中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

棋盘上的数学

单壿 程龙

上海教育出版社

责任编辑　冯　贤
封面设计　范一辛

中学生文库　棋盘上的数学

单墫　程龙

上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销　上海市印刷十二厂印刷
开本787×1092 1/32 印张3.375 插页2 字数61,000
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
印数1—17,800本

统一书号：7150·3992　定价：0.59元
ISBN 7-5820-0002-8/G6·3

前　言

“纹枰对座，

从容谈兵.”

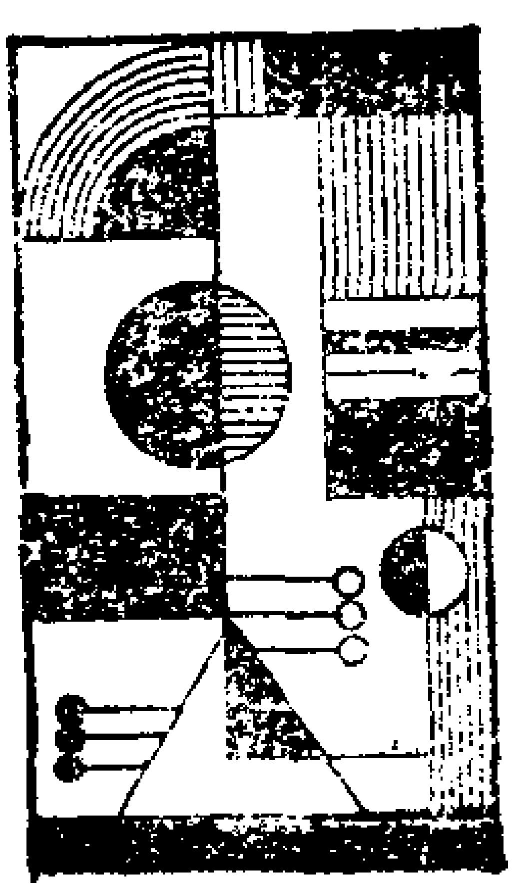
这是著名军事家陈毅元帅咏颂弈棋的诗句．你看：俩人“纹枰对座”，在一方小小的棋盘上摆开了战场．这里虽听不见炮车轰隆、战马嘶鸣，但是，他们都象真正的“军事统帅”那样，运筹帷幄，指挥着“千军万马”，进行着智力的拚搏！对于棋界高手，不论是象棋、围棋还是国际象棋，不仅要具有军事家的机敏与善断，还需要有数学家的思维与推理．

作为智力拚搏的战场，即棋盘本身还可以提供许许多多形形色色的数学问题．这些问题不但饶有趣味，而且蕴含着深刻的数学理论背景，这或许是大部分下棋爱好者所始料未及的吧！

这本小册子，就是向你介绍这些问题，希望能引起你的兴趣．

目　录

一　棋盘 ……………………………………1
二　覆盖 ……………………………………9
三　马……………………………………20
四　走遍棋盘……………………………………34
五　皇后……………………………………42
六　皇帝、车、象……………………………………52
七　博奕……………………………………61
八　棋盘上的问题……………………………………80
附录　二进制简介 ……………………………………100



一 棋　盘

象棋、围棋和国际象棋的棋盘都是长方形，由一些横线与纵线组成．

图 1 是象棋的棋盘，它由 10 条横线与 9 条纵线组成，棋子放在横线与纵线的交叉点上．

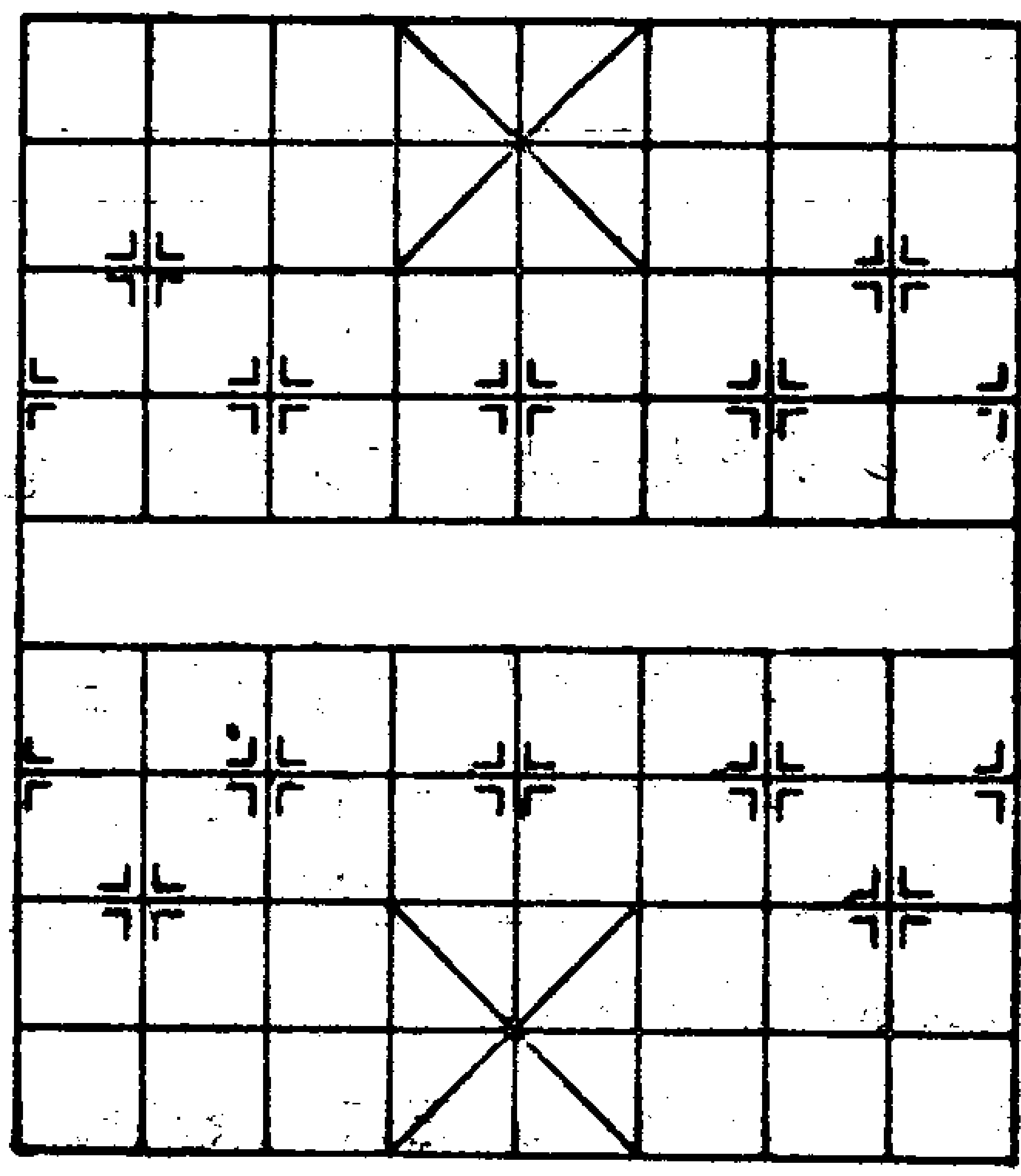


图 1

图 2 是围棋的棋盘，它由 19 条横线和 19 条纵线组成，棋子也是放在横线与纵线的交叉点上。

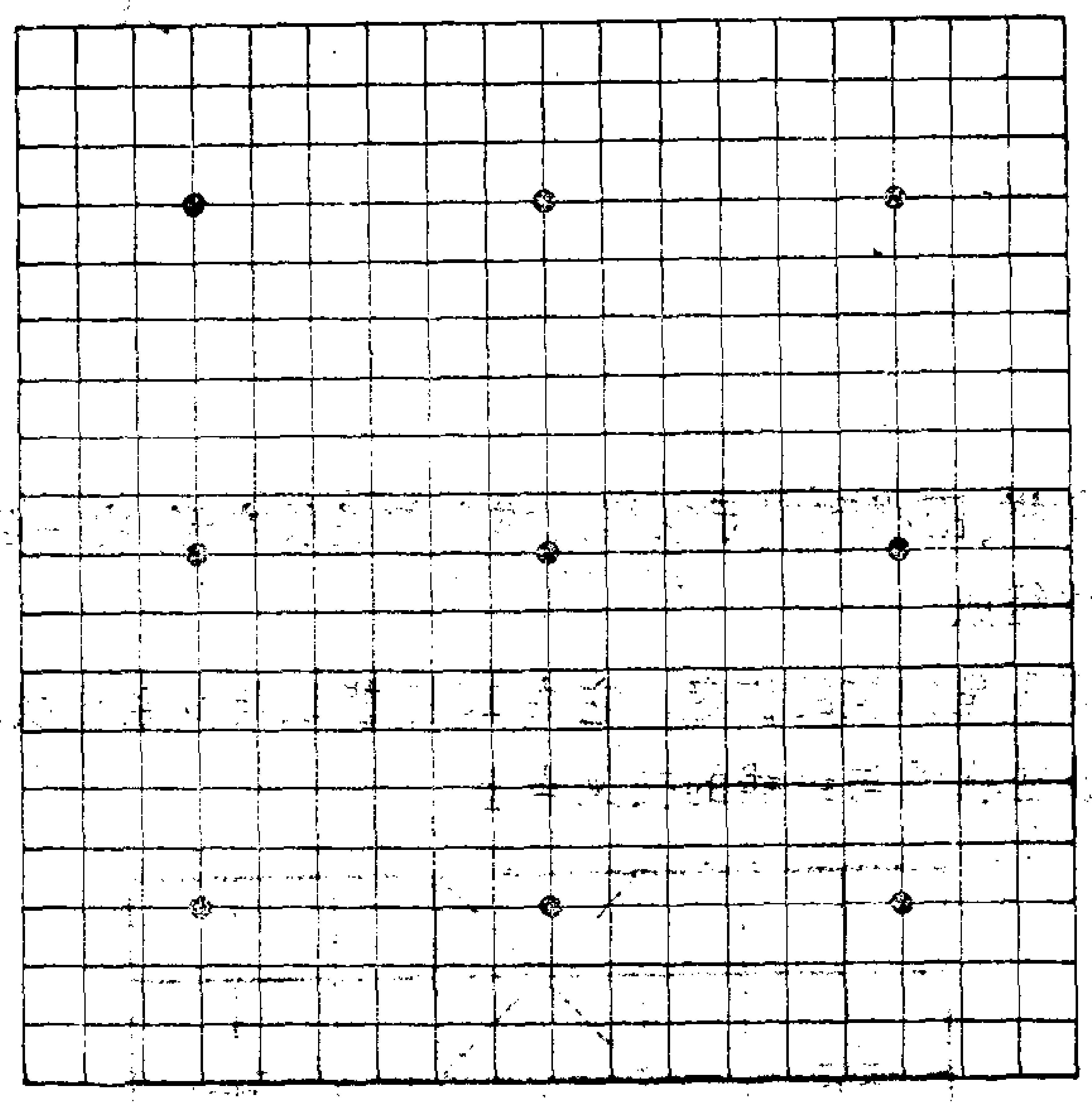


图 2

我们还可以考虑更一般的“广义棋盘”，它由 m 条横线与 n 条纵线组成。

坐标平面上的直线 $y=k$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$) 与直线 $x=h$ ($h=0, \pm1, \pm2, \cdots$) 构成一个“无限棋盘”。棋子放在横线与纵线的交点 (h, k) 上，这样的点称为整点（因为横坐标 h 与纵坐标 k 都是整数），也称为格点。

图 3 是国际象棋的棋盘，它由 9 条横线与 9 条纵线组成，纵线之间的距离与横线之间的距离都是相等的，因此截

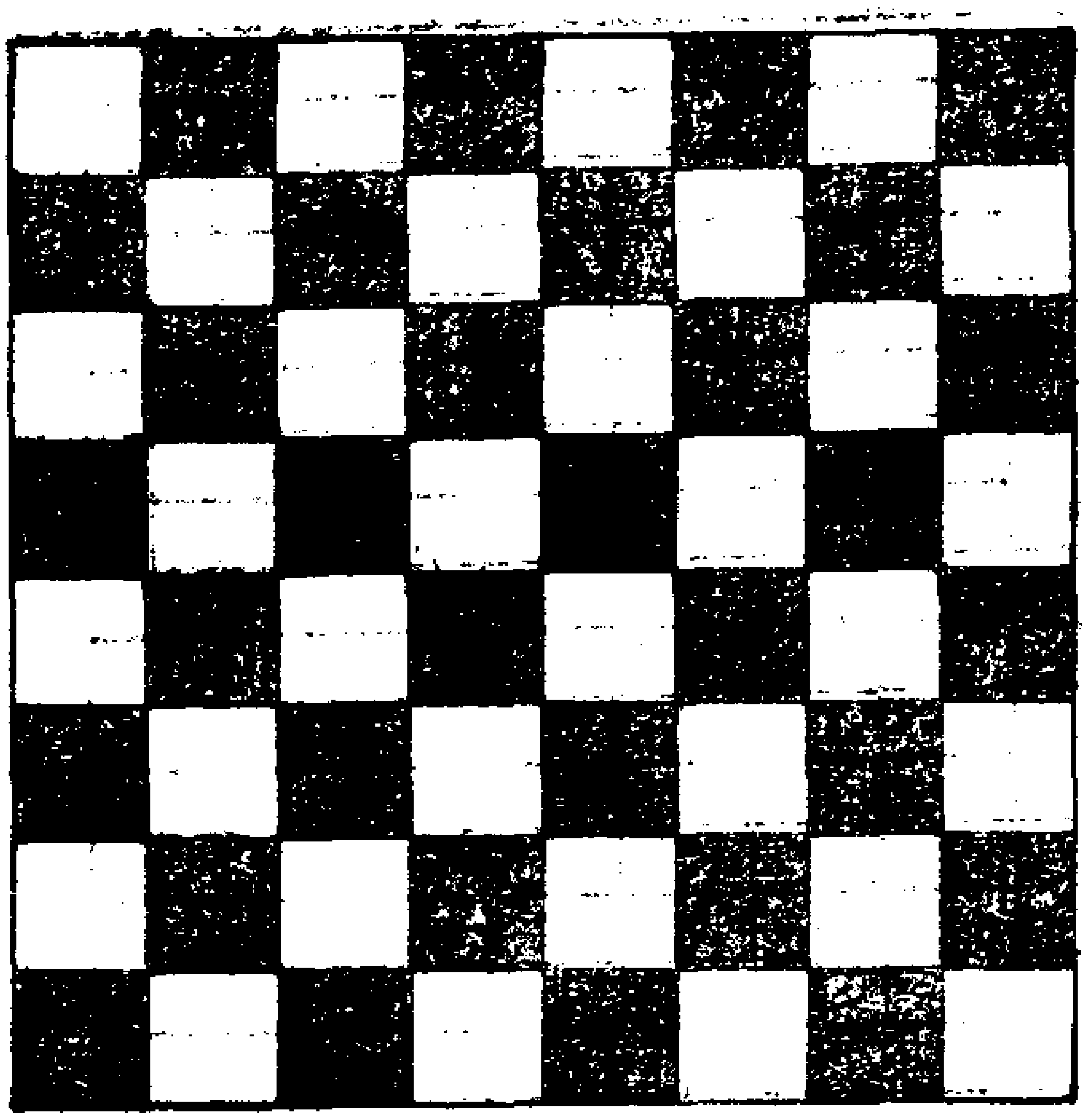


图 3

得 $8\times8=64$ 个相等的正方形的小方格. 这种棋盘称为 8×8 的棋盘. 类似地, 如果每行有 m 个小方格, 每列有 n 个小方格, 这种棋盘称为 $m\times n$ 的(广义)棋盘或 $m\times n$ 的矩形.

国际象棋的棋子是放在方格中的, 这与中国象棋、围棋不同.

但这种不同只是表面上的. 如果在国际象棋盘上, 取每个小方格的中心, 将这些中心(64 个)用横线与纵线连接起来, 而将原来的横线、纵线擦去, 就得到一个由 8 条横线与 8 条纵线组成的新棋盘, 棋子恰好放在新棋盘的横线与纵线的交叉点上.

这样得到的新棋盘称为原棋盘的对偶图或对偶棋盘(图 4).

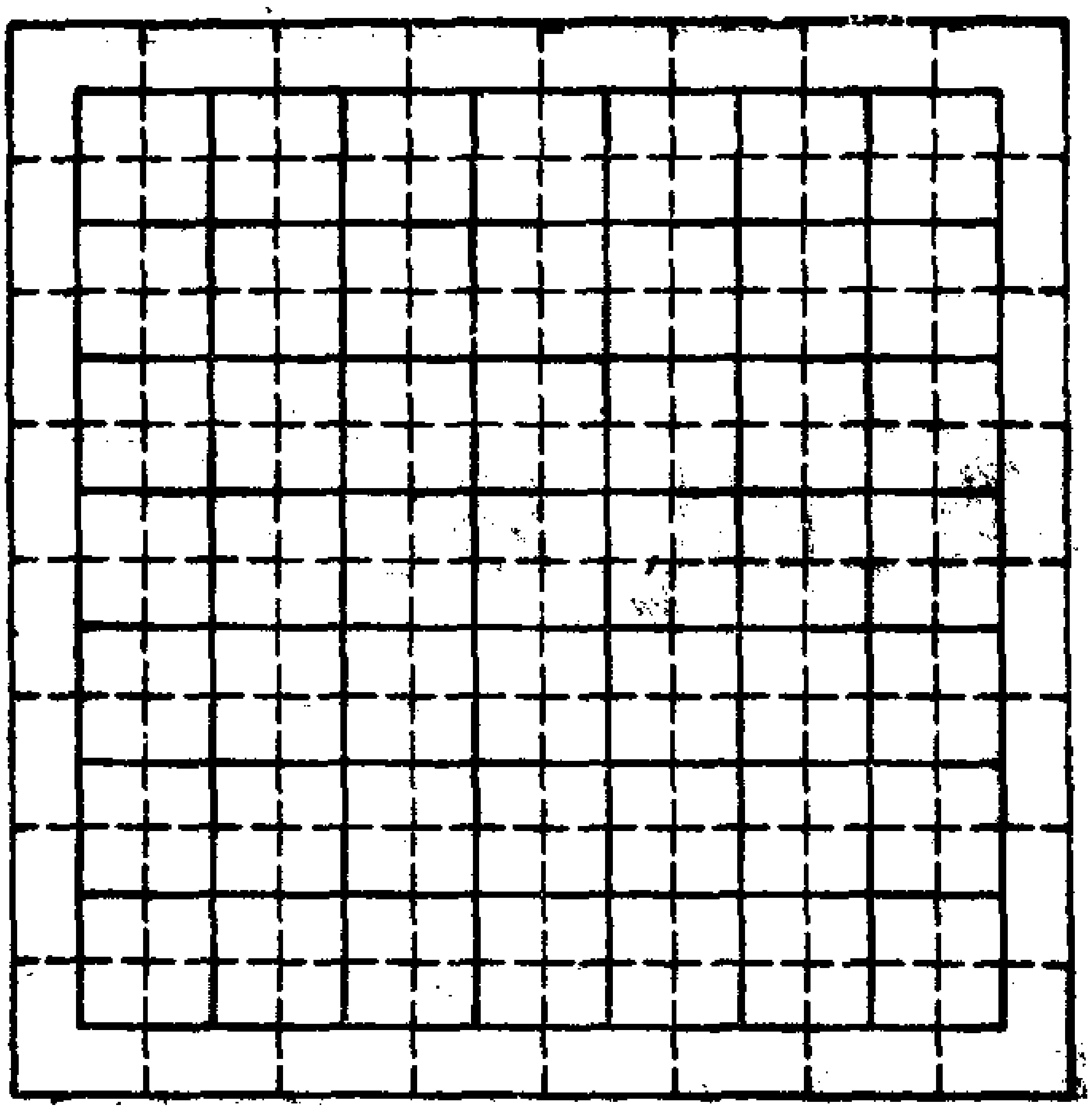


图 4

关于棋盘，流传着一个脍炙人口的古老故事，故事的大意是这样：

传说一位印度皇帝正为宫庭生活的单调而烦倦苦恼的时候，学会了国际象棋，他立即被这种有趣的游戏所吸引，从中得到了无穷的乐趣．皇帝一高兴，决定给国际象棋发明者以重赏．

于是国际象棋发明者锡塔被召进宫．

“我要给你奖赏，”皇帝说：“你提出要求吧，我将满足你的愿望．”

“陛下，请赏给我一棋盘麦子吧．”锡塔指着棋盘说：“请在棋盘的第一个方格赏我一粒麦子，第二个方格赏我二粒麦子，第三个方格赏四粒，第四格赏八粒，第五格赏十六粒……”

“我懂了,”皇帝打断他的话,“你是要在棋盘上的六十四个格子上都得到麦子，每一个格子上得到两倍于前面一格的麦粒. 可是,你不认为这点要求太微不足道吗?你应该知道我的财富有多么巨大!”

“是的,我只需要棋盘上的这些麦粒.”锡塔笑了笑.

“好吧,我一定满足你的要求,下午就给你如数领取”.

可是,锡塔并没有按时领到这笔奖赏. 原因是皇帝和他的财政大臣紧张地算了一个下午，还没有算出这“一棋盘”的麦粒数.

其实,这个问题很简单. 国际象棋盘上有64个小方格(见图3),锡塔所要的麦粒数是

$$S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}.$$

假设皇帝多赏一粒麦子给锡塔,即

$$S+1=1+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}.$$

将上式右边前两项相加 $1+1=2$，再加第三项 $2+2=2^2$,逐步加下去，即 $2^2+2^2=2\cdot 2^2=2^3$，$2^3+2^3=2\cdot 2^3=2^4$，…,直至最后,得到

$$S+1=\cdots=2^{63}+2^{63}=2^{64}.$$

将皇帝“多赏”的一粒拿回去,即锡塔所要的麦粒数是

$$S=2^{64}-1=18,446,744,073,709,551,615.$$

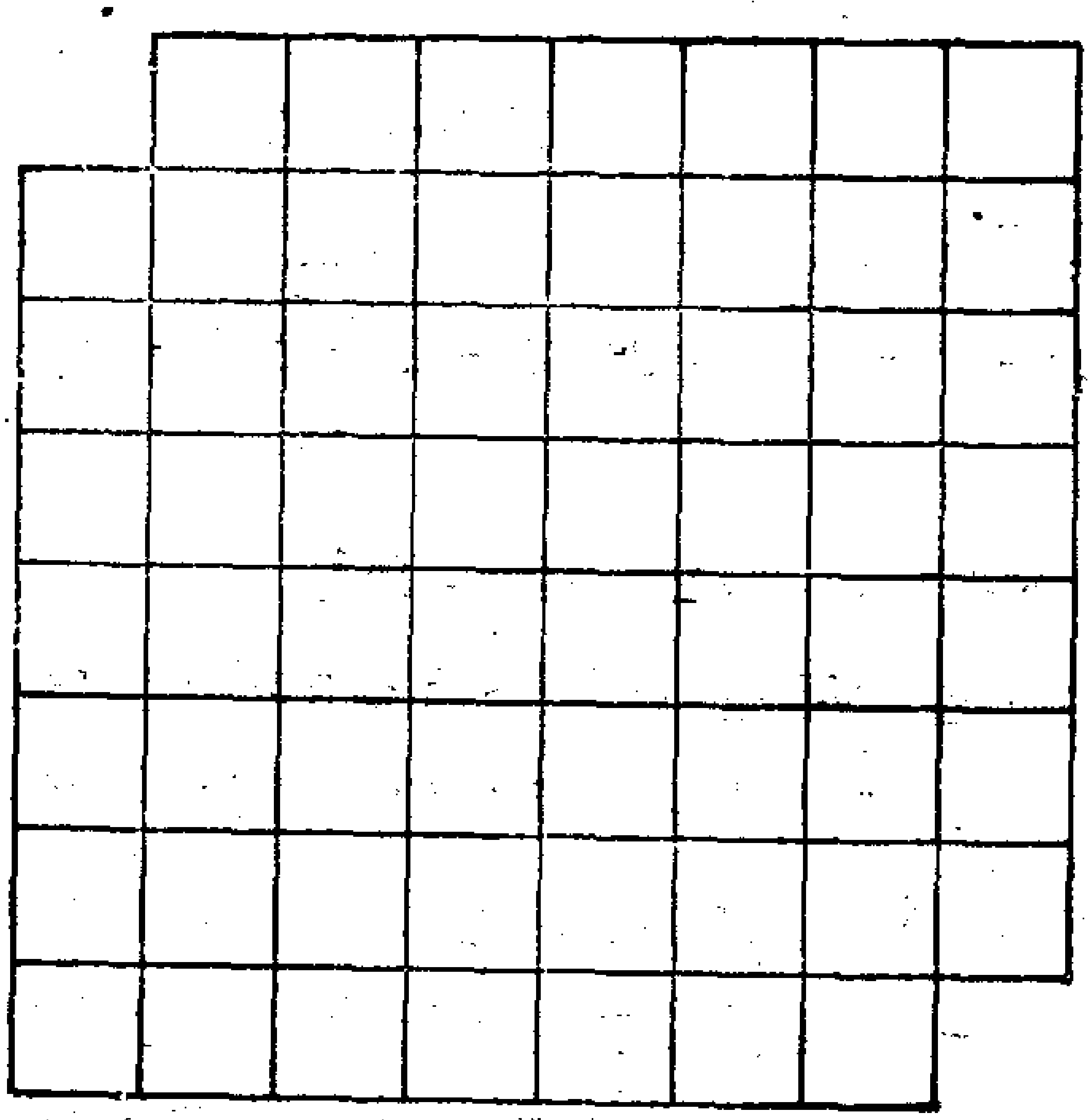
这个数后来被称为“国际象棋数”，它是个惊人的大数. 有人计算过：如果造一个粮仓来放这些麦子，粮仓高4公尺，宽10公尺,那么粮仓的长度就等于地球到太阳的距离的两倍!

由此看来，皇帝所应允的给国际象棋发明者的奖赏，是世界上最高的"发明奖"，但也是永远无法兑现的发明奖！如果皇帝稍微懂一点数学的话，就不会留下这千古笑柄！

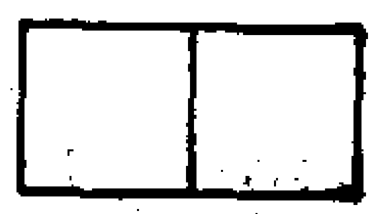
在这本小册子里，我们将要向读者介绍棋盘中所蕴藏着的许许多多有趣的问题，以及解决这些问题所用到的一些重要的数学方法与技巧．下面的三则问题都是涉及棋盘的，虽然问题都不难，但是，如不会用一点数学，即使是棋界大师对它们也可能是束手无策哩！

问题1是一个著名问题，曾被用作中国科技大学少年班的招生试题．

［问题1］（剪残了的棋盘）剪去国际象棋棋盘的左上



(1)



(2)

图 5

角与右下角的两个小方格[图 5(1)]. 能否用 31 个 2×1 的矩形[图 5(2)]将这个剪残了的棋盘盖住?

中国象棋盘上也有许多有趣的问题.

[问题 2]　图 6 中, 甲方一只小卒已经过了河, 它可以向前移动一步, 即走到 B, 也可以横移一步, 即走到 A, 要使这个小卒沿最短的路线走到对方帅的位置(假定在前进的路上不受任何阻难), 问有多少种不同的走法?

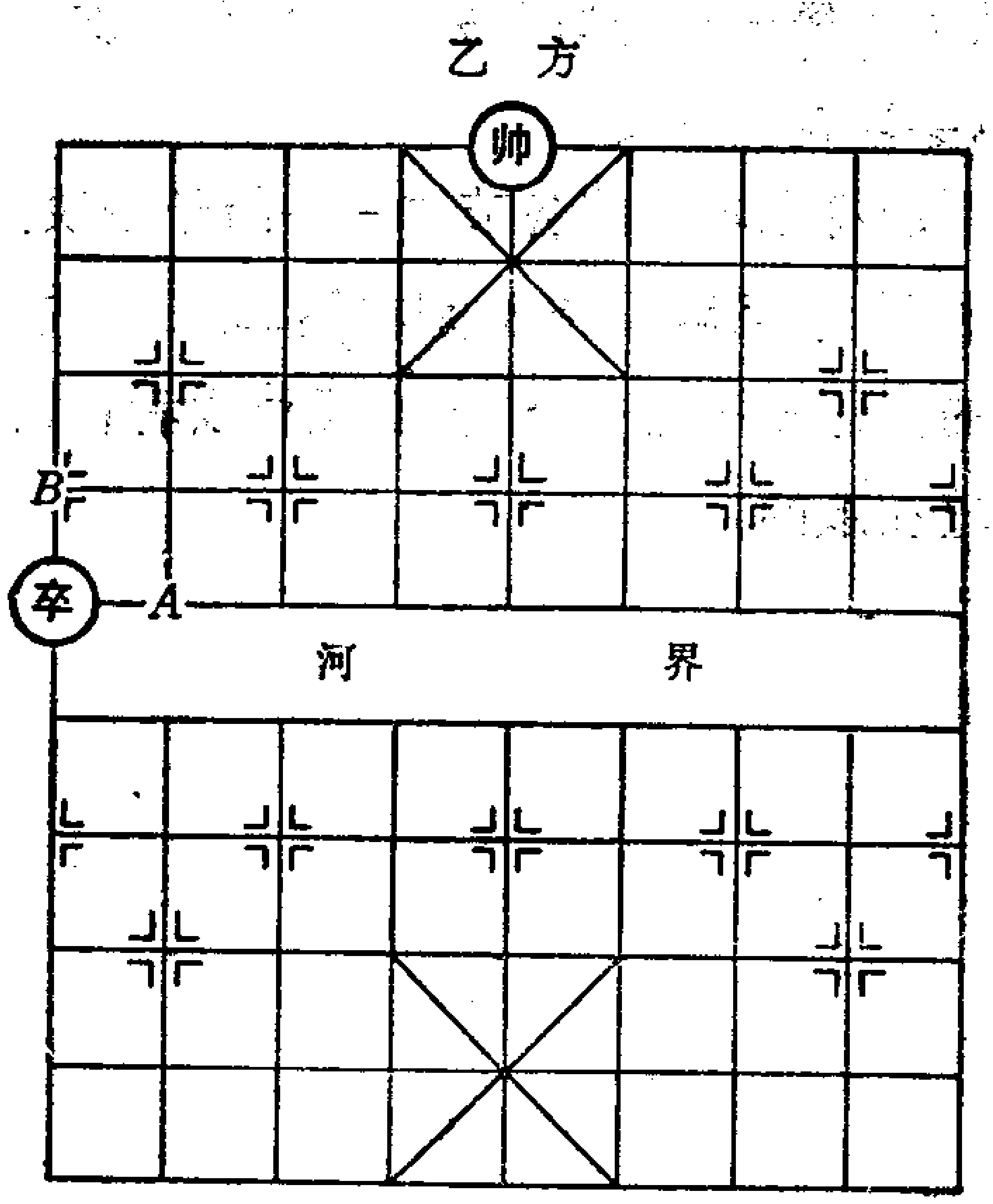


图 6

[问题 3]　无论是中国象棋还是国际象棋, 马的走法都是一直一斜, 所以棋谚曰:"马走日字相飞田". 从图 7 中的 A 点出发, 一只马能否不重复、也不遗漏地跳遍半个棋

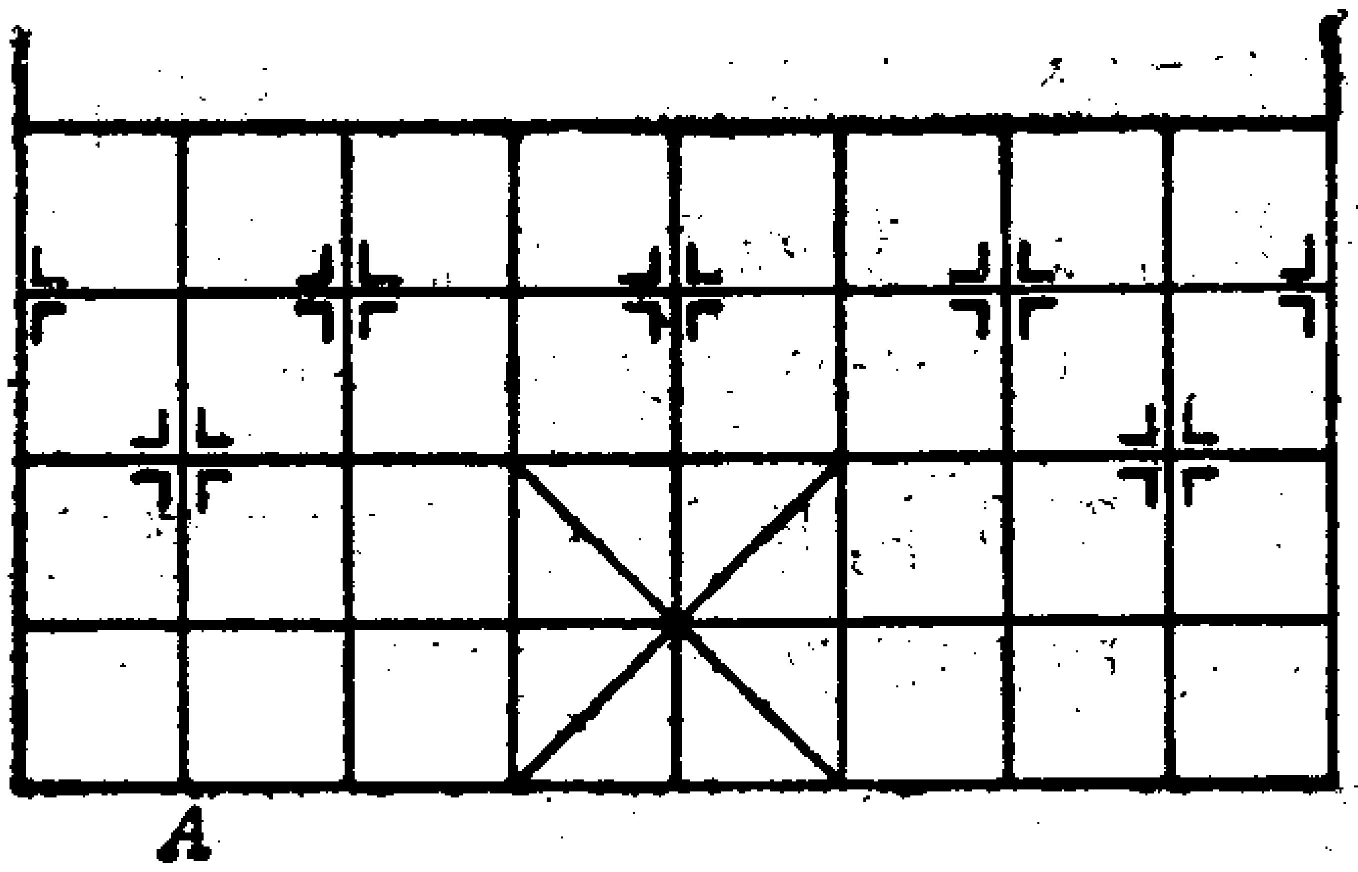


图 7

盘(即棋盘上的每一点都跳到并且只跳到一次)? 从哪些点出发,可以实现这样的要求?

上述问题将在本书的各节中一一给予解决. 问题2即是第八节的例1, 问题1、3分别在第二、三节中. 建议读者对上面的问题先考虑一下(我们相信读者在阅读本书时,随身带着笔和纸的).

二 覆 盖

首先讨论上节末的问题1(剪残了的棋盘).

[例 1] 图8中的棋盘能否用31个2×1的矩形恰好覆盖?

并非所有问题的答案都必须是肯定的. 这个问题的答案就是不能.

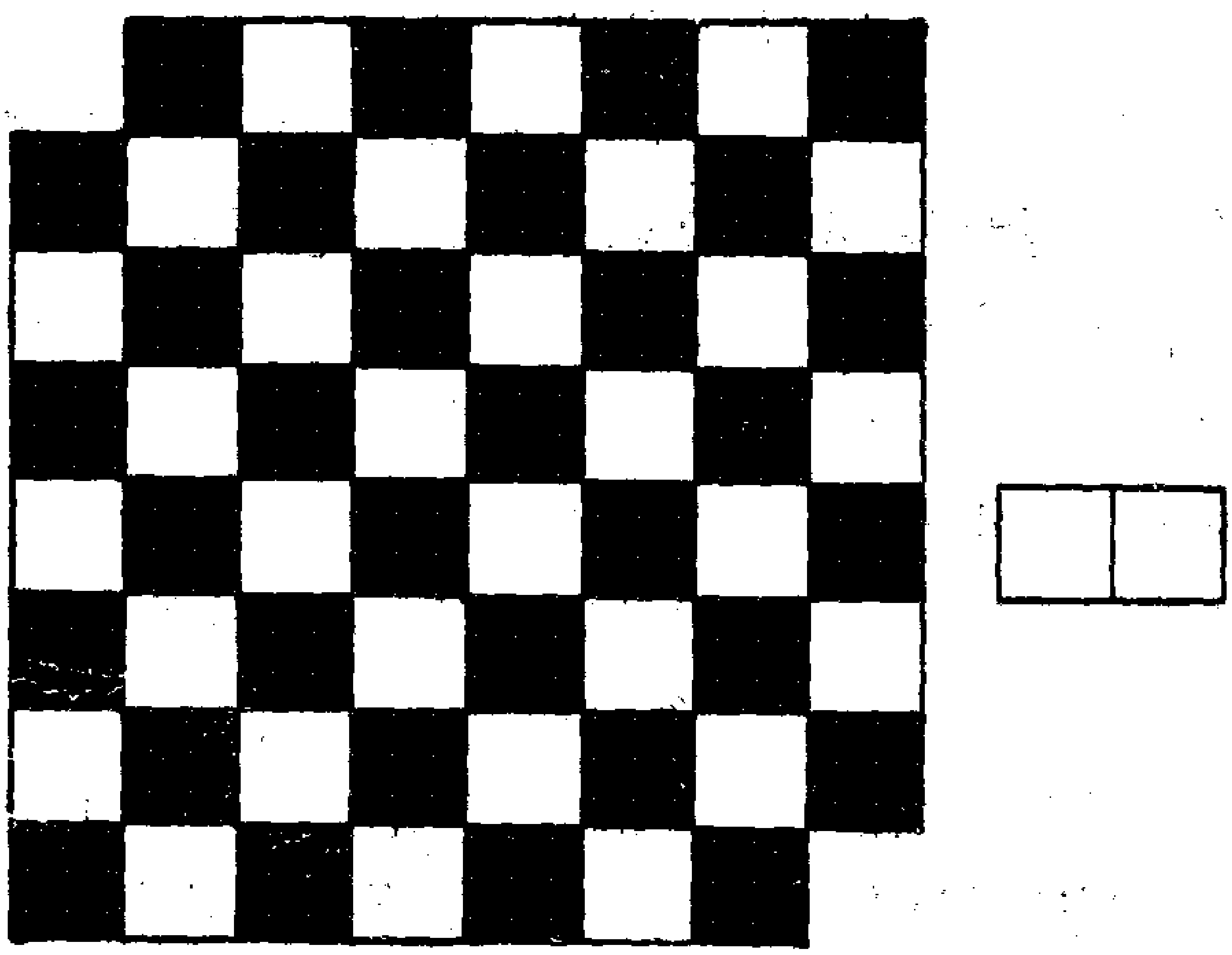


图 8

为了证明这一点，我们将棋盘的方格涂上白色或黑色，使得每两个相邻的方格(即有公共边的两个方格)颜色不同. 通常的国际象棋上正是这样涂色的，我们称之为“自然涂色”.

如果31个 2×1 的矩形恰好覆盖这剪残了的棋盘，由于每个 2×1 的矩形盖住1个白格与1个黑格，所以棋盘中白格与黑格的个数应当相等，都是31个.

但图8中的棋盘却有30个白格，32个黑格，所以31个 2×1 的矩形不能覆盖这个棋盘.

从这个简单的问题，可以看出涂色这一方法的作用.

同样的道理可以证明从 8×8 的国际象棋盘上剪去两个同色的方格，剩下的棋盘一定不能用31个 2×1 的矩形覆盖.

如果剪去一个黑格一个白格呢？

[例2]　在 8×8 的国际象棋盘上剪去一个黑格与一个白格后，能否用31个 2×1 的矩形将它覆盖？

答案是肯定的，一定能用31个 2×1 的矩形将这棋盘覆盖. 事实上，如图9，用一些粗线将棋盘隔成宽为1的长条路线. 从任一个方格出发，沿着这路线前进，可以不重复也不遗漏地走遍棋盘并回到出发点. 现在从剪去的方格 A 出发，沿着这条路线，每经过两个方格就放上一个 2×1 的矩形. 由于剪去的两个方格 A、B 异色，所以 A、B 之间(沿着这条路线)有偶数个方格，恰好能放整数个 2×1 的矩形. 然后继续沿着这条路线从 B 走到 A，每经过两个方

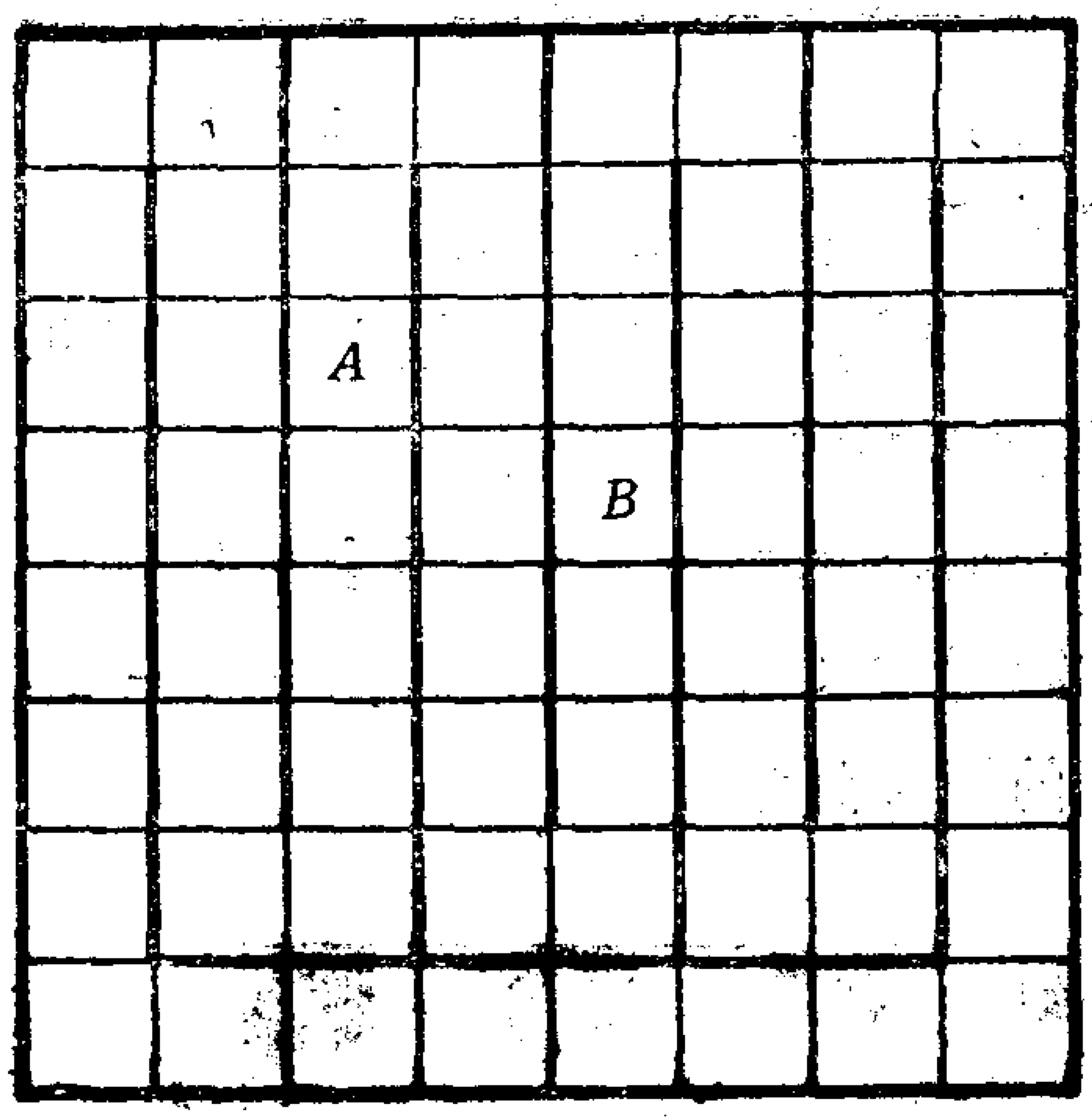
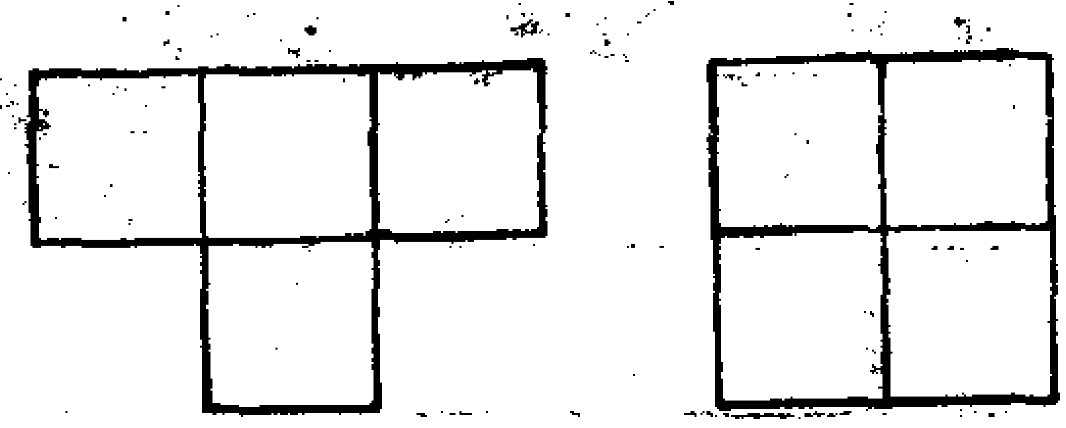


图 9

格放上一个 2×1 的矩形. 这样就可以用(31 个)2×1 的矩形覆盖整个棋盘(A、B 两方格已被剪去).

[例 3] 用 15 个 T 字形及 1 个田字形(图 10), 能否覆盖 8×8 的棋盘?



T 字形　　田字形

图 10

答案是不能. 为了证明这点, 我们利用棋盘的自然涂色.

如果 15 个 T 字形与 1 个田字形能够覆盖这个棋盘, 那么每个 T 字形覆盖奇数个(1 个或 3 个)白格, 从而 15 个 T 字形覆盖奇数个白格(因为 15 个奇数的和是奇数). 1 个田字形覆盖 2 个白格. 因而, 15 个 T 字形与 1

个田字形所覆盖的白格数必定是奇数。

但棋盘中，白格的个数为偶数(32个)，因此15个T字形与1个田字形不能覆盖整个棋盘.

在这个问题中，涂色与奇偶性都发挥了作用.

下面是更巧妙的覆盖问题.

[例4] 8×8的国际象棋盘剪去左上角的一个方格后，能否用21个3×1的矩形覆盖？剪去哪一个方格才能用21个3×1的矩形覆盖？

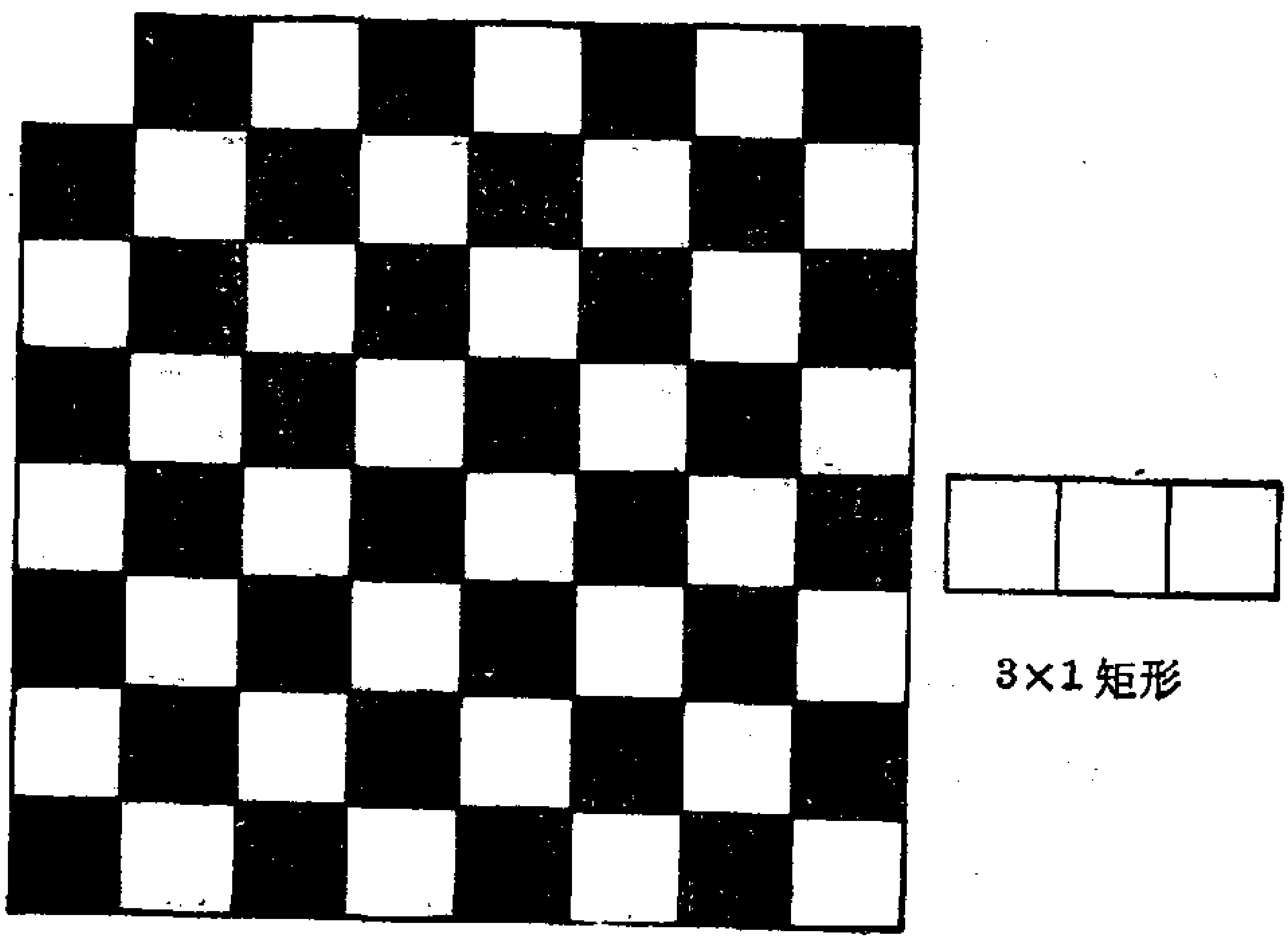


图 11

剪去左上角的方格后，棋盘不能用21个3×1的矩形覆盖.

为了证明这一点，我们将棋盘涂上三种颜色(这一次，采用自然涂色不能奏效)，涂法如图12，其中数字1、2、3分

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

图 12

别表示第一、二、三种颜色.

如果能用 21 个 3×1 的矩形将剪去左上角的棋盘覆盖，那么每个 3×1 的矩形盖住第一、二、三种颜色的方格各 1 个，从而 21 个 3×1 的矩形盖住第一、二、三种颜色的方格各 21 个．然而棋盘(剪去左上角后)却有第一种颜色的方格 20 个，第二种颜色的方格 22 个，第三种颜色的方格 21 个．因此，剪去左上角的棋盘无法用 21 个 3×1 的矩形覆盖.

由此可见，如果剪去一个方格后，棋盘能用 21 个 3×1 的矩形覆盖，那么剪去的方格一定是图 12 中涂第二种颜色的方格.

但是，剪去图 12 中涂第二种颜色的一个方格后，仍然不能保证一定能用 21 个 3×1 的矩形覆盖．比如说，剪去

图 12 中第一行第 2 个方格后不能用 21 个 3×1 的矩形覆盖. 这是由于棋盘的对称性, 剪去这个方格与剪去第一行第 7 个(涂第一种颜色的)方格(或剪去第八行第 2 个涂第三种颜色的方格), 所剩下的棋盘完全相同.

于是, 只有剪去第三行第 3 个、第三行第 6 个、第六行第 3 个、第六行第 7 个, 这四个方格中的某一个, 剩下的棋盘才有可能用 21 个 3×1 的矩形覆盖.

不难验证这时确实能够覆盖. 图 13 表明了剪去第三行第 6 个方格后, 用 21 个 3×1 的矩形是能够覆盖棋盘的.

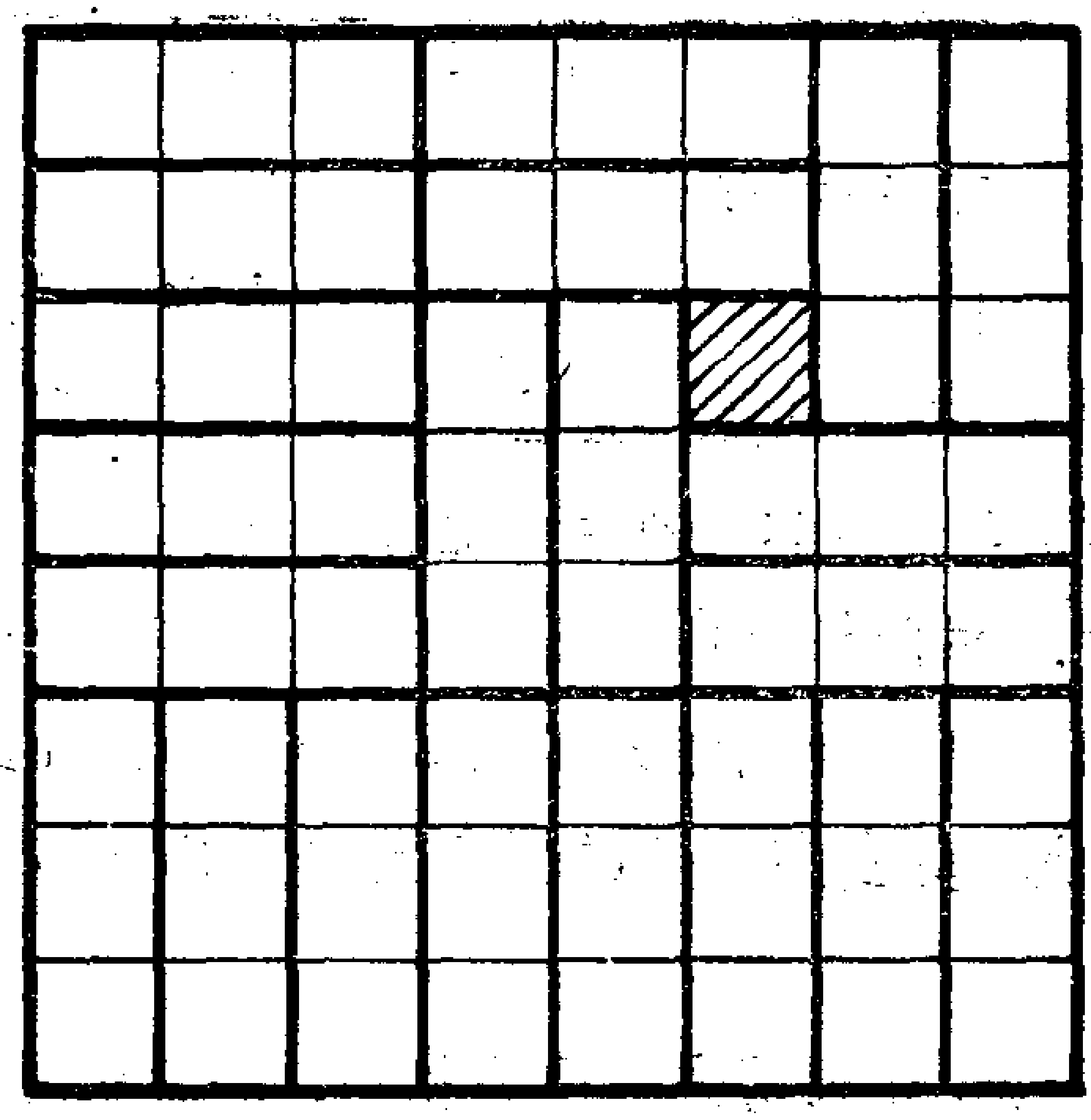


图 13

于是, 当且仅当剪去的一个方格是上述 4 个方格之一时, 棋盘能用 21 个 3×1 的矩形覆盖.

例 4 彻底解决了. 从这个(及上面的)问题, 我们看到,

对于这类问题，如果答案是不可能的，往往需要机敏的(采用涂色或奇偶性)反证；如果答案是可能的，通常采用构造法，如例 4 的方法.

[例 5]　证明用 1 个田字形和 15 个 4×1 的矩形不能覆盖 8×8 的棋盘.

这一次，我们按照下面的方式将棋盘涂上黑、白两种颜色.

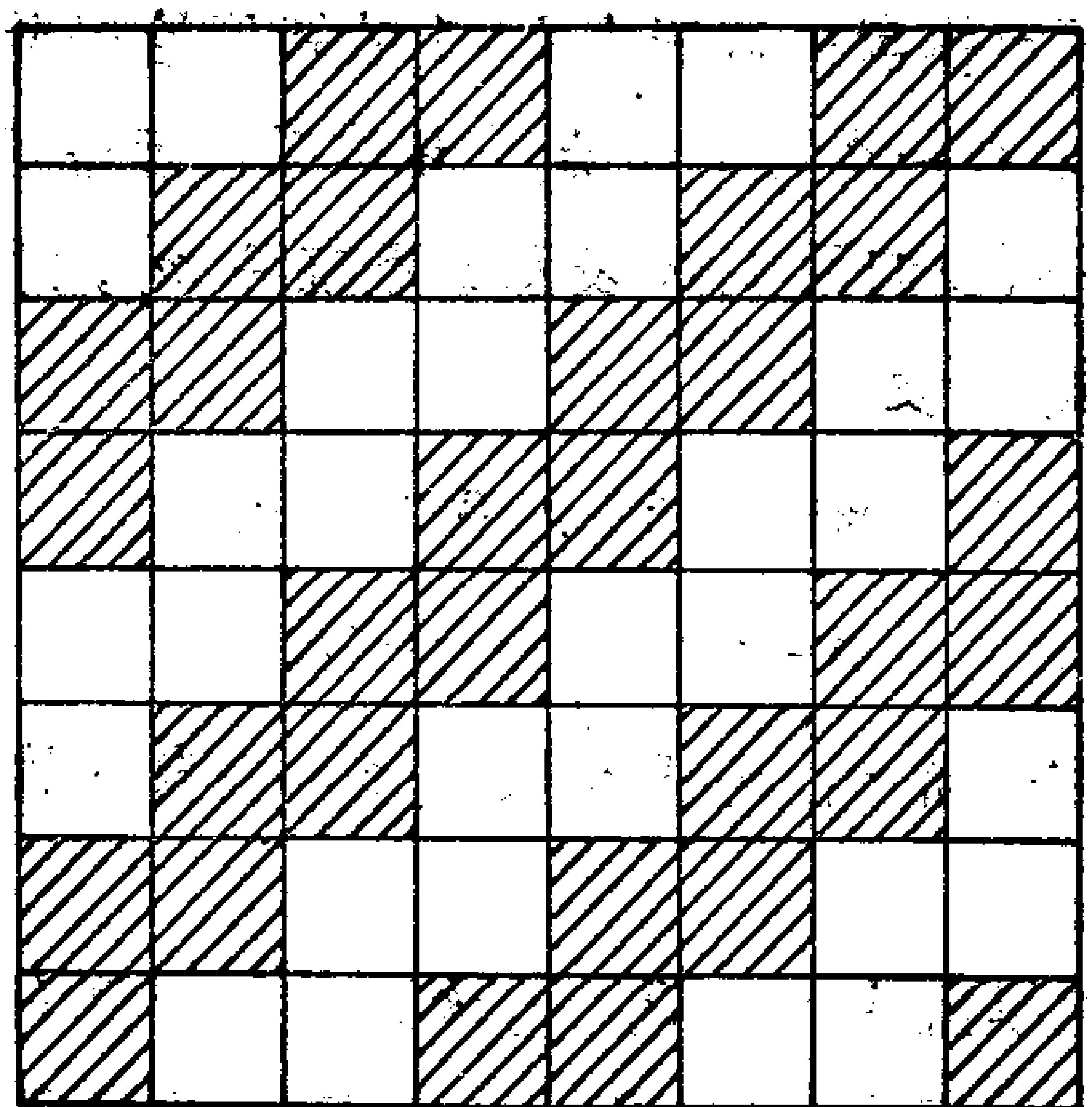


图　14

显然田字形盖住奇数个(1 个或 3 个)白格，而每个 4×1 的矩形盖住偶数个白格. 然而图 14 中，白格的总数是偶数(32 个). 这就导致了矛盾. 具体的证明细节请读者自己予以补充.

涂色(也就是分类)，是一种常用的方法. 但究竟如何

涂色，应根据具体问题具体分析．数学与下棋类似，需要灵活运用各种方法，"最忌执一"．

［例 6］ 证明 $m\times n$ 的棋盘能用若干个 $k\times 1$ 的矩形恰好覆盖的充分必要条件是 m、n 中至少有一个被 k 整除．

充分性是显然的．因为在 $k|m$（我们用 $k|m$ 表示 k 整除 m）时，每一列可以用 $\frac{m}{k}$ 个 $k\times 1$ 的矩形恰好覆盖．$k|n$ 的情况与此类似．

现在假定棋盘被若干个 $k\times 1$ 的矩形恰好覆盖，要证明 m、n 中至少有一个被 k 整除．我们采用反证法证明．如果 $k\nmid m$，$k\nmid n$（我们用 $k\nmid m$ 表示 k 不整除 m），那么由普通的带余除法，可设

$$m=m_1k+r,\ 0<r<k,$$

$$n=n_1k+s,\ 0<s<k,$$

其中（不完全）商 m_1、n_1 及余数 r、s 都是自然数，并且不妨设 $r\geqslant s$．

现在将棋盘涂上 1, 2, …, k 这几种颜色（图 15）．为方便起见，约定 j（$j=1, 2, \cdots, k$）与 $j+k$ 表示同一种颜色．

由于每个 $k\times 1$ 的矩形恰好盖住颜色为 1、2、…、k 的方格各 1 个，所以棋盘中 k 种颜色的方格数彼此相等（恰好等于 $k\times 1$ 的矩形的个数）．

但另一方面，除去右下角的那个 $s\times r$ 的矩形，其余的 $m_1\times n_1$ 个 $k\times k$ 的矩形、m_1 个 $k\times s$ 的矩形、n_1 个 $r\times k$ 的

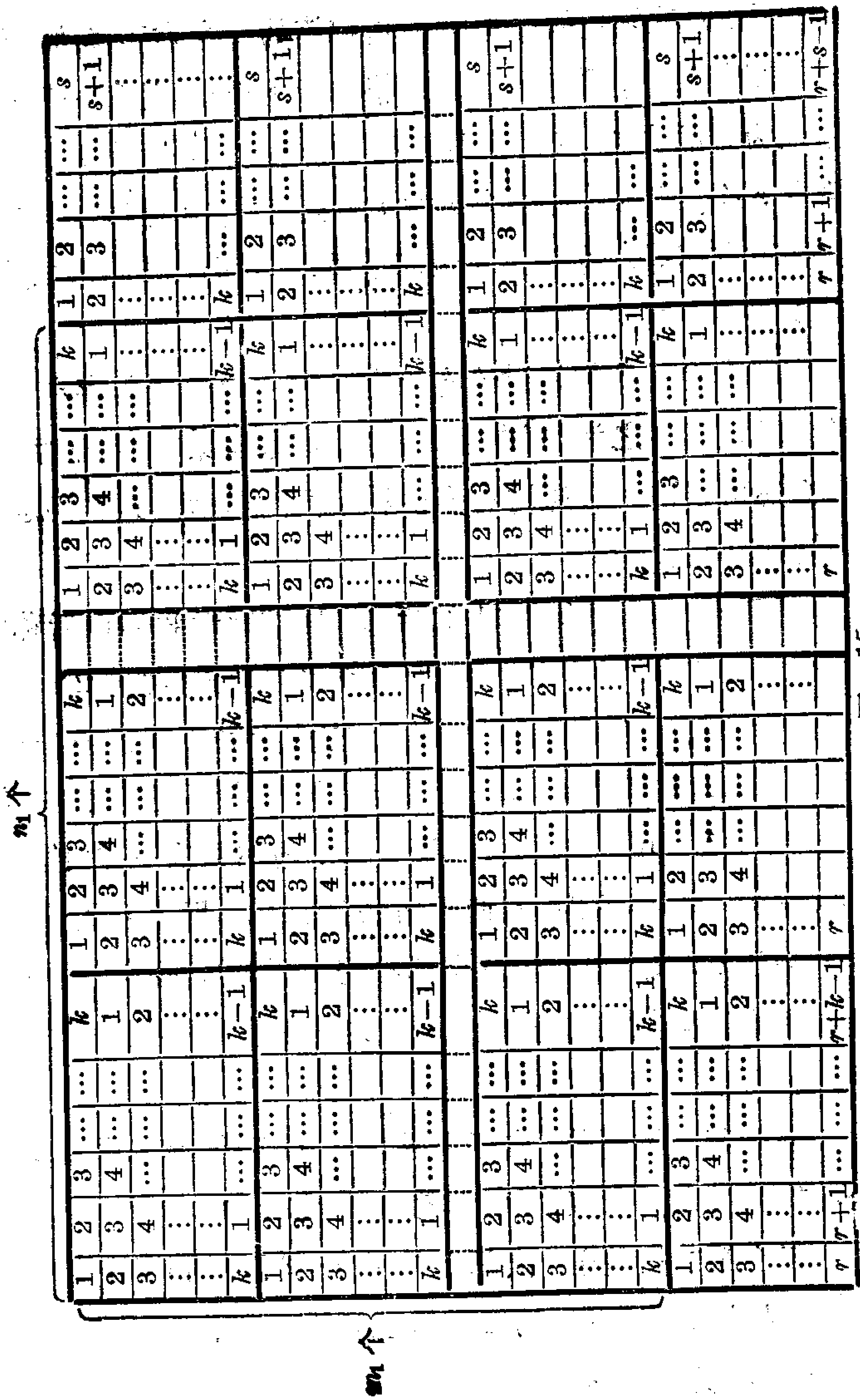


图 15

矩形中，k 种颜色的方格数都是相等的。在右下角的那个 $s\times r$ 的矩形中，颜色为 1 的方格少于 s 个(不是每一列都有颜色为 1 的方格，实际上第二列就没有)．颜色为 s 的方格恰有 s 个．因此，在整个 $m\times n$ 的棋盘中，k 种颜色的方格数并不全相等，这就与假设相矛盾，从而证得 $k|m$ 或 $k|n$ 至少有一个成立。

例 1 至例 6 都是讨论有没有某种所说的覆盖存在，这类问题可以称之为“存在性问题”．如果有某种覆盖存在，那么还可以进一步探讨有多少种不同的覆盖，这类问题称为“数量问题”．

[例 7] 用 n 个 2×1 的矩形(这种矩形我们以后称它为骨牌或多米诺)覆盖 $2\times n$ 的棋盘，有多少种不同的盖法？

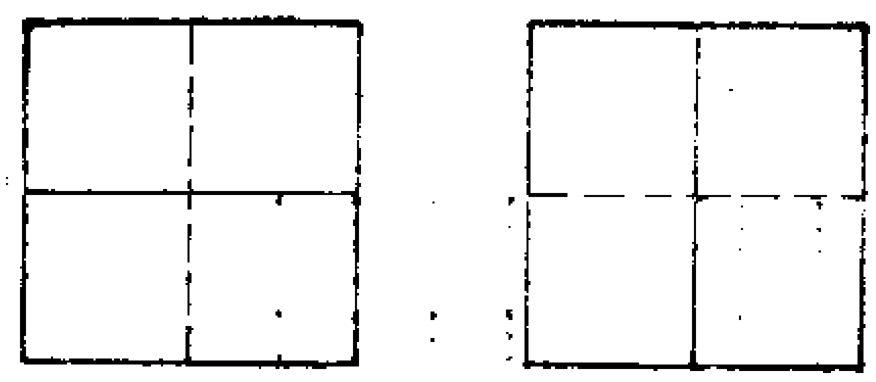


图 16

设有 f_n 种不同的盖法．如果 $n=1$，显然只有一种盖法，即 $f_1=1$．当 $n=2$ 时，有两种盖法(图 16)，即 $f_2=2$．

对于 $n>2$．我们注意全体覆盖可以分成两类．第一类是在最右边竖放一张骨牌．第二类是在最右边横放两张骨牌(图 17)．

每个第一类覆盖，实际上是用 $n-1$ 张骨牌来覆盖 $2\times(n-1)$ 的棋盘．所以，第一类覆盖有 f_{n-1} 种．

每个第二类覆盖，实际上是用 $n-2$ 张骨牌来覆盖 $2\times(n-2)$ 的棋盘．所以，第二类覆盖有 f_{n-2} 种．

于是，我们得到

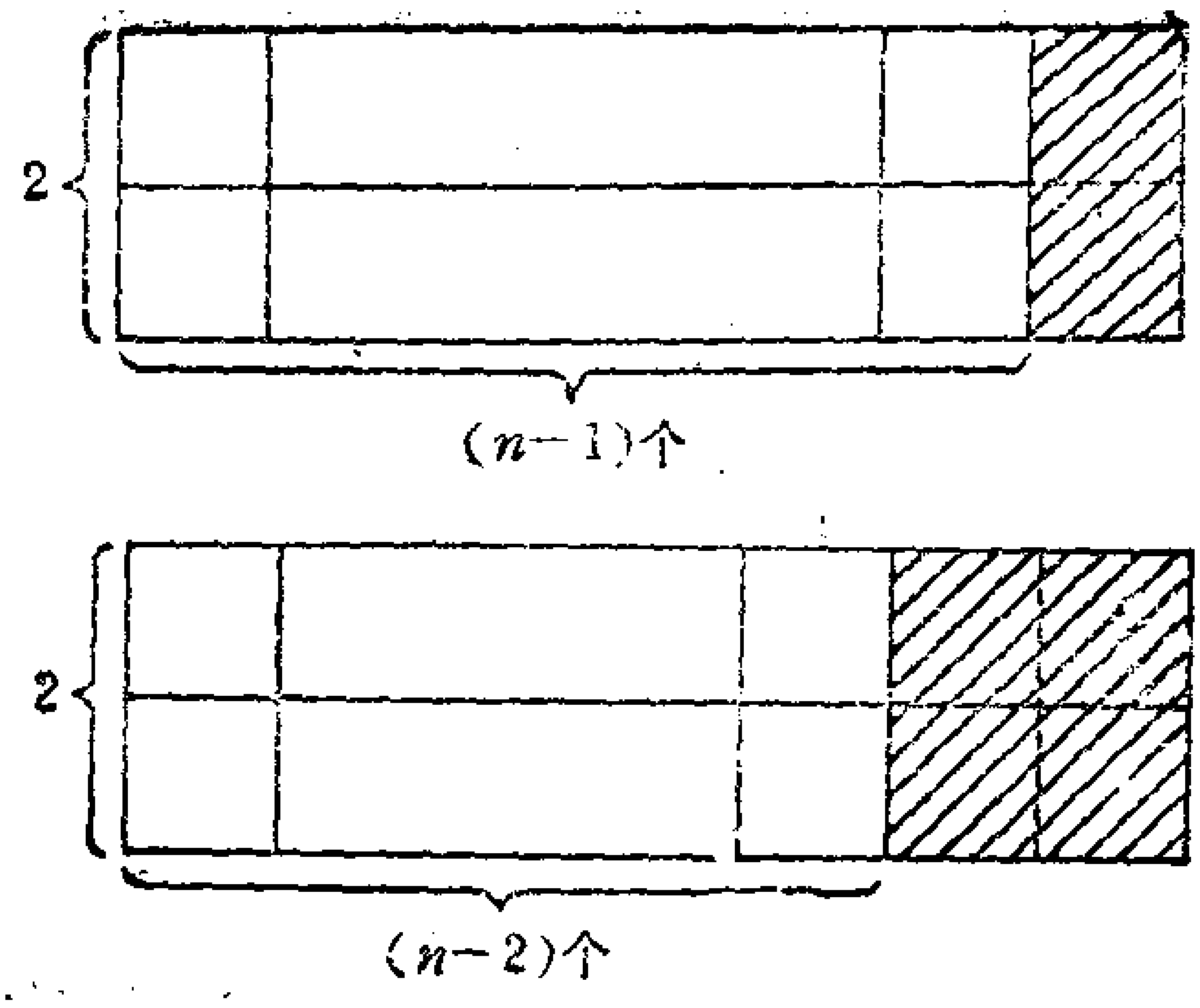


图 17

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}. \tag{1}$$

由 $f_1=1$, $f_2=2$ 及递推关系(1)可逐步推出

$$f_3=f_1+f_2=3,$$

$$f_4=f_2+f_3=5,$$

$$f_5=f_3+f_4=8,$$

$$\cdots\cdots$$

从而得到一串数

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \cdots \tag{2}$$

这串数通常称为斐波那契(Fibonacci, 1175～1250, 意大利数学家)数。

从递推关系式(1)及"初始条件" $f_1=1$, $f_2=2$ 可以导出第 n 个斐波那契数

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

三　马

在中国象棋中，马的走法是一直一斜，俗称"马走日字象(相)飞田"，即从1×2的矩形的一个顶点跳到相对的那个顶点.

马这样走是有道理的，它从棋盘上任一点出发，可以跳到任何一个指定的点. 这个事实，每个下过象棋的读者都是熟悉的.

如果马的"步伐"大一些，改为1×3，即从1×3的矩形的一个顶点跳到相对的顶点. 这种马称为1×3的马，它能不能从棋盘上任一点出发，跳到任何一个指定的点呢?

[例 1]　1×3的马不能从棋盘上任一点出发，跳到任何一个指定的点.

为了证明这个事实，我们将棋盘的左下方的点A作为原点，建立起直角坐标(图 18).

如果1×3的马能从整点(x_1, y_1)一步走到整点(x_2, y_2)，那么x_1与x_2的差是1或3，y_1与y_2的差是3或1，即x_1与x_2的奇偶性不同，y_1与y_2的奇偶性也不同. 从而

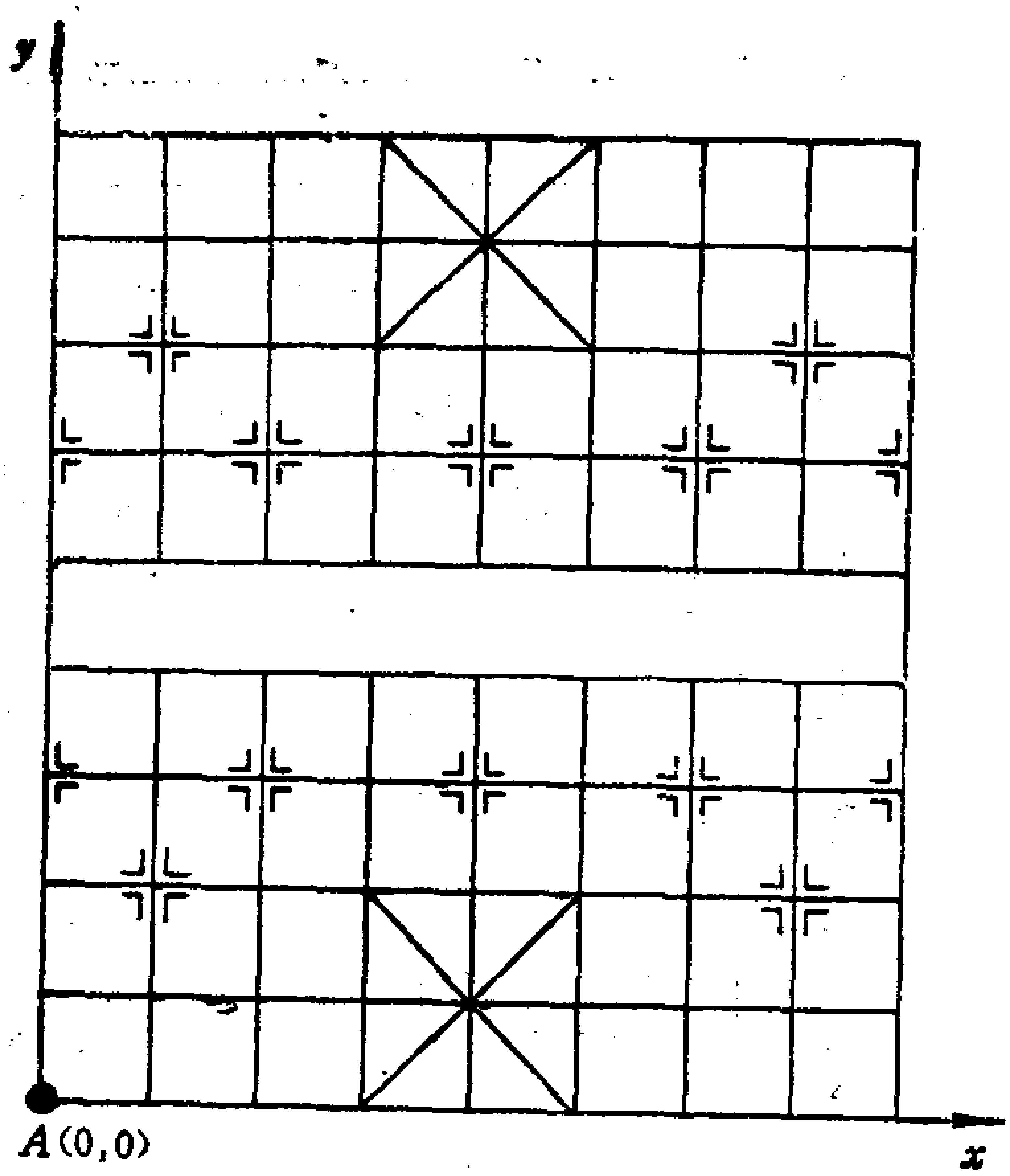


图 18

x_1+y_1 与 x_2+y_2 的奇偶性相同. 于是在马前进的过程中，走过的整点 (x, y) 的坐标的和 $x+y$ 的奇偶性保持不变. 从原点 $A(0, 0)$ 出发只能走到坐标和为偶数的点，不能走到(无论走多少步)坐标和为奇数的点，例如 $(1, 0)$.

另一种证法是上节采用过的方法，将棋盘上的点涂上红、蓝两种颜色，使相邻的点颜色不同(图 19，其中实心圆点代表红色点，其余为蓝色点).

不难看出，1×3 的马每一步从红色点跳到红色点或从蓝色点跳到蓝色点，即在马的前进过程中，跳过的点颜色完全相同. 因此，马不能从红色点跳到蓝色点，也不能从蓝色

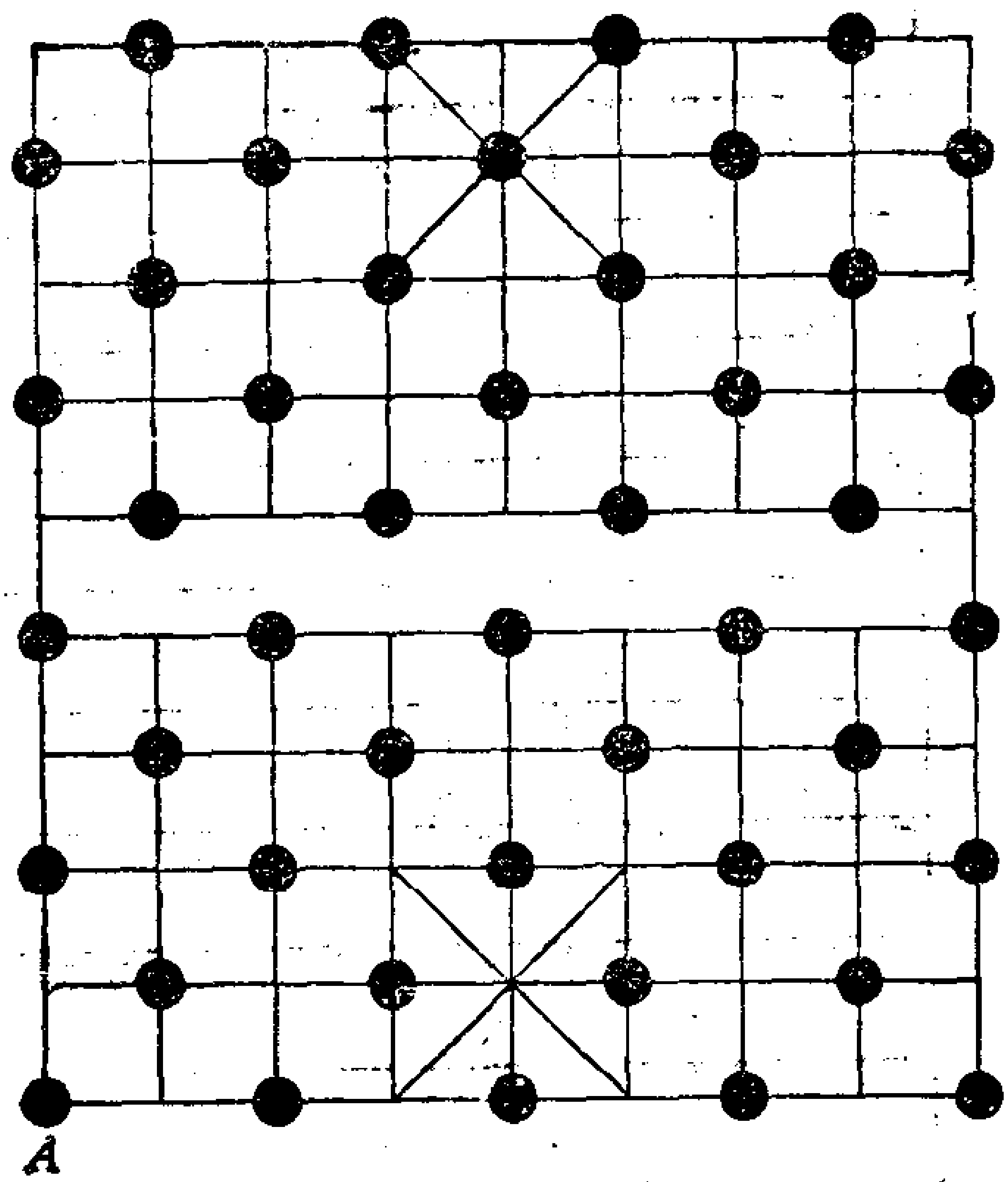


图 19

点跳到红色点.

这两种解法实质上是一样的. 我们把棋盘上的点分为两类. 涂色是一种分类方法, (坐标和的)奇偶性也是一种分类方法.

步伐更大的 $1\times n$ 的马, 每步从 $1\times n$ 的矩形的一个顶点跳到相对的顶点. 它当然需要较大的回旋余地, 因此, 我们在无限大的棋盘上来考虑它.

[例 2] 如果 $1\times n$ 的马可以从无限的棋盘上任何一点出发, 跳到任何一个指定的点, 问 n 应当满足什么条件?

用例 1 的方法容易知道 n 必须是偶数. 这个条件不仅是必要的, 而且(我们在下面证明)也是充分的.

事实上，在 n 是偶数时，$1\times n$ 的马可以从棋盘上任一点出发，跳到任何一个指定的位置．这只要证明从原点 $A(0,0)$ 出发，可以跳到与它相邻的点 $B(1,0)$ 就可以了．

为了走到 B，马先向右上方走一步到 $(1,n)$，然后向右跳一步，再向左跳一步，到达点 $(1,n-2)$（图 20）．依此类推，逐步到达 $(1,n-4)$，$(1,n-6)$，…．由于 n 为偶数，終将到达 $B(1,0)$。

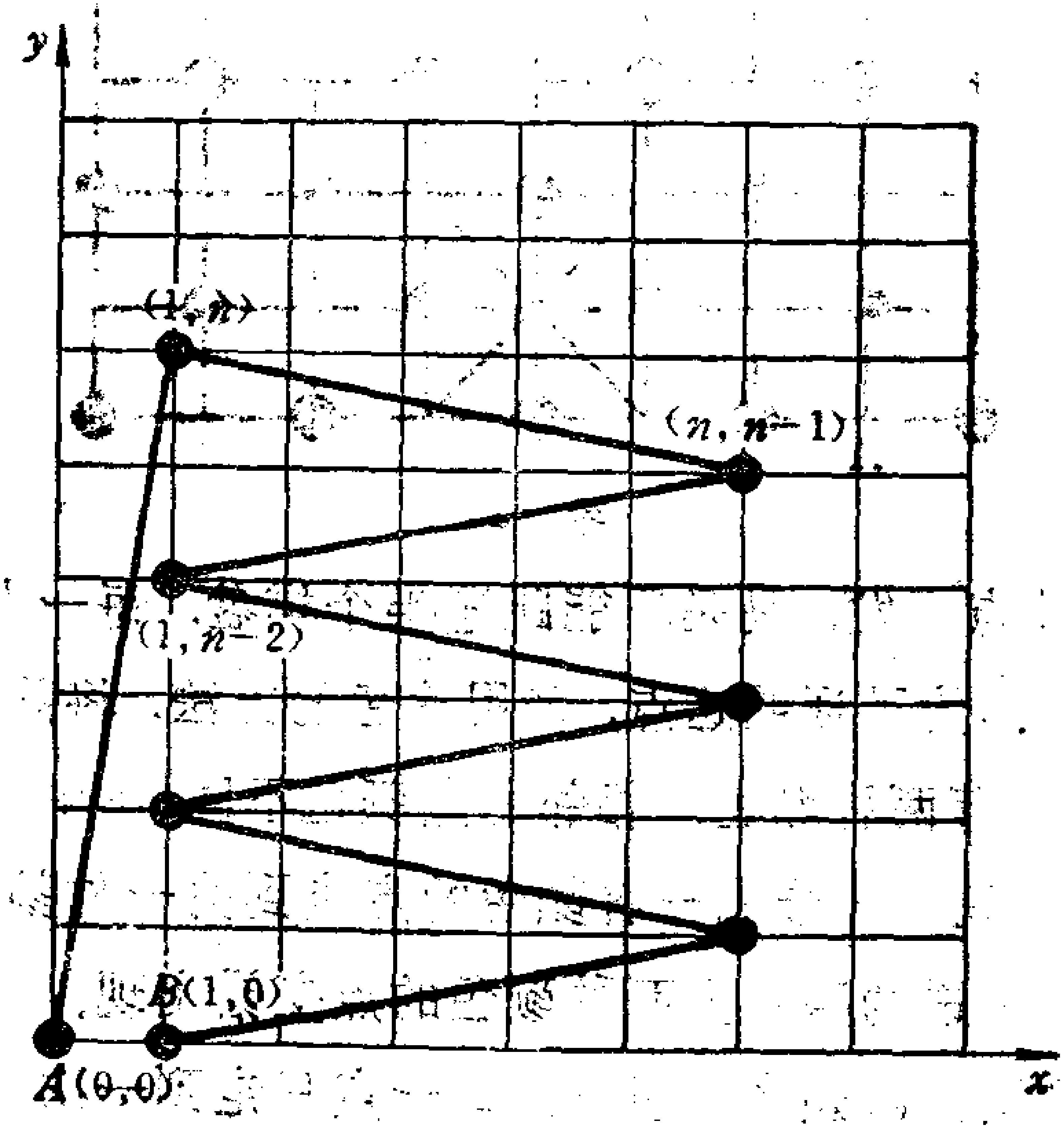


图 20

当然，还可以考虑更广义的 $m\times n$ 的马，每一步从整点 (a,b) 跳到整点 $(a\pm m,\ b\pm n)$ 或 $(a\pm n,\ b\pm m)$．$m\times n$ 的马可以从无限棋盘上任一点出发，跳到任意一个指定点的充分必要条件是什么呢？请读者先考虑一下，答案是 m、n

互质并且不全为奇数，详细的解答见第八节问题 28.

下面只考虑普通的 1×2 的马. 例 3 是在第一节中提出过的问题.

[例 3] 马能否从图 21 中的 A 点出发，跳遍半个棋盘，每一点都只走到一次(不重复也不遗漏)？能否每一点都恰走到一次，并且最后能回到 A 点？

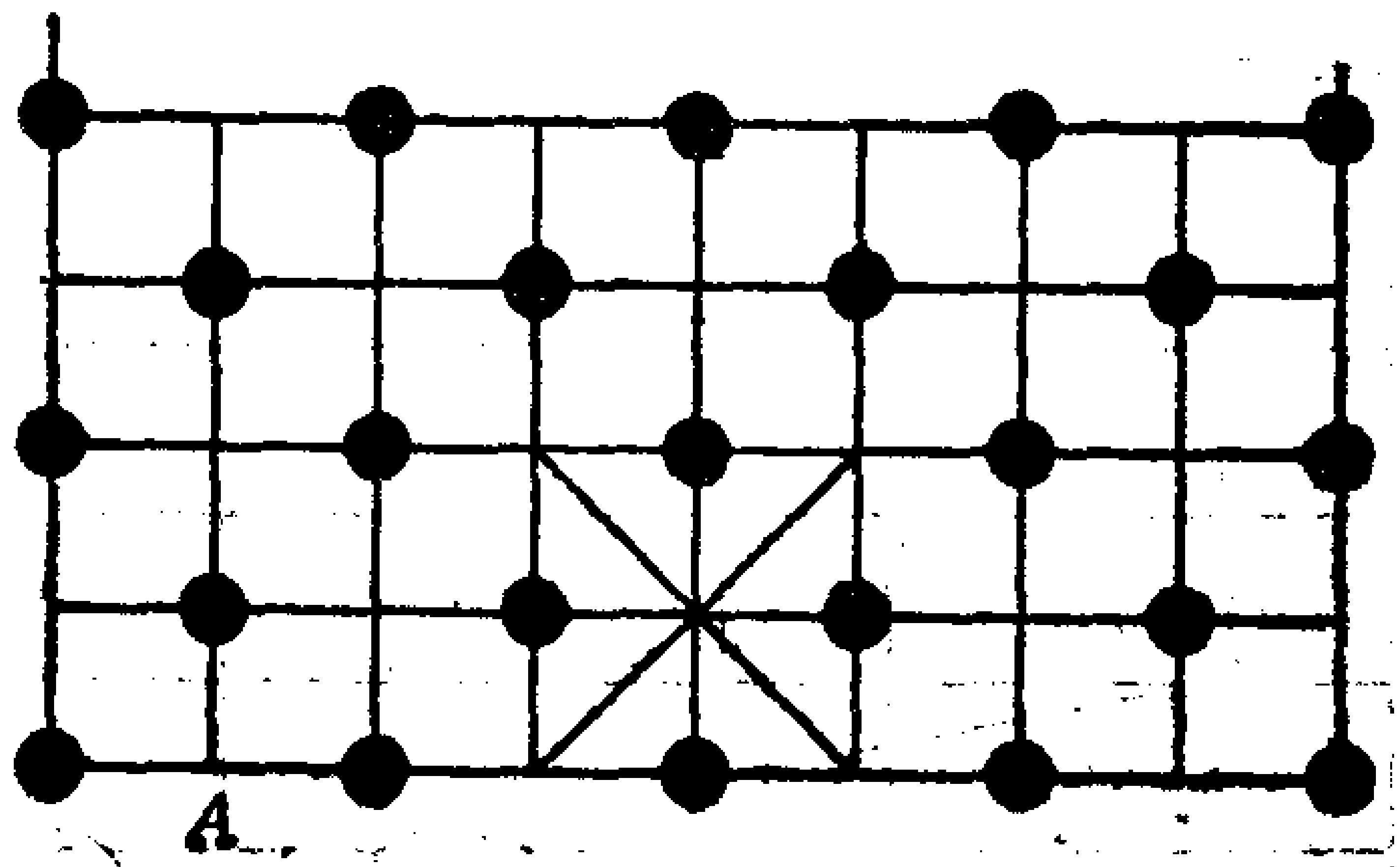


图 21

从 A 点出发，马是不能跳遍半个棋盘，每一点都只走到一次的. 为了证明这点，采用涂色的方法，将图 21 中的点涂上红、蓝两种颜色，相邻的点颜色不同(图中黑点代表红色点). 马每一步由一种颜色的点走到另一种颜色的点，所以在马前进的路线上两种颜色的点交错出现.

如果马能跳遍半个棋盘，每一点只走到一次，那么棋盘中两种颜色的点应当一样多(如果走过的路线是红蓝红蓝…红蓝或蓝红蓝红…蓝红)或相差为 1 (如果走过的路线是红蓝红蓝…红，则红点多 1. 如果走过的路线是蓝红蓝红…蓝，则蓝点多 1).

显然，棋盘中红点比蓝点多 1. 因此，从任一点出发，

马都不能每一点都恰好走到一次，最后回到出发点(如果能，则两种颜色的点数相等). 并且，从蓝点出发，马不能走遍半个棋盘，每一点都只走到一次(如果能，则蓝点应不少于红点).

于是，马要跳遍半个棋盘，每点恰好走到一次，只能从红点出发，不能从蓝点(例如 A 点)出发. 但是从红点出发，是不是能做到这点呢(条件是充分的吗)?答案是肯定的，可以采用构造法来证明.

[例 4] 从图 21 中的任一个红点出发，马可以跳遍半个棋盘，每一点都只走到一次.

例如图 22 指明，马从 1 出发，依数的递增顺序可以不重复地跳遍半个棋盘，即它的前进路线为

$$1\to2\to3\to\cdots\to44\to45$$

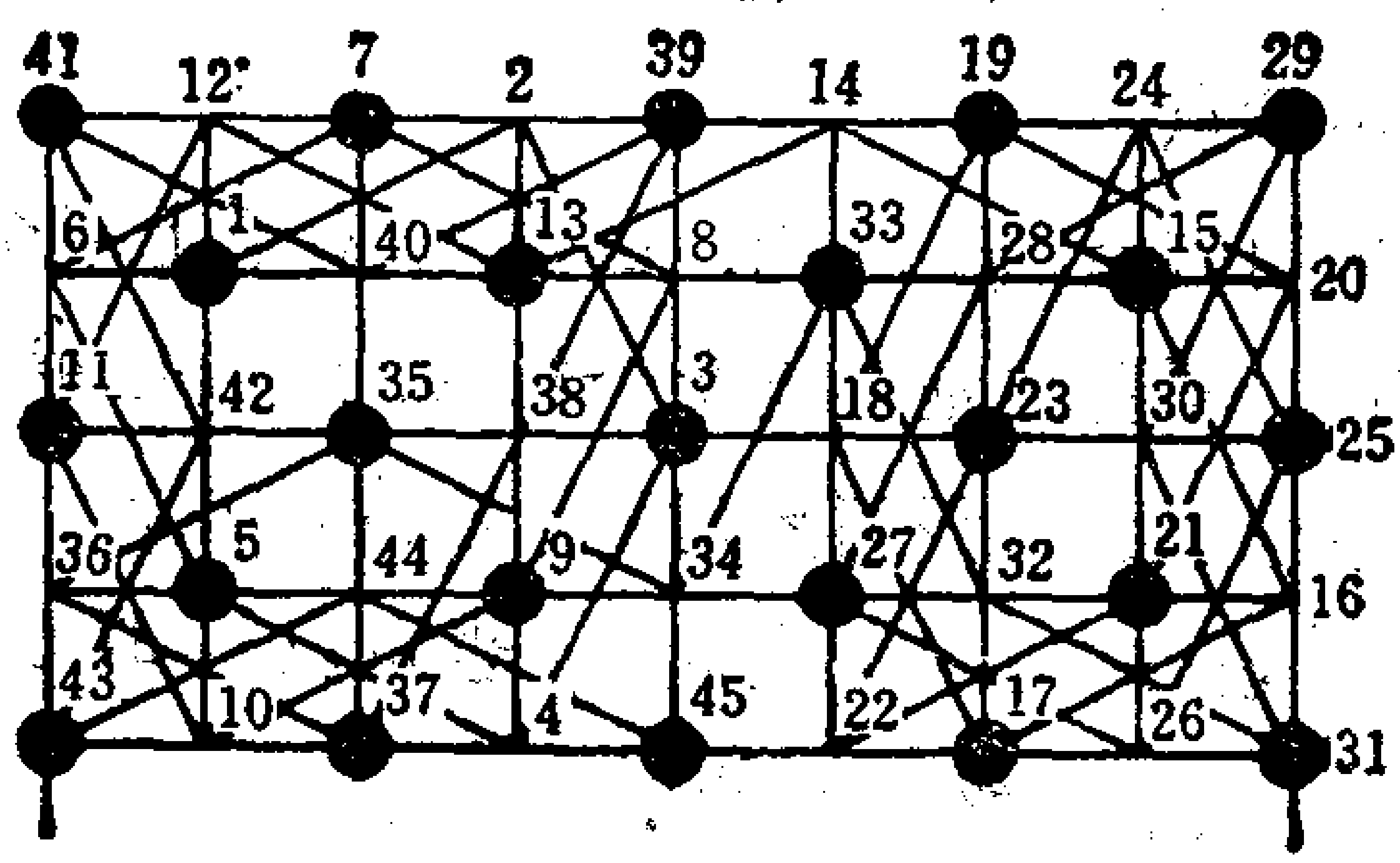


图 22

将这路线调整，可得从 45(标号为 45 的点)、35、37、43、3、11、9 各点出发的路线分别为

$45\to44\to\cdots\to2\to1$,

$35\to34\to33\to\cdots\to2\to1\to36\to37\to\cdots\to44\to45$,

$37\to36\to35\to\cdots\to2\to1\to38\to39\to\cdots\to44\to45$,

$43\to42\to\cdots\to2\to1\to44\to45$,

$3\to4\to\cdots\to34\to35\to2\to1\to36\to37\to\cdots\to44\to45$,

$11\to12\to\cdots\to34\to35\to10\to9\to\cdots\to2\to1\to36$
$\to37\to\cdots\to45$,

$9\to10\to\cdots\to34\to35\to8\to7\to\cdots\to2\to1\to36\to37$
$\to\cdots\to45$,

由棋盘的对称性，从其它的红点出发，也能不重复地走遍半个棋盘.

例 3 中已经说过，马不能从一点(即使是红点)出发，不重复地跳遍半个棋盘，然后回到出发点. 但是，在整个棋盘上却能做到这一点.

[例 5] 马能从任一点出发，不重复地跳遍整个棋盘，然后回到出发点.

我们采用构造法来证明. 由例 4，对于上半个棋盘，可以从 37 出发，不重复地跳遍半个棋盘，终点是 45. 下半个棋盘与上半个棋盘关于河界对称，在对称点标上同样的数(图 23). 于是，在下半个棋盘上，也可以从 37 出发，不重复地跳遍半个棋盘，终点是 45.

这样，从上半棋盘的 37 出发，不重复地跳遍上半棋盘的每一个点，到达 45. 然后从上半棋盘的 45 跳到下半棋盘的 37，接着不重复地跳遍下半棋盘的每一个点，到达下半棋盘的 45. 最后，从下半棋盘的 45 跳回出发点即上半棋

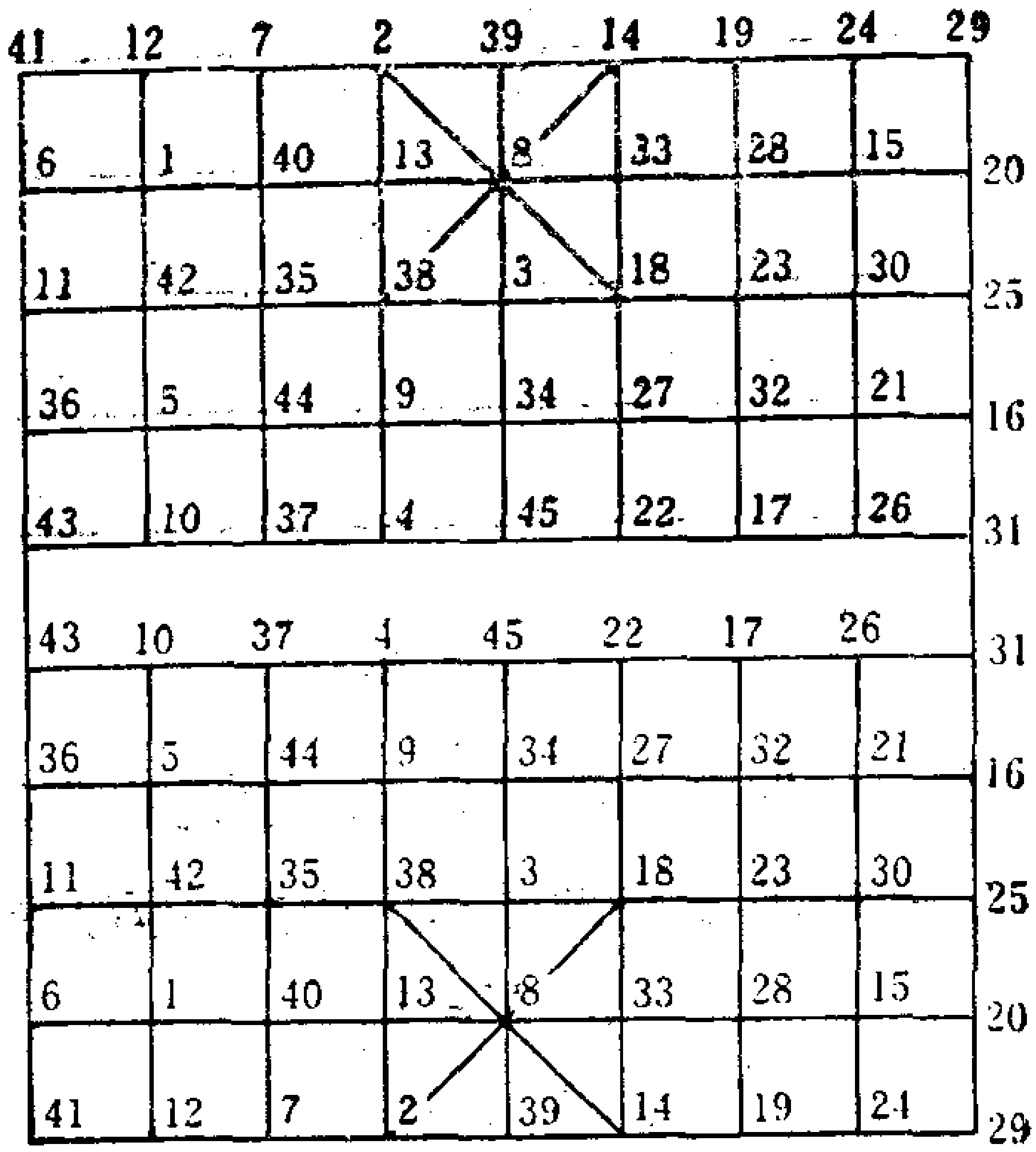


图 23

盘的 37. 马沿这样的路线，不重复地跳遍了整个棋盘，并且回到了出发点.

由于这条路线是“封闭的”(即最后回到出发点)，所以任何一点都可以作为出发点.

以上的例题都是“存在性问题”，回答了有没有合乎要求的路线存在. 合乎要求的路线往往不是唯一的，例如图 24 也表示一只马跳遍半个棋盘的路线

1→2→…→44→45

究竟有多少合乎要求的路线存在？这类“数量问题”是很难的，我们不拟多谈.

下面的问题是无限棋盘上的马.

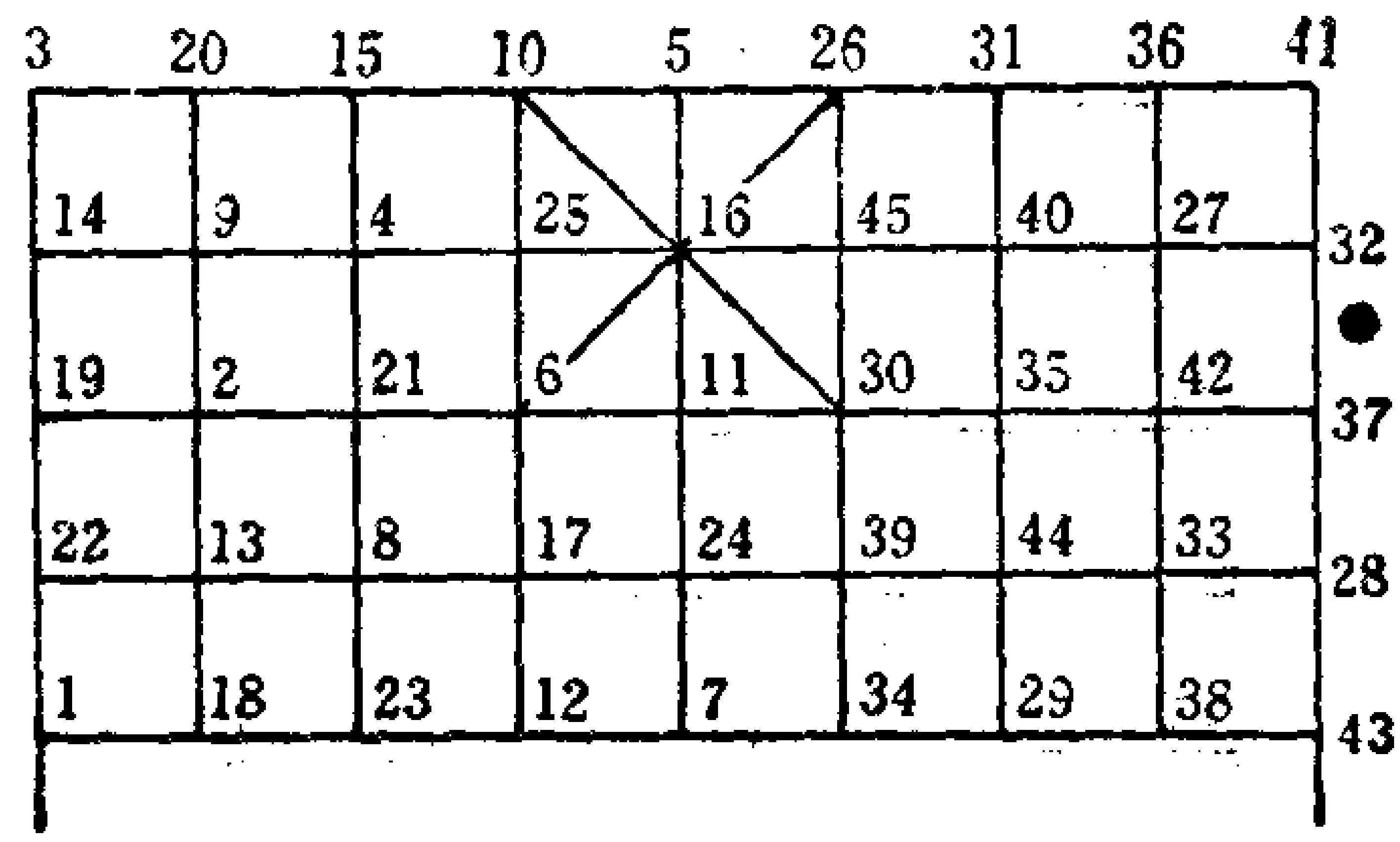


图 24

[例 6] 证明在无限棋盘上, 普通的马(1×2 的马)从原点出发, 经过 N 步跳到的点的个数 $d(N)$ 为

$$d(N)=\begin{cases}8, & N=1\\ 33, & N=2\\ 7N^2+4N+1, & N>2\end{cases} \tag{1}$$

$d(1)=8$ 与 $d(2)=33$, 都是很显然的. 图 25 表示马从红点(图中的黑点表示红点)O 一步所能跳到的八个蓝点(图中的圈点表示蓝点)的位置. 图 26 表示马从红点 O 两

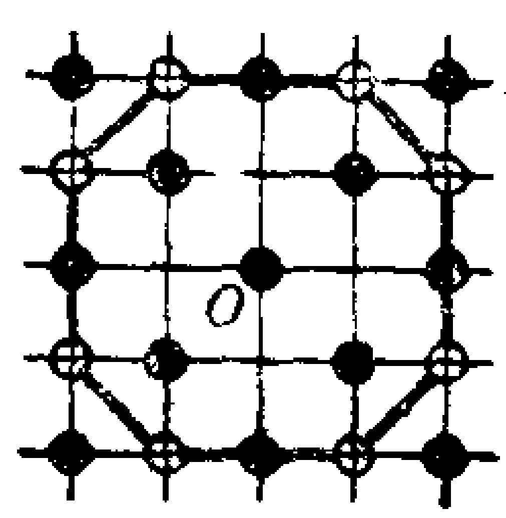


图 25

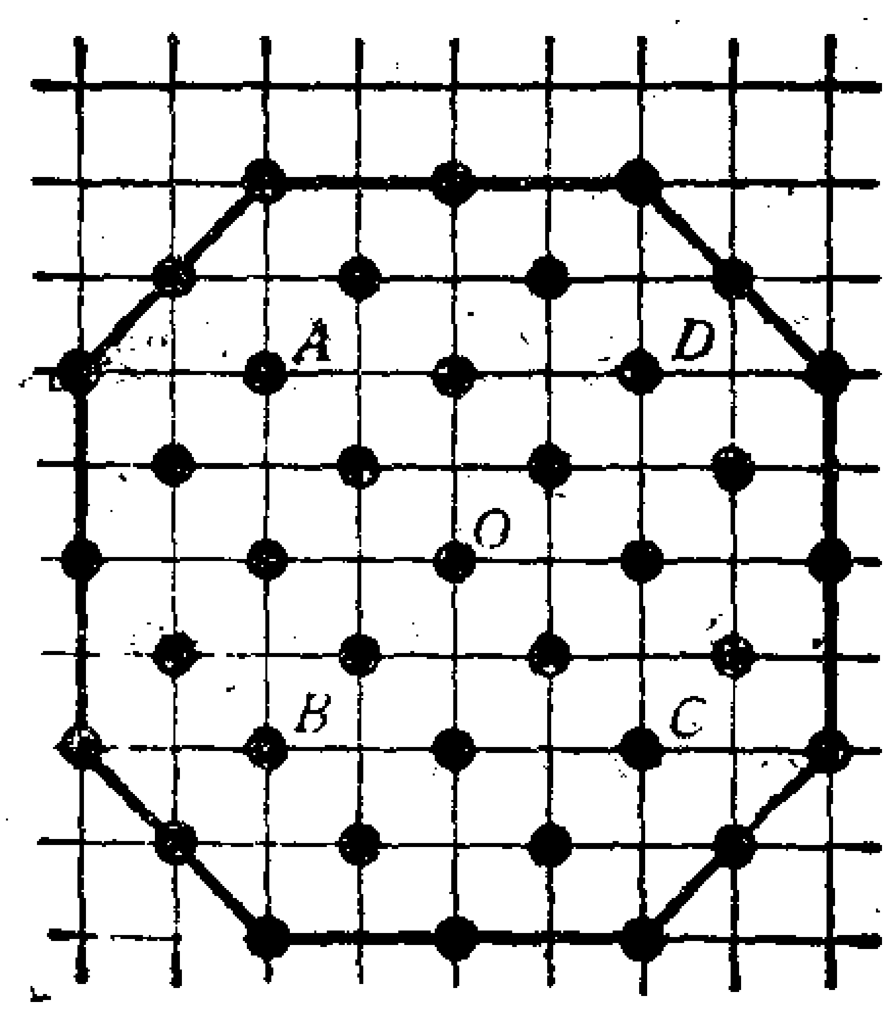


图 26

步所能跳到的位置. 即图中边界内除去 A、B、C、D 四个红点以外的其余 33 个红点均能到达.

现在来证明 $N>2$ 时的结论. 我们以马的起始点 O 作为坐标原点, 以小方格的长作为单位长度, 建立平面坐标系. 由于马每跳一步, 横(纵)坐标至多增加(减少)2, 因此马 N 步所跳到的点一定在直线 $x=2N$, $x=-2N$, $y=2N$, $y=-2N$ 所包围的区域内部或边界上.

又由于马每跳一步, 坐标的和(差)至多增加(减少) $1+2=3$, 因此马 N 步所跳到的点一定在直线 $x+y=3N$, $x-y=3N$, $x+y=-3N$, $x-y=-3N$ 所包围的区域内部或边界上.

这样, 马 N 步所跳到的点应当在八条直线 $x=2N$, $x=-2N$, $y=2N$, $y=-2N$, $x+y=3N$, $x-y=3N$, $x+y=-3N$, $x-y=-3N$ 所包围的八边形 J_N 的内部或边界上(图 27).

将整点涂上红色或蓝色, 使相邻的点颜色不同, 原点为红色.

根据前面的例题, 在 N 为奇数时, 马第 N 步所跳到的点应为蓝色(与原点颜色不同). 在 N 为偶数时, 马第 N 步所跳到的点应为红色(与原点颜色相同).

现在先来看一看, 在 N 为奇数 $2N_1+1$ 时, 八边形 J_N 内部及边界上有多少个蓝点.

在 $x=2N$, $y=2N$, $x=-2N$, $y=-2N$ 所围成的正方形内部及边界上红点比蓝点多 1 个, 所以共有

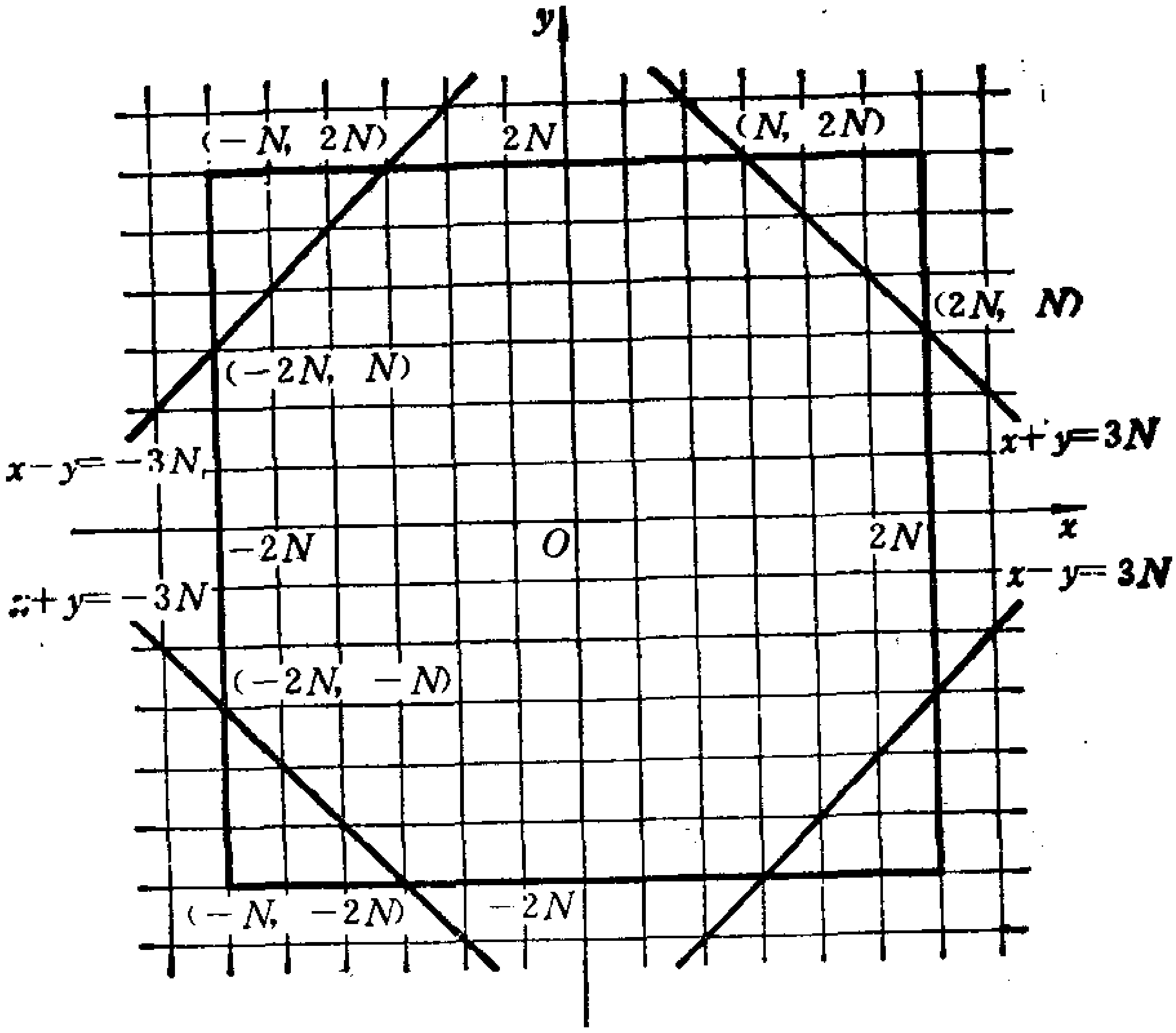


图 27

$$\frac{(4N+1)^2-1}{2}$$

个蓝点，其中，在直线 $x+y=3N$ 上方的那个三角形中有(考虑每一条与 $x+y=3N$ 平行的线)

$$2+4+\cdots+(2N_1)=2\cdot\frac{N_1(N_1+1)}{2}=N_1(N_1+1)$$

个蓝点．因此，八边形中蓝点个数为

$$\frac{(4N+1)^2-1}{2}-4N_1(N_1+1)$$

$$=8N^2+4N-(N-1)(N+1)=7N^2+4N+1.$$

同样地，在 N 为偶数 $2N_1$ 时，八边形中红点的个数为

$$\frac{(4N+1)^2+1}{2}-4(1+3+\cdots+(2N_1-1))$$

$$=8N^2+4N+1-4N_1^2=7N^2+4N+1.$$

要证明(1)式成立，只要证明在 N 为奇(偶)数时，马在第 N 步可以跳到八边形 J_N 中的任何一个蓝(红)点.

考虑由八条直线 $x=2(N-1)$, $x=-2(N-1)$, $y=2(N-1)$, $y=-2(N-1)$, $x+y=3(N-1)$, $x-y=3(N-1)$, $x+y=-3(N-1)$, $x-y=-3(N-1)$所围成的八边形 J_{N-1}. 如果马第 $N-1$ 步可以跳到八边形 J_{N-1} 中任何一个蓝(红)点，那么马第 N 步可以跳到八边形 J_N 中任何一个红(蓝)点. 于是，问题归结为马第 $N-1$ 步能否跳到八边形 J_{N-1} 中任何一个蓝(红)点. 再进一步归结到更小的八边形 J_{N-2}, …. 依此类推，可以直接验证第三步可以跳到 J_3 中任一个蓝点，于是第 N 步可以跳到 J_N 中任一个蓝(红)点.

[例 7]　马从原点跳到整点(m, n)，至少需要多少步？

这个问题与例 6 密切相关. 如果例 6 中的八边形 J_N 包含点(m, n)，而 J_{N-1} 不包含(m, n)，那么马从原点跳到整点(m, n)的步数$\geqslant N$. 并且在(m, n)为红点而 N 为偶数或者(m, n)为蓝点而 N 为奇数时，最少的步数就是 N. 在(m, n)为红点而 N 为奇数或者(m, n)为蓝点而 N 为偶数时，最少的步数是 $N+1$.

详细一点，可以分成以下几种情形(由于对称性，我们假定 $m\leqslant n$，并且 m、n 都是非负的)：

(1) $n=2k$, $m\leqslant k$, m 与 k 奇偶性相同，需要 k 步；

(2) $n=2k$, $m\leqslant k$, m 与 k 奇偶性不同，需要 $k+1$ 步；

(3) $n=2k$, $m>k$, m 与 k 奇偶性相同，需要 $k+2\times\left[\dfrac{m-k+4}{6}\right]$ 步（$[x]$ 表示 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数）；

(4) $n=2k$, $m>k$, m 与 k 奇偶性不同，需要 $k+2\times\left[\dfrac{m-k+1}{6}\right]+1$ 步；

(5) $n=2k-1$, $m\leqslant k+1$, m 与 k 奇偶性不同，需要 k 步；

(6) $n=2k-1$, $m\leqslant k+1$, m 与 k 奇偶性相同，需要 $k+1$ 步；

(7) $n=2k-1$, $m>k+1$, m 与 k 奇偶性不同，需要 $k+2\left[\dfrac{m-k+4}{6}\right]$ 步；

(8) $n=2k-1$, $m>k+1$, m 与 k 奇偶性相同，需要 $k+2\left[\dfrac{m-k+1}{6}\right]+1$ 步。

坐标较小的几个点是例外情形，所需的最少步数不难直接得出，归结成下面的表：

n \ 最少步数 \ m	0	1	2
0	0	3	2
1	3	2	1
2	2	1	4

根据以上的讨论，不难算出马跳至(1986, 1000)的最少步数是

$$993+2\left[\frac{1000-993+1}{6}\right]+1=996.$$

四 走遍棋盘

上节例5表明中国象棋盘上的马可以从任一点出发，无重复地跳遍棋盘上的点，这样的路线称为(马的)哈密尔顿(Hamilton, 1805～1865, 爱尔兰数学家)链. 如果最后一步回到原来的出发点，这样的路线称为哈密尔顿圈(关于哈密尔顿链与哈密尔顿圈，有兴趣的读者可参阅上海教育出版社出版的《趣味的图论问题》或其它图论书籍). 上节例5的结论可改述为：

在中国象棋盘上有一只马的哈密尔顿链.

同样地，在国际象棋盘上也可以考虑马能否从一点出发，无重复地跳遍棋盘上的方格(最后回到出发点)，即马有没有哈密尔顿链(圈)？

大数学家欧拉(Euler, 1707～1783, 瑞士人)就曾研究过这个问题.

由于在国际象棋中，马的走法也是一直一斜，所以现在的问题与上节例4、例5实质是一样的. 本节将对这个问题进行较详细的讨论.

【例 1】 在通常的 8×8 的国际象棋盘上，马有哈密尔顿圈.

图 28 给出这个问题的一个解答($1\to2\to\cdots\to64$).

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38
42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

图 28

解决这类问题，常常采用以下几种方法去尝试：

1．每次将马放到这样的位置，使它能走到的(尚未走过的)方格为最少．即先走“出路”少的方格，后走出路多的方格．例如图 28 中，1 只有两条出路(走到 2 或 64)，应当先走．3 的出路只剩下 3 条(走到 4、12、14)少于 5、17、63 的出路，所以应从 2 走到 3，而不是从 2 走到 5(或 17、63)．图 28 并未完全遵照这一方法，在第八节问题 23 中有几个图是完全按照这一方法作出的.

2．将棋盘分为几个部分，在每个部分中找一条哈氏链(圈)，然后把它们连接起来．上节的例 5 就是这样做的．下

面的图 29，也是在两个 4×8 的棋盘中各找一条哈氏链，然后拼起来.

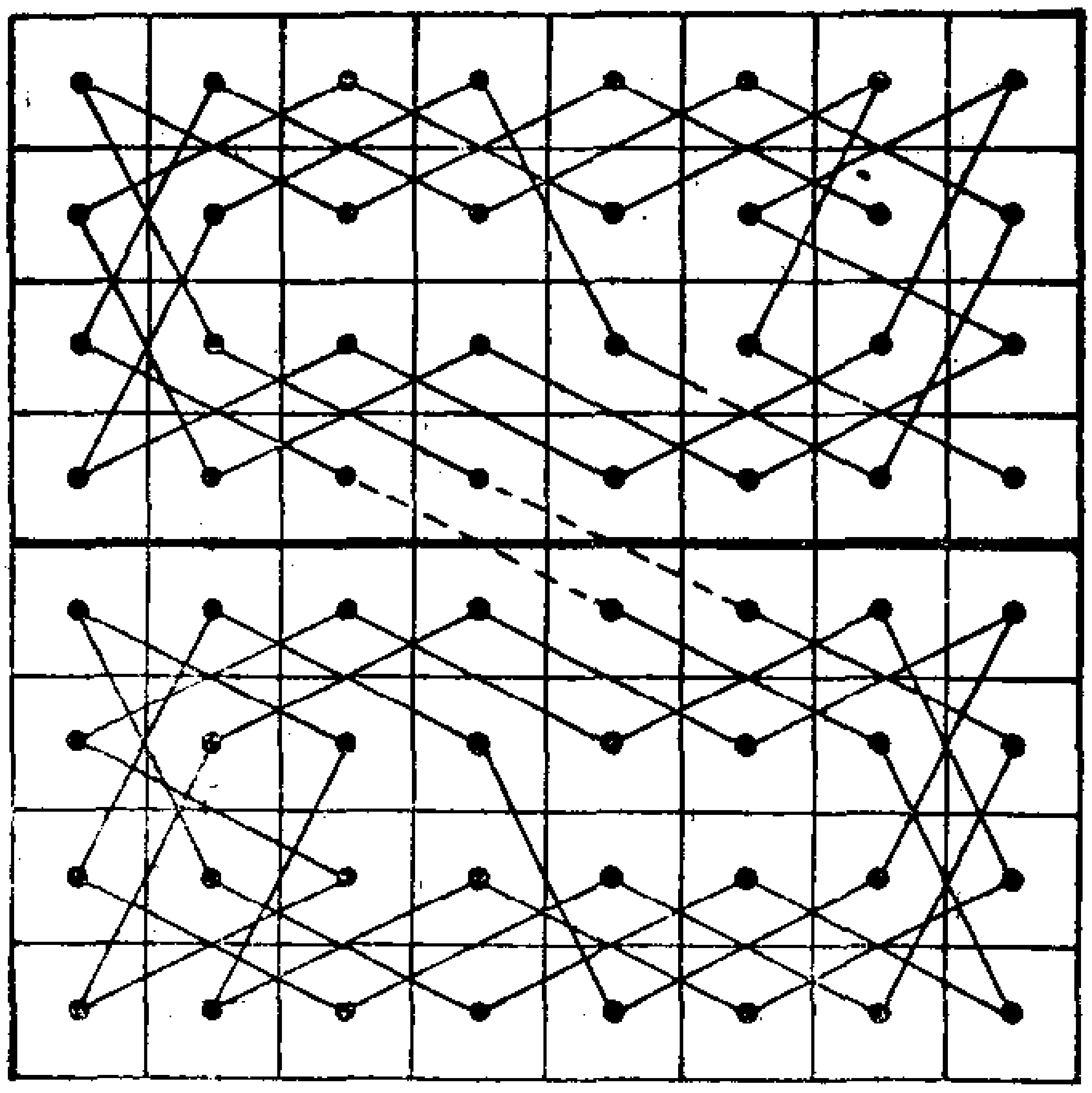


图 29

3．在棋盘中找几个圈(链)，然后将这些圈(链)连接起来，并为一个哈密尔顿圈(链).

4．将一个较小的棋盘镶上边，以产生一个大棋盘上的哈密尔顿链(圈).

[例 2] 试用上面的第三种方法，在 4×8 的棋盘上找一条马的哈密尔顿链.

首先，在这棋盘上找出四个小圈(图 30 中字母 A、B、C、D 各组成一个小圈)，然后将 A 圈、B 圈、C 圈、D 圈顺次连接起来，便得到一条马的哈密尔顿链，图 29 的上半部就是由这四个小圈连接而成的.

A	D	B	C	A	D	B	C
B	C	A	D	B	C	A	D
D	A	C	B	D	A	C	B
C	B	D	A	C	B	D	A

图 30

[例 3] 7×7 的棋盘上有一条马的哈密尔顿链.

如图 31, 棋盘的"中心部分"是一个 3×3 的棋盘, 标上字母 C 的方格组成一个圈. 在这个 3×3 的棋盘四周镶上边框. 边框中标上字母 a 的组成一个圈, 标上字母 b 的组成另一个圈.

将圈 a、b、c 及棋盘中央的方格 d 适当地连接起来便得到一条哈密尔顿链.

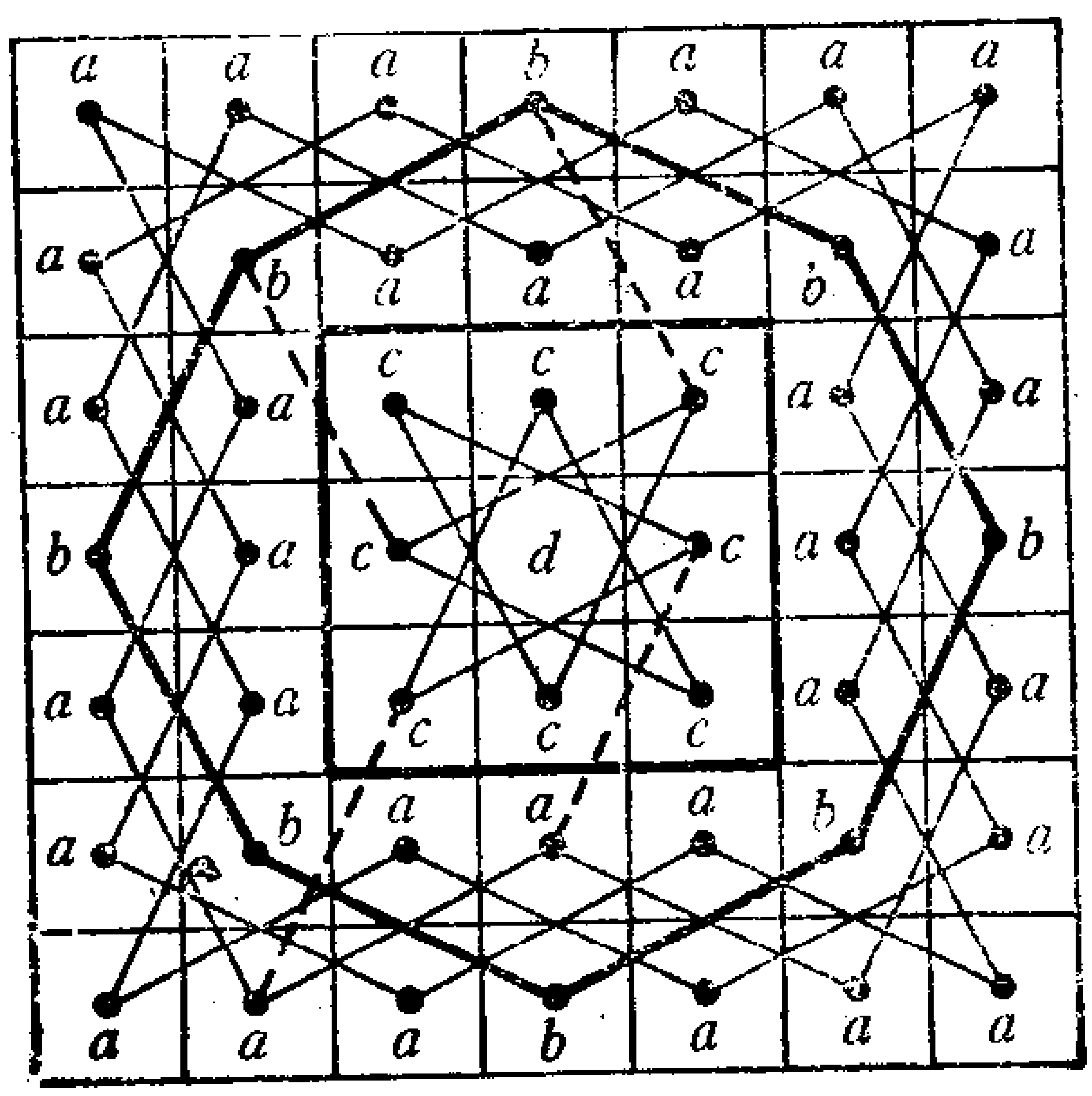


图 31

用这种(第四种)方法，不难得出以下结论：如果 n 是大于 4 的偶数，那么 $n\times n$ 的棋盘有一条哈密尔顿圈．如果 n 是大于 3 的奇数，那么在 $n\times n$ 的棋盘上有一条哈密尔顿链．

证明存在一条哈密尔顿链(圈)，通常是采用"构造法"，把这条链(圈)找出来．要证明不存在哈密尔顿链(圈)，正如前两节说过的，应当采取机智的反证，考虑奇偶性、涂颜色等方法．

[例 4]　证明在 m、n 都是奇数时，$m\times n$ 的棋盘没有哈密尔顿圈．

这个问题证明不难．只要将棋盘的方格涂以黑、白两种颜色，使相邻的方格颜色不同．

如果有一条哈密尔顿圈存在，那么两种颜色的方格数应当相等(请参见上节例 4)．从而总的方格数 mn 应为偶数，m、n 中至少有一个是偶数．

[例 5]　在 $4\times n$ 的棋盘上都没有哈密尔顿圈．

假定有一条哈密尔顿圈存在．用通常的方法将棋盘涂上黑、白两种颜色，使相邻的方格颜色不同(图 32)．在上述哈密尔顿圈上，两种颜色交错出现(因为马每一步从一种颜色的方格跳到另一种颜色的方格)，因而奇数步是同一种颜色，不妨假定全是黑色，偶数步全是白色．

再考虑另一种涂色方法，即将第一行与第四行涂上黄色，第二、三行涂上红色(见图 33，其中斜条表示红色，白格表示黄色)．这时，如果马在黄色格子上，那么它一步必

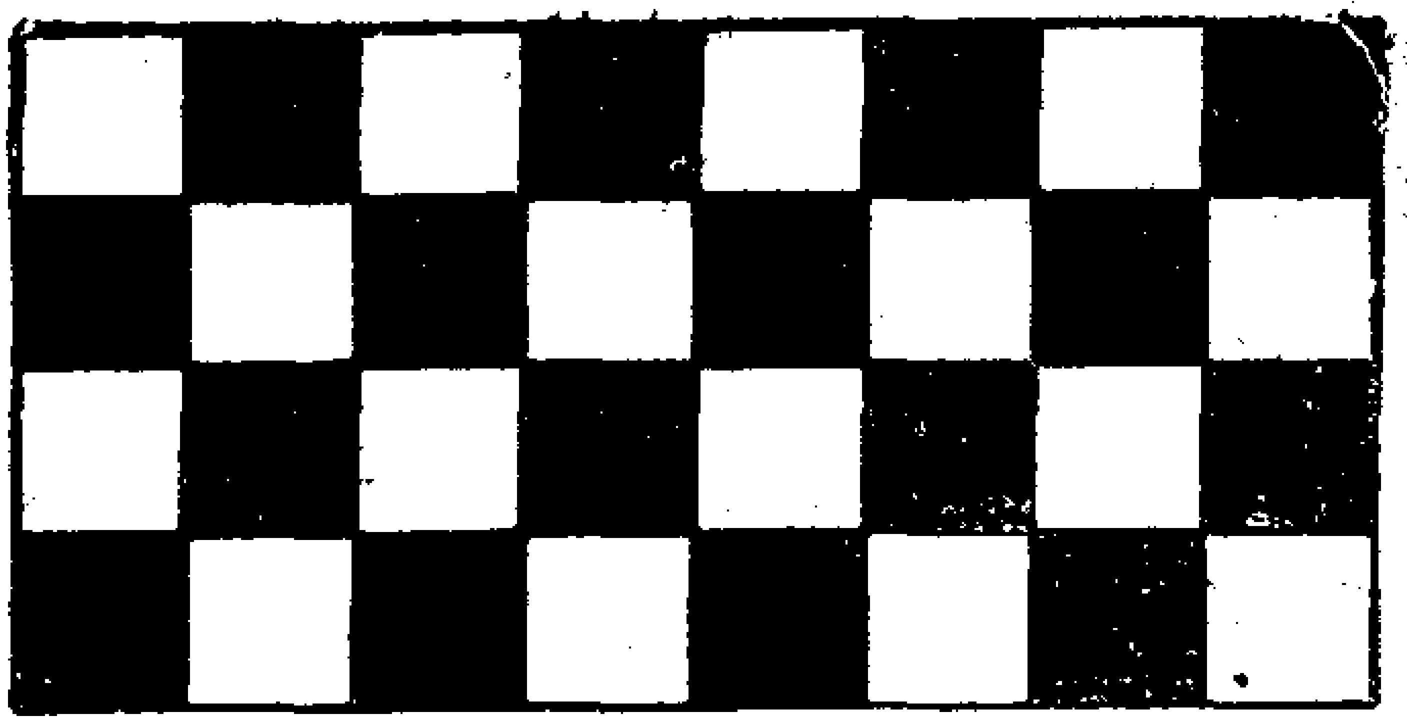


图 32

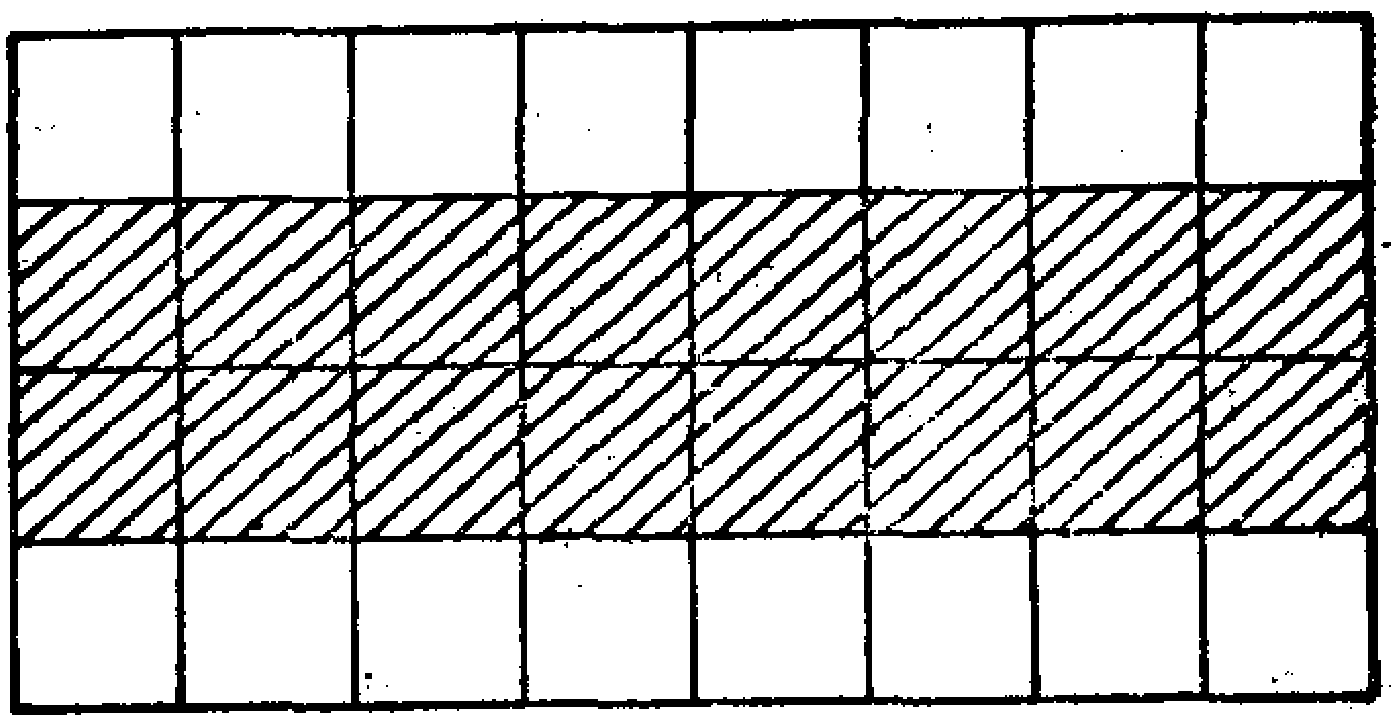


图 33

然跳到红色的格子上．因此，在上述哈密尔顿圈上，每个黄色格子后面必然紧跟着一个红色格子．

不妨假定这个圈是从黄色格子开始(对于圈来说，我们可以以任意一个点作为始点)，以红色方格结尾(这样才能回到始点——黄色格子)．$2n$ 个黄色格子，每个后面紧跟一个红色格子，换句话说，有 $2n$ 个红色格子紧跟在黄色格子后面．这样，每一个红色格子都紧跟在一个黄色格子后面．从而马的路线是

黄红黄红黄红……黄红

也就是奇数步全由黄色的方格组成，偶数步全是红色方格．

但是，上面已经说过奇数步由全体黑色的方格组成．黑

色方格的全体与黄色方格的全体，显然是不同的集合，这就导致矛盾，从而所述的哈密尔顿圈不存在。

超级马也有类似的问题存在。

[例 6] 在 12×12 的棋盘上有一匹 3×4 的超级马，每一步从 3×4 的矩形的一角跳到对角，证明在这棋盘上，这只马没有哈密尔顿圈，即它不能跳遍整个棋盘，每个方格都只走到一次，并且最后跳回出发点。

问题的解法与例 5 类似。首先采用通常的方法将棋盘涂上黑、白两种颜色，相邻的方格颜色不同。然后将棋盘的第一、二、六、七、十一、十二行涂上黄色，其余的行涂上红色。完整的证明请读者自己完成。

下面的例子可以说是哈密尔顿圈的一个应用。

[例 7] 在 8×8 的国际象棋盘上，至多能放多少只通常的 1×2 的马，每一只马不能"吃到"其他的马？

答案是 32 只。如果棋盘与通常一样，涂上黑、白两种颜色，相邻的方格颜色不同，那么可以在 32 个黑格（白格）里各放一只马，这些马显然互不相吃（图 34）。

还要证明不能放更多的马互不相吃。由例 1，我们知道在 8×8 的棋盘上，马有一条哈密尔顿圈，圈上放的每只马可以吃掉紧放在它后面的马。因此，要使棋盘中放的马互不相吃，在上述圈上，每对一前一后的两只马中至少要去掉一只，因而棋盘上至多只能放 32 只马互不相吃。

另一种不依赖于哈密尔顿圈的证明是将棋盘分为 8 个 2×4 的矩形。容易看出在 2×4 的矩形中至多放 4 只马互

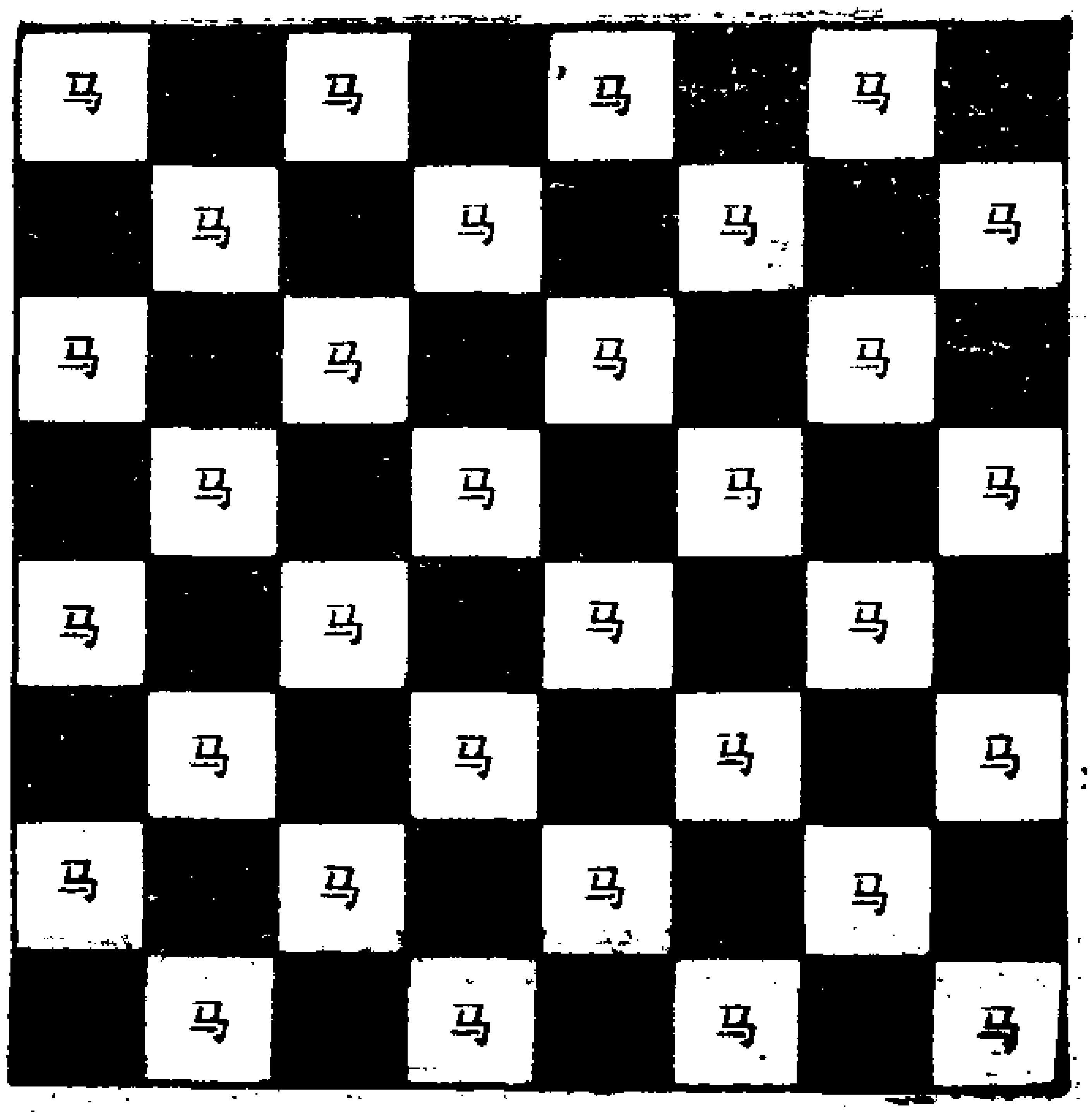


图 34

不相吃，所以在 8×8 的棋盘中至多放 32 只马互不相吃.

用下节的术语来说，在 8×8 的棋盘上，马的内固数是 32.

同样的方法可以证明，对于 $n\times n$ 的棋盘，在 n 为偶数 $2k(k>1)$ 时，可以在棋盘上放 $2k^2$ 只马互不相吃；在 n 为奇数 $2k+1$ 时，可以在棋盘上放 $2k^2+2k+1$ 只马互不相吃. 这里 $2k^2$、$2k^2+2k+1$ 都不能改为更大的数.

五 皇 后

在国际象棋中，皇后的威力最大，它不但可以吃掉同一直线上的棋子，而且可以吃掉同一斜线上的棋子。

［例 1］ 在 8×8 的棋盘上，最多能放几只皇后互不相吃？怎样放？

由于每一行只能放一只皇后，所以至多能放 8 只皇后互不相吃．图 35 就是一种放法．

这个问题当然不仅仅有一种放法．找出一个解（一种放法）并不难，找出所有的解可不容易．大数学家高斯(Gauss，1777～1855，德国人)曾经猜测它有 76 个解，实际上却有 92 个解．经过整整一个世纪，人们才把解答找全．

为了方便起见，我们把图 35 中的解记为

(72631485)

其中第一个数 7 表示第一列的皇后在第 7 行，第二个数 2 表示第二列的皇后在第 2 行，依此类推．

将图 35 旋转或关于对角线作反射(轴对称)又可以得到 7 组解，即

1—2—3—4—5—6—7—8

	1	2	3	4	5	6	7	8
1					后			
2		后						
3				后				
4						后		
5								后
6			后					
7	后							
8							后	

图 35

$$\begin{array}{c}(71386425)\\(41586372)\\(47531682)\\(58413627)\\(52468317)\\(27368514)\\(28613574)\end{array}\tag{1}$$

不看图也可以由(72631485)直接写出(1)中其它的解．方法是将(72631485)中数8、7、6、5、4、3、2、1所在的位数逐一写下来便得到(71386425)．再将(71386425)中数8、7、6、5、4、3、2、1所在的位数逐一写下来便得到(41586372)．同样得(47531682)．将以上四解中的数倒过来读便得到(1)中的后四组解．

全部的解可分为 12 组，即除(1)外还有：

(35841726)　(16837425)　(51468273)

(36824175)　(35286471)　(57413862)

(37285146)　(47526138)　(62713584)

(42857136)　(82531746)　(73168524)

(62714853)　(52473861)　(37286415)

(57142863)　(17468253)　(26831475)

(64158273)　(83162574)　(48531726)

(63175824)　(64713528)　(42586137)

(61528374)　(46152837)　(57263184)

(57138642)

(52617483)

(75316814)

(47382516)

(24683175)

(38471625)

(41861357)

(42751863)　(58417263)　(57263184)

(63741825)

(63184275)

(47185263)

(36815724)

(52814736)

(57248136)

(36258174)

(48157263) (35281746)

(25741863) (46827135)

(63724815) (64718253)

(63185247) (53172864)

(36275184)

(36814752)

(51842736)

(74258136)

前11组各有8个解，最后一组仅有4个．其中没有写出的解，读者根据图形的旋转、反射或者根据8，7，6，5，4，3，2，1所在位数的方法不难补全．

如果将棋盘中每个方格用一个点表示，并且在皇后能从一个方格走到另一个方格(即这两个方格在同一直线或同一斜线上)时，在相应的两个点之间连一条线，这样得到的图称为皇后图．

[例2] 对于3×3的棋盘，作出对应的皇后图．

图36就是对应的皇后图，其中(i, j)是与第i行第j列的方格相对应的点．

我们把一些点以及连接这些点的若干条线所组成的图形称为图．有线相连的两个点称为相邻的，否则称为不相邻的(参见本社出版的《趣味的图论问题》)．一个图中任意

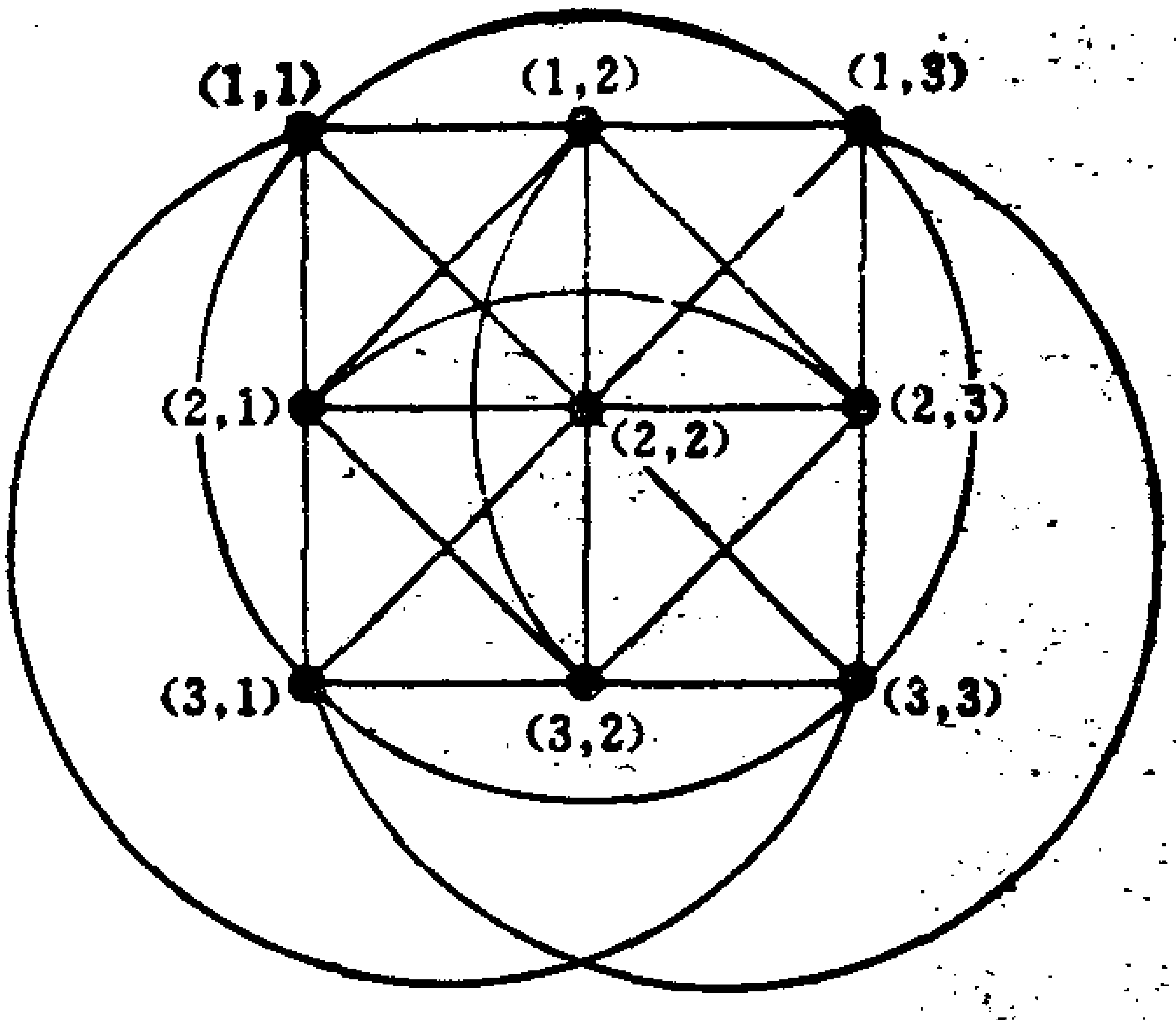


图 36

一组不相邻的点所组成的集称为内固集. 内固集中所含点的个数的最大值称为内固数.

例 1 的结论就是与 8×8 的棋盘相对应的皇后图的内固数为 8. 可以证明在 $n\geqslant4$ 时, $n\times n$ 的棋盘上, 皇后的内固数为 n.

通常, 我们并不真正把皇后图作出来. 因为从例 2 已经看出, 皇后图上的线条太多, 反而看不清楚. 我们宁愿采用原来的棋盘.

除了内固数外, 色数与外固数也是很重要的概念.

将一个图的点涂上颜色, 使相邻两个点的颜色不同. 这时, 所需要的颜色种数的最小值称为色数. 现在我们来求皇后图的色数, 这也就是下面的例3.

[例 3] 在 8×8 的棋盘上, 每个方格中放一只皇后, 将这些皇后涂上颜色, 问至少要用多少种不同的颜色, 才能

使得同一直线或同一斜线上的皇后没有两只颜色相同?

显然，在同一行上的八只皇后颜色各不相同．因此，皇后(图)的色数 $\alpha(Q)\geqslant 8$.

由于同一种颜色的皇后互不相吃，它们组成一个内固集．例 1 告诉我们，每个内固集至多含 8 个方格，并且含 8 个方格的内固集只有前面列出的 92 种．如果 $\alpha(Q)=8$，那么整个棋盘(整个皇后图)可以分为 8 个内固集，每个内固集恰含 8 个方格，因而是上述 92 种中的 8 种．但可以验证上述 92 种的任何 8 种都不能互不重叠地同时列在棋盘上(这样的枚举冗长乏味，这里从略)，所以 $\alpha(Q)>8$.

9 种颜色是足够的，例如图 37(其中数 i 表示方格中的皇后涂上第 i 种颜色).

6	2	7	3	1	5	9	4
9	1	5	8	4	7	3	2
5	4	9	1	3	2	6	8
2	7	3	4	6	1	5	9
3	6	2	5	7	9	4	1
7	5	1	9	2	3	8	6
1	9	4	7	8	6	2	3
8	3	6	2	9	4	1	5

图 37

于是在 8×8 的棋盘上皇后的色数 $\alpha(Q_8)=9$.

对于 $n\times n$ 的棋盘，显然皇后的色数 $\alpha(Q_n)\geqslant n$ (同一行的 n 只皇后颜色各不相同)，并且易知

$$\alpha(Q_2)=4,$$

$$\alpha(Q_3)=\alpha(Q_4)=5,$$

$$\alpha(Q_6)=7.$$

于是猜测 $$\alpha(Q_n)\leqslant n+1.$$

但这个猜测并未得到证明，目前最好的结果见例4.

[例 4] 对于 $n\times n$ 的棋盘，皇后的色数

$$\alpha(Q_n)\begin{cases}=n, & \text{如果 } n \text{ 不被 } 2、3 \text{ 整除;}\\ \leqslant n+1, & \text{如果 } n+1 \text{ 不被 } 2、3 \text{ 整除;}\\ \leqslant n+2, & \text{如果 } n \text{ 是奇数、被 } 3 \text{ 整除;}\\ \leqslant n+3, & \text{其他情形.}\end{cases} \tag{2}$$

先考虑 n 不被 2、3 整除的情形.

设想有一只马从 $(1, 1)$ (第一行第一格)出发，跳至 $(2, 3)$, $(3, 5)$, $\cdots$. 我们把棋盘右边与左边粘起来，形成一个圆筒. 这样，马就可以一直跳到第 n 行.

马这 n 步所跳过的 n 个格子中，每两格不在同一行. 我们证明每两格不同列，不在同一条(平行于对角线的)斜线上.

首先，如果有两格在同一列，设它们为 (i, j) 与 (i', j) $(i'>i)$. 这时，马走了 $(i'-i)$ 步，每步向左移两格，共移 $2(i'-i)$ 格. 两格在同一列表明马绕这圆筒走了一周或几周，所以 $2(i'-i)$ 应当是 n 的倍数，即 $n|2(i'-i)$.

但 $n\nmid 2$, 所以 $n|(i'-i)$. 但 i', i 都在 1 与 n 之间并且不相等，所以 $0<i'-i<n$, 从而 $n\nmid(i'-i)$, 矛盾!

其次，如果有两格在平行于对角线

$$\{(1, 1), (2, 2), \cdots, (n, n)\}$$

的斜线上，设它们为 (i, j) 与 (i', j') $(i'>i)$, 则

$$i'-i=j'-j, \tag{3}$$

但与上面所说的情形类似,

$$j'-j=2(i'-i)-(n \text{ 的倍数}) \tag{4}$$

所以由 (3)、(4) 得出

$$i'-i=n\text{的倍数}.$$

仍(与上面所说的情形类似)导致矛盾!

最后,如果有两格在平行于对角线

$$\{(1, n), (2, n-1), \cdots, (n, 1)\}$$

的斜线上,设它们为(i, j)与(i', j') $(i'>i)$,则

$$i'+j'=i+j, \tag{5}$$

同样(4)成立,结合(5)便得

$$3(i'-i)=n\text{ 的倍数},$$

但$3\nmid n$, 所以$n\mid(i'-i)$, 仍得矛盾!

将n只同色的皇后,放在上面马所跳过的n个方格中,这些皇后就互不相吃. 将每个皇后都向左移一格, 又得到一组互不相吃的皇后, 它们涂以第二种颜色. 这样继续左移(请注意棋盘是圆筒形的),就得到n组皇后,每一组的n次互不相吃. 于是$\alpha(Q_n)=n$. 特别地,有

$$\alpha(Q_5)=5,$$

$$\alpha(Q_7)=7.$$

现在假定$n+1$不被2、3整除, 那么$(n+1)\times(n+1)$的棋盘上,皇后的色数$\alpha(Q_{n+1})=n+1$. 显然

$$\alpha(Q_n)\leqslant\alpha(Q_{n+1})=n+1.$$

再次, 如果n是奇数并被3整除, 那么$n+2$不被2、3整除,因而

$$\alpha(Q_n)\leqslant\alpha(Q_{n+2})=n+2.$$

最后,如果n是偶数并且$n+1$被3整除,那么$n+1$是奇数并被3整除,由上一种情形

$$\alpha(Q_{n+1})\leqslant(n+1)+2=n+3,$$

从而 $$\alpha(Q_n)\leqslant\alpha(Q_{n+1})\leqslant n+3.$$

(2)式全部证完.

在一个图中可以选出一组点，使得其余的点至少与这组点中某一个点相邻．选出的这组点称为图的一个外固集．外固集中所含点数的最小值称为外固数．

对于 8×8 的棋盘，皇后的外固数等于 5．关于这点，请看下面的例 5.

[例 5] 用五只皇后能控制住整个 8×8 的棋盘，即放在棋盘上的任一枚棋子，都至少被这五只皇后中的一只吃掉.

				后			
后							
			后				
							后
		后					

图 38

图 38 就是一种放法.

用枚举法可以证明 4 只皇后不能控制 8×8 的棋盘(不知道读者能否用简单机敏的反证来导出这个结论)，因此皇后的外固数是 5.

[例 6] 用五只皇后能控制 9×9, 10×10 和 11×11 的棋盘.

图 39 表明五只皇后能控制 9×9 的棋盘，并且将这棋盘删去(不含皇后的)一行及一列后，就得出五只皇后控制 8×8 的棋盘的一个解，这解与图 38 不同.

图 40 表明五只皇后能控制 11×11 的棋盘(读者可以

先画一个 11×11 的棋盘，然后将五枚皇后放在棋盘上，通过试验与探索，不难找出一个解答来）. 删去不含皇后的一行与一列，就得到五只皇后能控制 10×10 的棋盘的一个解. 再删去一行一列就得到五只皇后能控制 9×9 的棋盘的一个解，这个解与图 39 不同.

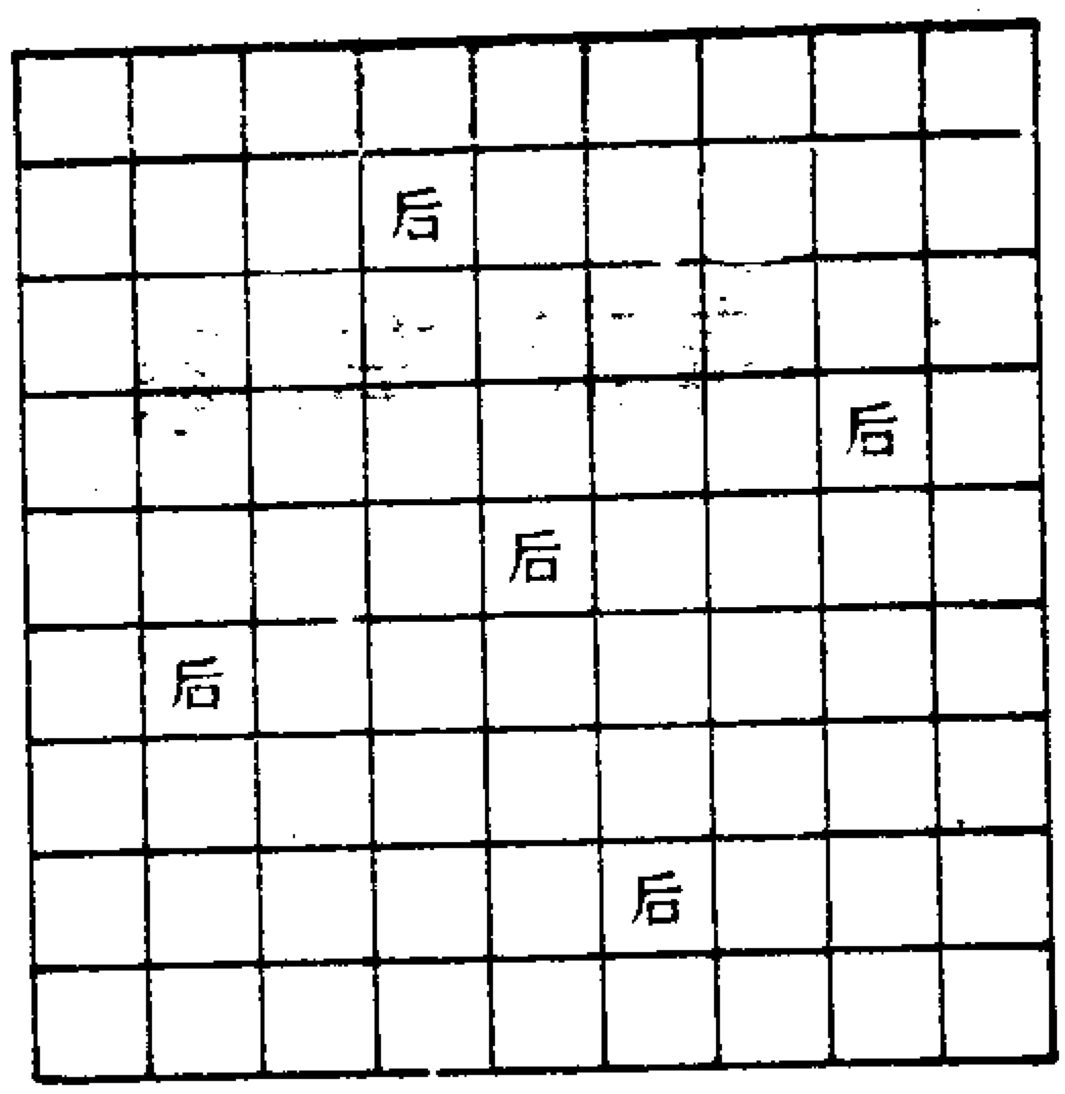


图 39

对于 $n\times n$ 的棋盘，皇后的外固数是多少？目前尚无一般的结论.

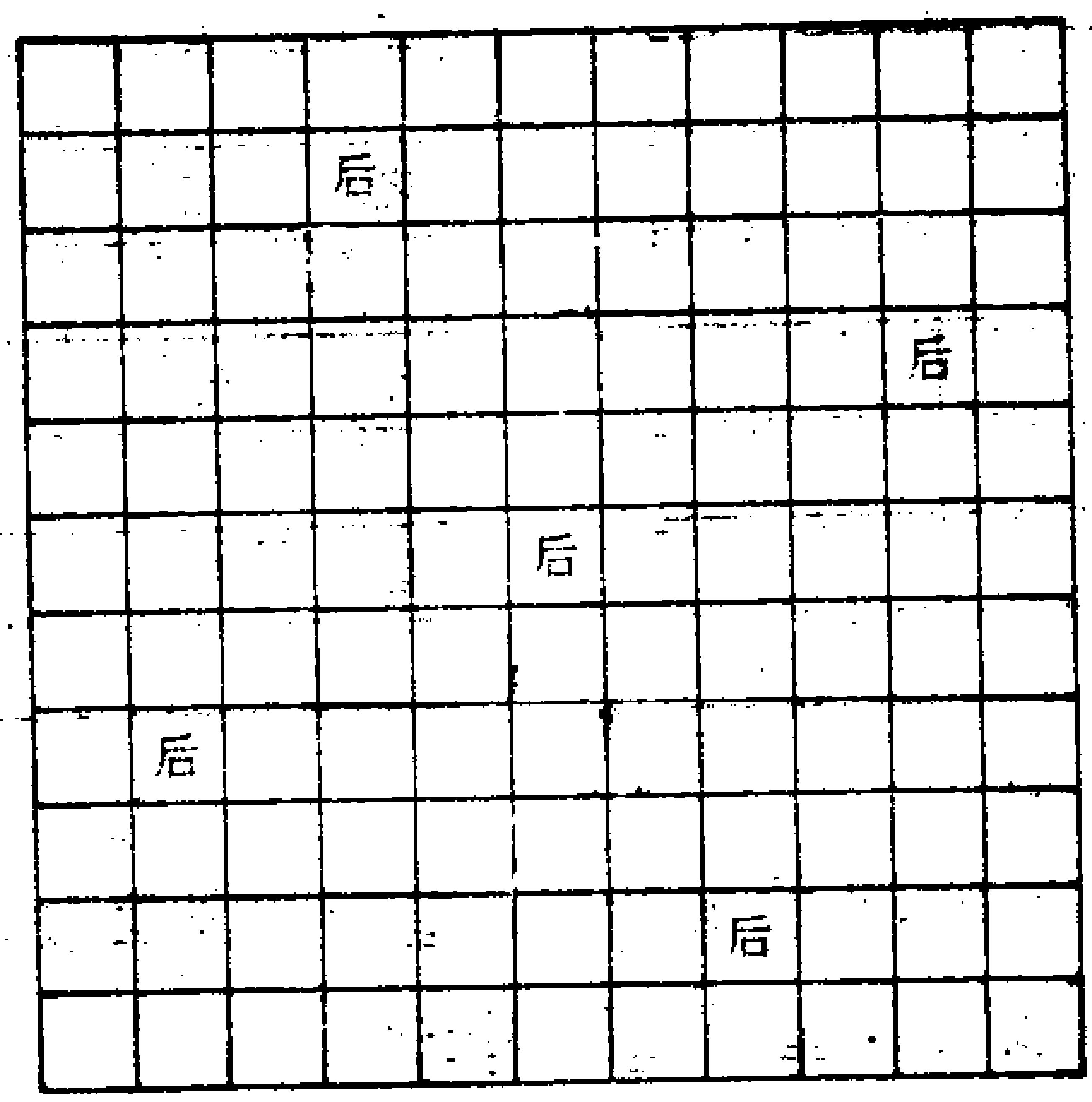


图 40

六 皇帝、车、象

国际象棋中的皇帝既可以沿直线，也可以沿斜线前进，但每次只能前进一格，即在图 41 中，皇帝一步可以进到 A、B、C、D、E、F、G、H 中任何一格.

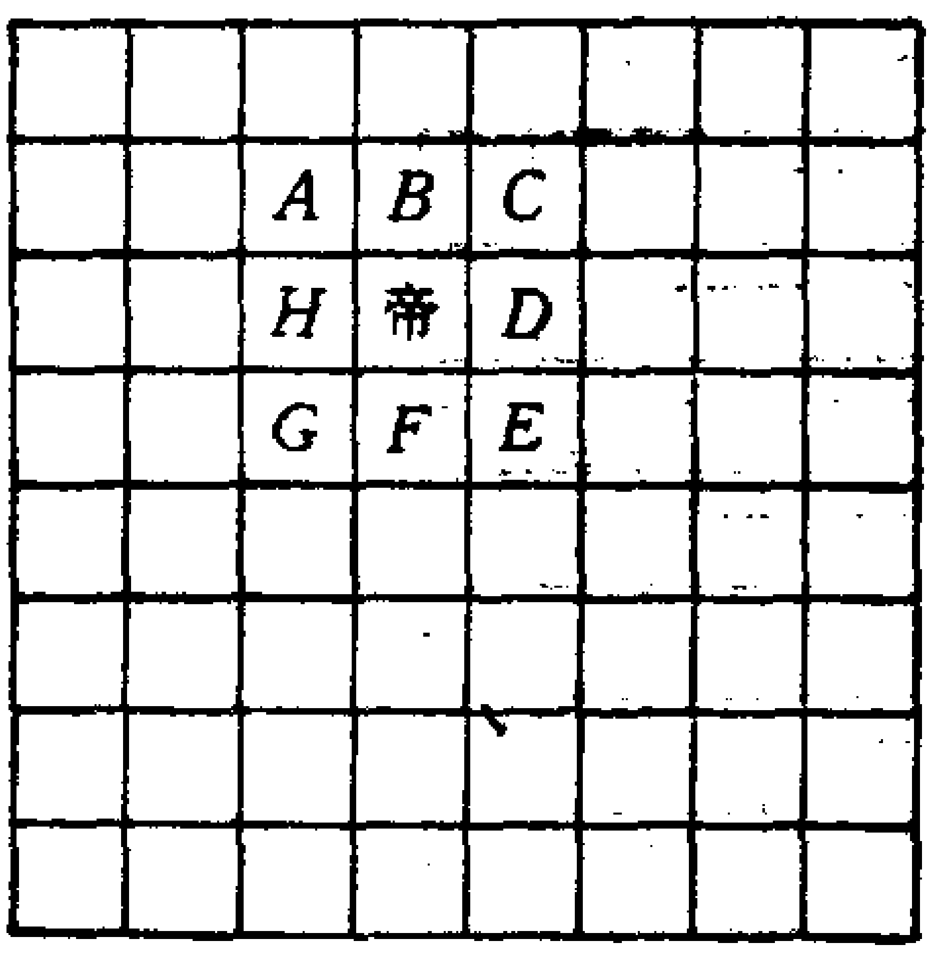


图 41

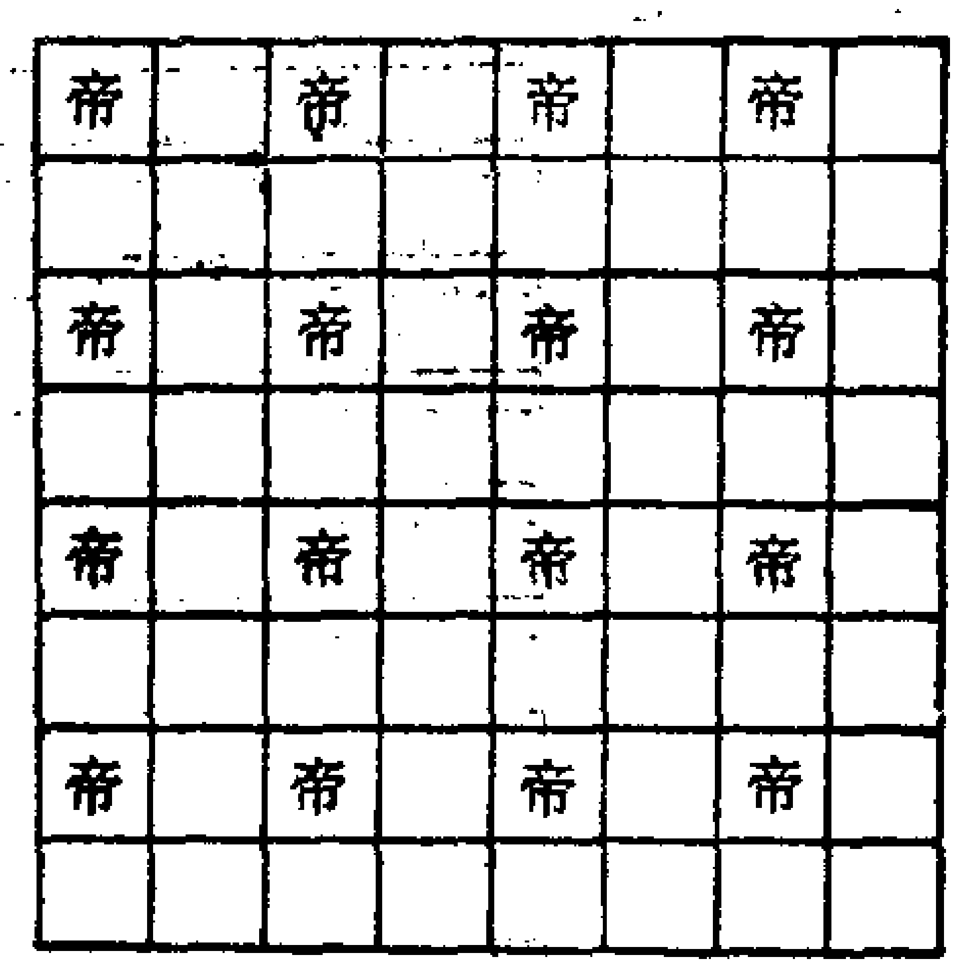


图 42

［例 1］ 在 8×8 的棋盘上，皇帝的内固数是多少，也就是至多可以放几只皇帝互不相吃？

图 42 表明，可以放 16 只皇帝互不相吃.

另一方面，由于每个 2×2 的矩形里至多只能放一只皇帝，整个 8×8 的棋盘可以分成 16 个 2×2 的矩形，因此至

多能放 16 只皇帝互不相吃，即在 8×8 的棋盘上，皇帝的内固数为 16.

用同样的方法可以证明：对 $n\times n$ 的棋盘，在 n 为偶数时，皇帝的内固数为 $\frac{n^2}{4}$. 在 n 为奇数时，皇帝的内固数为 $\frac{(n+1)^2}{4}$.

[例 2]　在 $n\times n(n\geqslant2)$ 的棋盘上，皇帝的色数为 4. 即可以将 n^2 个皇帝涂上四种颜色中的一种，将它们放到棋盘上，每个方格中各放一个，使得同一种颜色的皇帝互不相吃.

图 43 表明四种颜色是足够的.

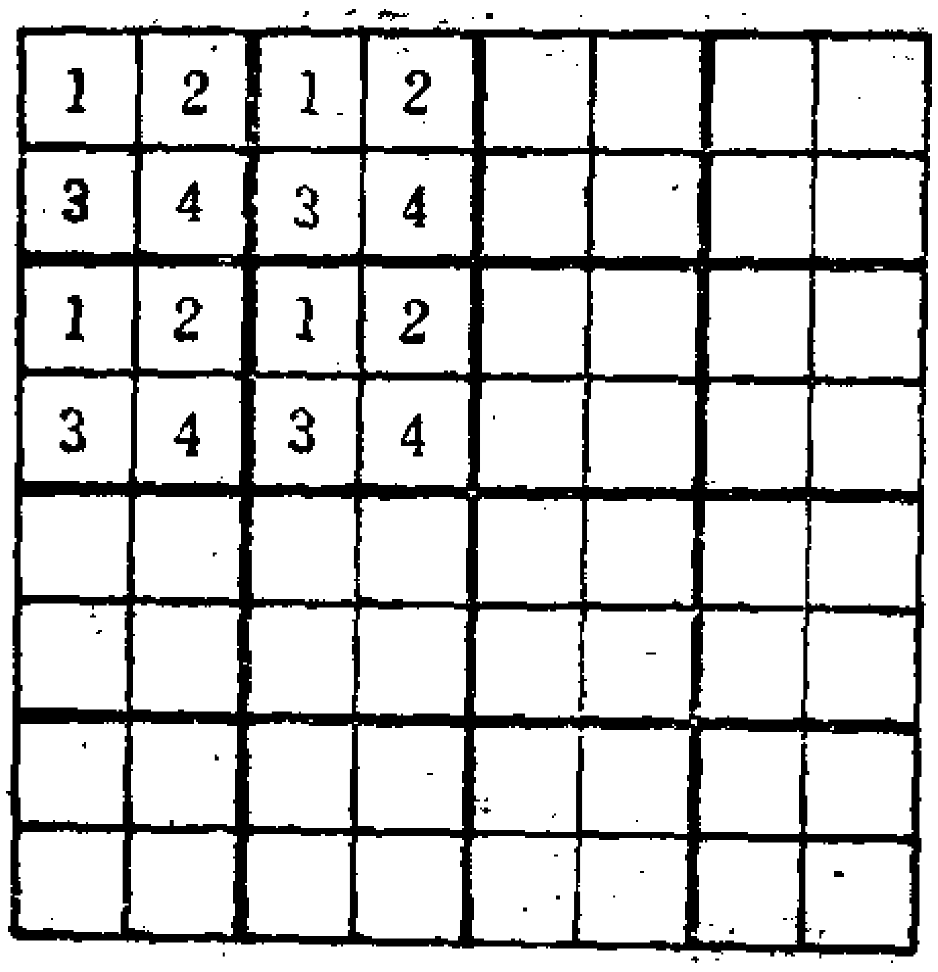


图 43

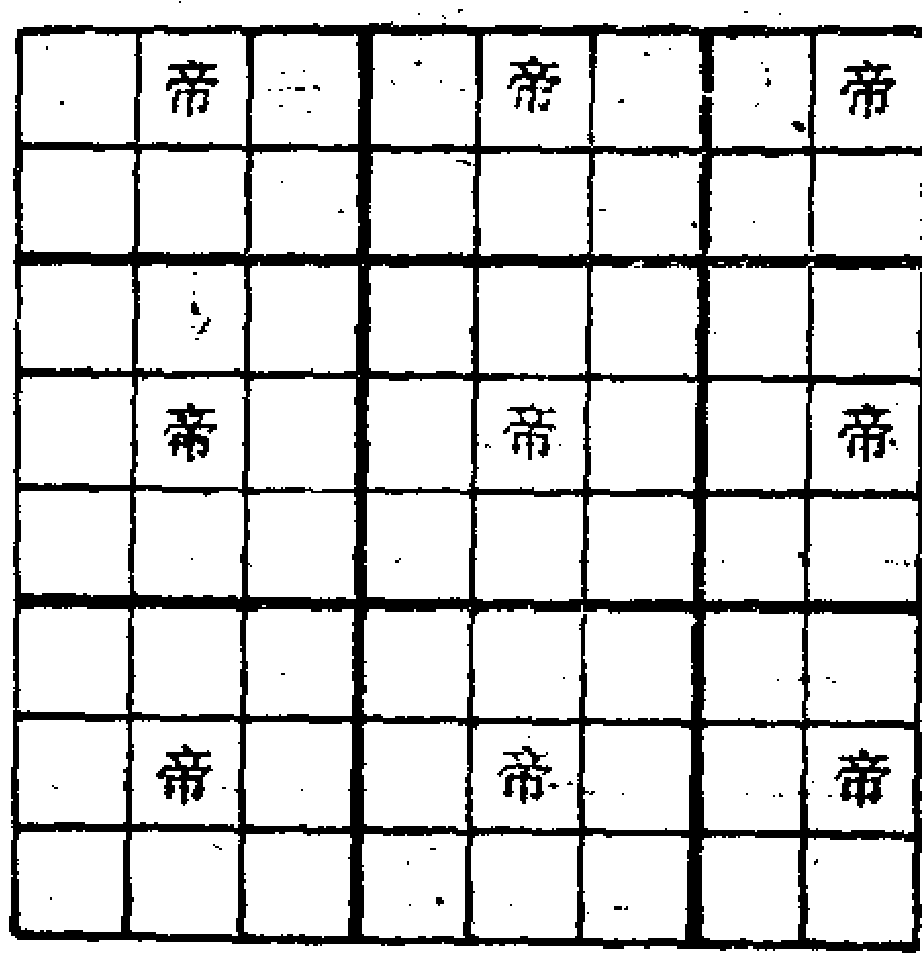


图 44

另一方面，每个 2×2 的矩形中，四只皇帝的颜色互不相同. 因此四种颜色是必须的.

[例 3]　求皇帝的外固数，即至少要几只皇帝才能控制整个棋盘.

图 44 表明用 9 只皇帝能控制整个 8×8 的棋盘.

另一方面，可以将 8×8 的棋盘划分为 9 个部分，如图 44 所示．每个部分中必须放一只皇帝．因此在 8×8 的棋盘上，皇帝的外固数为 9.

用同样的方法，不难得出对 $n\times n$ 的棋盘，皇帝的外固数为 $\left[\dfrac{n+2}{3}\right]^2$，这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

在国际象棋中，车每一步可以沿直线前进任意多格，而象每一步可以沿斜线前进任意多格.

[例 4] 求车的内固数与外固数，即在棋盘上至多能放多少只车互不相吃？至少要放多少只车才能控制住整个棋盘？

在 $n\times n$ 的棋盘上，车的内固数和外固数都是 n.

事实上，在对角线上放 n 只车．这 n 只车互不相吃，而且控制住整个棋盘(图 45).

车							
	车						
		车					
			车				
				车			
					车		
						车	
							车

图 45

另一方面，每只车可以吃掉同一行的车，所以棋盘上至多放 8 只车(每一行放一只车)互不相吃，即内固数等于 8.

我们还看到，如果车的个数少于 n，那么一定有一行里没有车，而每只不在这一行的车只能控制这一行里的一个方格，所以这一行的 n 个方格中至少有一个方格没有被车控制住，这就说明要控制整个棋盘，车的个数至少为 n．从而车的外固数等于 n.

[例 5] 在 $n\times n$ 的棋盘上，每个方格放一只车，将这些车涂上颜色，使得同一种颜色的车不在同一直线上. 问至少要准备几种颜色？换句话说，车的色数是多少？

这个问题比上节的例 4(皇后的色数)容易得多. 答案是车的色数为 n.

一方面，同一行的 n 只车颜色必须不同，所以色数 $\geqslant n$.

另一方面，如图 46 所示，将每一条斜线涂上一种颜色(设想棋盘的右边与左边粘起来，形成一个圆筒). 这时，同一种颜色的方格既不在同一行，也不在同一列，因此 n 种颜色也是足够的.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

图 46

所以，车的色数

$$\alpha(R_n)=n.$$

[例 6] 在 $n\times n(n\geqslant 2)$ 的棋盘上，至多可以放几只象互不相吃？

请注意国际象棋盘通常涂有两种颜色，相邻格子的颜色不同. 放在黑格里的象称为黑象，放在白格里的象称为白象. 黑象决不能吃白象，白象也决不能吃黑象.

更进一步，我们可以探讨一下在棋盘上至多可以放多少只黑象(白象)互不相吃？即黑象与白象的内固数各是多少？

从图 47 可以看出，在 8×8 的棋盘上可以放 14 只象互不相吃，其中黑象、白象各有 7 只. 这结论立即可以推广到

$n\times n$ 的棋盘：在 $n\times n$ 的棋盘上，可以放 $n-1$ 只黑象与 $n-1$ 只白象互不相吃．

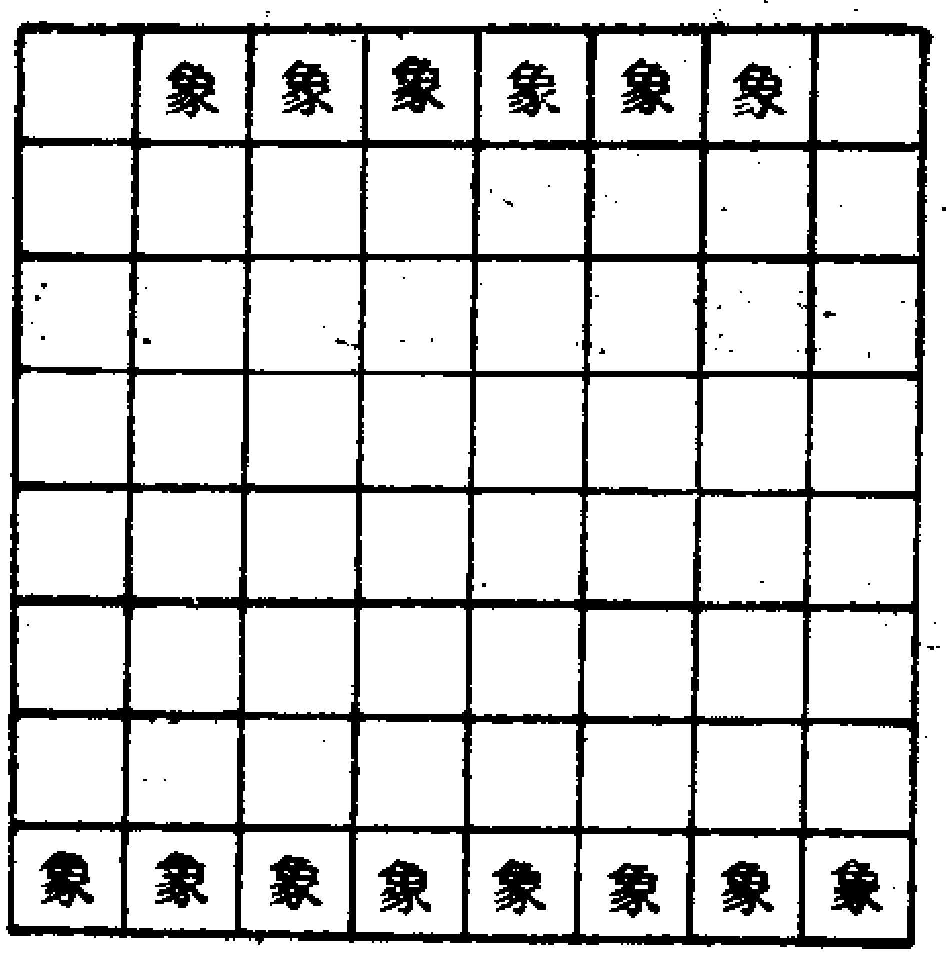


图 47

另一方面，在 n 为偶数时，黑格组成 $n-1$ 条斜线(我们没有把棋盘卷成圆筒)，每条都与一条对角线平行，每条斜线上至多放一只象，因此整个棋盘上至多能放 $n-1$ 只黑象；同理，也至多能放 $n-1$ 只白象．在 n 为奇数时，假定第一行第一个方格为黑格，这时(用与上面完全同样的推理即知)至多能放 $n-1$ 只白象互不相吃；同时，全体黑格都在 $n-2$ 条平行的斜线(包括一条对角线在内)及另一条对角线上，因而也至多只能放 $n-1$ 只黑象．

综合上面的讨论，黑象与白象的内固数都是 $n-1$，象的内固数是 $2(n-1)$．

［例 7］ 在 $n\times n$ 的棋盘上放有 n^2 个象，每个方格里有一只象．至少将这些象分成多少类，才能使同一类中的象都不在一条斜线上？换句话说，象的色数是多少？

如果 n 是偶数，这时两条对角线，一条全是黑格，另一条全是白格．在同一条对角线上的 n 个黑(白)象必须属于不同的类，因而黑象的色数、白象的色数及象的色数都 $\geqslant n$；

另一方面，将同一行的(黑或白)象算作一类，共分为 n 类，每一类中的两只象不在同一条斜线上，因此，象、黑

象、白象的色数都是 n。

如果 n 是奇数，我们约定四个角全是黑格，那么两条对角线都由 n 个黑色的方格组成，而全由白格组成的斜线至多有 $n-1$ 个白格，因而象、黑象的色数 $\geqslant n$，白象的色数 $\geqslant n-1$。

再将同一行的黑象算作一类，可知黑象的色数是 n。将第 n 行与第一行的白象算作一类，其它每一行的白象各算一类，共分为 $n-1$ 类，每一类中的两只白象不在同一斜线上，因此白象的色数是 $n-1$。象的色数是 n。

综合起来，黑象与象的色数是 n。在 n 为偶数时，白象的色数是 n；在 n 为奇数时，白象的色数是 $n-1$。

［例 8］ 求象的外固数，即至少用几只象才能控制住整个棋盘？

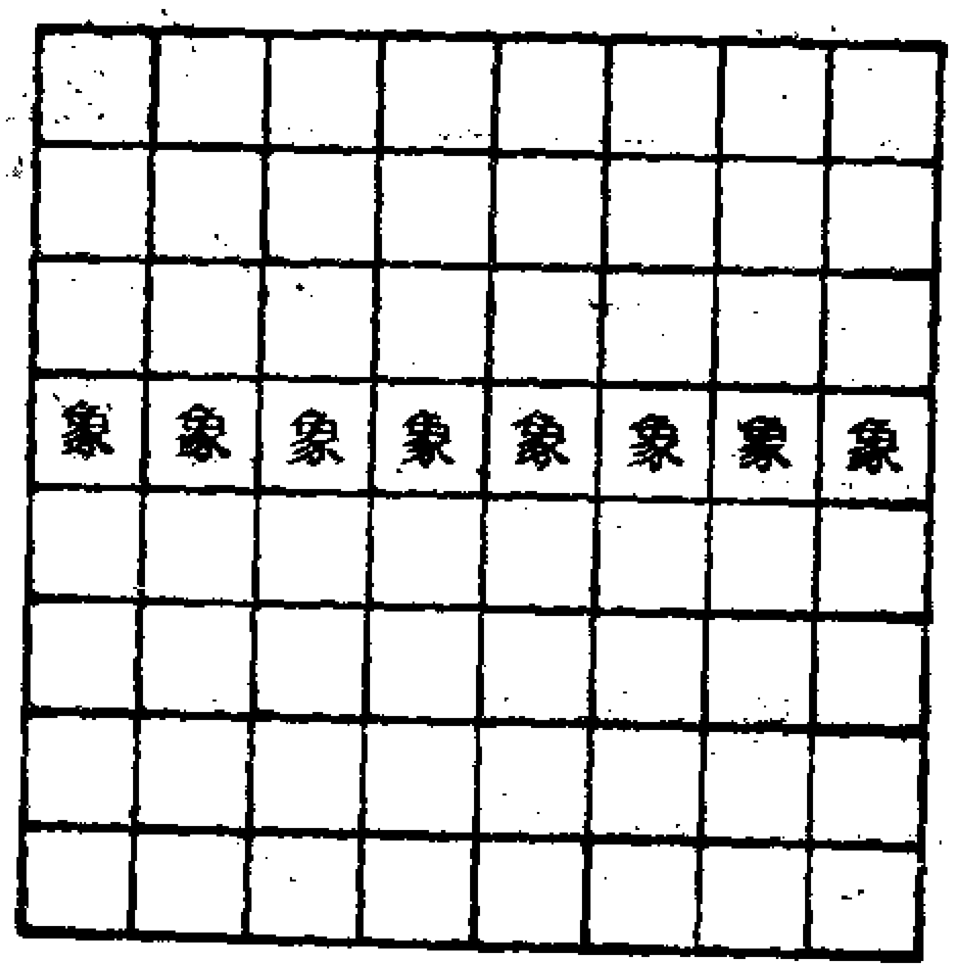


图 48

答案是 n。首先，如图 48 所示，第四行上的 8 个象可以控制整个 8×8 的棋盘。一般地，第 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 行的 n 个象

可以控制 $n\times n$ 的棋盘.

另一方面,七个象不能控制 8×8 的棋盘. 因为在图 49 中,"边框"(即第一行、第八行、第一列、第八列)上有 28 个方格,其中黑、白各 14 格. 7 个象中,黑象与白象的个数必有一个 $\leqslant3$. 不妨设黑象的个数 $\leqslant3$. 由于每只象只能控制"边框"上 4 个方格,因而 3 只黑象至多控制边框上 12 个黑格,但边框上却有 14 个黑格!

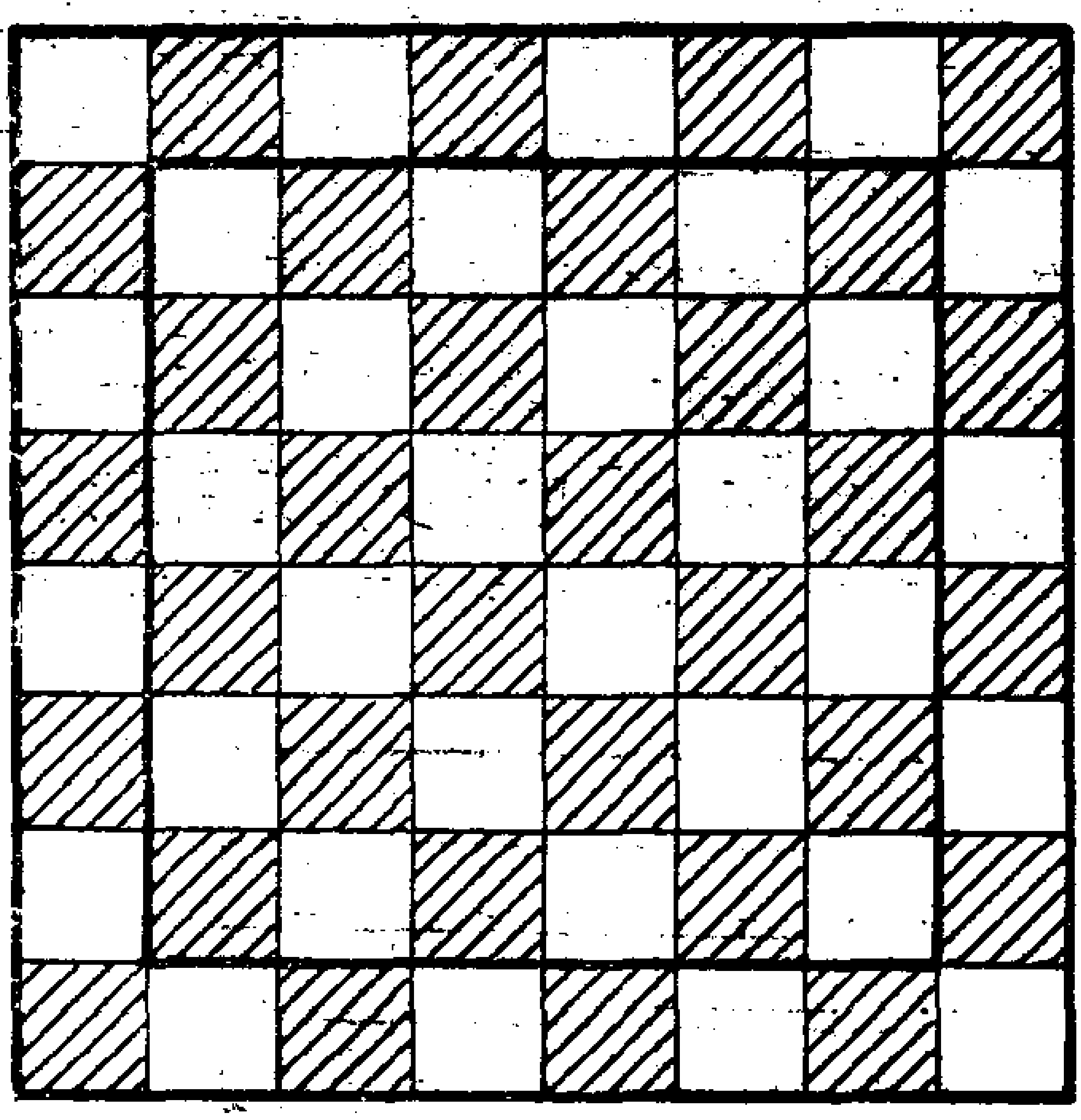


图 49

用完全同样的理由,在 n 为偶数时,$n-1$ 个象不能控制整个棋盘. 因而这时象的外固数等于 n. 并且从上面的证明看出在 n 只象控制棋盘时,黑象、白象必须各占一半.

在 n 为奇数 $2k+1$ 时,又分为两种情形:

(1) $k=2h$, 即 $n=4h+1$. 如果象的个数 $<n$, 即仅有 $2k$ 只象,我们证明它们不能控制整个棋盘.

与前面相同，先考虑“边框”．边框上有 $4k$ 个黑格，$4k$ 个白格．每个象至多控制其中 4 个方格，因此 $2k$ 只象中必须有 k 只黑象，k 只白象．

棋盘上有 $k+1$ 条斜线，这些斜线互相平行，全由黑格组成．中间的一条是对角线，有 $n=4h+1$ 个黑格，然后在它的两侧有两条斜线各有 $4h-1$ 个黑格，其外侧的两条斜线各有 $4h-3$ 个黑格，……，h 次后外侧的两条斜线各有 $2h+1$ 个黑格．

由于黑象仅有 $k=2h$ 个，所以这 $2h+1$ 条斜线上必有一条上没有黑象．但每个不在这条斜线上的黑象至多在这条斜线上控制一个黑格，因此 $2h$ 只黑象不能控制这条黑格个数 $\geqslant 2h+1$ 条斜线．

这样，我们证明了在 $n=4h+1$ 时，象的外固数为 n，并且在 n 只象控制棋盘时，其中 $k+1$ 只是黑象，k 只是白象．

(2) $k=2h+1$，即 $n=4h+3$．与上面的证明完全相同，如果 $2k$ 只象控制棋盘，其中黑象 k 只、白象 k 只．但是棋盘上有 $k+1$ 条斜线，这些斜线互相平行，全由白格组成．其中两条各有 $4h+2$ 个白格，两条各有 $4h$ 个白格，……，两条各有 $2h+2$ 个白格．用与上面同样的推理可知 k 个白象不能控制这 $k+1$ 条斜线．

于是，在这种情形，象的外固数也是 n，并且在 n 只象控制棋盘时，其中 $k+1$ 只是白象，k 只是黑象．

我们将第五、六节的内容归纳成下页的表．表中打“?”的是至今尚未解决的问题．

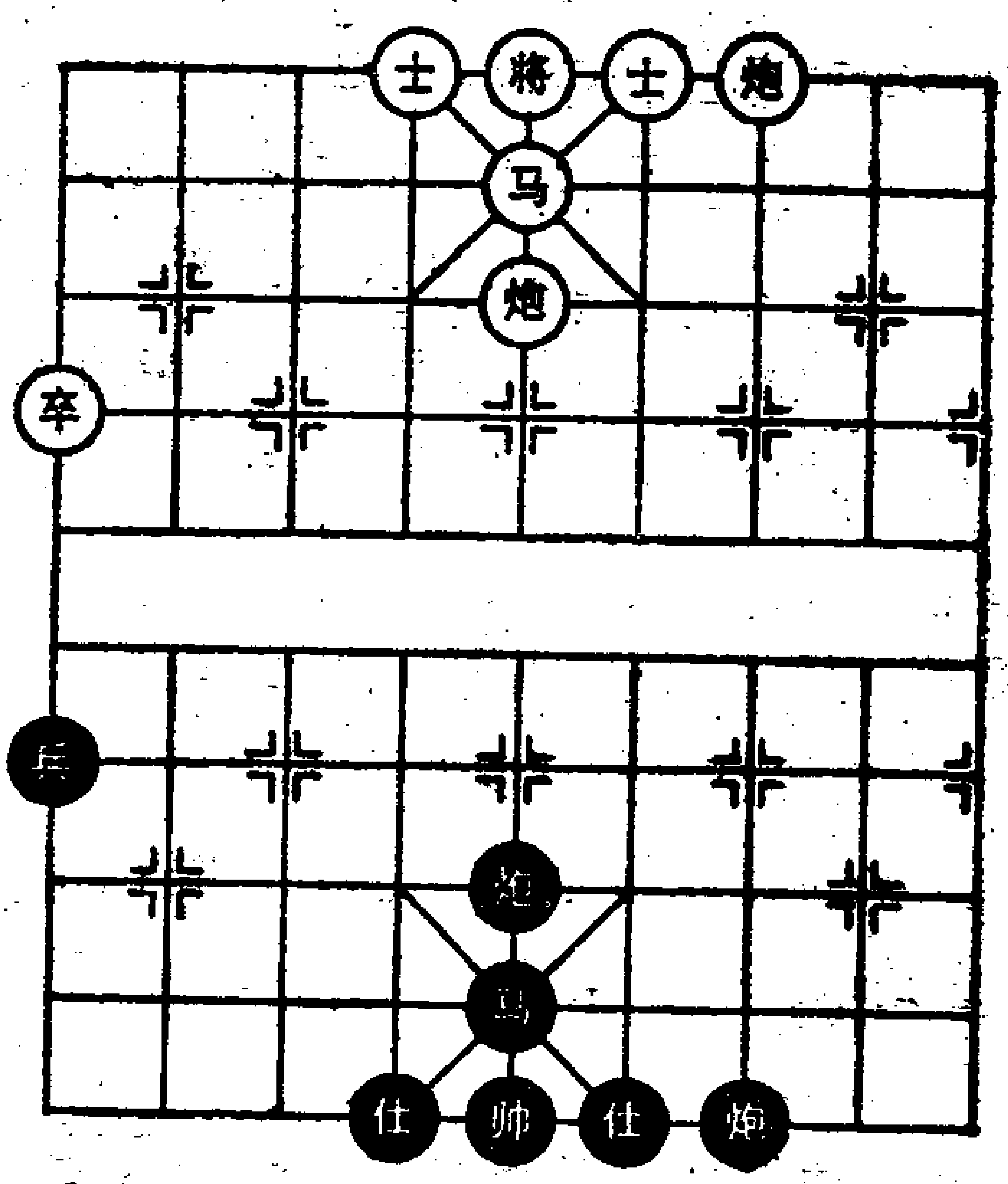
			马	皇后	皇帝	象	车
互相独立(吃不到)情形	8×8棋盘	内固数	32	8	16	14	32
		不同排列种数	2	92	281571	256	40320
	$n\times n$	内固数	当n为偶数，$\frac{n^2}{2}$；当n为奇数，$\frac{n^2+1}{2}$	当$n=1$，2，为1；当$n=3$为2；当$n\geqslant4$，为n	k^2(当$n=2k$或$n=2k-1$)	当$n=1$时，为1；当$n\geqslant2$时，为$2n-2$	n
		不同的排列种数	当n为偶数时，为2；当n为奇数时，为1	?	?	当$n=1$时，为1；当$n\geqslant2$时，为2^n	$n!$
控制棋盘情形	8×8	外固数	12	5	9	8	8
		不同排列种数	?	4860	?	20736	$2\cdot8^8-8!$
	$n\times n$	外固数	?		$\left[\frac{n+2}{3}\right]^2$	n	n
		不同排列种数	?		?	见注	$2\cdot n^n-n!$
8×8		色数	2	9	4	8	8
$n\times n$		色数	$2(n\geqslant2)$	见第48页	$4(n\geqslant2)$	n	n

注 $[(2k-1)!(4k^2+k)]^2$(当$n=4k$时)；$[(2k)!(4k^2+5k+2)]^2$(当$n=4k+2$时)；$2(k!)^2(k+2)$(当$n=2k-1$时)。

七 博 奕

[例 1] 图 50 是一盘未下完的残局，如果轮到乙方走，怎样才能取胜？

甲 方



乙 方

图 50

请注意，按照中国象棋的规则，将对方憋死（无法动弹）算取得胜利．在图 50 中，双方的士（仕）及“窝心马”均无法移动，底炮也不能在横线上移动（否则对方可将炮沉底打闷将），因而只有底炮、中炮和边卒（兵）可以在纵线上移动．问题是怎样移动这几枚棋子，才能憋死对方．

答案是乙方先将底炮向前移动三步（炮七进三），无论甲方怎样走，都免不了被憋死的厄运．

比如说，甲方将边卒挺进一步，这时乙方即将七路炮再向前移动一步．如果甲方接着移动中炮（七路炮）．根据他移动的步数为 1、2、3、4，乙方相应地将七路炮（中炮）移动 1、2、3、4 步．

其余的情形请读者自己讨论，这里不一一枚举，但是，我们将要在下面的例子中进一步阐明取胜的策略．

［例 2］ 桌上有三堆火柴，两人轮流来取，每次可从任一堆中取出一根或多根，取到最后一根火柴的人算赢．如果三堆火柴的根数分别为 1，4，8，问先取的人应当如何取，才能稳操胜券？

仔细思考一分钟，就会发现问题 2 与问题 1 实质上是相同的．第一次应当从 8 根火柴中取出 3 根（“炮七进三”）．

这类取火柴的游戏称为匿门游戏．匿门是德语 Nim 的音译，意思是取、拿（火柴棒）．它是我国发明的，因此也称为“中国灵活游戏”．

这类游戏的诀窍在于采用二进制*，将火柴的根数 1，

* 关于二进制，请参看附录。

4,8 分别用二进制表示成

$$1,\ 100,\ 1000.$$

第一个人从 8 根中取出 3 根后，变为

$$1,\ 100,\ 101$$

如果将这三个数写成竖式

$$\begin{array}{r}1\\100\\101\end{array}$$

那么容易看出每一个数位上的数字之和都是偶数（这里切勿进位）. 无论第二个人怎么取，所取的那一堆火柴的根数（用二进制表示）至少有一个数位上的数字发生了变化，从而破坏了上面的规律，即不是每一个数位上的数字之和都是偶数. 比如说，第二个人从第二堆火柴(4 根)中取走 1 根，三堆的根数变成

$$\begin{array}{r}1\\11\\101\end{array}$$

这时三个数位上的数字之和 $1+1+1, 1+0, 1$ 都不是偶数.

第一个人再接着取. 他的策略是恢复上面的规律，这总是能办到的. 首先，他看一下数字和不是偶数的最高数位，三堆火柴中至少有一堆(用二进制表示)在这数位上的数字为 1. 然后，他就在这堆火柴中取若干根，使得这堆火柴的根数减少，在上述数位上的数字为 0，而较低数位上的数字为 1 或 0 以保证这些数位上的数字之和为偶数，其它数位上的数字不变. 比如，对于上面的情形，他应当在第三

堆中取火柴，将三堆的根数变为

$$\begin{array}{r}1\\11\\10\end{array}$$

这样继续下去，根数逐渐减少，必有结束的时候．由于第二个人取过后，不是每个数位上的数字之和都是偶数，所以他不可能取到最后一根．取最后一根的是第一个人．

[例 3] 在 8×8 的国际象棋盘中(图 51)，有三枚棋子，两个人轮流移动棋子，每一次可将一枚棋子移动任意多格(允许两枚或三枚棋子在同一格)，但只能按箭头所表示的方向移动．在所有棋子都移到 A 点时，游戏结束，并且走最后一步的算赢．问哪一个能够获胜？

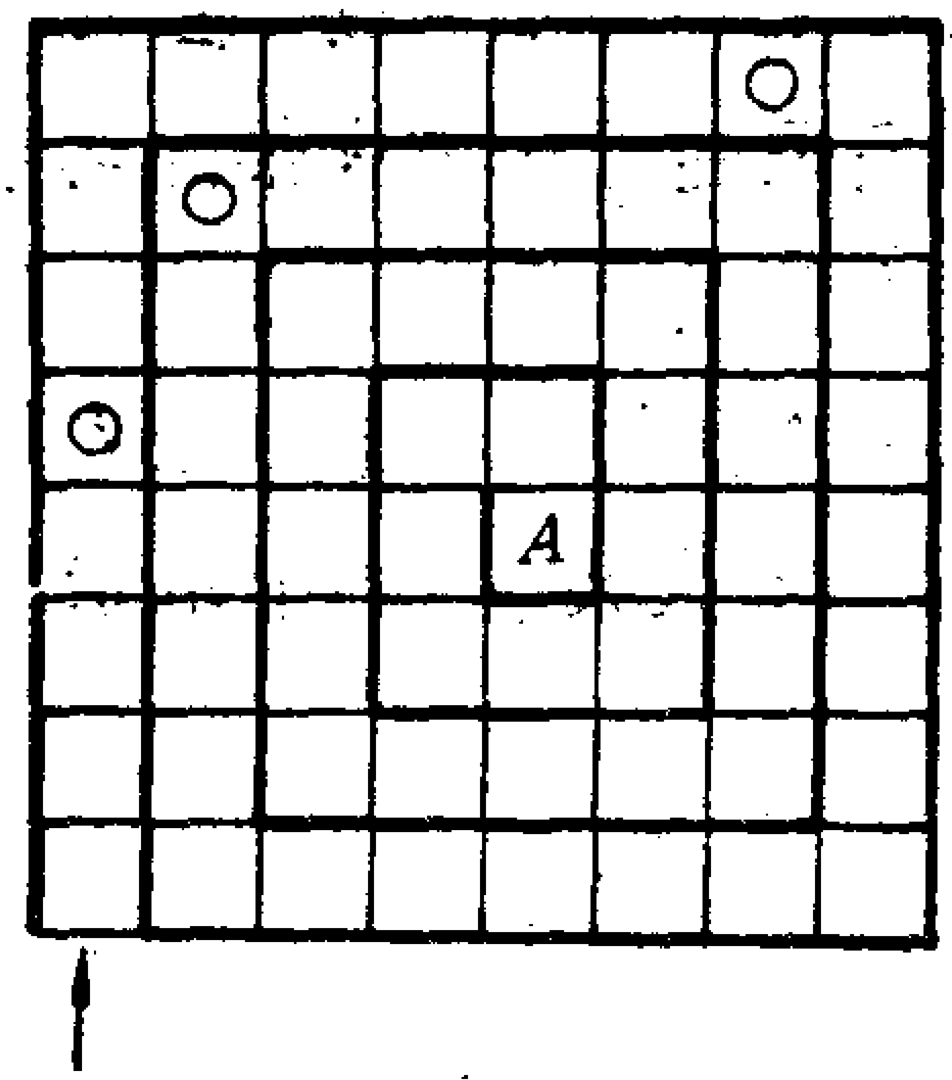


图 51

答案是第一个人必胜．这实际上是三堆火柴的匿门游戏．三堆火柴的根数就是三枚棋子移到 A 点所要走的方格数，即 59，50，30．它们可用二进制写成

$$\begin{array}{r}111011\\110010\\11110\end{array}$$

第一个人应当将第一行的 111011 改成 101100，也就是将它减少 1111．换句话说，应当将最外面的棋子移动 15

步$(1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2+1=15)$.

只要第一个人采用例2中所说的策略，保证各个数位上的数字和为偶数，不论第二个人如何移动棋子，他都可以稳步地走向胜利.

并不是所有的匿门游戏都是先取的赢，请看下面的问题.

[例4] 三堆火柴，根数分别为14，11，5. 如果按照例2的规则进行，当第二个人采取正确的策略时，先取的人一定输，为什么?

理由很简单，14，11，5用二进制表示为

$$\begin{array}{r}1110\\1011\\101\end{array}$$

各个数位上的数字和都是偶数. 先取的人，不论怎样取，都要破坏这一规律，因而不可避免地导致失败.

匿门游戏有各种各样的变形. 比如说取最后一根的算输，或者可以同时在几堆火柴里取. 这里不作详细的介绍了.

棋类、匿门游戏及其他游戏，我们统称为博奕. 下面举几个双人博奕的例子.

[例5] n个负号排成一行. A、B两人轮流将负号改成正号，每次可改一个或相邻的两个. 谁将最后剩下的负号改为正号，他就是胜家. 试为A设计出取胜的策略.

A只要遵循下面的策略就每战必胜：如果n是奇数，他

先将中间的一个负号改为正号，如果 n 是偶数，他先将中间的、两个相邻的负号改为正号．然后，在 B 将某一侧的一个或两个负号改为正号时，A 就将另一侧的、与 B 对称的一个或两个负号改为正号．

这种利用对称来取胜的游戏，可改为在围棋盘上放棋子：A、B 轮流将一枚或多枚棋子放在围棋盘上，谁放上最后一枚，就是胜家．

这时 A 应当先在中央——也就是围棋盘上的天元处放上第一枚棋子．

下面的例 6 要复杂得多．

[例 6]　A、B 两人轮流取火柴，规定：

1．A 不能在第一次将火柴全部取完．

2．每次所取火柴根数≤对手刚取的火柴根数的 2 倍，但≥1．

取最后一根的为胜．问火柴根数 n 是什么数时，先取的 A 可以必胜？取胜的策略是什么？

这个问题与第二节例 7 中所说的那串斐波那契数

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \cdots \qquad (1)$$

有密切的关系，结论是：

当且仅当 n 不是斐波那契数，A 为胜家．

为了证明这个结论，首先注意这样一个事实，如果 n 不是斐波那契数，那么 n 可以表示成若干个斐波那契数的和，并且每两个斐波那契数都不在 (1) 中相邻．例如，83 不是斐波那契数，它可以写成

$$83=55+28=55+21+7=55+21+5+2.$$

这里55、21、5、2都是斐波那契数，并且每两个在(1)中不是相邻的两项.

一般地，如果n不是斐波那契数，那么它一定在(1)中某两项之间，即有

$$f_k<n<f_{k+1},$$

其中f_k是(1)中的第k项.

由于斐波那契数满足递推关系

$$f_{k+1}=f_k+f_{k-1},$$

所以 $$n'=n-f_k<f_{k+1}-f_k=f_{k-1}.$$

如果n'本身是(1)中的数，那么n'与f_k不是(1)中相邻的项，

$$n=f_k+n'$$

就是所说的表示．如果n'不是斐波那契数，再用上面的方法进行下去，直到获得所需要的表示.

现在来证明上面所说的结论，先看看简单的情形.

$n=1(=f_1)$，A显然失败，因为他无法同时遵守规定1与2.

$n=2(=f_2)$，A也显然失败，因为他只能取一根，B可能取另一根.

这样逐步推下去，假定对于$<m$根的火柴，上述结论都成立．我们考虑m根火柴，这时有两种情形：

情形1 m不是斐波那契数.

我们以$m=83$为例，先将它表示成

$$83=55+21+5+2,$$

A 先取 2 根，这时(由于规定 2 的限制) B 无法取得 5 根(或更多根)。在这 5 根中，B 是先取的一方，而 5 是小于 $m=83$ 的斐波那契数，根据我们的假定(结论在根数 $n<83$ 时成立)，后取的 A 取到最后一根，即第 5 根(只要他采取正确的策略，不论 B 如何取，都是这样)，然后，由于规定 2 及

$$2\times5<21,$$

所以 B 不能把下一个 21 根取完，只要 A 采取正确的策略，他又可以取到这 21 根中的最后一根.

依此进行，A 必然取到 83 根火柴中的最后一根，即在这种情形，A 是胜家.

情形 2　m 是斐波那契数 f_k.

如果 A 第一次所取根数 $\geqslant f_{k-2}$，那么 B 可以将剩下的火柴全部取完，因为剩下的火柴

$$\leqslant f_k-f_{k-2}=f_{k-1}=f_{k-2}+f_{k-3}<2f_{k-2}.$$

如果 A 第一次所取根数 $<f_{k-2}$，那么剩下的火柴根数 $m'<f_k$，但

$$m'>f_k-f_{k-2}=f_{k-1}.$$

所以 m' 不是斐波那契数，因而有

$$m'=f_{k-1}+f_i+\cdots+f_j.$$

其中 $k-1>i>\cdots>j$，并且每两个至少相差 2.

f_j 肯定小于 A 第一次所取根数 l 的两倍，否则

$$l\leqslant\frac{1}{2}f_j=\frac{1}{2}(f_{j-1}+f_{j-2})<f_{j-1},$$

从而 $$f_k=m'+l<f_{k-1}+f_i+\cdots+f_j+f_{j-1}$$
$$\leqslant\cdots\leqslant f_{k-1}+f_i+f_{i-1}\leqslant f_{k-1}+f_{k-2}=f_k,$$
矛盾！(注意上式中有严格的不等号)

既然 $f_j<2l$，所以 B 第一次可取 f_j 根火柴，以后 B 按照情形1中所说策略，逐步进行，必将取得 f_i 根中的第 f_i 根与最后 f_{k-1} 根中的第 f_{k-1} 根，即在这种情形，B 是胜家.

我们已经知道在 $n=1, 2$ 时，所说的结论成立，根据上面对两种情形的讨论，可逐步推出结论对 $n=3, 4, 5, \cdots$ 都是成立的(熟悉数学归纳法的读者知道，我们实际上用了归纳法).

上面的讨论中，已经指明了取胜的策略，读者通过实践，可以娴熟地使用这种策略.

在博奕中，每一种状态或位置可以用一个点来表示，如果从状态 x 可以经过一步(移动一次棋子、取一次火柴、…)变为状态 y，我们画一条从 x 到 y 的有向线段，并称之为弧. 这样就得到一个"有向图". 通过对这有向图的研究，可以发现取胜的策略.

[例7] 对于根数分别为2、3的两堆火柴，作出匿门游戏的有向图.

这时有9种不同的状态，即

(2, 3), (1, 3), (0, 3), (2, 2), (1, 2), (0, 2), (1, 1), (0, 1), (0, 0)

其中 (i, j) 表示一堆火柴为 i 根，另一堆为 j 根，我们认为 (i, j) 与 (j, i) 是一样的.

图 52 是这游戏的有向图.

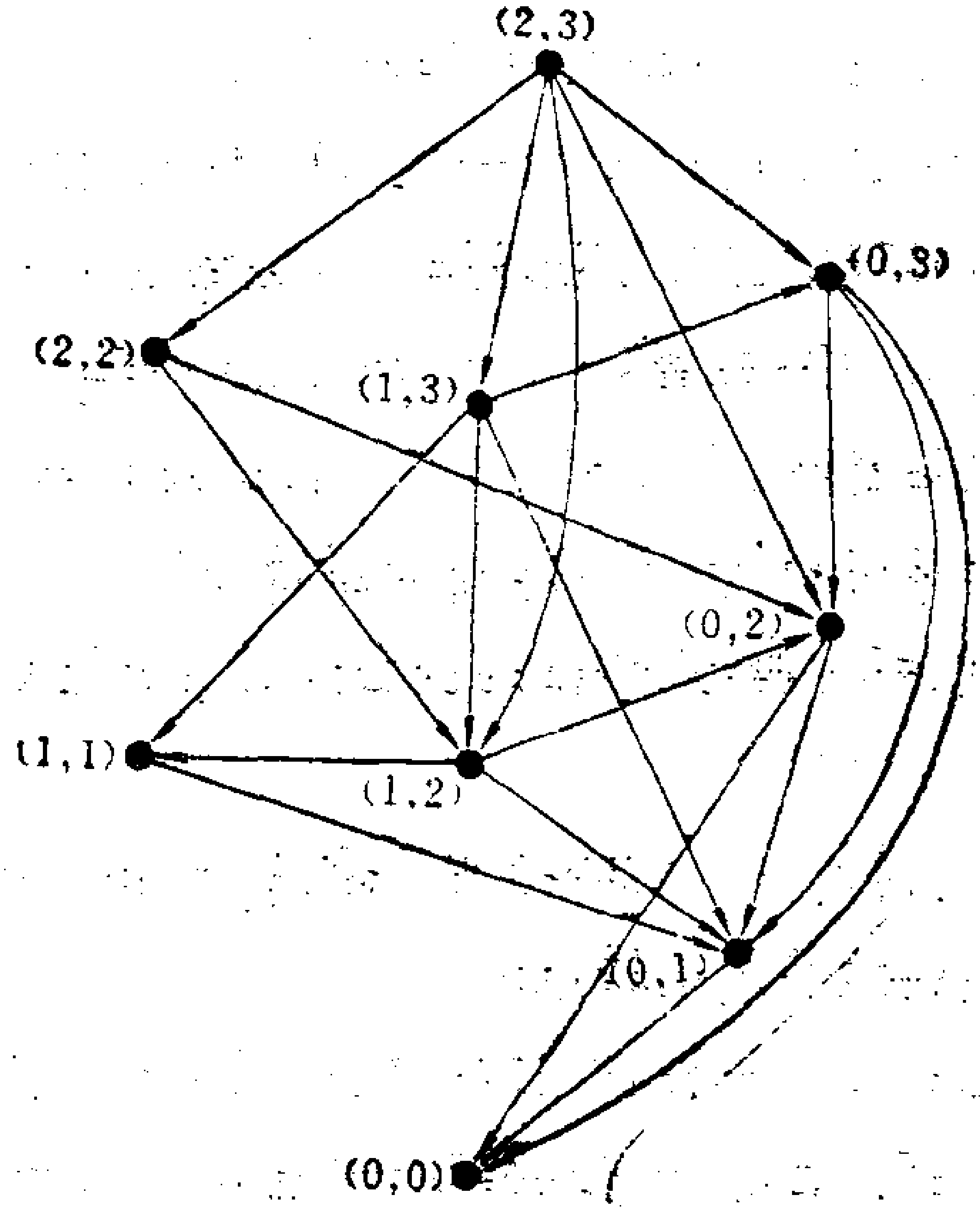


图 52

在一个有向图中,设 X 是某些点的集合,如果集 X 中每两个点之间没有弧相连,那么 X 称为这图的内固集.

例如图 52 中,

$$\{(2,2),(1,1),(0,0)\}$$

就是一个内固集.

类似地,如果不在 X 中的每一个点都有一条自这点发出引向 X(以 X 中的点为终点)的弧,那么 X 称为这图的外固集或吸收集.

例如图 52 中,

$$\{(2, 2), (1, 1), (0, 0)\}$$

也是一个外固集.

如果 X 既是内固集，又是外固集，那么 X 称为核.

上面的集合 $\{(2, 2), (1, 1), (0, 0)\}$ 就是图 52 的核.

第五节所说的皇后图是无向图：点 u 与 v 之间的连线是没有方向的．它也可以看成有向图，只要把 u、v 之间的连线当成两条弧，一条由 u 到 v，另一条由 v 到 u．这好象城市的交通图，标有方向的弧是单行道，不标方向的线则是双行道.

读者不难看出这里内固集、外固集的定义与第五节是一致的.

核是一个重要的概念，它的重要性可以从例 8 中看出.

[例 8]　如果在双人博奕的有向图中，有核存在，那么其中一方有必胜的策略(约定走最后一步为胜)，至少可以保证他不致失败.

事实上，假定初始状态不在核中，由于核是外固集，所以先走者 A 可以从初始状态一步就走到核中．由于核是内固集，所以 A 在核中时，下一步，B 一定不在核中．而 B 不在核中时，由于核是外固集，A 又可以走到核中，这样 A 始终在核中，B 始终不在核中．B 不在核中，所以他走的每一步都不会是使 A 再也无路可走的最后一步．因此，A 是立于不败之地的．类似地，假如初始状态在核中，那么 B 一定可以不败.

在图 52 中，A 一开始就走到核

$$X=\{(2,2),(1,1),(0,0)\}$$

的(2, 2)，然后不论 B 怎么走，A 总可走到 X 中的(1, 1)或(0, 0)，最后 A 可走到(0, 0)而取胜．这与例 8 中的分析是一致的．

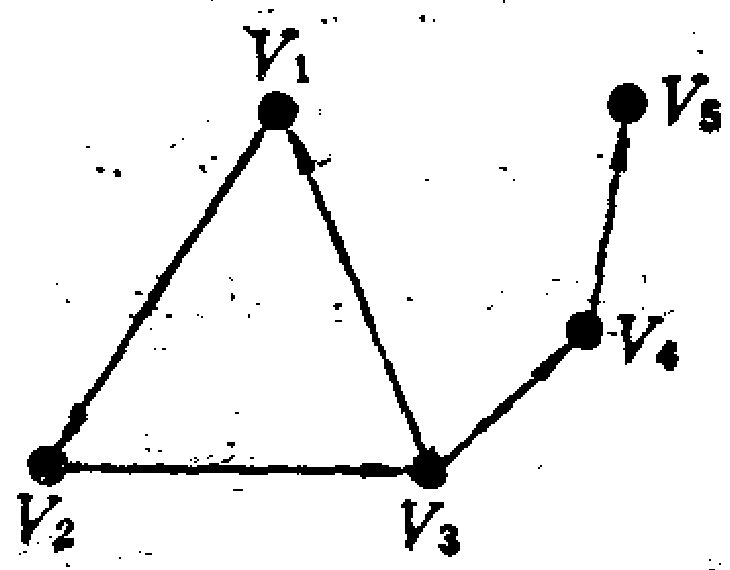


图 53

并非每个有向图都有核存在，例如图 53 就没有核．

图 53 无核，是因为它有一个回路，即可以从一个点出发，沿弧前进(按所标的方向)，经过若干个点(不一定是全部的点)，又回到出发点(例如从 v_1 出发，经过 v_2、v_3 再回到 v_1)．

［例 9］ 一个无回路的有向图，如果只有有限多个点，那么它一定有唯一的核．

这个核可以用下面的方法确定：

首先找出那些"无路可走"的点，记这些点的集合为 X_0(图 54)．然后找出那些可以一步走到 X_0 中的点，记这些点的集合为 X_1．将 X_0 与 X_1 中的点以及以它们为端点(始点或终点)的弧抹去，然后再找无路可走的点，记它们所成的集合为 X_2，那些可以一步走到 X_2 中的点组成集合

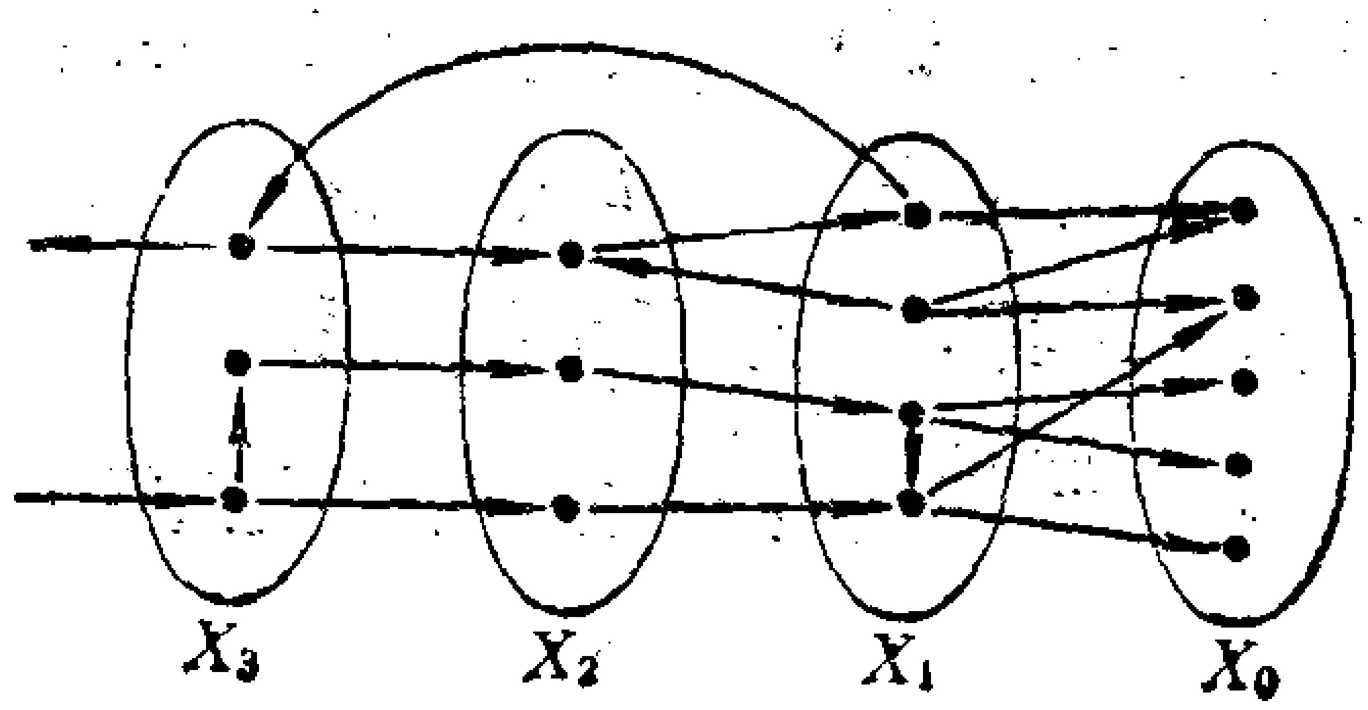


图 54

X_3. 将 X_2、X_3 中的点及有关的弧抹去，再继续找 X_4、X_5、…，那么

$$X = X_0 \cup X_2 \cup X_4 \cup \cdots$$

就是核，理由如下：

首先，X 是内固集．因为根据定义，X_{2k} 中的点 x 所发出的弧只可能指向 X_{2k-1}、X_{2k-3}、…中的点，如果有 x 指向 X_{2k-2}(或 X_{2k-4}、…)的弧，那么 $x \in X_{2k-1}(X_{2k-3}, \cdots)$，而 $\overline{\in} X_{2k}$. 所以 $x \in X_{2k}$ 发出的弧只可能指向 X_{2k-1}、X_{2k-3}、…，即 X 中的每两点之间没有弧相连．

另一方面，X 是外固集．因为任一 $y \overline{\in} X$，必在某一 X_{2k+1} 中，它有一条弧以 X_{2k} 中一点 x 为终点．

还需要证明 X_0 不是空集(从而 X 不是空集)．这可设想为乘汽车从图中任一点出发旅行，由于没有回路，旅行者不能回到已经走过的地方，如果他可以无限地旅行下去，那么图中必须有无限多个点．既然图中点数有限，他一定在某一点停止下来，无路可走，即 X_0 不是空集．

不难看出，上面所找的核是唯一的．

例 9 表明在很多双人博奕中，总有一方处于有利的地位．例如规定走出最后一步的算胜，那么在无回路的时候(图通常是有限的)，只要 A 每步走在核中，由例 8 可知 A 立于不败之地．又由于点数有限，博奕总要结束，这最后一步一定是 A 走的，所以 A 总是胜家．

不过，在复杂的博奕中，即使有核，也无法把它找出来．例如围棋，变化极多，"自古以来无同局"，至少在目前，是无

法找出必胜的走法的．这也正是这类博奕的魅力所在．

有回路的图，可以导致和局．例如在中国象棋中，长将或长捉就形成回路：将(捉)使状态 x 变为 y，再将(再捉)又使状态 y 变为 x，这是从 x 到 y，再从 y 回到 x 的回路(图55)．不过，在中国象棋中规定长将(捉)算负(在国际象棋中算和)．一将一停(一捉一停)也是回路(图 56)：从状态 x 变到状态 y，y 变为状态 z，z 又变回 x．在中国象棋中，这种情况规定为和局．围棋中的双劫与三劫也是和局．双劫对应于有 4 个点(状态)的回路，三劫对应于有 6 个点(状态)的回路(图 57 与图 58)．三劫是很少见的．

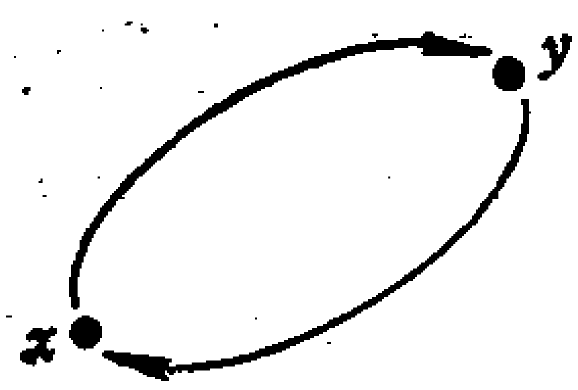


图 55

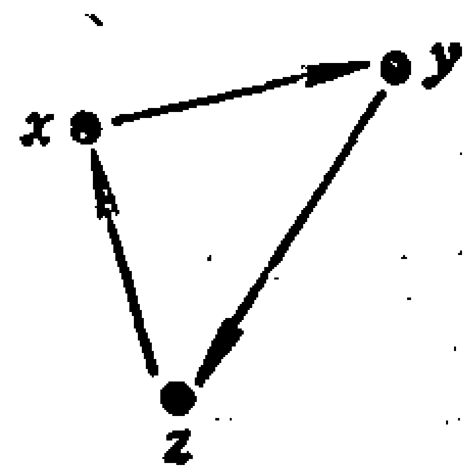


图 56

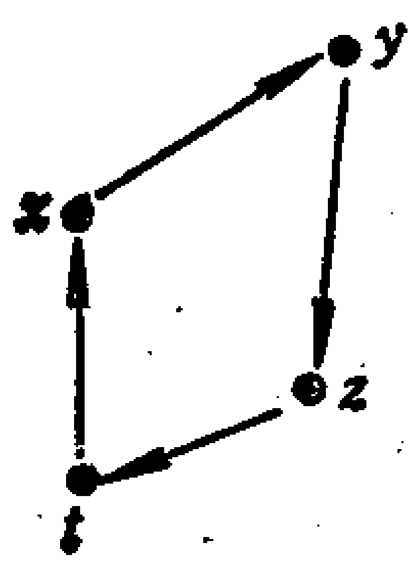


图 57

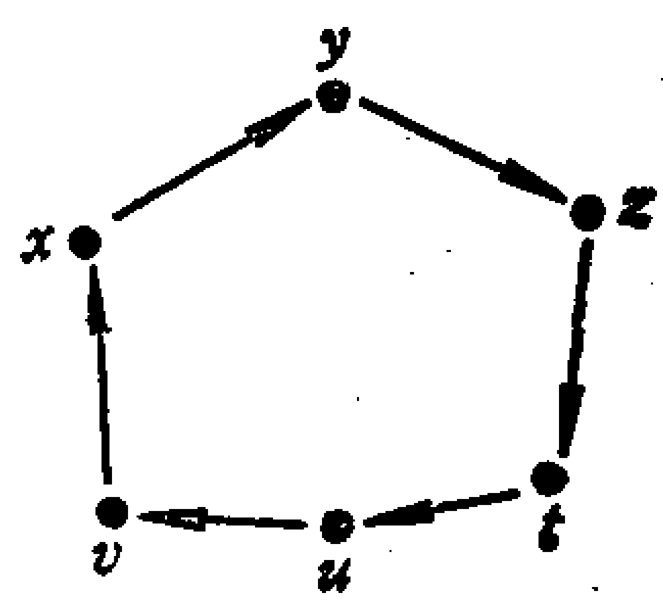


图 58

例 9 还给出了求核的方法．在图 52 中，我们不难用这方法定出 X_0、X_1、…、X_5，如果点 $x\in X_k$，我们就在这点旁边标上 k，这样就得到图 59，其中标有偶数的那些点就

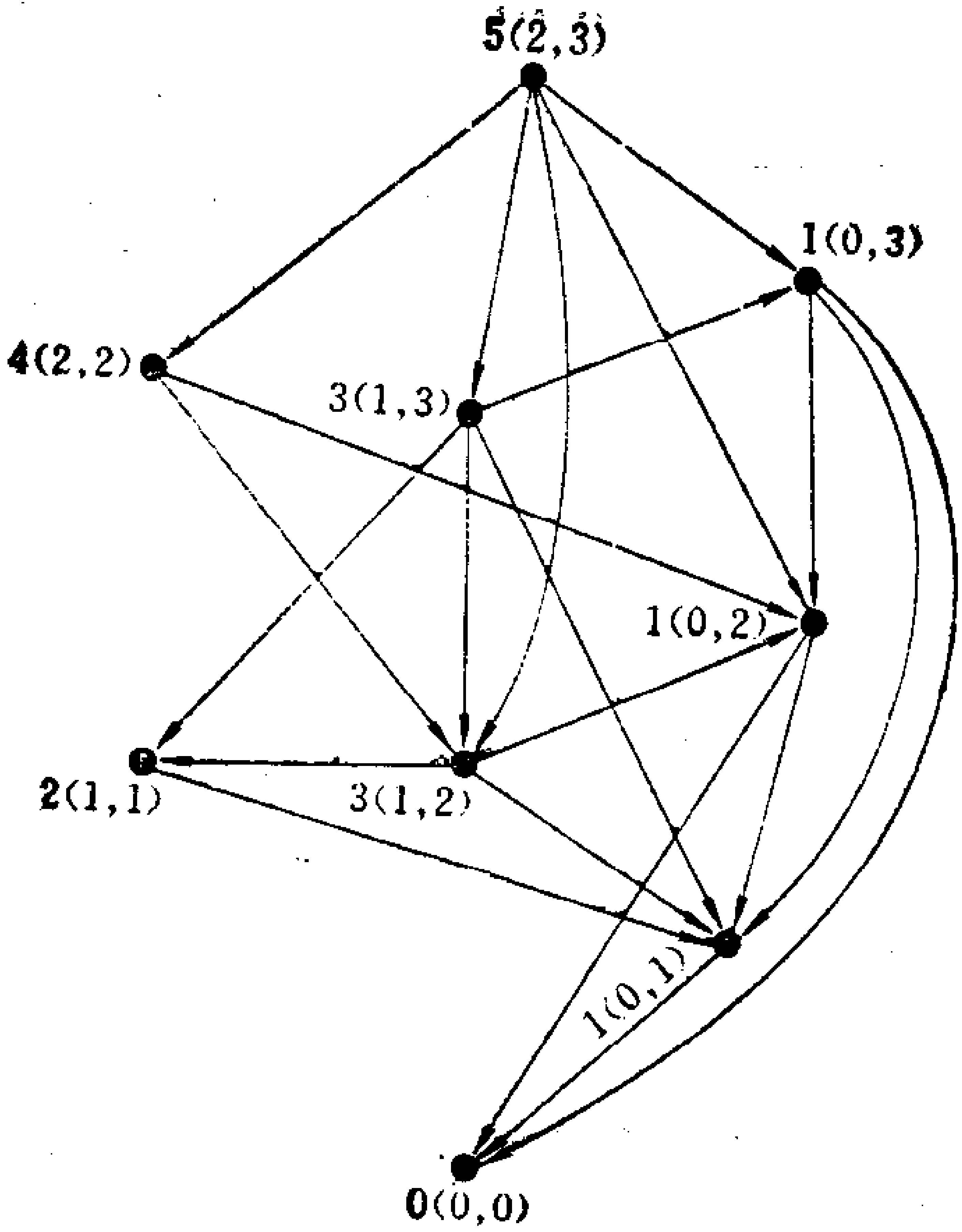


图 59

组成核.

这一方法还可以用于更复杂的博奕，下面我们举一个例子.

[例 10] 考虑第一象限内的整点，我们放一枚皇后在整点(m, n)上. A、B 轮流将皇后沿直线或斜线(准确些说沿着与 x 轴或与 y 轴或与直线 $y=x$ 平行的直线)向左或向下移动任意多格(但不进入其它象限)，谁先将棋子移到原点，即为胜家. 问(m, n)是什么样的点时，A 一定能取胜?

请注意图 60 还不是上边所说的有向图. 第一，它没有标出弧的方向，第二，更重要的是图中少了许多弧，如从整

点(4, 2)到整点(1, 2)有弧，从整点(5, 4)到整点(2, 1)有弧等等. 不过，我们为了不使线条过多，仍然采用图 60，默认其中所需添的弧及箭头均已画出.

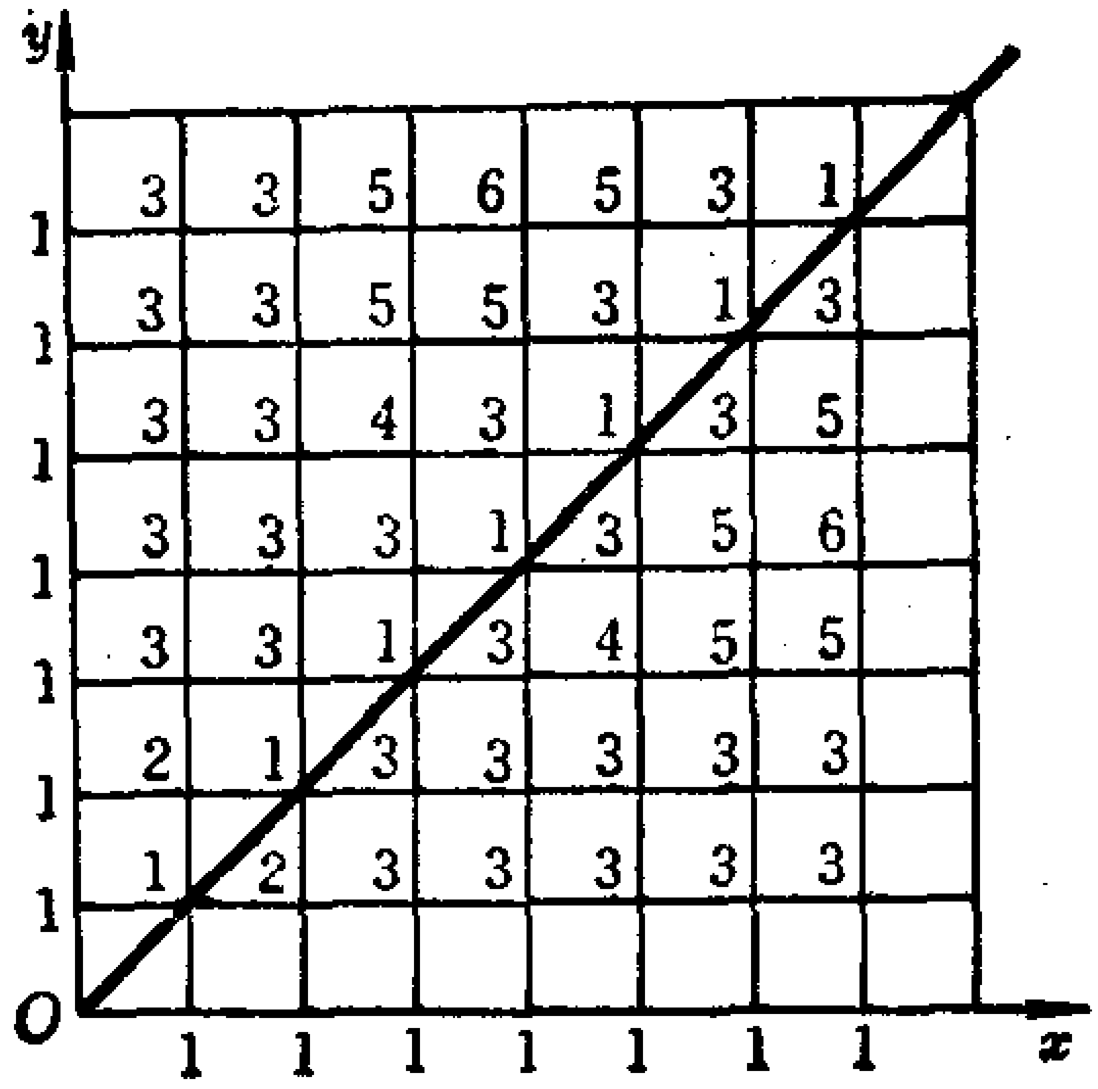


图 60

现在，在这图上标上数，即标明每一个整点是在哪一个 X_k 中.

显然，原点 $(0, 0)\in X_0$，应当标 0.

x 轴、y 轴及直线 $y=x$ 上的点都应当标 1.

整点(1, 2)及(2, 1)应当标 2.

……

在直线 $y=x$ 下方标偶数的点是

$$(2, 1), (5, 3), (7, 4), (10, 6), (13, 8), (15, 9), (18, 11), (20, 12), (23, 14), (26, 16), \cdots\cdots \tag{1}$$

与这些点关于直线 $y=x$ 对称的点

$$(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), (11, 18), (12, 20), (14, 23), (16, 26), \cdots\cdots \tag{1'}$$

也是标偶数的点.

所有标偶数的点组成核，当 (m, n) 不在核中时，A 一定取胜，取胜的策略就是每一步都走在核中(例 8).

可以求出(1)中的第 n 个点 (x_n, y_n) 的计算公式

$$x_n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right],\ y_n=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right].$$

其中 $[x]$ 表 x 的整数部分.

(1) 中点的坐标 x_n, y_n 有很多有趣的性质. 例如 $x_n=y_n+n$. x_n 与 y_n 的全体恰好是全体自然数, 每一个自然数都作为(1)中点的横坐标或纵坐标出现, 并且只出现一次. 在(1)中, 点

$$(2, 1),\ (5, 3),\ (13, 8),\ (34, 21),\ \cdots\cdots$$

的横坐标与纵坐标都是斐波那契数, 并且把它们依照大小次序排起来时, 就是全体斐波那契数. 这些性质我们不一一去推导了.

虽然双人博奕往往对某一方有利, 但人们可以用各种限制来取消这种优势, 例如修改比赛规则(围棋中改变贴目的多寡等等), 还可以采用随机的方法, 例如掷骰子来确定谁走下一步等等. 这类"随机博奕"究竟对谁有利往往与概率(机会)有关.

[例 11] A、B 二人玩下面的游戏: 从集合

$$E=\{1, 2, \cdots, 1985, 1986\}$$

中随机地取一个 5 元子集, 各种选取的概率(机会)相等. 根据所取出的数的和是偶数或奇数, 定出胜者为 A 或 B. 证明这游戏是公平的, 即各人获胜的概率(机会)相等.

我们将 E 的五元子集分为两类. 第一类 G_0 中, 每个五元子集的五个数的和是偶数. 第二类 G_1 中, 每个五元

子集的五个数的和是奇数. 要证明 G_0 中的五元子集与 G_1 中的五元子集个数相等(从而 A、B 获胜的机会相等).

将 E 中元素组成 993 组:

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \cdots, \{1985, 1986\}.$$

每组中的一个元素称为另一个元素的"伙伴".

G_0 中的一个五元子集, 例如

$$X_0 = \{3, 4, 7, 10, 12\},$$

也可以按照上述伙伴关系写成

$$\{3, 4\} \cup \{7\} \cup \{10\} \cup \{12\}.$$

由于 5 是奇数, X_0 中至少有一个元素没有伙伴(如 7、10、12 均没有伙伴), 在没有伙伴的元中有一个最小的, 这里是 7. 将它换为它的伙伴 8, 这时 5 个元素的和由偶数变为奇数, X_0 也就变为 G_1 中的一个 5 元集合 X_1

$$X_1 = \{3, 4\} \cup \{8\} \cup \{10\} \cup \{12\}.$$

用这个方法可以看出 G_0 中每个 5 元子集对应于一个 G_1 中的 5 元子集, 并且 G_1 中的每个 5 元子集也恰与 G_0 中的一个 5 元子集相对应, 所以 G_0 与 G_1 中的 5 元子集的个数相等, 游戏是公平的.

例 11 中的 5 改为任何一个(小于 1986 的)奇数 $2k+1$, 博奕仍然是公平的(推理完全相同).

如果将 5 改为一个偶数 $2k$ ($k \leqslant 993$), 博奕就不是公平的了. 因为有一些 $2k$ 个元素的子集恰好由 k 对伙伴组成,

它们没有对应的（$2k$ 个元素的）子集．如果 k 是偶数，这种集在 G_0 中（因为每一对伙伴的和是奇数，k 对伙伴的和是偶数），博奕对 A 有利．如果 k 是奇数，这种集在 G_1 中，博奕对 B 有利．

八　棋盘上的问题

本节的问题是前几节内容的补充和延伸，也可以作为习题，读者最好先自己想一想，然后看解答。

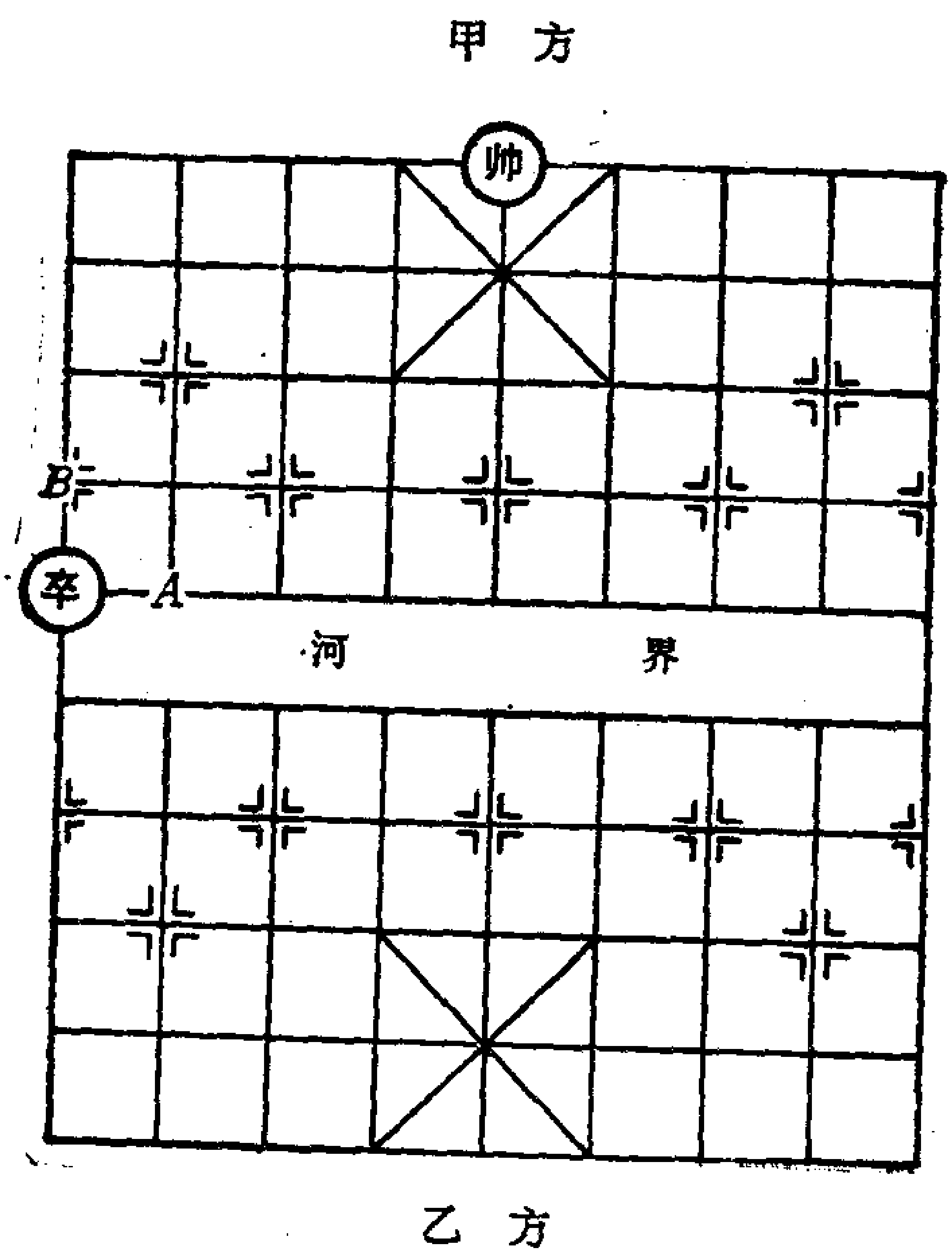


图 61

1. 如图61，在中国象棋盘上，乙方一只边卒已经过河，它可以向前移一步到 B，也可以横行一步到 A. 要使这个小卒沿最短路线走到对方帅所在的位置(假定前进的路上没有任何阻难)，有多少种不同的走法?

为了解决这个问题，可以从简单的情形开始，逐步进行. 图62中，小卒沿最短路线走到 A、B、C、D、E、F、G、H 的走法都只有一种，走到 K，则有两种：先走到 A 再走到 K，或者先走到 B 再走到 K. 走到 M，则有 $1+2=3$ 种：先走到 C 再到 M 有一种，先走到 K 再走到 M 有2种(因为走到 K 有2种走法). 这样继续下去，可以逐步得出小卒走到对方帅的各种走法. 把走法的种数标在各点上，每个数等于它前面的两个数(图63中左方一个，下方一个)的和，走到帅的位置有70种不同的走法.

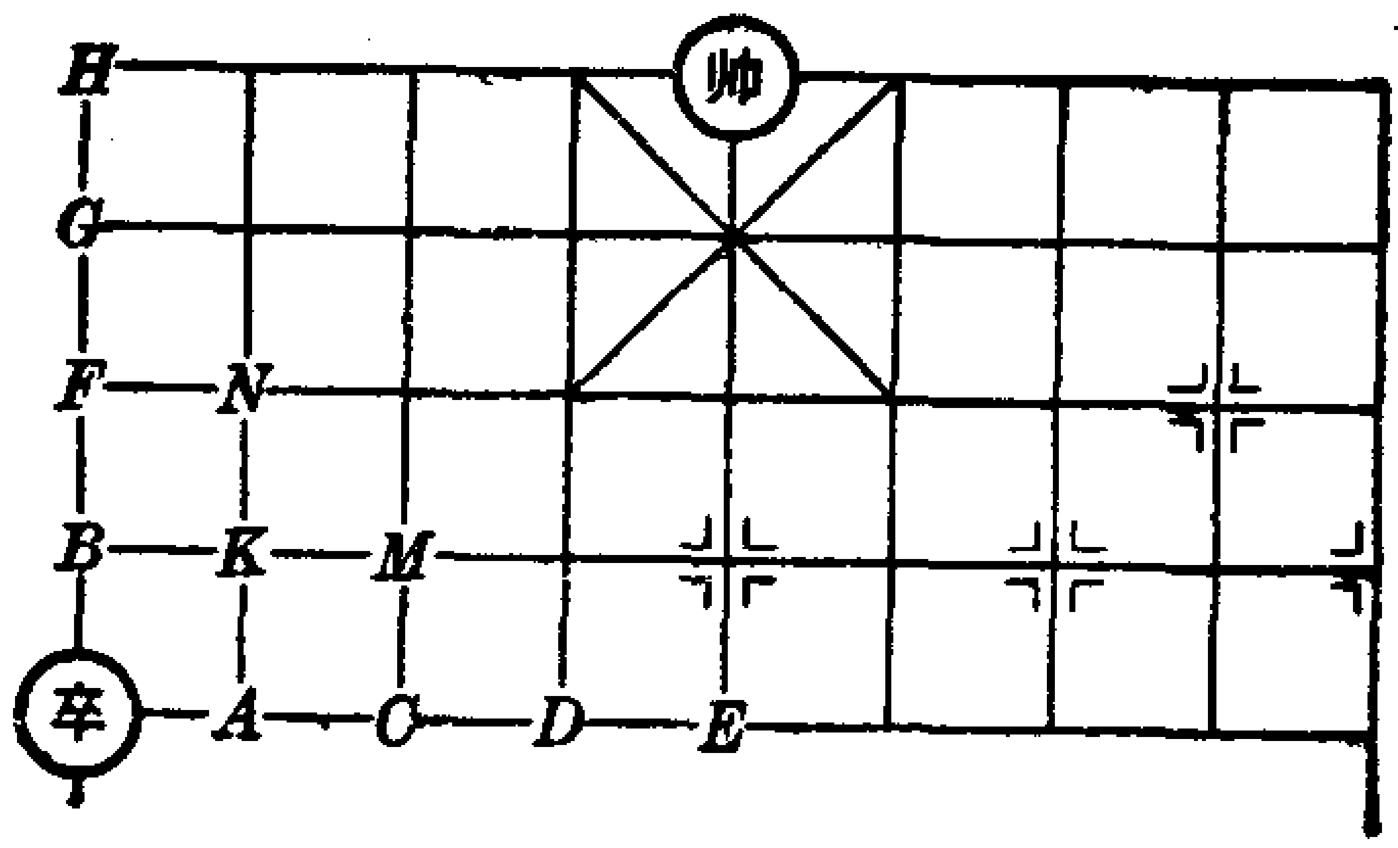


图 62

2. 图64中，帅方有一只象，可以限制小卒的行动，使它不能走到 A、B、C、D 四点，问这时小卒沿最短路线走到帅的位置有多少种不同的走法?

用问题1的解法可以逐步写出小卒走到各点的走法有

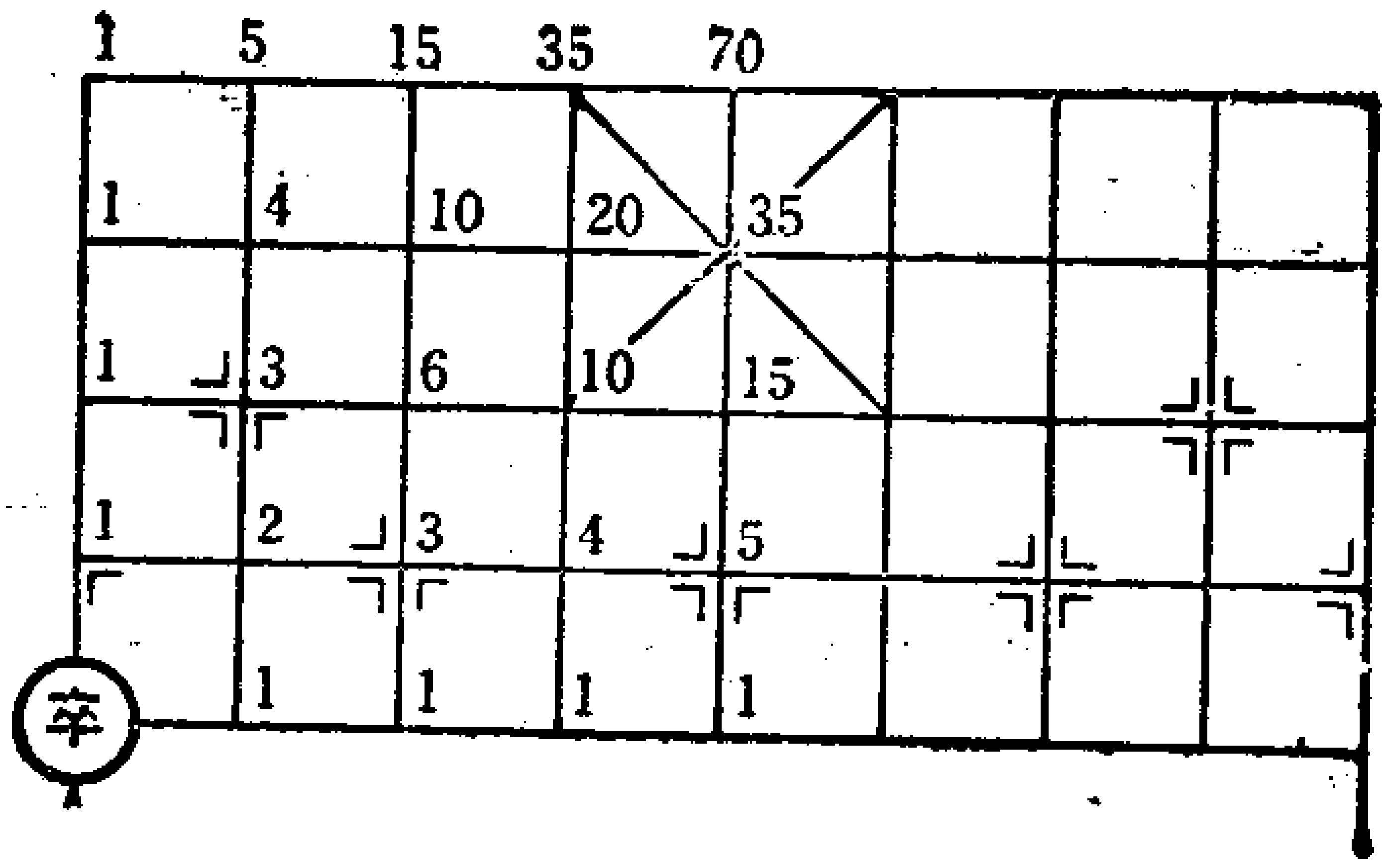

1
5
15
35
70
1
4
10
20
35
1
3
6
10
15
1
2
3
4
5
1
1
1
1
卒

图 63

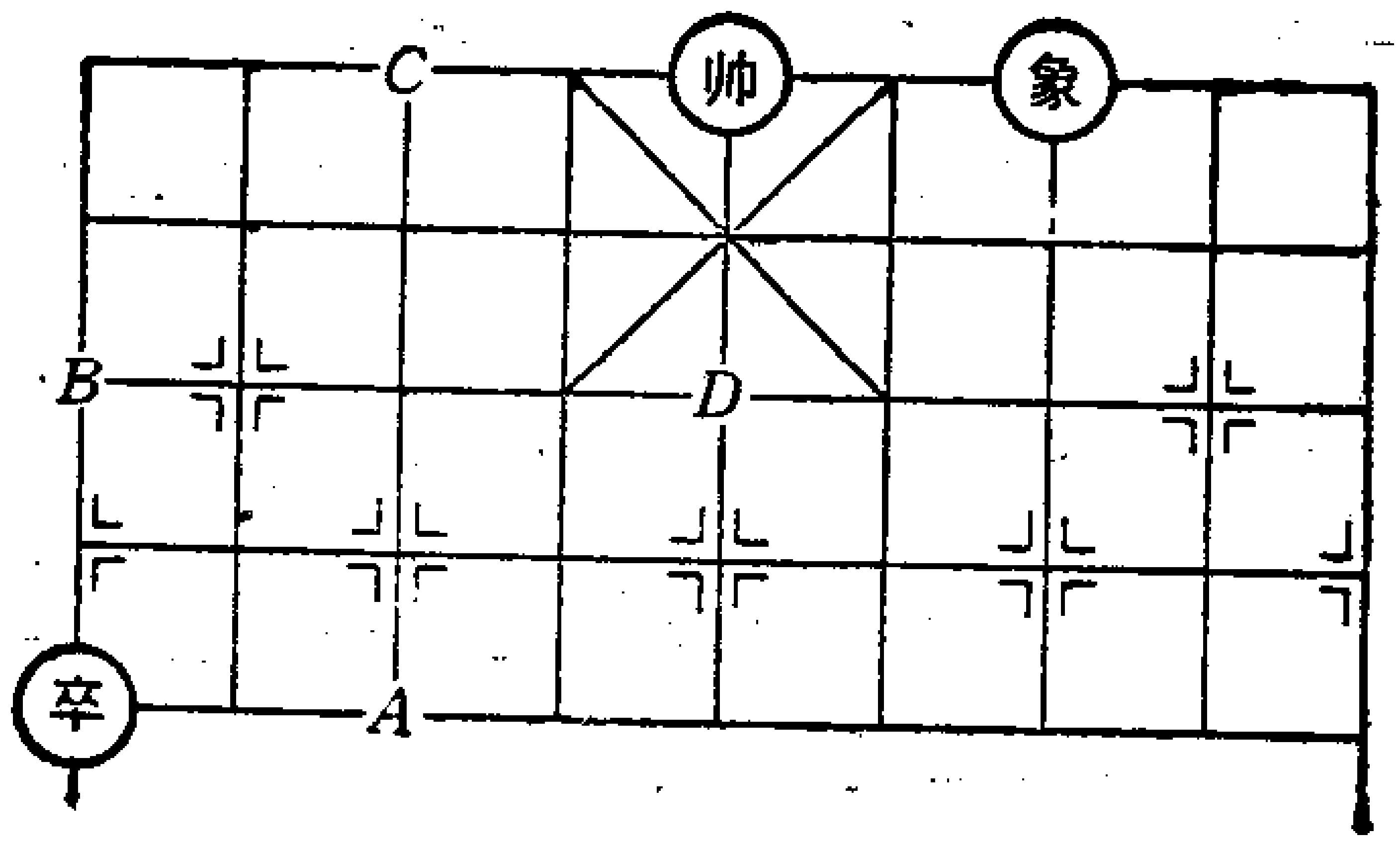

C
帅
象
B
D
卒
A

图 64

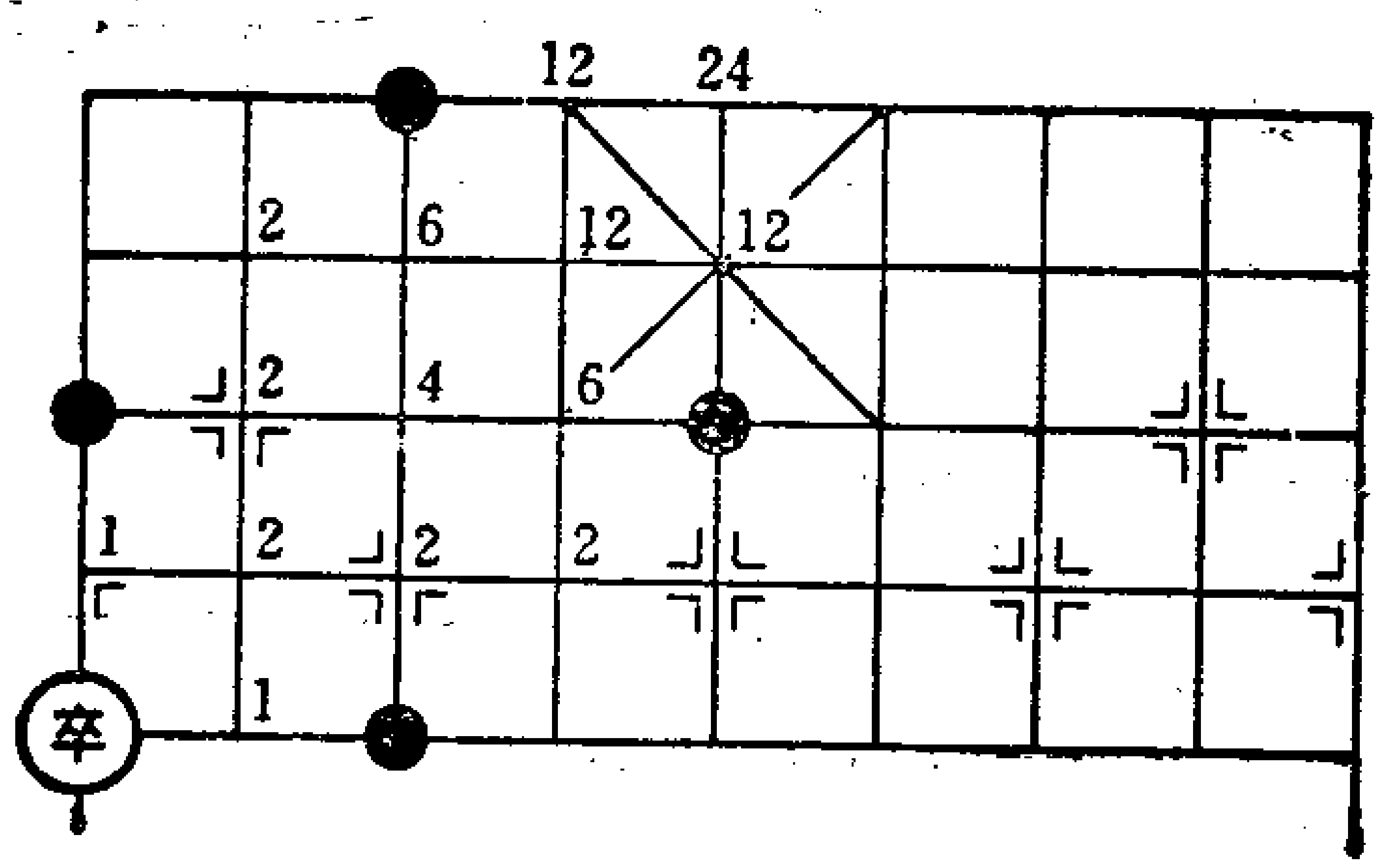

12
24
2
6
12
12
2
4
6
1
2
2
2
1
卒

图 65

多少种，如图 65 所示。

3. 设想有一只小卒在 19×19 的围棋盘的左下角，向上或向右一步一步地移动，问它沿最短路线走到右上角有多少种不同的走法？

$$答案是\ \frac{36\times35\times34\times33\times\cdots\times19}{1\times2\times3\times4\times\cdots\times18}.$$

4. 在无限的棋盘上，小卒从原点出发，按通常的走法向整点 (m, n) 前进，问沿最短路线走到目的地有多少种不同的走法？

每一条最短路线可以记为

$$||-|||--\cdots||--|$$

的形式。其中有 m 条"–"表示 m 次向右，n 条"|"表示 n 次向上。这表明最短路线的条数恰好是从 $m+n$ 个位置中选 m 个放"–"(其余 n 个放"|")的种数，所以学过组合的读者立即知道，答案是 C_{m+n}^{m}。问题 3 是 $m=n=18$ 的特例。

5. 试从图 66 中的 A 出发，沿竖线或横线前进，经过每个×恰好一次，不经过任何一个○，最后回到 A 点。

答案是图 67。

6. 试从图 68 中 A 点出发，沿竖线或横线前进，最后回到 A 点，这条路线最短，并且每个画×的方格在这路线的内部，每个画○的方格在这路线的外部。

答案是图 69，其中路线的总长为 64。

7. 用 h 个厂字形(图 70)恰好覆盖一个 $m\times n$ 的棋盘，证明 $8|m\cdot n$ ($a|b$ 表示 a 整除 b)。

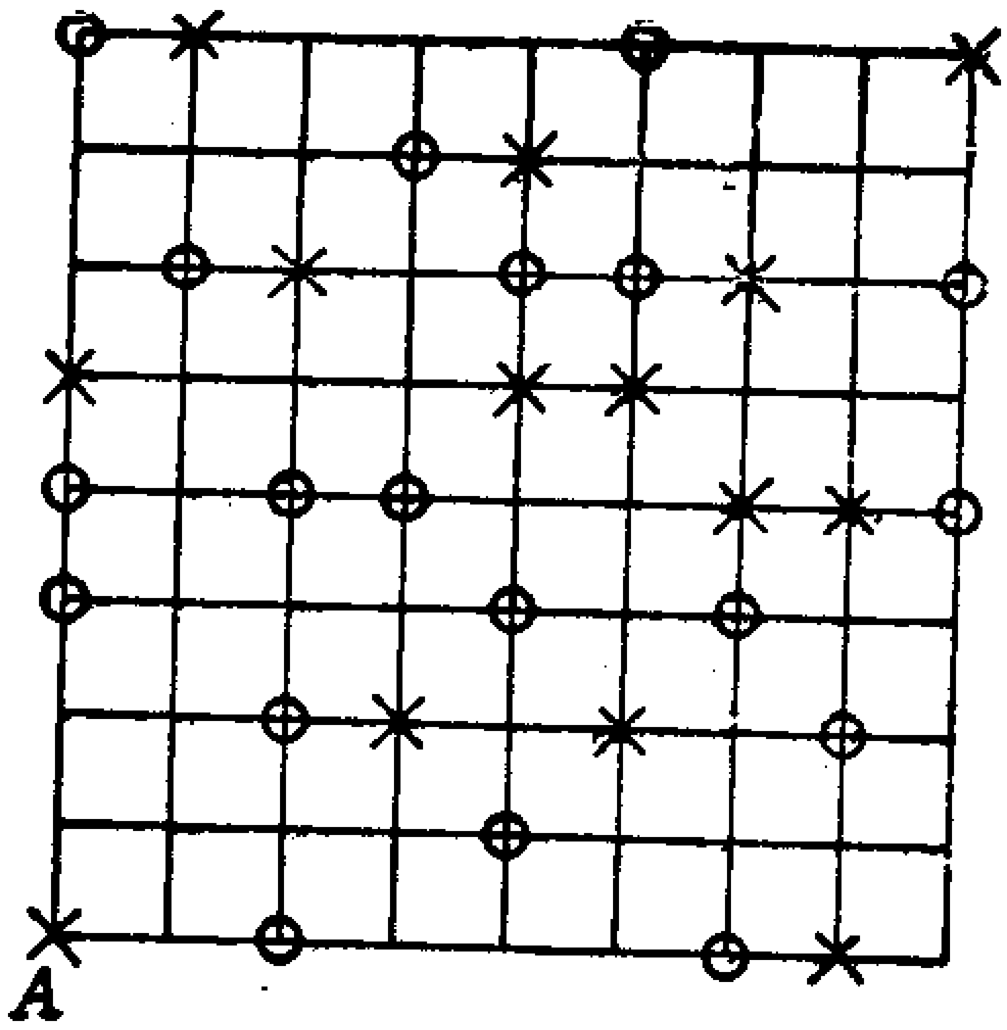


图 66

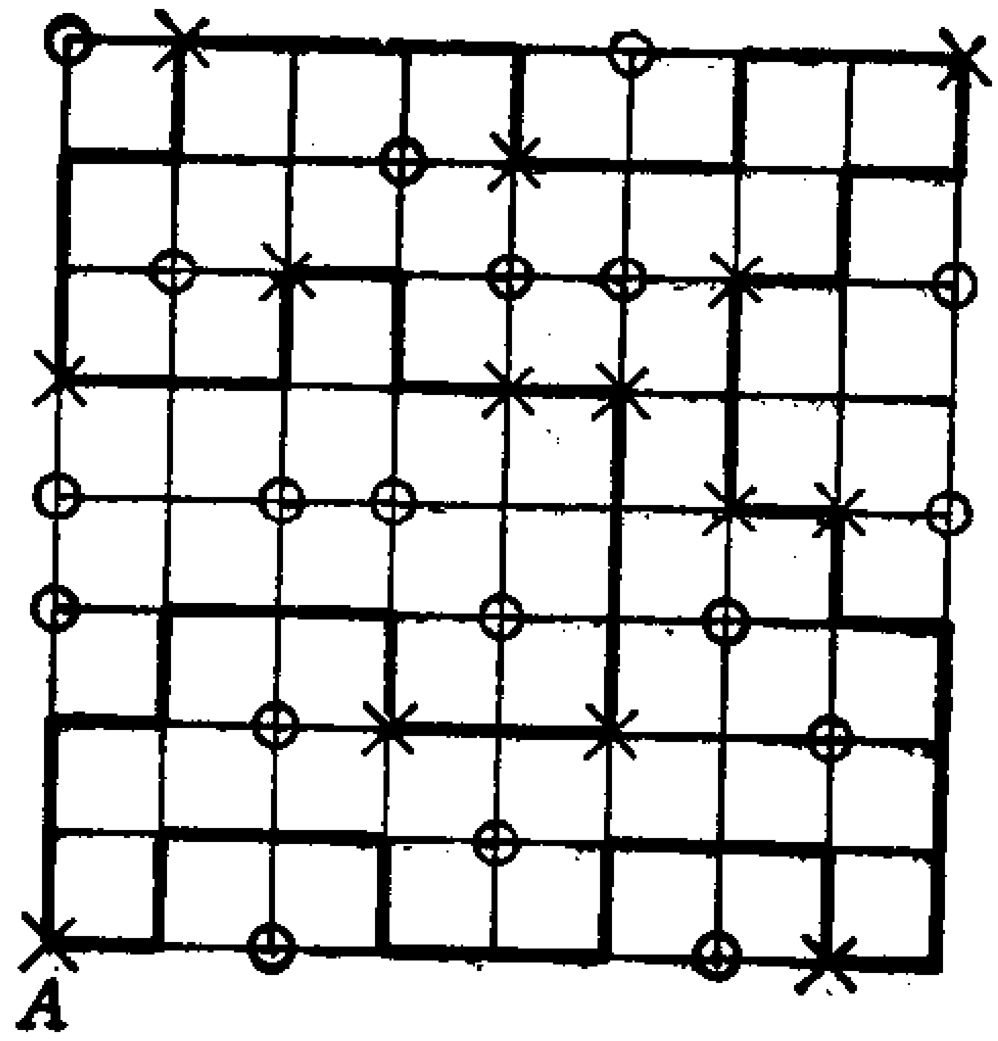


图 67

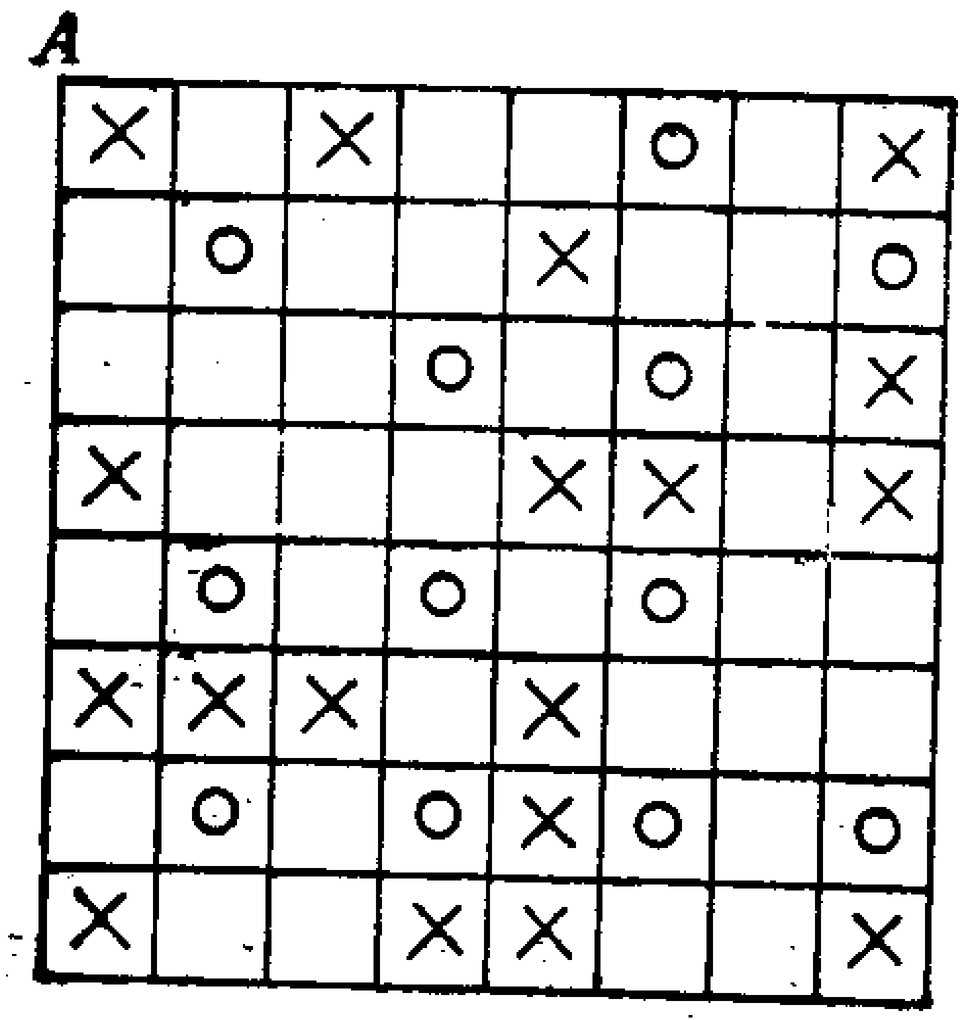


图 68

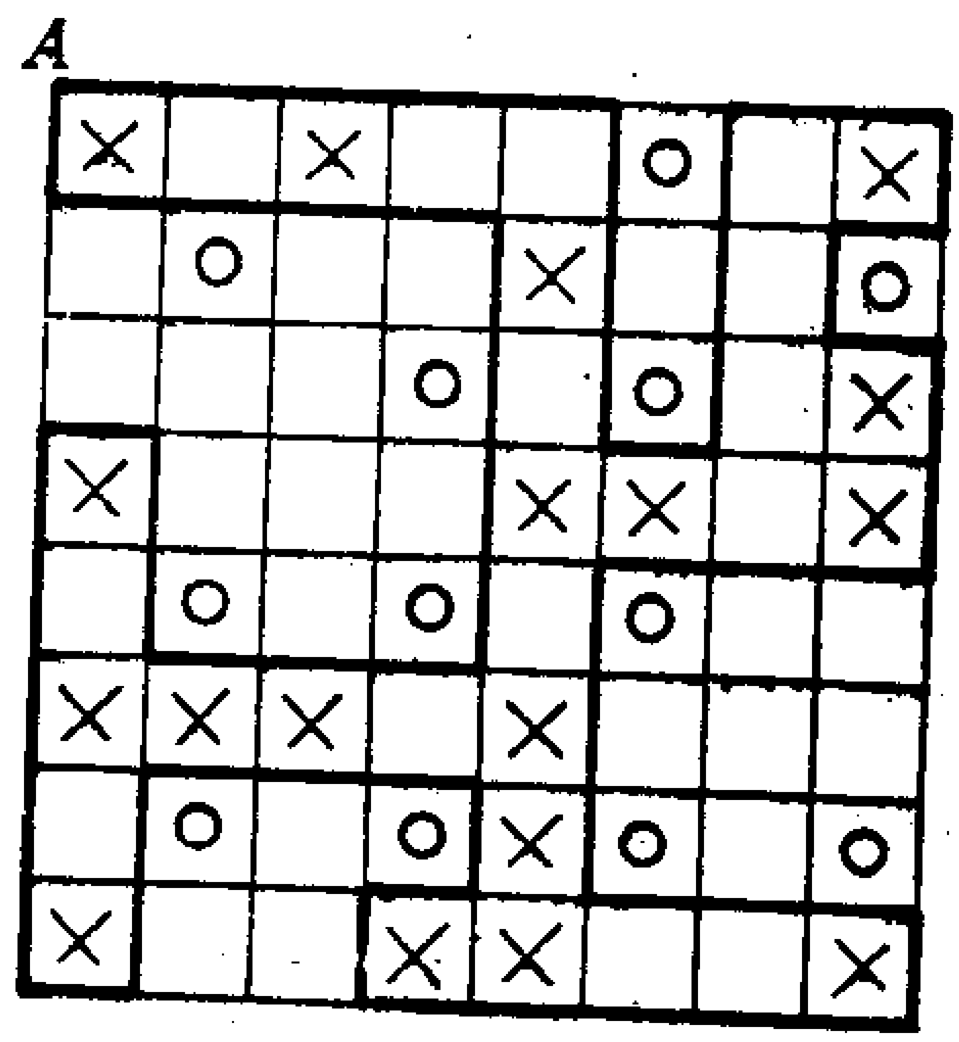


图 69

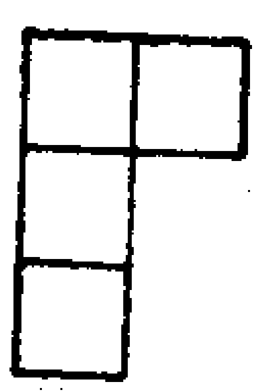


图 70

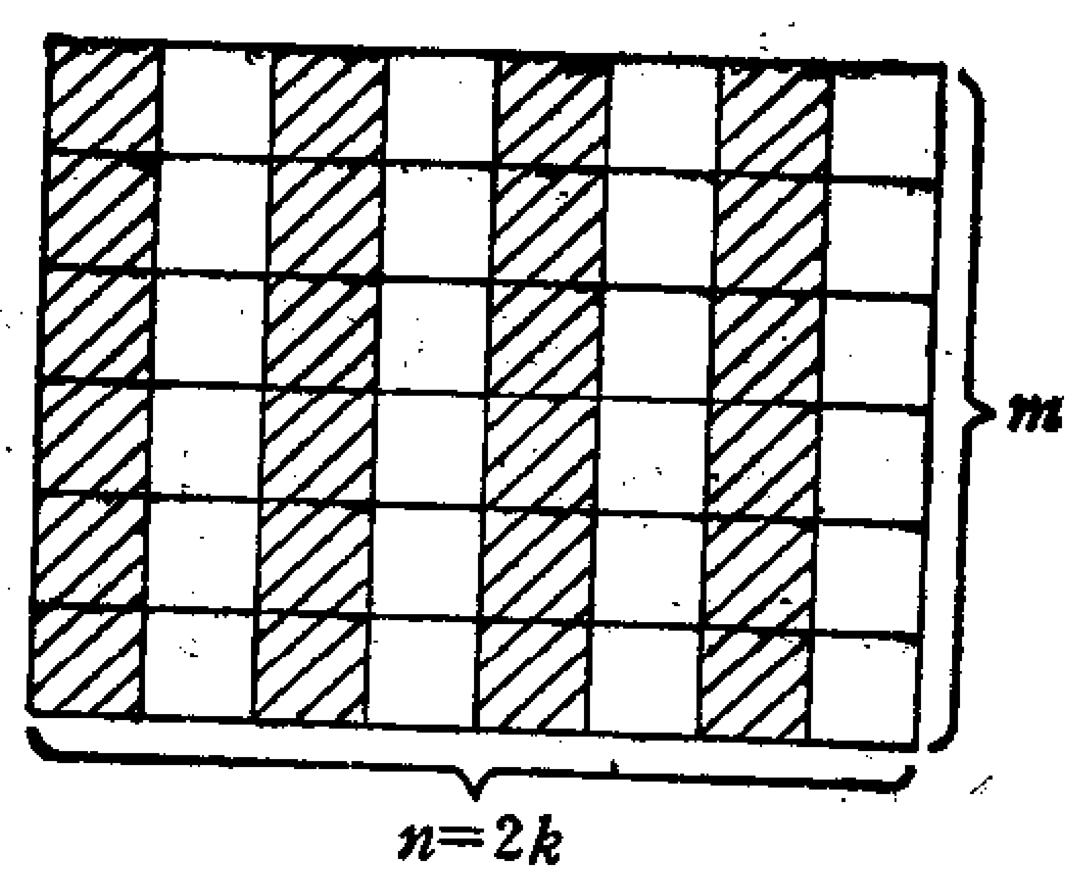


图 71

由于每个 厂 字形由 4 个方格组成，所以有 $mn=4h$，从而 m、n 中至少有一个是偶数．不妨设 $n=2k$．

将 $m\times n$ 的棋盘的第一、三、五、……列的方格涂上红色，其余的方格涂上蓝色．这样红色方格与蓝色方格的个数相等，都等于 $m\times k=\frac{mn}{2}$，这是一个偶数(因为 $4|mn$)．

每个 厂 字形覆盖奇数个红格（1 个红格或 3 个红格），红格的总数是偶数，所以 厂 形的个数 h 必须是偶数，从而 $mn=4h$ 被 8 整除．

8．用若干个图 72 恰好覆盖一个 $m\times n$ 的棋盘，证明 $12|mn$．

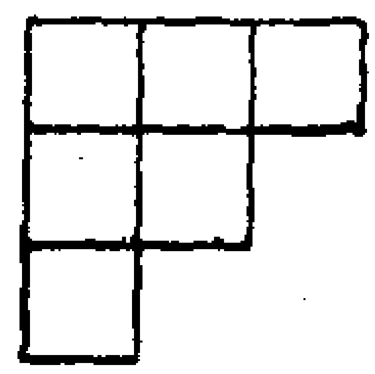


图 72

解法与上题类似．首先 $6|mn$，可以设 n 是偶数，采用图 71 那样的涂色．设有 x 个图 72 盖住 4 个红格 2 个蓝格，y 个图 72 盖住 4 个蓝格 2 个红格．则由于红格与蓝格个数相等，所以 $4x+2y=4y+2x$，从而 $x=y$．图 72 的个数为偶数 $2x$，因而 $12|mn$．

9．不能用 1×4 的矩形覆盖 10×10 的棋盘．

这是第二节例 6 的特殊情形．

10．用 27 个 厂 形(图 73)恰好覆盖图 74 中 9×9 的棋盘．证明 厂 形中的 $\times$ 号盖住 11 个 A，2 个 D 和 B、C 各 7 个．

设 厂 形中 $\times$ 号盖住 A、B、C、D 的分别为 x、y、z、t 个．则

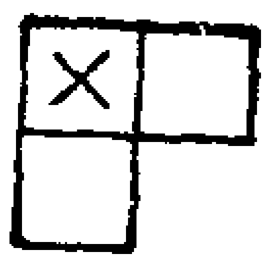


图 73

A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A

图 74

$$x+y+z+t=27. \tag{1}$$

并且由于图 74 中，A、B、C、D 的个数分别为 25、20、20、16，所以

$$\begin{aligned} x+y+z&=25, \\ y+x+t&=20, \\ z+x+t&=20, \\ y+z+t&=16. \end{aligned} \tag{2}$$

用(1)分别减去(2)中的等式，便得

$$x=11,\ y=z=7,\ t=2.$$

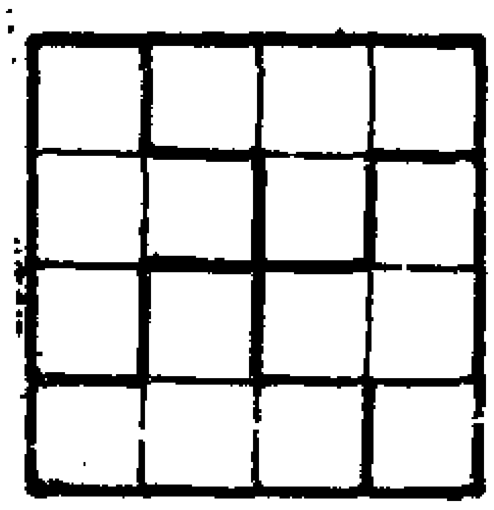


图 75

11. 能用若干个 T 字形(见第二节例 3)恰好覆盖 $n\times n$ 的棋盘的充分必要条件是 $4|n$.

充分性：如图 75，四个 T 字形能组成一个 4×4 的正方形，因此在 $4|n$ 时，用

T 字形 $\left(\frac{n}{4}\right)^2$ 个恰好覆盖 $n\times n$ 的棋盘.

必要性：$4|n^2$ 是显然的，从而 n 是偶数．采用自然涂色，红格与蓝格各有 $\frac{n^2}{2}$ 个，这是一个偶数．每个 T 字形盖住奇数个红格，因而 T 字形的总数必须是偶数，从而 $8|n^2$, $4|n$.

12. 用 15 个 ㄏ 形（见第 84 页图 70）与 1 个田字形能覆盖 8×8 的棋盘吗？

答案是不能．将第一、三、五、七列涂红色，其余列涂蓝色即可证明．

13. 用 T 字形能恰好覆盖 8×8 的棋盘吗？能恰好覆盖 10×10 的棋盘吗？

前一个答案是肯定的，不难用“构造法”证明．

后一个答案是否定的．采用自然涂色，红、蓝格各 50 个．如果用 T 字形能恰好覆盖棋盘，设其中有 x 个覆盖 3 个红格 1 个蓝格，y 个覆盖 3 个蓝格 1 个红格，与第 8 题类似可得 $x=y$，并且 $4x=50$，但后一式显然不能成立（因为 50不被 4 整除）．

14. 在 $2^k\times 2^k$ 的棋盘上剪去一个方格后，能用 ㄏ 形恰好覆盖．

我们在棋盘中央剪去一个 ㄏ 形，然后将棋盘分为四个 $2^{k-1}\times 2^{k-1}$ 的棋盘，每个棋盘恰好被剪去一个方格（原来剪去的一个方格及 ㄏ 形的 3 个方格）．对这较小的棋盘进行同样的处理，依此类推，最后棋盘被分为若干个 $\left(\frac{4^k-1}{3}\right)$ ㄏ

形.

15. 一个 6×6 的棋盘被 18 张骨牌 (2×1 的矩形) 完全覆盖, 证明一定存在一条直线, 沿这条直线剪过去, 不会剪到任一张骨牌.

棋盘的内部有 5 条横线, 5 条竖线. 设 l 是其中的一条. 如果沿 l 剪过去会剪到骨牌, 那么在 l 的一侧, 这样被剪到的骨牌只覆盖一个方格, 而未被剪到的则覆盖两个方格. 由于在 l 的每一侧方格的个数都是偶数(6 的倍数), 所以被剪到骨牌数一定是偶数, 至少是 2 张.

如果沿每条线剪过去都会剪到骨牌, 那么由于被剪到的骨牌各不相同, 从而它们的张数至少为

$$(5+5)\times2=20.$$

然而骨牌的总数仅仅 18 张, 矛盾!

16. 在 6×6 的棋盘上已经放了若干张骨牌, 互不重迭, 每一张盖住两个方格. 如果没有被盖住的方格不少于 14 个, 证明一定可以再放一张骨牌到棋盘上, 它与已经放好的骨牌不重迭(已经放好的骨牌不得移动).

注意第 1 行中至多有 3 个空格(否则可以在这行放一张骨牌), 因而在下面的 5 行中至少有 11 个空格.

对于下面 5 行中的每一个空格, 它上面的那个方格必定被骨牌盖住(否则问题即已解决), 并且每两个空格上方的骨牌不会是同一张(除非这两个空格是相邻的, 这时问题也立即解决). 于是在前五行中至少有 11 张骨牌.

但空格个数$\geqslant14$, 从而骨牌张数

$$\leqslant\frac{6\times6-14}{2}=11,$$

即骨牌全在前5行中，这时第6行里显然可以再放骨牌。

17. 在8×8的棋盘上，至少用多少只马才能控制整个棋盘？即马的外固数是多少？

图76表明12只马是足够的．另一方面，A、B、C、D、E、F这六个方格各需一只白马去控制(或放一只黑马)；a、b、c、d、e、f这六个方格也各需一只黑马去控制(或放一只白马)．因此，12只马也是必须的．即马的外固数为12.

a							A
C	b				马	B	d
	马	马		马	马		
		马					
					马		
		马	马		马	马	
c	F	马				f	D
E							e

图 76

18. 在$n\times n$的棋盘上，马的色数是多少？

在$n=1$、2时，色数为1，因为任一只马都不能吃掉其他的马.

在$n>2$时，色数为2．放在黑格里的马算一类，放在白格里的马算一类.

19. 仿照第五节例2画出关于3×3的棋盘的"马图".

1	6	3
4	9	8
7	2	5

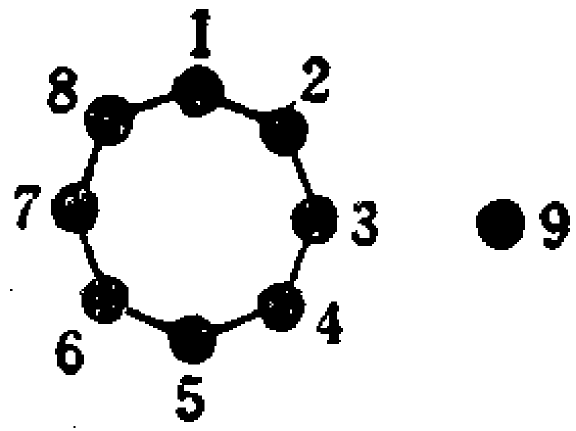


图 77

图77是3×3的棋盘与对应的马图.

20. (马的换防)将图77中放在1、3两个方格中的马与放在5、7两个方格

中的马交换位置，至少要多少步？

答案是至少 16 步．从马图上明显地看出来，16 步是足够的，可以把 4 只马顺时针移动，使 1 中的马移到 5，3 中的马移到 7，而 5 与 7 中的马则分别移到 1 与 3．步数如果<16，则至少有一只马移动的步数$\leqslant 3$，比如说是方格 5 中的马．这只马只能进入方格 3．在方格 7 中的马被它及原来在方格 1 中的马挡住无法进入方格 5．

21．证明 3×5 的棋盘上马没有哈密尔顿链．

考虑两个不同的涂色，一种是自然涂色，另一种是图 78．如果有一条哈密尔顿链，在自然涂色中，这链上黑、白两种颜色的方格交错出现．另一方面，在图 78 涂法中，马从标有 1 的方格必须跳到标有 2 的方格，而标有 1 的方格比标有 2 的多 1 个，因而这条链必然是

1	2	2	2	1
1	1	2	1	1
1	2	2	2	1

图 78

121212121212121

但标有 1 的方格不全是黑色也不全是白色，矛盾！

22．证明在 3×6 的棋盘上，马没有哈密尔顿圈．

证明与第四节例 5 类似，考虑自然涂色及图 79．

23．按照第四节例 1 中介绍的第一种方法，在 4×5 与 5×5 的棋盘上找一条马的哈密尔顿链．

答案是图 80 与图 81．

1	2	2	2	1	2
1	1	2	1	1	1
1	2	2	2	1	2

图 79

24．用第四节例 1 中的第二种方法，在 3×7、3×8、3×10 的棋盘上各找一条马的哈密尔顿链．

7	16	3	20	9
2	11	8	15	4
17	6	13	10	19
12	1	18	5	14

图 80

3	10	21	16	5
20	15	4	11	22
9	2	25	6	17
14	19	8	23	12
1	24	13	18	7

图 81

答案见图 82、83、84.

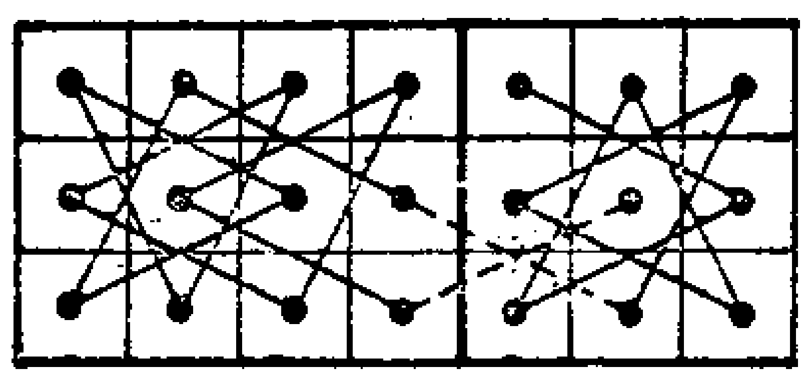


图 82

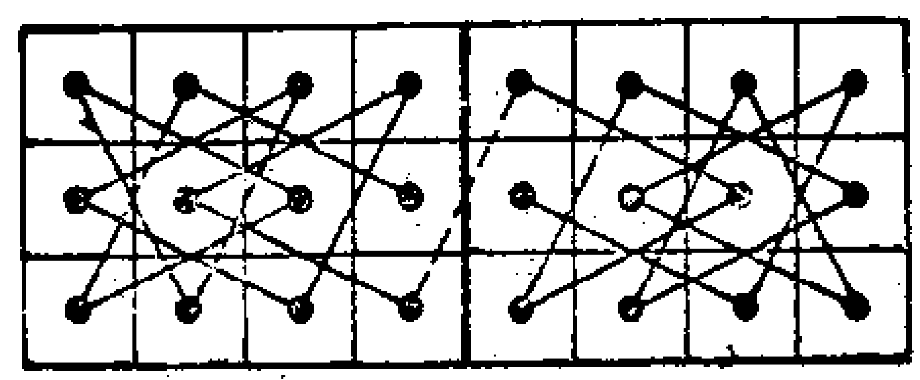


图 83

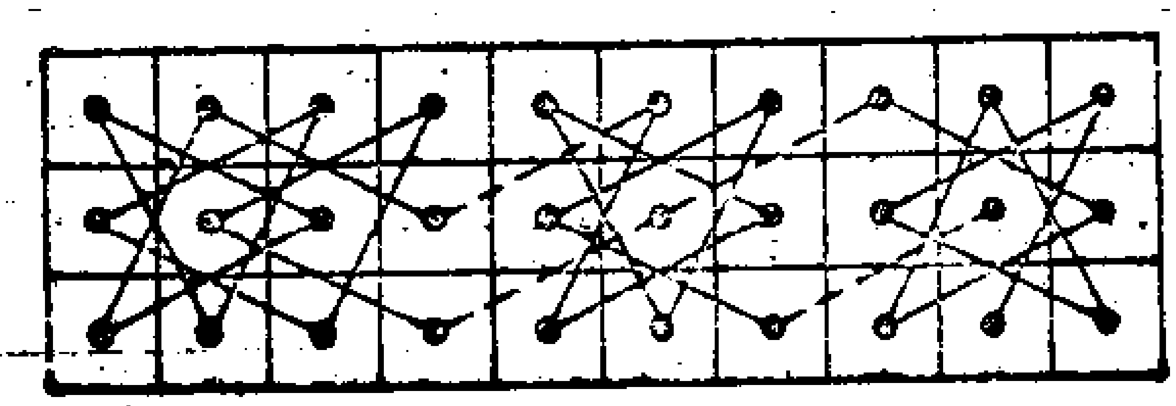


图 84

25. 在 6×6 的棋盘上找一条马的哈密尔顿圈.

图 85 表明"边框"由 4 个圈组成(在 n 为偶数时均是如此),将它们与"中心部分"适当连接起来便可得到哈密尔顿圈.

26. 用第四节例 1 中第四种方法在 8×8 的棋盘上找一条马的哈密尔顿圈.

图 86 表明"边框"及"中心部分"均由 4 个圈组成,适当连接起来(图 86 由虚线表示)就得到哈密尔顿圈.

27. 用镶边的方法在中国象棋盘上找一条马的哈密尔

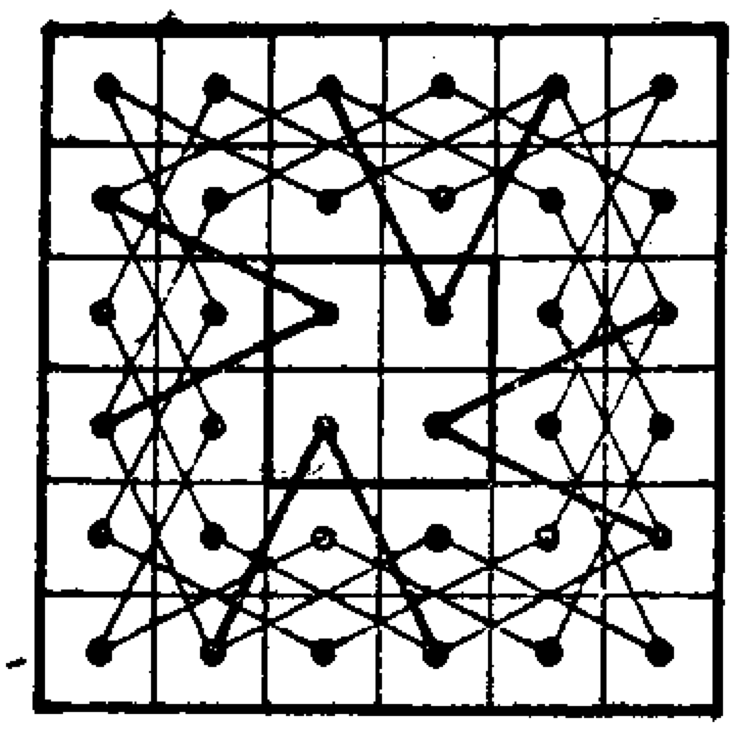


图 85

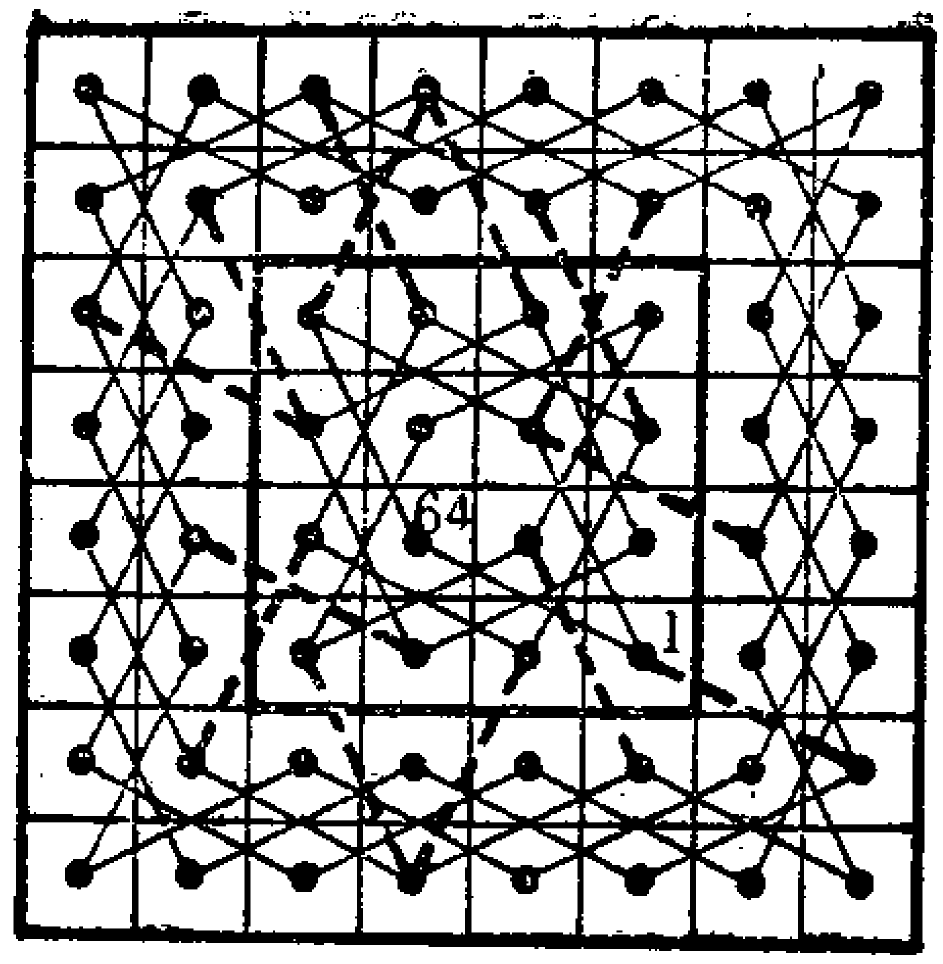


图 86

顿圈.

参看图 87 与图 88. 在图 87 中可见, “外框”有 a、b、c、d 四个圈, “中框”有 e、f、g、h 四个圈. 适当连接后即得图 88 的哈密尔顿圈(图中方格均表示点).

d	b	c	a	d	b	c	a	d
c	a	d	b	c	a	d	b	c
b	d	e	h	f	g	e	d	a
a	c	f	g	e	h	f	c	b
d	b	h	e	A	e	g	a	d
c	a	g	f	B	f	h	b	c
b	d	e	h	f	g	e	d	a
a	c	f	g	e	h	f	c	b
d	b	c	a	d	b	c	a	d
c	a	d	b	c	a	d	b	c

图 87

83	78	49	68	85	18	51	56	87
48	67	84	79	50	69	86	17	52
77	82	71	90	19	2	55	88	57
66	47	80	39	70	89	20	53	16
81	76	37	72	1	54	3	58	33
46	65	40	25	38	21	34	15	8
75	26	73	36	23	4	9	32	59
64	43	24	41	10	35	22	7	14
27	74	43	62	29	12	5	60	31
44	63	28	11	42	61	30	13	6

图 88

28. 证明 $m\times n$ 马能跳到任意一个整点的充分必要条

件是 m、n 互质并且 m、n 不全为奇数.

必要性：不妨假定出发点为原点．如果 m、n 的最大公约数 $d>1$，那么马所跳到的点的横坐标与纵坐标都是 d 的倍数.

如果 m、n 都是奇数，那么马所跳到的点的横坐标与纵坐标之和必定是偶数，它不能跳到 $(1, 0)$ 这样的点（也可以用涂色的方法来证明）.

充分性：不妨设 m 是奇数，n 是偶数．由于 m、n 互质，它们的最大公约数是 1．根据初等数论中著名的裴蜀 (Bézout) 定理，有正整数 a、b 使

$$an-bm=1.$$

由于 n 是偶数，所以 b 是奇数.

不妨设上面的等式中，a 为正偶数（否则用 $a+m$、$b+n$ 代替 a、b，直至它为正偶数）．上式表明，马自原点出发，先向上跳 a 步到 (am, an)，然后跳 b 步（图 89）可到 $(am+n, an-bm)$ 即 $(l, 1)$，这里 $l=am+n$ 是偶数.

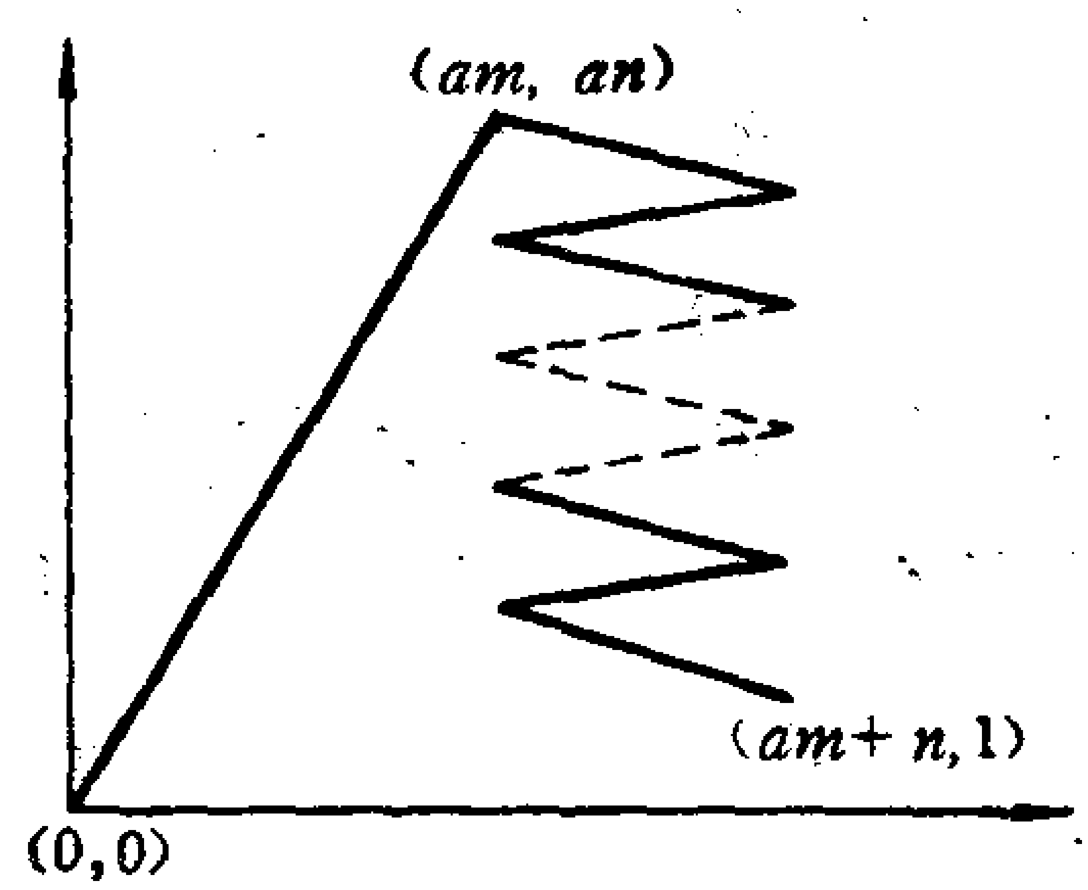


图 89

于是，这只马与 $l\times 1$ 马的作用相同，而由第三节例 2 知道（在 l 为偶数时），后者可以跳到棋盘上任意一点.

29．将 3×7 的棋盘中的方格任意地涂上红色或蓝色，

证明一定可以在这棋盘中找出一个 $m\times n$ 的矩形($m>1$, $n>1$),这矩形的四个角颜色相同.

这个问题既可从考虑行入手，也可从考虑列入手. 我们采用前者.

第一行的七个方格中至少有 4 个是同一种颜色. 不妨假定前 4 个是红色.

考虑由前 4 列组成的 3×4 的棋盘,如果第二行或第三行有 2 个红格,问题即已解决. 假如第二行、第三行都至多有 1 个红格,不妨设红格在第 3 或第 4 列,这时前两列的 4 个蓝格组成满足要求的矩形.

30. 点集 M 是无限棋盘(全体整点的集)的一个有限子集. 证明可将集 M 的点涂上红色或蓝色，使得每一行、每一列上两种颜色的点数至多相差 1.

假如集 M 的点全在一行或一列上,结论显然. 所以我们设 M 至少有两行、两列.

如果集 M 中某一行(列)上只有一个点 A,那么可将这点去掉，先将其他点涂好颜色，然后对 A 涂色. 如果 A 所在的列(行)红点多 1 个，A 涂蓝色,否则就涂红色.

于是，我们假定集 M 中每一行、每一列上都至少有两个点.

如果集 M 中有 A、B、C、D 四点构成矩形，将这四点去掉，在其它点涂好颜色后，A、C 涂红色，B、D 涂蓝色.

如果集 M 中没有构成矩形的四个点，那么有 A、B、C

三点，A、B 在同一行，A、C 在同一列，但是与它们构成矩形的点 $D \in M$. 这时把 A、B、C 三点去掉，把 D 添到 M 中. 在各点涂好颜色后，再对 A、B、C 涂色. B、C 的颜色与 D 相同，A 的颜色与 D 不同.

用上面的方法，可以将点集 M 中的点数逐步减少，直至它成为空集或其他容易涂色的集.

31. 无向图(我们假定点数为有限)一定有核，试证明之.

我们设 X 为最大的内固集. 这时任意一个不属 X 的点 y 至少与 X 中一点 x 相连 (否则 X 不是最大的内固集，因为 $\{y\} \cup X$ 也是内固集)，于是 X 也是外固集，从而 X 是核.

32. 在第七节例 7 中，如果取最后一根火柴的为负，那么 A、B 谁是胜家?

将图 52 中 (0, 0) 点及有关的弧删去得到图 90，按第七节例 9 的方法标上数，标偶数的是核，由于初始位置 (3, 2) 不在核中，所以 A 是胜家.

一般地，在取火柴的"匿门"游戏中，如果规定取最后一根的为负(其它规定不变)，那么将每堆火柴根数减去 1 便化成取最后一根为胜的匿门游戏. 也就是说，如果将每堆火柴根数先减去 1，然后用二进制表示，在这些数的各个数位的和都是偶数时，B 胜；否则 A 胜.

33. 将第七节的图 52 的各点标上非负整数，使得每一点所标的数与自这点发出的弧的终点所标的数不同，并且

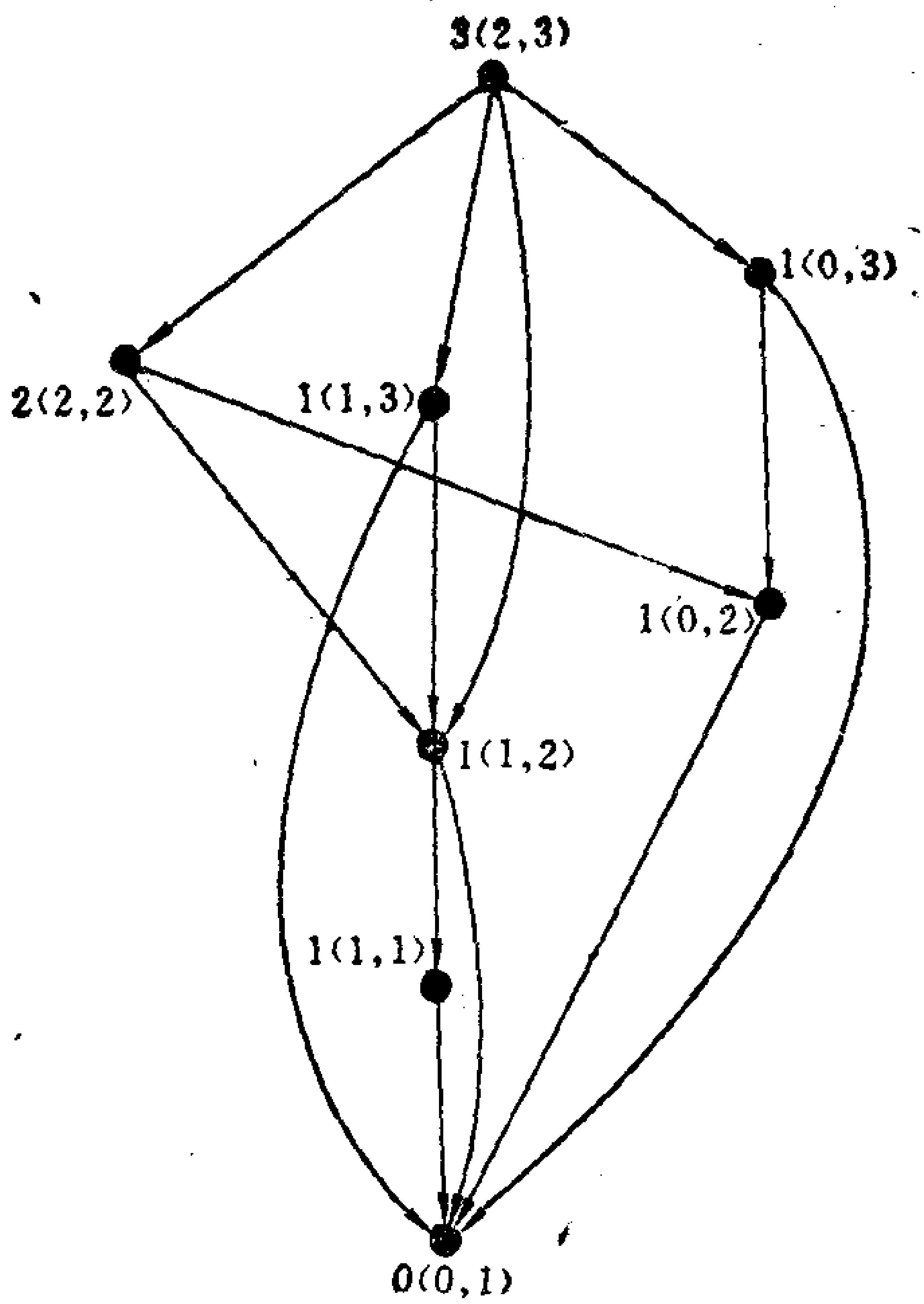


图 90

是满足这一要求的最小数.

答案见图 91. 这样的标数方法是 Grundy 在 1939 年引入的,我们称之为格隆代函数. 这函数值为 0(即标 0)的点就是核. 采用格隆代函数及二进制来研究匿门游戏,可以导出前面所说的结论(取胜的策略).

34. (骗人的电子游戏)图 92 是一个彩色激光棋盘,上面有红、黄、蓝三种颜色的方格(图中打×的格表示红色、空白格表示黄色、斜线格表示蓝色). 游戏的人可以随意地通过按电钮将某一行或某一列的小方格同时改变颜色: 红变

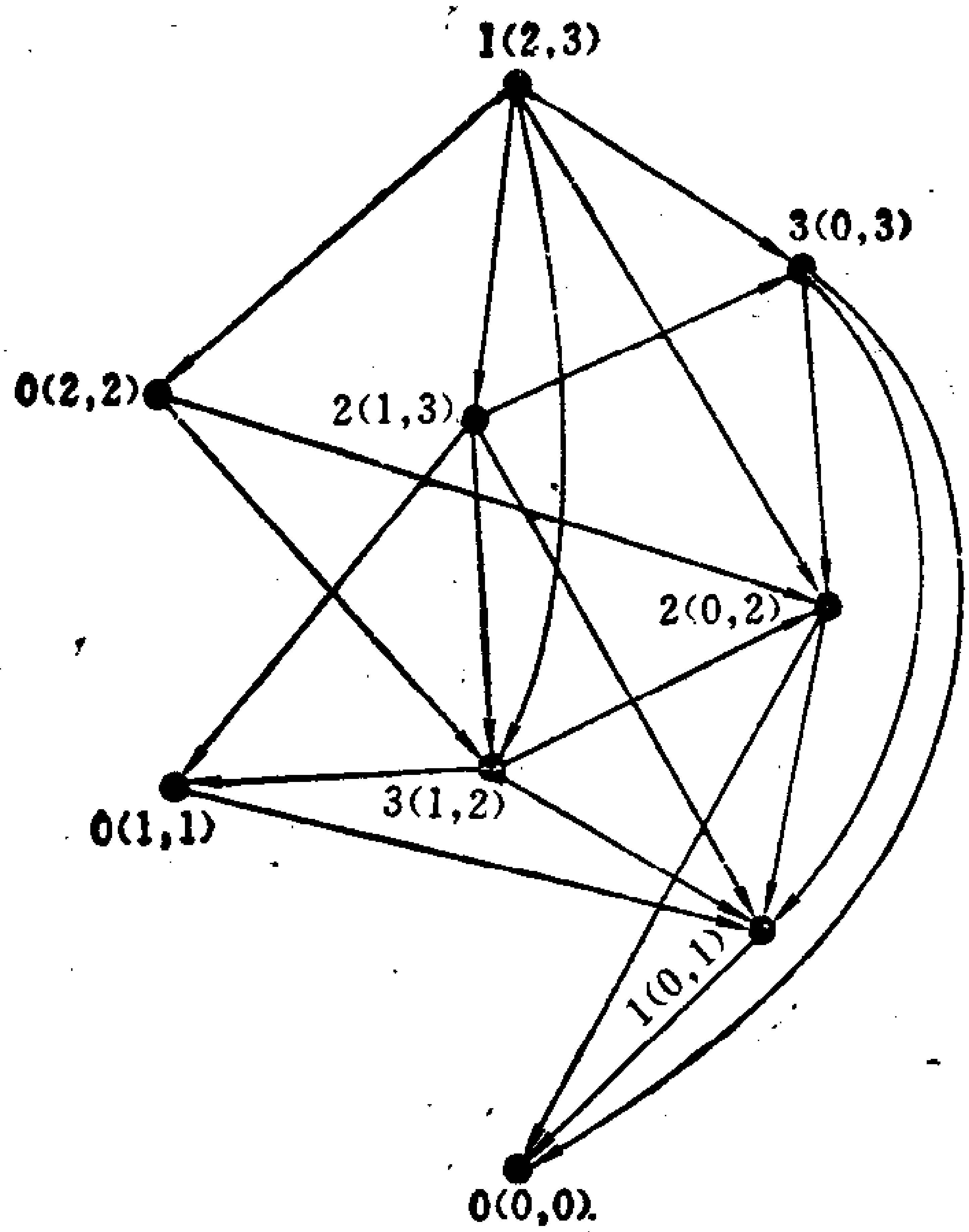


图 91

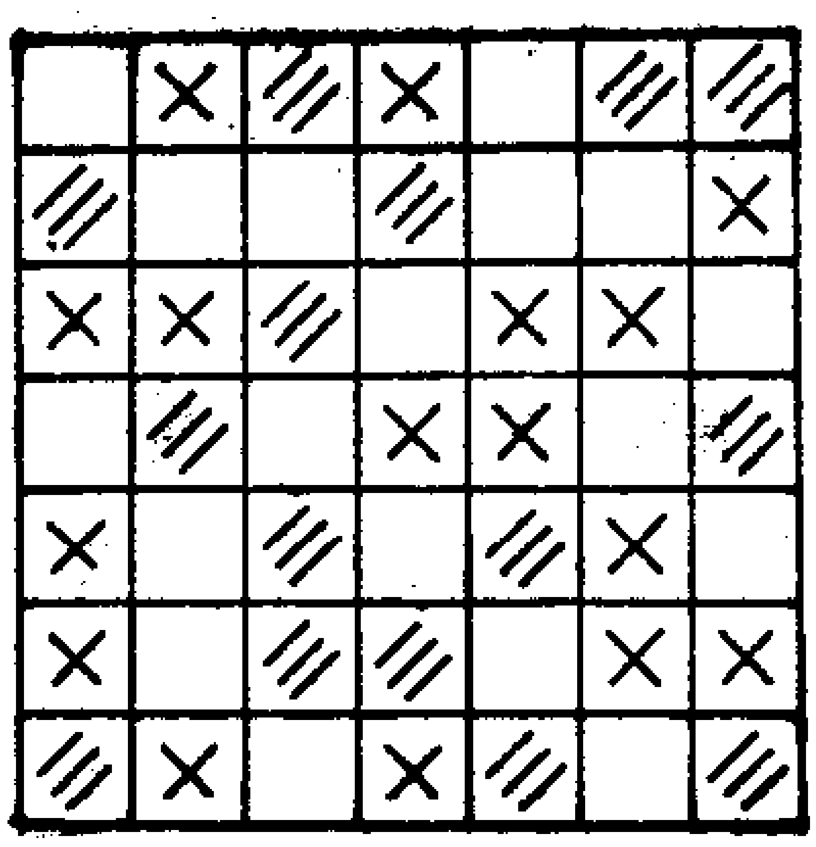


图 92

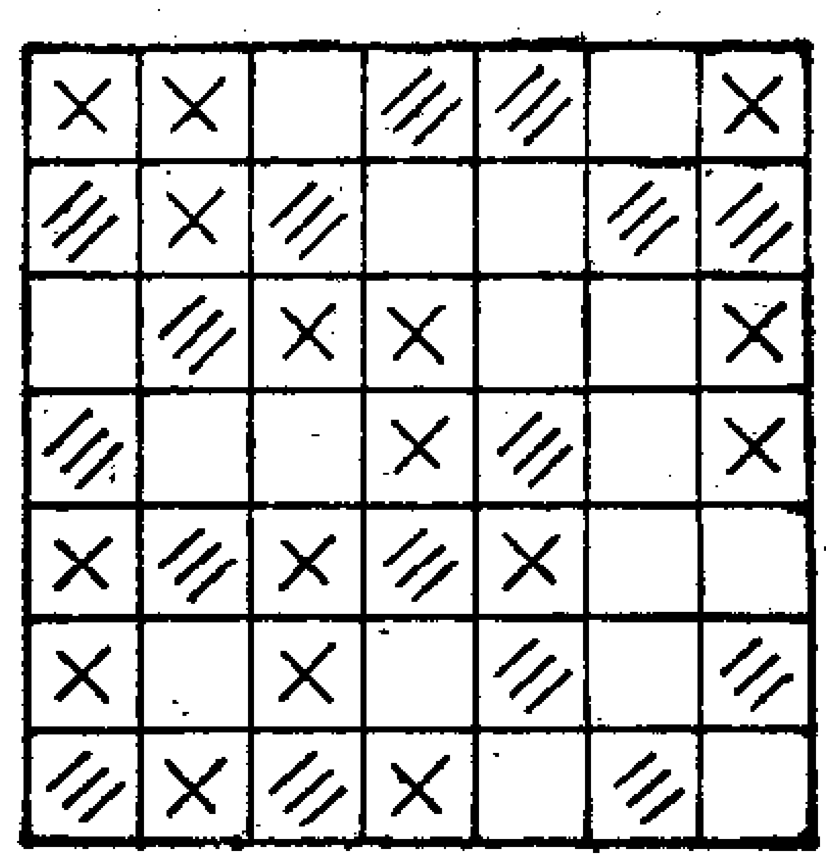


图 93

黄、黄变蓝、蓝变红．如果能将图 92 变为图 93．并且按电钮的次数$\leqslant 10$，便可得奖．问游戏的人能否获奖？

参加游戏的人是没有希望获奖的．无论按多少次电钮都不能将图 92 变为图 93．

事实上，我们只需证明两图左上角 3×3 的矩形不能互相转换就行了．为此，我们分别用数字 1，0，-1 分别代替红、黄、蓝三种颜色．注意到每按一次电钮，同时改变颜色的三个方格的数字和虽然可能改变，但被 3 除时的余数是不变的．这就是说，无论按多少次电钮，3×3 矩形中的 9 个方格的数字和被 3 除的余数不变．

图 92 左上角的 9 个数字和是 0（即被 3 除余数是 0），而图 93 左上角的 9 个数字的和是 1．因此，图 92 不能变成图 93．

35．A、B、C 三人玩下面的游戏：从集合

$$\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 1985,\ 1986\}$$

中随机地取一个 K 元子集，这里 K 是一个取定的$\leqslant 1986$ 的正整数，根据所取出的 K 个数的和除以 3 的余数为 0，1 或 2，定出胜者为 A、B 或 C（各种选取的概率相等）．问 K 为什么值时，这游戏是公平的？

答案是当且仅当 K 不是 3 的倍数时，游戏是公平的．如果 K 是 3 的倍数，游戏有利于 A（请参看第七节的例 11，这里是把每三个数编为一组）．

36．将第七节例题 11 中的 1986 改为 1987，试讨论什么时候这博奕是公平的？

如果每次取出 $4K(\leqslant 1987)$ 个数，这时有两种情形．第一种情形是取出的数中没有 1987，这相当于在 $\{1, 2, \cdots, 1986\}$ 中取 $4K$ 个数，由第七节例 11 可知，这时 A 胜的机会较多．第二种情形是取出的数中有 1987，这相当于在 $\{1, 2, \cdots, 1986\}$ 中取 $4K-1$ 个数，这时 A，B 机会均等．因而综合起来，博奕对 A 有利．

如果每次取出 $4K+2$ 个数，由第七节例 11 可知博奕对 B 有利．

类似地，根据第七节例 11，容易得出：如果每次取出 $4K+1$ 个数时，B 胜的机会多；如果每次取出 $4K+3$ 个数时，A 胜的机会多．

总之，这时博奕总不是公平的．

附录　二进制简介

我们通常使用的进位制是十进制计数法，也就是通常所说的"逢十进一，退一当十."除此之外，在日常生活中也遇到一些别的进位制，例如：七进制(七天为一星期)、十二进制(十二只为一打、十二打为一箩)、六十进位制(六十秒为一分，六十分为一小时)等等．特别地，在计算机中则常使用二进制记数法．

在十进制中有10个数字，即0，1，2，3，4，5，6，7，8，9．凡满十时，就向左进一位．任一个十进制的数可以写成用一系列10的幂的形式．例如10732可以写成

$$10732=1\times10^4+0\times10^3+7\times10^2+3\times10^1+2\times10^0.$$

如果我们将上式右端所有10的幂抹去，仅将各项10的幂的系数按顺序排列起来(注意，系数为0时，仍要照写)，就得到了这个十进制数10732.

同样，如果将一个数用r的幂的和写出来，当抹去所有r的幂，把它们各项系数按顺序排列起来，就得到了这个数的r进制数．例如，将十进制数43写成2的幂的和，即

$$43=1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0,$$

于是得到 43 的二进制记法为 101011.

二进制只有两个数字，即 0 和 1. 凡满二时，就向左进一位. 例如十进制的 2，在二进制中用 10 表示；十进制的 4，在二进制中用 100 表示等等.

把十进制的 0 到 10 用二进制表示，如下：

十进位制	二进位制
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

二进制的算术运算法则是很简单的：

$$0+0=0,\ 0\times0=0,$$

$$0+1=1,\ 0\times1=0,$$

$$1+0=1,\ 1\times0=0,$$

$$1+1=10,\ 1\times1=1.$$

在普通数字的算术中，1+1 等于 2，但在二进制中没有 2 这个数字，根据逢二进一，所以这里是 1+1=10(记下 0 进

1). 二进制的乘法和普通算法是一样的.

显然，二进制的加法与乘法运算都很简单. 例如，1001101 与 11001 相加，其算式为：

$$\begin{array}{r} 1001101 \\ +)\quad 11001 \\ \hline 1100110 \end{array}$$

1101 与 101 相乘，其算式为：

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times)\ 101 \\ \hline 1101 \\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

把一个十进制数转化为二进制数，常采用如下方法：

把这个十进制数除以 2，把余数写在一边(如果该数为偶数，则余数为 0；如果是奇数，则余数为 1)。再把商除以 2，并把余数写在一边，如此下去，直到商为零，把余数从末尾往回读，就得出这个数的二进制表示. 例如，用这一方法把十进制数43化成二进制数：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 43 \ \cdots\ 1 \\ 2 & 21 \ \cdots\ 1 \\ 2 & 10 \ \cdots\ 0 \\ 2 & 5 \ \ \cdots\ 1 \\ 2 & 2 \ \ \cdots\ 0 \\ 2 & 1 \ \ \cdots\ 1 \\ & 0 \end{array}$$

即二进制表示为 101011.

通常用$(43)_{10}=(101011)_2$表示.

其中括号外的小 10 和小 2 分别表示是十进制或二进制的数.

将一个二进位制数转化为十进位制数的方法是：将这个二进制数的最末一位乘以 2^0，倒数第二位乘以 2^1，……最后将各项相加即可.

例如：

$$(101001)_2=1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=(41)_{10}.$$

这就表明二进制数 101001 是十进制数的 41.