 实际上

$$\frac{1}{3}=0.333333\cdots\quad \frac{1}{7}=0.142857\cdots,$$
$$\frac{1}{9}=0.111111\cdots,\quad \frac{1}{11}=0.090909\cdots,$$
$$\frac{1}{13}=0.076923\cdots,\quad \frac{1}{37}=0.027027\cdots.$$

27. 证明：在十进制中，不能用五个同时是偶数或同时是奇数的不同数字写出任一完全平方数.

证 只有两组由五个不同偶数或奇数组成的数字：0，

2，4，6，8和1，3，5，7，9.

每个完全平方数的数字之和被9除时得余数 0，1，4，或7．但是上面第一组数字之和被9除时得余数2，这就是说，这组数字不能组成五位的平方数.

如果一个完全平方数的个位数字是奇数，那么它的十位数字一定是偶数(证明见下段)．但是第二组数字没有偶数，因此，第二组的数字也不能组成五位的平方数.

设某数N的个位数是奇数x，则$N=10k+x$，于是

$$N^2=100k^2+20kx+x^2.$$

因而N^2的十位数字是将x^2项中的十位数字与$20kx$项中的十位数字相加而得的．由直接检验可知，奇数数字x的平方有偶数的十位数字，$20kx$的十位数字也是偶数，所以$20kx+x^2$的十位数字是偶数．因此，N^2的十位数字也是偶数.

28. 设$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$是单位圆上的n个分点(不一定是等分点)．证明或推翻下列命题：存在这样一个合数m，使得在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$上至少包含一个形如$\frac{r}{m}$的既约分数.

证 取这样一个素数p，使

$$\frac{2}{p}<\min(x_{i+1}-x_i).$$

根据这种取法，在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上至少包含两个形如$\frac{k}{p}$的数，以$\frac{k}{p}$和$\frac{k+1}{p}$表示任意两个这样的连续的数.

因为 $$\frac{k}{p}=\frac{kp}{p^2}<\frac{kp+1}{p^2}<\frac{kp+p}{p^2}=\frac{k+1}{p},$$

而$kp+1$与p^2互质，所以数$\frac{kp+1}{p^2}$是位于两个已知数$\frac{k}{p}$和$\frac{k+1}{p}$之间的既约分数.因为$m=p^2$是合数,所以命题得证.

29. 设n是大于2的正整数. 证明：在分数$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，$\frac{3}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}$中含有偶数个既约分数.

证 如果$\frac{k}{n}$是既约分数，那么

$$1-\frac{k}{n}=\frac{n-k}{n}$$

也是既约分数. 因此，既约分数成对地出现在这个分数数列中，从而它们的个数总是偶数.

30. 如果20的$\frac{1}{4}$等于6，那么10的$\frac{1}{5}$等于几?

解 若20的$\frac{1}{4}$等于6，则表明我们是用十二进制计算. 因为

$$10_{12}=12_{10},$$

所以10的$\frac{1}{5}$等于$2\frac{2}{5}$.

△ **31**. 当把$\frac{1}{49}$展开成为循环小数时,它的循环节是什么?

解 如把$\frac{1}{7}$展开到循环小数的第一循环节，则得0.142857. 把它重复七次，将得数除以7，结果没有余数. 实际上

$$\begin{aligned}&142857(1+10^6+\cdots+10^{36})\\=&142857[7+(10^6-1)+\cdots+(10^{36}-1)],\end{aligned}$$

但是 $$10^6-1=142857\cdot 7,$$
所以中括号内的每一项均能被 7 整除.

这样就得到$\left(\frac{1}{7}\right)^2$的循环小数的第一循环节，就是

$$0.142857\ 142857\ 142857\ 142857\ 142857\ 142857\ 142857\div 7$$
$$=0.020408163265306122448979591836734693877551.$$

32. 分数$\frac{116690151}{427863887}$可以约分到什么程度?

解 分子的数字之和为30，因而它可被 3 整除. 分母的相间数字之和相减得

$$32-21=11,$$

因而它可被11整除. 把这些因数相除，得

$$\frac{116690151}{427863887}=\frac{38896717\cdot 3}{38896717\cdot 11}=\frac{3}{11}.$$

√ **33**. 将数316表示成为两个数之和，使其中一个可被13整除，另一个可被11整除.

解 将316除以11，得商数28，余数 8 .

但是

$$8\div(13-11)=4,$$

因此要求的两个加数分别为52与264:

$$4\cdot 13=52 \text{ 和 } 264.$$

也可以将316表示为如下两数195与121的和:

$$52+11\cdot 13=195,$$
$$264-11\cdot 13=121.$$

34. 某个用少于30个数字写成的数,是从数字15开始的(假如是从左向右移动的)，即具有15…的形式. 如果要将它乘以 5 ，那么只要把15这两个数字移到末二位，就可以得出乘积. 结果得到形如…15的数. 试求原来的数.

解 以 f 表示一个真分数，在它的循环小数展开式中，有一个循环节恰好和原来的数15…相同．由问题的条件

$$5f = 0.\cdots15\cdots15\cdots,$$
$$100f = 15.\cdots15\cdots15\cdots$$

得

$$95f = 15, \quad f = \frac{3}{19}.$$

把$\frac{3}{19}$写成小数，发现它的一个循环节包含18个数字：

$$157894736842105263,$$

这就是所求的数．

如果考虑不多于30位的数，那么这个答数是唯一的．如果去掉这个限制，例如考虑不多于50个数字写成的数，那么又找到问题的一解——36位数，它恰好等于 f 的两个循环节．

∨**35**．令 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$．在印刷时，将乘式

$$\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab}$$

排成一行．但是活字版散开了，乘式的数字移动了，结果把乘积错印成 234235286．已知 $a > b > c$，乘积的个位数字 6 是正确的．试求真实的乘积．

解 设 $n = \overline{abc}$，N是要求的乘积．如果$c = 1$，那么最大的可能值 n（即981）给出乘积$N = 159080922$．但这太小，因此

$$982 \leqslant n \leqslant 987.$$

N的数字之和为

$$35 \equiv 2 (\bmod 3),$$

所以，n 与 n 的数字颠倒后得到的数被 3 除时都有余数 2．

这就是说，n 或者为986，或者为983．但是只有当$n=983$时，N的个位数才是6．由此得出，正确的排法应是

$$983\cdot 839\cdot 398=328245326.$$

36．如果某数减去7，把差乘以7，得一答数；再从同一数减去11，把差乘以11，又得另一答数．若两个答数相等，求原数．

解 两个答数应当既可被7又可被11整除，因此要求的数等于

$$7+11=18$$

在一般情形下，数$k+m$是方程

$$(x-k)k=(x-m)m$$

的解．

37．如果在各个数字之间插入代数运算符号，那么命题"$342=97$"可以成立，例如

$$(-3+4)\cdot 2=9-7.$$

但若不插入任何符号，这个等式还有意义吗？

解 为使这个命题成立，必须将这两个已知数用不同的进位制写出，即

$$342_a=97_b.$$

如果$b=10$，则因

$$3\cdot 4^2=48,\qquad 3\cdot 6^2=108$$

得$a=5$．实际上

$$3\cdot 5^2+4\cdot 5+2=97.$$

在一般情形下，由

$$3a^2+4a+2=9b+7$$

得出

$$b=\frac{3a^2+4a-5}{9}.$$

从而仅当$a=9x+5$时，b才是整数．这时

$$b=27x^2+34x+10.$$

因此，本题有无穷多个解．例如

$$342_5=97_{10},\qquad 342_{14}=97_{71}$$

等等．

38．能不能求出这样一个数，使它用十进制写时具有下列性质：如果把其数字的次序颠倒，那么所得的数比原数大一倍？

解 这样的数不存在．

实际上，设未知数是 $\overline{a\cdots b}$ ，那么

$$\overline{b\cdots a}=2(\overline{a\cdots b}).$$

其次，a可等于 1，2， 3或4，而相应的b可等于（2，3），（4，5），（6，7）或（8，9）．比较一下原数和倒写数的个位数，可以看出，上述每种情形都导致矛盾．

39．在六进制中，某个平方数用五个不同的非零数字写出．如果把它的个位数字移到首位，那么得数的平方根等于原数倒写所得的平方根．试求原数．

解 因为

$$12345\leqslant N^2\leqslant 54321,$$

所以

$$113\leqslant N\leqslant 221.$$

如果把数N的数字倒写，那么得数也满足这个不等式．N^2可被5整除，从而N也可被5整除．写出所有可被5整除且满足这个不等式的三位数：113，122，131，140，145，154，203，212，221．其中只有两个数是倒写的（即122和221）．

把它们平方，可以看出，它们是本题的唯一解：

$$221^2=53241,\qquad 15324=122^2.$$

40. 设 a 和 b 都是整数，和 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ 可以是整数吗？

解 如果 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=k$ 是整数，那么等式

$$a^2+b^2=abk$$

成立，即

$$b^2=a(bk-a)$$

成立．由此得出，b^2 可被 a 整除，但这只有在 $a=\pm b$ 时才可能．

因此，当且仅当 $a=\pm b$ 时，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ 才等于一个整数．

41．在哪一种进位制中，792可被297整除？

解 在底数 $B\geqslant 10$ 的任一进位制中，下列不等式成立：

$$2\cdot 297<2\cdot 300=600<792<800=4\cdot 200<4\cdot 297.$$

因此 $792=3\cdot 297$，从而

$$7B^2+9B+2=3(2B^2+9B+7).$$

由此得

$$B^2-18B-19=0.$$

解此方程，去掉负根，得 $B=19$.

42．设 k 是一个非零整数，证明：数 $(2k)^{2^n}+1$ 互质（其中 $n=1, 2, \cdots$）．

证 设

$$F_n=(2k)^{2^n}+1,\quad m<n.$$

如果 p 是一个正整数，那么

$$x^{2p}-1=(x+1)(x^{2p-1}-x^{2p-2}+x^{2p-3}-\cdots+x^2+x-1).$$

取

$$x=(2k)^{2^m}, \quad p=2^{n-m-1},$$

则F_n-2可被F_m整除．因此，最大公因数

$$(F_m, \ F_n)\leqslant 2.$$

因为F_n是奇数，所以

$$(F_m, \ F_n)=1.$$

43．证明：对于任意整数$n>1$，和式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$的值都不是整数．

证　考虑一个有穷数列1，2，…，n．其中有且只有一项Q，使得Q分解成为素因数时，2的幂次高于其它各项．以$2M$表示这个数列所有各项的最小公倍数．其次，在等式

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

的两边乘以M．右边每个加数（除$\frac{1}{Q}$外）乘以M后都成为整数．但是数$\frac{M}{Q}$不是整数，因为这个分数的分母化简后保留数2．因此，数SM（即S）不能是整数．

44．证明：在各边边长为整数的直角三角形中，有一条直角边边长是3的倍数．

证　费尔马小定理指出，如果p是一个素数，而m不能被p整除，那么

$$m^{p-1}\equiv 1\ (\bmod\ p).$$

（参阅附录中的狄利克来原理）．

把直角三角形三边的关系式$a^2+b^2=c^2$改写成

$(a^{3-1}-1)+(b^{3-1}-1)=c^2-2=(c^{3-1}-1)-1.$

如果 a 和 b 都不能被 3 整除，那么上式左边的每个加数都能被 3 整除．但右边无论 c 为任何整数都不能被 3 整除．

因此，a 和 b 中至少有一个应该被 3 整除．

不用费尔马小定理，可证明如下：如果 a，b，c 中没有一个数可被 3 整除，那么由

$$(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1$$

可知，$a^2+b^2=c^2$ 中每一项被 3 除时都有余数 1，这就导致 $2=1$ 的矛盾．

45．试证：表达式 $\sum_{n=1}^{\infty}6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$ 是无理数．

证 这个表达式的幂指数组成数列

$-1,\ -4,\ -8,\ -13,\ -19,\ -26,\ \cdots$

它相邻两项之差每一步增加 1．如果把这个表达式用六进制写出，那么就得到一个无限不循环小数

$0.1001000100001000001\cdots$

它显然是一个无理数．

46．固定 n，考虑由 n 个 2 组成的下列阶梯：

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$$

以 N_n 表示一些不同整数的个数；这些整数是在上面的阶梯中添加各种括号而形成的，并且这些括号一个套一个．例如 $N_3=1$，$N_4=2$．试求 N_n．

解 因为

$$(2^2)^2=2^{(2^2)}=16,$$

所以该数不依赖于括号的位置，$N_3=1$. 同样

$$\left(2^{(2^2)^2}\right)=16^2=256,$$

而

$$2^{\left(2^{(2^2)}\right)}=2^{16},$$

因此$N_4=2$. 类似于

$$(2^{2^{2)^{(2^{2^{2)}}}}}$$

的式子是不允许的，因为其中的括号不是一个套一个. 因此，只能把每个新的 2 添在较低次阶梯的顶部或底部. 例如当 $n=5$时，得

$$(256)^2=(2^8)^2=2^{16},\ (2^{16})^2=2^{32},$$

$$2^{(256)}=2^{256},\quad 2^{(2^{16})},\ N_5=4.$$

因此

$$N_{n+1}=2N_n,$$

即

$$N_n=2^{(n-3)},\ n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots.$$

显然，把 2 添在阶梯顶部所得的数比把 2 添在阶梯底部所得的数小得多.

47. 如果把数 6 的所有因数的倒数相加，那么得到

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2.$$

求出类似的和也等于 2 的另外两个数.

解 设 1，a，b，…，n 是数 n 的按增加次序写成的

因数．设等式

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{n}=2$$

成立．两边乘以 n，得

$$\frac{n}{a}+\frac{n}{b}+\cdots+1=n,$$

其中左边是 n 的按减少次序写成的所有因数之和．这表示 n 是一个完全数．6 以后的完全数是28和496．

48. 化简 $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ ．

解 将分子和分母同乘以 $2^{\frac{3}{2}}$，得

$$\frac{(8+2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(5-2\sqrt{15}+3)^{\frac{3}{2}}}{(12+2\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(7-2\sqrt{35}+5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}$$

$$=\frac{2(5\sqrt{5}+9\sqrt{5})}{2(21\sqrt{5}+5\sqrt{5})}=\frac{7}{13}.$$

49. 证明：没有一种进位制能使一个三位数 $\overline{aaa}$ 满足关系式 $\overline{aaa}=a^3$．

证 在任意的进位制中，任一数字 a 总是小于这种进位制的底数 r．而

$$ar^2+ar+a=a^3,$$

即 $$r^2+r+1=a^2.$$

因此，原等式无论 $a(\neq 0)$ 与 r 取何值都不成立．

50. 证明：数 3^n 不能表示为两个正整数的平方和．

证 不失一般性，可设 k 为使等式

$$x^2+y^2=3^k$$

成立的最小整数，并且从问题条件可得 $k>0$. 于是 x^2+y^2 可被 3 整除，从而得出 x 和 y 应被 3 整除. 就是说

$$x=3m,\quad y=3n,$$

$$(3m)^2+(3n)^2=3^k.$$

但是这时

$$m^2+n^2=3^{k-2},$$

这与 k 的最小性矛盾.

51. 试求这样的直角三角形，使它的各边长可用整数表示，并且表示三条边长的所有九个数字都不相同.

解 如果试图在三边边长为互质整数的三角形中寻找所需要的三角形，就不会成功. 但是满足题目条件的三角形毕竟是存在的. 例如可取

$$182(3,\ 4,\ 5)=546,\ 728,\ 910.$$

另一解是

$$178(3,\ 4,\ 5)=534,\ 712,\ 890.$$

52. 试阐明下列命题是否正确：如果树的数量比每棵树的叶数多，那么至少有两棵树的叶数是相同的.

解 因为 n 个不同的非负整数 0，1，2，…，$n-1$ 中每一个都小于 n，所以命题显然不正确.

但是，如果这些树中没有一棵是完全无树叶的，那么命题就是正确的. 因为由数1，2，…，$n-1$组成的集合中，元素的个数小于 n. 如果从这个集合中取出 n 个任意的数，那么其中显然有两个相同的数.

本题是一个纯粹的狄利克来原理，详见附录.

53. 设 S 和 T 是两个集合. P 表示命题：集合 S 中至

少有两个元素包含在集合T中．已知否命题$\overline{P}$为：集合S中至少有两个元素不包含在集合T中．求S的元素的个数．

解 由问题的条件可知，集合S包含3个元素．

标准的否命题是：集合T所包含的集合S的元素不多于一个．设S包含m个元素．于是$\overline{P}$可以改述为：S中至少有$m-1$个元素不包含在T中．利用问题的条件的第二部分，可得

$$m-1=2.$$

因此，$m=3$．

54．把整数集合$\{1, 2, 3, \cdots, 16\}$分成两类，每类八个数，使由第一类中各对数的（$C_8^2=28$个）和组成的集合与由第二类中相应的和组成的集合相等．

解 把16个数排成正方形表

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

可以看出，每行是一个公差为1的等差数列，每列是一个公差为4的等差数列．因此，主对角线上任意两数之和至少与主对角线外的两数之和相等．于是所求的两类数是

A：1　4　6　7　10　11　13　16

B：2　3　5　8　9　12　14　15

写出每类中的所有的28个和：5，7，8，10，11(2)，12，13，14(2)，15，16，17(4)，18，19，20(2)，21，22，23(2)，24，26，27，29．

可以看出，与这个数列两端等远的两项之和是一个常

数，等于

$$34=2(1+16).$$

55. 证明：如果对于 x 的四个不同整数，整系数多项式

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的值都是7，那么对于 x 的所有值，这个多项式的值恒不为14.

证 设当

$$x=a,\ x=b,\ x=c,\ x=d$$

时，$P(x)=7$，其中a，b，c，d都是整数. 那么$P(x)-7$有四个整数根 a，b，c，d，这就是说，$P(x)-7$ 可被 $x-a$，$x-b$，$x-c$，$x-d$整除. 于是

$$P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)q(x),$$

其中$q(x)$为其余的因式（可能为常数）.

设当 $x=A$ 时 $P(x)=14$，即以 $x=A$ 代入上式，由 $P(A)=14$，可得

$$7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)q(A).$$

这是不可能的. 因为$A-a$，$A-b$，$A-c$，$A-d$都不相同，而 7 不能表示成四个不同因数的乘积.

56. 试证：当$n=0$，1，2，3，…，1945时，多项式 $1492^n-1770^n-1863^n+2141^n$可被1946整除.

证 为证明本题，需要知道的是x^n-y^n当$n=0$，1，2，…时可被$x-y$整除. 设

$$F(n)=1492^n-1770^n-1863^n+2141^n,$$

因为

$$2141-1863=1770-1492=278,$$

所以当 n 为任意正整数时，$F(n)$都可被278整除. 类似地

$$2141-1770=1863-1492=371,$$

此数与278互质. 因此$F(n)$恒可被

$$278 \cdot 371 = 1946 \cdot 53$$

整除，自然可被1946整除.

57. 证明：当 n 为任意正整数时，

$$a^{n+1} - n(a-1) - a$$

可被$(a-1)^2$整除.

证 设

$$\begin{aligned} f(a,\ n) &= a^{n+1} - n(a-1) - a \\ &= a(a^n - 1) - n(a-1) \\ &= (a-1)[a(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1) - n]. \end{aligned}$$

因为当$a=1$时，中括号内的多项式的值为 0，所以这个多项式可被$a-1$整除. 因此，$f(a,\ n)$可被$(a-1)^2$整除.

58. 证明：当 n 为大于 2 的整数时，两数2^n-1与2^n+1中，如果其中一数是素数，那么另一数一定是合数.

证 整数2^n不能被 3 整除. 如果2^n被 3 除时余 1，那么2^n-1可被 3 整除；如果2^n被 3 除时余 2，那么2^n+1可被 3 整除. 因此，在任何情况下，2^n-1或2^n+1必有一数为 3 的倍数. 所以，当$n>2$时（即当2^n-1与2^n+1都大于 3 时），2^n-1与2^n+1不可能都是素数，就是说，一个是素数，另一个是合数.

59. 证明：在任何底数大于 5 的进位制中，

$$1110 \cdot 1111 \cdot 1112 \cdot 1113 = 1235431^2 - 1.$$

证 原式是下列代数恒等式的特殊情况：

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b) = (a^2+3ab+b^2)^2 - b^4$$

式中$a = r^3 + r^2 + r$（r是进位制的底数），$b=1$. 因此

$$a^2 + 3ab + b^2 = r^6 + 2r^5 + 3r^4 + 5r^3 + 4r^2 + 3r + 1.$$

因为没有一个系数大于 5，所以本题的等式在任何底数大于 5 的进位制中都是正确的.

60. 证明：当x为任意整数时，

$$x^9-6x^7+9x^5-4x^3$$

可被8640整除.

证 n个连续整数的乘积可被n整除，而且四个连续整数的乘积可被2^3整除.其次，

$$\begin{aligned}N&=x^9-6x^7+9x^5-4x^3\\&=[(x-2)(x-1)x][(x-1)x(x+1)][x(x+1)(x+2)]\\&=[(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)][(x-1)x][x(x+1)]\\&=[(x-2)(x-1)x(x+1)][(x-1)x(x+1)(x+2)]x.\end{aligned}$$

在第一个分解式中，每个中括号内的值可被3整除，这就是说，N可被3^3整除．由第二个分解式可知，N可被5整除.在第三个分解式中，每个中括号内的值可被2^3整除,因而N可被2^6整除.

因此，当x为任意整数时，数N可被

$$2^6\cdot3^3\cdot5=8640$$

整除.

61. 设x和y都是正数，分数$\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$和$\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$哪个大?

解 为了回答问题，只要注意

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y>x+y-\frac{2xy}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

62. 如果$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，试求$f(x^5)$除以$f(x)$的余数.

解 因为

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1,$$

所以

$$(x-1)f(x)=x^5-1.$$

其次，

$$f(x^5)=(x^{20}-1)+(x^{15}-1)+(x^{10}-1)+(x^5-1)+4+1.$$

但是，x^5-1是上述每个括号的因式，这就是说，$f(x)$是上述每个括号的因式，因此余数为5：

$$f(x^5)=[f(x)\text{的倍式}]+5.$$

63. 当a为怎样的整数时，多项式$x^{13}+x+90$可被x^2-x+a整除？

解 设

$$f(x)=x^2-x+a,\ g(x)=x^{13}+x+90.$$

于是

$$f(0)=a,\ f(1)=a,\ g(0)=90,\ g(1)=92.$$

因此，90和92的最大公因数2应被a整除．其次，

$$f(-1)=a+2,\ g(-1)=88.$$

因此，a既不等于1，又不等于-2．又因

$$f(-2)=a+6,\ g(-2)=-8104,$$

故$a\neq-1$．因此$a=2$，或者a根本不存在，因为

$$\frac{x^{13}+x+90}{x^2-x+2}=x^{11}+x^{10}-x^9-3x^8-x^7+5x^6+7x^5-3x^4$$
$$-17x^3-11x^2+23x+45,$$

所以 $a=2$.

64. 三个正数x，y，z中没有一个小于三个正数a，b，c中最小的数．x，y，z中没有一个大于a，b，c中最大的数；又已知$x+y+z=a+b+c$，$xyz=abc$．求证：集合$\{x, y, z\}$与集合$\{a, b, c\}$相等．

证 因为

$$x+y+z=a+b+c,\ xyz=abc,$$

所以

$$
\begin{aligned}
& abc(ab+bc+ca-xy-yz-zx) \\
=& bc(x-a)(y-a)(z-a) \\
=& ca(x-b)(y-b)(z-b) \\
=& ab(x-c)(y-c)(z-c).
\end{aligned}
$$

如果最后三个表达式中没有一个为0，那么其中一个是正的，其余两个是负的.因此，它们不能相等.所以，每个表达式一定包含因数0，从而集合$\{x, y, z\}$和集合$\{a, b, c\}$相等.

65. 当n为怎样的正整数时，n^4+n^2可被$2n+1$整除？

解
$$
f(x)=\frac{n^4+n^2}{2n+1}=\frac{n^2(n^2+1)}{2n+1}=\frac{n^2}{4}\left(\frac{4n^2+4}{2n+1}\right)
$$
$$
=\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(2n-1+\frac{5}{2n+1}\right).
$$

显然，n和$2n+1$的最大公因数为1．所以，当$\frac{5}{2n+1}$为整数时，即当

$$
n=2,\ 0,\ -1\text{或}-3
$$

时，$f(n)$才是整数.

因此，$n=2$是使$f(n)$为整数的唯一正整数. 这时$f(n)=4$.

66. 设有六个数a，b，c，d，e，f. 如果

$$
a+b+c=0,\ d+e+f=0,
$$

试证

$$
\frac{a^3+b^3+c^3}{d^3+e^3+f^3}=\frac{abc}{def}.
$$

证 因为

$$a+b+c=0,\ d+e+f=0,$$
所以

$$(a+b)^3=(-c)^3,$$
$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc.$$
类似地，

$$d^3+e^3+f^3=-3de(d+e)=3def.$$
最后有

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{d^3+e^3+f^3}=\frac{abc}{def}.$$

67. 不用分组法把下式因式分解：
$x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+x^4y^4-x^3y^5+x^2y^6-xy^7+y^8$.

解 写出下列等式：

$$\begin{aligned}x^9+y^9&=(x+y)(x^8-x^7y+x^6y^2-\cdots+y^8)\\&=(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)\\&=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6),\end{aligned}$$
由此得

$$x^8-x^7y+x^6y^2-\cdots+y^8=(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6).$$

68. 设 a 和 b 都是整数，都与 3 互质，并且 $a+b=3k$（k为整数）. 求证：多项式x^a+x^b+1可以因式分解.

证 设

$$f(x)=x^a+x^b+1=x^a+x^{3k}x^{-a}+1.$$
1 的立方根为

$$1,\ \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \omega^2.$$
因为 a 与 3 互质，所以，或者

$$\omega^a=\omega,\ \omega^{-a}=\omega^2,$$
或者

$$\omega^{a}=\omega^{2}, \quad \omega^{-a}=\omega.$$

在这两种情形下

$$f(\omega)=f(\omega^{2})=1+\omega+\omega^{2}=0.$$

因此，

$$(x-\omega)(x-\omega^{2})=x^{2}+x+1$$

是多项式$x^{a}+x^{b}+1$的因式.

69. 试求这样的所有整数x，y，z，使得$4^{x}+4^{y}+4^{z}$是一个完全平方数.

解 首先注意，x，y，z不能是负数.否则，$4^{x}+4^{y}+4^{z}$不是整数. 如果

$$x\leqslant y\leqslant z,$$

那么由$4^{x}+4^{y}+4^{z}$是完全平方数可知，存在这样的正整数m和正奇数t，使

$$1+4^{y-x}+4^{z-x}=(1+2^{m}t)^{2}.$$

因此

$$4^{y-x}(1+4^{z-y})=2^{m+1}t(1+2^{m-1}t),$$

由此可得

$$m=2y-2x-1.$$

于是

$$\begin{aligned} t-1&=4^{y-x-1}(4^{z-2y-x+1}-t^{2})\\ &=4^{y-x-1}(2^{z-2y+x+1}+t)(2^{z-2y+x+1}-t). \end{aligned}$$

现在来证明

$$t=1, \quad z=2y-x-1.$$

如果$t>1$，那么

$$4^{y-x-1}(4^{z-2y+x+1}-t^{2})>0.$$

由此得

$$4^{z-2y+x+1}>t^{2}>1,$$

$$z-2y+x+1>0.$$

这就是说，等式

$$t-1=4^{y-x-1}(2^{z-2y+x+1}+t)(2^{z-2y-x+1}-t)$$

中的两个括号内的数都是奇数. 因为右边所有的数是大于或等于 1 的正整数，所以

$$t-1\geqslant(2^{z-2y+x+1}+t)>1+t,$$

但这是不可能的. 因此

$$t=1,\ z=2y-x-1.$$

这样，原方程的所有整数解可以表示成为**集合**

$$\{x,\ y,\ 2y-x-1\},$$

其中 x，y 是任意的. 当 x，y，z 取这些值的时候，本题的平方数是 $(2^x+2^{2y-x-1})^2$.

70. 证明：在四次方程

$$(\quad)x^4+(\quad)x^3+(\quad)x^2+(\quad)x+(\quad)=0$$

的各个括号内任意填入数 1，-2，3，4，-6（每个括号只填入一个数）后，方程恒有一个有理根.

证 对于任一多项式 $f(x)$，数 $f(1)$ 等于各个系数之和. 如果这个和等于 0，那么 $f(x)$ 可被 $x-1$ 整除. 因为

$$1-2+3+4-6=0,$$

由此可知，$x=1$ 是已知方程的根，这与五个已知数以怎样的次序填入括号无关.

71. 一个数学教授在黑板上写出一个整系数多项式 $f(x)$，并说："今天是我儿子的生日. 如把他的年龄 A 代入这个多项式的 x 上去，则得等式 $f(A)=A$. 又注意到 $f(0)=P$，这里 P 是一个大于 A 的素数." 问他的儿子几岁.

解 因 $f(0)=P$，故

$$f(x)=xq(x)+P,\ f(A)=Aq(A)+P=A.$$

于是P可被A整除．因$P>A$，且P是素数，故只能$A=1$．这就是说，教授的儿子刚满周岁．

这个教授可以写出无限多个这种多项式，例如

$$x^3-3x^2+3.$$

72．小明对我说："有一个含x的多项式，我的岁数正好是它的根．就是说，如果用刚刚满的岁数代入x，这个多项式的值就等于0．"我说："这大概不难算．我们有一个整系数方程，要求它的整数根．我取$x=7$，结果是77，不行．"小明反问道："难道我才那么小吗？"我说："我再取大一点的整数代入，得85，也不是0啊！"他说："你真是开玩笑，你明明知道我的年龄还要大些．"请问小明几岁？

解 注意，如果取一个整系数多项式$f(x)$和两个不同的整数a与b，那么$f(a)-f(b)$可被$a-b$整除．以A表示小明的岁数，以N表示我对方程所取的那个较大的数．于是

$$85-77=8$$

可被$N-7$整除；77可被$A-7$整除；85可被$A-N$整除，并且不等式

$$7<N<A$$

成立．由此可知，N是数8，9，11，15中的一个数，A是数14,18,84中的一个数．因为85可被$A-N$整除，所以$N=9$．而$A=14$，因此，小明年满14岁．本题的多项式是

$$(x-7)(x-9)(x-14)Q(x)-3x^2+52x-140.$$

73．设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中

$$1\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0.$$

其次设λ是f的复数根，使$|\lambda|\geqslant 1$．证明：λ等于1的某一根．

证 因为λ是多项式$(x-1)f(x)$的一个根，所以

$$\lambda^{n+1}=(1-a_1)\lambda^n+(a_1-a_2)\lambda^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\lambda+a_n.$$

由三角形不等式

$$|\lambda|^{n+1}\leqslant(1-a_1)|\lambda|^n+(a_1-a_2)|\lambda|^{n-1}+\cdots$$
$$+(a_{n-1}-a_n)|\lambda|+a_n\leqslant(1-a_1)|\lambda|^n+(a_1-a_2)|\lambda|^n$$
$$+\cdots+(a_{n-1}-a_n)|\lambda|^n+a_n|\lambda|^n=|\lambda|^n$$

可得$|\lambda|\leqslant 1$．但是根据条件，$|\lambda|\geqslant 1$，于是$|\lambda|=1$，三角形不等式变成等式．因此，所有的数

$$(1-a_1)\lambda^n,\ (a_1-a_2)\lambda^{n-1},\ \cdots,\ (a_{n-1}-a_n)\lambda,\ a_n$$

可利用某个复数乘以非负因数而得到．此外，这些数不全为0，否则可得出矛盾的关系式

$$1=a_1=a_2=\cdots=a_n=0.$$

如果在这些数中只有一个不为0，那么下列等式成立：

$$1=a_1=\cdots=a_r,\ a_{r+1}=\cdots=a_n=0,$$
$$\lambda^n+\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda^{n-r}=0,$$
$$\lambda^r+\lambda^{r-1}+\cdots+1=0,$$
$$\lambda^{r+1}=1.$$

如果有两个这样的数不为0，那么把它们相除，当某个整数$s\geqslant 1$时，得到$\lambda^s>0$．因此，$\lambda^s=1$．

74．不用微分法，求下列函数的最小值：

$$f(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b).$$

解 如果把a换为$-a$，或把b换为$-b$，或把x换为$-x$，那么函数$f(x)$不变．因此，不失一般性，可设x，a，b都

不是负数，此外设$a \geqslant b$.

显然，$f(x)$的最小值要在$f(x)$为负值的地方去找，即在

$$a-b<x<a+b$$

处去找．在这些条件下，存在一个边长为$2a$，$2b$和$2x$的三角形．以S表示它的面积，可知

$$f(x)=-S^2.$$

因此，当固定的两边$2a$和$2b$之间的夹角为直角时，S是最大的，可求出

$$x^2=a^2+b^2,$$

$$S_{\max}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2ab.$$

因此

$$f_{\min}=-S^2_{\max}=-4a^2b^2.$$

75. 当n为任意自然数时，以$r_s(n)$表示方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=n$$

的整数解x_1，x_2，…，x_n的个数．其次设

$$f_s=\frac{r_s(n)}{2s}.$$

已知当$s=1$，2，4，8时，函数f_s满足乘法法则，即对于任意两个互质的自然数m和n，等式

$$f_s(mn)=f_s(m)f_s(n)$$

成立．求证，无论对于怎样的另一个值s，f不满足乘法法则．

证 可以证明，当$s\neq 1$，2，4，8时，

$$f_s(2)f_s(3)\neq f_s(6).$$

注意，若x_1，x_2，…，x_s是满足方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=2$$

的整数解，则其中的 $s-2$个解为0，其余的两个解为± 1，因此

$$r_s(2)=4C_s^2=2s(s-1).$$

同理

$$r_s(3)=8C_s^3=\frac{4}{3}s(s-1)(s-2).$$

其次，若整数x_1，x_2，…，x_s满足方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=6,$$

那么，或者其中的$s-6$个整数解为0，其余的6个整数解为± 1；或者其中的$s-3$个整数解为0，其中的两个整数解为± 1，其余的整数解为± 2. 因此

$$\begin{aligned}r_s(3)&=64C_s^6+8sC_{s-1}^2\\&=\frac{4}{45}s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)\\&\quad+4s(s-1)(s-2)\ .\end{aligned}$$

于是

$$f_s(2)=s-1,\ f_s(3)=\frac{2}{3}(s-1)(s-2),$$

$$\begin{aligned}f_s(6)&=\frac{2}{45}(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)\\&\quad+2(s-1)(s-2).\end{aligned}$$

经过简单的计算后，得到表达式

$$f_s(6)-f_s(2)f_s(3)=\frac{2}{45}s(s-1)(s-2)(s-4)(s-8),$$

当$s\neq 0$，1，2，4，8时，上式不为0.

76. 求证：如果m和n都是正整数，那么$\sqrt[n]{m}$和$\sqrt[m]{n}$中的最小值不能大于$\sqrt[3]{3}$.

证1 设$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$. 易证，当$x\to 0$时，$f(x)\to 0$；当$x\to\infty$时，$f(x)\to 1$.

因为$f(x)$和$\ln f(x)$同时增减，而

$$[\ln f(x)]'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln\frac{e}{x}}{x^2}$$

的符号与$e-x$的符号相同，所以，当x从0变到e时，$f(x)$是增加的；当x从e变到∞时，$f(x)$是减小的. 因此，当整数$k=1, 2, \cdots$变化时，$f(k)$的最大值

$$C=\max(f(2),\ f(3)).$$

因$3^2>2^3$，故$f(3)>f(2)$，由此得$C=3^{\frac{1}{3}}$. 于是对于所有的正整数m，$f(m)\leqslant 3^{\frac{1}{3}}$. 如果$n\geqslant m$，那么

$$m^{\frac{1}{n}}\leqslant m^{\frac{1}{m}}\leqslant 3^{\frac{1}{3}}.$$

因此，

$$\min(m^{\frac{1}{n}},\ n^{\frac{1}{m}})\leqslant 3^{\frac{1}{3}}.$$

证2 首先设$m=n$，于是需要证明

$$\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}\quad \text{或} 3^n\geqslant n^3,$$

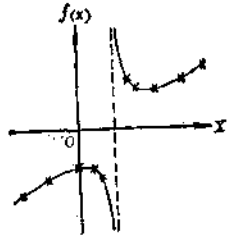
但是当$n\geqslant 1$时用归纳法易证后一不等式. 实际上，当$n=1$和$n=2$时是显然的；当$n\geqslant 3$时

$$3^n\geqslant n^3\Rightarrow 3^{n+1}\geqslant 3n^3=n^3+3n^2+3n+(n-3)n^2+(n^2-3)n$$
$$\geqslant(n+1)^3\Rightarrow 3^{n+1}\geqslant(n+1)^3.$$

其次设$1\leqslant n<m$，于是

$$n^{\frac{1}{n}}\leqslant n^{\frac{1}{n}}\leqslant 3^{\frac{1}{3}}.$$

77. 不用微积分 方 法，求$\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$的极大值与极小值.



解 作变换

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$$

$$=\frac{1}{2}(x-1+\frac{1}{x-1})$$

$$=\frac{x^2}{2(x-1)}-1,$$

两个互为倒数的数，在它们等于 ±1 时，它们的和可以取到绝对值的极小. 由上式，当

$$x-1=\pm 1$$

时，即当$x=2$或$x=0$时，$f(x)$的绝对值最小. 由 $f(x)$ 的最后一个表达式易见，$f(x)$当$x>2$时无上界，当 $x<0$ 时无下界，当 $x=1$ 时无定义.

由此可见，$f(x)$ 在点 $x=2$ 上有局部极小值 1，在点 $x=0$上有局部极大值 -1.

√**78**. 试求这样的整数对，使它们的和等于它们的乘积.

解 设 x，y 为所要求的数，则

$$x+y=xy,$$

或

$$xy-x-y+1=1,$$

$$(x-1)(y-1)=1.$$

因为1只能以两种方式表示成为两数之积，所以

$$x-1=1,\ y-1=1$$

解得

$$x=2, \qquad y=2.$$

又

$$x-1=-1, \ y-1=-1,$$

解得

$$x=0, \ y=0.$$

79. 二年级与三年级的选手参加一次棋赛．每个选手都必须与其他选手比赛一次，胜一次得 1 分．已知三年级的选手为二年级的选手的十倍，而其所得总分只是二年级的$\frac{9}{2}$倍．共有几位二年级的选手参加比赛？他们共得了几分？

解 设 n 为二年级选手的人数，m 为他们共得的分数，则三年级选手的人数为$10n$，他们共得的分数为$\frac{9}{2}m$．

显然，比赛次数一定等于共得的分数．但是每个选手都必须与其他选手比赛一次，因而比赛次数为

$$\frac{11n(11n-1)}{2}.$$

于是有方程

$$\frac{11}{2}m=\frac{11n(11n-1)}{2},$$

$$m=n(11n-1).$$

但是，每个选手比赛$11n-1$次(因为共有 $11n$ 人参加)，而n个二年级选手要得到$n(11n-1)$分，则每个选手都必须保持全胜，这只有当$n=1$时才可能发生．因此只有一个二年级选手参加比赛，他得了10分．

80. 如果把两条电阻各为 x 和 y 的导线并联起来，那么可以用下列公式求出这段电路的电阻 z：

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

其中x，y，$z>0$．试求满足上式的正整数x，y，z．

解 因为x，y，z都是正数，所以

$$x>z,\ y>z.$$

设

$$x=z+u,\ y=z+v\ (u,\ v>0).$$

那么可把方程

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

化为$z^2=uv$.

因此，对于任意的z，只要把z^2分解成为两个正整数u与v的乘积就行了．由此得到

$$x=z+u,\ y=z+v.$$

81．解方程$x^{x+1}+x^x=1$.

解 把原方程化为

$$x^x(x+1)=1,$$

两边取自然对数，得出等价方程

$$f(x)=x\ln x+\ln(x+1)=0.$$

因为当所有的$x>0$时$\ln(x+1)<x$，所以当$0<x<\frac{1}{e}$时

$$f(x)<x\ln x+x=x\ln ex<0.$$

当$x>\frac{1}{e}$时，

$$f'(x)=\ln x+1+\frac{1}{1+x}=\ln xe+\frac{1}{1+x}>0.$$

就是说，当$x>\frac{1}{e}$时，$f(x)$单调增加．因此，原方程的实根不多于一个．

近似计算得根 $x\approx0.43605$.

82. 一个人在1937年发现，他在 x^2 年是x岁．他说："如果把我的出生月数加到现在的岁数中去，那么就得到生日日数的平方．"这个人是在什么时间出生的？

解 显然，此人在1937年还活着，于是他在1849年不可能是43岁（$1849=43^2$）．因此，他在1936年是44岁（$44^2=1936$）．由已知条件可知

$$44+m=d^2,\ 0<m<13.$$

唯一的整数解是 $m=5$，$d=7$．因此，这个人出生于1892年5月7日．

83. 美国某公司要求所属350个职员加班，并且提出给每个男职员加班工资10美元，给每个女职员加班工资8.15美元．全部女职员都同意加班，而部分男职员却拒绝了．在计算时已经弄清楚了，加班工资总额与男职员人数无关．付给全部女职员的加班工资总额是多少？

解 设m是男职员总数，x是拒绝加班的男职员的百分数．于是付出的加班工资总额为

$$T=8.15(350-m)+10(1-x)m=2852.50+m(1.85-10x).$$

只有当 $x=0.185$ 时，T的值才与m无关．此外，已知 $m<350$，因此m和$0.185m$都是整数．这就是说，$m=200$．由此得出，150个女职员共得加班工资1220.50美元．

84. 一位学生在上代数课时打瞌睡．这堂课末了时他醒过来，老师正在解释黑板上写着的作为家庭作业的一个20次方程．他刚好听见最后一句话："……我刚才讲了，所有的根都是正实根．"他试图迅速地把这道题抄下来，但在老师擦完黑板前，他只抄了该方程的前两项 $x^{20}-20x^{19}$．后来，他又回忆起常数项为$+1$．你能帮助这个学生解这个方

程吗?

解 首先指出，不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ (x_i\geqslant 0)$$

只有当x_i彼此相等时才能使等号成立．这个不等式的左边是算术平均值，右边是几何平均值．

其次考虑本题的 20 次方程．因为它的所有的根都是正的，由根与系数的关系（参阅附录中的韦达定理）可知，这20个根的算术平均值等于

$$-\frac{(-20)}{20}=1,$$

而几何平均值等于

$$(+1)^{\frac{1}{20}}=1,$$

这两个值相等．由上述不等式的性质，可知这20个根都等于1．

85．证明：方程$x^2-3y^2=17$没有整数解．

证 任意一个整数x可以写成$3n$或$3n\pm1$的形式．如果把这些形式的数x代入方程

$$x^2-3y^2=17,$$

那么分别得到

$$3(3n^2-y^2)=17,$$

$$3(3n^2\pm2n-y^2)=16.$$

因为无论是 17 或 16 都不能被 3 整除，所以原方程没有整数解．

86．如果

$$\frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3}=\frac{199}{242},$$

试求 n.

解 首先注意，如果

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

那么显然

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

把这个变换应用到原方程的各分式上，得

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+(2n)^3}{2^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}=\frac{441}{242}.$$

再利用公式

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

可以得到

$$\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4}:\frac{8n^2(n+1)^2}{4}=\frac{441}{242}=\frac{21^2}{2\cdot 11^2},$$

$$\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}=\frac{21^2}{11^2}.$$

由此可见 $n=10$（负数不合题意）.

87. 一个人死后，给两个儿子留下遗产——一群牛. 儿子们将这群牛出卖，每头牛卖的钱数（单位：元）和这群牛的头数一样. 他们用卖牛所得的钱，以每头10元的价格买进一批绵羊和一头价格不到10元的小羊. 然后他们各自分得头数相同的牲畜. 问全部分到绵羊的兄弟应付给另一个兄弟多少钱，才能使每人得到相同的遗产.

解 设 x 是牛群的头数，y 是绵羊的头数，z 是小羊的价格. 于是

$$x^2=10y+z,$$

其中 y 是奇数，$z<10$.

因为一个整数的平方的十位数字为奇数的情形只能在个位数字为 6 时才出现，所以 $z=6$. 因此，全部分到绵羊的兄弟应付给另一个兄弟 2 元钱.

88. 在下列各对数中，有一对且只有一对不满足方程 $187x-104y=41$，是哪一对?

(1) $x=3$, $y=5$; (2) $x=107$, $y=192$;

(3) $x=211$, $y=379$; (4) $x=314$, $y=565$;

(5) $x=419$, $y=753$.

解 因为方程左边两项之差为奇数41，所以这两项中的一项应是奇数，另一项应是偶数. 因为$104y$是偶数，所以$187x$应是奇数，就是说 x 应是奇数. 因此，一对数

$$x=314,\quad y=565$$

不满足原方程.

89. 不去括号解方程

$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

解 把 $x=\dfrac{y}{12}$代入原方程，得

$$(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=120=2\cdot3\cdot4\cdot5.$$

此方程的任一整数根都使它的左边变成四个连续整数的乘积. $y=-1$和$y=6$就是两个这样的根.

现在利用韦达定理来求这个方程的根:

$(-1)\ 6r_1r_2=-120+(-1)(-2)(-3)(-4)$,

由此得

$$r_1r_2=16;$$

$$-(-1+6+r_1+r_2)=-1-2-3-4,$$

从而

$$r_1+r_2=5.$$

因此，r_1和r_2是方程

$$y^2-5y+16=0$$

的根，即r_1和r_2等于

$$\frac{5\pm\sqrt{39}\,i}{2}.$$

所以，原方程的四个根为

$$-\frac{1}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{5\pm\sqrt{39}\,i}{24}.$$

90. 证明方程

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$$

没有实根.

证 如果这个方程有实根，那么它应等于负数，例如 $-y$. 但是

$$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>e^{-y}>0,$$

因此，原方程没有实根.

91. 解方程 $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$.

解 把$x=0$和$x=a+b$直接代入方程，可知它们是原方程的解. 此外，如果

$$m+n=\frac{1}{m}+\frac{1}{n},$$

那么

$$(m+n)(mn-1)=0.$$

因此，当$x\neq0$和$x\neq a+b$时，

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=0,$$

即

$$(a+b)x=a^2+b^2.$$

因此,原方程的第三个根是 $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

92. 一个女孩在商店里买了 x 株月季花，共付出 y 元（x 和 y 都是整数）．当她打算离开商店时，卖花人告诉她说："如果您再多买10株月季花，那么所有这些（$10+x$）月季花，我仅以 2 元卖给您．这样，您买每打月季花可节省 0.80元．" 试求 x 和 y．

解 因为 y 是小于 2 的整数，所以 $y=1$．其次，用分表示一株月季花的价格，得

$$\frac{100}{x}-\frac{200}{x+10}=\frac{80}{12},$$

化简后得

$$x^2+25x-150=0,$$

这个方程的唯一正根是 $x=5$，这就是女孩原来买的月季花的株数．

93. 化简 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$．

解 设

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a,\ \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=b,\ a+b=x,$$

那么

$$\begin{aligned}x^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)\\&=4+3\sqrt[3]{-1}\ x.\end{aligned}$$

就是说

$$x^3+3x-4=0.$$

此方程的唯一实根是 1．

94. 解方程$x=(x-\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}+(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$.

解 设

$$b=(x-\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}},\quad a=(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}},$$

那么 $$x=a+b. \tag{1}$$

因$x\neq 0$，故

$$b-a=\frac{b^2-a^2}{b+a}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}. \tag{2}$$

将(1)与(2)相加，得

$$2b=x-\frac{1}{x}+1=b^2+1,$$

从而$b=1$. 因此，

$$x-\frac{1}{x}=1\quad x^2-x-1=0,$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

但是只有 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$满足原方程.

95. 解 方 程 $(6x+28)^{\frac{1}{3}}-(6x-28)^{\frac{1}{3}}=2$.

解 如果$a+b+c=0$，那么由66题知

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

因此，

$$(6x+28)-(6x-28)-8=3[(6x+28)(6x-28)\cdot 8]^{\frac{1}{3}},$$

$$48=6(36x^2-784)^{\frac{1}{3}},$$

$$512=36x^2-784,$$

$$x^2=36,$$

$$x = \pm 6.$$

96. 设 x, y, z, v 组成一个等差数列. 证明：三次方程$x^3+y^3+z^3=v^3$的所有整数解都是$x=3$, $y=4$, $z=5$, $v=6$的倍数.

证 设

$$x=a-d,\ y=a,\ z=a+d,\ v=a+2d.$$

于是

$$(a-d)^3+a^3+(a+d)^3=(a+2d)^3.$$

去括号、合并同类项后，得方程

$$2a^3-6a^2d-6ad^2-8d^3=0,$$

两边除以 2，得

$$a^3-3a^2d-3ad^2-4d^3=0.$$

因为 a 和 d 都是整数，所以它们的比$\dfrac{a}{d}=r$是有理数. 以rd代入方程中的 a，得

$$(rd)^3-3(rd)^2d-3(rd)d^2-4d^3=0,$$

$$r^3d^3-3r^2d^3-3rd^3-4d^3=0.$$

两边除以d^3(因为$d\neq0$)，得

$$r^3-3r^2-3r-4=0,$$

$$(r-4)(r^2+r+1)=0.$$

由此求得

$$r=4,\ r=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

抛弃复根（因为如上所述，r应当是有理数），得到唯一的可能值$r=4$. 因此$a=4d$，从而

$$x=a-d=3d,\ y=a=4d,$$

$$z=a+d=5d,\ v=a+2d=6d.$$

97. 设a, b, c是方程$x^3+qx+r=0$的根. 试写出以数

$\frac{b+c}{a^2}$，$\frac{c+a}{b^2}$，$\frac{a+b}{c^2}$为根的三次方程.

解 因为原方程中x^2的系数为0，由此得

$$a+b+c=0,$$

就是说

$$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c.$$

换言之，必须求出以原方程的根的负倒数

$$-\frac{1}{a},\ -\frac{1}{b},\ -\frac{1}{c}$$

为根的方程. 因此，应当以相反的次序直接写出原方程的系数，并把在x的偶次项上的系数变号，得出所求的方程

$$rx^3-qx^2-1=0.$$

98. 方程$x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$有多少个负根？

解 原方程可以改写成

$$(x^2-2)^2=5x^3+7x.$$

因为当x为任何负数时，方程左边是一个非负数，而右边是负数，所以原方程不可能有负根.

99. 求方程$y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$的所有整数解.

解 先在方程的两边乘以4，然后在两边加上1，得

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+1=(2y+1)^2. \qquad (*)$$

当$x=-1$时，$y=-1$或0；

当$x=0$时，$y=-1$或0；

当$x=2$时，$y=-6$或5；

当$x=1$时，y不是整数.

这就是原方程的仅有的六个整数解. 实际上，当$x<-1$或$x>2$时，方程（*）的左边大于$(2x^2+x)^2$而小于$(2x^2+x+1)^2$. 因此，在这些范围内没有一个整数x使方程

(*)的左边等于整数的平方.

100. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+yz+zx=11, \\ xyz=6. \end{cases}$$

解 回忆一元三次方程的根与系数之间的关系，可以看出，x，y，z 是下列三次方程的根：

$$a^3-6a^2+11a-6=0.$$

将方程的左边因式分解，得

$$(a-1)(a-2)(a-3)=0,$$

$$a=1,\ 2,\ 3.$$

因为原方程关于 x，y，z 是对称的，所以它的全部解是数 1,2，3的六个置换，即

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3)$$
$$(2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1).$$

√**101.** 三个汽车司机走进路旁的小食店．第一个司机买了四个面包、一杯咖啡和十个包子，共付了1.69元，第二个司机买了三个面包、一杯咖啡和七个包子，共付了1.26元．第三个司机买了一个面包、一杯咖啡和一个包子共付了多少钱？

解 利用前两个司机购买食品的数据，可以组成两个方程：

$$4s+c+10d=169,$$
$$3s+c+7d=126,$$

其中 s,c 和 d 分别表示一个面包，一杯咖啡和一个包子的价钱，以分为单位．第一个方程乘以 2，第二个方程乘以 3，得

$$8s+2c+20d=338,$$
$$9s+3c+21d=378.$$
把后一方程减去前一方程，得
$$s+c+d=40.$$
因此，第三个司机共付出了0.40元.

102. 当 k 为何值时，方程组
$$\begin{cases} x+y=1, \\ kx+y=2, \\ x+ky=3 \end{cases}$$
是相容的？

解 将第二个与第三个方程相加，得
$$x+y+k(x+y)=5.$$
考虑第一个方程，可求出 $k=4$. 对于这个 k，我们有
$$x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{2}{3}.$$

103. 证明：存在唯一的三个不同的正整数，使得它们没有大于1的公因数，并且使其中任意两数之和可被第三个数整除.

证 要求满足下列方程组的三个不同整数：
$$\begin{cases} x+y=mz, \\ y+z=nx, \\ z+x=py, \end{cases}$$
其中 m，n，p 都是正整数. 这个齐次方程组有非零解的条件是
$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -m \\ -n & 1 & 1 \\ 1 & -p & 1 \end{vmatrix}=0.$$

由此得

$$mnp=m+n+p+2.$$

显然，三元数组（2，2，2）满足这个关系式．在任何其它的一个解中，m，n，p三个数之一应等于1．例如设$p=1$，那么

$$mn=m+n+3,$$

显然，（3，3）是此方程的解．在任何其它的一个解中，m，n两数之一应小于3．易知（5，2）也是此方程的一解，并且没有其它的解．因此，存在m，n，p的三个数组，即是（2，2，2），（1，3，3），（1，2，5），此时原方程有非零解（x，y，z）．

这些解分别具有形式

$$(k,\ k,\ k)\quad (k,\ k,\ 2k),\quad (2k,\ k,\ 3k).$$

因此，满足题目条件的唯一的三个数是1，2，3．

104． 解方程组

$$\begin{cases} x+7y+3v+5u=16, & (1)\\ 8x+4y+6v+2u=-16, & (2)\\ 2x+6y+4v+8u=16, & (3)\\ 5x+3y+7v+u=-16. & (4)\end{cases}$$

解 如果把方程(1)中x和u，y和v交换位置，且将右边变号，就得到方程（4）．如果对方程(2)作同样处理，那么就得到方程（3）．因此，

$$u=-x,\ v=-y.$$

将这两个等式代入方程（1）和（2），得

$$\begin{cases} -4x+4y=16,\\ 6x-2y=-16.\end{cases}$$

因此得

$$x=-2,\ y=2,\ v=-2,\ u=2.$$

105. 求出下列方程组的所有解：

$$\begin{cases} x+y+z+w=10, \\ x^2+y^2+z^2+w^2=30, \\ x^3+y^3+z^3+w^3=100, \\ xyzw=24. \end{cases}$$

解 直接检验可以证实，四个数1，2，3，4满足这四个方程. 因为所有的方程关于 x， y， z， w 是对称的，所以数 1,2,3,4 的其余23种排列也是这个方程组的解. 但是这四个方程的次数的乘积为4!，所以这个方程组没有其它的解.

106. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z+u=5, \\ y+z+u+v=1, \\ z+u+v+x=2, \\ u+v+x+y=0, \\ v+x+y+z=4. \end{cases}$$

解 将五个方程相加，并将结果除以 4，得

$$x+y+z+u+v=3.$$

现在只要依次从这个方程减去原方程组的每个方程，就得到要求的解：

$$v=-2,\ x=2,\ y=1,\ z=3,\ u=-1.$$

107. 一个由 n 个 n 元一次方程组成的方程组有一个性质，它的系数组成等差数列. 这个方程组类似于

$$\begin{cases} 6x+9y=12, \\ 15x+18y=21. \end{cases}$$

它有唯一解. 试解此方程组.

解 首先依题意写出方程组

$$\begin{cases} ax_1+(a+d)x_2+(a+2d)x_3+\cdots+[a+(n-1)d]x_n \\ =a+nd, \\ (a+nd+d)x_1+(a+nd+2d)x_2+\cdots+(a+nd+nd)x_n \\ =a+nd+nd+d, \\ \cdots\cdots \\ [a+(n-1)(n+1)d]x_1+\cdots+[a+(n-1)d+(n-1)(n+1)d]x_n \\ =a+(n^2-n-1)d. \end{cases}$$

在这个方程组中，用后一方程减去前一方程，都能得到相同的方程

$$(n+1)dx_1+(n+1)dx_2+\cdots+(n+1)dx_n=(n+1)d.$$

因此，这个方程组从第三个方程开始都是第一、第二两个方程联立的结果.

由此可知，当 $n\geqslant 3$ 时这个方程组的解不是唯一的，它可能没有解，也可能有无穷多个解．现在已知它有唯一解，只能是 $n<3$. 但因 $n>1$，故 $n=2$．于是方程组应是

$$\begin{cases} ax+(a+d)y=a+2d, \\ (a+3d)x+(a+4d)y=a+5d. \end{cases}$$

解得

$$x=-1,\quad y=2.$$

实际上，由两个属于形如

$$(a+3kd)x+[a+(3k+1)d]y=a+(3k+2)d$$

的方程组成的方程组，总有唯一解.

108. 试求下列方程组的所有实数解 x，y，z，w：

$$\begin{cases} x+y+z=w, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w}. \end{cases}$$

解 我们来证明，w一定等于x，y，z中的一个，其余两个未知数一定互为相反数．令

$$s=x+y,\quad p=xy,$$

于是原方程可化为$w-z=s$和

$$\frac{s}{p}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{w}-\frac{1}{z}=\frac{z-w}{zw}=-\frac{s}{zw}.$$

由$\frac{s}{p}=-\frac{s}{zw}$知，不是$s=0$就是$-zw=p$．

若$s=0$，则$y=-x$和$w=z$．若

$$-zw=p=xy,$$

那么$-z$和w是二次方程

$$T^2-sT+p=0$$

的根，此方程的根是x和y．由此得出，不是$w=x$，$-z=y$；就是$w=y$，$-z=x$．

109．求丢番图方程$a^3+b^4=c^5$的任一正整数解．

解 因为

$$2^{24}+2^{24}=2^{25},$$

所以

$$(2^8)^3+(2^6)^4=(2^5)^5.$$

由此得

$$a=256,\quad b=64,\quad c=32.$$

110．证明：丢番图方程$5^x+2=17^y$没有解．

证 由等式

$$(3\cdot2-1)^x+2=(3\cdot6-1)^y$$

可得

$$(-1)^x+2=(-1)^y+3k,$$

由此易见y应是偶数．另一方面，由等式

$$5^x + 2 = (5\cdot 3+2)^y$$

可见$2^y - 2$能被5整除．就是说，$y-1$可被4整除．由此得出y是奇数．所得到的矛盾就证明了所需要的结论．

111．求下列丢番图方程组的正整数解：

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc, \\ a^2 = 2(b+c). \end{cases}$$

解 第一个方程可写成

$$(a-b-c)[a^2+(b-c)^2+ab+bc+ca]=0.$$

因为当a，b，c都是正整数时，第二个因式不能为0，所以

$$a = b + c = \frac{a^2}{2}.$$

因此，方程组的唯一正整数解是

$$a=2,\ b=c=1.$$

112．证明：五元丢番图方程组

$$\begin{cases} a+b+c=x+y, \\ a^3+b^3+c^3=x^3+y^3 \end{cases}$$

有无穷多个整数解，并且这些解具有下列性质：a,b,c 形成等差数列．

证 设

$$a=3d,\ c=2b-3d,$$

于是

$$x+y=3b.$$

第二个方程可写成

$$(x-y)^2 = (b-8d)^2-40d^2.$$

此式在下列条件下成立：

$$x-y=p^2-10q^2,\ b-8d=p^2+10q^2,\ d=pq.$$

因此，可求出下列依赖于两个参数的解系，其中a，b，c形成等差数列：

$$a=3pq,$$
$$b=p^2+8pq+10q^2,$$
$$c=2p^2+13pq+20q^2,$$
$$x=2p^2+12pq+10q^2,$$
$$y=p^2+12pq+20q^2.$$

113. 求和$2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n$.

解 在二进制中，这个和可以用n个1与后面一个0写出．如果把两个1加入这个和，那么在二进制中，可得到用一个1与后面$n+1$个0写成的数，即2^{n+1}．因此，这个和等于$2^{n+1}-2$．

114. 试把分式$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$展开成为幂级数．

解 当$|x|<1$时，可得到下列等式：

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}=\frac{1-x}{1-x^{16}}$$
$$=(1-x)(1+x^{16}+x^{32}+x^{48}+\cdots)$$
$$=1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\cdots.$$

115. 如果把N个相同半径的球这样彼此紧靠着，可以得出一个正三角形（例如在第一行放一个球，在第二行放二个球，在第三行放三个球等等），那么这样的数N叫做三角形数．求证：无穷数列1，11，111，1111，…的每一项是用九进制写成的三角形数．

证 三角形数具有形式$\frac{n(n+1)}{2}$．因此，数1在任何进位制中都是三角形数，其次按归纳法讨论．易见原数列的每一项都可由前一项乘以这种进位制的底数再加上1而得到．如果

在九进制中计算，数列的某一项是三角形数$\frac{n(n+1)}{2}$，那么下一项将是

$$9\cdot\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2},$$

这也是三角形数.

一般说来，如果把以$(2k+1)^2$进制表示的数$\frac{k(k+1)^2}{2}$从右边补写到同种进位制中的数$\frac{n(n+1)}{2}$上去，那么得到

$$\frac{[(2k+1)n+k][(2k+1)n+k+1]}{2}.$$

116. 证明：在八进制中，每个奇数的平方以1作为个位数，并且，如果抛弃这个1，那么剩余的数是某个三角形数.

证 注意

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1=8k+1,$$

因为在两个连续整数中有一个必定是偶数，抛弃1，就相当于将$4n(n+1)$除以八进制的底数8，这时恰好得到所需要的三角形数$\frac{n(n+1)}{2}$.

117. 证明：存在无穷多个这样的数，使其中每个既是三角形数，又是平方数.

证 如果

$$T(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

是某个平方数，并且是第n个三角形数，那么数

$$T[4n(n+1)]=4T(n)(2n+1)^2$$

也是一个完全平方数.因为第一个三角形数1显然具有所需要

的性质，所以存在无穷多个平方的三角形数.

118. 设$n\geqslant 2$是任意整数，求证

$$\sum \frac{1}{pq}=\frac{1}{2},$$

其中求和是对所有的整数p，q进行的，p与q互质，且使

$$0<p<q\leqslant n,\ p+q>n.$$

证 设$f(n)$是要求的和. 包含在$f(n)$中而不包含在$f(n-1)$中的加数可写成

$$a_p=\frac{1}{pn},$$

其中$1\leqslant p<n$，p与n互质；包含在$f(n-1)$中而不包含在$f(n)$中的加数可写成

$$b_p=\frac{1}{p(n-p)},$$

其中$1\leqslant p\leqslant n-p$，$p$与$n-p$互质，即$p$与$n$互质. 因此，只对与$n$互质的那些$p$求和，可得

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=\sum_{p<n}a_p-\sum_{2p<n}b_p\\&=\sum_{2p<n}(a_p+a_{n-p}-b_p).\qquad(*)\end{aligned}$$

但是

$$a_p+a_{n-p}-b_p=0,$$

因而当$n\geqslant 3$时，

$$f(n)=f(n-1).$$

由此可得所需要的结果.

【注】当$n\geqslant 3$时，$(*)$中不含$p=\frac{n}{2}$的项，因为$(p,n)=1$.

119. 设n是一个固定的正整数. 又设

$$x_0=\frac{1}{n},\ x_j=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{j-1}x_i,$$

其中$j=1,2,\cdots,n-1$. 求和$\sum_{j=0}^{n-1}x_j$.

解 按归纳法证明

$$\sum_{j=0}^{k}x_i=\frac{1}{n-k},\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

当$k=0$时，根据定义，此式显然成立.

现在假设对于某个k,

$$\sum_{j=0}^{k}x_j=\frac{1}{n-k},\ 0\leqslant k<n-2.$$

于是由x_{k+1}的定义

$$\sum_{j=0}^{k+1}x_j=x_{k+1}+\sum_{j=0}^{k}x_j$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{x_j}{n-k-1}+\sum_{j=0}^{k}x_j,$$

利用归纳法的假设，得

$$\sum_{j=0}^{k+1}x_j=\frac{1}{(n-k-1)(n-k)}+\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n-k-1}.$$

取$k=n-1$,由此可求出

$$\sum_{j=0}^{n-1}x_j=1.$$

120. 级数$-4+7-4+7-4+7-\cdots$的第n项等于什么?

解 从这个级数的每一项中减去

$$\frac{1}{2}(7-4)=1.5,$$

得

$$-5.5+5.5-5.5+5.5-5.5+5.5-\cdots,$$

因此，这个级数的第n项等于$1.5+5.5(-1)^n$

121. 求下列两个数列的通项公式：

(a) 0，3，26，255，3124，…；

(b) 1，2，12，288，34560，….

解 在这两个数列中，第六项可能等于任意的数.因此，如果能用唯一的公式写出每个数列的前五项，那么也就可以用这个公式给出其余各项.例如可以设

(a) 0，3，26，255，3124，…，(n^n-1)；

(b) 1，2，12，288，34560，…，$[(1!)(2!)\cdots(n!)]$.

经验证，每个数列的前五项均可按相应的公式求出，所以这些公式就是要求的通项公式.

122. 数列$\{x_n\}$由下列递推公式定义：

$$x_n=(n-1)(x_{n-1}+x_{n-2}),\ n\geqslant4;$$

$$x_1=1,\ x_2=2.$$

试求这个数列的通项公式.

解 设$x_k=k!\,y_k$，得

$$y_k-y_{k-1}=-\frac{1}{k}(y_{k-1}-y_{k-2}),\ k\geqslant4. \tag{1}$$

当$k=4$，5，…，m时，利用(1)式可得

$$y_m-y_{m-1}=\frac{(-1)^m}{m!},\ m\geqslant4. \tag{2}$$

当$m=4$，5，…，n时，对(2)式求和，最后得

$$x_n=n!\sum_{m=2}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}.$$

注意，上式当$n=2$，3时也正确．

123．化简乘积

$$(3^{2^0}+1)(3^{2^1}+1)(3^{2^2}+1)\cdots(3^{2^n}+1).$$

解 把原来的积乘以

$$1=\frac{1}{2}(3^{2^0}-1),$$

得本题答数$\frac{1}{2}(3^{2^{n+1}}-1)$，因为

$$(3^{2^0}-1)(3^{2^0}+1)=3^{2^1}-1,$$

$$(3^{2^1}-1)(3^{2^1}+1)=3^{2^2}-1,$$

等等．

一般说来，如果取任一底数$x>1$来代替3，那么这个乘积就等于

$$\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}.$$

124．试求无穷乘积$\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

解 $$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1\cdot7}{3\cdot3}\cdot\frac{2\cdot13}{4\cdot7}\cdot\frac{3\cdot21}{5\cdot13}\cdot\cdots\cdot\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right)=\frac{2}{3}.$$

125．对于$0<x<1$，把$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$表示为$x$的有

理函数.

解 当 $N\to\infty$ 时,

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}\longrightarrow\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x},$$

因为 $|x|<1$.

126. 十二个数 a_i 组成一个等差数列,使 $a_k+d=a_{k+1}$.求顶点在 $(a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2)$, $(a_4^2,\ a_5^2,\ a_6^2)$, $(a_7^2,\ a_8^2,\ a_9^2)$, $(a_{10}^2,\ a_{11}^2,\ a_{12}^2)$ 上的四面体的体积.

解 在公差为 d 的等差数列中, 任意相邻三项的平方满足方程

$$a_i^2-2(a_i+d)^2+(a_i+2d)^2=2d^2.$$

在本题中, 上式变成

$$x-2y+z=2d^2.$$

因此, 四面体的所有四个顶点共面, 而它的体积为0.

显然, 可以取这样的 a_i,使它们的全体不组成等差数列,但是它们每三个相邻的数 a_i 组成公差为 d 的等差数列.

127. 证明: 对于任一自然数 n,存在一个由这样的 n 个合数组成的集合, 使得这些合数组成等差数列, 并且两两互质.

证 注意, 如果 $2\leqslant k\leqslant N$, 那么 $N!+k$ 是合数. 当 n 为任意给定的数时, 取一个素数 $p>n$ 和一个整数 $N\geqslant p+(n-1)n!$, 那么合数

$N!+p$，$N!+p+n!$，$\cdots$，$N!+p+(n-1)\cdot n!$

组成等差数列．此外，如果 q 是其中两数的公共素因数，那么它们的差 $jn!$（$0<j<n$）应可被 q 整除．因此，$q\leqslant n$．但是由此得出，$N!$ 可被 q 整除．就是说，p 可被 q 整除，这是不可能的．因此，所有这些数两两互质．

128．将奇数数列以如下方式分组：

1；3，5；7，9，11；13，15，17，19；$\cdots$．

求第 n 组的各数之和．

解 第 n 组包含 n 个整数，因此，从第一组到第 n 组（包括第 n 组）的所有各组整数的总个数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$，从第一组到第 $n-1$ 组（包括第 $n-1$ 组）的所有各组整数的总个数为 $\dfrac{(n-1)n}{2}$．这两个数列都是公差为2的等差数列．因此，第 n 组的全部数的和等于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\left\{2+\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]\cdot 2\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\left\{2+\left[\frac{(n-1)n}{2}-1\right]\cdot 2\right\}$$

$$=n^2\cdot\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{4}=n^3.$$

129．已知数列1，2，3，$\cdots$，10^n-1．试求出这个数列的所有各项的数字之和．

解 把数 a 和 10^n-1-a 组成一对，其中 $a\geqslant 0$，每对数字之和为 $9n$．一共有 $\dfrac{10^n}{2}$ 对这样的和．因此，所求的所有各项的数字之和为 $9n\cdot\dfrac{10^n}{2}$．

130．试求一个由整数组成的无穷等差数列，使它的任何一项都不是整数的r次幂（$r=2, 3, \cdots, n$）.

解 数列2，6，10，…，$4k+2$，…不含任何整数的幂．因为任何奇数的幂仍然是奇数，而任何偶数的幂可以被4整除．此外还有一个解：首项不是整数的幂而公差为0的等差数列．

【译者注】显然3，7，11，…，$4n+3$，…也是解，因为其中每一项不是偶数的幂，而奇数的幂被4除时余数总是1，不可能是3．

131．一套丛书每隔七年出版一册．当第七册问世时，已出版的各书的出版年数之总和为13524．从书的第一册在哪一年出版？

解 前七册出版年数的算术平均值为

$$13524 \div 7 = 1932,$$

即这个值是这个等差数列的中项．这个数列的首项与中项之差为三个公差．由此可知第一册书出版于

$$1932 - 3 \cdot 7 = 1911（年）.$$

132．三个不同素数的平方根能不能是一个等比数列的三项？

解 设三个不同的素数p_1，p_2，p_3的平方根是某个等比数列的三项，于是等式

$$ar^{n_1} = \sqrt{p_1}, \ ar^{n_2} = \sqrt{p_2}, \ ar^{n_3} = \sqrt{p_3}$$

应当成立，其中n_1, n_2, n_3是不同的正整数，可设$n_1 > n_2 > n_3$．

从这些等式中消去a和r，得等式

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{n_2 - n_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{n_1 - n_2}$$

或

$$p_1^{n_2-n_3}\ p_3^{n_1-n_2}=\ p_2^{n_1-n_3}.$$

此式显然不正确，因为每个整数可以唯一地分解成为素因数.

133．试求这样一个数，使它的小数部分、整数部分和它本身组成一个等比数列.

解　以$[x]$表示x的整数部分（即不超过x的最大整数），则由已知条件

$$x(x-[x])=[x]^2$$

可得

$$x=[x]\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad |x|\geqslant|[x]|,\quad x\geqslant0.$$

其次有

$$[x]+1\geqslant[x]\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$[x]\leqslant\frac{2}{\sqrt{5}-1}<2,$$

因此

$$[x]=0\text{ 或}1,\quad x=0\text{ 或 }\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

但是$x=0$没有意义，所以

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

134．菲波那奇数列1，1，2，3，5，8，13，…简记为$\{F_n\}$，满足递推关系式$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，其中$n\geqslant3$，$F_1=F_2=1$. 证明：这个数列的每第五项都可被5整除.

证　把已知的递推关系式应用几次，得

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}=F_{n-2}+2F_{n-3}+F_{n-4}$$

$$=F_{n-3}+F_{n-4}+2F_{n-4}+2F_{n-5}+F_{n-4}$$
$$=5F_{n-4}+3F_{n-5}.$$

其次$F_5=5$，因此，这个数列的每第五项可被 5 整除：

1，1，2，3，**5**，8，13，21，34，**55**，89，144，233，377，**610**，⋯.

135. 设F_i是菲波那奇数列的第i项，一个四面体的顶点坐标是：(F_n, F_{n+1}, F_{n+2})，$(F_{n+3}, F_{n+4}, F_{n+5})$，$(F_{n+6}, F_{n+7}, F_{n+8})$和$(F_{n+9}, F_{n+10}, F_{n+11})$．求这个四面体的体积.

解 这个数列满足递推关系式

$$F_n+F_{n+1}=F_{n+2},$$

因此，任意三个相邻的菲波那奇数（即这个数列的任意相邻的三项）满足方程

$$x+y=z.$$

由此可知，这个四面体的四个顶点位于一个平面内，它的体积为0.

如果四个顶点的坐标不是十二个相邻的菲波那奇数，但是，每个顶点的坐标是任意相邻的三个菲波那奇数，那么上述讨论也是正确的.

136. 一个数列是由菲波那奇数的个位数字组成的. 这个数列是循环的吗？就是说，这个数列能不能用这个有限数字集合的无限次重复而写出？例如数列0，5，5，0，5，5，⋯就是这样写成的.

解 能.将菲波那奇数列的前两项相加，把和数的个位数作为第三项，就能得出要求的数列：1，1，2，3，5，8，3，1，⋯.

在这个数列中，两个奇数项和一个偶数项相互交替．总

共有$5\times5=25$个由奇数数字组成的有序数对．因此在不多于$3\times25=75$次连续相加后，这些奇数对中的一对就重复，并开始一个新的循环．因为两数之和（或差）是唯一的，所以这对重复的数应当和数列开始的那对奇数相同，而不和任何“内部”的一对奇数相同，实际上，只要进行六十次相加，并从下列六十个数开始新的循环就行了：

1，1，2，3，5，8，3，1，4，5，9，4，3，7，0，7，7，4，1，5，6，1，7，8，5，3，8，1，9，0，9，9，8，7，5，2，7，9，6，5，1，6，7，3，0，3，3，6，9，5，4，9，3，2，5，7，2，9，1，0，1，1，…．

类似的论证对于任意一种进位制都是正确的．同时，不仅对于菲波那奇数列，而且对于满足递推关系式

$A_{n+k}=A_n+A_{n+1}+\cdots+A_{n+k-1}$ 的任何数列都是正确的．

137．试求一个以菲波那奇数为边长的三角形．

解　菲波那奇数列满足关系式

$$F_{n+2}=F_n+F_{n+1},\quad F_1=F_2=1.$$

如果取这个数列的三项，按增加的顺序分别以a，b，c表示，那么$c\geqslant a+b$．因此，没有一个三角形的边长可用菲波那奇数表示，因为三角形的任意两边之和总是大于第三边的．

138．计算　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$的值．

解　$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right]$$

$$=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$=2-\frac{n+3}{(n+2)!}.$$

由此可知，所要求的极限等于 2 .

139. 求证$2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1$可被9整除.

证 将$x=2$代入恒等式

$$x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1=\frac{x^{12}-1}{x^2+1},$$

得

$$2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1$$

$$=\frac{2^{12}-1}{2^2+1}=\frac{4096-1}{4+1}$$

$$=819=9\cdot 91.$$

140. 证明：ln2是无理数.

证 设ln2是有理数. 显然$\ln 2\neq 0$.

因此，

$$\ln 2=\frac{p}{q},$$

其中p和q都是整数，$p>0$，$q\neq 0$. 于是

$$e^{\frac{p}{q}}=2,\quad e^p=2^q.$$

这表明，e满足代数方程

$$x^p-2^q=0.$$

但这是不可能的，因为e是超越数(即不是任何一个有理系数多项式的根).

141. 当a为何值时，函数$y=a^x$的图象与函数$y=\log_a x$的图象相切?

解 函数$y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$) 是函数$y=a^x$的反函数. 由于它们的图象关于直线$y=x$对称，所以可以断言，在两图象相切的情形下，两图象或者和直线$y=x$相切，或者和直线$y=y'$垂直. 因此，在切点上应满足关系式

$$y'=a^x\ln a=\pm 1,\ x=a^x.$$

这两个方程的解分别是：

当我们取正号时，$a=e^{\frac{1}{e}}$ $(x=e)$；

当我们取负号时，$a=e^{-e}$ $(x=e^{-1})$.

因此，当$a=e^{\frac{1}{e}}$或$a=e^{-e}$时，$y=a^x$的图象和$y=\log_a x$的图象相切.

142. 不用对数表，证明：

(1) $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}>2$；

(2) $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_\pi 2}>2$.

证 (1) $\because\ \dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}=\log_\pi 2+\log_\pi 5$

$=\log_\pi 10>\log_\pi\pi^2=2$,

$\therefore\ \dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}>2$.

(2) $\because\ \dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_\pi 2}=\dfrac{1}{\log_2\pi}+\log_2\pi$

$>2\sqrt{\dfrac{1}{\log_2\pi}\cdot\log_2\pi}=2$,

$\therefore\ \dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_\pi 2}>2$.

【注】在证明中，用到了：

$\pi^2<3.15^2<10$; $\log_2\pi>0$;

$\log_\pi 2>0$; $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

143. 对于任意正数p，q，r和s，证明：

$$\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1)}{pqrs}\geqslant 81.$$

证 将原不等式的左边改写成为

$$\left(p+1+\frac{1}{p}\right)\left(q+1+\frac{1}{q}\right)\left(r+1+\frac{1}{r}\right)\left(s+1+\frac{1}{s}\right).$$

其次，互为倒数的两个正数之和$\geqslant 2$．于是每个括号内的值$\geqslant 3$，因此，它们的乘积$\geqslant 81$.

由此直接得出：对于任意正数a_i：

$$\frac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\cdots(a_n^2+a_n+1)}{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant 3^n.$$

144. 证明：$n^n>1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)$．

证 因为互不相等的各数的算术平均值大于它们的几何平均值，所以

$$n=\frac{n^2}{n}=\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n}$$

$$>[1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)]^{\frac{1}{n}}.$$

因此

$$n^n>1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1).$$

145. 证明：对于任意实数$a_i>0$和任意整数M，$P>0$，下列不等式成立：

$$M\left(\sum_{i=1}^{M}a_i^p\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{M}a_i^{p+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{M}a_i^{p-1}\right).$$

证 设函数$f(x)$定义在某一区间上，如果对于它的定义

域中的任意不同两值x_1，x_2，有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

成立，那么说$f(x)$是这区间上的凸函数.

显然，对于任意实数α和β，函数

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{M}a_i^{x-\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{M}a_j^{\beta-x}\right)$$

是凸函数，其图形是关于点$x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$对称的．因此，当$x$离开点$x_0$时，函数值在增加．如果令$\alpha=0,\beta=P$，那么所要证的不等式可写成$f(P)\leqslant f(P+1)$．由上述知其正确性是显然的.

146．证明或推翻下列命题：如果$|\bar{c}-a|\leqslant 1$，那么当且仅当复数z等于ac时，z才满足不等式

$$|z|-\mathrm{Re}z\leqslant\frac{1}{2}.$$

【注】 $\mathrm{Re}z$表示复数z的实部.

证 这个命题是正确的，它是下列恒等式的推论：

$$|ac|-\mathrm{Re}ac=\frac{1}{2}|\bar{c}-a|^2-\frac{1}{2}(|c|-|a|)^2.$$

这个条件的充分性是显然的．为了证明它的必要性，取这样的a和c，使

$$|a|=|c|=|z|^{\frac{1}{2}},$$

这时上述恒等式右边第二个加数消失了.

147．求证：对于整数$n\geqslant 2$和$0<x\leqslant\frac{n}{n+1}$，有

$$(1-2x^n+x^{n+1})^n<(1-x^n)^{n+1}.$$

证 令$0<x<1$，那么$1-2x^n+x^{n+1}$和$1-x^n$都是正的．把原不等式改写成

$$1-2x^n+x^{n+1}<(1-x^n)\sqrt[n]{1-x^n},$$

移项，得

$$(1-x^n)(1-\sqrt[n]{1-x^n})<(1-x)x^n,$$

$$\frac{1-x^n}{1-x}<\frac{1-(1-x^n)}{1-\sqrt[n]{1-x^n}}.$$

因为$\frac{1-t^n}{1-t}$在$0<t<1$内严格增加，所以上面最后那个不等式等价于

$$x<\sqrt[n]{1-x^n},$$

即等价于$x<\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

最后只需注意到

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}>\frac{n}{n+1},$$

即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2 \quad (n\geqslant 2).$$

148. 证明：$63!\equiv 61!\ (\mathrm{mod}\,71)$（即$63!-61!$可被71整除）．

证 因为

$$\begin{aligned}63!-61! &= (63\cdot 62-1)\cdot 61!\\ &= 5\cdot 11\cdot 71\cdot(61!),\end{aligned}$$

所以

$$63!\equiv 61!\ (\mathrm{mod}\,71).$$

149. 和$1(1!)+2(2!)+3(3!)+\cdots+n(n!)$等于多少？

解 $1(1!)+2(2!)+3(3!)+\cdots+n(n!)$

$$=2(1!)+3(2!)+4(3!)+n[(n-1)!]$$
$$+(n+1)(n!)-1!-2!-3!-\cdots-(n-1)!-n!$$
$$=2!+3!+4!+\cdots+n!+(n+1)!$$
$$-1!-2!-3!-\cdots-n!$$
$$=(n+1)!-1.$$

150. 能不能说$e^{2737}\approx\dfrac{1000!}{70!270!300!220!140!}$?

解 不能．因为

$$e^{2737}\gg e^{1610}\approx 5^{1000}=(1+1+1+1+1)^{1000}$$

$$=\sum_{(\sum x_i=1000)}\frac{1000!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ n_4!\ n_5!}$$

$$\gg\frac{1000!}{70!\ 270!\ 300!\ 220!\ 140!}.$$

151. 两个根式$\sqrt[8]{8!}$和$\sqrt[9]{9!}$哪一个大?

解 在一般情形下

$$n!<(n+1)^n.$$

因为左边n个因数都小于$n+1$．于是

$$(n!)^n n!<(n!)^n(n+1)^n,$$

即

$$(n!)^{n+1}<[(n+1)!]^n.$$

在这个不等式的两边开$n(n+1)$次方，得

$$(n!)^{\frac{1}{n}}<[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}.$$

在本题的具体情况下，可以这样讨论：设

$$(8!)^{\frac{1}{8}}\geqslant(9!)^{\frac{1}{9}},$$

把两边72次乘方，得

$$(8!)^9 \geqslant (9!)^8,$$

此不等式的错误是明显的，只要把它的两边除以 $(8!)^8$ 就可以看出(实际上，这时可得 $8! \geqslant 9^8$，这是错误的)．因此

$$\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}.$$

152. 求方程 $n!(n-1)! = m!$ 的一切解．

解 $n!(n-1)! = n[(n-1)!]^2 = m!$ ．

显然

$$1!0! = 1!,\ 2!1! = 2!$$

都是原方程的解．此外，一定有 $n < m$．于是，如果 $m!$ 包含比 m 大的非平方数因数，那么问题没有解．理由是：把等式

$$n[(n-1)!]^2 = m!$$

两边因数分解，若右边有某个素因数 p 的奇次幂，则 n 一定可以被 p 整除．因此，n 应能被 $m!$ 中所有奇次幂的素因数之积整除．若这个积大于 m，则它更大于 n，与整除 n 矛盾．

当 $m > 10$ 时，总可找到素数 p 和 q，使它们大于 $\frac{m}{2}$ 而不大于 m，且 p 和 q 在 $m!$ 的因数分解中只出现一次．因为 $2p$ 和 $2q$ 都大于 m，在 $1, 2, \cdots, m-1, m$ 中只有 p 能被 p 整除，q 能被 q 整除．但是

$$pq \geqslant \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2} + 2\right) = \frac{m^2}{4} + \frac{3m}{2} + \frac{5}{4} > m,$$

即 $m!$ 包含比 m 大的非平方数因数 pq，这使原方程没有解．

当 $m \leqslant 10$ 时，除了上述两个解以外，只有一个解

$$7!6! = 10!.$$

153. 求下列方程的自然数解：

$$1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2.$$

解 直接代入检验，可知当 $x < 5$ 时，方程的整数解是

$$x=1,\ y=1;\ x=3,\ y=3.$$

今证：当$x\geqslant5$时，方程无解．因为

$$1!+2!+3!+4!=33,$$

而$5!$，$6!$，$7!$，…的个位数字都是0，所以当$x\geqslant5$时，$1!+2!+3!+\cdots+x!$ 的个位数字都是3，而不能成为任何整数的平方．

154．求证：当n为任意正整数时，数$\frac{(3n)!}{6^n n!}$也是正整数．

证
$$N=3^n n!=3^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$$
$$=3\cdot6\cdot9\cdot\cdots\cdot(3n).$$

在阶乘

$$(3n)!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\cdots\cdot(3n)$$

中，每隔两个整数（其中一个一定是偶数）就有一个3的倍数．于是，除了因数N以外，$(3n)!$中还含有n个偶因数．因此

$$\frac{(3n)!}{2^n N}=\frac{(3n)!}{6^n n!}$$

是正整数．

155．众所周知，如果m和n都是正整数，并且$(m,n)=1$，那么$\frac{(m+n-1)!}{m!\ n!}$是整数．试问：对于怎样的正整数k，确实有无穷多对正整数m和n，使$\frac{(m+n-k)!}{m!\ n!}$是整数？

解 本题对于每个正整数k都是正确的．

设m是大于等于$k+1$的任一正整数，取$n=m!-1$，则有

$$\frac{(m+n-k)!}{m!\ n!}=\frac{(m+n-k)\cdot\cdots\cdot(n+1)}{m!}$$

$$=(m+n-k)\cdots\cdots(n+2),$$

这是一个整数.

156. 已知$x+y=1$. 求证:

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_{n+i-1}^{i} x^{i} y^{n}+\sum_{j=0}^{n-1} C_{m+j-1}^{j} x^{m} y^{j}=1.$$

证 1 如果x和y分别表示贝努利试验中成功和失败的概率，那么上述两个和数分别表$m+n$次试验前，第n次失败和第m次成功的概率．易见这两个事件是对立的．把x和y的值扩张到单位区间外是明显的．因此原等式成立．

证 2 在部分分式展开式

$$\frac{1}{x^{m} y^{n}}=\sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_{i}}{x^{m-i}}+\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j}}{y^{n-j}} \quad (y=1-x) \qquad (1)$$

中，系数a_i和b_j分别为

$$a_{i}=\frac{1}{i!}\left(\frac{d}{d x}\right)^{i} \frac{1}{(1-x)^{n}}\Big|_{x=0}=C_{n+i-1}^{i},$$

$$b_{j}=\frac{1}{j!}\left(\frac{d}{d y}\right)^{j} \frac{1}{(1-y)^{m}}\Big|_{y=0}=C_{m+j-1}^{j}.$$

(1) 式乘以$x^{m} y^{n}$后，即得所要证的等式.

157. 将下式展开、合并后，求其系数之和:

$$(1-3x+3x^{2})^{743}(1+3x-3x^{2})^{744}.$$

解 把原式展开、合并后，得

$$(1-3x+3x^{2})^{743}(1+3x-3x^{2})^{744}$$
$$=A_{0}+A_{1}x+A_{2}x^{2}+\cdots+A_{n}x^{n}, \qquad (*)$$

其中A_0，A_1，A_2，…，A_n为系数，我们要求的是$A_{0}+A_{1}+A_{2}+\cdots+A_{n}$.

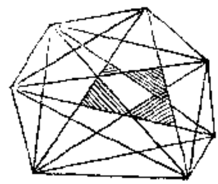
在 (*) 中设$x=1$，则得

$$1^{743}\cdot1^{744}=A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n,$$

因此系数和等于1.

158. 用线段把圆周上n个点互相连结，使这些线段中任意三条在圆内都没有交点. 试求由这些线段构成的、其顶点位于圆内的三角形的个数.

解 能用一种且只有一种方法把圆周上六点分成三对，使每对点彼此连成的三条线段构成一个三角形. 反之，由每个三角形的三边得出圆周上的六点. 因此，三角形的个数等于



$$C_n^6=\frac{n!}{6!(n-6)!},$$

其中$n\geqslant6$. 当$n<6$时本题无解. 图上表示$n=7$的情形.

159. 试求凸n边形所有对角线交点的最大个数.

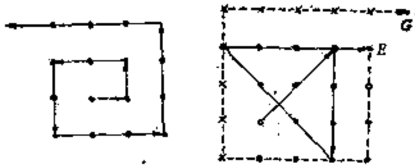
解 这个n边形的任意四个顶点完全确定一个四边形. 因为这个n边形是凸的，所以这种四边形的对角线的唯一交点位于原n边形内部，这个交点恰好属于原n边形的两条对角线. 因此，当所有交点不相同时，原n边形对角线的交点个数最大. 但是在这种情况下，交点个数等于原n边形各顶点构成的四边形的个数

$$C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\quad(n\geqslant4).$$

160. 设有一个包含$N\times N$个格点的网格（$N>2$）. 试证：在这个网格中存在一条通过N^2个格点，并且由$2N-2$条线段组成的折线线路（图中的线路包含$2N-1$条线段，$N=4$）.

证 图中表示$N=3$时，包含$2N-2=4$条线段的线路，它

通过所有的3^2个格点，终点为E点．如果增加两条线段（用虚线表示），线路的终点为F点，那么就得到$N=4$时的线路．如果再增加两条线段，线路的终点为G点，那么就得到$N=5$时的线路．实际上，每次增加两条线段的过程，可以作出N为任意大时的线路．



161．一个骰子的六个面上标有数字0，1，2，3，4，5．开始掷这个骰子，一直掷到总点数超过12为止．试用最快的方法算出最可能出现的总点数．

解　在倒数第二次投掷后，总点数可能等于12，11，10，9或8．如果它等于12，那么再投一次后，总点数可能为13，14，15，16或17．类似地，如果倒数第二次投掷后总点数为11，那么最后的总点数可能为13，14，15或16，等等．由此显然可见，总点数的最可能值为13．

如果取任意一个$N>3$的数代替12，那么总点数的最大可能值为$N+1$．

162．数3可用四种方法表示成为一个或几个正数的和，如3，1+2，2+1，1+1+1．求证：任一正整数n可以用2^{n-1}种方法类似地表示出来．

证　把n个1写成一行，它们之间留有空隙，共有$n-1$个空隙．显然，在n表成和的形式与填写$n-1$个空隙的方式之间，存在一个一一对应．从而我们在空隙上，或者什么也没填上，或者填上“+”号．这样，就可以用两种不同的方法对待$n-1$个空隙中的每一个．因此，一个整数n可以表示为正整数之和的不同方法数为2^{n-1}．

163. 在一个二项式的展开式中，y个相邻系数之比为$1:2:3:\cdots:y$. 试求y的最大值，确定展开式的次数，并写出相应的系数.

解 为使问题的条件当$y=3$时满足，必须对于一些k和n，等式

$$2C_n^k=C_n^{k+1},\quad 3C_n^k=C_n^{k+2}$$

成立. 这两个等式化简后，得

$$n=3k+2,$$

$$3(k+1)(k+2)=(n-k)(n-k-1),$$

解此方程组，抛弃负数解，得

$$k=4,\ n=14.$$

因此，二项式的次数为14，第五、第六和第七个系数分别为1001，2002，3003.

因为当$y=3$时，解是唯一的，所以当$y>3$时，问题无解.

164. n个人参加网球比赛. 每人只要输掉一场就被淘汰，为了推出冠军，应该进行多少场比赛?

解 在每一场比赛后，有一个人被淘汰. 因为共有$n-1$个人被淘汰，所以一共应进行$n-1$场比赛.

165. 高尔夫球俱乐部决定在16个选手之间举行球赛. 每人都要和其他15名选手相遇一次. 每场比赛有4人参加，按四人一组分组后每人恰好与其余三人比赛一次. 应该怎样把选手按每轮四人一组编组，使他们在每一轮中每人只属于一个组?

解 取四个字母x，y，z，w的下列四种排列：

$P_1(xyzw)$，$P_2(zwxy)$，$P_3(wzyx)$，$P_4(yxwz)$.

每个选手恰好与其余15个选手比赛一次，因此，比赛应有 $15\div3=5$轮．以字母A，B，…，O，P表示这 16 个选手，把它们排成4×4方阵：

$$\begin{array}{cccc} A & E & I & M \\ B & F & J & N \\ C & G & K & O \\ D & H & L & P \end{array}$$

然后，保持第一列不变（这种排列方式以P_1表示），逐次把它的第二列用P_4，P_3，P_2的方式排列，把它的第三列用P_2，P_4，P_3的方式排列，把它的第四列用P_3，P_2，P_4的方式排列，得到另外三个4×4方阵：

$$\begin{array}{ccc} AFKP & AHJO & AGLM \\ BELO & BGIP & BHKN \\ CHIN & CFLM & CEJP \\ DGJM & DEKN & DFIO \end{array}$$

前四轮的四人一组的分组法按照上述四个方阵的行得到，第五轮的四人一组按照第一个方阵的列得到．如果用这十六个字母表示某些数，把第一个方阵当作行列式展开，那么可以看到，字母乘积前取正号的那些项的元素，恰好构成后三个方阵的行．

根据最后这个事实，把行列式中乘积前取负号的那些项取出来，又可以排出下列三个方阵：

$$\begin{array}{ccc} AHKN & AFLO & AGJP \\ BGLM & BEKP & BHIO \\ CFIP & CGJM & CELN \\ DEJO & DHIN & DFKM \end{array}$$

把它们作为前面三个方阵，就得到了本题的第二个解．

166. 某人参加一项比赛，要求确定下图中可以读出 *MATHEMATICIAN*（数学家）的路线数目：

```
            M
           MAM
          MATAM
         MATHTAM
        MATHEHTAM
       MATHEMEHTAM
      MATHEMAMEHTAM
     MATHEMATAMEHTAM
    MATHEMATITAMEHTAM
   MATHEMATICITAMEHTAM
  MATHEMATICICITAMEHTAM
 MATHEMATICIAICITAMEHTAM
MATHEMATICIANAICITAMEHTAM
```

他从前五行中的某一行开始，数出了1587条路线．但他还没来得及数出更多的路线，时间就已经到了．请你用最简捷的方法帮助他数出所有的路线．

解 从字母N开始倒着数．如果考虑左半图（包括中央一列），那么每向后移动一步时，我们可以在两个可能方向上选出一个，得到2^{12}条路线．把此数乘以2并减去1(为了不使中央一列算两次），得

$$2^{13}-1=8191\text{（条路线）}.$$

167. 下表列举美国棒球联合会在1965年7月14日举行的棒球比赛的输赢分数：

	得分	失分		得分	失分
芝加哥	41	46	纽约	29	56
辛辛那提	49	36	费城	45	39
休斯顿	39	45	匹兹堡	44	43

洛杉矶	51	38	圣路易	41	45
密尔沃基	42	40	旧金山	45	38

如果不计算得分的百分数，试把各球队按照得分百分数减少的次序排列.

解 分别以B和P表示得分和失分的分数，首先把每个队和一个假想的队比较，后者得分百分数是50%，显然$B-P=0$. 如果我们的球队有$B>P$，那么它的得分百分数就大于50%，按规定把它归为甲级队，如果它有$B<P$，那么把它归为乙级队. 显然，在名次表上，甲级队应排在乙级队前面.

考虑同级的两队：A队和C队. 如果现在有

$B_A>B_C$，$P_A\leqslant P_C$或者$B_A=B_C$，$P_A\leqslant P_C$，

那么A队显然排在C队前面. 于是可以初步列出一个名次表，其中只有相邻两个带*号的队的相对名次还有疑问：

	得分	失分		得分	失分
*辛辛那提	49	36	*匹兹堡	44	43
*洛杉矶	51	38	圣路易	41	45
旧金山	45	38	*芝加哥	41	46
费城	45	39	*休斯顿	39	45
*密尔沃基	42	40	纽约	29	56

设

$$B_A=B_C+x,\ \ P_A=P_C+y.$$

那么，若两队都属于甲级队，且$x\leqslant y$，则A队应在C队后面. 若两队都属于乙级队，且$x\geqslant y$，则A队应在C队前面. 因此，上述名次表是正确的，没有疑问了.

168. 世界上每个人都握过若干次手. 求证：握过奇数次手的总人数总是偶数.

证 若世界上没有任何人握过手，则握过奇数次手的人数必然为0．有两人第一次握手后，就出现两个“奇数人”（即握过奇数次手的人）．以后每次握手，或者在两个“偶数人”（即握过偶数次手的人）之间进行，或者在两个“奇数人”之间进行；或者在一个“偶数人”与一个“奇数人”之间进行．如果两个“偶数人”握了手，那么“奇数人”的人数增加2；如果两个“奇数人”握了手，那么“奇数人”的人数减少2；最后，如果一个“偶数人”与一个“奇数人”握了手，那么“偶数人”变成“奇数人”，而“奇数人”变成“偶数人”，“奇数人”的人数保持不变．

由此可见，在任何情形下，“奇数人”的人数奇偶性在每次握手后不变．因为世界上握第一次手的总人数必是偶数，所以，握过奇数次手的总人数永远是偶数．

169．一对夫妇A和B有五个儿子：用英文字母C，D，E，F，G表示．父亲决定，在若干次午饭时间，全家七个人每天按新的次序围坐在一张圆桌旁，使每人恰好和其他各人相邻一次．他要怎样实现这个计划？

解 共有$6\div2=3$对不同的人坐在A的两旁，因此只要三顿午饭就可实现他的计划．具体作法如下：

首先按次序A，B，C，D，E，F，G安排就座．然后在A的左边把这个“圆”切断，把这七个字母写成一行：

$$A\quad B\quad C\quad D\quad E\quad F\quad G$$

而后取出偶数位置上的字母，以原来的次序放在最右边的位置上：

$$A\quad C\quad E\quad G\quad B\quad D\quad F$$

把这个步骤重复两次，得

$$A\quad E\quad B\quad F\quad C\quad G\quad D$$

$$A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \quad G$$

第三次时又回到原来的次序.

其次再考虑每个家庭成员左右两侧的一对成员:

$A-BG$, $B-AC$, $C-BD$, $D-CE$,

$E-DF$, $F-EG$, $G-FA$;

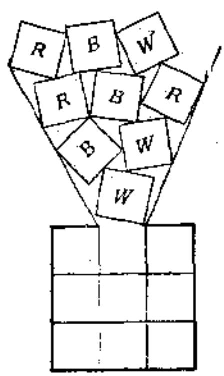
CF, GD, AE, BF, CG, DA, EB;

ED, EF, FG, GA, AB, BC, CD.

由此可见，在这个周期内，不仅每个成员都恰好可以与其他成员相邻坐一次，而且他左右两侧也不会与其他成员重复相邻. 这个结果并不奇怪，因为$C_7^2=21$，正好是我们上面所列的21对成员.

170. 今有九块三种颜色的小方块：三块红色（R），三块白色（W），三块蓝色（B）. 把它们摆入一个3×3的大方格中去，使每一行和每一列都有三种不同颜色的小方块. 如果用转动大方格而改变小方格位置的摆法不算，问有多少种摆法.

解 首先注意，至少有三种不同的摆法满足题目条件，这三种摆法的区别在于中心小方格的颜色不同.



现在来研究不同摆法的最大可能性. 可用三种方法摆好左上角、然后，可用两种方法选出一块小方块摆好第一行第二小方格，最后，还可用两种方法选出一块小方块摆好第二行第二格. 选好上面三块小方块后，只有一种方法摆好其余空格. 因此最多只有$3\times2\times2=12$种不同的摆法.

但是，旋转大方格，可以把每一种摆法换成另外三种摆法．因此，如果不考虑旋转，最多只有$12\div4=3$种本质上不同的摆法．再和上面提出的至少有三种摆法的结论对照，说明恰好有三种摆法．

171．用从1到7的连续整数给一副纸牌编号，然后把它认真地重洗一遍．从这副纸牌中任意地连续抽出5张，它们的号码是以增加的次序排列的概率是多少？

解 我们感兴趣的只是被抽出的纸牌的号码．5个数的全排列数是$5!$．因此所求的概率等于$\frac{1}{5!}$（即$\frac{1}{120}$）．

√**172**．如果将数字0，1，2，…，9以任意的次序填入下列数字序列的十个空位上：

5_383_8_2_936_5_8_203_9_3_76，

构成一个28位数，那么这个数可被396整除的概率是多少？

解 由已知数字序列最后两个数字组成的数76可被4整除．偶数位置上的所有数字之和为73，奇数位置上的所有数字之和为$17+45=62$．但是$73-62=11$，所以不管空位上填什么数字，所得的28位数都可被11整除．这个数的所有数字之和$90+45$可被9整除．因此，这个28位数可被

$$4\cdot11\cdot9=396$$

整除，就是说，所求的概率等于1．

173．一个盒子中放着一群金龟，其中有n只雄龟，m只雌龟．现在从中以任意的次序一只一只地取出来，不再放回，一直到盒中有k只雄龟为止，其中$1\leqslant k\leqslant n$．设x_k是从盒中取出的金龟总数．求$x_k=x$的概率（其中$x=k$，$k+1$，…，$k+m$），并求x_k的平均数．

解 如果把这$n+m$只金龟排成"一行"，并注意不要

让它们向各方向爬走，那么放有n只雄龟的位置可以有C_{m+n}^{n}种方法．在前$x-1$个位置，可以有C_{x-1}^{k-1}种方法放$k-1$只雄龟，而以C_{m+n-x}^{n-k}种方法把其余的$n-k$只雄龟放在其余的$m+n-x$个位置上（在前k只雄龟得到其位置后）．因此，使$x_k=x$的概率

$$f(x)=\frac{C_{x-1}^{k-1}C_{m+n-x}^{n-k}}{C_{m+n}^{n}},$$

$x=k,\ k+1,\ \cdots,\ k+m.$
所求的平均数

$$E(x_k)=\sum_{x=k}^{k+m}xf(x).$$

设$y=x-k$，考虑和式

$$\sum_{x=k}^{k+m}xC_{x-1}^{k-1}C_{m+n-x}^{n-k}=k\sum_{y=0}^{m}C_{y+k}^{y}\quad C_{m+n-y-k}^{m-y}.$$

注意，C_{y+k}^{y}是$(1-t)^{-k-1}$按t幂展开式中t^y的系数，而$C_{m+n-y-k}^{m-y}$是$(1-t)^{-n+k-1}$的展开式中t^{m-y}的系数．因为

$$(1-t)^{-k-1}(1-t)^{-n+k-1}=(1-t)^{-n-2},$$

所以上述和式等于k乘以$(1-t)^{-n-2}$展开式中t^m的系数C_{m+n+1}^{m}．因此

$$E(x_k)=\frac{kC_{m+n+1}^{m}}{C_{m+n}^{n}}=\frac{k(m+n+1)}{n+1}.$$

174. 一个正方体的各面都涂上油漆，把它锯成1000个同样大小的小正方体．将这些小正方体均匀地搅混在一起．试求任意取出的一个小正方体其两面涂有油漆的概率．

解 总共有小正方体1000个．正方体共有12条棱边，每边上各有 8 个两面涂有油漆的小正方体．于是正方体共有12×8 个小正方体其两边涂有油漆．因此，所求的概率为

$$P=\frac{12\times 8}{1000}=0.096.$$

175. 一个箱子中装有 n 个硬币．从中至少取出一个硬币．如果从中取出任意个数的硬币是等可能的，求取出偶数个硬币的概率．

解 可能的基本事件数为

$$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1.$$

有利的基本事件数为

$$\begin{aligned}&C_n^2+C_n^4+\cdots\\&=\frac{1}{2}[(1+1)^n+(1-1)^n-2]\\&=2^{n-1}-1.\end{aligned}$$

因此，所求的概率为

$$P=\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}.$$

176. 在十进制中，下列密码的每个字母表示一个完全确定的数字：

$$3\cdot(BIDFOR)=4\cdot(FORBID).$$

试译出这个密码（即找出字母所表示的数字）．

解 可以写出下列关系式：

$$3\cdot[1000\cdot(BID)+(FOR)]=4\cdot[1000\cdot(FOR)+(BID)].$$

去括号，得

$$3000\cdot(BID)+3\cdot(FOR)=4000\cdot(FOR)+4\cdot(BID).$$

合并同类项，得

$$2996\cdot(BID)=3997\cdot(FOR).$$

两边除以7，得

$$428\cdot(BID)=571\cdot(FOR),$$

$$\frac{428}{571}=\frac{(FOR)}{(BID)}.$$

因为上式的分子和分母不包含其它形式的三位数，所以求得

$$B=5,\ I=7,\ D=1,\ F=4,\ O=2,\ R=8.$$

原来的密码可以译成

$$3\cdot(571428)=4\cdot(428571),$$

即

$$1714284=1714284.$$

177. 密码 $AHHAAH\div JOKE=HA$ 的每个字母唯一地表示某个数字．试译出这个密码．

解 显然

$$AHHAAH=10000\cdot AH+100\cdot HA+AH,$$

$$JOKE=\frac{AHHAAH}{HA}=100+\frac{AH(10001)}{HA}.$$

其次

$$10001=73\cdot 137.$$

因为10001是一个五位数，所以要使等式两边相等，HA应当能被10001的一个因数整除，由此得 $HA=73$．最后得到，本题的除式是

$$377337\div 5169=73.$$

178. 在密码 $FARES=(FEE)^2$ 中，每个字母代表六进制中的某个数字，并且相同的字母代表相同的数字．试译出这个密码．

解 在六进制中，

$1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=13$，$4^2=24$，$5^2=41$，

因此，$F=1$．同理

$11^2=121$，$22^2=524$，$33^2=2013$，$44^2=3344$，$55^2=5401$，

从而 $E=2$．

因此，密码可译成

$$15324=122^2.$$

本题还有另一解：

$$53241=221^2.$$

179. 如果

$$\frac{N}{O}=.ROMNEYROMNEYROMNEY\cdots$$

是一个真分数的小数表示，其中每个字母表示一个十进制数字．试译出这个密码．

解 因为 $ROMNEY$ 有六个不同字母，所以循环节的长度为6．因此分母等于7，即 $O=7$．字母 N 表示从1至6的某个数字，满足题目所有条件的唯一数字是4．密码可译成

$$\frac{4}{7}=0.571428571428\cdots$$

180. 商店橱窗上展出一套银制茶具，附有每件物品成本和零售价格（=成本+利润）说明书（以元为单位）：

糖罐	$HK.HC$	6.72	奶油壶	$HC.KH$	6.00
托盘	$AM.SL$	50.16	茶 壶	$SI.AB$	91.08

镊子 $HB.LT$ 1.72　　　茶 匙 $HM.IT$ 10.52

整套茶具 $BLC.SK$ 166.20

其中字母表示成本数字的密码，但是在每种情形下，已知利润与成本的比率是相同的．试译出这个密码．

解　因为任何物品的成本都少于它的零售价，所以研究糖罐和奶油壶的价格，可以断定$H=0$．再比较它们的价格，可求出

$$\overline{K0C}:\overline{CK0}=672:600=28:25.$$

设 $\overline{K0}=x$，$C=y$，那么

$$\frac{28}{25}=\frac{\overline{K0C}}{\overline{CK0}}=\frac{10x+y}{100y+x},\quad 25y=2x,$$

所以$x=50$，$y=4$．$\overline{K0C}=504$，$\overline{CK0}=450$．可见成本是零售价的$\frac{3}{4}$.从而知，托盘成本37.62，茶壶成本68.31，$T=9$．各字母所代表的数字如下：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

$B\ L\ A\ C\ K\ S\ M\ I\ T\ H.$

181．下列密码的每个字母代表十进制的数字，试译出这个密码：

$7(FRY\ \ HAM)=6(HAM\ \ FRY).$

解　设$FRY=x$，$HAM=y$，则

$$7(1000x+y)=6(1000y+x),$$

$$6994x=5993y,$$

$$538x=461y.$$

因为最后这个等式的系数是互质的，所以求得

$$x=FRY=461,\quad y=HAM=538.$$

182．在下列除法算式的×上填写适当的数字：

$$
\begin{array}{r}
\times\times 8\times\times \\
\times\times\times\overline{)\times\times\times\times\times\times\times\times} \\
\underline{\times\times\times\quad\quad\quad\quad} \\
\times\times\times\times\quad\quad\quad \\
\underline{\times\times\times\quad\quad\quad} \\
\times\times\times\times \\
\underline{\times\times\times\times}
\end{array}
$$

解 以 d 表示除数，得

$$8d<1000,\quad d<125.$$

因$7d<900$，故第一次相减得出商数的第一个数字是8，进一步可得商数是80809．因

$$80809\,d>10000000,$$

故得 $d>123$．这就是说 $d=124$．

因此，本题的除法算式是：

$$
\begin{array}{r}
80809 \\
124\overline{)10020316} \\
\underline{992\quad\quad\quad} \\
1003\quad\quad \\
\underline{992\quad\quad} \\
1116 \\
\underline{1116}
\end{array}
$$

183．节日祝词“*A MERRY XMAS TO ALL*”是一个密码，其中每个字母表示一个数字，每个单词表示一个平方数．如果已知每个单词中的数字之和等于某个平方数，试译出这个密码．

解 利用平方表很快可以确定，ALL为数100，144，400或900中的一个，TO为36或81．

唯一的四位数的平方数是

$$7396=XMAS,$$

它的数字之和是一个平方数，它的十位数字是 1，4 或 9，因此，$ALL=900$. 因为每个字母只表示一个数字，所以 $TO=81$，于是

$$MERRY=35224\text{或}34225.$$

但是只有后一个数才是平方数，因此，密码可译成

9 34225 7396 81 900.

如果不要求数字之和也是平方数，那么可求出另一解，

4 27556 3249 81 400.

184. 某个三位数与某个二位数的乘积具有形式

$$\begin{array}{r} PPP \\ \times\quad PP \\ \hline PPPP \\ PPPP \\ \hline PPPPP \end{array},$$

其中字母 P 表示任意一个素数数字（不一定相同）. 试把 P 换成素数数字，并证明本题只有一个解.

解 必须找出一个三位数与一个一位数，使它们的乘积是一个四位数，并且只允许利用数字 2，3，5，7. 总共有四种可能的方式：

$$3\cdot775=2325,\qquad 5\cdot555=2775,$$

$$5\cdot755=3775,\qquad 7\cdot325=2275.$$

因为在这四个乘积中，没有一个三位数出现两次，所以可以断言，要求的二位数一定由相同的数字组成. 因此，本题的唯一解是

$$\begin{array}{r} 775 \\ \times\quad 33 \\ \hline 2325 \\ 2325 \\ \hline 25575 \end{array}.$$

185. 在一份损坏了的原稿中，只能看清几个数字，而其余数字都用星号表示．试用适当的数字代替这些星号：

```
          * * * *
     ____________
* * ) * * * * 0 *
      * *
      ________
        * * *
        * * 1
      ________
            * *
            3 *
          _____
```

解　上式中保存的数字表明$3+1=10$，可见计算是在四进制中进行的．但是在四进制中，只有四个不同的数字：0，1，2，3，除数的一个倍数是＊＊1，另一个倍数是3＊．

其次，在四进制中，乘法表具有下列形式：

$$0\cdot m=m\cdot 0=0,\ 1\cdot m=m\cdot 1=m,$$

$$2\cdot 2=0,\ 2\cdot 3=12,\ 3\cdot 3=21.$$

因此，如果

$$*\,*\,1=p\cdot(*\,q),$$

那么，或者$p=q=1$，这是不可能的（二位数不能等于三位数），或者$p=q=3$．所以，商数的十位数字与除数的个位字数都是3．于是在四进制中

$$3\cdot 13=111,\ 3\cdot 23=201,\ 3\cdot 33=231,$$

$$2\cdot 13=32,\ 1\cdot 33=33.$$

但是

$$2\cdot 13+1<100,$$

因此，利用第一次相减得出的结果，得到除数33．由此可得，商数为1031，被除数为102003．

186. 在密码

$$\begin{array}{r} A \\ MATH \\ MAGS \\ +\ MATH \\ \hline GAME \end{array}$$

中，$GAME$代表一个素数．试译出此密码．

解 M应代表集合$\{1,\ 2,\ 3\}$中的一个元素，A应代表集合$\{4,\ 5,\ 9\}$中的一个元素（$A\neq 0$．因为若$A=0$，则

$$T+G+T\leqslant M\leqslant 3,$$

当不同字母代表不同数字时，这是不可能的）．由此可知，G应是集合$\{4,\ 5,7,8\}$中的一个元素．

因此，M有三种可能，A有三种可能，G有四种可能．所以$GAME$中前三个字母有36种可能性．查素数表可知，GAM只能是

742，451，752，591，892.

因为数字E是奇数，并且不同于已有的数字，所以在素数表中只要再查17个数就行了．唯一符合条件的数字是8923．原密码可译成

$$\begin{array}{r} 9 \\ 2967 \\ 2980 \\ +2967 \\ \hline 8923 \end{array} \qquad \text{或者} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ 2965 \\ 2984 \\ +2965 \\ \hline 8923 \end{array}$$

187．试译出密码

$$\begin{array}{rl} THE & \\ EARTH & \text{(地球)} \\ VENUS & \text{(金星)} \\ SATURN & \text{(土星)} \\ +\ URANUS & \text{(天王星)} \\ \hline NEPTUNE & \text{(海王星)}, \end{array}$$

上面每个字母代表一个数字.

解 显然$N=1$，因为设$N=2$或0将得出矛盾. 从右向左考虑各列.

第一列表明

$$E+H+2S+1=E+10l,$$

即

$$H+2S=9+10(l-1).$$

由此得$H=5$，$S=7$，因为其它的数对（H，S）将得出矛盾.

第二列给出关系式

$$2+5+2U+T+R=1+10m.$$

从第三列得

$$2+T+R+U+C_2=U+10n,$$

其中C_2表示第二列相加后，记在"心里"的数字. 由此得

$$4+2U-C_2=10(m-n),$$

或

$$2U=6+C_2,$$

从而C_2是偶数，且$C_2=2$. 因此$U=4$（$U=9$将得出$C_2>2$）.

于是$T+R=6$，即T、$R=6$、0，不过次序还不能肯定. 剩下未被利用的数字还有2，3，8，9. 把第四列相加，得

$$1+2A+E=10P,$$

所以$A=8$，$E=3$. 从第五列得出关系式

$$2+E+U+A+R=P+10q,$$

或者

$$3+V+R=P+10(q-1),$$

其中$R=0$或6，而P、$V=2$、9，次序可能不定. 但是，上述一切关系式，只有在

$$P=2,\ V=9,\ R=0,\ T=6$$

时才成立．因此，密码可以译成

$$\begin{array}{r} 653 \\ 38065 \\ 93147 \\ 786401 \\ +\quad 408147 \\ \hline 1326413 \end{array}.$$

188．三个连续偶数的乘积等于87＊＊＊＊＊8，求出这三个偶数，并把乘积填好．

解　因为乘积的个位数字是8，所以三个因数的个位数字都不等于0．因为

$$4\cdot6\cdot8=192,\qquad 2\cdot4\cdot6=48,$$

$$(87)^{\frac{1}{3}}=4.4\cdots,\qquad (88)^{\frac{1}{3}}=4.4\cdots,$$

所以乘积

$$442\cdot444\cdot446=87526608.$$

189．某人作普通的乘法，用字母E代表偶数数字，用字母O代表奇数数字，乘式是

$$\begin{array}{r} OEE \\ \times\quad EE \\ \hline EOEE \\ EOE \\ \hline OOEE \end{array},$$

试译出这个密码．

解　因为

$$188\cdot8=1504,$$

所以第一个“O”应大于1．用这个“O”乘以乘数中的十位数字“E”，得数不大于8，因此第一个“O”应为3，乘数的十位数字“E”应为2．$3EE$乘以2后，等于EOE，

所以 $3EE$ 只能是 306，308，326，328，346和348．但把这些数乘以 4 和 6，不能得到 $EOEE$．把它们乘以 8，这时只有346和348能给出得数 $EOEE$．其次

$$346\cdot 28=9688,$$

积不是 $OOEE$．因此，本题的唯一解是

$$\begin{array}{r} 348 \\ \times\quad 28 \\ \hline 2784 \\ 696 \\ \hline 9744 \end{array}.$$

190．九个正数可以用 9！种方法排列成三阶行列式．试求这些行列式的和．

解 如果交换行列式相邻两行的位置，那么行列式改变符号．如果用一切可能的方法把一个三阶行列式的各行重新排列，那么得到绝对值相等的三个正行列式和三个负行列式．因此可以把9!个行列式分成 $\frac{9!}{6}$ 组，并且每组内的行列式之和为 0．

191．把九个整数排成3×3方阵，使每行、每列及每条对角线上三数之和都相等．设 S 为这九个数之和，D 是由这个方阵构成的行列式．求证：$\frac{D}{S}$ 是整数．

证 设 $N=\frac{S}{3}$ 是下列方阵每行、每列及每条对角线上三数之和：

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}.$$

于是

$$N=(a+e+i)+(d+e+f)+(g+e+c)$$
$$-(a+d+g)-(c+f+i)=3e,$$

而$S=9e$. 把行列式的各行各列迭加，得

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3e & 3e & 3e \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a & b & 3e \\ d & e & 3e \\ 3e & 3e & 9e \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}S,$$

因此，$\dfrac{D}{S}$是整数.

192. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2cd+2ab & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{vmatrix}.$$

解 用△表示原行列式，用$\triangle_t$表示转置矩阵的行列式，于是

$$\triangle^2=\triangle\cdot\triangle_t$$
$$=\begin{vmatrix} (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \end{vmatrix}.$$

因此

$$\triangle=(a^2+b^2+c^2+d^2)^3.$$

193. 可以把二项式系数排成下表：

1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…
1	3	6	10	15	21	…

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \cdots \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array}
$$

求证：如果从这个无限的表格中取出一个任意大小的方块，使此方块的第一行（或第一列）是原表格的第一行（或第一列），那么此方块的行列式的值等于1.

证　构成表格的规律是：每个元素等于其正上方与左边元素之和.首先对方块的第一行是原表格第一行的情况证明.设方块有 $n\times n$ 个元素.现在对这个 n 阶行列式作如下变形：

$$(i\text{列})-(i-1\text{列})\longrightarrow(i\text{列}),$$
$$i=n,\ n-1,\ \cdots,\ 2.$$

然后按第一行展开，得出一个 $n-1$阶行列式，它是原来n阶行列式左下角元素的余子式.把这个过程继续下去，最后得到行列式的值是1.例如：

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 20 & 35 & 56 \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 15 & 21 \end{vmatrix}
$$
$$
=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 15 & 21 \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 6 \end{vmatrix}
$$
$$
=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=1.
$$

因为原表格关于主对角线是对称的，所以上述证明对于那种方块第一列为原表格第一列的行列式也适用，只是对行列式的变形，不是“列”相减，而是“行”相减.

194. 如果从一个3×3方阵中划去四个"角落"中的一个后，剩下的2×2方阵中四个数的总和都相等，那么在这种三阶方阵中两条对角线上各数之和相等. 这个性质对于更高阶的方阵依然保留吗?

证 设原方阵是

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

按照题意，有

$$a_2+b_2+a_3+b_3=a_1+b_1+a_2+b_2$$
$$=b_1+c_1+b_2+c_2=b_2+c_2+b_3+c_3.$$

由前两个和式相等可知

$$a_3+b_3=a_1+b_1 \text{或} b_3-b_1=a_1-a_3.$$

由后两个和式相等可知

$$b_1+c_1=b_3+c_3 \text{或} c_1-c_3=b_3-b_1.$$

因此,

$$a_1-a_3=c_1-c_3 \text{或} a_1+c_3=a_3+c_1.$$

把b_2加到最后这个等式的两边,就可得所需要的结论.这个性质不能推广到4×4方阵上去.为了说明这一点,考虑两个方阵

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

第一个方阵表明，如果3×3的子方阵各数之和都相等，那么对角线上各数之和不一定相等. 第二个方阵表明，即使在2×2的子方阵各数之和都相等时，对角线上各数之和也不一定相等.

195. 不计算积分，证明

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

证 原式左边的积分是半圆周

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

与 x 轴所围成的区域的面积，显然等于 π．右边的积分等于同一半圆的周长，也等于 π．

196. 设在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上定义一个连续函数 $f(x)$，使得对于定义域上的所有 x，

$$0<A\leqslant f(x)\leqslant B.$$

求证：在这种情形下

$$AB\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\leqslant A+B-\int_0^1 f(x)dx.$$

证 注意，当 $0\leqslant x\leqslant 1$时

$$\frac{(f-A)(f-B)}{f}\leqslant 0,$$

在区间[0，1]上把上式积分，就可得到所需要的不等式．

197. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right),$$

并把答案写成$\ln a-b$的形式，其中 a 和 b 都是正整数．

解 下面证明$a=4$，$b=1$．设

$$f(x)=\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right],$$

于是所要求的极限值

$$L=\int_0^1 f(x)dx.$$

对于$n=1$，2，…，当

$$\frac{2}{2n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$$

时，$f(x)=0$；当

$$\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{2}{2n+1}$$

时，$f(x)=1$. 因此，

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\cdots \\ &= -1+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right) \\ &= -1+2\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -1+2\ln 2 \\ &= \ln 4-1 \end{aligned}$$

198. 10个人决定建立一个图书馆，如果参加者增加 5 人，那么每人可少交付100元. 每人原先要付多少钱?

解 如果原来的参加者人数增加50%，那么每人只要付出原先应付款的$\frac{2}{3}$. 因此，100 元是原先应付款的 $\frac{1}{3}$，每人原先应付300元.

199. 某考卷包含26个问题. 评分的标准是，每答错一题扣 5 分，每答对一题给 8 分. 有一个人回答了全部的问题，如果所得的总分为 0，他正确地回答了多少题?

解 正确与错误的答案数目之比等于相应的分数的反比. 因此，他正确地回答的题数是

$$\frac{5}{5+8}\times 26=10.$$

200. 气象台发现，在某段时间里，如果早晨下雨，那么晚上是晴天；如果晚上下雨，那么早晨是晴天. 一共有 9 个雨天，并且 6 次晚上是晴天，7 次早晨是晴天. 这段时间

包含多少天?

解 整天晴天的天数是

$$\frac{1}{2}(6+7-9)=2,$$

因此，这段时间包含9+2=11天.

201. 如果某人步行去上班，下班时乘车回家，那么他在路上共用了1.5小时. 如果来回都乘车，那么他走完全程只用0.5小时. 如果他上班和下班回家都步行,在路上用了多少时间?

解 如果他两次用第一种方式上班和下班，那么他乘车经过家里和工作单位之间的两倍路程，并且也步行走过那么长的路程,共用了3小时. 因此,他上班和下班都步行，共用

$$3-0.5=2.5(\text{小时}).$$

√**202**. 某人在早上8—9时之间出发去旅行，这时他的手表的时针和分针重合在一起. 他在下午2—3时之间到达指定的旅行地点，这时他的手表的两支针指向完全相反的方向. 他从出发到到达目的地用了多少时间?

解 用了6小时.

假设可以把时针向相反方向延长，那么由于出发时，时针和分针重合,经过6小时,时针和它的延长线只交换一下位置，而分针恰好旋转了6周，回到原来的位置，因而和时针的延长线重合.

203. 一人用21.6元买一些糖，如果1斤糖的价格减少了0.1元，那么他可以用这些钱多买3斤糖. 他买了多少斤糖?

解 因为

$$216=2^3\cdot3^3=8\cdot27=9\cdot24,$$

所以他买了24斤糖.

204. 某人给一个小孩一元钱，要他用这钱去买邮票，要求1分邮票的张数是2分邮票的10倍，剩余的钱买5分的邮票．他买了各种面值的邮票各多少张?

解 所有的1分和2分的邮票可以分成相同的几小堆，使每堆价值为12分．买这些邮票所用的总金额应当可被5整除，即它为60分．因此，他买了5张2分邮票，50张1分邮票和8张5分邮票．

205. 某人给他的儿子们6元钱买戏票，他们应当平分这些钱．但是还有两个堂妹要跟着他们去看戏．这些钱平分给所有这些孩子，因而每人所得的钱比原先的少25分．一共有几个人去看戏?

解 每人的钱减少了总数的$\frac{1}{24}$，其次

$$24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6.$$

由数24的这些表示法中，选出这样的对偶

$$q_1c_1=q_2c_2,$$

使

$$q_1+1=q_2,\qquad c_1=c_2+2.$$

因此，开始时有6人，后来有8人去看戏.

206. 一位教授出了几种考卷，根据各张考卷的分数确定学生的平均分数．一个学生在做完最后一张考卷时发现，如果这一次他得了97分，那么他的平均分数就能达90分；但若最后一次只得73分，则他的平均分数只有87分，问这组考卷共有多少张.

解 因为最后一张考卷所得分数之差为

$$97-73=24(\text{分}),$$

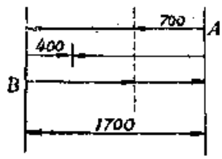
所产生的平均分数变化为

$$90-87=3\ (\text{分}),$$

所以这组考卷共有$24\div3=8$张.

207. 两只渡船各以匀速在一条河流的两岸之间航行，每只船一到达对岸就立即返回. 它们同时离岸相对航行，首次在离一河岸 700 米处相遇. 每只船继续开向相应的河岸，然后返回，又在离另一河岸400米处相遇. 试求河宽.

解 A船离开河岸航行了 700 米，与B船相遇. 在这个时刻，它们航行的总距离等于河宽. A船到达对岸后，又返回，返回时航行了 400 米，又与B船相遇. 在这个时刻，它们航行的总距离等于河宽的三倍. 因为它们的速度是固定的，所以A船一共航行



$$3\cdot700=2100\ (\text{米}).$$

河宽比A船航行的距离少400米，即河宽为1700米.

208. 容量为 21 公升的汽车散热器灌满 18 %的酒精溶液. 要从其中倒出多少升酒精溶液，再倒进同样数量的90%的酒精溶液，才能得到42%的酒精溶液？

解 原来的酒精溶液浓度与混合后的酒精溶液浓度之差

$$18\%-42\%=-24\%,$$

而倒进散热器的酒精溶液浓度与混合后的酒精溶液浓度之差

$$90\%-42\%=48\%.$$

因此,每公升90％的酒精溶液要配以2公升18％的酒精溶液. 所以，要从散热器倒出它的容积的$\frac{1}{3}$（即7公升）的18%的酒精溶液.

209．一个农场要用100元买100头牲畜．如果每头小牛值10元，每头小羊值3元，每头小猪值0.5元，那么农场共买了多少头小羊、小牛、小猪？

解 一头牲畜的平均价格为1元．每头小牛的价格与平均价格差9元，每头小羊的价格与平均价格差2元，每头小猪的价格与平均价格差－0.5元．因此，每买一头小牛就得买18头小猪，而每买一头小羊就得买4头小猪．设买了x头小牛，y头小羊，那么有

$$x(1+18)+y(1+4)=100,$$

化简后得

$$5y=100-19x,$$

要使$100-19x\geqslant 0$，且可被5整除，只有当

$$x=0\text{ 或 }x=5,\text{ 即 }y=20\text{ 或 }y=1$$

时才有可能．所以，农场或者买20头小羊，80头小猪，或者买5头小牛，1头小羊和94头小猪．

210．父亲今年的年龄是一个完全平方数．表示他年龄的各数字之乘积等于母亲的年龄，他年龄的各数字之和等于女儿的年龄，而母亲年龄的数字之和等于儿子的年龄．问一家人各多少岁．

解 根据题意和目前人的寿命情况，有三种可能的方案：

64，24，10，6；49，36，13，9；36，18，9，9．

如果把孩子的年龄和父母的年龄加以比较，那么可以看出，唯一的方案是：父亲49岁，母亲36岁，女儿13岁，儿子9岁．

211．学校图书馆有一批图书要借给各班级同学阅读．如果借给每个班级50本，最后分到的一个班级只能借到45本．为了平均出借，决定借给每个班级45本，余下95本作为下

一次出借．这批图书有多少本？

解 实际上，比最初少借 5 本书的班数是

$$95 \div 5 = 19 \text{（班）},$$

总的班数是

$$19 + 1 = 20 \text{（班）}.$$

所以，这批图书有

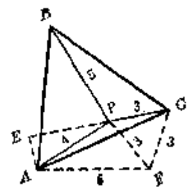
$$50 \cdot 20 - 5 = 995 \text{（本）}.$$

2

平 面 几 何

212. 设P是等边$\triangle ABC$内的一个点，P点和三个顶点连成的三条线段长度分别为3，4，5厘米．这个三角形的边长等于多少？

解 如图所示，在$\triangle ABC$中，已知三条线段长度之比为



$$PC:PA:PB=3:4:5.$$

作这样一个等边$\triangle PCF$，使两点P和F位于AC的两侧．引线段AF．延长线段CP至E，使$AE\perp CE$．注意

$$\angle PCB=60°-\angle PCA=\angle ACF.$$

因此

$$\triangle PCB\cong\triangle FCA,\ AF=BP=5.$$

这就是说，$\triangle APF$是直角三角形，从而

$$\angle APE=180°-60°-90°=30°.$$

因此，

$$AE=2,\ EP=2\sqrt{3}.$$

于是

$$AC=\sqrt{2^2+(3+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$$
$$\approx 6.7664(\text{厘米}).$$

213. 两个三角形的边长分别为$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{c^2+a^2}$和$\sqrt{p^2+q^2}$，$\sqrt{q^2+r^2}$，$\sqrt{r^2+p^2}$. 已知

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2,$$
$$a>p,\ b>q,$$

哪个三角形的面积较大？

解 首先证明一个事实：如果四面体某顶点上的所有平面角都是直角，那么三个棱面的面积的平方和等于第四个棱面面积的平方. 实际上，如果设第四个棱面与其余三个棱面组成的角分别为α、β、γ，那么

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

但是各个棱面面积有下列关系式：

$$S_1=S_4\cos\alpha,\ S_2=S_4\cos\beta,\ S_3=S_4\cos\gamma,$$

因此

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S_4^2.$$

其次再来解本题. 考虑一个四面体，它的一个顶点上的所有平面角都是直角，从这个顶点出发的三条棱边长分别等于a，b，c. 于是，其它三条棱边长分别等于$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{c^2+a^2}$，这正是第四个棱面的三条棱边长. 根据上面证明的事实，第四个棱面的面积的平方等于

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}.$$

如果再考虑一个同样的四面体，它的组成直角的三条棱边长分别等于p，q，r，那么它的第四个棱面的面积的平方等于

$$\frac{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}{4}.$$

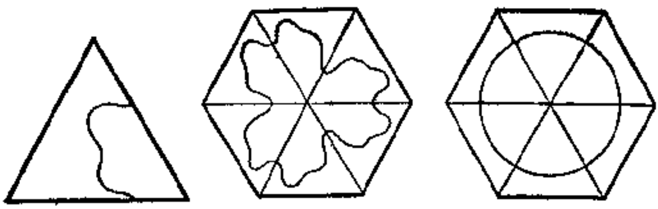
因为已知

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2,$$

所以，两个已知三角形的面积相等，而与 a，p，b，q之间的关系无关.

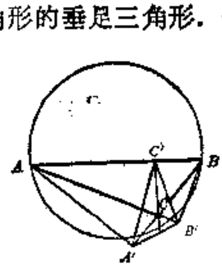
214. 用怎样的最短曲线可以把一个等边三角形分成等积的两部分？

解 取定这个等边三角形的一个顶点，并以从此顶点出



发的两条边为轴，把这个三角形同等分它的曲线反转五次，这时得到一个正六边形和一条封闭曲线，这条曲线把正六边形分成等积的两部分，如图所示．因为要求最短的曲线，所以这条曲线是以取定的顶点为圆心的一个圆．

215. 如果一个三角形的顶点是另一个三角形高线的垂足，那么前一个三角形称为后一个三角形的垂足三角形．试求一个钝角三角形，使它与其垂足三角形相似．



解 取钝角$\triangle ABC$，其内角服从条件$\angle C>\angle B>\angle A$．分别以 A'，B'，C'表示点A，B，C 在边 BC，AC，AB上的投影．在$\triangle A'B'C'$中，

内角满足关系式$\angle B'>\angle A'>\angle C'$，这可由作$\triangle ABC$外接圆在$A,B,C$三点的切线来确定．因为这三条切线与$\triangle A'B'C'$的三边平行．为使$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$，必然要求

$$\angle A=\angle C',\ \angle B=\angle A',\ \angle C=\angle B'.$$

考虑四顶点共圆的四边形$AA'CC'$和$C'CB'B$．注意，$\triangle ABC$的高线把垂足三角形的内角平分，可求出

$$\angle B=\angle A'=2\angle A,\ \angle C=\angle B'=2\angle B,$$

$$\angle C=2\angle B=4A.$$

由此得出

$$\angle A=\frac{\pi}{7},\ \angle B=\frac{2\pi}{7},\ \angle C=\frac{4\pi}{7}.$$

如果原来的钝角三角形又是等腰的，那么本题无解．因为三个内角$\angle C>\angle B$，$\angle B=\angle A$，得出一连串矛盾的等式：

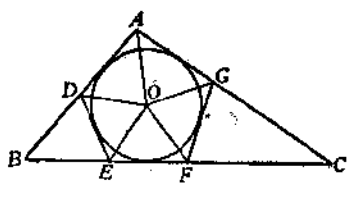
$$\angle A=\angle B=\angle A'=\angle B'=2\angle A=2\angle B.$$

所以上面所得到的解是唯一的．

容易证明，在锐角三角形中，与垂足三角形相似的三角形只能是等边三角形．

216．为了把一个钝角三角形剪成一些锐角三角形，最少要剪七刀．试指出，实际上应如何剪这七刀．

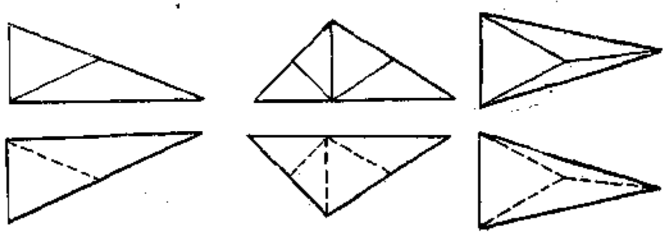
解 用以下分割$\triangle ABC$的方法（其中$\angle A$是钝角）．引线段DE和FG（D在AB上，G在AC上，E和F在BC上）与圆心在O点的内切圆相切，使$DE\perp OB$，$FG\perp OC$．于是得到两个锐角等腰三角形BDE，FGC和五边形$ADEFG$，这五边形的所有内角



都是钝角．引线段OA，OD，OE，OF，OG，把这些内角平分，并把五边形分成五个三角形．在O点的所有中心角都是锐角，因为所得的五个三角形中其它各个角都大于$45°$．因此，五个三角形都是锐角三角形．

217．在平面内有两个全等三角形，它们可以通过镜面反射从一个三角形得到另一个三角形．如果把其中一个三角形分割为若干部分，再把这些部分在平面内调换位置（但不用反射方法），那么就可以拼合成另一个三角形．问应怎样分割才能达到这个目的．

解　这两个三角形中的一个不需要分割，而把另一个分



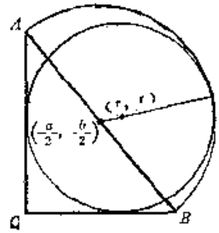
割成一些等腰三角形．

如果原来的三角形是直角三角形，那么应沿着斜边上的中线分割．如果原来的三角形是钝角三角形，那么先要用最长边上的高线分为两个直角三角形，后再按直角三角形的情形分割．最后，如果原来的三角形是锐角三角形，那么应按此三角形外接圆圆心与三顶点的连线进行分割．

218．已知曲边三角形ABC的两条边是直角三角形ABC的两条直角边，第三边是以直角三角形的斜边为直径（在直角三角形外面）的半圆周．求曲边三角形内切圆的半径．

解　以直角$\triangle ABC$的两条直角边为坐标轴，建立直角

坐标系．在这个坐标系中，内切圆圆心与已知半圆圆心的坐标分别为(r, r)与$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$，其中$r$是所要求的圆的半径，$a$和$b$是直角三角形的两条直角边长．这两个圆心之间的距离等于半径的差，即



$$(r-\frac{a}{2})^2+(r-\frac{b}{2})^2=(\frac{c}{2}-r)^2,$$

利用勾股定理 $a^2+b^2=c^2$，得 $r=a+b-c$.

再注意到直角$\triangle ABC$的内切圆的半径等于

$$\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}$$

$$=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-a^2-b^2}=\frac{a+b-c}{2},$$

因此，所要求的圆半径等于直角$\triangle ABC$的内切圆的直径．

219. 某人决定把自己的宝物埋藏在一个无人居住的海岛的岸边．那里有两块大石头A和B并排着，离岸较远一点的地方有三棵椰子树C_1，C_2，C_3．他从C_1开始，截取一线段C_1A_1等于线段C_1A，使$C_1A_1\perp C_1A$，且A_1和$\triangle AC_1B$各在线段C_1A的一侧．类似地，他截取线段C_1B_1等于线段C_1B，使$C_1B_1\perp C_1B$，且B_1和$\triangle AC_1B$各在线段C_1B的一侧，然后标出AB_1和BA_1的交点P_1．他又依次站在C_2，C_3，用类似方法标出两点P_2和P_3，最后他把宝物埋在$\triangle P_1P_2P_3$的外接圆圆心下面．

几年以后，他回岛时发现，在强烈的飓风破坏下，椰子树已不见踪影了．试问：他怎样才能找到自己埋下的宝物？

解 因为

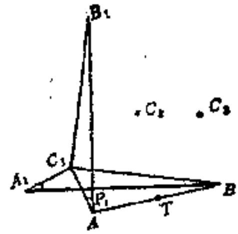
$\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A_1BC_1$，

所以

$\angle C_1AB_1 = \angle C_1A_1B$.

其次

$\angle AP_1A_1 = \angle AC_1A_1 = 90^\circ$，



因此，$\angle AP_1B = 90^\circ$. 这就是说，P_1点位于以AB为直径的圆上. 类似地，P_2，P_3两点也都位于以AB为直径的圆上. 因此，宝物埋在线段AB的中点T的下面.

220. 设P是锐角$\triangle ABC$内任意一点. 求证：

$PA + PB + PC \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \times$（$\triangle ABC$ 的内切圆的三个切点组成的三角形的周长）.

证 设r为$\triangle ABC$内切圆的半径，则

$$PA + PB + PC \geqslant 6r.$$

又知道，在一个圆的所有内接三角形中，等边三角形周长最大. 以D，E，F表示$\triangle ABC$内切圆的切点. 于是

$$PA + PB + PC \geqslant 6r = \frac{2}{\sqrt{3}}(3r\sqrt{3})$$

$$\geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(DE + EF + FD),$$

等号仅当 $\triangle ABC$ 为等边三角形，且P点为它的重心时才成立.

221. 一个三角形的边长为a，b，c，连接重心和内切圆圆心所成直线与c边所对的角平分线垂直. 求证：a，b，c的等差中项等于a，b的调和中项（a和b的调和中项$H = \frac{2ab}{a+b}$）.

证 设G是$\triangle ABC$的重心，I是其内切圆圆心，S是这个三角形的面积，h_a和h_b分别是边a和b上的高．以P和Q分别表示直线GI和BC，CA边的交点．因为$\triangle GPC$与$\triangle GQC$的面积之和等于$\triangle IPC$与$\triangle IQC$的面积之和，并且$CP=CQ$，所以求得

$$\frac{1}{3}h_a+\frac{1}{3}h_b=2r.$$

现在将关系式

$$h_a=\frac{2S}{a},\quad h_b=\frac{2S}{b},\ r=\frac{2S}{a+b+c}$$

代入上式，就可以得到所要求的等式．

222．设在一个三角形内给定有限个点．把这些点彼此连接起来，并把这些点和各顶点连接起来，使所得的线段互不相交，且把这个三角形分成一些较小的三角形．证明：这些小三角形的个数总是奇数．

证 设小三角形的个数是n，e是它们在原三角形内的边数．这n个小三角形共有$3n$条边，其中三边是原三角形的三边，而其余的$3n-3$边在原三角形内，并且这$3n-3$边中每条边都计算了两次（即每条边属于两个小三角形），因此，

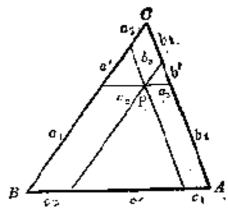
$$e=\frac{1}{2}(3n-3).$$

因为数e是整数，所以n应该是奇数．

223．过$\triangle ABC$内的一个点P作三条直线平行于它的三条边，把每条边分成三段，分别以a'，b'，c'表示a，b，c的中间一段，求证：

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=1.$$

证 考虑如图所示的平行四边形和相似三角形，可得下列比例式：



$a' : a = b_1 : b$；$a' : a = c_2 : c$；

$b' : b = c_1 : c$；$b' : b = a_2 : a$；

$c' : c = b_2 : b$；$c' : c = a_1 : a$.

另外还有三个恒等式

$$a' : a = a' : a;\quad b' : b = b' : b;\quad c' : c = c' : c.$$

以上九个等式组成含有九个方程的方程组．把这九个方程相加，得

$$3\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) = \frac{a_1 + a' + a_2}{a} + \frac{b_1 + b' + b_2}{b}$$

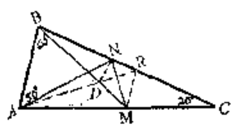
$$+ \frac{c_1 + c' + c_2}{c} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

因此，

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1.$$

224．在等腰△ABC中，$\angle C = 20°$．在两腰AC和BC上分别取M和N两点，使$\angle ABM = 60°$，$\angle BAN = 50°$．不用三角学方法证明：$\angle BMN = 30°$．

证 因为三角形的内角和是180°，所以



$$\angle CBA = \angle CAB = 80°,$$

$$\angle CBM = 20°,\quad \angle BAN = 50° = \angle BNA,$$

从而$BN = AB$.

作$MR \parallel AB$，连结点A和R成线段，与BM相交于D点．引ND．由于对称性，所以△ABD和△DRM都是等腰三角形，就是说，它们的各角对应相等．

其次，$BD=AB=BN$，从而

$$\angle BND=\angle BDN=80°, \quad \angle NDR=40°.$$

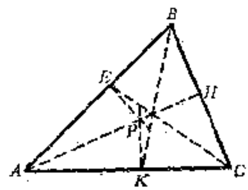
现在注意到$\angle MRC=80°$，因此

$$\angle NRD=40°=\angle NDR, \quad ND=NR.$$

因$DM=MR$，故线段MN垂直平分DR. 因此

$$\angle BMN=\frac{60°}{2}=30°.$$

225. 求证：如果以三角形内角平分线与对边的交点为垂足，所作的三条垂线相交于一点，那么这个三角形是等腰三角形.



证 三角形任意内角的平分线把对边分成与邻边成比例的线段. 如果从$\triangle ABC$内一点P作各边的垂线，垂足为E，H，K，那么

$$\begin{aligned}&AK^2+BE^2+CH^2\\&=AP^2-PK^2+BP^2-PE^2+CP^2-PH^2\\&=AE^2+EP^2-PK^2+BH^2+HP^2\\&\quad-PE^2+CK^2+KP^2-PH^2\\&=AE^2+BH^2+CK^2.\end{aligned}$$

这就是说，垂足把三边分成六段，这些相隔的线段长度的平方和相等. 如果从三角形内角平分线与三角形三边a，b，c的交点作垂线，这些垂线相交于一点，那么

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{c+a}\right)^2+\left(\frac{ca}{a+b}\right)^2$$

$$=\left(\frac{ca}{b+c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2,$$

合并相同分母的分式后，得

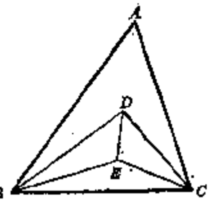
$$\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0,$$

由此得

$$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2=0.$$

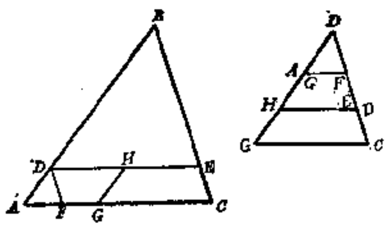
因为前三个因式中至少有一个等于 0，所以原三角形是等腰三角形.

226. 在$\triangle ABC$中，线段BD和BE三等分$\angle B$，CD和CE三等分$\angle C$. E是一个靠近BC边的交点. 求证：$\angle BDE=\angle EDC$.



证 因为E是$\triangle BCD$的两条角平分线的交点，所以DE是第三条角平分线.

227. 求证：任意一个三角形都可以用直线分成四部分，由这四部分组成的两个三角形与原三角形相似.



证 在已知$\triangle ABC$的三边AB，BC和CA上分别取三点D，E，F，使

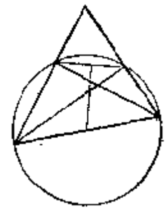
$AD:AB=CE:CB=AF:FC=1:5.$

然后在AC边上取G点，使$AG=2AF$，在DE上标出中点H.

现在要用三条直线DE，DF和GH来分割三角形. $\triangle BDE$是要求的两个三角形中的一个. 剩下的其它三块可以在这个平面内移动，拼成第二个相似三角形.

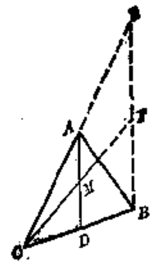
228. 把三角形的两条高的垂足连结成一条线段，过这条线段的中点作垂线. 求证：这条垂线平分三角形的第三边.

证 以三角形的第三边为直径作一个圆，这圆一定通过其它两边的高的垂足，连结这两个垂足所成的线段是这个圆的弦. 因此，过这条线段中点的垂线必通过圆心，即通过三角形第三边的中点.



229. 求证：如果从 $\triangle ABC$ 的顶点 C 引出的一条直线把过顶点 A 的中线 AD 平分，那么这条直线把 AB 边分成 $1:2$.

证 从顶点 B 引一条直线 BE 平行于中线 AD，与 CA 边的延长线相交于 E 点，以 M 表示 AD 的中点，延长 CM 与 BE 相交于 F 点，显然，A 是 CE 的中点，F 是 BE 的中点. 因此，AB 和 CF 是 $\triangle CBE$ 的中线，就是说它们彼此分成 $1:2$.



230. 求证：如果线段 a，b，c 构成一个三角形，那么线段 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 也能构成一个三角形.

证 因为三角形任意一边小于另外两边之和而大于另外两边之差，所以

$$|\sqrt{b}-\sqrt{c}|(\sqrt{b}+\sqrt{c})=|b-c|<(\sqrt{a})^2$$

$$<(b+c)<(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$

由此得出

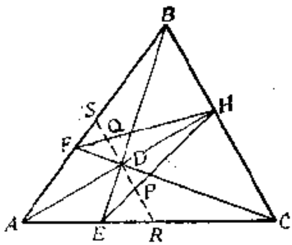
$$|\sqrt{b}-\sqrt{c}|<\sqrt{a}<(\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

同理可得另外两个不等式. 因此，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 可以构成一个三角形.

231. 在锐角 $\triangle ABC$ 中作一条高 AH. 在 AH 上任意取一点 D，连 BD 交 AC 于 E 点，并连 CD 交 AB 于 F 点. 求证：

$\angle AHE = \angle AHF$.

证 过 D 点作 BC 的平行线 SR，分别与 HE，HF，AC和AB相交于P，Q，R和S四点．于是



$$\frac{DP}{DR}=\frac{BH}{BC},$$

$$\frac{DS}{DQ}=\frac{BC}{CH},$$

$$\frac{DR}{DS}=\frac{CH}{BH}.$$

把这三个等式连乘，得 $DP = DQ$．于是，在 $\triangle HPQ$ 中，高DH平分底边 PQ．因此，$\triangle HPQ$ 是等腰三角形，HA是$\angle FHE$的平分线，即$\angle AHE=\angle AHF$．

232．求证：如果一个三角形的两个内角的平分线相等，那么这个三角形是等腰三角形．

证 1 利用附录中，由三角形各边的长度表示内角平分线长度的公式

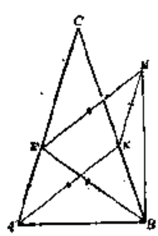
$$\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}=\beta_a^2$$

$$=\beta_b^2=\frac{ac(a+b+c)(c+a-b)}{(a+c)^2},$$

化简后得

$$c(a+b+c)(a-b)[(a+b)(c^2+ab)+3abc+c^3]=0.$$

因为除了 $a-b$ 以外，所有的因式都是正的，所以得$a=b$．



证 2 如图，设在$\triangle ABC$ 中，BE和 AK 是相等的角平分线．作 $EM \parallel AK$，$KM \parallel AC$．于是$EM = AK = BE$，因而

$\angle EMB=\angle EBM$.

设 $\angle A>\angle B$，那么

$$\angle KMB=\angle EMB-\angle EMK=\angle EMB-\angle EAK$$
$$=\angle EMB-\frac{1}{2}\angle A<\angle EBM-\frac{1}{2}\angle B=\angle KBM.$$

在$\triangle KBM$中大角对大边，从而$KB<KM$，故$KB<AE$.

现在考虑$\triangle EBA$和$\triangle KAB$. 它们有公共边AB，$AK=EB$，并且

$$\angle EBA=\frac{1}{2}\angle B<\frac{1}{2}\angle A=\angle KAB\text{（根据假设）}.$$

由余弦定理可得$AE<KB$. 这和上述$KB<AE$矛盾，因此不可能有$\angle A>\angle B$.

同理可证，不可能有$\angle A<\angle B$. 因此，$\angle A=\angle B$.

233. 设x_i是$\triangle A_1A_2A_3$内的一个点到顶点A_i（$i=1$, 2, 3）对边的距离，r是这个三角形的内切圆的半径. 证明或推翻不等式

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\geqslant\frac{3}{r}.$$

证 我们来证明，这个不等式一般说来是不成立的.

实际上，设Q是这个三角形的某一内点，它到三角形各边的距离y_1，y_2，y_3满足关系式

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}},\qquad \frac{y_3}{y_1}=\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3}},$$

其中a_1，a_2，a_3是$\triangle A_1A_2A_3$的各边的长（显然，这样的点Q正好有一个）. 我们来证明

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\geqslant\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3},$$

并且等号当且仅当给定的点与Q点重合时才成立.

首先注意

$$a_1y_1^2=a_2\ y_2^2=a_3\ y_3^2,$$

以M^2表示这三个相同的值．其次

$$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=y_1a_1+y_2a_2+y_3a_3=2S,$$

其中S是三角形的面积．于是

$$2S=a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=M^2\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}\right).$$

同样

$$2S=M(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}),$$

从而

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=\frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})^2}{2S}.$$

由此得出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}-\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}\right)\\&=\frac{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}{x_1x_2x_3}-\frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})^2}{2S}\\&=\frac{(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)}{2x_1x_2x_3S}\\&\quad-\frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})^2x_1x_2x_3}{2x_1x_2x_3S}.\end{aligned}$$

这个分式的分子等于

$$\begin{aligned}&a_1x_1^2(x_2+x_3)+a_2x_2^2(x_3+x_1)+a_3x_3^2(x_1+x_2)\\&-2(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)x_1x_2x_3\\&=x_1(\sqrt{a_2}x_2-\sqrt{a_3}x_3)^2+x_2(\sqrt{a_3}x_3-\sqrt{a_1}x_1)^2\\&\quad+x_3(\sqrt{a_1}x_1-\sqrt{a_2}x_2)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

当且仅当

$$\sqrt{a_1}x_1=\sqrt{a_2}x_2=\sqrt{a_3}x_3$$

时分子才等于0，即$x_1=y_1$，$x_2=y_2$，$x_3=y_3$时分子才等于0．特别，对于内切圆圆心$x_1=x_2=x_3=r$，可得

$$\frac{3}{r}\geqslant\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}.$$

当 $y_i=r$，且 $a_i=\frac{M^2}{r^2}$时，上式等号成立．因此，如果三角形是等边三角形，那么对于任意一个内点，

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\geqslant\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=\frac{3}{r};$$

如果三角形不是等边三角形，那么可以找到一点Q，使下列不等式对Q成立：

$$\frac{3}{r}>\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=\frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})^2}{2S}.$$

234．设三角形T的内角平分线分别等于β_a，β_b，β_c，它的中线分别等于m_a，m_b，m_c，它的内切圆半径和外接圆半径分别等于r和R．求证：

$$\beta_a^6+\beta_b^6+\beta_c^6\leqslant p^4(p^2-12rR)\leqslant m_a^6+m_b^6+m_c^6,$$

其中p是这个三角形的半周长．当且仅当三角形T是等边三角形时等号才成立．

证　首先注意

$$p^4(p^2-12rR)=p^4\left(p^2-12\frac{S}{p}\cdot\frac{abc}{4S}\right)$$

$$=p^4\left(p^2-\frac{3abc}{p}\right)=p^3(p^3-3abc)$$

$$=p^3[(p-a)^3+(p-b)^3+(p-c)^3],$$

其中S是三角形T的面积．其次由附录可知

$$\beta_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}\leqslant\sqrt{p(p-a)},$$

其中等号只有当 $b=c$ 时才成立．可以类似地表示β_b和β_c．因此

$$\beta_a^6+\beta_b^6+\beta_c^6\leqslant p^3[\Sigma(p-a)^3],$$

其中当且仅当三角形是等边三角形时，等式成立．

再次，由平行四边形对角线定理可得

$$(2m_a)^2+a^2=2b^2+2c^2,$$

$$m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$$

$$=\frac{1}{4}[(b+c-a)(b+c+a)+b^2+c^2-2bc]$$

$$=p(p-a)+\frac{1}{4}(b-c)^2.$$

由此推出

$$m_a^2\geqslant p(p-a),$$

此式等号只有当$b=c$时才成立．对m_b和m_c可得类似的结论．因此

$$m_a^6+m_b^6+m_c^6\geqslant p^3[\Sigma(p-a)^3],$$

其中等号只有在三角形T是等边三角形时才成立．

235．设$\triangle ABC$是锐角三角形，求证：

$$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1,$$

其中a，b，c是三角形的三条边，h_a，h_b，h_c是对应边上的高．

证 1　三角形的三条高满足关系式

$$h_a = b\sin C,\ h_b = c\sin A,\ h_c = a\sin B,$$

因此

$$h_a + h_b + h_c = b\sin C + c\sin A + a\sin B < a + b + c.$$

由此得

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1. \tag{1}$$

其次，设垂心把三条高分成下列各线段：

$h_a = x + w,\ h_b = v + z,\ h_c = y + u.$

于是下列各个不等式成立：

$$u + v + v + x > b,$$
$$x + y + y + z > c,$$
$$z + w + w + u > a.$$

把这些不等式相加，得

$$2(h_a + h_b + h_c) > a + b + c.$$

从而得

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} > \frac{1}{2}. \tag{2}$$

综合（1）和（2），就得到所需要的结果.

证 2 如果P是锐角$\triangle ABC$内任意一点，那么

$$AP + BP + CP > \frac{a + b + c}{2}.$$

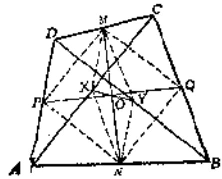
取垂心H为P点，得

$$h_a + h_b + h_c > AH + BH + CH > \frac{a + b + c}{2}.$$

此外，已知$\sqrt{3}(a + b + c) \geqslant 2(h_a + h_b + h_c)$，由此可得到不等式

$$\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.$$

236. 证明:在任意四边形中,对角线中点连线的中点与这个四边形对边中点连线的交点重合.



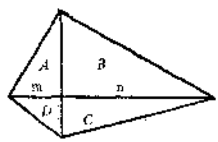
证 任意四边形 $ABCD$ 各边的中点是某个平行四边形 $MQNP$ 的顶点,而此平行四边形的对角线 PQ 和 MN 相交于 O 点,且相互平分.

现在考虑一个边为 AC,CD,DB 和 BA 的四边形 $ACDB$.四点 M、N 和 X、Y(原四边形对角线的中点)平分了四边形 $ACDB$ 的各边.就是说,$MYNX$ 是平行四边形.这个平行四边的对角线 MN 和 XY 相交,且相互平分.因此,线段 XY 的中点和线段 MN 的中点(即 O 点)重合.

237. 一个面积为 Q 的四边形被其对角线分成四个三角形,这四个三角形的面积分别为 A,B,C,D.求证:

$$A\cdot B\cdot C\cdot D=\frac{(A+B)^2(B+C)^2(C+D)^2(D+A)^2}{Q^4}.$$

证 等高三角形面积之比等于相应底边长度之比 因此,利用如图所示的符号表示相应的面积和线段,得



$$\frac{A}{A+B}=\frac{m}{m+n}=\frac{D}{C+D}$$

$$=\frac{A+D}{A+B+C+D}=\frac{D+A}{Q}.$$

类似地,

$$\frac{B}{B+C}=\frac{A+B}{Q},\quad \frac{C}{C+D}=\frac{B+C}{Q},\quad \frac{D}{D+A}=\frac{C+D}{Q}.$$

把这四个等式相乘,就得到所需要的等式:

$$A\cdot B\cdot C\cdot D=\frac{(A+B)^2(B+C)^2(C+D)^2(D+A)^2}{Q^4}.$$

238. 求证：如果过四边形 $ABCD$ 内固定点O的一切直线都把四边形的周长二等分，那么这个四边形一定是平行四边形．

证 过O点作直线 EF，使此直线不通过这个四边形的任何顶点．在包含E点的一边上取与E等距离的两点，再过这两点和O点作两条直线，它们与包含F点的另一边相交于两点．这两点到F点的距离相等，因为每条直线都把四边形的周长二等分．因为同一条边上的三点是另一边上三点的中心投影，所以这两边互相平行．同理可证，另一组对边也互相平行．因此，四边形$ABCD$是平行四边形．

239. 考虑一个边长为x和y的矩形R，其中$x<y$．如果从R中去掉一个边长为x的正方形，那么得到另一个矩形R'．大家知道，如果R'和R相似，那么R是一个“黄金矩形”，并且$\frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．但是，如果$R'$和$R$不相似，对$R'$做与$R$的同样分割处理，即从$R'$中去掉以$R'$的短边为边长的正方形，那么得到另一个矩形$R''$．问在什么条件下，$R''$和$R$相似．

解 如果$x<y-x$，且R和R''相似，那么

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{y-2x} \quad \text{或} \quad \frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{2}}{1}.$$

如果$y-x<x$，而R和R''相似，且R的长边平行于R''的长边，那么

$$\frac{y}{x}=\frac{y-x}{2x-y} \quad \text{或} \quad \frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

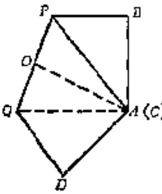
但是在这种情形下，破坏了R'不相似于R的条件．

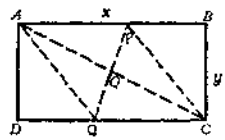
如果$y-x<x$，而R和R''相似，且R的长边平行于

R''的短边，那么

$$\frac{y}{x}=\frac{2x-y}{y-x} \quad 或 \quad \frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}}{1}.$$

240. 把边长为 x 和 y 的矩形的两个相对顶点重合在一起，求被折直线的长度.





解 设矩形$ABCD$的边长

$AB=CD=x$,

$AD=BC=y$,

其中 $x\geqslant y$. 把顶点C和A重合在一起，以PQ表示被折直线. 由于对称性，

$$PC=PA=CQ=AQ,$$

因此$AC\perp PQ$，并且在O点上互相平分.

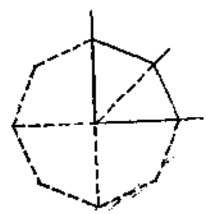
因为$\triangle AOP\backsim\triangle ABC$，所以

$$\frac{PO}{BC}=\frac{AO}{AB}.$$

因此

$$PQ=2PO=\frac{2AO\cdot BC}{AB}=\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}.$$

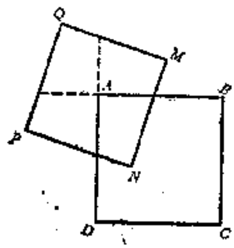
241. 长方形房间的一角要用两块相同的屏风围住，每块屏风长 4 米. 屏风应当如何排列才能使被围的面积最大?



解 被围的部分地面形状是四边形，从墙角顶点出发的两条边相等. 四个这种全等的四边形可拼合成一个边长相等的八边形，在这样的八边形中，正八边形面积最大. 因此，这个正八边形的四分之一就是所求的面积最大的四边形，面积为 $8(\sqrt{2}+1)$ 平方米. 因此，屏风应当这样排列，使每块屏

风同墙壁和墙角的平分线组成一个等腰三角形．

242．正方形$ABCD$的顶点A位于正方形$MNPQ$的中心．AB边分MN边为$1:2$．如果$AB=MN$，求这两个正方形的共同部分的面积．



解 延长$\angle A$的两边，这时正方形$MNPQ$被分成四个全等的四边形．因此，这两个正方形的共同部分的面积等于正方形$MNPQ$的面积的四分之一．这个结果既不依赖于AB分MN的比，也不依赖于正方形$ABCD$的尺寸，但只需要$AB\geqslant\frac{MP}{2}$．

243．设在单位正方形中给出任意的九个点．求证：由这些点组成的三角形中至少有一个三角形的面积不大于$\frac{1}{8}$，并推广这个结果．

证 易证：在矩形中，任意三点可以组成一个三角形，其面积不大于这个矩形面积的一半．（如果需要的话，先可把原矩形缩小，使这个三角形内接于小矩形．然后把小矩形分成一些更小的矩形，使这个三角形所在的部分不超过这些小矩形的一半．）

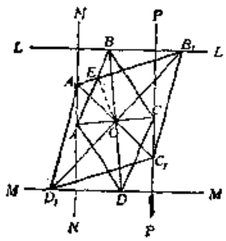
其次，把已知的单位正方形分成四个全等的小正方形，其中至少有一个小正方形（包含边界在内）应包含三个或三个以上的已知点．由上述结果，立即可得所需的结论．

推广：设p，q都是大于1的整数．在单位正方形内$2pq+1$个点中，至少有三个点，它们确定的三角形的面积不

大于$\frac{1}{2pq}$，实际上，利用$p-1$条水平直线和$q-1$条垂直直线，可把正方形分成$p\cdot q$个全等矩形，再用第一段的结论，就可证明.

244. 求证：内接于一个矩形的一切菱形都是相似的.

证 1 可以证明一个更强的命题：内接于两组互相垂直的平行线的一切菱形都是相似的.



首先注意，所有这些菱形的对角线相交于O点，O点是这两组平行线组成的矩形的中心. 设$ABCD$是一个菱形，其顶点为这个矩形各边的中点，而$A_1B_1C_1D_1$是一个内接菱形. 因为$\triangle OAA_1\backsim\triangle OBB_1$，所以得出比例式

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OA_1}{OB_1},$$

由此推出$\triangle AOB\backsim\triangle A_1OB_1$. 换句话说，每个内接菱形都和菱形$ABCD$相似.

由此可得一些有趣的推论. 因为

$\angle ABO=\angle A_1B_1O$，$\angle OAB=\angle OA_1B_1$，

所以四边形$OEBB_1$和OAA_1E的各顶点共圆. 其次，因为$A_1A\perp AO$，所以$OE\perp A_1B_1$.

证 2 考虑平面上的菱形$ABCD$，其顶点A在直线$y=-a$上，顶点B在直线$x=b$上，顶点C在直线$y=a$上，顶点D在直线$x=-b$上.（显然，用这种方法可以给出所有与矩形内接的菱形，为此只要过这个矩形的中心作坐标轴平行于其各边：矩形各边的方程可以写为$x=\pm b$，

$y=\pm a$．）

显然，AC和BD相交于坐标原点．（注意，x轴平分AC边，y轴平分BD边．）

设C点的坐标为（x_1，a），于是A点的坐标为（$-x_1$，$-a$），直线AC的方程为$y=\frac{a}{x_1}x$．所以BD的方程为

$$y=-\frac{x_1}{a}x.$$

因此，B点的坐标为（b，$-\frac{bx_1}{a}$）．就是说，

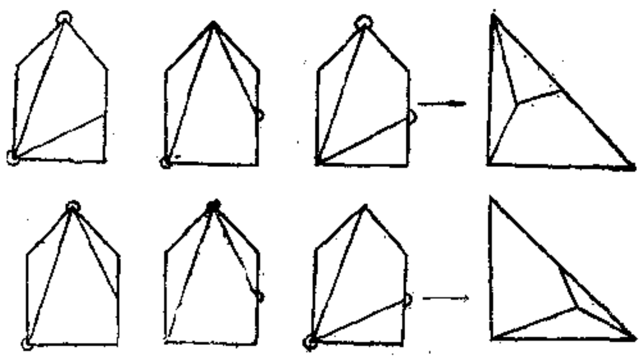
$$OC=\sqrt{x_1^2+a^2},\quad OB=\sqrt{b^2+\frac{x_1^2b^2}{a^2}},$$

$$\operatorname{ctg}\angle CBO=\frac{b}{a}.$$

因而，所有内接于矩形的菱形都是相似的．

245．如图所示，一个五边形由一个正方形和一个等腰直角三角形拼合组成．试把这个五边形分成三部分，使这三部分可以组成一个新的等腰直角三角形．

解 如果原正方形的边长为2，那么整个五边形的面积



为 5．因此新的等腰直角三角形的直角边长应为$\sqrt{10}$．但是这个五边形的两条长对角线的长度也都是$\sqrt{10}$．因此，如果沿一条长对角线分割五边形，那么割开后的两条边可作为新的直角三角形的直角边．其次注意，五边形未被分割的其它角的顶点应在新的三角形内，而从这些顶点出发的各边在新三角形内成对吻合．由此得出分割方法：沿任一长对角线分割五边形，再把与五边形这条对角线没有交点的边平分．如不考虑镜面反射，则这样得到两个不同的解．

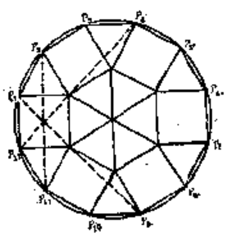
246．已知两个同心的正方形，它们的对应边互相平行，面积之比为 2∶1．求证：如果过小正方形的各个顶点作线段垂直于相应的对角线，那么这些线段和大正方形的各边组成一个正八边形．

证 这两个正方形的半条对角线之差等于 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此，过小正方形顶点所作的线段长度为 $2-\sqrt{2}$．这些线段在大正方形每个角落截去的长度是$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$．这就是说大正方形各边剩余部分的长度等于

$$\sqrt{2}-\frac{2(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}.$$

此外，所得的八边形的每个内角都等于135°．因此这个八边形是正八边形．

247．试把一个正十二边形分成一些正方形和正三角形．设P_1，P_2，…，P_{12}是这个十二边形按次序排列的顶点．试问：三条对角线 P_1P_9，P_2P_{11}和 P_4P_{12} 是否相交？



解 作这个十二边形的外接圆．

显然，从任意一个顶点出发的九条对角线把这个顶点所在的顶角150°十等分，每份15°.

作对角线P_1P_6，P_2P_9，P_3P_8，P_4P_{11}，P_5P_{10}，P_7P_{12}，使它们与从一些顶点出发的对角线相交．$\angle P_4P_3P_2$，$\angle P_3P_4P_{11}$，……都等于60°．因此，立于这个十二边形六条相间的边上的各个三角形都是正三角形．由此得出，这个十二边形其余六边可作为六个正方形的边（因为$\angle P_2P_3P_8=P_3P_2P_9=\cdots=90°$）．这六个正方形向圆心的边组成一个正六边形．这个正六边形显然可分成六个全等正三角形．因此，这个十二边形被分成十二个全等正三角形和六个全等正方形．

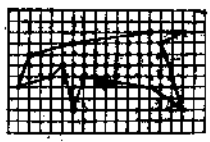
因为

$$\angle P_1P_{12}P_4=\angle P_{12}P_1P_9=45°,$$

所以直线P_1P_9与P_4P_{12}和正方形对角线重合．P_2P_{11}是由两个正三角形和一个正方形构成的等边凸六边形的对称轴．因此，P_2P_{11}通过这个正方形的中心．于是三条直线P_1P_9，P_2P_{11}和P_4P_{12}相交于一点．

248．试求如图所示的多边形的面积．

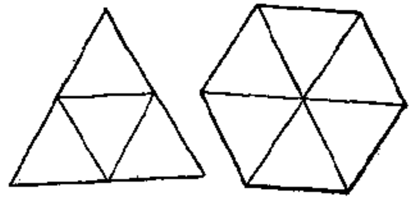
解　在附录中证明了一个结论：顶点位于格点上的任何简单多边形的面积等于$\frac{b}{2}+c-1$，其中b是位于多边形边界上的格点个数，c是多边形内部的格点个数．因此，如图所示的多边形面积等于



$$7+42-1=48.$$

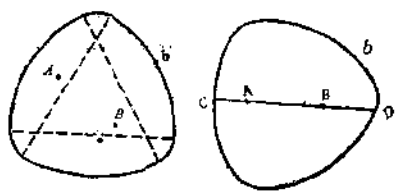
249．一个正三角形与一个正六边形的周长相等．它们的面积之比是多少？

解 这个正三角形与这个正六边形的边长之比为2∶1．于是这个三角形可分成四个全等正三角形，这个六边形可分成六个全等正三角形．因此，它们的面积之比为2∶3．



250．如果一个凸区域边界上任意两条平行切线之间的距离是一个常数，那么这样的凸区域称为具有固定宽度的区域．

设A和B是一个具有固定宽度1的区域内的两点．求证：存在一条从A到B的路线，与这个区域的边界b相交于某点，使A到这点与B到这点的距离之和不大于1．

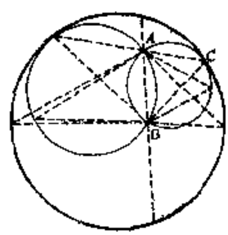


证 设C和D是直线AB和边界b的交点．因为这个区域的宽度为1，所以$CD\leqslant 1$．但是

$$(AC+CB)+(BD+DA)=2CD,$$

因此，在$(AC+CB)$和$(BD+DA)$这两个量中至少有一个不大于1．

251．在一个圆内给出两点A和B．试在圆周上求一点C，使$\angle ACB$最大．



解 为得出要求的角，过A和B作两个圆，使它们都内切于已知圆．其中较小的那个内切圆与已知圆的切点C就

是使$\angle ACB$取最大值的点.

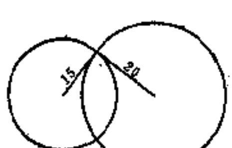
实际上，如果在已知圆周上任取一点，使它与C点同在AB的一侧，那么这时所形成的角将小于$\angle ACB$，因为它的顶点在较小的内切圆之外. 如果在AB的另一侧再取已知圆周上的点，那么所形成的角也不大于$\angle ACB$，因为它的顶点位于较大的内切圆之外，至多位于较大的内切圆周上（当线段AB是已知圆的直径时，有两个解，因为两个内切圆的大小都一样）.

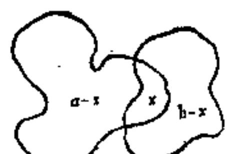
252. 设有两百万个点全部分布在一个直径为1厘米的圆内. 是否存在一条直线，使它的两侧恰好各有一百万个点?

解 过圆内任意两点可以作一条直线. 因为所有直线的条数是有限的，所以可以把全部直线都作出来.

现在，在已知圆外取一点，使这点不在上述任意一条直线上. 过这点作一条直线，使所有的点都在这条直线的右侧. 其次，以圆外那点为轴心把这条直线从左向右旋转. 在旋转过程中，它将逐渐通过那些点，并且每次不能同时通过一个以上的点. 因此，当这条直线通过第一百万个点时，就把它固定在这个位置上. 这样就得出所求的直线.

253. 半径为15的圆和半径为20的圆相交，两圆通过交点的半径成直角. 考虑两圆减去公共部分后余下的两部分. 余下这两部分的面积之差是多少?





解 在一般情形下，对于两个相交的图形，如果它们的面积分别是 a 和 b，相交部分的面积是 x，那么不相交部分的面积分别是 $a-x$和 $b-x$. 因此，这两部分的面积之差是 $|a-b|$. 在本题中，这个差显然等于

$$\pi\cdot20^2-\pi\cdot15^2=175\pi.$$

254. 已知一个三角形的边长为17，25，26，另一个三角形的边长为17，25，28. 哪一个三角形的内切圆大?

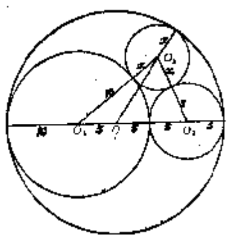
解 一样大. 边长为 a，b，c 的三角形的内切圆半径可用下列公式计算：

$$r=\frac{s}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

其中 $2p=a+b+c$. 经过计算，这两个三角形的内切圆半径都等于 6.

顺便指出，边长分别为97、169、122与97、169、288的两个三角形的内切圆半径都是30.

255. 用直径30厘米的圆形三合板锯出两个直径分别为20与10厘米的小圆板. 从剩下的三合板可以锯出的最大圆板的直径是多少?



解 设 O 是半径为15厘米的圆的圆心，O_1 是半径为 10 厘米的圆的圆心，O_2 是半径为 5厘米的圆的圆心. 又设所能锯出的最大圆的半径为 x 厘米，圆心为 O_3. 于是

$O_1O_3=10+x$，$O_2O_3=5+x$，$O_1O=5$，

$OO_2=10$，$OO_3=15-x$.

在 $\triangle O_1OO_3$ 和 $\triangle O_2OO_3$ 中应用余弦定理，并注意到

$$-\cos\angle O_1OO_3=\cos\angle O_2OO_3,$$

那么

$$(15-x)^2+10^2-2\cdot10\cdot(15-x)\cos\angle O_2OO_3=(x+5)^2,$$

$$(15-x)^2+5^2+2\cdot5\cdot(15-x)\cos\angle O_2QO_3=(x+10)^2,$$

从上两式中消去$\cos\angle O_2OO_3$，得

$$15(15-x)^2=10(10+x)^2+5(5+x)^2-15\cdot10\cdot5,$$

化简后得$700x=3000$. 因此，在剩下的板片上还可以锯出最大直径为$\frac{30}{7}$厘米的圆. 当然，在计算中都不考虑锯片的厚度.

256. 某人做了三块半径分别为 2，3，10 寸的圆形小桌布. 他把它们铺在一张圆桌上，使每块桌布与其余两块相切，并且与桌子边缘相切. 桌面半径是多少?

解 如果半径为 2 ，3 ，10寸的桌布圆心分别在点C，A，B上，那么这三点组成边长为 5 ，12，13寸的直角三角形ABC. 把这个三角形扩充成为一个矩形，以O表示它的第四个顶点. 从O点出发，过B，C，A作直线，与三个圆分别相交于P，Q，R三点. 于是

$$OP=OQ=OR=15\ (\text{寸}),$$

这就是圆桌的半径.

257. 一个厨师在直径为26厘米的圆形煎锅中烤饼. 他放入三块不同大小的饼，使它们的圆心在同一条直线上，三块饼紧靠在一起覆盖了锅的整条直径，但只覆盖了锅的面积的一半. 如果已知三块饼的直径都是整数，试求这三块饼的直径.

解 因为圆面积与直径的平方成正比，所以只要求三个不同的整数，使它们的和为26，它们的平方和为

$$26^2\div2=676\div2=338.$$

设x，y，z是三块饼的直径．于是

$$\begin{aligned} &x+y+z=26, \\ &x^2+y^2+z^2=338. \end{aligned} \qquad (*)$$

就是说

$$x^2+y^2+z^2=\frac{(x+y+z)^2}{2}.$$

这可得丢番图方程

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0,$$

或者

$$(x-y-z)^2=4yz.$$

因此，yz是完全平方数，从而对于整数k，l，m，有

$$y=k^2m,\ z=l^2m,$$

且有

$$x-y-z=\pm 2klm,$$

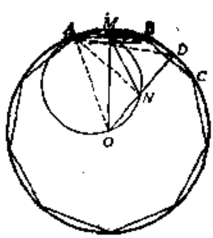
$$x=m(k\pm l)^2.$$

代入方程（$*$）得

$$2\cdot 13=26=m[(k\pm l)^2+k^2+l^2],$$

$$2\cdot 13^2=338=m^2[(k\pm l)^4+k^4+l^4].$$

由此得$m=1$或13．直接检验可知$m=13$不能是本题的解，因此，$m=1$．最后，要求出三个总和为26的平方数，满足这个条件的三个数只能是：1，9，16．



258．设AB和BC是圆O的内接正九边形的两条邻边．又设M是AB的中点，N是与BC垂直的半径的中点．求证：$\angle OMN=30°$．

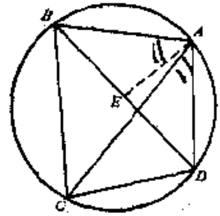
证　因为$\overset{\frown}{AB}\overset{m}{=}40°$，$\overset{\frown}{AD}\overset{m}{=}60°$，

所以$\triangle AOD$是等边三角形，并且AN是OD上的垂线．于是，四点A，M，N，O都在以AO为直径的圆上．这就是说，

$$\angle OMN=\angle OAN=30^\circ,$$

因为同弧上的圆周角相等．

259．求证：在任意一个圆内接凸四边形中，对角线的乘积等于每组对边乘积的和．



证　在圆内接四边形$ABCD$中，作线段AE和BD相交于E，且使$\angle BAE=\angle CAD$．于是

$$\triangle BEA\backsim\triangle CDA,$$

$$\triangle AED\backsim\triangle ABC.$$

因此

$$AC:AB=CD:BE,\ AC:AD=BC:ED.$$

由此得

$$AC\cdot BE=AB\cdot CD,\ AC\cdot ED=AD\cdot BC.$$

把这两个等式相加，并注意到$BE+ED=BD$，得

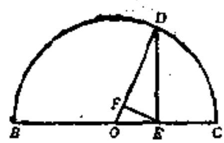
$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC,$$

这就证明了本题的结论，

顺便指出，把任意四边形改为矩形，可得勾股定理．

260．设两个数a和b的等比中项为G，等差中项为A，调和中项为H．试用几何方法证明：

$$G^2=AH.$$



证　作线段BC，使$BE=a$，$EC=b$．以BC的中点O为圆心，BC为直径作半圆，过E点作BC的垂线与圆周相交于D．连接OD，作$EF\perp OD$，与OD相交于F．

于是，半径

$$OD=\frac{a+b}{2}=A,\quad ED=(ab)^{\frac{1}{2}}=G.$$

因为$\triangle OED\backsim\triangle EFD$，所以

$$DF:ED=ED:OD,$$

于是

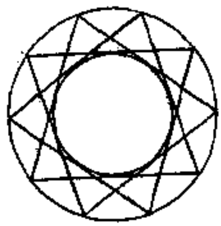
$$DF=\frac{ED^2}{OD}=\frac{2ab}{a+b}=H,$$

即

$$ab=H\cdot\frac{a+b}{2}.$$

因此，$G^2=H.A$. 此外，$A\geqslant G\geqslant H$.

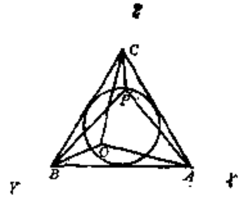
261. 把一个圆n等分. 用弦把每个分点和其它分点相连，但每个分点与相连的点都相隔m个分点，且其中没有一条弦是直径. 求证：过圆内任意一点都不可能有两条以上这样的弦.



证 所得的各弦与此圆的一个同心圆相切. 如果有两条以上的弦通过某一点，那么从圆外一点可向圆作两条以上的切线，而这是不可能的.

262. 设$\triangle ABC$是等边三角形，P是它的内切圆周上的一点，求证：

$PA^2+PB^2+PC^2=$常数.



证 建立一个空间直角坐标系，使A (1,0, 0)，B (0,1,0)，C (0, 0,1)和 $P(x, y, z)$ 分别是这个三角形的三个顶点和内切圆周上的一点. 这个三角形的内切圆是球面

$$x^2+y^2+z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

与平面

$$x+y+z=1$$

的截面．因此，

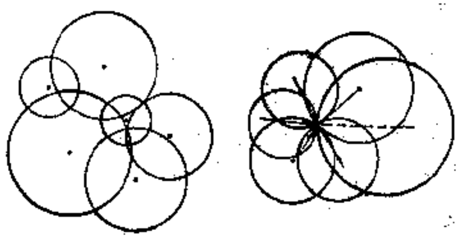
$$PA^2+PB^2+PC^2$$

$$=(x-1)^2+y^2+z^2+x^2+(y-1)^2+z^2+x^2+y^2+(z-1)^2$$

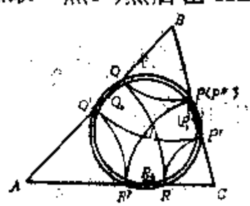
$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}-2+3=\text{常数}.$$

263．在一个平面上给出六个圆，并且每个圆的圆心都不在其余五个圆内．求证：这六个圆没有一个公共交点．

证 相反，设这六个圆有一个公共交点，把这点和各圆圆心相连成六条线段．其中至少有两条线段的夹角不大于60°．考虑这两条线段所连接的圆：若两圆半径相等，则两圆圆心互在对方圆内；否则，较小的圆圆心在较大的圆内．但是按照已知条件，没有一个圆的圆心在其它圆内，这得出矛盾，从而从反面证明了本题的结论．



264．在$\triangle ABC$一边BC上任意取一点P，然后在AB边上取一点Q，使$BQ=BP$．其次在CA边上取一点R，使$AR=AQ$；在BC边上取P'点，使$CP'=CR$；在AB边上取Q'点，使$BQ'=BP'$，等等．求证：这样得出的图形是封



闭的（即$CP=CP''$），并且这六个点P，Q，R，P'，Q'，R'在同一圆周上.

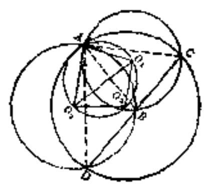
证 设P_0，Q_0，R_0是$\triangle ABC$的内切圆与三边的三个切点，于是

$$PP_0=QQ_0=RR_0=P'P_0=Q'Q_0=R'R_0=P''P_0.$$

由此显然易见，图形是封闭的，并且各点P，Q，R，P'，Q'，R'在内切圆的一个同心圆上.

这个证明也适用于有内切圆并且边数为奇数的多边形．同样，对于一个边数为奇数的多边形，如果能不改变其边长而连续地变为有内切圆的多边形，那么上述证明也有效.

265．过一个点作三个圆，使这三个圆的三个交点（不与前一点重合）位于一条直线上．求证：这三个圆的圆心和它们的公共交点位于某个新圆上.



证 设圆心为O_1，O_2，O_3的三个圆经过一个公共点A．其次设$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于B点，$\odot O_1$和$\odot O_3$相交于C点，$\odot O_2$和$\odot O_3$相交于D点．所以

$$O_1O_3\perp AC,\quad O_2O_3\perp AD.$$

因此，

$$\angle O_1O_3O_2+\angle CAD=180°.$$

在$\odot O_1$中，

$$\angle ACB\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\overset{m}{=}\angle AO_1O_2$$

（因为O_1O_2是线段AB的中垂线）．在$\odot O_2$中

$$\angle ADB\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\overset{m}{=}\angle AO_2O_1.$$

其次，根据条件，三点C，B，D共线．因此

$$\triangle ACD\backsim\triangle AO_1O_2,\ \angle CAD=\angle O_1AO_2.$$

由此得出

$$\angle O_1O_3O_2+\angle O_1AO_2=180^\circ,$$

因此，四边形$O_1O_3O_2A$内接于一个圆上．

266．设I，O，H分别是$\triangle ABC$的内心、外心和垂心，其中$\angle C>\angle B>\angle A$．求证：$I$点一定在$\triangle BOH$内．

证 设R是外接圆半径，r是内切圆半径，那么

$$x=\mathrm{tg}\frac{A}{2},\quad y=\mathrm{tg}\frac{B}{2},\quad z=\mathrm{tg}\frac{C}{2},$$

S_{XYZ}表示任一$\triangle XYZ$的面积．

不管$\angle C$是钝角还是锐角，$\angle OBH=\angle C-\angle A$，并且$BI$内分$\angle OBH$．于是，$I$位于$BO$与$BH$之间．

其次，

$$BH=2R\cos B,$$

$$BI=r\csc\frac{B}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

$$S_{OBH}=\frac{1}{2}\cdot 2R^2\cos B\sin(C-A)=\alpha.$$

$$S_{BIO}+S_{BIH}=\frac{1}{2}(1+2\cos B)R\cdot BI\cdot\sin\left[\frac{1}{2}(C-A)\right]$$

$$=2R^2(1+2\cos B)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\left[\frac{1}{2}(C-A)\right]=B,$$

$$\alpha-\beta=2R^2\sin\left[\frac{1}{2}(C-A)\right]\Big[\cos B\cos\frac{1}{2}(C-A)$$

$$-(1+2\cos B)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\Big]$$

$$=2R^2\sin\left[\frac{1}{2}(C-A)\right]\cos B\Big[\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$-(\sec B+1)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\Big]$$

$$=2R^2\sin\left[\frac{1}{2}(C-A)\right]\cos B\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\left[1-\frac{2xz}{1-y^2}\right].$$

因为$\angle B<\frac{\pi}{2}$，所以$1-y^2>0$，除最后一个因式外，每个因式都是正的，这就是说，$\alpha-\beta$的符号与$\gamma=1-y^2-2xz$的符号相同．但是

$$xy+yz+zx=1,$$

因而

$$\gamma=-[y^2-(x+z)y+xz].$$

当$x<y<z$时，最后这个表达式是正的．因此$\alpha>\beta$．再考虑到上面关于I点位置的叙述，可知I在$\triangle OBH$内．

267．已知两点A和B是一个正方形的两个顶点（相邻或相对）．试用圆规作出这个正方形的另外两个顶点．

解 以A点为圆心和以AB为半径作一个圆，记作$A(AB)$．从B开始，以AB长在圆上标出三点C，D，E，使

$$BC=CD=DE=AB.$$

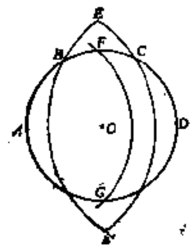
于是$BD=\sqrt{3}AB$．作弧$B(BD)$和$E(BD)$，它们相交于F．此时$AF=\sqrt{2}AB$．再作弧$B(AF)$、$E(AF)$，相交于圆周$A(AB)$上的一点G．

如果A，B是正方形相邻的两顶点，那么G是它的第三个顶点．这时两弧$G(AB)$和$B(AB)$的交点H是它的第四个顶点．

如果A和B是正方形的相对顶点，那么关于圆周$A(AB)$作F的反演变换，可得L点．为此目的，先作弧$F(AF)$与圆$A(AB)$相交于J和K两点，再作弧$J(AJ)$和$K(AK)$

相交于所需要的L点.于是$AL=\frac{AB}{\sqrt{2}}$. 因此，两弧$A(AL)$和$B(AL)$的交点M和N就是正方形的另外两个顶点.

268. 利用圆规将一个圆四等分.



作法 以O点为圆心，以r为半径作一个圆. 以同一半径r在圆周上截得四点A，B，C，D. 这时

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD},$$

线段AD等于这个圆的直径. 以A和D为圆心，以AC为半径作两弧，相交于两点E和E'. 以A为圆心，以OE为半径作弧，与已知圆相交于两点F和G. 这时四点A，F，D和G是已知圆的一个内接正方形的四个顶点.

证明 $AC=\sqrt{3}\,r=AE$,

$$OE=\sqrt{\overline{AE}^2-r^2}=\sqrt{2}\,r=AF.$$

269. 试作一个四顶点共圆的四边形，使它的四条边都和四个已知圆相切.

解 这样的四边形有无穷多个. 以C_1，C_2，C_3，C_4分别表示四个已知圆. 在平面上作任意一个四顶点共圆的四边形，其各边分别表示为S_1，S_2，S_3，S_4. 然后作直线l_i平行于S_i，且与C_i相切，其中$i=1, 2, 3, 4$. 于是l_1，l_2，l_3和l_4所围成的四边形的四顶点是共圆的，因为它的对角之和为180°，并且它的各条边都和四个已知圆相切.

270. 在一个平面内的四条直线相交于O点，并且所有八个角都等于45°，把一个圆放在这个图形上，使O点位于这个圆内.在所形成的扇形上每隔一个扇形画细线条.求证：画

上细线条的扇形的面积等于圆面积的一半.

证 以P表示圆心. 设AC和BD是过O点的两条互相垂直的弦. 其次设$OP=a$, θ是BD和OP之间所成的角. 于是下列各关系式成立:

$$\frac{AC}{2}=\sqrt{r^2-a^2\cos^2\theta},$$

$$AO=\sqrt{r^2-a^2\cos^2\theta}-a\sin\theta,$$

$$AO^2=r^2-a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta-2a\sin\theta\sqrt{r^2-a^2\cos^2\theta},$$

$$CO=\sqrt{r^2-a^2\cos^2\theta}+a\sin\theta,$$

$$CO^2=r^2-a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta+2a\sin\theta\sqrt{r^2-a^2\cos^2\theta},$$

$$AO^2+CO^2=2r^2-2a^2\cos^2\theta+2a^2\sin^2\theta.$$

类似地,

$$BO^2+DO^2=2r^2-2a^2\sin^2\theta+2a^2\cos^2\theta.$$

从而

$$AO^2+BO^2+CO^2+DO^2=4r^2,$$

其中r是圆半径.

最后这个和式与A和θ都无关. 因为将经过O点的这些弦转动一个无穷小角$d\varphi$时, AO, BO; CO, DO中每条线段分别扫过下列面积:

$$\frac{AO^2}{2}d\varphi,\ \frac{BO^2}{2}d\varphi,\ \frac{CO^2}{2}d\varphi,\ \frac{DO^2}{2}d\varphi.$$

把它们相加, 得

$$\frac{1}{2}(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)\,d\varphi=2r^2d\varphi.$$

如把这些弦转动了一个角度φ, 则对上式积分, 可知它们扫过的面积等于$2r^2\varphi$. 如果$\varphi=\frac{\pi}{4}$, 那么相应的面积等于$\frac{\pi r^2}{2}$.

可以把这个结果推广到$2n$条直线相交成等角的情形，这时$\varphi=\dfrac{\pi}{2n}$，相应的面积等于$\dfrac{\pi r^2}{n}$.

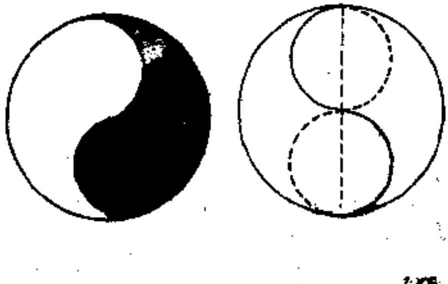
271. 把费尔马原理应用于圆镜上．换句话说，如果在一个圆内给定两点A和B，那么要求在圆上找出一点P，使量$AP+PB$取极值．

解 利用准线，很容易得到本题的解．为取得普遍性，我们取任意一条有连续变化曲率的凸闭合曲线来代替圆．

考虑由条件$AP+PB=k$（常数）确定的曲线族．焦点在点A和B上的椭圆就是这样的曲线．显然，在这族椭圆中，对于与凸闭合曲线相切的最小椭圆，k取最小值，其切点(可能不止一个)就是所求的P点．因为引向切点的焦半径与椭圆切线形成等角，所以符合反射定律．类似地，这族椭圆中与凸闭合曲线相切的最大椭圆上，k取最大值．

不难证明逆定理：如果线段AP和PB都与给定的曲线形成等角，那么焦点在A和B上，且过P点的椭圆一定和这条曲线相切于P点．这个椭圆按局部的意义，位于这曲线的内部或外部．在内部时，$AP+PB$将达到局部极小值；在外部时，$AP+PB$将达到局部极大值．

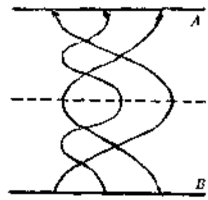
272. 如图所示，圆内黑白两部分在古代表示阴阳两个概念．这两部分面积相等．试用一条曲线，把每一部分分成等积的两部分．



解 把这个圆绕一条直径旋转180°，得到两个小圆，其直径是原来大圆直径的$\frac{1}{2}$，因

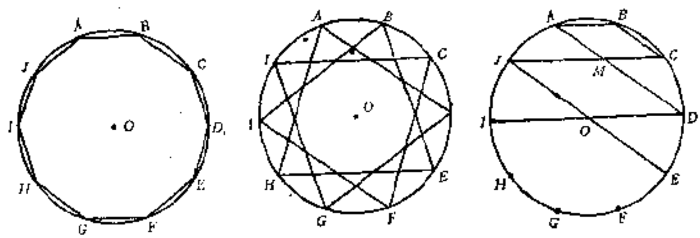
此每个小圆的面积是大圆面积的$\frac{1}{4}$．这就是说，在黑或白的部分中，被小圆减去的部分就是原来面积的一半．

273．分别把三条绳子的一端系在三只钉子上（钉子钉在木板A上），这三条绳子彼此交错在一起，如图所示．要求把另外三条绳子的一端分别系在原来三条绳子的自由端上，再把它们的另一端(这三条新绳子也是交错在一起的)分别固定在木板B的三只钉子上，使得做完所有这些手续后，把两块木块A和B向两侧移动，得到三条拉紧的平行绳子．应该怎样连接这些绳子？



解 把原先三条绳子的排列图形关于虚线作镜面反射，就得到三条新绳子的排列图形．

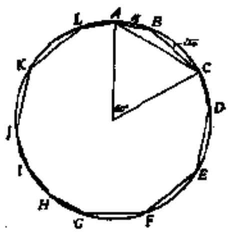
274．把一个圆周十等分，用弦把相邻分点连结起来，得到正十边形．用弦把每个分点每隔两分点与第三分点连接起来，得到等边的星状十边形．求证：这两个十边形的边长之差等于圆半径．



证 直径ID和IE既分别平行于正十边形的边AB和BC，又分别平行于星状十边形的边JC和AD．因此，$ABCM$和$JMDO$都是菱形．于是

$$AD - BC = AD - AM = MD = JO = \text{圆半径}.$$

275. 一个凸十二边形内接于一个圆中，它的六条边长为$\sqrt{2}$，而另外六条边长为$\sqrt{24}$. 圆半径是多少？



解 设AB和BC是这个十二边形两条相邻而不相等的边. 那么

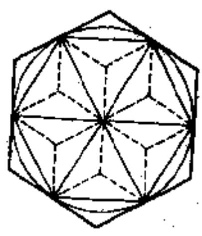
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} \overset{m}{=} \overset{\frown}{AC} \overset{m}{=} \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

这就是说，$AC = r$. 把余弦定理应用于$\triangle ABC$（其中$\angle ABC = 150^\circ$），得

$$AC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{24})^2 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{24}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 38,$$

因此，$r = \sqrt{38}$.

276. 一个正六边形内接于一个圆，另一个正六边形外切于这个圆. 不用根式运算，求这两个六边形的面积之比.



解 考虑内接正六边形，其顶点平分外切正六边形的各边. 把圆心和内接正六边形各顶点连接起来，再把所得的六个正三角形形心和这些三角形顶点连接起来. 于是得到了组成外切正六边形的24个全等三角形. 其中18个位于内接正六边形内部. 因此，圆内接正六边形与圆外切正六边形的面积之比为$18:24 = 3:4$.

277. 求证：如果一个圆的外切凸多边形的边数是奇数，它的每边长度都是有理数，那么各边被切点分成的每条线段长度也是有理数.

证 设a_1，a_2，…，a_n依次是这个多边形各边的长，x_i为a_i边上第一个顶点与切点间的线段长度，$i=1, 2, \cdots, n$. 因为a_n边上的第二段线段等于a_1边上的第一段线段，所以

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_n - x_n \\
&= a_n - (a_{n-1} - x_{n-1}) \\
&= a_n - a_{n-1} + x_{n-1} \\
&= a_n - a_{n-1} + (a_{n-2} - x_{n-2}) \\
&= a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + a_1 - x_1,
\end{aligned}
$$

由此得

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + a_1),$$

因此，x_1是有理数. 上述讨论对所有的线段都是适用的，所以所有线段的长度都是有理数.

3

立体几何

278. 已知一个凸四边形 $ABCD$ 和一个不在平面 $ABCD$ 内的点 O，试在直线 OA 上找一点 A'，在直线 OB 上找一点 B'，在直线 OC 上找一点 C'，在直线 OD 上找一点 D'，使 $A'B'C'D'$ 是一个平行四边形．

解 设 O' 是平面 AOC 和平面 BOD 交线上的一点（但不和 O 点重合），即 O' 是直线 AC 和 BD 的交点．设 A' 是直线 OA 与过 O' 且平行于 OC 的直线的交点．设 C' 是直线 OC 与过 O' 且平行于 OA 的直线的交点．于是 $OA'O'C'$ 是平行四边形，它的两条对角线 OO' 与 $A'C'$ 在 M 点上互相平分．这样选取 B' 和 D' 两点，使我们能得到平行四边形 $OB'O'D'$，它的两条对角线 OO' 与 $B'D'$ 在线段 OO' 中点 M 上互相平分．因此，线段 $A'C'$ 和 $B'D'$ 在 M 点上互相平分，$A'B'C'D'$ 是平行四边形（这个平行四边形不是唯一的）．

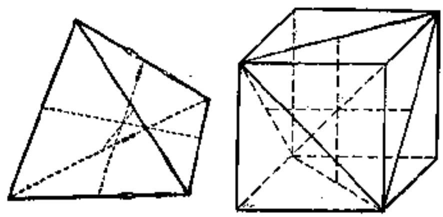
279. 一块蛋糕的形状是三棱柱，高度很小，并且各个面都盖有薄薄一层糖皮．怎样均分这块蛋糕给11个小孩，使每人得到的蛋糕和糖皮都一样多？

解 把三棱柱底面三角形的周长十一等分，依次将分点

与三角形内切圆心连接，就把蛋糕和糖皮十一等分．再依此一一切开，即可达到目的．这个方法对于任何有内切圆的多边形也适用．

280．求证：在正四面体中，连接相对两棱中点所成的直线相交成直角．

证 正四面体可以内切于一个正方体中，并且四面体相对的两棱与正方体相对面的不平行对角线重合．因此，四面体各棱的中点是正方体相应面的中心．就是说，连接四面体相对两棱中点所成线段通过正方体中心，垂直于正方体两个相对的面，并且平行于正方体的四条棱．但是因为从正方体任一顶点出发的三条棱互相垂直，所以连接四面体相对两棱中点所成的三条线段相互垂直，并且相交于一点．

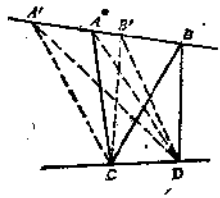


281．求证：任意一个四面体（不一定是正四面体）至少有一个顶点上的所有平面角都是锐角．

证 如果四面体的一个顶点上有一个平面角是直角或钝角，根据三面角中两个平面角的和恒大于第三个平面角，那么这个顶点上的所有平面角之和就要大于 π 弧度．如果四面体的每个顶点都有一个平面角是直角或钝角，那么所有平面角的和就大于 4π 弧度．但这是不可能的，因为棱面上四个三角形所有内角的和是 4π 弧度．因此，四面角至少有一个顶点上的所有平面角都是锐角．

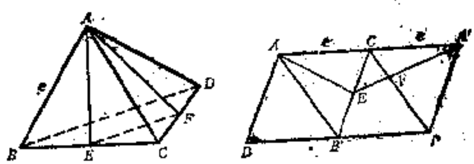
282．已知一个四面体由两条不共面的线段所确定，证

明：如果沿直线方向任意移动这两条线段（但不改变其长度），那么四面体的体积始终不变.



证 可以这样移动这两条线段，设CD是固定的，而把AB移到新位置$A'B'$上．于是$\triangle ABC$的面积等于$\triangle A'B'C$的面积，因为它们的底边相等，并且高也相等．此外，从D点到$\triangle ABC$所在平面的距离也不因AB沿其直线方向运动而变化．因为四面体的底面积与高都不变化，所以它的体积也保持不变.

283．取一个直径为d的柔软薄壁的圆柱面（例如一根稻草）．能通过这个圆柱面的最大正四面体的棱e有多长？



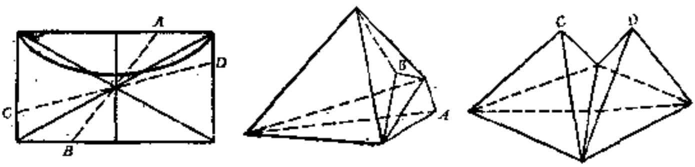
解 如果用四个边长为e的正三角形拼成一个平行四边形，那么在这个平行四边形中，平行于大边的任一线段的长度都是$2e$．由此可知，如果用这个平行四边形折叠成一个正四面体，再作任一平面垂直于四面体相对棱中点的连线（双中位线），那么所得到的截面的周长为$2e$

因此，如果使双中位线与圆柱轴线重合，那么四面体可以通过柔软薄壁的圆柱面内部，其截面周长等于$\pi d=2e$．于是未知四面体的最大棱长等于$e=\dfrac{\pi d}{2}$．实际上，为使四面体容易压入圆柱面内部，把圆柱面一端的边缘轻轻地向外推开是有益的.

如果四面体以其它方式放入，那么垂直于此圆柱面的轴

的某一平面就通过四面体的一个顶点，且与两条不从这顶点出发的棱相交．在展开图上容易看出，这个截面$AEFA'$的周长大于$2e$，我们不能在这个位置上使四面体通过这个圆柱面．由此推出，可以通过直径为d的圆柱面的最大四面体的棱长等于$\frac{\pi d}{2}$．

284．能不能作一次剪切，使一个矩形信封折叠成为两个全等的四面体？



解　因为两个全等四面体的总表面积相等，所以应当把信封剪成两块，使它们的面积相等．过矩形的中心剪开，就能做到这一点．首先沿着信封两条对角线和过中心且垂直于长边的直线折成明显的弯曲．其次用下列四种方法剪信封：

(1) 沿一条对角线；

(2) 沿长边中点的连线（中线）；

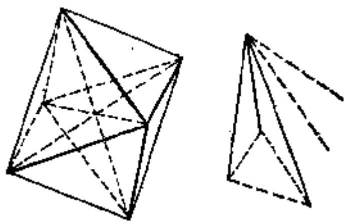
(3) 沿过中心且对长边倾斜的直线（AB）；

(4) 沿过中心且对短边倾斜的直线（CD）．

将用上述任意一种方法得到的半个信封沿对角线和中线折叠，再把切口相对两端点吻合折叠，就得到两个全等四面体．

285．求证：如果任意选出六个人，那么或者在其中至少可找出三个人，使每人与其余两人都相识；或者在其中至少可找出三个人，使每人与其余两人都不相识．

证 这里假设，两人相识是相互的，即如果第一人认识第二人，那么第二人也认识第一人．把这六个人看作是八面体的六个顶点，就可把本题化为等价的问题：



如果把八面体的每条棱和每条对角线随意地染成绿色或红色，那么必须证明：在八面体各顶点所形成的三角形中，至少有一个各边都染上同一颜色．

用棱或对角线把每个顶点和另一个顶点连接起来．在连接这个顶点与其余顶点所成的五条线段中，至少有三条染成同一颜色．取出这三条线段，可能有两种情形：

(1) 其中两条线段的端点用同一颜色的线段连接起来．此时，这两条线段与连接其端点所成的线段形成一个所需要的三角形．

(2) 其中任意两条线段的端点用不同颜色的线段连接起来．于是，连接这三条线段端点所成的三条线段就组成了所需要的三角形．

286．求证：以正八面体和正四面体为单元的晶体结构可以填满整个空间．（所谓晶体结构指的是某种原始单元，通过周期性的重复，可以用它填满整个空间．）

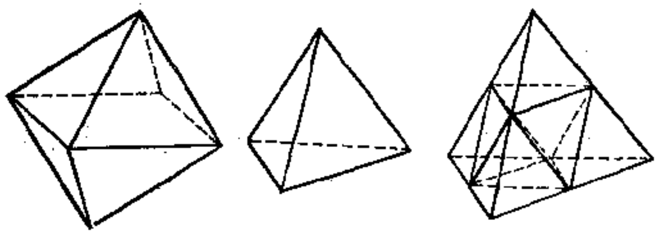
证 借助于连续变形可把一个正方体变成一个平行六面体，使平行六面体的各棱仍然相等，并使两个相对顶点上的所有平面角都等于 60°．取其中一个顶点，用三条线段连接它的三条棱的另一端点，得出一个四面体．对与它相对的另一顶点也这样处理．结果把

这个平行六面体分成两个正四面体和一个正八面体.

现在用正方体为晶体结构单元来填满整个空间. 把正方体连续变形, 可得到上述平行六面体晶体结构. 再把每个平行六面体分成两个正四面体和一个正八面体, 就得到要求的晶体结构. 并且, 以前用 n 个平行六面体填满的空间区域, 现在可以用 $2n$ 个正四面体和 n 个正八面体来填满.

也可以用另一种方法来解. 用正四面体晶体结构单元来填满整个空间. 现在把每个正四面体分成四个小正四面体和一个正八面体. 结果又得到由正四面体和正八面体组成的晶体结构.

287. 已知一个正四面体和一个正八面体的棱长相等, 不计算它们的体积, 而求出它们的体积之比.

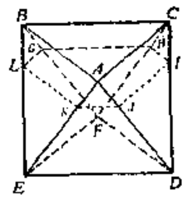


解 如果通过从正四面体一个顶点出发的三条棱的中点作一个平面, 那么这个平面截出一个小四面体, 其体积是大正四面体体积的$\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (因为它们的棱长之比是1∶2). 四个这样的小四面体体积之和等于这个大四面体体积的一半.

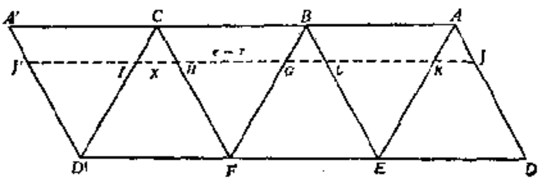
如果再作三个类似的平面, 那么得到一个多面体, 其八个面都是正三角形, 其中四个正三角形位于大四面体的棱面内, 而其余四个正三角形则在截面内. 因此得到一个正八面体, 其棱长等于小四面体的棱长, 即等于大四面体棱长的一半.

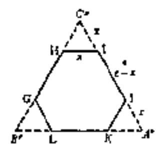
由此推出，小四面体体积等于所得的八面体体积的四分之一.

288 一个棱长为 e 的正八面体被一个平行于它的一个棱面的平面所截. 求所得截面的周长和面积.



解 如果沿着某几条棱分割正八面体 $ABCDEF$，那么可以把它“展开”在一个平面上；这时得到一个平行四边形 $ADD'A'$，它由六个正三角形组成（得到的三角形是六个而不是八个，因为在这样的“展开”时，三条棱 AC，CB，AB 排成一条直线，三条棱 DE，EF，FD 也一样. 结果两个棱面 ACB 和 DEF “消失了”）. 由此可见，如果截面平行于棱面 ABC，那么截面的周长等于“展开图”上线段 AA' 的长度，即 $3e$.





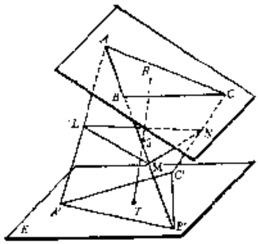
如果 $AJ=x$，那么截面是一个六边形（见图），它可以从边长为 $e+x$ 的正三角形的三个角落切去边长为 x 的三个小正三角形而得到. 因此，这个六边形的边长为 x 和 $e-x$ 彼此交替，它的面积等于

$$\frac{\sqrt{3}[(e+x)^2-3x^2]}{4},$$

并且当 $x=0$ 时取最小值，当 $x=\frac{e}{2}$ 时取最大值. 当截面通过八面体各棱中点时，得到最大六边形. 这个六边形是正六边

形，它的面积是八面体一个棱面面积的 $\frac{3}{2}$.

289. 设平面E的一侧有不共线的三点A, B, C，这三点所在的平面与平面E相交. 在E内取任意三点A'，B'和C'. 以L，M和N分别表示线段AA'，BB'和CC'的中点，以S表示$\triangle LMN$的重心. 今设三点A'，B'和C'在平面E内彼此独立地移动，这时S点处于空间的什么位置上?



解 把具有单位质量的质点放在A，B，C，A'，B'和C'各点上. 设R是质点系A，B，C的重心，T是质点系A', B'，C'的重心. 其次可以认为，S是三个质点L，M和N（每个质量为2）的重心，但是也可以认为，S是两个质点R和T（每个质量为3）的重心. 因此，S是线段RT的中点. 但是因为R是固定的，而T以任意的方式在平面E内移动，所以S点就位于一个平行于平面E的平面内.

290. 大家知道，正方体的对角线互相垂直平分. 这个结论对n维（$n \geqslant 3$）正方体成立吗?

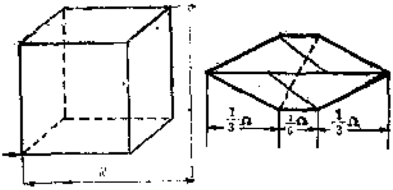
解 当$n \geqslant 3$时，n维正方体有2^{n-1}条对角线，$2^{n-1} > n$. 因为n维空间中最多只能有n条互相垂直的直线，所以，所有的对角线不能互相垂直.

这里用到的$2^{n-1} > n$，很容易用数学归纳法证明.

291. 一个正方体导线网络每条棱的电阻为1欧姆. 这个正方体两个相对顶点之间的电阻等于多少?

解 假设用铰链把这个正方体网络的各条棱固定在顶点上. 从一个顶点稍微提起正方体，各棱就垂下来，形成一个

新的网络结构，它由左、中、右三部分导线组成，左、中、右三部分分别有三条、六条、三条导线．这个新网络结构的两端点正好是正方体网络的相对顶点．因此，正方体网络两个相对顶点之间的总电阻等于



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\text{（欧姆）}.$$

292．美国某大公司的管理机构由十五位经理组成，其中每位经理应当同时参加这个机构附属的二十个委员会．这些委员会要求这样组成，使得：

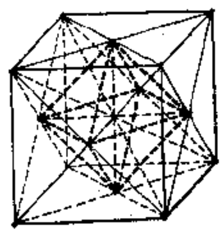
（1）每位经理参加四个委员会；

（2）每个委员会由三位经理组成；

（3）不允许两位经理同时参加两个相同的委员会．

要如何分配才能满足这些条件？

解 用一个正方体的全部顶点（8个）、正方体的中心（1个）和各个面的中心（6个）来表示这十五位经理．以这个正方体的对角线（4条）和每个面上的对角线（12条）来表示十六个委员会．于是，除了以每个面的中心表示的经理以外，其他经理都参加了四个委员会．但是每个面的中心又可以作为一个正八面体的顶点，所以可把这个正八面体三角形的面交错地表示新的委员会（4个）．



293．在一本数学杂志上出现了下列问题和答案：

问题："木工要把一块棱长3寸的正方体木头锯成二十七

个棱长1寸的小正方体．如果他只锯六下，且保持各小正方体不散开，那么就容易达到目的．如果准许他锯时可以任意方式重新组合小正方体，最少要锯多少次才能达到目的？”

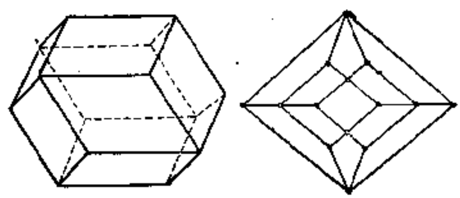
答案：“最少要锯六次．因为要把‘内心’那个小正方体锯出来，需要锯六次，即每一个面锯一次．”

现在假设没有“内心”那个小正方体（即空心）．如果锯时可以任意方式重新组合被锯开的小正方体，最少要锯几次才能达到目的？

解 第一次锯开后，把原正方体（由26个棱长1寸的小正方体组成）分成两部分．其中较大者（由17个小正方体组成）包含那个空的“内心”小正方体，这部分的四个面每面各需再锯一次．不管怎样组合，把那个空的“内心”小正方体锯出后，必然至少还有一个2立方寸的立方体要再锯一次．因此最少要锯六次．

294. 用一个多面体的各个顶点表示想要访问的地点，用各条棱表示连接这些地点所成的路线．要求把路线安排在何处，才能使每个地点无重复地被访问过一次？对于具有五边形面的十二面体容易解决这个问题．求证：在菱形十二面体的情形下，本题无解．

证 菱形十二面体有八个顶点T（每三条棱相交于一个顶点）和六个顶点F（每四条棱相交于一个顶点）．

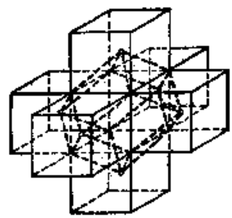


从顶点F出发，沿棱到相邻的顶点时，一定到顶点T，即T是F的相邻顶点；相反，F是T的相邻顶点．因此，不管选

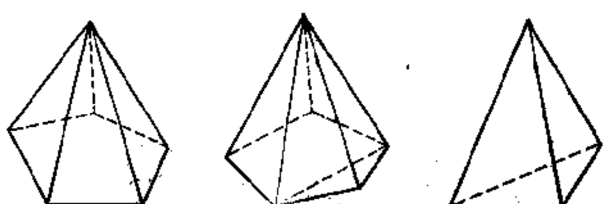
择什么路线，必然交替地经过T和F两类顶点．但是，由八个T和六个F不能组成交错序列．因此，无论我们是否想最终回到出发点，都不能求出本题所要求的路线．

295．求证：空间可以用菱形十二面体的小单元来填满．

证　正方体显然可以填满空间．考虑如图所示的七个正方体．使中间那个正方体原封不动，而在每个“边缘的”正方体中，过所有六对相对棱都作一个平面．这时每个“边缘的”正方体都被分成六个有正方形底面的全等棱锥，其侧棱等于正方体对角线的一半．中间那个正方体和“边缘的”六个棱锥拼接在一起，就构成一个菱形十二面体，并且中间正方体的棱是菱形十二面体面上的对角线．由此易见，菱形十二面体可以填满整个空间．



296．求证：在三维空间中，没有一个多面体有七条棱．

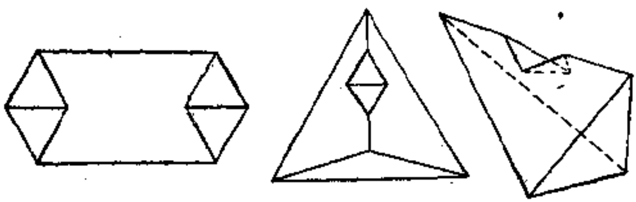


$2n$　$n>3$　　$2n+1$　$n>3$　　6

证　设整数$n>3$．含有$2n$条棱的简单多面体是棱锥，其底面是一个n边形．如果沿着某条对角线翻折这个n边形，使底面折成两个不同的平面，然后把这n边形各顶点和不属于这两个平面的另一点连接起来，就得到有$2n+1$条棱的多面体．

多面体的每个顶点都是一个至少有三条棱组成的多面角的顶点，而每条棱同时也是两个多面角的公共棱．有四个顶点的多面体是四面体，它有六条棱．任何其它多面体顶点的数目都大于或等于5，因此它们的多面角至少有$5\times3=15$条棱，而该多面体至少有$\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$条棱．因此，不存在正好有七条棱的多面体．

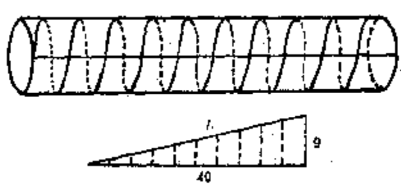
297．从一个多面体上把它的全部面分离下来，然后再把它的顶点和棱"展开"在一个平面内（这时允许棱的伸长、缩短和角的变化）．结果得到如图所示的平面图形．试画出这个多面体的图形．



解 如图所示，可以在一个四面体上挖去一个小四面体就得到这个多面体．容易看出，所得的多面体可以变成本题条件所指的图形．

298．把一条导线以螺旋状绕在圆柱管上，绕成十圈．管长9厘米，它的外圆周长4厘米．导线的两端点位于圆柱的同一条母线上．试求导线的长度．

解 把圆柱表面和导线一起展开在一个平面上．母线（9厘米）、10个重复的圆周（10×4厘米）和导线（L厘米）

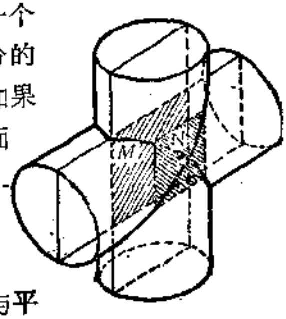


构成一个直角三角形．因此，由勾股定理得

$$L=(81+1600)^{\frac{1}{2}}=41\ (\text{厘米}).$$

299．两个直径都是2厘米的直圆柱体的对称轴相交成直角．这两个圆柱体的公共部分的体积是多少？

解 通过两个圆柱体对称轴作一个平面M，它与这两个圆柱体公共部分的截面是一个正方形，边长为2厘米．如果在这两个圆柱公共部分内作一个平面N平行于平面M，那么由图可见，平面N与这两个圆柱公共部分的截面还是正方形，而这个正方形的内切圆是这两个圆柱公共部分的内切球与平面N的截面．因此，这两个圆柱公共部分的体积与其内切球体积之比等于上述正方形的面积与其内切圆的面积之比．因为内切球体积是$\frac{4}{3}\pi$，正方形面积与内切圆面积之比是$\frac{4}{\pi}$，所以本题要求的体积

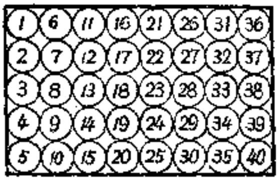


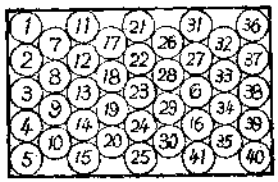
$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{16}{3}\ (\text{立方厘米}).$$

我们还可以求出两个圆柱公共部分的表面积．把这个公共部分分成无穷多个小棱锥，其公共顶点是两个圆柱对称轴的交点，底面是两个圆柱的表面的一部分．这些棱锥的高都是1厘米，由棱锥体积公式$V=\frac{1}{3}sh$可知，底面积是体积的三倍．因此，两个圆柱公共部分的表面积等于16平方厘米．

300．把40个直径都是1厘米的等高圆柱紧密地放在一个箱子里，排成五行，每行八个圆柱体，使它们在运输时不

会“摇动”．需要从箱子里取出几个圆柱体，并移动箱子里剩下的圆柱体，再放入被取出的那些圆柱体，最后再放入一个相同的圆柱体，就可以在这个箱子里装入41个相同的圆柱体？这时这些圆柱体会摇动吗？





解 需要从箱子里取出两个圆柱体．把全部圆柱体编号，如图所示．要取出6号和16号．

把7—10号向左上方移动（见图）．11—15号向左移动，17—20号向左上方移动，21—25号向左移动．

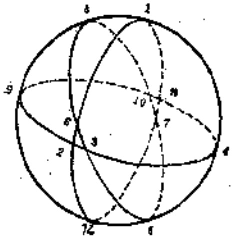
其余圆柱体可以按不同的方式移动．例如，把26、28、29、30、31号向左移动；把32号挤向31号和37号之间；把27号挤向28号和32号之间；把26号紧靠21号和22号；把31号向左移动；把32号紧靠36号和37号；把27号向上紧靠31号；把28、29、30号向左上方移动；把33、34、35号向右上方移动；把6、16和41号插入图中所示的位置．

如果全部圆柱体在新的排列位置上彼此紧靠着，那么相邻两列中心线之间的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$厘米．因此，全部九列圆柱体占用的长度为

$$8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1=4\sqrt{3}+1\approx7.928<8\ (\text{厘米}).$$

所以，按新的方式排列的圆柱体将会摇动．

301. 已知在一个球上，n 个大圆一般相交于$n(n-1)$个点．应该怎样把数1，2，3，…，$n(n-1)$排列在这些交点上，使得位于每个大圆上的各数之和相等？



解　把数 b 排列在某个交点上，而把数 $n(n-1)+1-b$ 排列在相应直径的另一端点上．把这个过程一直继续到用完所有的数与点为止．因为在每个大圆上有$n-1$对交点，所以大圆上所有的数之和为$[n(n-1)+1](n-1)$．

302. 试把一个球面分割成若干全等小块，使每小块的每条边是大圆的圆弧，而且圆弧长小于大圆周长的四分之一．

解　在这个球内作一个内接正十二面体或正二十面体，并从球心向每个面作垂线．以垂足为顶点，以相应的面上的边为底边作出六十个等腰三角形．现在从球心把这些三角形投影到球面上．这时球面上所得到的等腰球面三角形恰好是所要求的全等小块。

303. 在一次运输时，要把直径为30厘米的球装入棱长为32厘米的正方体箱子里．为使球在运输时不摇动，要在箱角放8个相同的小球．这种小球的直径是多少？

解　因为半径为 r 的小球球心位于正方体对角线上，到相应箱角的距离为 $(16\sqrt{3}-15-r)$ 厘米，所以为了解本题，只须使这个距离等于$\sqrt{3}r$，并对 r 解所得的方程，就可求出未知的直径

$$D=(16\sqrt{3}-15)(\sqrt{3}-1)=63-31\sqrt{3}\approx 9.308\text{(厘米)}.$$

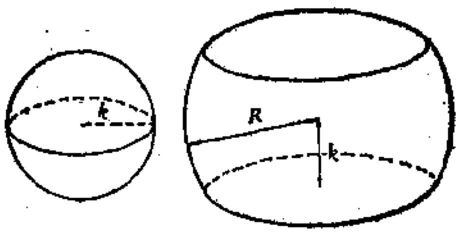
304. 球面通过四面体各面外接圆心的球称为十六点

球．在任何一个四面体中，它的十六点球的半径能不能等于这个四面体外接球的半径的一半？

解 设R是外接球的半径，r是十六点球的半径．如果这个四面体是正四面体，那么$r=\frac{R}{3}$．如果它的某个顶点上的三个平面角是直角，那么$r=\infty$（因为这时所有外接圆的圆心在同一平面内）．但是R是有限的．因为正四面体可以借助于连续变形而变成一个顶点上有三个直平面角的四面体，所以$\frac{r}{R}$可取大于$\frac{1}{3}$的任意值，因而可达到$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$．

305．在一个球上，以直径为轴打一个圆柱孔，穿透球体．如果这个孔的轴长为10厘米，问球的剩余部分的体积是多少．

解 设想有一个半径为k的小球，用能伸缩的薄膜作表面，里面盛满了液体．这种薄膜是根据球内液体



的表面张力定律而保持球形的．现在沿着直径穿透球体，在球内插进一支长为$2k$的圆柱管，此管能在半径方向作放射状扩张，并且不会损失一滴液体．在管的直径（不是长度）扩大后，表面张力使薄膜外部成为半径为R的球面的一部分．于是得到象“戒指”一样的环状体，其体积保持不变．和扩张前比较，这个戒指的内圆周长$2\pi\sqrt{R^2-k^2}$在增加；反之，戒指的厚度$R-\sqrt{R^2-k^2}$在减少．于是，球中打出长为$2k$的圆柱孔后，剩下的那部分半径为R的球体积等于半径

为 k 的球体积$\frac{4}{3}\pi k^3$. 因此，剩下的球体积与原球的半径无关. 在本题的情形下，

$$V=4\pi\times\frac{5^3}{3}\approx523.6\text{（立方厘米）}.$$

306. 在一个球中给定三条互相垂直的弦 APB、CPD 和EPF，它们都通过同一点P. 如果已知

$$AP=2a,\ BP=2b,\ CP=2c,$$
$$DP=2d,\ EP=2e,\ FP=2f,$$

试求球的半径.

解 如果取已知弦为坐标轴作出空间直角坐标系，那么球心的坐标为（$b-a$, $d-c$, $f-e$）. 不失一般性，可设

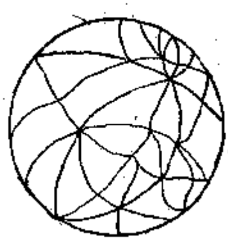
$$b\geqslant a,\ d\geqslant c,\ f\geqslant e.$$

于是得出球半径的关系式：

$$R^2=(b-a-2b)^2+(d-c-0)^2+(f-e-0)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-2ef$$
$$\text{（因为}ab=cd=ef\text{）}.$$

值得注意的是，这个结果容易推广到 n 维球上. 在圆的特殊情形（$n=2$），只保留平方项，而不同线段的乘积消失了.

307. 假设用一种三角剖分把一个球面分成许多“国家”. 这种“三角剖分”指的是，所分出的每个“国家”正好和其它三个“国家”相邻（它们之间有长度不为 0 的边界）. 分界线的交点，根据从它引出分界线的数目，分为奇数顶点和偶数顶点. 是否存在这样一种三角剖分，使其得到两个相邻的奇数顶



点，并且一共只有两个奇数顶点？

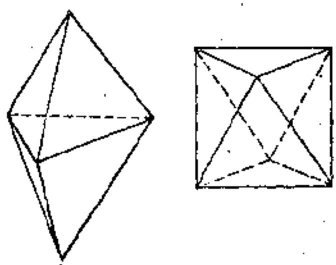
解 设这样的三角剖分是在球面G上进行的．如果把连接两个奇数顶点所成的那条线去掉（这时形成一个新“国家”与四个“国家”相邻），那么得到一个新图形G'，G'的所有顶点都是偶数顶点．因此可把G'的一切“国家”涂上两种颜色（例如红色和黑色），使相邻两“国”的颜色不同．设r和b是G'中分别涂上红色和黑色的“国家”个数．不失一般性，可以假设，与四个“国家”相邻的那个“国家”被涂上红色．

因为除了那个“国家”以外，其余每个“国家”只与其它三个“国家”相邻，所以

$$b=\frac{4+(r-1)\cdot 3}{3}.$$

但是不管r等于什么数，b都不是整数．因此，所要求的三角剖分不存在．

308．如果一个正六面体和一个正八面体的各个面都是全等的正三角形，那么这两个多面体的内切球半径之比为多少？



解 这个六面体由两个体积为V_t的正四面体组成．设V_0是八面体的体积．于是由第287题可知

$$\frac{V_t}{V_0}=\frac{1}{4}.$$

以V_h表示六面体的体积，得

$$\frac{V_h}{V_0}=\frac{1}{2}$$

此外，六面体表面积是八面体表面积的$\frac{6}{8}$．从而它们的表面积之比

$$\frac{S_h}{S_0}=\frac{3}{4}.$$

因为

$$V_h=\frac{r_h S_h}{3},\quad V_0=\frac{r_0 S_0}{3},$$

所以可得这两个多面体的内切球半径之比

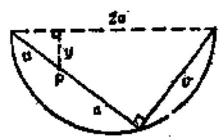
$$\frac{r_h}{r_0}=\frac{V_h}{V_0}\cdot\frac{S_0}{S_h}=\frac{2}{3}.$$

4

解析几何

309. 把一支长为d的木棒放在直径为d的半球形大桶中，忽略去木棒的厚度和摩擦力，试求木棒在平衡状态时与半球直径所成的角.

解 1 作出如图所示的辅助线，可得关系式



$$y=u\sin\theta,\quad v=2a\sin\theta,$$

$$v^2+(u+a)^2=4a^2.$$

消去u和v，得方程

$$y=a(\sin 2\theta-\sin\theta).$$

如果P是木棒的重心，那么在P位于可能位置的最低点时，木棒达到平衡位置．因此，使y取最大值时的那个角是所要求的角．令

$$y'(\theta)=0,$$

可得方程

$$4\cos^2\theta-\cos\theta-2=0,$$

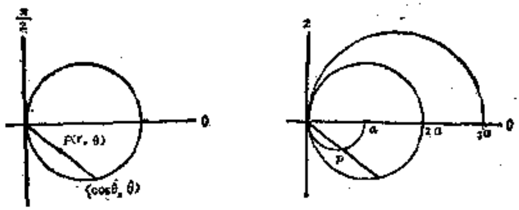
解之得

$$\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}.$$

但是，未知角是锐角，所以本题的唯一解是

$$\theta \approx 32^\circ 32'.$$

解 2



作如图所示的极坐标系，重心 P 的轨迹方程是

$$r = 2a\cos\theta - a, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0.$$

为求出 P 的最低位置，要用极坐标系中曲线的切线斜率公式

$$r = \frac{r + r'\mathrm{tg}\theta}{r' - r\mathrm{tg}\theta},$$

并令 $k = 0$. 把 $r(\theta)$ 的表达式代入等式

$$r + r'\mathrm{tg}\theta = 0,$$

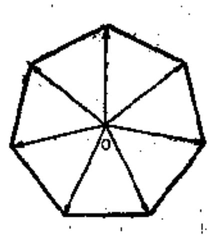
得方程

$$4\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0.$$

解之得 $\theta \approx -32^\circ 32'$. “$-$”号与极坐标中 θ 的变化区间有关.

第二个解法具有下列优点：不要求作辅助线，并且可以求出重心的轨迹，给出 $\cos\theta$ 的第二个值的解释.

310. 求证：从一个正 n 边形的中心出发而在它的各顶点上终止的所有向量之和等于 0 .



证 设 R 为这些向量的和．把原图形绕中心 O 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 弧度．于是所得的

新图形与原图形重合．这时R也旋转了$\frac{2\pi}{n}$弧度，变成R'．显然，$R=R'$，但因这两个向量的方向不同，故$R=R'=0$

311．试求两条曲线

$$2x^2+3xy-2y^2-6x+3y=0,$$
$$3x^2+7xy+2y^2-7x+y-6=0$$

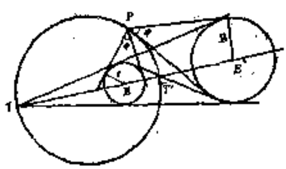
的六个交点．

解　如果两条二次曲线有$2\times2=4$个以上的交点，那么它们的方程应当是退化的，并且有公因式．原方程可写成

$$(x+2y-3)(2x-y)=0,$$
$$(x+2y-3)(3x+y+2)=0.$$

因此，直线$x+2y-3=0$上的所有的点都属于两条已知曲线．例如可以取满足题目条件的下列六点：$(-1,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(0,\frac{3}{2})$，$(3,\ 0)$，$(4,\ -\frac{1}{2})$，$(5,\ -1)$．

312．试设计一个宇宙飞船的轨道，使得在轨道的任何一点上看地球和月球时，两者的大小相等．



解　设地球E的半径等于R，月球M的半径等于r，如图所示．因为从轨道的任何一点上应以相同的视角φ看见地球和月球，所以可以指出这样两点T和T'，分别为E和M的外公切线的交点和内公切线的交点．由方程

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{PE^2-R^2}{R^2}=\frac{PM^2-r^2}{r^2}$$

可得

$$PE:PM=R:r.$$

因为与两个已知点的距离为固定比例的点，它们的几何轨迹

是一个圆，所以宇宙飞船的轨道是一个圆心在直线$TMT'E$上的圆.

313. 求证：如果k是任意一个实数，那么曲线

$$x^4+kx^3y-6x^2y^2-kxy^3+y^4=0$$

把圆$x^2+y^2=1$八等分.

证 设单位圆$x^2+y^2=1$上的点是

$$x=\cos\varphi,\quad y=\sin\varphi.$$

把它们代入原曲线方程中，化简后得方程

$$4\cos4\varphi+k\sin4\varphi=0.$$

它的解是

$$\varphi=\delta+\frac{\pi}{8}(2n+1)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7),$$

其中

$$\delta=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{4}{k}\right).$$

φ是两条曲线交点的幅角，因此这些交点把圆$x^2+y^2=1$八等分.

314. 求证：对于任意一个有理数x，至少可以求出一个有理数y，使得对偶（x，y）满足方程

$$2x^3+2y^3-3x^2-3y^2+1=0.$$

证 把原方程写成

$$(x+y-1)(2x^2-2xy+2y^2-x-y-1)=0,$$

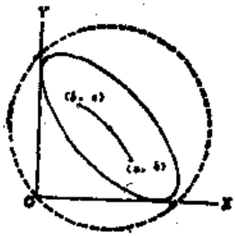
显然可见，原方程的图象是一条直线和一个椭圆．在直线$x+y-1=0$上取任意一个具有有理数坐标x的点，可以看出，相应的坐标$y=1-x$也是有理数.

315. 在一个平面内给出两条互相垂直的直线，一个椭

圆在这个平面内移动，始终和这两条直线相切．试求椭圆中心的轨迹．

解 考虑椭圆的标准方程

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.



首先证明：两条互相垂直且与椭圆相切的直线的交点在圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上．

设 (x_0, y_0) 是两条直线的交点，$y=y_0+k(x-x_0)$ 是切线方程．解方程组

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \\ y=y_0+k(x-x_0), \end{cases}$$

可得二次方程

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

其中

$$A=b^2+a^2k^2,$$
$$B=2ka^2(y_0-kx_0),$$
$$C=a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2.$$

因为讨论的是切线，所以直线和椭圆的两个交点重合，从而上述二次方程的两根相等．因此，它的判别式 $B^2-4AC=0$，即有

$$k^2(x_0^2-a^2)-2kx_0y_0+y_0^2-b^2=0.$$

这个方程的两根 k_1 和 k_2 对应于过点 (x_0, y_0) 的两条椭圆切线．它们互相垂直的条件是 $k_1k_2=-1$．但是根据韦达定理

$$-1 = k_1 k_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2},$$

从而

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

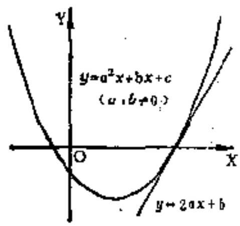
其次来解本题．固定两条互相垂直的直线，并使椭圆在平面内移动，始终保持和这两条直线相切．那么，椭圆中心到这两条直线的交点的距离总是$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$．取这两条直线作为坐标轴，于是椭圆中心离这两个轴的最近点为(a, b)和(b, a)．因此，在椭圆运动时，其中心描绘出这两点间的圆弧，其方程是

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

圆弧的长度等于

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

316． 试说明：为什么下图所示的图形是不可能的？



解1 由图可见，二次三项式ax^2+bx+c有两个不同的实根，从而$b^2-4ac>0$．由$2ax+b=0$可知$x=-\frac{b}{2a}$．但是由图看出

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < -\frac{b}{2a},$$

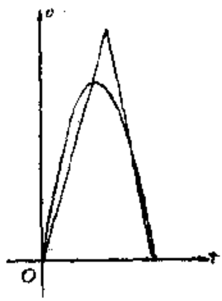
而这是不可能的．

解2 显然，这条直线和x轴的交点的横坐标为$-\frac{b}{2a}$，这个数也是这条抛物线的顶点的横坐标．但是由图可见，这

两点并不重合，矛盾就在于此．

317．一个处于静止状态的质点开始作直线运动．它用一个单位时间通过了一个单位距离后，停止了运动．设它的速度 v 和加速度 a 都是随着时间 t 连续地变化的．求证：在某一时刻，质点的速度的值至少等于 4 个单位．

证 如果在直角坐标系上画出 v 和 t 的依赖关系曲线，那么这条曲线与 t 轴所围成的面积（1 个平方单位）等于底边为 1 、高为 2 的等腰三角形的面积．这个三角形的两腰的斜率为 ± 4．这条曲线至少有一部分超出三角形的范围，或者完全与三角形的边重合．所以在某一点上，这条曲线的切线斜率的绝对值不小于4．



318．设在非线性函数 $f(x)$ 的图象上给出一些点 P_i $(i=0, 1, \cdots, n)$．以 m_i 表示连结两点 P_i 和 P_{i+1} 所成线段的斜率（令 $P_{n+1}=P_0$）．其次设 $f(x)$ 是一个对所有实数 x 都有定义的非常数函数．

求证：$f(x)$ 是一个二次三项式．它的图象当且仅当在下列情形下才是抛物线：在这个图象上可以找出这样的点 P_0，使得对于这个图象上的任意其它 n 个点 $P_1, \cdots, P_n$，关系式

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i = 0$$

都成立．

证 如果在 $-\infty < x < +\infty$ 上，当 $a \neq 0$ 时

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

那么

$$m_i = a(x_i + x_{i+1}) + b,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i = \sum_{i=0}^{n} [a(x_i + x_{i+1}) + b](-1)^i$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为奇数时,} \\ 2ax_0 + b & \text{当 } n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

因为$f'(x_0) = 2ax_0 + b$，所以只要取点

$$P_0\left(-\frac{b}{2a}, \quad \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

作为 P_0即可.

反之，设原关系式成立. 取 P_0为坐标原点，并设$n = 2$，得

$$\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 0.$$

固定P_2点，可以求出点（x_1，y_1）满足方程

$$y x_2^2 = y_2 x^2,$$

它给出一条抛物线（非线性条件排除了$y_2 = 0$ 的情形）. 因此，这个条件实际上是充要条件.

319. 设直线与曲线 $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ 相交于四个不同点（x_i，y_i）（其中 $i = 1, 2, 3, 4$）. 求证，平均值 $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$与直线无关，并求出这个值.

证 设与曲线相交于四个点的直线方程为

$$y = mx + b.$$

于是x_i是方程

$$2x^4 + 7x^3 + (3 - m)x - (5 + b) = 0$$

的根，四个根的和是$-\frac{7}{2}$，它们的平均值

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=-\frac{7}{8},$$

这与直线无关.

320. 设$a>b>0$. 对于给定的 r, $0<r<b$, 有唯一的 $R>0$ 使圆

$$(x-a+r)^2+y^2=r^2$$

位于圆

$$x^2+(y-b+R)^2=R^2$$

内, 且两圆相切. 当 r 为何值时, $\frac{R}{r}$最小?

解 因为两圆内切, 所以必有

$$(R-r)^2=(a-r)^2+(R-b)^2.$$

于是

$$\frac{R}{r}=f(r)=\frac{a^2+b^2-2ar}{2r(b-r)}.$$

利用导数可以求出: 函数 $f(r)$ 在区间 $(0, b)$ 内, 当

$$r_0=\frac{1}{2a}[a^2+b^2-(a-b)\sqrt{a^2+b^2}]$$

时有最小值.

321. 设P是椭圆上的一点. 令 d 是从椭圆中心到椭圆在P点的切线的距离. 求证: 当P在椭圆上移动时, $|PF_1|\cdot|PF_2|d^2$是一个常数, 其中$|PF_1|$和$|PF_2|$分别是从P点到椭圆焦点F_1和F_2的距离.

证 令P点的坐标为(x, y), 椭圆方程为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

其中$a>b>0$. 于是$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $c^2=a^2-b^2$. 令$r_1=|PF_1|$, $r_2=|PF_2|$. 于是$r_1+r_2=2a$, 并且

$$r_1 r_2=\frac{1}{2}[(r_1+r_2)^2-r_1^2-r_2^2]$$
$$=\frac{1}{2}[4a^2-(x+c)^2-y^2-(x-c)^2-y^2]$$
$$=2a^2-x^2-y^2-c^2$$
$$=a^2+b^2-x^2-y^2.$$

设（u，v）是椭圆在P点的切线上的一点，则（u，v）满足

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=1.$$

把此式改写成

$$u\cos\theta+v\sin\theta=d,$$

求得

$$d^2=\frac{1}{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}=\frac{a^4b^4}{b^4x^2+a^4y^2}.$$

但是

$$b^4x^2+a^4y^2=b^2(a^2b^2-a^2y^2)+a^2(a^2b^2-b^2x^2)$$
$$=a^2b^2(a^2+b^2-x^2-y^2)=a^2b^2r_1r_2.$$

因此

$$d^2r_1r_2=\frac{a^4b^4r_1r_2}{a^2b^2r_1r_2}=a^2b^2=\text{常数}.$$

322. (1) 求抛物线

$$y=kx^2-2(k+2)x+k+\frac{4}{k}+5$$

的顶点坐标.

(2) 如果此顶点位于函数$y=\log_k x$的图象上，那么k应取何值?

(3) 如果此顶点位于函数

$$y=\frac{1}{2}\sin x+\cos^2 x\ (0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$$

的图象上，那么 k 应取何值?

解 (1) 当 $k\neq 0$时，原式可化为

$$y=k(x-\frac{k+2}{k})^2+1,$$

由此可知抛物线的顶点坐标为 $(\frac{k+2}{k},\ 1)$.

(2) 由题设知

于是得 $$\log_k\frac{k+2}{k}=1,$$

$$\frac{k+2}{k}=k,$$

$$k^2-k-2=0,$$

解之得 $k=2$.

(3) 由

$$\frac{1}{2}\sin x+\cos^2 x=1$$

得

$$\frac{1}{2}\sin x-\sin^2 x=0,$$

解之得

$$\sin x=0\ 或\ \frac{1}{2},$$

因为 x 在区间$[0,\ \frac{\pi}{2}]$上，所以

$$x=0\ 或\ \frac{\pi}{6}.$$

由题设

$$\frac{k+2}{k}=0\text{或}\frac{k+2}{k}=\frac{\pi}{6},$$

得出

$$k=-2\text{或}k=-\frac{12}{6-\pi}.$$

323. 抛物线$y=ax^2+bx+c$通过(0, 4)和(2, −2)两点. 当这条抛物线在x轴上所截得的线段最短时，a，b和c各取什么值?

解 把两个已知点的坐标代入$y=ax^2+bx+c$，可得$c=4$，$b=-(2a+3)$. 于是

$$y=ax^2-(2a+3)x+4.$$

当$y=0$时，可求出

$$x=\frac{2a+3\pm\sqrt{4a^2-4a+9}}{2a}.$$

因此，抛物线在x轴上所截线段的长度

$$l=\left|\frac{\sqrt{4a^2-4a+9}}{a}\right|,$$

平方且配方得

$$l^2=\frac{4a^2-4a+9}{a^2}=\frac{9}{a^2}-\frac{4}{a}+4$$

$$=9\left[\frac{1}{a^2}-\frac{4}{9a}+(\frac{2}{9})^2\right]-\frac{4}{9}+4$$

$$=9(\frac{1}{a}-\frac{2}{9})^2+\frac{32}{9}\geqslant\frac{32}{9}.$$

当$\frac{1}{a}-\frac{2}{9}=0$时，等号成立. 因此，当$a=\frac{9}{2}$时，$l$取最小值，此时$b=-(9+3)=-12$.

324. 已知x，y都是实数，且$x^2+y^2=1$.

(1) 求 y 的取值范围.

(2) 求 $x^2+(1-y)^2$ 的最大值.

解　(1) 显然，$x^2+y^2=1$ 与

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$$

等价. 因为

$$-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1,$$

所以

$$-1\leqslant y\leqslant 1.$$

也可用另一方法来解：因为 $x^2+y^2=1$，所以

$$1-y^2=x^2\geqslant 0,$$

$$-1\leqslant y\leqslant 1.$$

(2) 设

$$P=x^2+(1-y)^2,$$

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}P&=x^2+(1-y)^2=x^2+1-2y+y^2\\&=\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta\\&=2-2\sin\theta.\end{aligned}$$

所以

$$2\sin\theta=2-P,$$

$$\sin\theta=\frac{2-P}{2}.$$

但是

$$-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1,$$

从而

$$-1\leqslant\frac{2-P}{2}\leqslant 1.$$

解之得$0\leqslant P\leqslant 4$. 因此$x^2+(1-y)^2$的最大值是4.

325. 已知圆$x^2+y^2=1$通过$A(p, q)$ 和 $B(r, c)$ 两点，且$pr+qs=0$. 求证：这个圆必通过$C(p,r)$和 $D(q,s)$两点.

证 因为圆$x^2+y^2=1$通过$A(p, q)$ 和$B(r, s)$ 两点，所以

$$p^2+q^2=1,$$
$$r^2+s^2=1.$$

因此，

$$q^2s^2=(1-p^2)(1-r^2),$$
$$q^2s^2-p^2r^2=1-(p^2+r^2),$$
$$(qs+pr)(qs-pr)=1-(p^2+r^2).$$

已知$pr+qs=0$，从而

$$p^2+r^2=1.$$

同理可证

$$q^2+s^2=1.$$

因此，圆$x^2+y^2=1$通过$C(p, r)$ 和$D(q, s)$ 两点.

326. 求证：不能在两轴不相等的椭圆中作出一个边数大于四的内接正多边形.

证 如果这样的多边形存在，那么它的外接圆与椭圆相交于四个以上的点（即这个多边形的各顶点），而这是不可能的.

5

平 面 三 角

327. 证明：当$0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \pi$时，不等式

$$\cos x+\cos y \leqslant 1+\cos xy$$

成立.

证 因为余弦函数是偶函数，所以可令x，$y \geqslant 0$. 其次可设x，$y>1$. 因为，如果$x \leqslant 1$,那么

$$xy \leqslant y \leqslant \sqrt{\pi}<\pi, \quad \cos y \leqslant \cos xy,$$

所以

$$\cos x+\cos y \leqslant 1+\cos xy.$$

如果这个不等式不成立，那么可由

$$xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

推出$\cos xy>0$，因此

$$\cos x+\cos y \geqslant 1.$$

于是

$$\cos x \geqslant 1-\cos y>1-\cos 1>0.45,$$

$$x<\arccos 0.45<1.2.$$

类似地，$y<1.2$. 从而有

$$xy<1.2^2=1.44.$$

因此

$$1+\cos xy>1+\cos 1.44>1.33$$
$$>2\cos 1>\cos x+\cos y,$$

这是矛盾的．于是证明了原不等式成立．

328．设 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ **的最大值．**

解 因 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，故 $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$，即

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

化简后得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1.$$

设

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=a,\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=b,\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=c.$$

代入不等式

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

化简后得

$$1\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}},$$

因此

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

这就是说，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{9}$.

329. 对于区间（0，$\frac{\pi}{2}$）内的任何一个θ，$\sqrt{\sin\theta}$和$\sqrt{\cos\theta}$能不能同时取有理值？

解 设

$$\sqrt{\sin\theta}=\frac{a}{b},\ \sqrt{\cos\theta}=\frac{c}{d},$$

其中a，b，c，d都是正整数．于是

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{a^4}{b^4}+\frac{c^4}{d^4}.$$

利用公式$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，可得

$$(bd)^4=(ad)^4+(bc)^4.$$

但是这个等式不成立，因为方程$x^4+y^4=z^4$没有正整数解．因此，$\sqrt{\sin\theta}$和$\sqrt{\cos\theta}$不能同时取有理值．

330. 求证：极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n}\right)^p$$

当$p>1$时存在，当$p\leqslant1$时不存在．

证 设

$$S(n,p)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n}\right)^p=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}\right)^p$$

因为当$0<\theta<\frac{\pi}{2}$时，关系式

$$\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{n}=\frac{\frac{\theta}{n}}{\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{n}}<\frac{1}{\theta}$$

成立，所以

$$\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}<\frac{2}{k\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}=\frac{2}{k\pi}.$$

记$a_{n,k}=\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}$. 因为$a_{n+1,k}>a_{n,k}$，所以当$n\to\infty$时，$a_{n,k}$单调收敛到$\frac{2}{k\pi}$.又因为当$n\to\infty$时，$S(n,p)$的每个加项都增大，并且还增加一些新的正加项，所以$S(n,p)$也是单调上升的，从而$\lim\limits_{n\to\infty}S(n,p)$存在(有限或无限).

当$p>1$时，

$$S(n,p)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}\right)^p\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{k\pi}\right)^p$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}\right)^p<+\infty,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}S(n,p)$取有限值.

当$p\leqslant 1$时,可以取充分大的正整数N,使得当$n>N$时有

$$\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}>\frac{1}{k\pi}.$$

于是当$n>N$时

$$S(n,p)>\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}\right)^p>\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k\pi}\right)^p,$$

因此，对于充分大的N，都有

$$\lim_{n\to\infty} S(n,\ p) > \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k\pi}\right)^{p},$$

但是上式右边无界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S(n,\ p)$ 不存在.

331. 求证：

$$\operatorname{tg}117^\circ+\operatorname{tg}118^\circ+\operatorname{tg}125^\circ=\operatorname{tg}117^\circ\operatorname{tg}118^\circ\operatorname{tg}125^\circ.$$

证 注意到

$$360^\circ-125^\circ=117^\circ+118^\circ,$$

上式两边取正切，得

$$\operatorname{tg}(360^\circ-125^\circ)=\operatorname{tg}(117^\circ+118^\circ),$$

利用三角公式，得

$$-\operatorname{tg}125^\circ=\frac{\operatorname{tg}117^\circ+\operatorname{tg}118^\circ}{1-\operatorname{tg}117^\circ\operatorname{tg}118^\circ}.$$

化简后，即得

$$\operatorname{tg}117^\circ+\operatorname{tg}118^\circ+\operatorname{tg}125^\circ=\operatorname{tg}117^\circ\operatorname{tg}118^\circ\operatorname{tg}125^\circ.$$

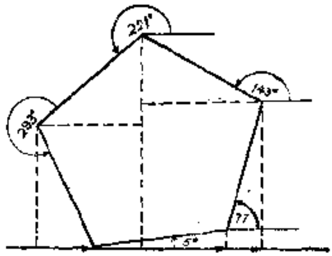
一般说来，当 $A+B+C=180^\circ$时，

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

332. 试求和数

$$\cos5^\circ+\cos77^\circ+\cos149^\circ+\cos221^\circ+\cos293^\circ.$$

解 把任意一个多边形的各边投影到这个多边形平面内的一条直线上，这些取相应符号的投影之和为 0 .



现在取一个边长为 1 的正五边形，并注意到它的外角为 72°.在这个五边形所在的平面

内，取一条直线，它和五边形的一边成5°角，把各边投影到这条直线上，题中各个余弦恰好是这些投影，因此

$$\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ = 0.$$

333. 求证：如果 $\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 满足关系式

$$\operatorname{tg}(A-B) + \operatorname{tg}(B-C) + \operatorname{tg}(C-A) = 0,$$

那么这个三角形是等腰三角形.

证 设

$$a = \operatorname{tg}A,\ b = \operatorname{tg}B,\ c = \operatorname{tg}C,$$

应用差的正切公式可得

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = 0.$$

变换后得等式

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 0.$$

由此可知原三角形是等腰三角形.

注意，我们这里没有用到条件 $A+B+C=\pi$.

334. 求证：在区间（0，$\frac{\pi}{2}$）内存在唯一的两个数 $c<d$，使得

$$\sin(\cos c) = c,\ \cos(\sin d) = d.$$

证 设

$$\theta(x) = \sin(\cos x) - x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi.$$

于是

$$\theta(0) = \sin 1 > 0,\ \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

此外，

$$\theta'(x) < 0,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

因此，存在唯一的一个数 c，$0<c<\frac{\pi}{2}$，使$\sin(\cos c)=c$.

如果$\cos(\sin d)=d$，那么

$\sin[\cos(\sin d)]=\sin d$，$0<\sin d<\frac{\pi}{2}$.

但是$\sin(\cos c)=c$，并且 c 是唯一的，因此$c=\sin d$，就是说$d=\cos c$，并且d 是唯一的．此外，因为 $c=\sin d$，而当$x>0$时，$\sin x<x$．所以$c<d$.

335．求证

$$\cos^n\frac{\pi}{n}-\cos^n\frac{2\pi}{n}+\cdots+(-1)^{n-1}\cos^n\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

证 设 $\omega=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$．因为

$$\omega^{\pm j}=\cos\frac{\pi j}{n}\pm i\sin\frac{\pi j}{n},$$

所以

$$\cos\frac{\pi j}{n}=\frac{1}{2}(\omega^j+\omega^{-j}),\quad -1=\omega^n.$$

因此

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\cos^n\left(\frac{\pi j}{n}\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{nj}\left(\frac{\omega^j+\omega^{-j}}{2}\right)^n$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{nj}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\omega^{j(n-2k)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(2n-2k)}.$$

其次注意，当 $k\neq 0$ 和 n 时，

$$\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(2n-2k)}=0.$$

当 $k=0$ 和 n 时，这个和等于 n．因此，原来的和等于

$$\frac{1}{2^n}(nC_n^0+nC_n^n)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

336．求证：对于任意实数集合 $\{T_i\}$（$i=1,2,\cdots,n$），都有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(T_k-T_j)\geqslant 0.$$

证 我们来证明一个更一般的不等式．取任意实数 T_i，x_i，$i=1,2,\cdots,n$.

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_k[\cos(T_k-T_j)]x_j$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_k[\cos T_k\cos T_j+\sin T_k\sin T_j]x_j$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\cos T_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\sin T_k\right)^2\geqslant 0.$$

337．求证：在任意$\triangle ABC$中，下列不等式成立：

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqslant 4,$$

并且等号只有在正三角形时才成立．

证Ⅰ 设 R 是外接圆半径．于是由正弦定理知

$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

从而可把原不等式化成

$$(a+b+c)R^2\geqslant abc. \tag{1}$$

因为

$$a+b+c=2p,\ abc=4RS,$$

其中 p是三角形的半周长，S是它的面积，所以由（1）得

$$Rp \geqslant 2S=2rp, \tag{2}$$

其中 r 是内切圆半径．但是，(2) 等价于熟知的不等式 $R \geqslant 2r$，此式只有在正三角形时才变成等式．

证2 因为 $A+B+C=\pi$，所以容易把原不等式左边写成

$$\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{1}{D}.$$

为了求出D的最大值，应使D的偏导数等于0：

$$\frac{\partial D}{\partial A}=\sin\frac{B}{2}\cos\left(A+\frac{B}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial B}=\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)=0.$$

由此得到，D当$A=B=\frac{\pi}{3}$时达到最大值$\frac{1}{4}$．因此，原不等式左边当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时达到最小值 4．于是原不等式成立．

证3 我们知道

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}\geqslant\frac{2}{R},$$

其中h_a，h_b，h_c是$\triangle ABC$的高，r和R分别是它的内切圆半径和外接圆半径，并且等号只有在正三角形时才成立．因此

$$\frac{2R}{h_a}+\frac{2R}{h_b}+\frac{2R}{h_c}\geqslant 4,$$

此不等式等价于不等式

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqslant 4.$$

338. 设$A_1A_2\cdots A_n$是内接于圆O的正n边形，B是$\widehat{A_1A_n}$上的一点，$\theta=\angle A_nOB$，a_k是弦BA_k的长度．试将$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$表示为$\theta$的函数．

解 我们有

$$\begin{aligned}a_k&=2r\sin\frac{\frac{2\pi}{n}(n-k)-\theta}{2}\\&=2r\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right),\end{aligned}$$

其中r是圆的半径．于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\cos\frac{\pi}{2n}\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k r\left\{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}-\frac{\theta}{2}\right]+\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\frac{\theta}{2}\right]\right\}\\&=[-1+(-1)^{n+1}]r\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

因此

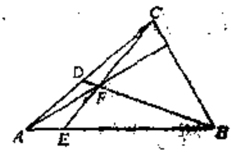
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k=\begin{cases}2r\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)\sec\frac{\pi}{2n} & (n\text{为偶数}),\\0 & (n\text{为奇数}).\end{cases}$$

339. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=40^\circ$，$\angle B=60^\circ$．设D和E分别是位于边AC和AB上的点，使$\angle CBD=40^\circ$，$\angle BCE$

$=70°$. 又设F是直线BD和CE的交点. 求证：直线 AF 和直线BC垂直.

证 如图，在$\triangle BCF$中，

$$\angle BCE=\angle BFC=70°,$$



所以$BC=BF$. 又在$\triangle ABC$中，用正弦定理可得

$$AB=BC\cdot\frac{\sin 80°}{\sin 40}$$
$$=2BC\cdot\cos 40°.$$

因此，可由

$$AB\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}AB=BC\cdot\cos 40°=BF\cdot\cos 40$$

得出$AF\perp BC$.

340. 如果$\cos 17x=f(\cos x)$，试证：

$$\sin 17x=f(\sin x).$$

证 $f(\sin x)=f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$

$$=\cos\left[17\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{2}-17x\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-17x\right)=\sin 17x.$$

341. 设$0\leqslant x\leqslant 1$，证明：

$\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$.

证 因为 $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$,

$$\arcsin(\cos x)=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{\pi}{2}-x,$$

所以设$x=\cos\varphi$，即得

$$\arcsin(\cos x)-\cos(\arcsin x)$$

$$=\frac{\pi}{2}-x-\sqrt{1-x^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\cos\varphi-\sin\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}(\cos\varphi\sin45^\circ+\sin\varphi\cos45^\circ)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin(\varphi+45^\circ)\geqslant\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}>0.$$

因此

$$\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x).$$

342. 试证 $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.

证 因为

$$\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}>0,$$

$$|\cos x\pm\sin x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)\right|\leqslant\sqrt{2},$$

所以

$$\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)>0,$$

$$\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)>0,$$

于是

$$2\cos\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)\right]\sin\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]>0,$$

这就是说

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\sin(\cos x)>0;$$

由此即得

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x).$$

343. 在$\triangle ABC$中

$$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2},$$

其中B是锐角．试证明这个三角形是等腰三角形．

证 由

$$\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$$

得

$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因B是锐角，故$B=45^\circ$．又因

$$\lg a-\lg c=-\lg\sqrt{2}.$$

故得

$$a:c=1:\sqrt{2},$$

即$c=\sqrt{2}a$.由余弦定理

$$\begin{aligned}b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\&=a^2+(\sqrt{2}a)^2-2a\sqrt{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=a^2,\end{aligned}$$

可知$\triangle ABC$是等腰三角形.

344. 求证：对于任何整数n，

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha$$

$$-C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\cdots,$$

$$\sin n\alpha=C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha$$

$$+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\cdots.$$

证 由棣莫佛定理和二项式定理可得

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$$

$$=\cos^n\alpha + C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot i\sin\alpha + C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot(i\sin\alpha)^2$$

$$+C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot(i\sin\alpha)^3 - C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot(i\sin\alpha)^4+\cdots$$

$$=[\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha$$

$$+\cdots]+i(C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha+\cdots).$$

比较上式两边的实部和虚部，就得到本题的两个等式.

345. 求证

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

证 方程$x^{2n+1}-1=0$的各根为1和

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4\pi}{2n+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{4n\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4n\pi}{2n+1}.$$

根据方程的根与系数的关系（参阅附录中的韦达定理），由原方程中x^{2n}项的系数为0得

$$\left(1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}\right)$$

$$+i\left(\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\sin\frac{4n\pi}{2n+1}\right)=0.$$

此时各个括号内的和式均为0，故有

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}=-1.$$

但是 由

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}=\cos\frac{4n\pi}{2n+1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{2n+1}=\cos\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}$$

等关系式，可得

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)=-1,$$

因此

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

346. 试求arcsin[cos(arcsin$x$)]与arccos[sin(arccos$x$)]之间的关系.

解 因为

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\arccos[\sin(\arccos x)]=\arccos\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)\right]$$

$$=\arccos[\cos(\arcsin x)]=\frac{\pi}{2}-\arcsin[\cos(\arcsin x)].$$

因此，

$$\arcsin[\cos(\arcsin x)]+\arccos[\sin(\arccos x)]=\frac{\pi}{2}.$$

347. 证明：如果α和β均为锐角，且$\alpha<\beta$，那么下列两个不等式成立：

(1) $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$；

(2) $\operatorname{tg}\alpha-\alpha<\operatorname{tg}\beta-\beta$.

证 (1) 只须证：如果$\alpha<\beta$，那么

$$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha.$$

因为对于锐角，$\sin x<x$，$\cos x<1$，且

$$\sin\beta-\sin\alpha=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$<2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot1=\beta-\alpha,$$

所以原不等式成立.

(2) 只须证

$$\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha>\beta-\alpha.$$

因为对于锐角，$\operatorname{tg}x>x$，且

$$\beta-\alpha<\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}<\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha,$$

所以原不等式成立.

348. 求下列两式的值：

$$\cos\alpha+C_n^1\cos2\alpha+C_n^2\cos3\alpha+\cdots+C_n^{n-1}\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha,$$

$$\sin\alpha+C_n^1\sin2\alpha+C_n^2\sin3\alpha+\cdots+C_n^{n-1}\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha.$$

解 先求下式的实部与虚部：

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)+C_n^1(\cos2\alpha+i\sin2\alpha)+C_n^2(\cos3\alpha+i\sin3\alpha)$$

$$+\cdots+[\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha].$$

设 $\cos\alpha+i\sin\alpha=x$，由棣莫佛定理和二项式定理，把上式改写成

$$x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+\cdots+x^{n+1}=x(1+x)^n$$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}\alpha+i\sin\frac{n+2}{2}\alpha\right).$$

由此得

$$\cos\alpha+C_n^1\cos2\alpha+C_n^2\cos3\alpha+\cdots+\cos(n+1)\alpha$$

$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha,$$

$$\sin\alpha+C_n^1\sin2\alpha+C_n^2\sin3\alpha+\cdots+\sin(n+1)\alpha$$

$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha.$$

349. 试求参数 a 的所有的值，使得对于其中每个 a，不等式

$$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2x+a>0$$

对所有的 x 成立.

解 设 a 满足题目条件. 因为原不等式应该对所有的 x 都成立，所以它当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时也应成立，即下列不等式应成立：

$$\left(4-\sin\frac{\pi}{2}\right)^4a-3+\cos^2\frac{\pi}{2}+a>0,$$

化简后得

$$82a-3>0,\ a>\frac{3}{82}.$$

现在设 $a>\frac{3}{82}$. 对于 x 的每一个值，下列三个不等式成立：

$$\cos^2x>0,\ 4-\sin x\geqslant3,$$
$$(4-\sin x)^4\geqslant81.$$

因为$a>0$，所以从这三个不等式推出

$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a \geqslant 81a-3+a=82a-3>0$.

这就是说，满足$a>\frac{3}{82}$的所有a都满足题目的条件.

350. 求证：当$x\in[-\pi, \pi]$时，下列不等式成立：

$$\cos x\sin 2x>-\frac{7}{9}.$$

证 为方便起见，设

$$f(x)=\cos x\sin 2x.$$

我们来求函数$f(x)$在区间$[-\pi, \pi]$上的最小值. 为此先把$f(x)$化成

$$\begin{aligned} f(x)&=2\sin x\cos^2 x\\ &=2\sin x(1-\sin^2 x)\\ &=2\sin x-2\sin^3 x. \end{aligned}$$

现在求$f(x)$的驻点. 因为$f(x)$在数轴的任何点上都是可微的，所以$f(x)$的驻点是方程$f'(x)=0$的解. 求$f(x)$的导数

$$\begin{aligned} f'(x)&=2\cos x-6\sin^2 x\cos x\\ &=2\cos x\cdot(1-3\sin^2 x). \end{aligned}$$

在$[-\pi, \pi]$上解方程

$$\cos x=0,\ 1-3\sin^2 x=0,$$

得驻点

$$x_1=\frac{\pi}{2},\quad x_2=-\frac{\pi}{2},\ x_3=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x_4=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_5=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x_6=-\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

计算$f(x)$在驻点和区间$[-\pi, \pi]$端点上的值：

$$f(x_1)=f(x_2)=0,$$

$$f(x_3)=f(x_5)=2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right]=\frac{4}{3\sqrt{3}},$$

$$f(x_4)=f(x_6)=2\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3\right]=-\frac{4}{3\sqrt{3}},$$

$$f(-\pi)=f(\pi)=0.$$

$f(x)$的这四个值中最小者是$f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上的最小值．因此，$f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上的最小值是

$$f(x_4)=-\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

现在只需检验不等式

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}}>-\frac{7}{9} \qquad (\bullet)$$

的正确性就行了．因为$3<\frac{49}{16}$，所以$\sqrt{3}<\frac{7}{4}$．由此可知不等式（$\bullet$）成立．

综上所述，可以看出，在区间$[-\pi,\ \pi]$上

$$f(x)\text{的最小值}=\cos x\sin 2x\text{的最小值}=-\frac{4}{3\sqrt{3}}>-\frac{7}{9},$$

因此就证明了本题的不等式

$$\cos x\sin 2x>-\frac{7}{9}.$$

附　录

进位制与可除性特征

给定一个自然数 b，以 b 作为进位制的底数，可把每个自然数 N 唯一地写成下式：

$$N=a_kb^k+a_{k-1}b^{k-1}+\cdots+a_1b+a_0, \qquad (1)$$

其中每个 a_i 等于 0，1，…，$b-1$ 中的一个数，这样的数 N 可记作

$$\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0}.$$

在十进制中，可被 9 和 11 整除的特征是众所周知的，在 b 进制中，也有这些特征.

A. 为使数 N 可被 $b-1$ 整除，必须且只须它在 b 进制写法中数字之和可被 $b-1$ 整除.

实际上，利用（1）可求出

$$N-(a_0+\cdots+a_k)=a_k(b^k-1)+\cdots+a_2(b^2-1)+a_1(b-1).$$

因为

$$b^m-1=(b-1)(b^{m-1}+\cdots+b-1),$$

所以差 $N-(a_0+\cdots+a_k)$ 可被 $b-1$ 整除，于是 N 与 $a_0+\cdots+a_k$ 同时可被或不可被 $b-1$ 整除.

B. 为使 N 可被 $b+1$ 整除，必须且只须它在 b 进制写法中偶数位数字和与奇数位数字和之差可被 $b+1$ 整除.

实际上，

$$N-[a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^ka_k]$$
$$=a_1(b+1)+a_2(b^2-1)+\cdots+a_k[b^k-(-1)^k].$$

剩下的只须注意

$$b^{2n+1}+1=(b+1)(b^{2n}-b^{2n-1}+\cdots-b+1),$$
$$b^{2n}-1=(b+1)(b-1)(b^{2n-2}+b^{2n-4}+\cdots+b^2+1),$$

其余的证法同情形 A.

余数的算术

如果两个数N和N'被b除时有余数r和r'，即

$$N=kb+r,\ N'=k'b+r',$$

那么数$N+N'$，$N-N'$，NN'和N^m被b除时也分别有余数

$$r+r',\ r-r',\ rr',\ r^m.$$

韦达定理

如果x_1，x_2，…，x_n是n次方程

$$x^n+P_{n-1}x^{n-1}+\cdots+P_1x+P_0=0$$

或

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\quad (a_n\neq 0)$$

的根，那么

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-P_{n-1}=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=P_{n-2}=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}=(-1)^{n-1}P_1$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n},$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^nP_0=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

狄利克来原理（抽屉原理）

如果四个笼子里共有五只兔子，那么其中至少有一个笼子里的兔子不少于两只．或者换句话说，如果两个有限集合包含不同个数的元素，那么这两个集合的元素之间不能建立一一对应的关系．

狄利克来原理是大家熟知的．现在，应用这个原理来证明“费尔马小定理”：

如果p是一个素数，那么当a为任意整数时，差a^p-a可被p整除．

如果a可被p整除，那么定理显然成立．如果不是如此，那么在

$p-1$个数 a，$2a,\cdots,(p-1)a$（"兔子"）中每个数被 p 除时有非零余数：

$$
\begin{aligned}
a&=k_1p+r_1,\\
2a&=k_2p+r_2, \qquad\qquad (*)\\
&\cdots\cdots\\
(p-1)a&=k_{p-1}p+r_{p-1}.
\end{aligned}
$$

如果不同余数的个数（"笼子"）小于 $p-1$，那么其中至少有两个相同的余数（"至少在一个笼子里有两只兔子"）．但这是不可能的，因为当 $r_n=r_m$ 时，数

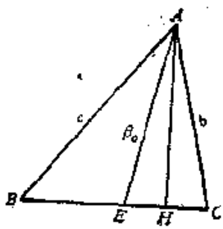
$$(n-m)a=(k_n-k_m)p$$

可被 p 整除，这是矛盾的，因为 $|n-m|<p$ 和 a 都与 p 互质．就是说所有的余数都不相等，形成数 1，2，…，$p-1$ 的一个置换．把（*）中的所有等式相乘，得

$$(p-1)!a^{p-1}=Np+r_1r_2\cdots r_{p-1}=Np+(p-1)!.$$

因此，$(p-1)!(a^{p-1}-1)$ 可被 p 整除．于是，$a^{p-1}-1$ 和 a^p-a 都可被 p 整除．

角平分线长度公式



如图所示，在△ABC 中作∠A 的平分线 AE 和高 AH．分别以 β_a，β_b，β_c 表示∠A，∠B，∠C 的平分线长度．由角平分线的性质知

$$BE:EC=AB:AC=c:b,$$

从而

$$BE=\frac{ac}{b+c},\quad EC=\frac{ab}{b+c}.$$

利用余弦定理，得

$$c^2=\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+\beta_a^2+2\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot EH,$$

$$b^2=\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+\beta_a^2-2\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot EH.$$

消去 EH，得

$$c^2b+b^2c=b\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+c\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+(b+c)\beta_a^2,$$

$$bc(b+c)=\frac{a^2bc(b+c)}{(b+c)^2}+(b+c)\ \beta_a^2.$$

由此可得公式

$$\beta_a^2=bc\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

类似地可得公式

$$\beta_b^2=\frac{ac(a+b+c)(c+a-b)}{(a+c)^2},$$

$$\beta_c^2=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

格点个数公式

任意一个简单多边形 F 的顶点都在网格结点（简称为格点）上，并且F具有封闭边界.以$c(F)$表示在F内的格点数目，$b(F)$表示在F的边界上的格点数目.记

$$m(F)=c(F)+\frac{1}{2}b(F)-1.$$

如果用折线L分F成为两个简单多边形F_1和F_2，L的各顶点在网格结点上（见图1），以l表示L上的格点总数，那么

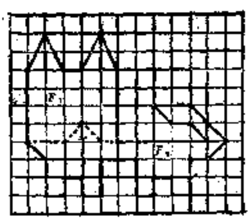


图 1

$$c(F)=c(F_1)+c(F_2)+(l-2),$$

（不计L的两端点），并且

$$b(F)=b(F_1)+b(F_2)-l-(l-2),$$

从而

$$m(F)=c(F_1)+c(F_2)+(l-2)+\frac{1}{2}[b(F_1)+b(F_2)-[-(l-2)]]-1$$

$$=[c(F_1)+\frac{1}{2}b(F_1)-1]+[c(F_2)+\frac{1}{2}b(F_2)-1]$$

$$=m(F_1)+m(F_2).$$

因此，如果对于三个多边形F，F_1，F_2中的两个来说，m的值表示它们的面积，那么第三个m也表示面积.

所有顶点在格点上的多边形可以用线段分成具有同样性质的三角形. 因此，只要对三角形证明等式$m(F)=S(F)$成立就行了.

考虑一个大小为$m\times n$的矩形，它由正方形网格构成（图2）.

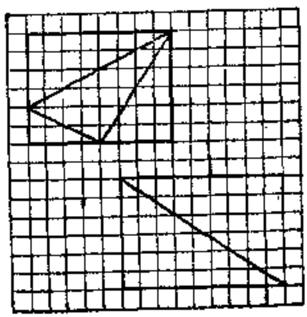


图 2

对于这个矩形，

$$c(F)=(m-1)(n-1),\quad b(F)=2m+2n,$$

$$m(F)=(m-1)(n-1)+(m+n)-1=mn.$$

用对角线把此矩形分成两个全等的三角形，由对称性可知，它们每一个都有$m(F)=S(F)$. 因此，对于高线位于网格线上的直角三角形，我们所证的结论是正确的. 最后，可用直角三角形把任意三角形扩充成为矩形（图2）. 图2中，对于四个三角形中的三个，等式$m(F)=S(F)$成立，因此对第四个三角形也成立.