写在前面

至今，我还记得少年时代的一桩往事：

我开始进城上中学了。离家不远就有一条虽不太宽，但却能跑汽车的公路，直通城里。可是我从来也不走那条通衢大道，我的叔爷、伯伯们进城也都不走那条路。

每天清晨，我挎着书包轻快地走过长满青草的田埂时，脚脖上下免不了被朝露沾得湿漉漉。是为了享受大自然的滋润吗？不是的，经验告诉我，走这条田间小路比走公路要近得多。

秋天——收获的季节，进城的路程更短了，因为稻田地里空荡荡，这时可以不走田埂，而直接穿过田地，从这角走向对角。

人们不知不觉地踩出一条最短的路线，我也就日复一日地重踏着别人的足迹行进。

久而久之，我的脑子里出现疑问：最短的路线是怎样形成的？

后来，我从课堂上学到了走怎么样的路线能使两

点之间的距离最短，才知道，原来这就是最初级的极值问题！在生活上，我还遇到许许多多更加复杂的极值问题，它们常常激起我的浓厚兴趣。

参加工作后，作为一名工程技术人员，我更与极值问题解不开缘分了，譬如说：怎样用最省的材料来设计一个效能最高的结构物？采取什么方案可运送最多的物资而运输费用最少等等。

极值问题几乎牵涉到所有初等数学的范畴，有时还可以应用物理学的方法解答，本书都尽量做出必要的介绍。同时，力图提供一些比较灵活的解题方法，例如应用定和求积原理、定积求和原理、某些不等式等，用这些方法有时要比用高等数学的方法简便得多。

当然，还有一些更加复杂的极值问题，用初等数学的方法难以解决。不过，那就超出本书所要讲的范围了。

极值问题是有趣和耐人寻味的，钻进去，其妙无穷。笔者愿与同学们一道，继续探索和发掘它的隐秘，运用它更好地为四个现代化服务。

傅 钟 鹏

一九七九年四月于鞍钢

目　　录

序　幕

宁静的山区被嘈杂的脚步声和马蹄声搅乱了。

一批人马过去了，接着又是一批，前头已经不见踪影，后尾还没有出现，茫茫的迷雾，滚滚的人流，何处才是尽端呢？

刘邦怀着忿恨不平的情绪带领队伍离开关中，向自己的封地汉中进发了。他木然地不动声色，让坐骑随意信步向前，不时回头看看这支象长蛇一样蠕动的队伍，并深深地叹了口气。

迎面展现一座万仞高山。要开始翻山越岭了，他传令安顿队伍，埋锅造饭，自己也找个石礅坐了下来。

无休止的烦恼在脑际纠缠着。黯淡的前景，贫瘠的巴蜀地区，项羽那副骄横自大、不可一世的面孔……，这一切，都是那么令人心灰意冷！

当初，当初怎么样呢？大家不是约定好，先入关中的为王吗？是自己首先进入关中，消灭了秦王朝最后的抵抗者，而蛮横的项羽却把这纸文约撕得粉碎。

“主公，前程似锦呢，干嘛总是唉声叹气的？”一直跟随在他身边的军师张良打破窒息的沉默，发了话。

叹息代替了回答。

“主公，我就送您到这儿。此去都城南郑还有三百多里路，全是栈道，我看，人马过去后就把它烧毁了吧！”

刘邦瞪了张良一眼，似乎在说：“这是出的什么‘好’主意啊！”

只见张良微笑着伸出两个手指头，不慌不忙地说出一席话来：

“烧毁栈道的作用有两点。第一，各路诸侯不能来进犯我们；第二，项羽知道我们没有东进的意图，也就不加戒备了。这样，我们则可以放心在巴蜀地区和汉中养精蓄锐，准备将来挥戈东上。”

刘邦激动地紧紧握住张良的双手，内心掀起无名的欣慰：他的忠心和智慧是多么可以信赖的啊！

不到一年的时间，项羽就得到消息：刘邦起用韩信为大将，已经着手抢修栈道了。然而，他认为，现阶段是可以高枕无忧的，因为栈道全程都被破坏，用最快速度架设，也需三年至五年时间，而这栈道算是连接关中与汉中的唯一纽带，离了它，鸟儿也难飞入关中。

不料，就有这么一天，项羽接到一份十万火急的战报：刘邦兵临城下！

原来韩信靠当地居民的指引，曾从关中的陈仓走一条小路去汉中。这次，他布设了疑局，使项羽相信他是在组织抢修栈道，实际上却率领兵马从这条小路进入陈仓，以迅雷不及掩耳之势直取关中。后人把这段经过叫做“明修栈道，暗渡陈仓”。

这是一种“出其不意，攻其无备”的战术，但也必须具备一个条件，即走小路比栈道更近一些，也可能是走了一条最短的路程，这样，队伍才能神速地出现在敌人面前。

然而，韩信却万万没有想到，他是在运用一种名为“极值”的科学方法。

走 最 近 的 路

清澈的河水奔流不息，滚滚向东。

人们可曾想到，这条河流已经在地球上存在了多少年？也许有几百年，几千年了；也许已经是上万年了！它总是以那雄伟的气魄，后浪推着前浪，将难以计量的波涛注入大海。

同学们不知道这条河流的源头在哪里，他们想，

日夜忙碌地倾泻的这条河流莫不是由无数细溪汇成的？说不上它就没有一个固定的源头；也许它是某一条大河的分支，由那条大河供应给它无穷无尽的洪流。但不管怎么说，对于河流的这一段，大家都是非常熟悉的，甚至可以说出它在某处的宽度、深度、曲折情况等指标，至于教室和宿舍离河道有多远，那更是心明如镜了。

刘老师经常领着同学们到河边漫步，给大家讲述许多有趣的舟楫、江河的故事和有关知识。只要陪伴在刘老师身边，王慧就感到身上充溢着暖流，对自已熟悉而亲爱的老师产生无限的敬意。

今天，笔直的河堤照样静静地横躺着，水面在微风吹动下泛起一道道涟漪，落霞映处粼粼发光。刘老师又一次带领同学们来到岸边。

“不久的将来，我们将在这儿修建一座水塔，同时向教室和宿舍供水，同学们能够定出具体塔位，使水管的用量为最省吗？”刘老师提出这样一个问题。

这是走最近的路！这个问题以前刘老师就曾经提起过，王慧清楚地记得，从教室到河岸，再从河岸到宿舍，走哪条路线最近的问题早已解决。此刻她想起，那时用的是光的反射定律——光所走的距离最短。因此，走最近的路，应该使入射角等于反射角

（如图1a的$\angle 1 = \angle 2$）。

后来，王慧掌握了另一种解法——几何方法（图1b）：

过C点作MN的垂线CO并延长之，取$OC' = CO$；联AC'，AC'与MN的交点B即是从A到MN线，再到C，距离为最短时，MN上的那一点。

这可以很容易地得到证明：

$$AB + BC = AC'$$

而如果MN上有另一任意点B'，则$AB' + B'C = AB' + B'C'$，总是大于AC'（AC'是直线，为A至C'的最短线）。

可是，刘老师补充说，根据航务局的请求，希望

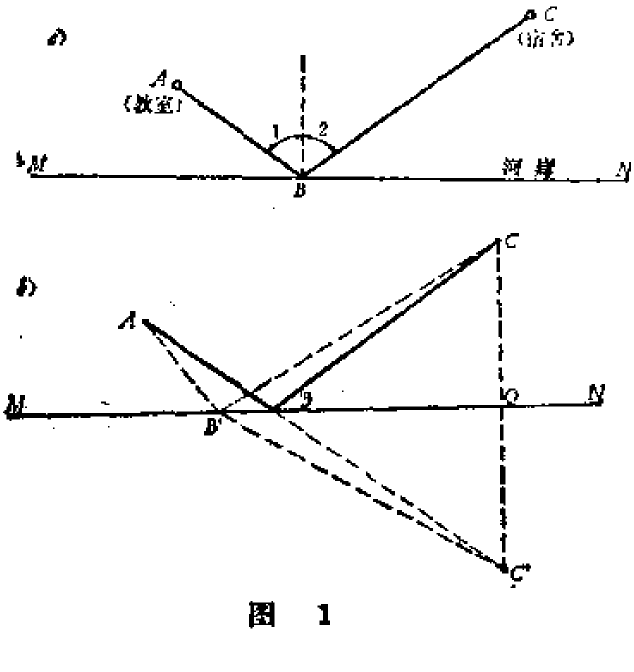


图 1

水塔的水也能供应给他们的堤岸设施，总共需用供水长度 l。这就是说，必须在 MN 上找一点 B，使 $AB+BD+DC$ 为最短（图2a），而 BD 是个定值，等于 l。

当然，这也是一个求最小值的问题，怎么解呢？

归途中，皓月当空。王慧踏着洒遍大地的银光，脑海里思索着解题的方法。走着走着，噢，大概就是这样吧！

回到宿舍后，王慧便把答案写了出来：

见图 2b，过 A 点作 MN 的平行线，并在其上取 $AP=l$；取 C 点对 MN 线的对称点 C'；联 PC'，交 MN 于 D；过 A 点作 PC' 的平行线交 MN 于 B，则 $AB+BD+DC$ 为所求的最短值。

可以这样证明：

如果 MN 上有一任意点 B'，则取 $B'D'=l$，$AB'+B'D'+D'C=PD'+B'D'+D'C$，因 $B'D'=AP=BD=l$，故可明显地看出，$AB+DC$ 若小于 $PD'+D'C$，也就可知 $AB+BD+DC<AB'+B'D'+D'C$ 了。

$AB+DC=PD+DC$，而从 P 点至 MN 上的一点，再到 C 点，自然是 $PD+DC$ 最小。于是，图2b 中的 B 便是所求的点。

如果 l 值较大，超过 AC 对 MN 的投影长度，那

末，解题结果就应当如图 2c 所示。

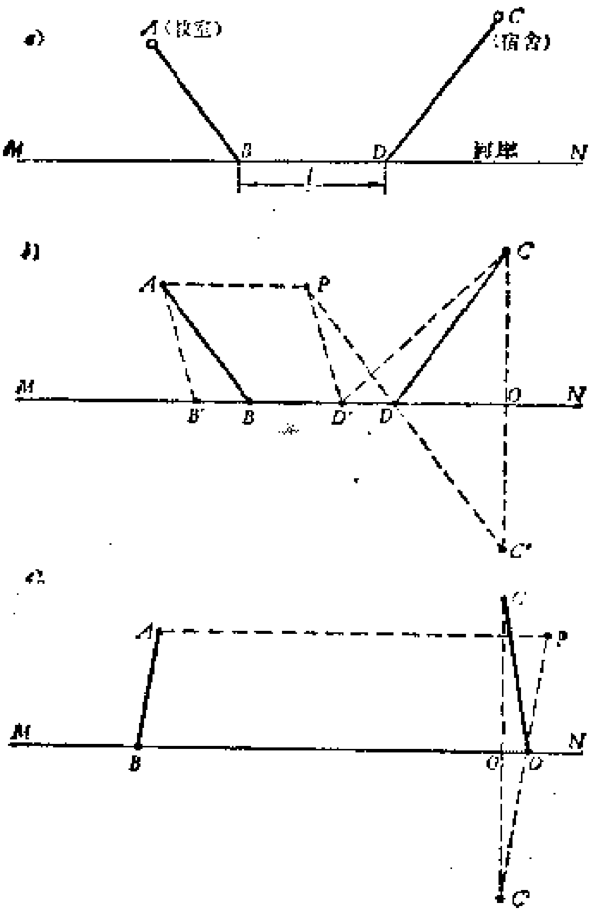


图 2

接着，刘老师提出另一个问题：

据图3，A与B两地之间有五条通路：1、2、3、4、5，问：选择哪条路走最近呢？

显然，同学们能够迅速地得出答案：走第“3”

条路最近。

这就是解答一道最简单的极小问题，我们可以从五条通路中得出一个极小值。

也许有同学要问：两点之间距离最短的应该是直线（即图中的虚线），不是比“3”线更短吗？要这样看：在我们的题中，不存在这种可能

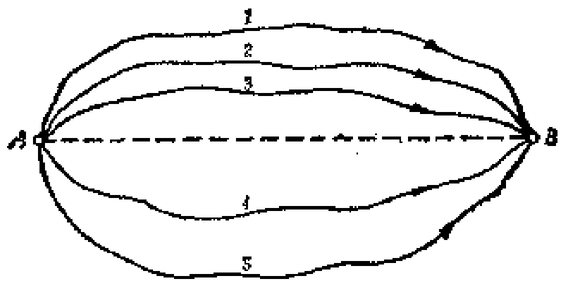


图 3

性。因为，虽然这条线最短，但实际上，在A与B之间并没有沿这条线修筑道路，所以不能认为它是我们这道题所要求的极小值。

刘老师最后补充说：

在日常生活和应用技术中，经常会遇到极小值的运算。还有极大值，也很重要（在理论上，严格说来，“极小、极大”与“最小、最大”是有区别的，在适当的时候会向同学们交代一下的；但是在一般情况下，有时用“极”，有时用“最”，含义都一样）。研究极小值和极大值的问题，统称为“极值”问题，它是很有趣的，在这段数学学习课程中，我们就要专门讨论这个问题了。

鸿　　雁

鹅毛大雪铺天盖地。顷刻之间，丘陵、山川、河谷、森林全都披上一片白皑皑的外装。天低云暗，寒风凛冽地一阵紧似一阵，昏沉沉的大地在阴霾密布的天幕下显得凄凉而孤单。飞禽惊慌地闯回窝巢，走兽失措地钻进洞穴。只有汹涌澎湃的波涛拍岸声伴随着呼啸而过的海风，不时打破北海边区的寂静。

苏武将羊群赶回圈棚，困倦地傍着火炉坐下，顺手往炉内扔进一块块木炭。十九年来，他冷清而孤独地与那杆旄毛已经大部脱落的节杖共同生活，相依为命，看来，重新踏上汉室江山的希望是完全破灭了。

终于天亮了。晨曦从帐篷的缝隙射入一线光明，他欠身起立，步出帐外，这时雪霁天晴朗，虽然没有娇艳的腊梅在处处飘香，然而面前这棵刚劲的青松，风吹不倒，雪压不折，始终高洁地傲然挺立在北海之滨。

当初他是作为一名使者来到匈奴的，匈奴首领劝降不就，就将他放逐到北海牧羊，并诡称苏武已去世。

现在，不得不将他放回去了，因为据说汉帝从绑在一只大雁腿上的白布得到信息，不但知道苏武没有死，而且指出他的去向。

当然，这只是根据知道内幕情况的人提供的线索加以神化，不过，苏武毕竟被迎回了，从此，鸿雁也就象征着传递人类美好生活信息的使者，它那忠诚、友爱、守信和坚贞的高贵品德为历代人民所仰慕。也出现了许多神奇的传说，说是它们曾经为古人送信，万里远飞，书到气绝……。

至于近代的“鸿雁”，那就是指邮政。

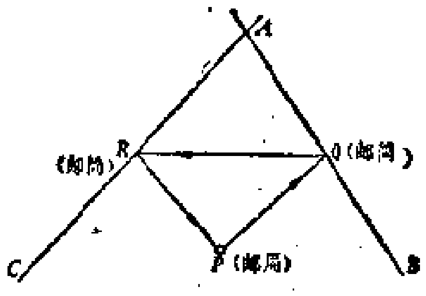


图 4

“图 4 的 AB 和 AC 是两条互相交叉的公路，邮局的位置在 P 点，拟在公路上设 Q、R 两个邮

筒。取信员每天从P点出发，先到Q点，再到R点取信，然后返回邮局。问Q、R的位置确定在哪儿，才能使取信员走的路程最短？”刘老师提出的这道题当然难不倒王慧和同学们，他们在不久前刚刚讨论过关于输水管的设置问题，用类似的方法不是就可以解答吗？

按图5，过P点作AB和AC的垂线，并在其上取对AB和AC的对称点P'和P''，联$P'P''$，交AB和AC于Q、R，即得。

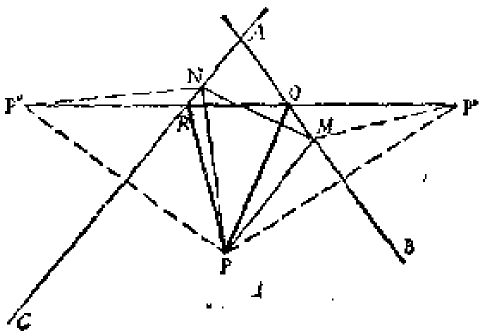


图 5

证明是很简单的：

在AB和AC上任取两点M和N，则

$$PM+MN+NP=P'M+MN+NP''$$

从P走到M，再走到N，返回P，整个路程相当于从P'至P''的折线距离；而从P走到Q，再走到R，返回P，则相当于从P'至P''的直线距离。

王慧满以为用以上方法求极值的解是无可指摘的，而刘老师也是这样说的。不过，刘老师还是做了补充。

大家想想，如果 $\angle BAC$ 是个钝角，将会出现什么情况呢？是钝角，$P'P''$ 与 AB、AC 就交不上了，而在 BA、CA 的延长线上才有交点。$P'P''$ 能与 AB、AC 交上的极限位置在哪儿呢？当然是 $P'AP''$ 成直线。此时，因 $\angle P'AB=\angle BAP$，$\angle P''AC=\angle CAP$，故 $\angle P'AP''=2\angle BAC$。如 $\angle P'AP''=180°$，则 $\angle BAC$ 为直角。这说明以下问题：

如 $\angle BAC$ 为直角，则所求的三角形 PQR 表现为直线 AP。本题的可能条件为：$\angle BAC$ 为锐角。

等 角 特 征

那末，以上那个题目的解给我们提供什么启示呢？

如果图 4 上的 P 点也是一个未定点，它处于与 AB 和 AC 都相交的另一条公路上，那末，P、Q、R 三点的位置应该怎么定，就得另行讨论了。

画出图形（图 6）便可看出，这只不过是一道这样的题目：

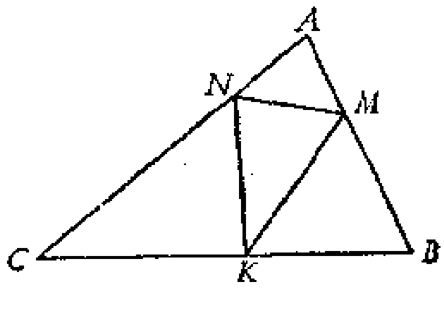


图 6

怎样在锐角三角形 ABC 中作一个周长最

短的内接三角形？

如果在 BC 边上任取一点K， 那末，按照上节所述的方法，我们可以容易地定出过K点的、周长最短的内接三角形 KMN。 可是 BC 上可以取无数个K点而构成无数个$\triangle KMN$， K点应落在何处， 才能在这些$\triangle KMN$ 中得到一个周长最短的呢？

看起来，刘老师提出的这个题目很难，可是用物理的方法帮助了同学们。王慧又想到“光”，是不是还可以应用光的反射定律来解决这个问题？如果可以，那末必须使 $\angle BKM=\angle CKN$、$\angle AMN=\angle BMK$、$\angle CNK=\angle ANM$，设想：K、M、 N 在三角形 ABC 的三边上都具有这样的“等角特征”，可能就是$\triangle ABC$ 中周长最短的内接三角形了。

不过，这样的内接三角形是个什么三角形呢？怎么样去找呢？

刘老师对王慧的设想给予肯定的答复。原来在十九世纪，德国数学家许瓦尔兹就曾经对这个问题进行过研究，并取得有趣的成果：

这是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形。

何以见得呢？

见图 7，$\triangle PQR$ 是$\triangle ABC$ 的垂足三角形，则因$\angle BQH=\angle BPH=90°$， 故 B、 Q、 H、 P 四点共圆，得 $\angle BPQ=90°-\angle QPH=90°-\angle QBH=\angle A$；

同理，C、R、H、P四点共圆，可得 $\angle CPR = \angle A$；于是 $\angle BPQ = \angle CPR$。

同样可证得$\angle AQR = \angle BQP$、$\angle CRP = \angle ARQ$，所以 $\triangle PQR$ 的三顶点在 $\triangle ABC$ 的各边具有等角特征。

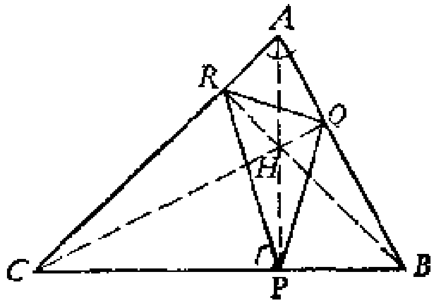


图 7

诚然，垂足三角形具有以上所述的等角特征，可是，不见得就没有任何其它内接三角形也具有这种特征。

这是王慧提出的疑问，也是刘老师要进一步说明的：

如果有另一个三角形 $P'Q'R'$也具有这样的特征，那末见图 8a，在$\triangle BP'Q'$ 中，$\angle B = 180° - \angle 1 - \angle 2$；在 $\triangle CP'R'$中，$\angle C = 180° - \angle 1 - \angle 3$，得

$$\angle B + \angle C = 360° - 2\angle 1 - (\angle 2 + \angle 3)$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AR'Q'$ 中，$\angle B + \angle C = 180° - \angle A = \angle 2 + \angle 3$，故 $360° - 2\angle 1 - (\angle 2 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 3$，即

$$180° - \angle 1 = \angle 2 + \angle 3 = 180° - \angle A$$

得 $\angle 1 = \angle A$；同理可得$\angle 2 = \angle C$，$\angle 3 = \angle B$。

那就是说，如果还有一个具有此种等角特征的三

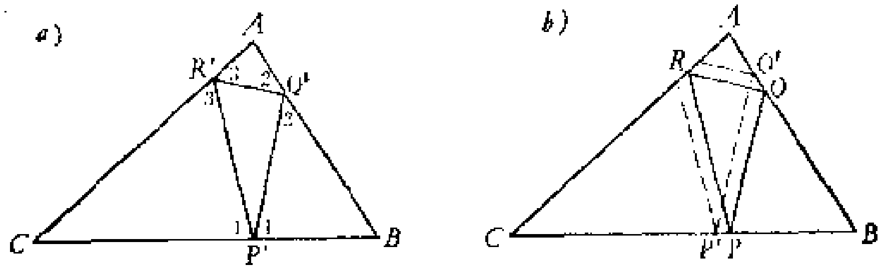


图 8

角形，它的三边一定平行于垂足三角形的相应边（所形成的“等角”都等于原三角形的相应角）。

另一个具有这种等角特征的三角形是不是存在呢？显然，从图 8b 可以看出，那是不存在的。

那末，垂足三角形的周长是不是最短呢？许瓦尔兹用一种新颖的“镜射法”做了证明，证明 $\triangle ABC$ 中任意一个其它内接三角形的周长都比垂足三角形的周长长：

设图 9 中的 $\triangle PQR$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，而 $\triangle KMN$ 为另一个内接三角形，取 BC，当做镜面一样把 $\triangle ABC$ 的内容映射为 $\triangle A_1BC$。显然，这时 RPQ_1 是直线（由于等角特征：$\angle BPQ = \angle BPQ_1 = \angle CPR$），而 NKM_1 则是折线。

接着取 A_1B、A_1C_1、B_1C_1、B_1A_2 作类似映射，最后则形成全图所示，得映射五次的结果如下：

从 R 至 R_4，$RP + PQ_1 + Q_1R_2 + R_2P_2 + P_2Q_3 + Q_3R_4$

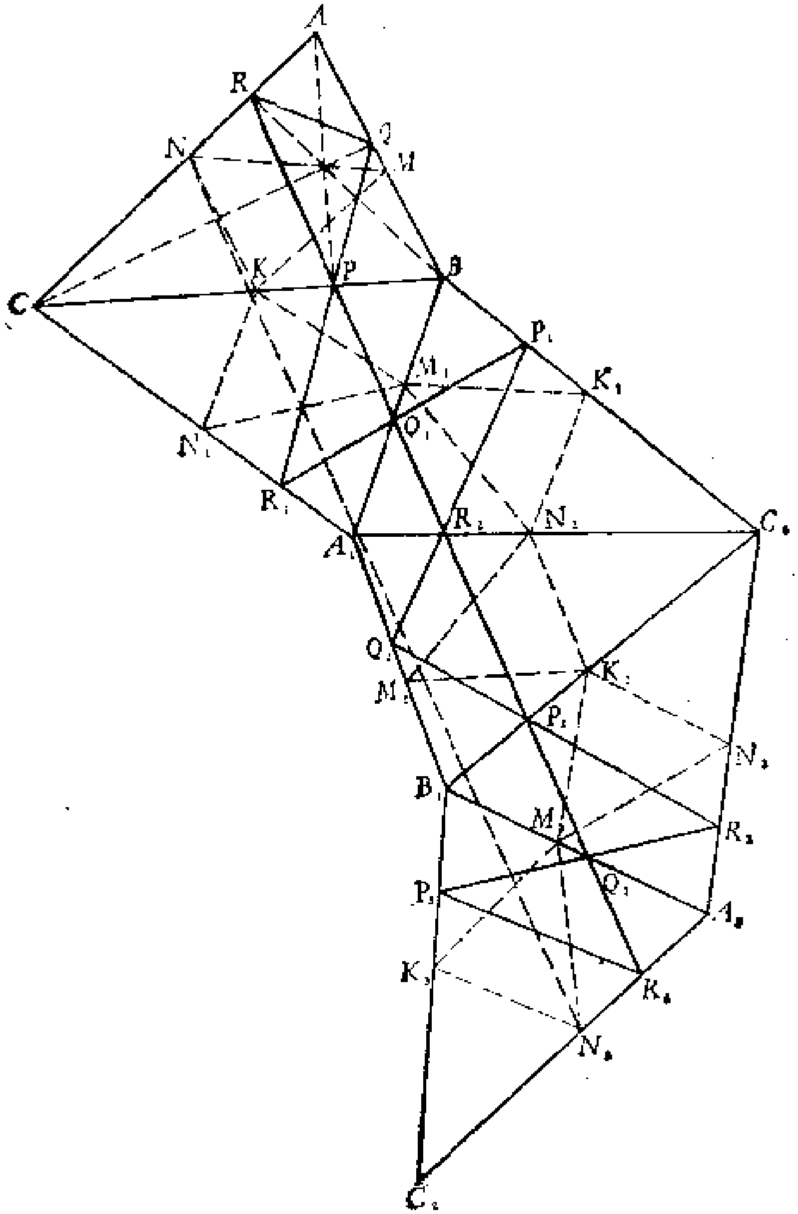

A
R
Q
M
N
K
P
B
C
P_1
M_1
K_1
Q_1
N_1
R_1
R_2
N_2
C_1
A_1
Q_2
K_2
M_2
P_2
N_3
B_1
M_3
R_3
Q_3
P_3
A_2
K_3
R_4
N_4
C_2

图 9

为 $\triangle PQR$ 周长的二倍；而从 N 至 N_4，$NK+KM_1+M_1N_2+N_2K_2+K_2M_3+M_3N_4$ 为 $\triangle KMN$ 周长的二倍。前者是直线，为 RR_4； 而后者则是折线。这折线必然大于 NN_4。如果我们能证得 $NN_4=RR_4$，则 $\triangle KMN$ 的周长就大于 $\triangle PQR$ 的周长了。

图中 AC 按顺时针方向转过$2\angle ACB$，成为 CA_1；再按顺时针方向转过 $2\angle A$，成为 A_1C_1；然后按反时针方向转过 $2\angle ACB$，成为 C_1A_2；再按反时针方向转过 $2\angle A$，成为 A_2C_2。按顺、反时针方向转过的角度之和一样，因此 $AC \parallel A_2C_2$；同时，RN 与 R_4N_4 在图形中的相对位置是一样的，所以因 RN 与 R_4N_4 既平行而相等，使 RNN_4R_4 成为平行四边形，故得 $NN_4=RR_4$。

根据以上推导结果，这道题目也就得到解答了。

"镜射法的确是许瓦尔兹独出心裁的杰作，不过，正常的证法也有，同学们可以仿效图 5 试试看。"刘老师将这作业布置给同学了。

奇妙的音乐厅

"余音绕梁，三日不去"。这是古人对好音乐在心境中回响的形象描绘。然而，好音乐要是有好的音乐厅配合，那就更好了。当你在幽静的山谷中高喊一

声，立即有一个同样的音调跟随出现，这就是回音。物理学告诉我们，声波碰上障碍物就会产生反射，那末，这小小的音乐厅应该怎样设计，才能使音响效果最好，不致被各方面的回音扰乱呢？这就是建筑声学家们的任务。

在古希腊，有一种奇妙的音乐厅，它的天棚穹隆成鸡蛋壳的形状。这个音乐厅的甲座既不在前排，又不在后排，是在指定的一个不前不后的处所，而舞台和音乐池也是位于一个特定的地点。这种音乐厅的设计者考虑哪些前提呢？

原来，天棚是个椭球面，在它的一个焦点放送音乐，则在另一个焦点的音响效果最好。

“也许是这样，可是有没有理论根据呢？”王慧对刘老师讲述的情形半信半疑。不过，她认为刘老师不会讲没有理论根据的事儿，提出这个问题只不过是催促着快些往下讲。

声波与光线一样，也具有反射的“等角特征”，总要选择一条最短的路程前进。从椭球面（我们通过坐标面截取一个椭圆来研究，如图10）的一个焦点发出的音响，抵达天棚上任意一点后，必然射向另一个焦点，这就是理论根据。

在曲线上的某一点，等角特征是对该点的切线而言。原来椭圆上任意一点与两焦点的联线，对该点切

线都具有等角特征，从图10可见，如 F_1、F_2 为两焦点，过椭圆上一点 P 作切线，则若 $\angle 1 \neq \angle 2$，必然可以在切线上另找到一点 P'，使 $\angle 1' = \angle 2'$，据等角特征，知

$$F_1P' + P'F_2 < F_1P + PF_2$$

可是这种关系是不成立的。

椭圆上任意一点距两焦点的和为定值。

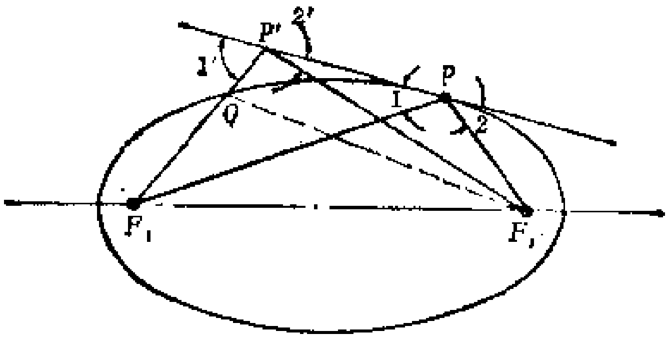


图 10

椭圆不是这样画的吗？取一根带子，两端固定在 F_1 和 F_2，如图11，用一支铅笔靠在带子上，将它拉紧，在拉紧的情况下移动笔尖，画出的图形就是椭圆。

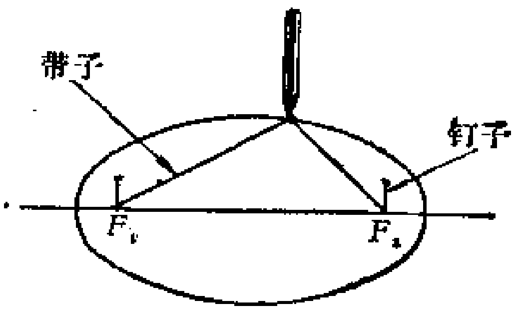


图 11

因此，在图10中，

$$F_1Q+QF_2=F_1P+PF_2$$

而 $$F_1P'+P'F_2=F_1Q+QP'+P'F_2$$

因 $$QP'+P'F_2>QF_2$$

故 $$F_1P'+P'F_2>F_1Q+QF_2$$

即 $$F_1P'+P'F_2>F_1P+PF_2$$

与上述等角特征情况下的 $F_1P'+P'F_2<F_1P+PF_2$ 矛盾，所以假设 $\angle 1\neq\angle 2$是不成立的。$\angle 1$必然等于$\angle 2$。

因此，从 F_1 点发出的音响必然按等角特征的规律反射到 F_2 点。

怎样定这条路线？

一幅桌面大的施工总平面图摊在会议参加者的面前，有的人在议论，有的人在思索，有的人则在写着或画着什么。

一项新的任务摆在大家面前，要进行选线，以确定新建公路的位置。

学校外围有两条交叉的公路干线，伸延着通往远方。干线的走向与学校的所在位置一起标注在总平面图上，从图上的坐标关系可以看出它们之间的相对位置。现在要求新建的这条公路成一直线，通过学校并与那两条干线连接沟通。

怎样在图上定出公路的位置，才能使这条路线最短呢？

又是一个数学问题，看起来简单，解起来难，可是办法总会有的。

刘老师的锦囊中有没有这样一把钥匙，用它能够开启这扇大门呢？

刘老师对这个问题的解答是有所知的：

过图12的定角 $\angle BAC$ 内一定点 P 引直线交两边于 Q、R，若自 P、Q、R 各作 QR、AB、AC 的垂线，三垂线同交于一点，则 QPR 为最短线。

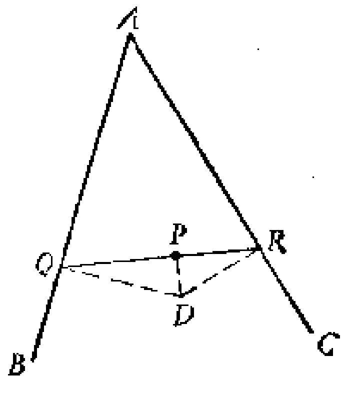


图 12

证明这个论断之前，必须先证明一个问题：

设圆的内接四边形有一对角线是直径，则两对边在

另一对角线上的正射影相等（按图13所示，即 $BE=FD$）。

作$OG\perp BD$，$LK\parallel BD$。

由于对顶角相等，斜边都为圆的半径，故直角三角形 OAK 与 OCL 全等，得 $OL=OK$。

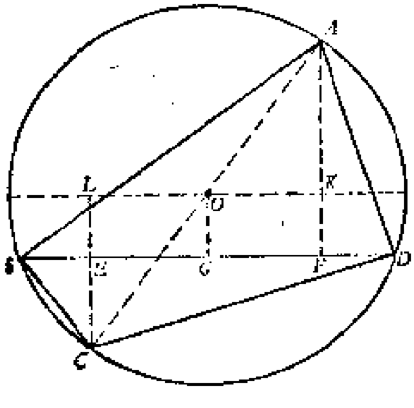


图 13

于是 $GE=GF$，因 G为 BD 的中点，故

$$BE=FD$$

（同理可证得另两对边在该对角线上的正射影相等，即 $BF=ED$）

从图12可见，因 $\angle DQA$ 与$\angle DRA$ 都为直角，故A、Q、D、R 四点共圆，AD 为圆的直径。这样，只需证明：若 AQ 在 QR 上的正射影等于 PR，则 QPR 为最短线。

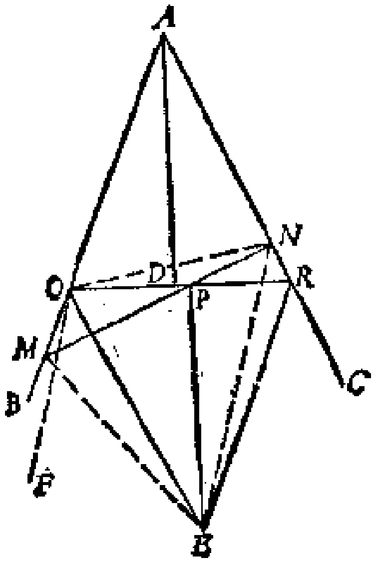


图 14

见图14，QD 为 AQ 在 QR 上的正射影，而 $QD=PR$。过P 作 QR 的垂线，

并取 $PE=AD$；直角三角形 ADG 和 EPR 有两个对应边相等而全等，故 $AQ=RE$；同理 $AR=QE$，故 $AQER$ 为平行四边形。

过 P 点作任意直线 MPN，应证明

$$MN>QR$$

再比较 $\triangle QER$ 与 $\triangle MEN$：如能证明

$$\triangle MEN>\triangle QER$$

且 $\triangle MEN$ 的 MN 边之高小于 $\triangle QER$ 的 QR 边之高EP，则 $MN>QR$。

因 $AR\parallel QE$，故 $\triangle QER$ 与 $\triangle QEN$ 等高同底，面积亦等，比较 $\triangle MEN$ 与 $\triangle QEN$ 即可。

过Q 作 EN的平行线 QF，则因$\angle EQF=\angle QEN<\angle QER$，即小于$\angle EQM$，$F$ 必在 M、E 之间。故 $\triangle MEN$ 的高大于 $\triangle QEN$ 的高（同以 EN 为底），$\triangle MEN>\triangle QEN$，即 $\triangle MEN>\triangle QER$。

至于$\triangle QER$ 的 QR 边之高 EP 必然大于 $\triangle MEN$ 的MN 边之高，这是很明显的（EP 与 $\triangle MEN$ 的高以及 MN 的相应段构成直角三角形，EP是斜边，最长）。

故 $MN>QR$，QPR 为最短线。

可是，应用什么方法来定出这条路线，刘老师感到无能为力，据她所知道：这条最短线叫做“菲洛线”，目前还没有发现它的作图法，能不能解决得了，还有待进一步研究。

韩 信 点 兵

刘老师在小时候，也和其他小朋友一样，喜欢听大人们讲述历史故事。那些惊心动魄的故事情节常常吸引她，使她着迷，同时也充实了她那小小的知识宝库。有关韩信的许多故事就是其中一部分。

可是，尽管这些故事那样扣人心弦，却比不上韩信在科学史上的一些成就如此深深地溶入她幼小的脑海，传说这位军事家曾经创造用三、五、七排行的方法查点人数，曾经发明千变万化、神机莫测的中国象棋，在棋盘上画出“楚河”、“汉界”……。

也许，三、五、七排行法以及中国象棋等根本就

不是韩信所首创。但是，它们毕竟记载在我国古代科学史上，成为千古不灭的长空明星。

韩信带兵，一向以纪律严明著称。他执行军法如山，不徇私情。

照例，每三天要进行一次点兵操练，所有将士必须准时开到大本营。大本营设在中心点，而东、南、北各驻扎一队人马。

这天，空中飘落自花花的大雪，南营、北营的将士都已到齐，规定的卯时时刻已过，才见东营将军领着队伍气喘吁吁地赶到。

“又来晚了。”韩信皱起眉头，不悦地自言自语。

东营将士没有准时前来应卯，已经好几次了，可是一直没有按照军法进行处分，谁都感到惊奇。这是怎么回事呢？原来韩信了解东营的困难，他们人数众多，而且离大本营又远，风烈雪寒，应该体谅他们的苦衷啊！

他做出决定：迁移大

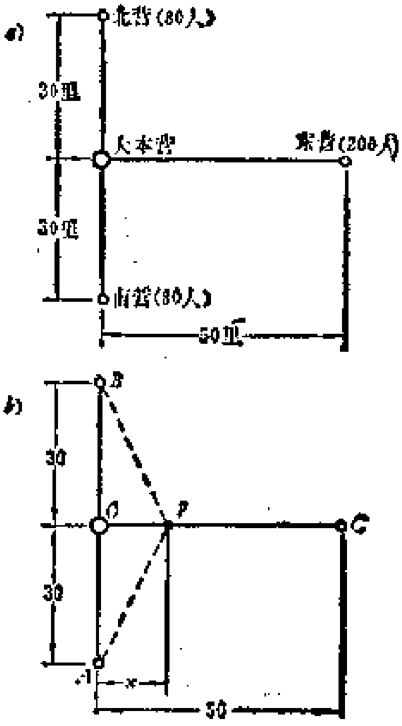


图 15

本营，在那儿点兵。往东营靠近一些吧，使得所有将士耗费在走到大本营的时间总量为最少。

图15a是刘老师在黑板上画的草图，新立的大本营应该设在哪儿呢？

这样一个问题大概是难不倒王慧的，且把算式列出来看看吧！

按图15b，设大本营的新位置在P点，离原位置为x。对O点来说，A、B是对称的（人数、距O点的距离都一样），故P点应在对称轴OC上。

所有将士耗费在走到大本营的时间总量为

$$y=80AP+80BP+200PC$$

即 $$\begin{aligned} y&=80\sqrt{30^2+x^2}+80\sqrt{30^2+x^2}\\ &\quad+200(50-x)\\ &=160\sqrt{30^2+x^2}+200(50-x)\\ &=40[4\sqrt{30^2+x^2}+5(50-x)] \end{aligned}$$

怎样求y的最小值呢？太难了！

王慧抬起头，望着刘老师，期待她的帮助。可是，刘老师不但没有解答，反而提出一个更加复杂的题目：

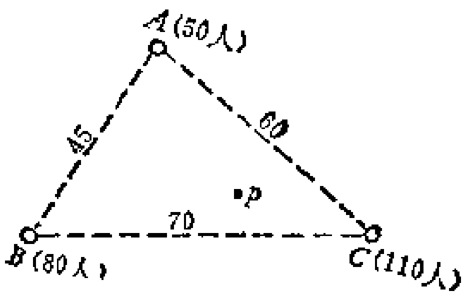


图 16

图16中A、B、C三点驻扎的人数分别为

师

50、80、110人，大本营P应设在哪儿，所有将士耗费在走到大本营的时间总量为最少？

图中找不出什么对称点，建立计算式可就不那么容易了。可是，两千年以前的韩信能够想出解决办法，二十世纪的中学生还赶不上古人吗？

几何解法

平面几何学是最好的训练逻辑思维与推理的课程。这个观点刘老师说过不止一遍，王慧和同学们也深有所悟，他们喜爱它，也总是主动地用它来训练自己。

因此，有时他们就免不了要找一些难题来考验自己，为了解一道题，吃不下饭、睡不着觉。也许，这道韩信点兵的极值问题也是难题？

王慧从来不怕什么难题，相反地，她倒喜欢接近它，这里面包含着多少乐趣啊！甚至连有名的几何作图三大不能问题，她也要试试看。正如登上高楼，“望尽天涯路”，然后经过一番努力和周折，加强自己的独立思考，当绞尽脑汁，忽然出现某种新颖的方法，一破即解，那时，真是兴味无穷啊！

然而，想象中的新颖方法是不会凭空跳出来的，要依靠平日的积累，就象囊中取物一样，首先，你的锦囊中必须存有百宝，然后才能一触即得。

所以，刘老师建议同学们多做一些有关极大、极小问题的几何题，以提高解决极值问题的能力。同时，她为同学们举出一些例子。

一、三角形中有两边为定值，试找出面积为极大的一个三角形。

解：见图17，一边的定值为 BC；用另一边的定值为半径、以 B 为圆心画圆，则圆周上任意一点与 B、C 构成的三角形都符合题意。

显然，只有当两边互相垂直时面积最大（图中的 $\triangle ABC$。它的高比任意 $\triangle A'BC$ 的高 $A'D$ 大）。

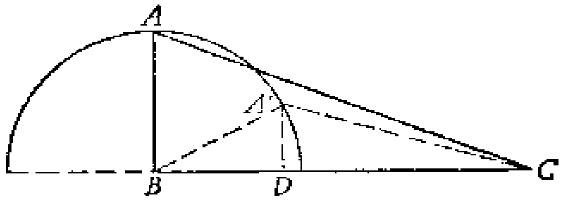


图 17

二、三角形的底边为定值，周长也为定值，试证明面积为极大的一个三角形是等腰三角形。

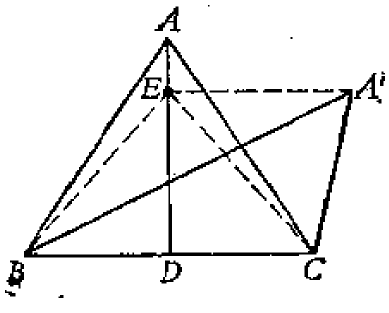


图 18

解：见图18，BC 为底边，$AB=AC$，$AB+AC=A'B+A'C$。

作 $AD\perp BC$，则 AD 为 BC 的中垂线。

过 A' 作 $A'E \parallel BC$，E 为 BC 中垂线上的一点，故 $BE=EC$，可得 $\triangle BED \cong \triangle CED$，对应角 $\angle BED = \angle CED$。据等角特征：$BE+EC<A'B+A'C$，即 $BE+EC<AB+AC$，得 $ED<AD$，故 $\triangle EBC<\triangle ABC$。

但 $\triangle EBC$ 与 $\triangle A'BC$ 同底等高，面积相等，于是证得 $\triangle A'BC<\triangle ABC$。

三、试证明同底等积的所有三角形中，等腰三角形的周长为极小。

解：从图18可以看出，据等角特征知：等腰三角形 EBC 的周长小于 $\triangle A'BC$（与 $\triangle EBC$ 同底等积）的周长。

四、图19中的 $\angle MAN$ 为定角，P 为其内一定点，过 P 引直线与 AM 和 AN 交于两点，试证明这两点与 A 构成的三角形中，以 P 为 $\angle A$ 对边中点时面积为极小。

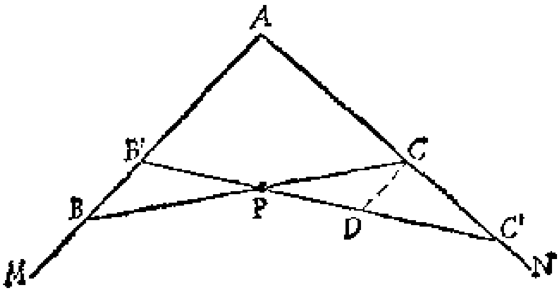


图 19

解：如 $BP=PC$，则应证明$\triangle ABC<\triangle AB'C'$。

作 $CD \parallel AM$，则 $\triangle BB'P \cong \triangle CDP$，故四边形

$AB'DC$ 与$\triangle ABC$等积；$\triangle AB'C'$比四边形 $AB'DC$ 多一个小三角形 CDC'，故 $\triangle AB'C'$大于 $\triangle ABC$。

五、图20中 P 为 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 的交点，过 P 引直线交圆周于 A、B，求 AB 的极大值。

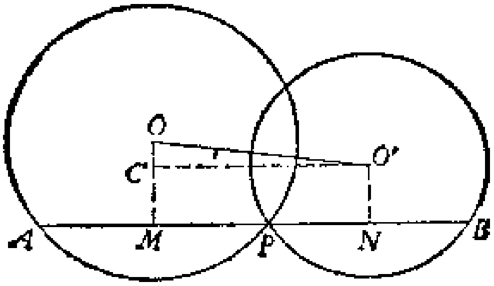


图 20

解：作OM和$O'N$ 垂直 AB，又作 $O'C\perp OM$。

$AB=AP+PB=2MP+2PN=2MN=2CO'$；

在直角三角形 OCO' 中，$CO'<OO'$，旋转 AB，当它与 OO' 平行时，CO'与 OO'相合，这时 AB 为极大。

故 AB 为极大时：$AB\parallel OO'$；极大值为$2OO'$。

六、两定圆如图21，两圆周上各取一点 A' 和 B'，求 $A'B'$ 的极值。

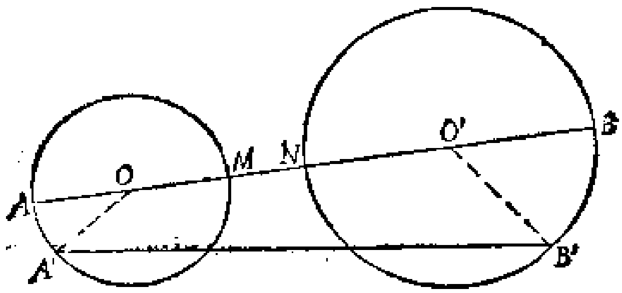


图 21

解：极大时为AB（因 $AB=A'O+OO'+O'B'>A'B'$）。

极小时为MN（仿照以上证明）。

也可以使$A'B'$与AB交叉，求极值的证明方法与以上类似。

极大值为两圆圆心距与两个半径（$O'B$、OA）的和，极小值为圆心距与两个半径的差。

七、作半圆的内接矩形，使其面积为极大。

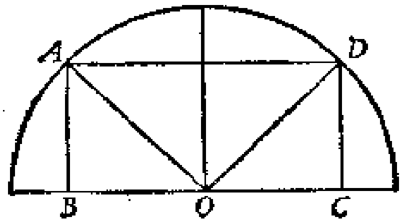


图 22

解：见图22，欲使矩形面积最大，则它的二分之一面积$\triangle AOD$亦应最大。

$\triangle AOD$的两边OA和OD都为半径，是定值，故据例一（图17），当$\angle AOD=90°$时矩形的面积最大（此时$\angle COD=\angle BOA=45°$）。

八、A、B为两定点，试在已知直线MN上取P点，使AP^2+PB^2为最小。

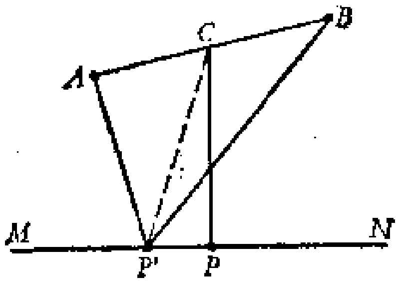


图 23

解：见图23，取AB的中点C；在MN上任取一点P'，则在$\triangle AP'B$中，$P'C$为AB

边的中线。据三角形中的中线长度公式：

$$4P'C^2=2(AP'^2+P'B^2)-AB^2$$

故 $$AP'^2+P'B^2=\frac{4P'C^2+AB^2}{2}$$

等式右边的 AB^2 是定值，因此只有当 $P'C$ 最短时，$AP'^2+P'B^2$ 最小。

于是，过AB的中点C作 MN 的垂线，垂足P便是所求的点。

九、图24的 OC 为定角 $\angle AOB$ 的平分线，P 为 OC 上的一定点。过P引直线与 OA 和 OB 交于 M' 和 N'，求$\triangle M'ON'$和 $M'N'$ 的极小值。

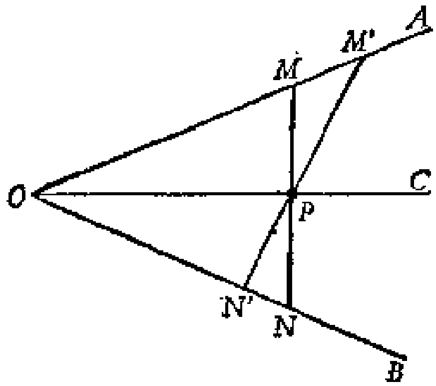


图 24

解：据例四（图19），$M'P=PN'$ 时（即 M' 和 N' 处于M和N处），$\triangle M'ON'$ 极小。极小值按以下确定：

$$\triangle MON=2\triangle MOP=2\cdot\frac{1}{2}OP\cdot MP$$

$$=OP\cdot OP\ \mathrm{tg}\ \frac{\angle MON}{2}$$

$$=OP^2\mathrm{tg}\ \frac{\angle MON}{2}$$

$\triangle MON$ 与 $\triangle M'ON'$ 比较：$\triangle MON$ 的面积最

小而高最大，所以底边最短。故 $M'N'$ 的极小值为 $MN=2MP=2OP\operatorname{tg}\frac{\angle MON}{2}$。

十、如四边形的两条对角线为定值，试证明当对角线互相垂直时，它的面积极大。

解：先探讨对角线长度和交角与四边形面积的关系：

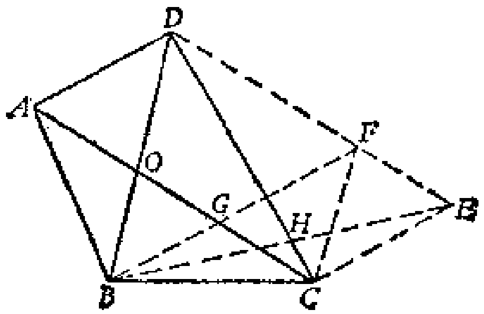


图 25

见图25，过四边形 $ABCD$ 的一个顶点D作$DE \perp\!\!\!\!= AC$，则 $ACED$ 为平行四边形；联 BE、CE，作 $BF \parallel AD$；联 CF，则 $\triangle BCE=\triangle FCE$（同底等高），即 $\triangle BCE=\frac{1}{2}\square GCEF$；同理得 $\triangle ABD=\frac{1}{2}\square AGFD$，所以 $\triangle ABD+\triangle BCE=\frac{1}{2}\square ACED=\triangle DCE$。

于是，四边形 $ABCD=\triangle ABD+\triangle BHD+\triangle BCE-\triangle HCE=\triangle BHD+\triangle DCE-\triangle HCE=\triangle BHD+\triangle DHE=\triangle DBE$；而 $DE=AC$，$\angle BDE=\angle BOC$。所以，四边形的面积等于这样一个三角形的面积：两边为对角线、夹角为对角线的交角。

据例一（图17），则当对角线互相垂直时，四边

形的面积最大。

十一、在$\triangle ABC$中任取一点P'，若$P'A+P'B+P'C$极小，则P'的位置在哪?

解：见图26a，以BC为一边，往$\triangle ABC$外作等边三角形BCD。探讨四边形$P'BDC$：

作 $\angle CDO=\angle P'DB$、$\angle DCO=\angle DP'B$，则$\triangle DCO$与$\triangle DP'B$相似，故$DC:DP'=DO:DB$；又$\angle ODB=\angle ODP'+\angle P'DB=\angle ODP'+\angle CDO=\angle CDP'$，故$\triangle P'CD\backsim\triangle BOD$（两对应边成比例、夹角相等），于是$P'C:BO=P'D:BD$，即

$$P'C\cdot BD=P'D\cdot BO$$

又从$\triangle DCO\backsim\triangle DP'B$知

$$P'B\cdot CD=P'D\cdot CO$$

故 $$P'B\cdot CD+P'C\cdot BD=P'D(BO+CO)$$

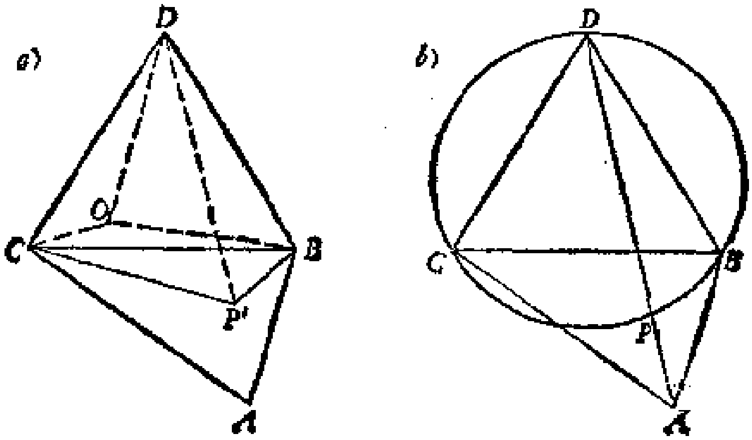


图 26

于是　$P'B \cdot CD + P'C \cdot BD \geqslant P'D \cdot BC$

因　$CD = BD = BC$，故

$$P'B + P'C \geqslant P'D$$

$$P'A + P'B + P'C \geqslant P'D + P'A$$

当 A、P'、D 成一条直线时 $P'D + P'A$ 极小，故 P' 必定在 AD 联线上；而当 P' 的位置能使 $BO + CO$ 为极小时，$P'A + P'B + P'C$ 极小，此时 $BO + CO = BC$，O 点落在 BC 上。

但 $\angle DCO = \angle DP'B$，故 P' 点必须在 $\triangle DCB$ 的外接圆上。因此，使 $P'A + P'B + P'C$ 为极小时，P' 的位置应该这样确定：

见图 26b，作 $\triangle DCB$ 的外接圆；联 AD，与圆的交点 P 就是所求的点。

那末，如果 $\angle A \geqslant 120°$，A 点落在圆周上或处于圆内，该怎样确定 P 点呢？这问题留给同学们解答吧！

再想想，如果是 $\angle B$ 或 $\angle C \geqslant 120°$ 呢？

十二、确定图16的 P 点。

解：见图27，按适当比例，在 AC 上截 $AK = 80$，以 $AL = 110$、$KL = 50$ 作 $\triangle AKL$；过 C 作 KL 的平行线交 AL 延长线于 M。在 AB 上截 $AE = 110$，以 $AD = 80$、$ED = 50$ 作 $\triangle AED$；过 B 作 ED 的平行线交 AD 延长线于 F。

分别作过 A、B、F 和 A、C、M 的圆，交点P 就是所确定的点。

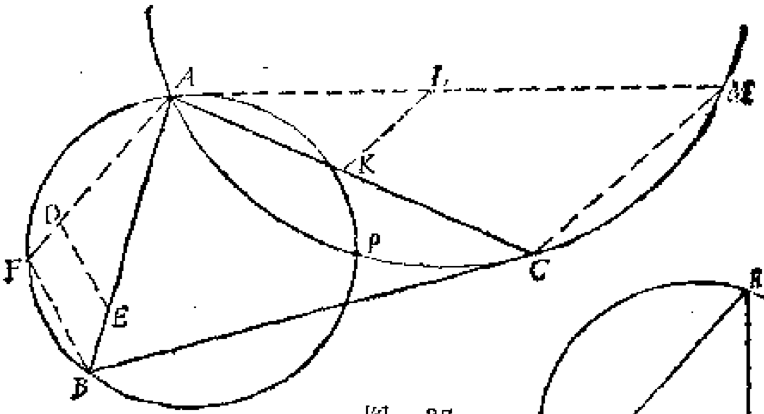


图 27

P 的正确性证明如下：

见图28，过A作 PA 的垂直线交两圆于 Q、R，联 QB、RC 并延长之交于 S。因 A、Q、B、P 共圆，$\angle PAQ$ 为直角，故 $PB\perp QS$。同理得 $PC\perp RS$。

$PA\cdot QR+PB\cdot QS+PC\cdot RS=2\triangle QPR+2\triangle QPS+2\triangle RPS=2\triangle RQS$；如在 $\triangle RQS$ 中除 P 外任取一点 P'，作三边垂线的垂足分别为 A'、B'、C'，则

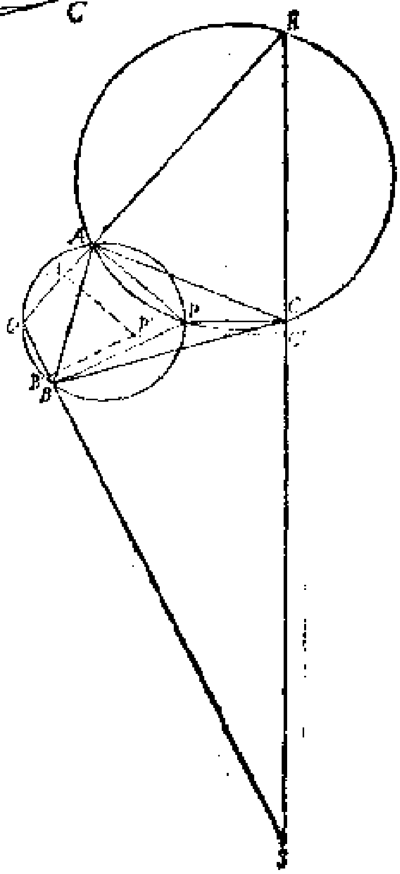


图 23

$$P'A' \cdot QR + P'B' \cdot QS + P'C' \cdot RS = 2\triangle RQS$$
$$= PA \cdot QR + PB \cdot QS + PC \cdot RS$$

$\angle ARC$ 与图27的 $\angle AMC$ 为同弦所对圆周角而相等，且 $\angle AQB = \angle AFB$，显然，$\triangle RQS$ 与图27的 $\triangle LKA$ 或 $\triangle EDA$ 相似，故

$$QR:QS:RS = 50:80:110$$

这样，我们只要证明

$$P'A \cdot QR + P'B \cdot QS + P'C \cdot RS > PA \cdot QR + PB \cdot QS + PC \cdot RS$$

就能够说明 $50PA + 80PB + 110PC$ 为极小值了。

因 $P'A > P'A'$（直角三角形的斜边大于直角边）、$P'B > P'B'$、$P'C > P'C'$（这三个不等式只可能出现一个为等式），所以

$$50P'A + 80P'B + 110P'C > 50P'A' + 80P'B' + 110P'C'$$

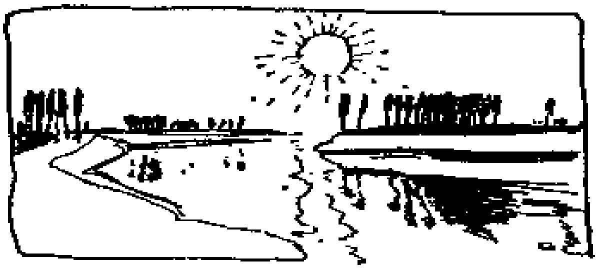
上式右边等于$50PA + 80PB + 110PC$，证毕。

千里之行，始于足下

刘老师又一次带领同学们来到河岸。

自从这条河流带着现实意义进入数学课以来，王慧不知道耗费了多少精力，总想探索出一种有规律的解题方法。

可是，难道象确定水塔位置那样的解法还不够简单吗？王慧自己不也提过，用光的反射定律解答这个问题？以后，大家又学会了象图1b那样的作图法，已经够简单的了！图中的B点一旦确定，极值（极小值）$AB+BC$便可很容易地求得，按图29为



$$AB+BC=\sqrt{d^2+(a+b)^2}$$

B点的位置为

$$BO=\frac{bd}{a+b}$$

的确，无论是用光的反射原理，或是用几何方法，肯定都是无疵可摘的。不过，要知道，有多少同学为这道题绞尽脑汁啊，他们之中曾经有人认为B点应该是AC的中垂线与MN的交点；有人认为应该据$\angle ABC$为直角定出B点等等。而几何

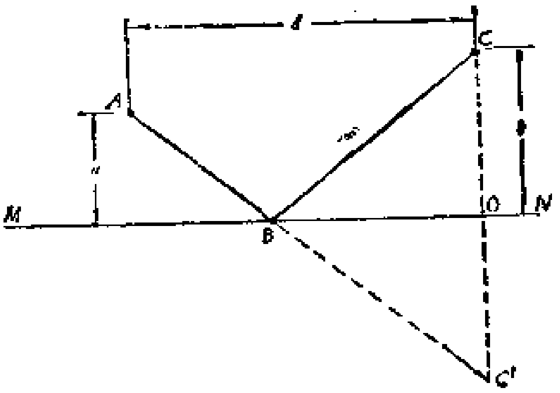


图 29

解法实在是很简单的，一点即破。可是现在回想起来，当初大家都动过几个小时的脑筋，为什么连这么简单的方法都没有想到呢？这说明，某种方法虽然简单，但它的形成却较困难。

证明一道稍有份量的几何题，往往需要花费较多的时间，用代数方法就不一样了，根据题意建立方程求解，想不出灵巧的方法，则可以用笨办法去代入消元，而对于象解一元二次方程那样的题目，如果一时分解因式有困难，还可以应用求根公式，笨一点，但毕竟容易解答。

“那末，这样的极值问题可不可以用数解法（泛指代数解法或数值解法）呢？譬如列出一个什么方程。”王慧在经过一番努力而无成果后，决定向刘老师提出自己的疑问。

刘老师表示赞许。多么希望所有学生都能运用已学到的知识进行独立思考啊！

王慧已经轻而易举地列出以下一个方程：

设 $AB+BC=y$，BO 为 x，则

$$y=\sqrt{a^2+(d-x)^2}+\sqrt{b^2+x^2}$$

剩下的问题就是如何确定一个 x 值，当 x 为这个数值时，y 值为极小值。

现在，她在期待着刘老师的指导。可是，刘老师说些什么呢？她说：

“解决这类问题是有一定方法的，但要涉及一些较深的数学理论，就你们现有水平是接受不了的。要从简到繁，按部就班地打好基础，绝不能好高骛远。须知，千里之行，始于足下啊！”

可是，如果函数关系简单，则可以很容易地利用数解法解答了。例如有这样一道题：

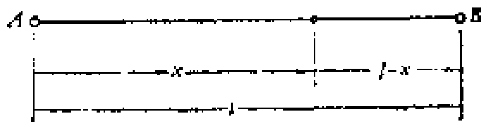


图 30

见图30，A地和B地分别有一个和四个粮食供应站，各站所需的粮食数量大致相同，现在准备筹建一个粮库，库中贮粮供这五个粮站用。问怎样确定粮库的位置，才能使分送粮食的总运输量为最小？

这算是什么极值问题呢？王慧就能够毫不费力地解答这个问题：将粮库设在B地不就行了吗？在这种情况下，只需往A地给一个粮站运粮就行了。

如果用数解法呢？王慧也会列出算式：

当然，粮库应设置在A、B之间的直线联线上。设每站需供应粮食重量a、粮库离A地为x，则以“重量-距离”作为运输量的计量单位，则总运输量y为

$$y = ax + 4a(l - x)$$

即 $y = 4al - 3ax$

$4al$ 是定值，总也不变。因此，要使 y 为极小，影响因素就取决于 x 了。根据题意：

$$l \geqslant x \geqslant 0$$

x 的最大值只能是 l，所以当 $x=l$ 时 y 有极值（极小值）。故粮库应设在 B 地，此时，运输量为

$$y=4al-3al=al$$

根据这个例子的运算，我们知道，对于最简单的函数关系——一次式

$$y=ax+b$$

y 的极值取决于变数 x，而与定值 b 无关。

当 a 为正数：取 x 为最大值时；所得 y 为极大值；反之，y 为极小值。

当 a 为负数：取 x 为最大值时，所得 y 为极小值；反之，y 为极大值。

工 地 的 早 晨

工地上有那么多推土机、挖掘机、起重机……，还有成队的载重汽车，川流不息地往返着。

工地的中心有一座临时性的简易房子，那就是调度室。王慧每天从这里路过时，总能看到调度室门口喧闹得乱哄哄的场面，这是怎么回事？

原来调度员有一项重要工作：安排载重汽车的任

务。他必须有效地合理配备车辆和相应的装卸人员，按照货物的特点和运距远近、路线条件等调度车辆，使它们的工作指标（这种指标以“吨-公里”计）为最高，并且装卸人员都有活干，不产生窝工现象。

可是，汽车的分配工作相当复杂，每天要运输的货物品种不一样，可供调度的汽车和装卸人员数量也不一样，为了争取多完成工作指标，调度员可是煞费苦心，要在短时间内确定一个非常周密的方案是困难的，所以每天早晨总是应付不了那些急性的驾驶员们的催促。

可是，近几天王慧发现，调度室的情况与往常大不相同，上班铃一响，汽车全部出动，调度员的工作显得何等轻快！

关于如何有效地利用运输工具的问题，那是一个工程管理的专题，刘老师对其中关键也知道得不多，但是在同学们的一致请求下，就她所知，做了一些简单的介绍。要知道，如果调度员能够掌握有关极值计算的知识，那末，他的工作可就好干多了。

下面便是其中的一个例子：

这天，可供调度员分配的汽车有50辆，装卸工人120 名。可运输的材料有三种，但是对于各种不同的材料，配合机械装卸所用的装卸工人数量也不同。并且运输各种材料所完成的工作指标也不一样，情况如

甲

乙

下表：

材料名称	每车需装卸工人数量	每车可完成工作指标 吨-公里
水　泥	4	200
钢　筋	3	150
木　材	2	100

要使当天获得最高的工作指标，把汽车都分配去运输水泥吧！因为运水泥每车可完成的工作指标最高。可是，用50辆汽车运水泥得需要200名装卸工人，人数不足。

那末，运水泥和钢筋的车辆多分配一些，少分配运木材的吧！

可以这样武断地凭感性判别吗？最好还是用理论计算来得可靠一些，并且能够得出具体数值：

设分配去运水泥、钢筋、木材的车辆分别为x、y、z，则可建立以下方程：

$$\begin{cases} x+y+z=50 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x+3y+2z=120 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

同时，设m为完成的总工作指标，则

$$m=200x+150y+100z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

问：x、y、z等于多少时，m有极大值；m是多少？

解：$(2)-2\times(1)$： $2x+y=20$

即 $y=20-2x$ ··························· (4)

$(2)-3\times(1)$： $x-z=-30$

即 $z=30+x$ ··························· (5)

但 $y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，故

$20-2x\geqslant 0$，即 $10\geqslant x$

$30+x\geqslant 0$，即 $x\geqslant -30$

合并以上两式得 $10\geqslant x\geqslant -30$

用(4)、(5)两式代入(3)式：

$m=200x+150(20-2x)+100(30+x)$

$=6000$吨-公里。

那末，极大值是多少呢？按照这个结果，似乎m值与x、y、z并没有关系，只需使x值不超过10（当然$x\geqslant 0$），配合相应的y、z值就可以了。

是这样吗？王慧做了验算：

令$x=8$，则据(4)式：

$y=20-2\times 8=4$

据(5)式： $z=38$

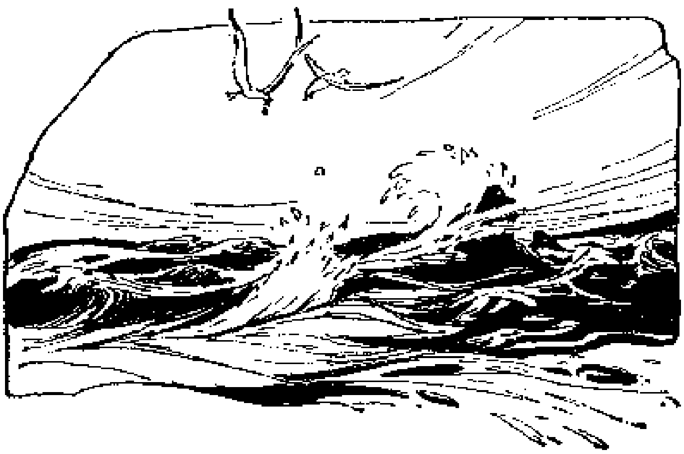
故 $m=200\times 8+150\times 4+100\times 38=6000$

王慧迷惑不解，只好带着这个疑问去请刘老师解答，她认为，刘老师并没有说出怎样合理地分配汽车的问题。

"是的，怎样合理地分配汽车，才能获得最高指

标，在这个例子中并不体现。可是，首先我们得知道什么情况下能有极值，同学们且勿性急，随后我就会讲清楚的。”刘老师在同学们面前表现的那种沉着的神态，对一些性急的同学，真有点按捺不住了。

誓鸟的心愿



苍茫的大海从来是不平静的。它时而掀起滔天的巨浪，时而愤怒地将波涛推下深渊。当狂风在海面上呼啸掠过，惊雷在乌云层里不时发出霹雳时，常能看到有一种飞鸟破云而出，象海燕一样疾驶而来，冲向扬波数丈的浪涛。

“精卫，精——卫——”这种鸟不时呼唤着自己的名字，顶着风暴出击，究竟是为什么呢？

传说太阳神炎帝有一个小女儿，名叫女娃，在东海游泳，不幸溺死，死后变成一种小鸟，经常衔着木、石扔到海里去。因为它的鸣叫声为“精卫”，人们就

给它取上这个名字。据说，这种鸟发誓不饮东海之水，因此又叫“誓鸟”。这就是我国有名的神话：“精卫填海”，这个神话歌颂了太阳神小女儿的斗争精神，可是这只弱女子变成的小鸟究竟能不能把东海填平呢？

茫茫大海，看出去无边无际，碧波万顷，一块小石子真是沧海一粟。不过，要是真的有这么一种鸟，能成年累月地往大海里填放石子，究竟会不会把大海填满呢？

“愚公能移山，精卫为什么不能填海呢？”刘老师说这话时，似乎并没有看到神色犹豫的同学。“如果我们不考虑地貌的变迁，那末，大海的体积是个定值，同时，每块小石子是占有一定体积的。虽然，精卫每年所填放的小石子体积也许只是大海体积的几亿亿分之一，而如果一代一代地坚持下去，几亿亿年后，誓鸟的心愿必定能够实现。”

也许是这样，当王慧用一个式子表达它们之间的关系后，恍然大悟。

设精卫每年能填放小石子的体积为v，大海的原有体积为V，则经过x年后，大海体积y当为

$$y = V - vx \quad (V \geqslant y \geqslant 0)$$

y的极大值和极小值分别为V和0。当$y=0$时，

$x = \dfrac{V}{v}$。

这是多么巨大的数字！也许x值竟是几亿亿，也许是更大的一个数字，不过，无论$\dfrac{V}{v}$是个多大的数字，尽管要用数十位以至数百位数来表示，它毕竟是有止境的，只要x值继续增大，终会满足y为极小值的要求。

"大家要看到，一个多么巨大的数字竟然存在着极值。那末，如果数字微乎其微，就更存在着极值了，是不是呢？"刘老师提出这样一个问题，的确使同学们困惑不解。

"也许是这样。"王慧暗自思量。她瞪大眼睛，期待进一步说明。

刘老师高举右手，手上拿着一支完整的粉笔。

"这是一支粉笔，仅仅是短短的一支粉笔，现在我把它掰成两半。"刘老师说着，便把半截粉笔放在桌面上，然后，又举起余下的半截。

"明天，我将这半截又掰成两半，后天再把余下的掰成两半，大后天、第四天……都这样做。那末，几天以后能将它掰完呢？"刘老师提出的这个问题很简单，王慧当然能够解答。

明天(第一天)，粉笔将余$\frac{1}{4}$支；后天——$\frac{1}{8}$支；

大后天——$\frac{1}{16}$支，即$\frac{1}{2^4}$支；……第 n 天——$\frac{1}{2^{n+1}}$支，至多少天，粉笔余段为零呢？

设第 x 天的粉笔余段为零，则有

$$\frac{1}{2^{x+1}}=0$$

$$2^{x+1}=\infty$$

$$(x+1)\lg 2=\lg\infty$$

$$x=\frac{\lg\infty}{\lg 2}-1$$

显然地，$x=\infty$，那就是说，永远找不出一个 x 值，能使 $\frac{1}{2^{x+1}}=0$。

“永远，是永远找不到这样的 x 值的。”刘老师看了王慧的答案，笑了笑，补充说，“这个物质无限可分的学说在两千年前就形成了，一本叫《庄子》的书中记载着：

一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

刘老师接着说：

“因此，多少天能把粉笔掰完呢？没有这样的极值。”

那末，以上两个例子说明了什么问题呢？须知“无限大”就象一条通往茫茫宇宙的道路，永远走不到尽头，而只要是能指出一个目的地，不管它离我们多么遥远，终究能够抵达。这就是告诉我们什么情况

没有极值，在另一种情况下则有极值。

现在反过来看看上节分配汽车的问题。

用50乘(2)式，可得

$$200x+150y+100z=6000$$

与（3）式对照，便知$m=6000$，与x、y、z无关，只要这三个数符合(1)和(2)式的要求，m总是等于6000。这说明另一种没有极值的情况。

如果运水泥每车可完成工作指标不是200吨-公里，而是300吨-公里，则

$$\begin{aligned} m &= 300x+150(20-2x)+100(30+x)\\ &=100x+6000 \end{aligned}$$

欲使m为极大，x应取最大值，故$x=10$，代入(4)和(5)式得$y=0$，$z=40$，这就是答案，此时$m=7000$。

似曾相识

甲骑马从A地起跑，时速40里；乙骑马从B地起跑，时速60里，见图31，A、B相距100里。甲朝B方向直线前进，乙朝与AB成$60°$角的方向前进。问跑多长时间后两人相距的距离最短？

以上是刘老师写在黑板上的一道题，显然，是个

极值问题，这是什么性质的问题？难易程度如何呢？

很简单，用数解法，而不能用几何方法。王慧和同学们都能一眼就看出它的解法，而列方程，当然也不是困难的事。

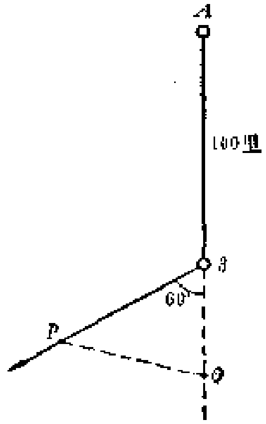


图 31

设甲已到Q点，乙到P点，此时两人相距的距离最短，那末距离就是PQ，以y表示PQ。甲自A至Q所花的时间为t，则$40t=100+BQ$，即$BQ=40t-100$。乙自B至P所花的时间也为t，故$BP=60t$。

应用余弦定理于$\triangle BPQ$，则可列出方程：

$$y^2=(40t-100)^2+(60t)^2-2\cdot 60t(40t-100)\cos 60^\circ$$

$$y^2=1600t^2-8000t+10000+3600t^2-2400t^2+6000t$$

即 $$y^2=2800t^2-2000t+10000$$

根据这个式子，能确定t值吗？

怎么解呢？王慧感到为难，但再详细看看这个式子，噢！好象学过这种形式的极值求法，真是似曾相识，可是一时想不起来了。

对！这是一个二次三项式，它的极值运算过去已经学过，可是不太巩固，应该“学而时习之”，还是

简单地复习一遍吧！

对于二次三项式 ax^2+bx+c，如 $a\neq0$，则它可以改写为

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的 y 是随 x 的变化而变化的，当

$$x=-\frac{b}{2a}$$

时，如 $a>0$，函数有极小值；如 $a<0$，函数有极大值。极小值或极大值为

$$y_{极值}=\frac{4ac-b^2}{4a}=c-\frac{b^2}{4a}$$

这样，上面的函数

$$y^2=2800t^2-2000t+10000$$

在当 $t=-\dfrac{-2000}{2\times2800}=\dfrac{5}{14}$ 小时时，y^2 有极小值。

为了简化起见，y^2 也可用下式表示：

$$y^2=400(7t^2-5t+25)$$

显然，确定 y^2 有极值（也就是 y 有极值）时的 t 值与系数 400 无关，所以

$$t = -\frac{-5}{2\times 7} = \frac{5}{14}$$

再举几个例子复习：

一、求 $y = \dfrac{4}{3x^2 - 7x + 5}$ 的极值。

解：分母 $3x^2 - 7x + 5$ 中，x^2 的系数$3>0$，有极小值，为

$$\frac{4\times 3\times 5-(-7)^2}{4\times 3} = \frac{11}{12}$$

分母为极小值时，y 为极大值，故 y 的极大值为

$$y = \frac{4}{\frac{11}{12}} = \frac{48}{11}$$

这道题分母极小值为正，因此分母总为正值，y 也总为正值，当然，分母愈小，y 值愈大。可是，如果分母极小值为负（或分母极大值为正），y 有没有极值呢？又，如果分子是负值呢？还有其它各种不同的情况吗？这些，留给同学们思考解答吧！

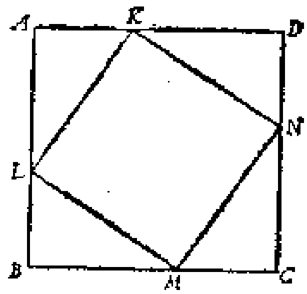


图 32

二、按图32，在正方形 $ABCD$ 中，最小的内接正方形面积是多大？

解：设□$ABCD$ 的边长为 a，若 $AK = x$，则 $KD = a - x$。

$KN=KL$，$\angle DKN=90^\circ-\angle AKL=\angle ALK$，故直角三角形 DKN 与 ALK 全等，得 $LA=KD$。于是从$\triangle ALK$ 中可求得内接正方形的一边长的平方为

$$\begin{aligned}KL^2&=AK^2+LA^2=x^2+(a-x)^2\\&=2x^2-2ax+a^2\end{aligned}$$

KL^2即$\square KLMN$的面积，它的极小值为

$$\frac{4\cdot 2\cdot a^2-(-2a)^2}{4\cdot 2}=\frac{a^2}{2}$$

三、图33中 $\triangle ABC$ 为一已知三角形，如何作一BC 的平行线 MN，使以 MN 为一边的内接矩形为极大？

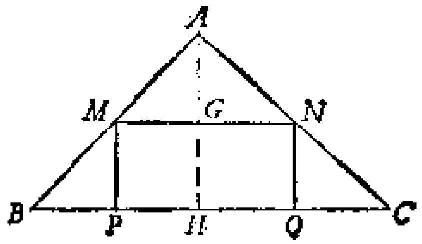


图 33

解：作$AH\perp BC$，则

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AG}{AH}=\frac{AH-MP}{AH}$$

$$MN=BC\left(\frac{AH-MP}{AH}\right)$$

内接矩形的面积为 $MN\cdot MP$，等于

$$BC\left(\frac{AH-MP}{AH}\right)MP=\frac{BC}{AH}(AH\cdot MP-MP^2)$$

因 BC、AH 是定值，故仅需求括号内的极大值，得 $MP=-\frac{AH}{2(-1)}=\frac{AH}{2}$ 时面积为极大。

于是，取 BH 的中点 P，作过 P 与 BC 垂直的线交 AB 于 M。再过 M 作 BC 的平行线即得 MN。

四、某产品在生产过程中可提炼副产品，但因工艺复杂，每提炼 $r\%$ 副产品则会降低原产品的产量 $5r\%$，为得到最多的副产品，应选用多大的提炼率？

解：用 A 表示原产品产量，则提炼 $r\%$ 副产品后，产量为 $A-A\cdot\frac{5r}{100}=A\left(1-\frac{r}{20}\right)$，故所提炼的副产品数量为 $A\left(1-\frac{r}{20}\right)\frac{r}{100}=\frac{A}{100}\left(r-\frac{r^2}{20}\right)$，欲使此值最大，则当使 $r=-\frac{1}{2\left(-\frac{1}{20}\right)}=10$。

因此答案为：当提炼率为10%时可得到最多的副产品。

五、如 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，求 $x+y$ 的极小值。

解：$x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$

$$=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}$$

$$=a+b+2\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+\left(\sqrt{\frac{ay}{x}}-\sqrt{\frac{bx}{y}}\right)^2$$

由此可知，$x+y$ 为极小时 $\sqrt{\frac{ay}{x}}=\sqrt{\frac{bx}{y}}$，即

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{y}{\sqrt{b}}$$

极小值为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

当然，本题的 a、b 应为正数。

找不到这样的数

这天，刘老师在黑板上写着：

求 $\sqrt{-5}=?$

同学们都清楚，这是个虚数，谁也找不到一个数，它的平方值能等于 -5。在数学范畴内，它固然占着很重要的地位，可是在实际生活中却往往用不着它。

真的用不着它吗？刘老师可不这么想。数学各分支的有机联系可以说是息息相关的，虚数的概念甚至可以用来解决极值问题，这可太有趣了。

在学习一元二次方程的性质时，大家都知道：当 b^2-4ac 为负值时，$ax^2+by+c=0$ 的根是复数，包含有$\sqrt{b^2-4ac}$这个虚数；如果$\sqrt{b^2-4ac}$是非负值，也就是 $b^2-4ac\geqslant0$，则 x 的根为实数。利用这个性

质来解决极值问题，举以下一些例子就可说明。

一、见图34，工厂M的原料是由工厂N供给的，它们之间的相对位置如图所示，M是不通铁路的，只好在铁路的某处P设一个卸货站台，然后修一条公路PM转运。可是公路的运费要比铁路运费贵一倍。那末，P点的位置应定在哪儿，才能使总的运费为最省？

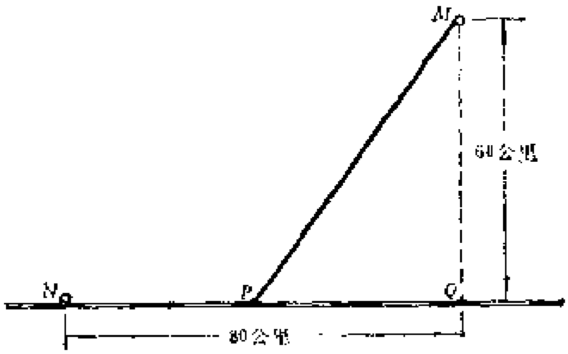


图 34

解：设 $PM=y$，每公里的铁路运费为k，则总运费为

$$m=k(80-\sqrt{y^2-60^2}+2y)$$

k是定值，故确定y值使$\frac{m}{k}$为极小，则m亦为极小。以x表示$\frac{m}{k}$，则

$$80-x+2y=\sqrt{y^2-60^2}$$

$$(80-x)^2+4y(80-x)+4y^2=y^2-60^2$$

$$3y^2+4(80-x)y+[(80-x)^2+60^2]=0$$

y 必须为实数，故

$$[4(80-x)]^2-4\cdot 3[(80-x)^2+60^2]\geqslant 0$$

$$(80-x)^2-3\cdot 60^2\geqslant 0$$

故 $80-x\geqslant 60\sqrt{3}$（x 为负值，舍去）

或 $80-x\leqslant -60\sqrt{3}$，得 $x\geqslant 80+60\sqrt{3}$

x 的最小值为 $x=80+60\sqrt{3}$。此时，在一元二次方程中 $b^2-4ac=0$，故根值为 $-\dfrac{b}{2a}$，得

$$y=-\frac{4[80-(80+60\sqrt{3})]}{2\times 3}=40\sqrt{3}$$

故 $PQ=\sqrt{(40\sqrt{3})^2-60^2}=20\sqrt{3}$

本题答案为：从 Q 点向 N 方向取距离 $20\sqrt{3}$ 公里，定 P 点即得。

二、求 $y=\dfrac{x}{2(x^2+1)}$ 的极值。

解：$2x^2y+2y=x$

$$2yx^2-x+2y=0$$

x 必须为实数，故

$$(-1)^2-4(2y)(2y)\geqslant 0$$

$$16y^2\leqslant 1$$

故 $\dfrac{1}{4}\geqslant y\geqslant -\dfrac{1}{4}$，得

$$y_{极大}=\frac{1}{4},\qquad y_{极小}=-\frac{1}{4}。$$

三、求 $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的极值。

解：令原式为 y，则

$$x^2-x+1=x^2y+xy+y$$

$$(1-y)x^2-(1+y)x+(1-y)=0$$

x 必须为实数，故

$$(1+y)^2-4(1-y)^2\geqslant 0$$

$$(1+y+2-2y)(1+y-2+2y)\geqslant 0$$

$$(3-y)(3y-1)\geqslant 0$$

两因子应同为正或同为负，或有一个为零，因此

$3-y\geqslant 0$，$3y-1\geqslant 0$，得 $3\geqslant y\geqslant\dfrac{1}{3}$；

$3-y\leqslant 0$，$3y-1\leqslant 0$，得 $y\geqslant 3$，$y\leqslant\dfrac{1}{3}$（不可能）。

故极大值为 3，极小值为 $\dfrac{1}{3}$。

四、见图35，直角三角形 ABC 的周长为定值 k，求内切圆半径的极值。

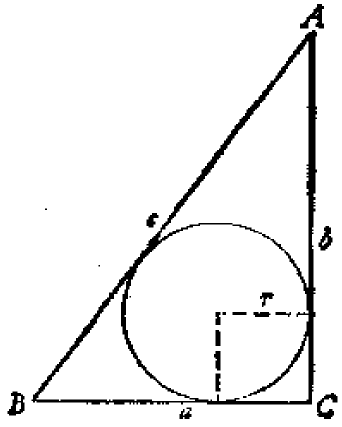


图 35

解：内切圆半径与边长的关系为

$$a+b-c=2r$$

而因 $a+b+c=k$

故以两式相减得 $c=\frac{k}{2}-r$

两式相加得 $a+b=\frac{k}{2}+r$ ……………………(1)

但 $a^2+b^2=c^2$，即 $a^2+b^2=\left(\frac{k}{2}-r\right)^2$

以（1）式平方减之为：

$$2ab=2kr$$

即 $ab=kr$ ……………………………………(2)

从(1)和(2)式的构成知道，a、b 为以下方程的根：

$$x^2-\left(\frac{k}{2}+r\right)x+kr=0$$

欲使这方程的根为实数，则

$$\left(\frac{k}{2}+r\right)^2-4kr\geqslant 0$$

$$r^2-3kr+\frac{k^2}{4}\geqslant 0$$

取等号时解得 r 的两个根为

$$r=\frac{3k\pm\sqrt{8}\,k}{2}=\frac{3\pm\sqrt{8}}{2}k$$

从而得 $r\geqslant\frac{3+\sqrt{8}}{2}k$ 和 $r\leqslant\frac{3-\sqrt{8}}{2}k$

〔是这样确定的：

$$\left(r-\frac{3+\sqrt{8}}{2}k\right)\left(r-\frac{3-\sqrt{8}}{2}k\right)\geqslant 0$$

两因子同为正，必须 $r \geqslant \frac{3+\sqrt{8}}{2}k$

两因子同为负，必须 $r \leqslant \frac{3-\sqrt{8}}{2}k$]

以 $c=\frac{k}{2}-r$ 与 $r \geqslant \frac{3+\sqrt{8}}{2}k$ 比较，可知 $r \geqslant \frac{3+\sqrt{8}}{2}k$ 使 c 为负值，不可能。

因此，r 的极大值为 $\frac{3-\sqrt{8}}{2}k$。

可是 r 有没有极小值呢？从 $r>0$ 看出，r 可为无穷小，以至于趋于零，但却不等零，所以它没有极小值。

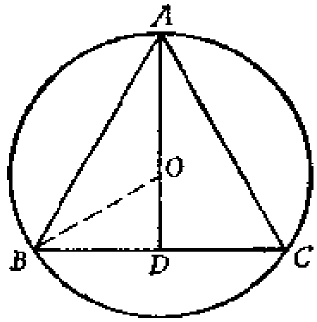


图 36

五、图36的⊙O为定圆，等腰三角形 ABC 为内接三角形，$AB=AC$，AD 为底边 BC 的高。问 BC 为何值时 $AD+BC$ 为极大？

解：以 R 表示圆的半径，则 $OB=R$，而

$AD=R+\sqrt{R^2-BD^2}$

因 $BC=2BD$，故

$$AD+BC=R+\sqrt{R^2-BD^2}+2BD$$

式中等号右边的第一项 R 为定值，故只需使 $\sqrt{R^2-BD^2}+2BD$ 极大即可。

以x表示BD，　$y=\sqrt{R^2-x^2}+2x$，则

$$(y-2x)^2=R^2-x^2$$

$$y^2-4xy+4x^2=R^2-x^2$$

$$5x^2-4yx+(y^2-R^2)=0$$

x必须为实数，故

$$16y^2-20(y^2-R^2)\geqslant 0$$

$$5R^2-y^2\geqslant 0$$

$$y\leqslant\sqrt{5}R$$

y极大时的数值为$\sqrt{5}R$，相应地

$$x=\frac{4\cdot\sqrt{5}R}{2\cdot 5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}R$$

即　$BC=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}R$

六、直角三角形ABC的周长为定值k（图35），问面积极大的条件如何？

解：设面积为S，则　$S=\dfrac{ab}{2}$。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+4S$$

$(a+b)^2=(k-c)^2$，故　$c^2+4S=(k-c)^2$

得　$$c=\frac{k^2-4S}{2k}$$

故　$a+b=k-c=k-\dfrac{k^2-4S}{2k}=\dfrac{k^2+4S}{2k}$

从　$ab=2S$　和　$a+b=\dfrac{k^2+4S}{2k}$　的构成知道，

a、b 为以下方程的根：

$$x^2 - \frac{k^2+4S}{2k}x + 2S = 0$$

欲使这方程的根为实数，则

$$\left(\frac{k^2+4S}{2k}\right)^2 - 8S \geqslant 0$$

$$16S^2 - 24k^2S + k^4 \geqslant 0$$

取等号时解得 S 的两个根为

$$S = \frac{24k^2 \pm \sqrt{576k^4 - 64k^4}}{32}$$

$$= \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{4}k^2$$

从而得 $S \geqslant \frac{3+2\sqrt{2}}{4}k^2$ 和 $S \leqslant \frac{3-2\sqrt{2}}{4}k^2$

以 $S \geqslant \frac{3+2\sqrt{2}}{4}k^2$ 代入 $c = \frac{k^2-4S}{2k}$ 使 c 为负值，故 S 的极大值取为 $\frac{3-2\sqrt{2}}{4}k^2$，此时，a、b 为等根。故面积极大时的三角形为等腰。

亥洛没有想到的问题

侵略者的铁蹄践踏着叙拉古国的土地，生灵涂炭，哀鸿遍野。这个弱小的国家在强大的罗马入侵者蹂躏下，眼见就濒于灭亡了。

现在，只剩下这座被围困得水泄不通的孤城。守

城的兵士已经精疲力竭，在老百姓的帮助下，正在付出最后的一份力量。

阿基米德面色枯槁，形容憔悴，往日那种活泼而充满青春活力的举止、爽朗而诙谐的神情已不存在。愁云笼罩他的心头，在眉宇之间隐约可见。这时，他正坐在墙根的一级台阶上，垂着头，喘着气，脑子却在不断地盘算着。

一个月过去了，守军们付出多大的代价啊！他自己已在这次战斗中运用和发挥了所有的智慧和才能，指导大家建筑可靠的掩体，制造许多特种武器，使敌人望而胆寒，不得不放弃强攻的企图而转为封锁。可是，现在一切储备都已告罄，弓箭、擂木、滚石都没有了，投掷机——这种曾经给敌人以致命打击的优越武器也用不上了。已经到了矢尽粮绝的地步。

然而，阿基米德那一副深邃的特有目光仍然炯炯有神。绝望，这个字眼是不属于阿基米德的，在任何情况下，他都充满必胜的信念。

一朵白云在头顶飘游而过，他慢慢地抬起头，望着望着，脑际掠过亥洛那亲切的面容，思路飞到很久以前的一天：

“要知道，如果你能找到一个支点，我是可以将地球撬起来的。但那需要具备一个起码的，非常重要的条件：

“首先要有一根强度非常高的杠杆。而这根杠杆的重量就重到不是一个人或者几十个人、几百以至几万个人所能够移动的，因此，真的要撬动地球，是完全不可能的。”自己就是这样对亥洛进一步解释的。

可是，亥洛那样激动地大声叫嚷起来：

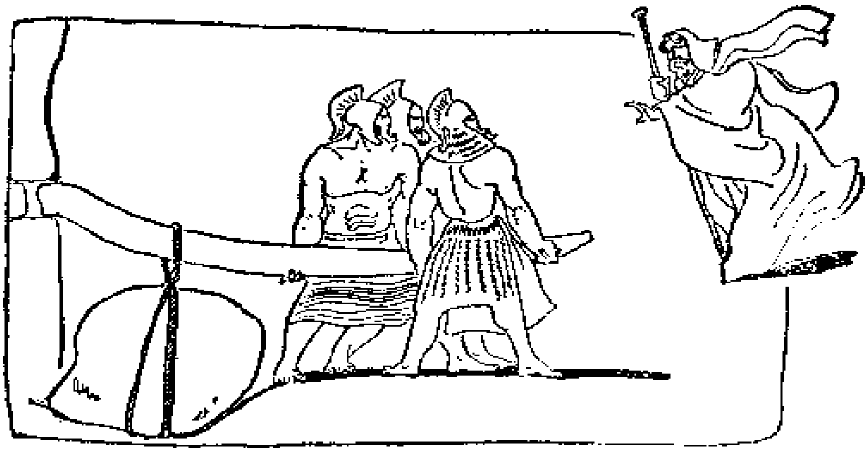
“这个问题，我怎么就想不到呢？”

两个人互相紧抱着肩膀，依偎着，向往着明天。明天将是什么样的呢？他们坚信，总有一天，人类会遨游星际，在地球之外找到立足点的。

可是，如今，对大自然展开的幸福而有意义的斗争结束了，永远也见不到最亲爱的知己者——叙拉古国王亥洛了。

大颗大颗的泪珠夺眶而出，顺着消瘦的面颊滚滚而下。

城堡的另一端，几名将士在忙碌着。他们正在用一根既重而长的杠杆移动一块大石头，也许这块石头



还可以消灭几个敌人呢！

阿基米德站立起来，踉踉跄跄走过去，喊道：

“不要用那么长的杠杆，换一根短些的！”

几双眼睛同时转向那副深邃的特有目光。

“用短杠杆？那不是减短动力臂吗？”人们惊呆了。阿基米德大概是太疲劳了吧，怎么连他自己创导的杠杆原理也搞不清楚了？他们奔跑过去，怜爱地扶着摇摇欲倒的这位为人类理想而呕心沥血的老人。

然而，一切都无济于事了。城堡已被攻破一角，敌军象潮水一样涌进这座久困的孤城。阿基米德和同伴们进行了最后抵抗，但结局是可以预想而知的。

在叙拉古降生的科学技术界的一代天骄阿基米德终于叶落归根……。

王慧倾耳谛听刘老师讲述的这一段经历，禁不住

泪水潸潸流下，夜一样寂静的教室里顿时传出一片呜咽啜泣声。

“前人遗留给我们的财富是何等可贵啊！”刘老师深深地叹了一口气。这句话多么意味深长！

是的，当时阿基米德的确是太疲劳了，但是，强烈地去争取独立和自由的愿望战胜了心灵深处的痛苦，他——一名正直的、无愧于时代的科学家，无论在任何环境和条件下，始终保持着自己的特殊性格，以及冷静而清醒的头脑。

加长动力臂固然能够省力，可是试想，如果材料本身很重，人们就得耗费一部分能量去支持杠杆的重量，而重量是随着杠杆的加长而增加的，在这种情况下，加长动力臂就不一定省力了。

可是，究竟采用多长的动力臂才能用力最省呢？这就是刘老师接着要讲解的问题。

见图 37a，杠杆的一端插入墙内，重物挂在杠杆上，要在另一端举起杠杆，以便移动它，可画出计算草图如图 37b 所示（近似地按杠杆成水平位置）。

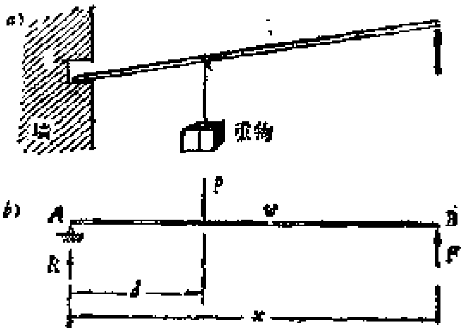


图 37

杠杆 AB 上作用着重物的重量 P，它离支座左端的距离为 d，杠杆本身的重量为每米 w 公斤。杠杆左端作用着支座反力 R，右端便是需要人们支持的力 F。

设杠杆长度为 x，则它的重量为 wx，R 和 F 各承担一半，为 $\frac{wx}{2}$。

以 A 点为支点，按动力乘动力臂等于阻力乘阻力臂的关系：

$$Fx = Pd$$

故 $$F = \frac{Pd}{x}$$

于是综合杠杆自重和重物的重量，F 值应为

$$F = \frac{wx}{2} + \frac{Pd}{x}$$

剩下的问题就是求 F 的最小值了。

$$F = \frac{wx^2 + 2Pd}{2x}$$

$$2Fx = wx^2 + 2Pd$$

$$wx^2 - 2Fx + 2Pd = 0$$

x 必须为实数，故

$$F^2 - 2Pdw \geqslant 0$$

（当二次三项式方程以 $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ 表示时，$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}$，$F^2 - 2Pdw$ 相当于 $b_1^2 - ac$）

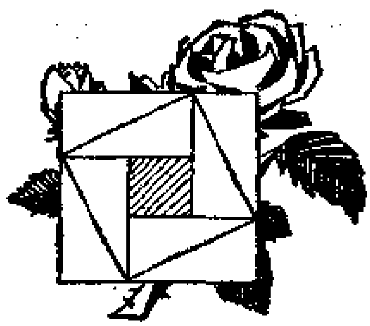
当 F 最小时， $F=\sqrt{2Pdw}$；此时

$$x=\frac{F}{w}=\sqrt{\frac{2Pd}{w}}$$

即取杠杆长度为$\sqrt{\frac{2Pd}{w}}$ 时用力最省。

从以上计算可以看出，杠杆本身的重量与人们所支持的力有多么密切的关系。

弦图——一枝数学名花



在数学园地里，开放着许许多多绚丽多彩的名花，弦图就是其中的一枝。

同学们都记得，在讲勾股弦关系时，刘老师就曾提过赵君卿设计的弦图。这是一份多么奇妙的图案啊！它不但可以用代数法，而且可以用等面积法（也叫出入相补原理）证明勾股定理的正确性，还可以用它互求勾、股、弦之间的关系。后来同学们知道，弦图甚至可以被用来解一元二次方程。

弦图出现在1800年前，当时赵君卿要进行多少次计算、绘制多少个图象、付出多大的心血才能取得这

样的成果啊！同学们想象得出，赵君卿需要具备多么丰富的理论和实践知识，也需要有多高的分析和想象能力才能做出这样的设计。

然而，弦图的作用还不仅仅在此，它还是研究极值问题的先驱呢！

用弦图可以引出一个求解极值的重要原理，叫做“定和求积原理”。

图38是三个弦图，代表 $a+b$ 的□$ABCD$ 边长都一样，只是 a 与 b 的长度不同。以 ab 为面积的矩形等于□$ABCD$ 减去影线部分面积的四分之一。显然，a 与 b 的差值愈大，则 ab 愈小（从图中 a 和 b 两图的影线部分面积可以看出——这里的 a、b 指图38的图序，不是边长）；当 $a=b$ 时（图中 c），ab 最大（影线面积为零）。

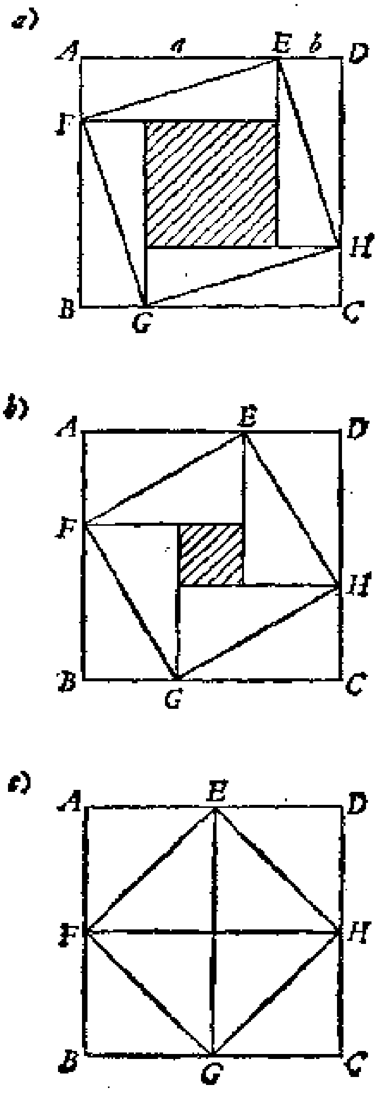


图 38

这说明一条原理：

对于 $y=ab$，如果 $a+b$ 为定值，则当 $a=b$ 时，y 值为极大。

这就是定和求积原理。

这条原理也可以用代数法加以验证：

令 $a+b=k$，则

$y=a(k-a)=-a^2+ka$

当 y 为极大时，$a=-\dfrac{k}{2(-1)}=\dfrac{k}{2}$，即 $a=b$。

应用这个原理，能够使解求极值的方法大为简化，这可以从以下几个例子中看出。

一、用长度为 k 的篱笆材料围成一个矩形场地，欲使场地面积为最大，应如何确定边长？

解：设矩形的一边长度为 x，则另一边为 $\dfrac{k}{2}-x$。矩形面积当为

$$S=x\left(\frac{k}{2}-x\right)$$

因 $x+\left(\dfrac{k}{2}-x\right)=\dfrac{k}{2}$ 为定值，故当 $x=\dfrac{k}{2}-x$ 时面积最大，即 $x=\dfrac{k}{4}$，另一边的长度为 $\dfrac{k}{2}-\dfrac{k}{4}$，亦为 $\dfrac{k}{4}$，知所确定的矩形为正方形。

二、图39中 P 为 $\triangle ABC$ 中 BC 上的一点，作

$PM \parallel BA$，$PN \parallel CA$。试确定P的位置，使 $\square AMPN$ 的面积为极大。

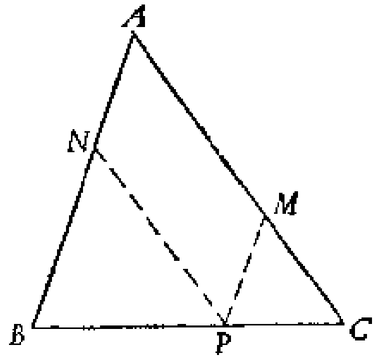


图 39

解：以S_a、S_b、S_c表示$\triangle ABC$、$\triangle NBP$、$\triangle MPC$的面积，以S表示$\square AMPN$的面积，令$BC=a$,$BP=x$。

因 $\triangle ABC \backsim \triangle NBP \backsim \triangle MPC$,

故 $\dfrac{S_a}{a^2}=\dfrac{S_b}{x^2}=\dfrac{S_c}{(a-x)^2}$

$$\frac{S_a-S_b-S_c}{a^2-x^2-(a-x)^2}=\frac{S_a}{a^2}$$

由于 $S=S_a-S_b-S_c$,

故 $S=\dfrac{S_a}{a^2}[a^2-x^2-(a-x)^2]$

$$=\frac{2S_a}{a^2}x(a-x)$$

确定x以使S为极值时，与定值$\dfrac{2S_a}{a^2}$无关，而$x+(a-x)=a$为定值，故当$x=a-x$，即$x=\dfrac{a}{2}$时，$\square AMPN$的面积为极大。

三、求$(x-6)(x-7)$的极值。

解：改写为 $-[(-x+6)(x-7)]$，则$(-x+6)+(x-7)=-1$，为定值，故当$-x+6=x-7$，即

$x=\frac{13}{2}$时 $(-x+6)(x-7)$为极大， 即$-[(-x+6)(x-7)]$为极小。

得 $(x-6)(x-7)$的极小值为

$$\left(\frac{13}{2}-6\right)\left(\frac{13}{2}-7\right)=-\frac{1}{4}$$

四、见图40，试在圆锥体内确定一圆柱体，使它的侧面积为最大。

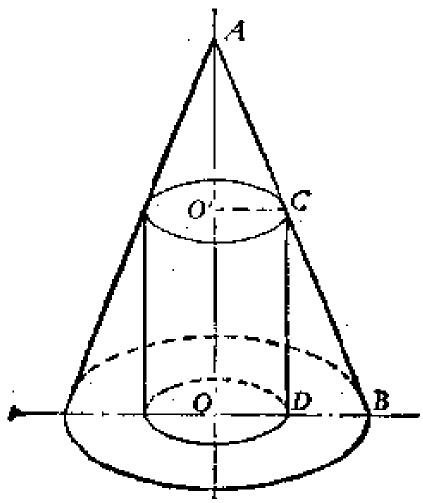


图 40

解：设圆柱体的高为 h、半径为 r、侧面积为S，圆锥体的高为H、半径为R，则因$\triangle BCD\backsim\triangle BAO$，

得 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，

即 $h=\frac{H}{R}(R-r)$

而 $S=2\pi rh$

即 $S=2\pi r\cdot\frac{H}{R}(R-r)=\frac{2\pi H}{R}r(R-r)$

因 $\frac{2\pi H}{R}$为定值，确定r以使S为极大时不必考虑，因 $r+(R-r)=R$ 为定值， 故当 $r=R-r$，即 $r=\frac{R}{2}$时S为极大。

五、求$(9-2x)^2-(1-3x)^2$的极值。

解：原式分解为$(9-2x+1-3x)(9-2x-1+3x)=(10-5x)(8+x)$；使两因子定和，则改写为$5(2-x)(8+x)$，故当$2-x=8+x$，亦即$x=-3$时为极大，其值为

$$[9-2(-3)]^2-[1-3(-3)]^2=125$$

六、见图41，AB为圆内一定弦，试引出一条直径CD，使$CP\cdot PD$为极大。

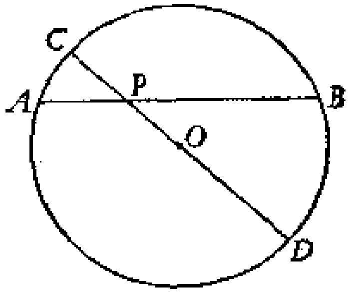


图 41

解：$CP+PD$是圆的直径，为定值，当$CP=PD$时$CP\cdot PD$最大。但P为CD与AB的交点，不可能为CD中点，因此$CP=PD$不成立。

据交弦定理，$CP\cdot PD=AP\cdot PB$，$AP\cdot PB$极大时，$CP\cdot PD$亦为极大。$AP+PB=AB$，为定值，故$AP=PB$时，$AP\cdot PB$与$CP\cdot PD$都为极大。此时$CD\perp AB$。

定积求和原理

教室外面的走廊竖立着一块大黑板，那是专供同学们开展教学讨论，并为大家答疑用的，也是智力测验的一个检阅台。同学们关心这块园地，也热心地利

用它、扶植它。

数学史话、理论与实践、数学游戏、难题分析……，都是王慧喜爱的节目，课本上没有的知识在这里不断出现。

这块黑板已经与王慧结下不解之缘，每天到校时，她总要看看它，有什么新的课题。

今天，上面写着一道数学题：在学校旁边要修一间教室，面积为50平方米，与现有教室毗连，因此教室的一面墙是利用原有的墙（如图42），问这间教室的长、宽为多少时，所用的砌墙材料用量最省？

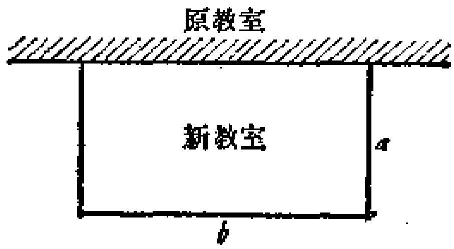


图 42

出题的是刘老师。

“难道刘老师不了解我们的水平吗？这算是道什么题呢？太平淡了！”王慧看看题目，不以为然地想着。

定和求积原理，这个解决极值问题的好办法使王慧心悦诚服，真是妙得很，象是给骏马插上翅膀。她完全明白，要掌握一门知识，不光是会运用，更主要的是应该透彻地理解它的来龙去脉，才能融会贯通，得心应手。因此，这些日子来，就是对这样一个简单而早已定论的问题，她还是反复琢磨，不断地进行研

究。

这是个什么问题呢？

"周长为定值的矩形，什么情况下它的面积最大？"

这不是定和求积原理的基本型式吗？也许可以算是典型问题，那不是问："$a+b$ 为定值时，什么情况下 ab 最大"吗？谁都能够回答得来："当 $a=b$ 时，ab 最大。"

可是王慧对这样一个问题的钻研却不肯轻易放下。这几天，她自己认为，这里头似乎存在一个相反的问题：当矩形的面积为定值时，什么情况下，它的周长有极值？

对王慧来说，这是个不成问题的问题，为什么呢？因为有刘老师。在同学们的心目中，一切疑难在刘老师面前，都会春风化雨，冰消雪融。

可是王慧不这么想，她立志在崎岖的山路上奋勇攀登，不是在必要的时刻，不希望有人扶持，也许只是在特别陡峭的悬崖才需要别人助她一臂之力呢！因此，数学家们坚韧不拔的精神和百折不挠的毅力就总是她学习的榜样，难道赵君卿不是这样勤奋努力，才取得辉煌的成就吗？

弦图，摆在她的书桌上，象是在闪闪发光，它是一张多么奇妙的图样啊！也许它也可以解答这个问

题？

的确，这个问题完全可以从弦图得到反映，这就是所谓“定积求和原理”：

对于 $y=a+b$，如果 ab 为定值，则当 $a=b$ 时，y 值为极小（a、b 为正数）。

怎样证明呢？

图43 a 中：$ab=\frac{1}{4}$（□$ABCD$－□$KLMN$）

图43 b 中：$ab=\frac{1}{4}$（□$A'B'C'D'$－□$K'L'M'N'$）

图43 a 的 $a+b$ 比图43 b 的 $a+b$ 小，故□$ABCD$＜□$A'B'C'D'$，既然两图中的 ab 相等，那末□$K'L'M'N'$ 也必须大于□$KLMN$。

这样，如果有许多尺寸不同的弦图，欲使 ab 等值，则 $a+b$ 必然随□$KLMN$ 的缩小而减小。而当弦图中的那个小

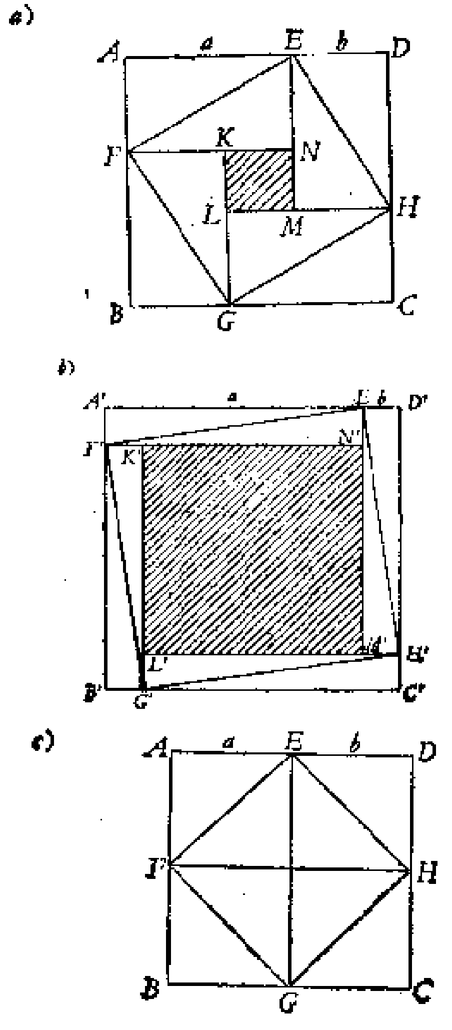


图　43

正方形($KLMN$)等于零时，大正方形($ABCD$)应该是最小的，也就是说，在这种情况下，大正方形的边长 $a+b$ 最小。

显然，当小正方形为零时，$a=b$，如图 43 c 所示。这就证明了定积求和原理。

王慧的这种思路和解题方法得到刘老师的赞许。同时，刘老师教会同学们用代数的方法推导这个原理：

已知 $ab=k$，求 $y=a+b$ 的极小值。

解：$$y=a+\frac{k}{a}$$

$$a^2-ya+k=0$$

a 必须为实数，故

$$y^2-4k\geqslant 0$$

故 y 的极小值为 $2\sqrt{k}$，即$a=b=\sqrt{k}$。

有了定积求和原理，解某种适合此类的问题就大为简化了，例如对于图42，按一般方法的解：

已知　$ab=50$，求 $y=2a+b$ 的极小值。

解：$$y=2a+\frac{50}{a}$$

$$2a^2-ya+50=0$$

a 必须为实数，故

$$y^2-4\cdot 2\cdot 50\geqslant 0$$

即　y的最小值为20。

$$a=-\frac{-y}{2\times 2}=\frac{y}{4}=5\text{ 米},\quad b=\frac{50}{5}=10\text{米}。$$

如果用定积求和原理，一眼便可看出，$2a\cdot\frac{50}{a}$为定值，故　$2a=\frac{50}{a}$，得　$a=5$，简便多了。

同学们终于理解刘老师的心情，她为什么要出这样一道大家认为是很浅显的题目，只不过是想指引着同学们朝更高的顶峰奋进罢了！

还可以举一些例子来说明定积求和原理的应用。

一、拟修建总面积为 160 平方米的仓库，分四个单间如图44，问仓库的长、宽为多大时，砌墙材料用量最省？

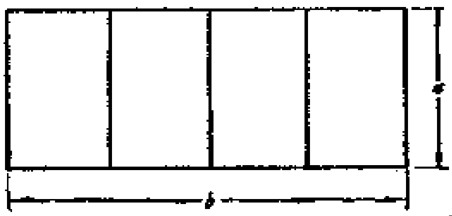


图　44

解：据题意，即已知 $ab=160$，　求 $5a+2b$ 为极小值时的a、b。

$5a\cdot 2b=10ab$ 是定值，故当 $5a=2b$ 时有极小值，此时　$a\cdot\frac{5a}{2}=160$，得 $a=8$米（宽），　$b=\frac{5\times 8}{2}=20$米（长）。

二、应用定积求和原理解图37。

解：$F=\frac{wx}{2}+\frac{Pd}{x}$

定积为$\frac{Pdw}{2}$，故 $\frac{wx}{2}=\frac{Pd}{x}$，得

$$x=\sqrt{\frac{2Pd}{w}}$$

三、求$\frac{(a+x)(b+x)}{x}$的极小值。

解：展开为$\frac{ab}{x}+a+b+x$。因 $a+b$ 是定值，故仅考虑$\frac{ab}{x}+x$，而这两项的乘积为 ab，是定值，故当$\frac{ab}{x}=x$时有极小值，$x=\sqrt{ab}$；代入可得极小值为$\sqrt{ab}+a+b+\sqrt{ab}$，即$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

四、求$\frac{x^2}{x^4+9}$的极大值。

解：写为$\frac{1}{x^2+\frac{9}{x^2}}$，当分母最小时有极大值，但分母两项的乘积为定值，故 $x^2=\frac{9}{x^2}$时分母最小，$x^4=9$，$x^2=\pm3$。

故极大值为$\frac{3}{9+9}=\frac{1}{6}$。

此外，还应看到有 $x^2=-3$，不允许x为虚数，故此值不可取。

五、图45的P为定圆中的一定点，求作过P点的极小弦。

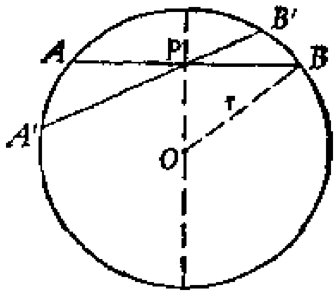


图 45

解：引任意一条过P点的弦$A'B'$，作与OP垂直的弦AB，则

$$A'P\cdot PB'=AP\cdot PB=PB^2=r^2-OP^2$$

$A'P\cdot PB'$为定值，故当$A'P=PB'$时$A'P+PB'$为极小。因此极小弦即AB。

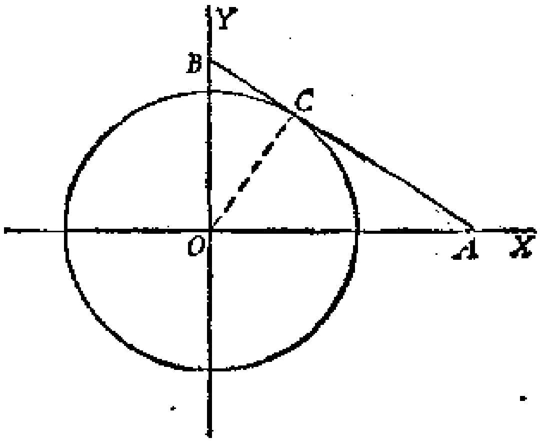


图 46

六、图46中$\odot O$为圆形体育馆，运动员给馆报送名单，从X沿XO方向来，报名后去OY路，问在馆的哪一点交接，所走的路程最短？

解：按题意，应求ACB的极小值，而C为切点。

因$AC\cdot CB=OC^2$，为定值，故当$AC=CB$时$AC+CB$极小，此时$OA=OB$，即可确定ACB线。

这样下料合适吗？

在什么情况下，圆的内接矩形面积最大？

对王慧来说，解答这个问题就象演算一道数字四则运算题那样简单。见图47，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 都是直角三角形（$AO \perp BC$），它们是同底的，因此面积的大小取决于高；而高最大的三角形是 $\triangle ABC$。所以，面积最大的矩形是正方形。

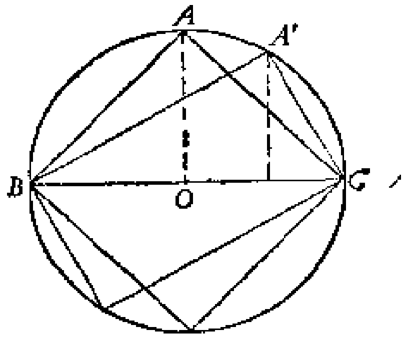


图 47

因此，王慧认定，要从一根圆木截取最经济的材料，莫过于截取正方形面积。

掌握这方面的极值知识之后，对这样问题，她就觉得更有把握了。

现在，她回想起不久前的一天。那天放学路过工地时，见到几位老师傅蹲在一根大圆木的端部，他们在做什么呢？

噢！原来是在画线。在圆木的端头平面上量出必要的尺寸，做了记号，然后弹上墨线，就可以按线迹进行锯料了。

刘老师参加他们的行列，也帮着忙这忙那，王慧和同学们好奇地在近旁瞧着，似乎这一切都是那么新鲜。

王慧注意到，在圆木上画的截料线全象图48所示的那样：将直径(AB)三等分，过三分点(E、F)分别作该直径的垂线，向两侧引出，交圆周于两点(C、D)；这两点与直径两端就构成了所截矩形的四个顶点。

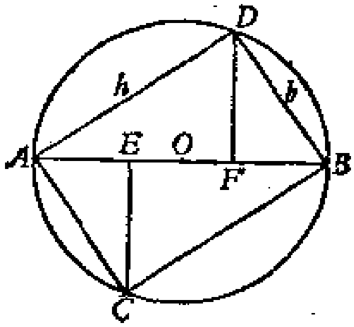


图 48

那时，刘老师告诉王慧，这些圆木截成的矩形材料，作为梁，它的承载能力是最大的。可是，现在王慧这么想：要使梁能够承受更大的荷载，总得使它的横断面积最大吧！那末，在一个圆面积中能截取的最大面积该是正方形了，而刘老师采取的画线法到底合适不合适呢？

刘老师当然是对的，当时还有许多老师傅，他们也是那样画线。这样，究竟为什么这种梁能承受最大荷载，只有请刘老师来解答了。

一根梁支在两端（图49a），当上面加上重物后，它就会产生弯曲变形（图49b），这时要求梁的横断面有够大的高度，才能保证变形小而承载能力大。这个道理是很简单的，在日常生活中也常能看出，例如我们拿一块木板，扁着放，只要加上不大的重量就会被

压折断；而如果将它立起来呢，可以承受数倍的重量也不折断。

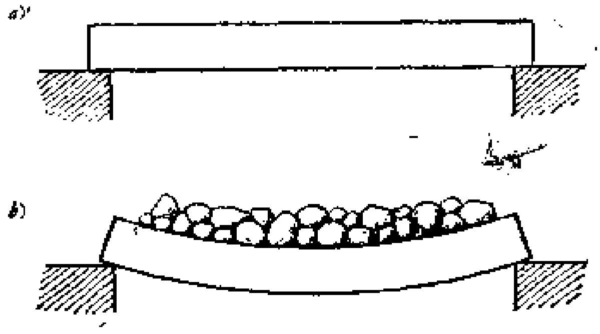


图 49

在建筑结构的设计计算中，梁的承载能力与它的“抗弯模量”有关，这种抗弯模量愈大，承载能力就愈大。对于横断面为矩形的梁，如宽度为 b、高度为 h，抗弯模量就等于 $\frac{bh^2}{6}$。因此，下料的方法必须符合这样要求：

作已知圆的内接矩形，使 $\frac{bh^2}{6}$ 最大（b 为矩形的宽度，h 为矩形的长度；$b<h$）。

图48的下料方法对不对呢？

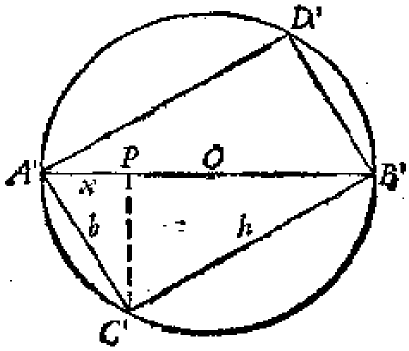


图 50

在图50的 ⊙O 内任作一个内接矩形 $A'C'B'D'$，作 $C'P \perp A'B'$，令 $A'P$ 为 x。

于是，设圆的直径 $A'B'$ 为 D，则

$$b=\sqrt{xD}$$

$$h^2=(D-x)D$$

故 $\dfrac{bh^2}{6}=\dfrac{\sqrt{xD}\,(D-x)D}{6}$

去掉定值$\dfrac{D\sqrt{D}}{6}$，因此只要求得$\sqrt{x}(D-x)$的极大值，而且证明 $x=\dfrac{D}{3}$时有极大值，那末，刘老师画线法的正确性就得到证实了。

令 $y=\sqrt{x}(D-x)$，为去除根号，取

$$y^2=x(D-x)^2$$

求得 y^2 为极大时的 x，也就是 y 为极大时的 x，展开得

$$y^2=x^3-2Dx^2+D^2x$$

这是个三次式，怎样求三次式的极值呢？王慧却没有学过。

一个重要的不等式

怎样求三次式的极值？总是有办法的。在初等数学领域中，办法却只能适应于某种特定的三次式，这牵涉到一个重要的不等式：

n 个正数的几何平均数，不大于它们的算术平均数：

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

（n 个数乘积的 n 次方根称为几何平均数；n 个数的和除以 n 所得的商称为算术平均数）

对于 $n=2$，为

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}$$

这是大家都已经很熟悉的，也容易得到证明：

因 $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$，故 $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geqslant 0$

即 $\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2}{2}$

也可以容易地用几何方法证得：

见图51，$DB \perp AC$，在 $\triangle ODB$ 中，$BD = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{a_1 a_2}$，$OD$ 是圆的半径，为 $\dfrac{a_1 + a_2}{2}$，而 OD 是直角三角形的斜边，大于直角边 BD，故 $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$。

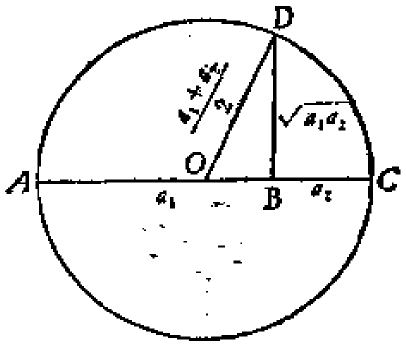


图 51

显然，当 $a_1 = a_2$ 时，等号成立，即

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2}$$

因此，如果 $\dfrac{a_1 + a_2}{2}$ 为定值，即 $a_1 + a_2$ 为定值

时，若使$\sqrt{a_1a_2}$ 最大，即 a_1a_2 最大，则应有 $a_1=a_2$。在这里又说明了定和求积原理。

同样地，可以用这个不等式说明定积求和原理。

现在分两种情况证明

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

一、当 $n=2^m$：

因 $\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$，$\sqrt{a_3a_4}\leqslant\frac{a_3+a_4}{2}$

故 $\sqrt{a_1a_2a_3a_4}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}$

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\leqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}$$

而 $\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}\right)$

于是 $\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$

这是 $m=2$ 的证明，$m=3$、$4\cdots\cdots$ 时亦可用这个方法推证而得。

二、当 n 为任意正数，可用 $n=2^m-p$ 表示求证：

令 $\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)=r$.

这 n 个数加上 p 个 r 数，则

$$\frac{1}{n+p}(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\underbrace{r+r+\cdots\cdots+r}_{p\text{ 个}})$$

$$=\frac{1}{n+p}(nr+pr)=r$$

括号中共 $n+p$ 个数，符合 2^m 个数，故

$$\sqrt[n+p]{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n r^p}\leqslant\frac{1}{n+p}(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots a_n+pr)$$

即 $\sqrt[n+p]{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n r^p}\leqslant r$

故 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n r^p\leqslant r^{n+p}$

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n\leqslant r^n$$

于是 $\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{n}$

这个重要的不等式的成立使定和求积原理和定积求和原理得到进一步推广，不仅适应于 $n=2$，也适应于 n 为更大的数。

于是，应用这个结论，确定上述画线法就不成难题了。

$$y^2=x(D-x)^2$$

可写成 $y^2=x(D-x)(D-x)$

$$y^2=\frac{1}{2}\cdot 2x(D-x)(D-x)$$

$2x$、$D-x$、$D-x$ 三数定和，故 y^2 最大时

$$2x=D-x$$

即当 $x=\frac{D}{3}$时，梁具有最大的承载能力。

还可以举一些例子。

一、求$y=x^3-6x^2+9x$的极大值。

解：　$y=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x(3-x)(3-x)$$

$2x$、$3-x$、$3-x$ 定和，故 $2x=3-x$，$x=1$；代入得 y 的极大值为 4。

可是，从式中我们还可以看出，如 x 大于 3 并继续增大，那末，y 值还是可能增大的，例如 $x=5$，则 $y=20$。因此实际上它的极大值并不是 4，这是怎么回事呢？

因为上述不等式的 a_1、a_2……是有前提的，认为它们是正数，而如果 $x=5$，则 $3-x$ 不是正数，在这里我们就不加以讨论了（下面的例子将都按正数拟就）。

二、图52 a 是边长为 m 的正方形铁皮，拟剪去四角（如图中边长为 x 的小正方形），问剪去多长，可

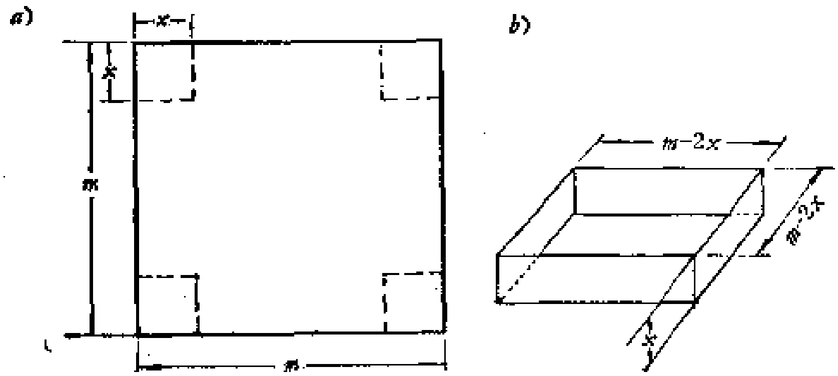


图　52

使围成如图52 b 的盒子容积为最大？

解：容积 $V=x(m-2x)^2$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4x(m-2x)(m-2x)$$

据定和求积原理：V最大时

$$4x=m-2x$$

故 $$x=\frac{m}{6}$$

三、按图40，试在圆锥体内确定一圆柱体，使它的体积为最大。

解：体积 $V=\pi r^2h$

$$=\pi r^2\cdot\frac{H}{R}(R-r)$$

$$=\frac{\pi H}{2R}\cdot r\cdot r(2R-2r)$$

故 V最大时 $r=2R-2r$，$r=\frac{2}{3}R$。

四、一长方体开口水池，容积为256立方米，池壁和池底都是用同厚度钢筋混凝土筑成的，问池的长、宽、高应为多大，才能使所用材料为最省？

解：设水池的长、宽、高为 a、b、h，则表面积为底和四壁，如表面积最小，所用材料也最省。令表面积为 S，则

$$S=ab+2bh+2ah$$

三项的数定积为〔$4(abh)^2=4\times 256^2$〕，故当 S 最小时：

$$ab = 2bh = 2ah$$

由此可得 $a = b = 2h$，因 $abh = 256$，故

$$2h \cdot 2h \cdot h = 256$$

于是 $h = \sqrt[3]{64} = 4$米，$a = b = 2 \times 4 = 8$米。

五、用一块半径为R的铁皮做成漏斗，如图53所示，问剪掉多大的扇形（图中影线），可使漏斗的容积为最大？

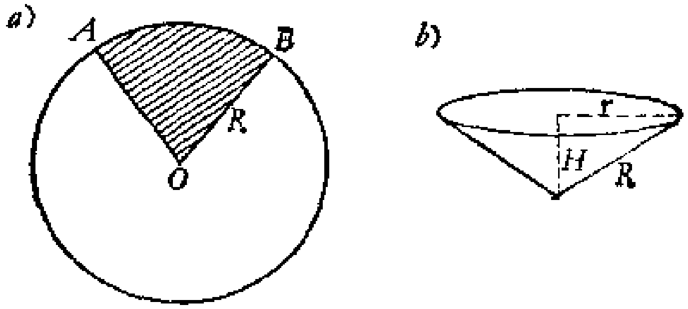


图 53

解：漏斗的容积为

$$V = \frac{\pi}{3}r^2H = \frac{\pi}{3}r^2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V^2 = \frac{\pi^2}{18}r^2 \cdot r^2(2R^2 - 2r^2)$$

故当V^2最大（亦即V最大）时：

$$r^2 = 2R^2 - 2r^2$$

得 $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$，漏斗的圆形周长为 $2\pi r$，剪去扇形的弧长为$2\pi(R - r) = 2\pi\left(R - \frac{\sqrt{6}}{3}R\right) \approx 0.367\pi R$，

相当于圆心角为$0.367\times180°\approx66°$。

六、三角形的周长为定值$2s$，求面积最大时各边的长度。

解：设三角形的三边长为 a、b、c，则据海伦公式：

面积为 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

S 最大时 S^2 亦最大，而 S^2 为

$$s(s-a)(s-b)(s-c)$$

s 为定值，而$(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-(a+b+c)=3s-2s=s$，亦为定值，故面积最大时

$$s-a=s-b=s-c$$

即 $a=b=c$

当三角形为等边时面积最大，边长$\frac{2s}{3}$。

七、将10分为两部分，使其中一部分的平方，与其它一部分的立方相乘，乘积为最大。

解：设一部分为 x，则另一部分为 $10-x$，故应求 $y=x^2(10-x)^3$为最大值时的 x。

上式可写成 $y=\frac{1}{72}\cdot3x\cdot3x(20-2x)(20-2x)(20-2x)$，据定和求积原理，当 y 最大时

$$3x=20-2x$$

$$x=4$$

故一部分为 4，另一部分为

$$10-x=6$$

八、求　$y=(x-1)^4(x+2)^3$的极大值。

解：　$y=(1-x)^4(x+2)^3=(3-3x)^4(4x+8)^3\cdot\frac{1}{3^4\cdot 4^3}$，只考虑因子为正的 $1>x>-2$范围。

故　y为极大值时 $3-3x=4x+8$，即 $x=-\frac{5}{7}$。

此时，　$y=\left(-\frac{5}{7}-1\right)^4\left(-\frac{5}{7}+2\right)^3=\frac{15116544}{823543}$。

九、a、b、c为长方体的长、宽、高，$a+b+c$为定值，求体积最大的长方体各边。

解：体积　$V=abc$

据定和求积原理：$a=b=c$时V最大。

故　为正方体时体积最大，边长$\frac{a+b+c}{3}$。

十、图54中⊙O为定圆，确定外切于该圆的等腰三角形，使它的面积为极小。

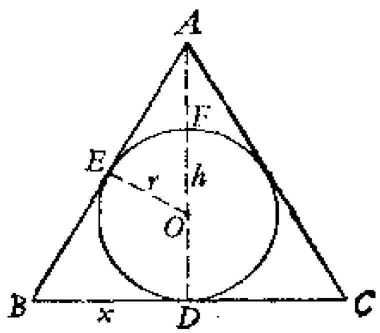


图　54

解：任作一外切等腰三角形 ABC，令圆的半径为r，三角形的高 AD为h，底边的一半 BD为x，E为切点，则

$$\triangle AOE\backsim\triangle ABD$$

故　$\frac{x}{h}=\frac{r}{AE}$

而 $$AE^2 = AD \cdot AF = h(h-2r)$$

代入得：

$$x^2 = \frac{h^2r^2}{AE^2} = \frac{hr^2}{h-2r}$$

$$x^2h^2 = \frac{h^3r^2}{h-2r}$$

$\triangle ABC$ 的面积为 xh，xh 为极小时，x^2h^2 亦为极小。因 r^2 为定值，故仅求 $\frac{h^3}{h-2r}$ 为极小值即可。

$$\frac{h^3}{h-2r} = \frac{1}{\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{2r}{h}\right)} = \frac{r^2}{\frac{r^2}{h^2}\left(1-\frac{2r}{h}\right)}$$

$$= \frac{r^2}{\frac{r}{h} \cdot \frac{r}{h}\left(1-\frac{2r}{h}\right)}$$

分子为定值，故分母最大时有极小值。因 $\frac{r}{h}$ 和 $1-\frac{2r}{h}$ 均为正值，故当 $\frac{r}{h} = 1-\frac{2r}{h}$ 时，分母最大，即 $h = 3r$ 时 $\triangle ABC$ 的面积为极小。

在这种情况下，$AO = 2r$，故 $\angle EAO = 30°$，$\angle A = 60°$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为极小时应是等边三角形。

十一、图40圆锥体的母线 AB 长度为定值 a，求体积的极大值。

解：设底的半径为R，高为H，则体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi(a^2-H^2)H$$

V^2与V同为极大，故按下式考虑：

$$\begin{aligned}V^2&=\frac{\pi^2}{9}(a^2-H^2)^2H^2\\&=\frac{\pi^2}{9}(a^2-H^2)(a^2-H^2)H^2\\&=\frac{\pi^2}{18}(a^2-H^2)(a^2-H^2)\cdot 2H^2\end{aligned}$$

当 $a^2-H^2=2H^2$ 时，V为极大，此时

$$H^2=\frac{a^2}{3}\qquad H=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

代入可得 $V=\dfrac{1}{3}\pi\left(a^2-\dfrac{a^2}{3}\right)\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi a^3$

〔注：如不用V^2，而直接用V作定和，则

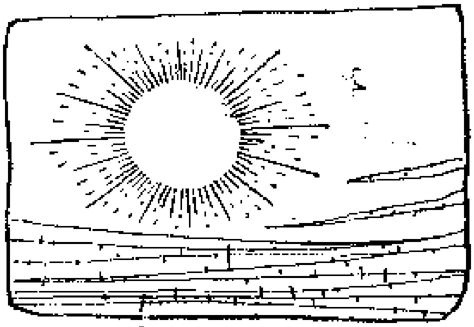
$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{3}(a+H)(a-H)H\\&=\frac{\pi}{6}(a+H)(2a-2H)H\end{aligned}$$

虽得定和，但$a+H$不可能等于H，故不可以用这种方法〕

远离地球的地方

这是个什么样的火球呢？大清早，它就悄悄地从东方滚了上来，过了几个时辰，又不声不响地往西方

坠落下去。



对夸父和他周围的亲朋，以及天下所有的人，这总归是个谜。哪来的这个火球？它是那么遥远，离我们居住的地方该有几十万里吧！

夸父的性格也象一团火，他再也忍耐不住了，决心一探究竟。这天，他打点停当，告别了乡亲，就奔向追逐炎日的征程。

从来没有前人经历过这样漫长的旅程。这个火球就在他的前方，长途跋涉使他精疲力竭，每前进一步，就感到浑身经受着一阵热浪的侵袭。然而，征服大自然的必胜信念鼓舞着他，他选取一根树干作为手杖，拄着它继续前进。

终于有一天，夸父闯进太阳。这是个多么奇妙的世界啊！火，火，滚滚熔浆形成一片红色海洋，翻腾着，咆哮着。

突然，他感到口渴难忍。该回去了，在世世代代生活的老家那儿才有真正的水喝。于是，他转身回走，直奔黄河，河水被喝干了，又奔渭水，渭水的水也被喝干了，再往北走，那儿还有大泽呢！

这时，他感到灼热的身子就是一团火，渴，难

忍的渴！在去大泽的路上，夸父倒下去了。他的手杖化成一片树林，这就是“邓林”。每当人们在那里蔽荫纳凉时，怀念这位敢于闯入火海的英雄的心情便会油然而生。

然而，人们居住的地方离那个火球究竟有多远，并没有从夸父的经历中得到解答。

“当然，现代科学已经能够测定地球离太阳有多远，而且人们还知道，那些更加遥远的星星离我们有多远。只能用神话来体现幻想的时代早已过去了。”刘老师在讲完“夸父追日”的神话故事后补充说道。“太阳离地球大约一亿五千万公里，看起来这个距离不小，可是与远离我们的那些恒星相比，却近得多了。对于那些恒星，‘公里’已经不能表达，而要改用‘光年’作为计量单位，一光年约等于九万四千六百亿公里，有些恒星离我们远达数百光年，有的还要远。”

那末，用什么样的式子才能够表达地球距太阳以及太阳以外所有恒星的距离呢？刘老师写出下式：

$S \geqslant 150000000$公里

“不等式，太妙了！”王慧情不自禁地叫了起来。

是啊！“公里”与“光年”简直不能相提并论，这个“S”表达式是多么恰当！

150000000 公里是个定值，那就是说，S 有了极小值。能不能应用不等式来解求极值？回答是肯定的，也是刘老师所要讲述的问题。

实际上，对于不等式的应用，我们已经有了初步认识，就是以上所说的那个重要的不等式，它使定和求积原理和定积求和原理得到巧妙应用。

最好是举一些例子来说明：

一、图55是个长方体，它的对角线长度为 $l=27$ 厘米，问表面积的极大值是多少？

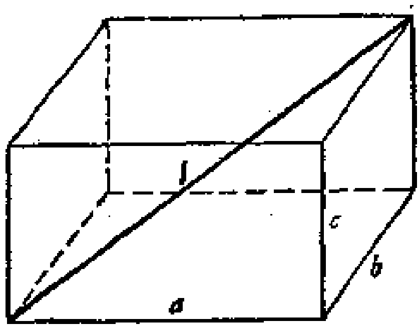


图 55

解：据题意，可写为：已知 $l^2=a^2+b^2+c^2=27^2=729$，求 $2(ab+bc+ca)$的极大值。

将 $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$ 写成

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$$

各项都为平方数，故它的值大于或等于 0，即

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geqslant 0$$

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$$

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$$

从不等式知表面积的极大值为 $2l^2$，即

$2\times 729=1458$ 平方厘米

二、三角形的三边为 a、b、c，周长为 9 厘米，求 $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$ 的极小值。

解：据三个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数的不等式，得

$$\frac{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{8}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

两式相乘为

$$\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right)\frac{2(a+b+c)}{9}\geqslant 2$$

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$$

因周长 $a+b+c=9$，故 $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$ 的极小值为 1 厘米。

三、长方体的体积为50立方厘米，求三边立方和的极小值。

解：设长方体的三边为 a、b、c，因它们都为正数，无论 $a>b$ 或 $b>a$，均有下式（当 $a=b$ 时取等号）：

$$(a-b)(a^2-b^2)\geqslant 0$$

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2\geqslant 0$$

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$$

同理　$b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2$

$$c^3+a^3\geqslant c^2a+ca^2$$

三式相加得

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$

因　$\dfrac{b^2+c^2}{2}\geqslant\sqrt{b^2c^2}=bc$

即　$b^2+c^2\geqslant 2bc$

而　$c^2+a^2\geqslant 2ca$

$$a^2+b^2\geqslant 2ab$$

代入得　$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant 6abc$

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$$

$abc=50$，故三边立方和的极小值为

$3\times 50=150$立方厘米。

四、图56的$\triangle ABC$中三边为 a、b、c，以三边各自画成正方形，其面积为 S_a、S_b、S_c。已知 $a+b+c=18$厘米，求 $S_a+S_b+S_c$ 的极小值。

解：仿第一题：

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$$

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$$

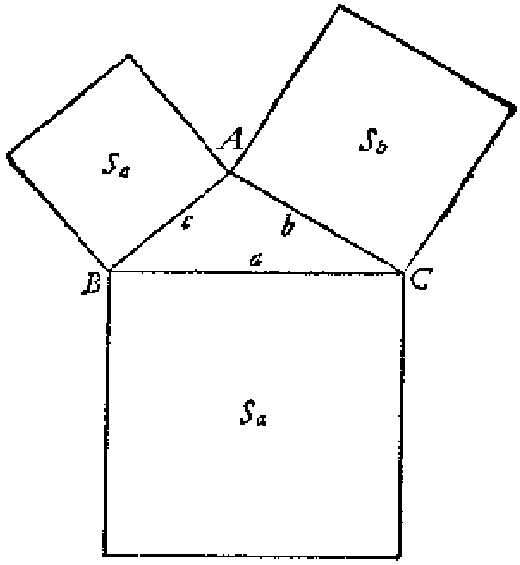


图 56

$$S_a + S_b + S_c \geqslant \frac{18^2}{3} = 108$$

取等号，得极小值为 108 平方厘米。

五、如上题的 S_a、S_b、S_c 表示 ab、bc、ca，如图57所示，那末，$S_a + S_b + S_c$ 的极大值应为多少？

解：据 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$

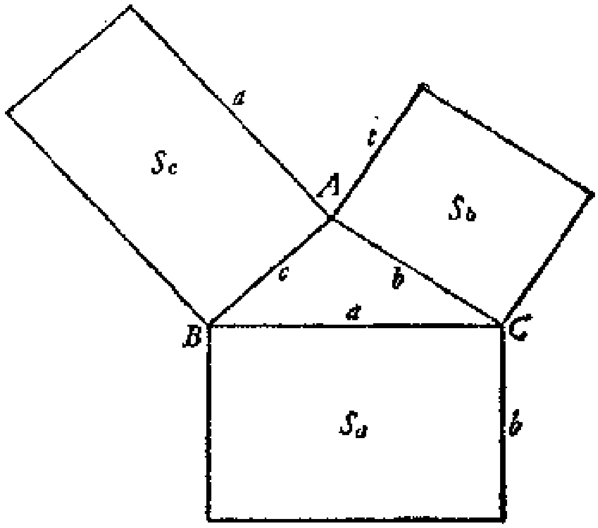


图 57

得

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3(ab+bc+ca)$$

$$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\geqslant S_a+S_b+S_c$$

取等号，得极大值为 108 平方厘米。

六、求图 1 中 $AB+BC$ 的极小值。

解：我们已经知道用物理方法和几何方法解答这个问题，还可以用数解法，应用一个有名的不等式：

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

当 $x_1:x_2=y_1:y_2$ 时取等号。

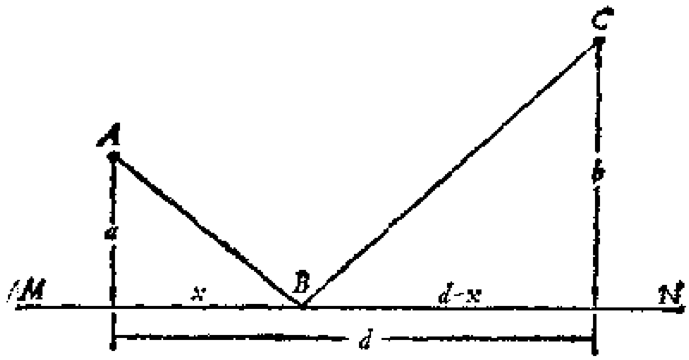


图 58

按图58，则

$$AB+BC=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

$$\geqslant\sqrt{(a+b)^2+[x+(d-x)]^2}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2+d^2}$$

$\sqrt{(a+b)^2+d^2}$ 为定值，即 $AB+BC$ 的极小值。

七、证明上题不等式成立。

解：如不等式成立，则

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$\geqslant x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2$$

$$x_1^2x_2^2+x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2+y_1^2y_2^2\geqslant x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2$$

$$\frac{x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2}{2}\geqslant\sqrt{x_1^2x_2^2y_1^2y_2^2}$$

符合上节所提那个“重要的不等式”，故不等式成立。显然，当 $x_2^2y_1^2=x_1^2y_2^2$，即 $x_1:x_2=y_1:y_2$ 时取等号。

从一幅图画讲起

学校的进口处新竖一幅醒目的巨画。上面那两名青年学生，对抱负和理想充满希望的信念溢于容表，挺伸着的手臂直指辉煌的前方——深邃无垠的宇宙空间。

今天，同学们看到大门内这幅巨画，都被深深地吸引住了。往常，他们也喜欢其它画品，无论是草木岩泉、人物风景、花鱼鸟兽、园亭楼阁，或是江海山川，都要评头品足地观赏一番，而现在呢？似乎再也没有其它一幅画能胜过这幅了。

“往后站，后退一些！”刘老师拉着王慧往后退了几步。王慧顿时发现，画面更加清楚了，似乎它被放大了一些。

原来，是不是看得清楚，与人目至画面的视角大小有直接关系，当视角最大时，看得最清楚。

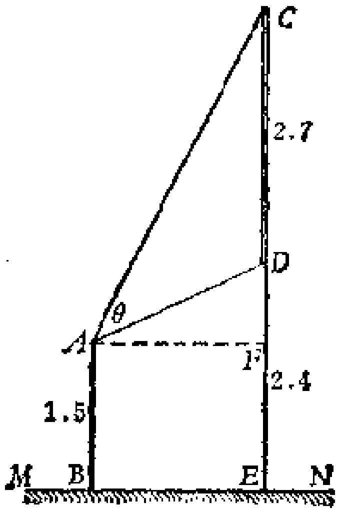


图 59

按图59，MN 是地面；A 为王慧的眼睛位置，离地

面 1.5 米；CD 为画面，高 2.7 米；DE 为画底离地面的距离，为 2.4 米。问王慧离墙多远，即 BE 为多少时，视角 θ 最大？

解：过 A 作 $AF \parallel BE$，则 $DF = 0.9$ 米，$CF = 3.6$ 米。

令 $AF = x$，则

$$\operatorname{tg}\angle CAF = \frac{3.6}{x}$$

$$\operatorname{tg}\angle DAF = \frac{0.9}{x}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta &= \operatorname{tg}(\angle CAF - \angle DAF) \\ &= \frac{\operatorname{tg}\angle CAF - \operatorname{tg}\angle DAF}{1 + \operatorname{tg}\angle CAF \cdot \operatorname{tg}\angle DAF} \\ &= \frac{\dfrac{3.6}{x} - \dfrac{0.9}{x}}{1 + \dfrac{3.6}{x} \cdot \dfrac{0.9}{x}} \\ &= \frac{2.7}{x + \dfrac{3.24}{x}}\end{aligned}$$

当 θ 最大时，$\operatorname{tg}\theta$ 也最大。因分子为定值，所以求出分母的极小值即可。据定积求和原理知，欲使分母为极小，则

$$x = \frac{3.24}{x}$$

即　$x=\sqrt{3.24}=1.8$米

故：王慧站离墙面 1.8 米时，视角最大。

"噢！原来求极值还可以用三角法！"王慧从这幅图画想到刘老师解答的题目。

是的，解求极值牵涉的范围几乎包括所有初等数学，三角法也不例外。最简单的如：

求　$y=\sin x-2$ 的极大值

显然，$\sin x$ 最大时，y 亦最大，而 $\sin x$ 的最大值为 1，故 y 的极大值为 $y=1-2=-1$。

又如　求 $y=\sin x+\cos x$ 的极值：

$$y=\sin x+\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$y-\sin x=\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$y^2-2y\sin x+\sin^2 x=1-\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x-2y\sin x+(y^2-1)=0$$

$\sin x$ 必须为实数，　故按一元二次方程的性质，应使

$$4y^2-4\cdot 2(y^2-1)\geqslant 0$$

$$2-y^2\geqslant 0$$

$$(\sqrt{2}+y)(\sqrt{2}-y)\geqslant 0$$

两因子应同为正或同为负，或有一个为零，因此

$\sqrt{2}+y\geqslant 0,\sqrt{2}-y\geqslant 0$，得 $\sqrt{2}\geqslant y\geqslant -\sqrt{2}$；

$\sqrt{2}+y\leqslant 0,\sqrt{2}-y\leqslant 0$，得 $y\leqslant -\sqrt{2}, y\geqslant \sqrt{2}$

（不可能）。

故极大值为$\sqrt{2}$，极小值为$-\sqrt{2}$。

如果应用三角公式，也可以解答：

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x + \cos x \\
&= \sqrt{2}\sin x\cos 45^\circ + \sqrt{2}\cos x\sin 45^\circ \\
&= \sqrt{2}\sin(x + 45^\circ)
\end{aligned}
$$

当y为极大时，$\sin(x+45^\circ)=1$，即

$$y = \sqrt{2}$$

当y为极小时，$\sin(x+45^\circ) = -1$，即

$$y = -\sqrt{2}\text{。}$$

再举一些用三角法解答极值的例子：

一、θ在第一象限，求$y = 3\sin^2\theta + 4\csc^2\theta$的极小值。

解：θ在第一象限，各三角函数值为正，故可据定积求和原理求极小值：

$$3\sin^2\theta = 4\csc^2\theta$$

$$\sin^4\theta = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

代入得 $\csc^2\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故 y的极小值为$\dfrac{3\times 2}{\sqrt{3}} + \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$。

以上演算过程似乎没有错误，但应注意：$\sin^2\theta$不可能大于1，$\csc^2\theta$也不可能小于1，如果让两者都为1，则$3\sin^2\theta \neq 4\csc^2\theta$，不能用定积求和原理解答。

用其它方法解：

$$y=\frac{3\sin^4\theta+4}{\sin^2\theta}$$

$$3\sin^4\theta-y\sin^2\theta+4=0$$

$$\sin^2\theta=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3}$$

$\sin^2\theta\leqslant1$，且从题目可知，分子第二项应取负号（因$6\sin^2\theta<y$），故

$$(y-6)^2\leqslant y^2-48$$

$$y^2-12y+36\leqslant y^2-48$$

$$7\leqslant y$$

得　y的极小值为7。

二、$\angle A$、$\angle B$为直角三角形中两锐角，求$y=\sin A+\sin B$的极大值。

解：$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$=2\sin45^\circ\cos\frac{A-B}{2}$$

$2\sin45^\circ=\sqrt{2}$，为定值，故当$\cos\frac{A-B}{2}$最大

时，y有极大值，而 $\cos\frac{A-B}{2}$的最大值为 1，故 y的极大值为$\sqrt{2}$。

实际上，如果已经知道 $y=\sin x+\cos x$ 的极大值为$\sqrt{2}$（上面已经解求），则本题可以写成 $y=\sin A+\cos A$，得出同样结果。

三、$\angle A$、$\angle B$ 为直角三角形中两锐角，求 $y=\sec A+\sec B$ 的极小值。

解：
$$y=\frac{\cos B+\cos A}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos^2\frac{A-B}{2}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2\cos\frac{A-B}{2}-\frac{1}{\cos\frac{A-B}{2}}}$$

显然，当 $\cos\frac{A-B}{2}$取最大值时，分母的第一项

最大，第二项最小，故整个分母值最大，则y最小。$\cos\frac{A-B}{2}$的最大值为1，故y的极小值为$y=2\sqrt{2}$。

四、求$y=\cos 2x+3\cos x+2$的极小值。

解：
$$\begin{aligned}y&=2\cos^2 x-1+3\cos x+2\\&=2\cos^2 x+3\cos x+1\end{aligned}$$

按二次三项式考虑，当$\cos x=-\frac{3}{4}$时，y有极小值，为

$$y=\frac{4\times2\times1-3^2}{4\times2}=-\frac{1}{8}$$

五、直角三角形ABC的三边为a、b、c（c为斜边），周长为p，求斜边最小时的长度。

解：
$$p=a+b+c=c\sin A+c\sin B+c$$
$$c=\frac{p}{\sin A+\sin B+1}$$

当c最小时，$\sin A+\sin B$应最大。从第二题知$\sin A+\sin B$的最大值为$\sqrt{2}$，故c的最小值为

$$c=\frac{p}{1+\sqrt{2}}$$

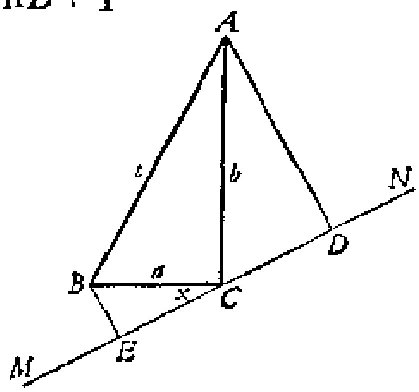


图 60

六、按图60，过直角三角形ABC的直角顶点C作

一直线 MN， 使两个锐角顶点到它的距离之和为最大。

解：过 A、B 作 MN 的垂线 AD、BE，则据题意，应求 $BE+AD$，即 $a\sin x+b\cos x$ 的最大值。

$$a\sin x+b\cos x=c\cos B\sin x+c\sin B\cos x$$
$$=c\sin(x+B)$$

当 $\sin(x+B)=1$时，$a\sin x+b\cos x$ 最大，此时 $x+B=90°$，即 $\angle x=\angle A$。作 $\angle x$ 等于 $\angle A$，即得 MN 线。

七、三角形 ABC中，$\angle A=120°$，求 $\cos B\cos C$ 的极大值。

解： $\cos B\cos C=\frac{1}{2}[\cos(B-C)+\cos(B+C)]$

$\cos(B+C)=\cos(180°-A)=\cos 60°=\frac{1}{2}$，为定值，故当 $\cos(B-C)=1$，即 $B-C=0$时，$\cos B\cos C$ 有极大值，为$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$。

八、x 在第一象限，求 $\sin x\cos^3 x$ 的极大值。

解：$\sin x\cos^3 x$ 有极值，$\sin^2 x\cos^6 x$ 亦有极值。$\sin^2 x\cos^6 x=\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)^3=\frac{1}{3}\cdot 3\sin^2 x(1-\sin^2 x)^3$，因 $1-\sin^2 x$ 为正，故据定和求积原理得：$\sin x\cos^3 x$ 有极大值时，应满足

$$3\sin^2 x=1-\sin^2 x$$
$$\sin x=\frac{1}{2}$$

即　$x=30°$，　$\sin x\cos^3 x$ 的极大值为$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$=\frac{3\sqrt{3}}{16}$。

九、三角形 ABC 的周长为 $2s=200$厘米，其中一角 $\angle A=60°$，求面积的极大值。

解：据求积公式，得面积 S 为

$$S=s^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$=100^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{10000}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}\right]}$$

$$=\frac{10000}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cos\frac{B-C}{2}-\frac{1}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{10000}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}+\frac{1}{2}}\right)$$

$\cos\frac{B-C}{2}=1$ 时，括号内第二项最小，S 值最大，故极大值为

$$S=\frac{10000}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{10000\sqrt{3}}{9}\text{平方厘米}$$

十、求 $y=(8-\sin x)(2+\sin x)$ 的极值。

解：$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，故 y 的两个因子均为正值，据定和求积原理，可知

$$8-\sin x=2+\sin x$$

时 y 值最大，$\sin x=3$。

但 $\sin x$ 不能大于 1，故需另解。

$$y=16+6\sin x-\sin^2 x$$

$$\sin^2 x-6\sin x+(y-16)=0$$

$$\sin x=3\pm\sqrt{9-(y-16)}=3\pm\sqrt{25-y}$$

$\sin x$ 不能大于 3，故等号右边第二项取负号，得

$$-1\leqslant 3-\sqrt{25-y}\leqslant 1$$

$$2\leqslant\sqrt{25-y}\leqslant 4$$

$$9\leqslant y\leqslant 21$$

即 y 的极大值为21，极小值为 9（相应于 $\sin x=1$ 和 $\sin x=-1$ 的值）。

静 静 的 小 河

小河的水呀静静地流，流呀，流呀！一个世纪过去了，又是一个世纪……，它默默无闻地度过两千多个春秋。

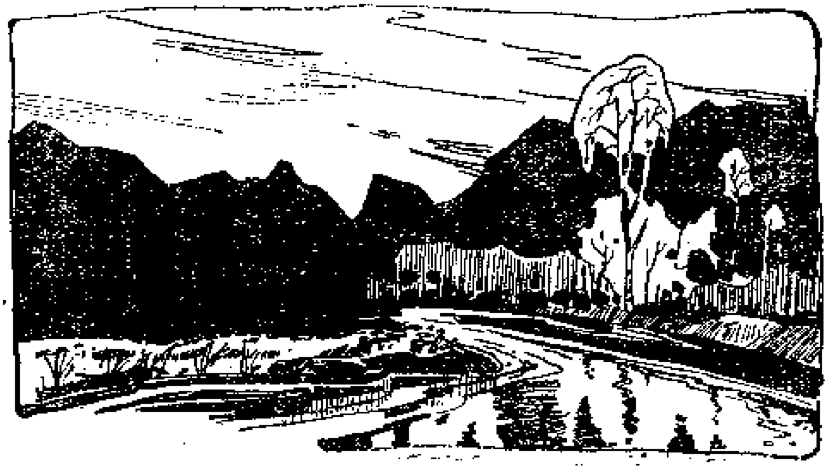
久经风浪的人们，看惯了雄伟壮观的波澜，对这

条微不足道的小河也许不屑一顾。可是，同学们可知道？大部分人却不抱有"曾经沧海难为水，除却巫山不是云"的观点，他们向往气势磅礴的海洋，但更理解这条绿水盈盈的小河。

在广西兴安，有一条穿市而过的小河，名叫灵渠，这是两千一百多年前秦王朝建成的运河，全长三十四公里，它蜿蜒于平畴沃野之间，沟通湘江和漓江，成为联结长江水系和珠江水系的纽带。多少年来，这条运河一直默默地为人们提供舟楫之便、灌溉之利，人们感谢它、爱护它。

与一切科学技术领域的发展一样，开凿这条著名的运河也经历过一段艰辛的路程，现存的"三将军墓"就是最好的见证。

很难想象，在两千年以前，这项巨大工程是怎样



建设的，只听传说提到负责设计、施工的是一位将军和他的若干幕僚。他们夜以继日地踏勘、测量、选址、定线、筹备工程用料，拟定了许多设计方案和施工措施。然而，由于经验不足，困难重重，规定期限到了，仍不见成效。为了承担责任、开脱同僚，这位将军自杀了。

接任的第二位将军继承了他的事业，夙兴夜寐，风里来，雨里去，精心设计，精心施工，终于筑成了堤坝，开通了水道。眼见大功即将告成，不料一场洪水冲毁了大部分工程，数年心血，废于一旦，千万人的汗水白流了，怎不令人痛心？事故是严重的，损失无法弥补，这位勇于负责的将军也只好自尽了。

灵渠终于在第三位将军的努力下修成了。当湘江的水慢慢地按照人们的意志注入漓江时，将军府正在进行一次盛况空前的庆功宴会。酒过三巡，突然，宾客们看到，将军敛起笑容，举着手中的酒杯，呆滞的目光无目标地注视着前方，他在想什么呢？

成功了，谁是真正的英雄呢？他怀念着自己的战友，他们披荆斩棘，开导在前，而我自己只不过是沿着前人铺设的路行进罢了，功劳不应该归于我，正应该是他们，才配得起庆功。

为了表达对前两位将军的义气，这位将军也结束了自己的性命。

“死，完全没有必要，但那是封建社会啊！”刘老师讲完上面那个故事后，似乎是评论地补充说道。“可是民众认为，他们三个人都是真正的科学家。于是，为他们修衣冠冢、立庙社，世世代代纪念不忘。”

同学们能从以上故事中悟出什么真谛吗？当我们学习数学偶有一得时，应该骄傲、自诩吗？

不言而喻，修筑运河是离不开数学的。且莫说运河，就是建筑工程上常见的沟槽，与数学中的极值理论都有密切关系呢！看看以下几个例子便知。

一、等腰梯形水沟的断面如图61，下底与腰等宽，为 a。问容量最大时，上底和高应为多少？

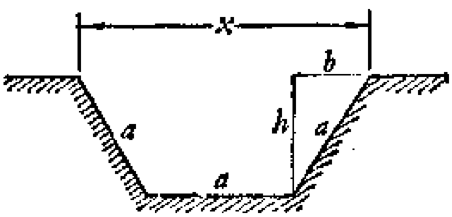


图 61

解：令上底为 x，高为 h，则

$$h^2 = a^2 - b^2$$

按沟的容量最大，即断面积最大。断面积为

$$S = \frac{x + a}{2}h$$

也可取 S^2 最大，并取 $x = a + 2b$，则

$$\begin{aligned} S^2 &= (a+b)^2h^2 = (a+b)^2(a^2-b^2) \\ &= (a+b)^3(a-b) \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}(a+b)^3(3a-3b)$$

据定和求积原理，当 S^2 最大时，则

$$a+b=3a-3b$$

$$b=\frac{a}{2}$$

故 $x=a+2b=2a$

$$h=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

二、等腰梯形水沟的断面如图62，下底与两腰共长 k，即 $2a+c=k$，问容量最大时，有关尺寸应怎样选取？

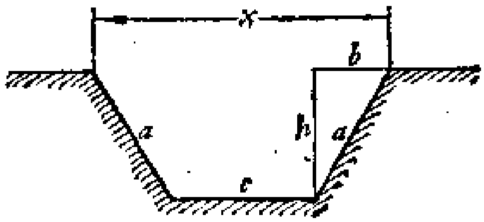


图 62

解：$S^2=(c+b)^2h^2$

$=(c+b)^2(a^2-b^2)$

$=(c+b)(c+b)(a+b)(a-b)$

式中 b 是未知数，欲使定和，则可写为

$$S^2=\frac{1}{3}(c+b)(c+b)(a+b)(3a-3b)$$

各因子的和为 $4a+2c=2k$ （式中因子$\frac{1}{3}$当然与极大值的求解无关），是定值，故 S^2 最大时，应使

$$c+b=a+b=3a-3b$$

故得 $a=c$，$b=\frac{a}{2}$，可据以定出梯形断面。

三、上题中如规定边坡为 1:1，则有关尺寸应怎样选取？

解：因边坡为1∶1，故 $h=b$。

$$S=(c+b)h=(c+b)b$$

以 $c=k-2a$ 和 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 代入得

$$S=\left(k-2a+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$=\left(k-\frac{4-\sqrt{2}}{2}a\right)\frac{4-\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}$$

据定和求积原理，得 $a=\frac{k}{4-\sqrt{2}}$，

故 $c=k-2a=k-\frac{2k}{4-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}k$

可据 a、c 定出梯形断面。

四、按图62，如 S 和 h 为定值，问沟的边坡为多大时 k 值最小？

解：$S=(c+b)h$，故 $c=\frac{S}{h}-b$

又 $a=\sqrt{h^2+b^2}$

故 $k=2a+c=2\sqrt{h^2+b^2}+\frac{S}{h}-b$

$\frac{S}{h}$是定值，因此只需求 $2\sqrt{h^2+b^2}-b$ 的极小值即可，令它为 y，则

$$y+b=2\sqrt{h^2+b^2}$$

$$y^2+2yb+b^2=4h^2+4b^2$$

$$3b^2-2yb+(4h^2-y^2)=0$$

$$b=\frac{y\pm\sqrt{y^2-3(4h^2-y^2)}}{3}$$

b 为实数，故

$$y^2-3(4h^2-y^2)\geqslant 0$$

$$4y^2-12h^2\geqslant 0$$

$$(y+\sqrt{3}h)(y-\sqrt{3}h)\geqslant 0$$

y 的极小值为$\sqrt{3}h$， 故 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}h$。

边坡以 $h:b$ 表示，则为 $h:\frac{\sqrt{3}}{3}h=\sqrt{3}:1$。

边　界

人们生活的道路，总不能都是笔直地铺展在面前，也有崎岖、曲折和迂回。

迂回，有时是必不可少的。可不是吗？就是这座校园面积只有32万平方米的学校，辛勤的绿衣人每天就要迂回地走过几公里的路程。是的，无论是严冬酷暑，或是风雪交加，或是大雨滂沱，从来没有阻挡过邮递员前进的步伐，同学们每天都看到深受师生们欢迎的邮递员，在预定的时间进入校园，走向教学大楼、宿舍、实验室，从校门口的传达室迂回地走到实验室就是1600米，还得从那儿走回校门口。每天总是重复着自己的足迹。

“同学们知道吗？邮递员同志每天在我们学校走过多少路程？”刘老师似乎是不在意地提出这个问题。

“这可能是一道普普通通的几何题。”王慧和同学们都这么想。他们熟悉自已长期学习和生活的这所学校，它的平面形状是一个凸四边形，校门口、教学大楼、宿舍、实验室就座落在四边形的顶点（图63）。于是，画出计算图形如图64所示。

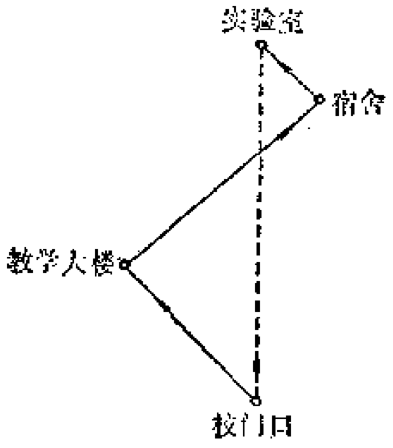


图 63

已知凸四边形 $ABCD$ 的面积 $S=320000$平方米，一条对角线与两个对边的和为1600米($a+b+c=1600$)，求另一条对角线的长度（即求 $d=?$）。

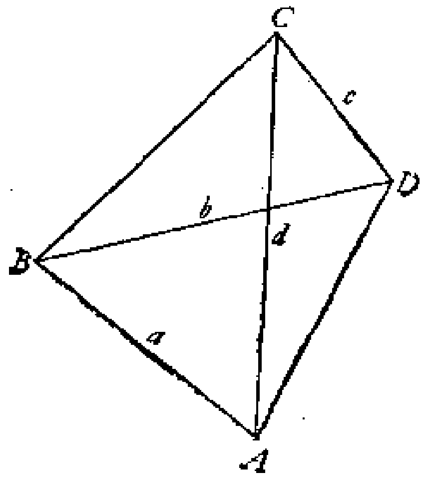


图 64

这道题看起来简单，可是谁也没有解出。

一般是将四边形分成两个三角形，然后利用边角关系，企图通过建立几个方程求解，可是这是十分繁琐的，而且还没有人能利用这种方法得出答案。

同学们期待刘老师就这个问题进行讲解。现在，讲台上的刘老师却不直接提到它，而在讲什么“边界”。边界，这是怎么回事呢？

“在等边三角形中找出一点，使它距三边的距离和为极小。”刘老师提出这道题后，接着就宣布答案：

“在等边三角形 ABC（图 65）中任取一点 O，它距三边的距离和是定值，即

$$l+m+n=k$$

不存在极值。”

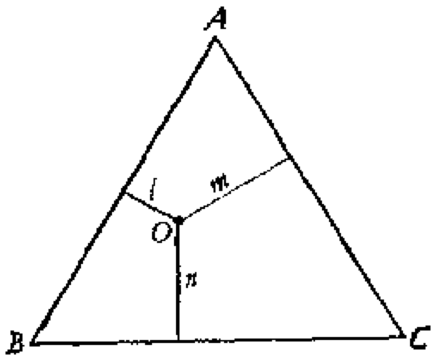


图 65

谁来证明这个结论呢？

这并不是什么难题，要是能够先找出这个 k 是个什么值，也许就简单多了！

让 O 点逐渐移动，只要不超出 $\triangle ABC$ 的范围，都符合题意。那末，O 点要是落到一条边线上呢？譬如说，在 BC 边上有一点 O，则在这种情况下，仅需引出两条线，从图66可见，得

$$l_1+m_1=k$$

进一步移动 O 点，到达边界的极端，位于三角形的顶点，如 B 点，于是，离 BC 和 AB 为零，便有

$$m_2=k$$

显然，h就是等边三角形的高。

“原来这就是所谓‘边界’的奥秘！”王慧不仅暗自赞叹，这样巧妙的方法是如此简单啊！她理解到，这是刘老师长年如一日刻苦钻研的收获，任何一种有创见性的发现都是心血的结晶。

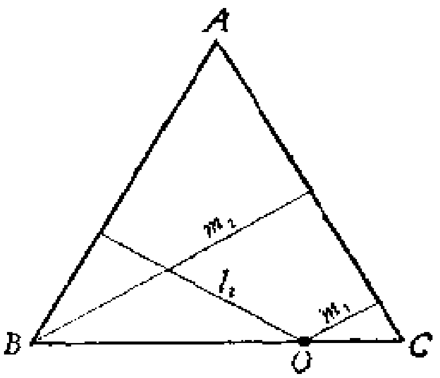


图 66

这时，她猛然想起，这道题过去好象解过。对了，的确解过这样一道题：

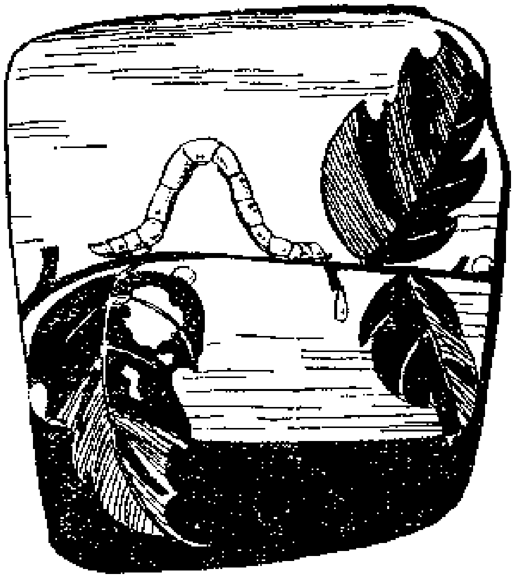
等边三角形中任意一点至三边的距离和是定值，求该值。

为了求这个数值，曾经补画好几条辅助线：先是过O点作BC的平行线，又作BC边的高，再过O点作AC的平行线……，这比起“边界”方法，可是逊色多了。

尺 蠖 的 启 示

同学们知道一种名叫“尺蠖”的小虫吗？

王慧从小就认识它。几年前的一次郊游中，她正在树下歇息，忽然，一条树干颜色的虫子出现在眼前，爬着爬着，那缓慢而艰难的“步履”简直可笑极



了：它先把细长的身子拱曲起来，象是一个小小的驼峰，然后伸直，象是挣扎似地向前移动。

姐姐告诉王慧：“这是一种危害树木的虫子，名叫尺蠖，因为它每行走一步都要弯曲身子，也叫‘步曲’。在休息时，它就伸直如同枝状，人们不容易发现它的存在。”

尺蠖从头到尾的全长为 l（图67），可是当它弯曲时呢？头与尾之间的距离就只为 l_1 了，也就是说，头与尾之间的距离在 l_1 至 l 范围内，l_1 和 l 成为头尾距离的边界。

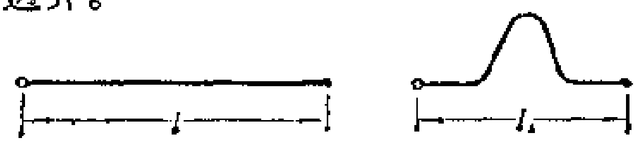


图 67

“如果我们设想，凸四边形的 a、b、c 三段可以象尺蠖那样伸曲，那末，不也能找到顶点 A 至 C（图64的长度 d）的范围吗？”刘老师对前些日子提出的“邮递员所走路程”的算题做了提示。

“0～1600米。”王慧很快就画出图形（图68），并说明d的极小值为0，极大值为1600。

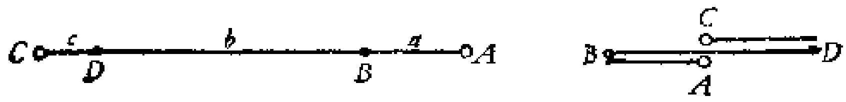


图 68

现在大家可以想一下，当凸四边形面积符合已知值320000平方米时的图形，对角线肯定不是零，也不是1600。因为那样，面积 $S=0$。

那末，当$d=0\sim1600$时，S的极大值是多少呢？

显然，重叠在一起的A和C点，或者伸直了的AC，必须弯折起来（如图 69a）才能产生面积。而当$DC\perp BD$时，比DC不垂直BD时产生的$\triangle BDC$面积大（从图69b可明显地看出，它符合：三角形中有两边为定值，求面积极大的问题——参看“几何解

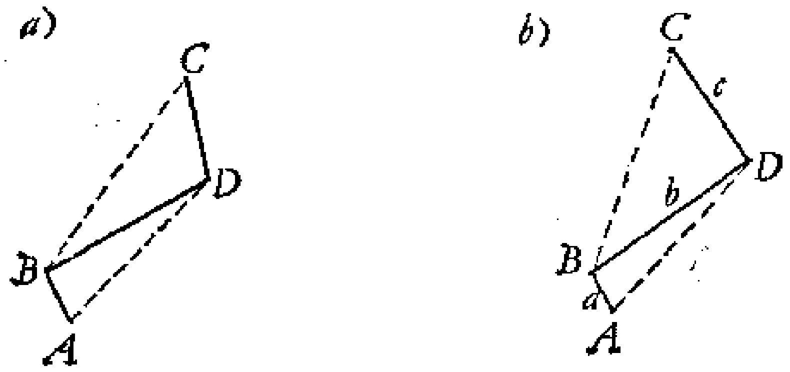


图 69

法”）；同样，$AB\perp BD$时，$\triangle BDA$为极大。于是，四边形 $ABCD$ 的面积为极大时，当为

$$\frac{CD\cdot BD}{2}+\frac{AB\cdot BD}{2}=\frac{b(a+c)}{2}$$

因$b+(a+c)=1600$米，为定值，据定和求积原理，当 $b=a+c=\frac{1600}{2}=800$米时，四边形 $ABCD$的面积最大，为$\frac{800\times800}{2}=320000$平方米。

“那就是说，面积的极大值是320000平方米。任何不符合图69 b 图形的四边形，面积都不可能达到320000平方米。”刘老师用求极值的方法做了以上巧妙的解说，最后说道：“现在，剩下的问题就是根据这样条件去确定d值了。”

当然，这步骤由王慧来完成，那是轻而易举的。按图70，d是正方形$AECF$的对角线，等于$800\sqrt{2}$米。

于是可得到：邮递员每天走过的路程是$1600+800\sqrt{2}\approx2731$米。

“可是，a、c的数值应该是多少，它与邮

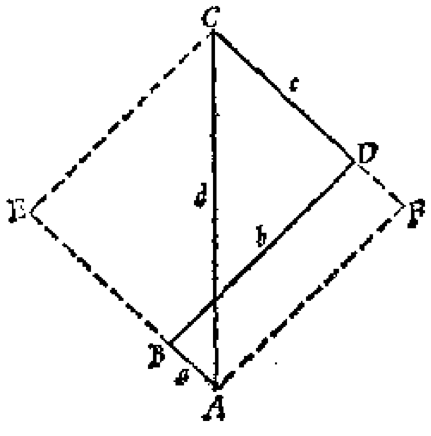


图 70

递员所走的路程有什么关系呢？”王慧迷惑地提出这个问题，但很快就由她自己做出解答了。

两个亲密的伙伴

教室的黑板上出现三个简单的算式：

$$4 = 2 + 2$$

$$4 = 2 \times 2$$

$$4 = 2^2$$

王慧茫然地瞪大眼睛看着这三个式子，它们与极值有什么关系呢？

教室里沉寂无声，同学们等待着刘老师的解释和提问。他们已经习惯地适应这位老师的性格，她喜欢用一种启发式的教授法，也许是由于她对圆周率的研究有深刻认识，才欣赏那种渐近逼值的方法，从问题的边缘逐步深入到它的中心，让同学们不知不觉、自然而轻松地弄懂某一个问题。

果然不出所料，刘老师提问了。这时，她信手在黑板上写了一个数字：32。

“将32分成若干个正整数，要使这几个数的乘积最大，该怎么分呢？”

王慧立刻交出答案：

$$32 = 16 + 16$$

可是，有几名同学却交出不同的答案：

$$32=8+8+8+8$$

$$32=4+4+4+4+4+4+4+4$$

$$32=16\times2$$

根据定和求积原理，显然，所分的几个数必须相等，这样，才出现以上几种答案。

为什么有这么多组答案，而究竟是16^2，抑是8^4、4^8或2^{16}取得最大值呢？

将32分成两个数时，两个数的乘积有一个极大值16^2；分成四个数时的极大值为8^4；分成8个数或16个数时，它们的极大值分别为4^8或2^{16}。可是分成几个数时乘积最大呢？却是耐人寻味的，现在比较这几个答案：

$$16\times16=256$$

$$8\times8\times8\times8=4096$$

$$4^8=65536$$

$$2^{16}=65536$$

分成每个数为 4 或 2 就是我们的答案吗？

4 和 2 是两个亲密的伙伴，由于 $4^8=(2+2)^8=(2\times2)^8=(2^2)^8=2^{16}$，所以这两个结果是一样的。我们再把32分为32个“1”，还可以得到一个极大值（将32分成32个数的极大值）；当然，也可以把32分为1个“32”，这就是边界，它们得出几个数的乘积为

$1^{32}=1$

$32^1=32$

用分成的数和乘积值画一个图表如图71。

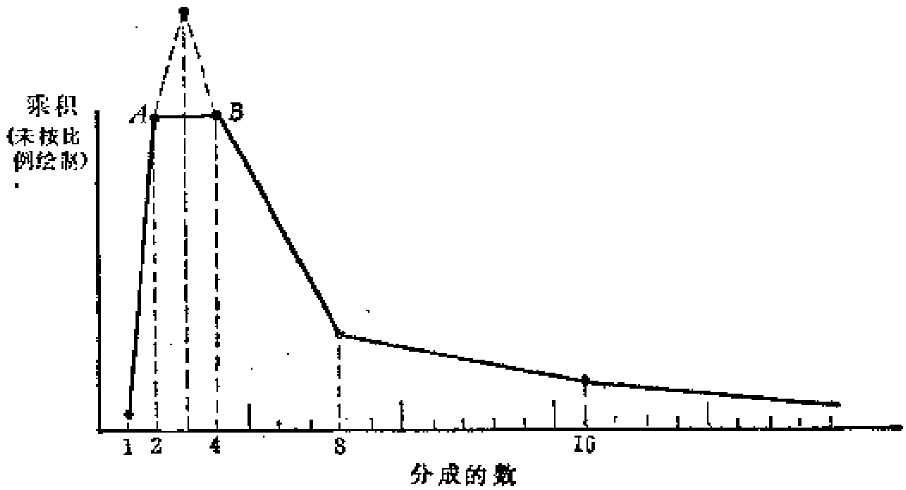


图 71

从图表中可以看出，2、4所对的乘积值 A、B 两点是一样的。到底最大的乘积值应该落在哪儿，这就要先来讨论所分的数大于4和小于2的情况：

1．大于4的数：

一切大于4的数 a 都可以再分成2和 $a-2$ 两个数，它们的乘积为 $2(a-2)=2a-4$。当 $a>4$ 时，$a-4>0$，即 $2a-4>a$，说明：大于4的数 a 如果用2和 $a-2$ 代替，它的乘积必然增大，所以图71中“分成的数”若大于4，乘积必然不是最大的。

2．小于2的数：

唯一小于 2 的整数是 1，显然，如果把 2 再分成两个 1，它的乘积 1×1 肯定小于 2。

根据以上讨论的结果，可以看出：

1. 8^4必然小于4^8（即小于2^{16}）：

8^4 的 8 再分成 2 和 6，则乘积为 $(2\times6)^4$，大于 8^4；6 再分成 2 和 4，则乘积为 $(2\times2\times4)^4$，大于 $(2\times6)^4$，故得

$$8^4<4^8$$

2. 2^{16} 必然大于 1^{32}。

那末，从图71的折线看来，余下的问题就是解决水平直线 AB 之间的另一个整数 3 了。

如果某数 a 既有 2，又有 3 的因数，可以写成

$$a=2n \quad 和 \quad a=3m$$

而 2^n 与 3^m 比，哪个大呢？则是将 a 分成几个"3"，它的乘积较大。证明如下：

因 $3^2>2^3$，故 $3^{\frac{a}{n}}>2^{\frac{a}{m}}$，$3^{\frac{a}{n}\cdot\frac{mn}{a}}>2^{\frac{a}{m}\cdot\frac{mn}{a}}$，得

$$3^m>2^n$$

所以，当刘老师将原题的数"32"改为"36"，同学们很容易看出答案为3^{12}。将36分成12个"3"，它的乘积值为最大（比分成18个 2 的乘积2^{18}大）。

王慧在凝神地听着刘老师讲解，听着、听着，忽

有所悟地提出一个问题：

"将'32'分成几个'3'，这些3的乘积不也能得到最大的值吗？"

可是，刘老师提醒说：

"请注意，我们要的是整数。"

是啊，要的是整数。王慧知道这一点，不过刘老师并没有限制非要分成相等的数，尽量用3^m来表示，它的结果可能比4^8更理想。试试看吧！

$32=3\times10+2$，那末，乘积应该是

$$3^{10}\times2=118098$$

这才是真正的答案。

以上演算说明什么呢？根据定和求积原理，将某数分成固定的几个数，如果要使这几个数的乘积最大，则各数必须相等。但是，所分数的数量不同，结果也是不同的。

根据以上推导，可以得出这样结论：

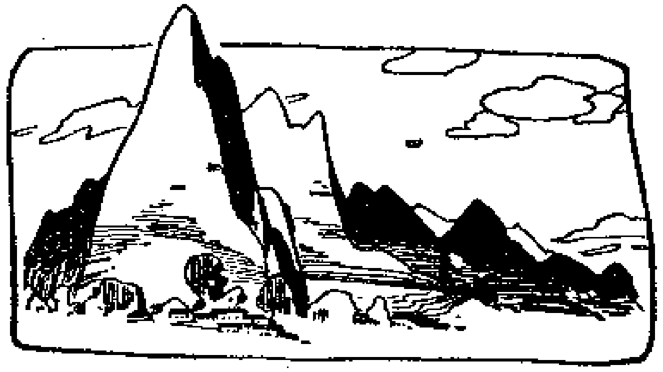
当若干个正整数的和为定值时，它们的乘积若为最大，表现为$2^p\cdot3^q$的形式。其中p取1或2。

为什么p不取0或$\geqslant3$呢？同学们都理解，那是因为：

1．$2^0\cdot3^q$ 是原数分成 $3q+1$ 的乘积，它小于$2^2\cdot3^{q-1}$〔原数分成$3(q-1)+2+2$的乘积〕，因此，如原数被3除所得余数为1，则分成$3(q-1)+4$的形

式，各数乘积最大。

2. 因 $3^2>2^3$，所以，如 $p\geqslant 3$，只保留$p=1$或 2，大于 3 的则并入 3^q内，乘积更大。



顶　　峰

眼前放着这样一张折线图（图71），对于无心者来说，也许没有什么用处，因为需要解决的问题已经得到满意的答复，从那儿看到以上已经得到的结果 $2^p\cdot 3^q$ 的作用了。

王慧可不是那样不求甚解的学生，大部分同学也都已养成对任何一种学科的某个问题穷追到底的习惯。所以对于那张折线图，总是反复琢磨，它在两点之间联系的既是直线，那末，如果分点更趋稠密，组成它们之间的较短折线又是什么样子呢？

这个图形就象一座小山，山坡的两侧同一水平由

“4”和“2”——这一对亲密的伙伴把守着，它们的纵坐标值相等，形成一条与横坐标轴平行的直线，如果在这条直线中任取一点，那末纵坐标值也相等吗？

当然不一定如此，在这个折线图上，似乎4和2所控制的就是制高点，要是再取一点“3”，将32分成几个3，那末，这个折线图也许又有了高峰。

“不过，32却没有3这样一个因数呢！”王慧这样想。同时，她觉得，这可不一定限于整数，如果不用整数，就可以写成

$$32 = 3 \times \frac{32}{3}$$

各数的乘积为 $3^{\frac{32}{3}}$，与2^{16}比较，哪个数值大呢？

因 $3^2 > 2^3$，故 $3^{\frac{2}{3}} > 2$，$3^{\frac{32}{3}} > 2^{16}$。于是，折线图中在“2”与“4”之间添了“3”的一个相应值：

$$3^{\frac{32}{3}} \approx 122800$$

这就是图中虚线所示的折线。现在，图中该有顶峰了，如果某数分成若干个“3”，它们的乘积可是最大的了。

且慢！在2和3之间，在3和4之间，仍然是直线，能不能在其间出现真正的顶峰？王慧和同学们为探讨这个问题已经绞尽脑汁，他们耗费了许多时间，

甚至在折线图上增添了许多新的点，如 2.3、2.4、2.5、2.7……，个别点出现了比 3 更高的峰，那就是说，顶峰还没有找到。

刘老师注意到他们的努力，这是多么可喜的现象啊！勇于攀登高峰的人们是值得赞扬的，但也需要扶持，特别是当这些年轻人的前方遇到不可逾越的险阻时，那就必须引导他们绕过前面的路障继续前进。

于是，她给同学们写出一个特殊的数字：

$$2.718281828459\cdots\cdots$$

要是将某数分成的每一个数与这个数最接近，那末它们的乘积就最大。如果用 e 代表这个数，则若以 N 表示某数，乘积的最大值为

$$e^{\frac{N}{e}}$$

例如某数为32，则乘积最大值为

$$2.71828^{\frac{32}{2.71828}} \approx 130000$$

王慧和同学们茫然地面对黑板上的这个数字，惊愕的神色久久地留滞在每张困惑的面孔上。

这到底是个什么数字呢？

条 件 极 值

天气这样沉闷，没有一丝轻风，而那边却扬起灰

土，滚滚烟尘扑面而来。人们揣测，又有什么急事了！

一匹快马飞驰而过，后面留下长长的一条蹄迹……。

二十世纪的文明能使一纸公文在顷刻之间传递给万里之遥的收件者，而在古代呢？人们只能通过烽火报急，或者利用快马接力的方法将紧急文书送往目的地。

负责收发、转运公文的部门称为“驿站”，执行送文任务的人叫“驿差”。快马就定期或不定期地在被称为“驿道”的土路上来回奔跑，完成上司指派的使命。

话说当年某地有个驿站，名叫东驿站，这里常驻的驿差年纪大了，上面就派一个后生来帮忙。这天，老驿差告诉新来的徒弟：“从这儿一直往西，便可抵达中驿站，然后转马向北，一直前进，可到北驿站。我从这儿直接到北驿站等你，再共同去别处办事。”

这几天师徒俩曾经一起策马并行，骑马的速度不

相上下，徒弟和师傅都喜欢用这种不快不慢的马速。

只见徒弟问道：

“师傅：东驿站至北驿站大概需用多少时间呢？”

“一个时辰。”师傅怕徒弟中途耽搁，再三丁宁。“可你别误事，及时前来。”

徒弟想了想，说道：“师傅放心，我只要用同您一样的马速，无论如何可以在您到达后的半个时辰内与您会面。”

师徒俩同时出发，果然，在师傅休息后不到半个时辰，徒弟就到达了。

“这是怎么回事呢？”王慧听刘老师讲完这个过程感到奇怪。“师傅既然指点徒弟，告诉他去北驿站的走法，说明徒弟一回也没有去过，那末，他怎能断定，师傅到后半个时辰内他就有把握抵达呢？”

要是画个图（图72），那就真相大白了。

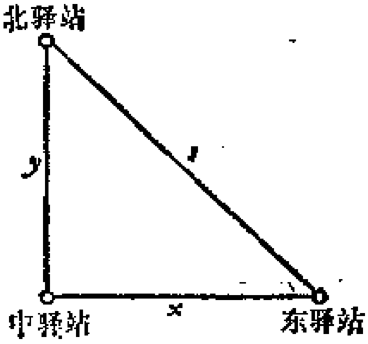


图 72

已知 $\sqrt{x^2+y^2}=s$，求 $x+y$ 的极大值。

解这道题目是很简单的：

$$x+y$$
$$=\sqrt{(x+y)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+2xy}$$
$$=\sqrt{s^2+2xy}$$

s 为一个时辰的路程，为定值，故当 xy 最大时，$x+y$ 有极大值。而 xy 最大时 x^2y^2 亦为最大，据定和求积原理知 $x=y$ 时为本题答案。

因此，三驿站成等腰直角三角形时，$x+y$ 有极大值，等于$\sqrt{2}s$。而$\sqrt{2}<1.5$，所以，徒弟算出，他到达北驿站的时刻比师傅到达的时间不会超过半个时辰。

王慧觉得，象 $\sin x$ 的极大值为 1，$(a-b)^2$ 的极小值为 0，似乎是无可非议的，它们不需要什么附加条件，而这道题却是在$\sqrt{x^2+y^2}=s$的条件下求极值，这是什么性质的题目呢？

"这叫做'条件极值'，就是在某种条件下求极值。"刘老师向同学们讲述什么是条件极值，并且补充说："其实，过去我们已经演算过许多条件极值的题目；例如已知长方体的对角线长度（这就是'条件'）求表面积的极大值；又如 $\angle A$、$\angle B$ 为直角三角形中两锐角（即条件为$\angle A+\angle B=90°$），求 $y=\sec A+\sec B$ 的极小值；甚至连常用的定和求积原理和定积求和原理也具有条件，那就是：不等式中具有'定和'和'定积'。"

在极值求解中，经常遇到条件极值问题，它是很

重要的。应用问题大部分都具有"条件"，列成算式后应灵活解求。

以下举几个例子演算：

一、若$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$（$x$、$y$、$z$、$a$ 都为正数），求 $f=xyz$ 的极值。

解：$f=\dfrac{1}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}$，据定和求积原理知：当$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$时分母极大，即 f 有极小值。

故$\frac{3}{x}=\frac{1}{a}$，$x=3a$，得 f 的极小值为

$$f=x^3=(3a)^3=27a^3$$

二、若 $x-y=\frac{\pi}{4}$，求$f=\cos^2x+\cos^2y$ 的极值。

解：
$$\begin{aligned}f&=\frac{\cos 2x+1}{2}+\frac{\cos2y+1}{2}\\&=1+\frac{\cos2x+\cos2y}{2}\\&=1+\cos(x+y)\cos(x-y)\\&=1+\cos(x+y)\cos\frac{\pi}{4}\\&=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+y)\end{aligned}$$

$\cos(x+y)$ 的极大值为 1，极小值为 -1，故

$$f_{极大}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_{极小}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

三、长方体的三边和为10厘米，底的周长与$\frac{1}{3}$高度之差为8厘米，求对角线的极短值。

解：设长方体的底面两边为a和b，高为c，则据题意，题目可改写为

若　$a+b+c=10$，$2(a+b)-\frac{c}{3}=8$，求$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的极小值。

$a+b=10-c$，故　$2(10-c)-\frac{c}{3}=8$，得　$c=\frac{36}{7}$；

故　　$a+b=10-c=\frac{34}{7}$；

$$a^2+b^2+c^2=(a+b)^2-2ab+\left(\frac{36}{7}\right)^2$$

$$=\left(\frac{34}{7}\right)^2+\left(\frac{36}{7}\right)^2-2ab$$

只要求出$2ab$为最大，则$a^2+b^2+c^2$有极小值。据定和求积原理，应取$a=b$，故$a=b=\frac{17}{7}$。

于是，对角线的极短值为

$$\sqrt{\left(\frac{17}{7}\right)^2+\left(\frac{17}{7}\right)^2+\left(\frac{36}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{1874}}{7}\text{厘米}$$

四、若　$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=1$，求$x^2y^3$的极小值（$x$、$y$都为正数）。

解：$x^2y^3=\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^3}}$，当分母最大时，$x^2y^3$有极小值。

以 $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{y}\right)$ 代入得

分母 $=\frac{1}{16}\left(1-\frac{3}{y}\right)^2\frac{1}{y^3}=\frac{1}{16\times 8}\left(1-\frac{3}{y}\right)^2\left(\frac{2}{y}\right)^3$

据定和求积原理，应取

$$1-\frac{3}{y}=\frac{2}{y}$$

故 $\qquad y=5$

代入得 $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{5}\right)$

故 $\qquad x=10$

于是，x^2y^3 的极小值为

$$10^2\cdot5^3=12500$$

五、若 $A+B+C=180°$，求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的极大值。

解：$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

设$\angle C$ 为定角，则$A+B$为定值，故当$A=B$时，$\sin A+\sin B$ 最大。

按题意，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 为 $\triangle ABC$ 的角，这样，则 $A=B$ 时，意味着 $\sin A+\sin B$ 最大时，必须为等腰三角形（$\angle A$、$\angle B$ 为底角）。同理 $\sin B+\sin C$ 最大时，另两腰应相等（$\angle B$、$\angle C$为底角）。而$\sin C+\sin A$最大时，$\angle C$、$\angle A$为底角的两腰应相等。

因此，$\sin A+\sin B+\sin C$ 有极大值时，三角形

应为等边三角形，三角都为60°，极大值为

$$3\sin 60° = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

六、若 $A+B+C=90°$，求 $\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C$ 的极小值。

解：

$$\operatorname{tg}(A+B+C)=\operatorname{tg}[(A+B)+C]$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(A+B)+\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg}C}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}+\operatorname{tg}C}{1-\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}\cdot\operatorname{tg}C}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A}$$

当 $A+B+C=90°$时，分母为零，即

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A=1$$

而 $\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C\geqslant\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A$

（据“远离地球的地方”第一题）

$$\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C\geqslant 1$$

故 $\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C$ 的极小值为1。

七、若 $ax+by+cz=d$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的极小值。

解：　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$$=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+b^2x^2+c^2y^2+c^2x^2$$
$$+a^2z^2+a^2y^2+b^2z^2$$
$$=(ax+by+cz)^2+(bz-cy)^2+$$
$$(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$
$$=d^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

当上式第二、三、四项等零时，$x^2+y^2+z^2$ 有极小值，为

$$x^2+y^2+z^2=\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$$

此时应有

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

八、若 $3x+4y=1$，求 x^2+y^2 的极小值。

解：据上题，以 $z=0$，$c=0$ 代入可得 x^2+y^2 的极小值为

$$\frac{1^2}{3^2+4^2}=\frac{1}{25}$$

平　　衡

数学的作用真是太大了！这点，王慧和同学们是深信不疑的，谁也不能否认，一切部门的科学技术全都离不开它。

如果没有数学，能谈得上物理，谈得上化学吗？

然而，有趣的是，其它学科居然也能帮数学的忙，譬如说，“光程最短”，用它来解答路线极短问题，再妙不过了。当然，对王慧和她的同学们来说，这个问题已经了如指掌。

自然界中各种事物的相互关系是非常密切的，也是很复杂的，近代科学的发展绝不是单门学科所能胜任。那末，难道还有其它学科能帮我们解答极值问题吗？

“当然有的，而且有些还是相当巧妙的方法呢！”刘老师应同学们的要求，再举一种物理解法。“譬如说，平衡。”

是的，平衡。提到平衡，大家会不约而同地想起那杂技表演中既精采又惊险的镜头：几把堆垒得有房子那么高的椅子，与交通规则格格不入的自行车骑手，以及那位无依无靠地在钢丝绳上翩翩前进的小姑娘……。

那末，不平衡呢，将会出现什么情况？毋庸置

说，那位天真的小姑娘会从高空坠落，在椅子上倒立的那个演员会沉重地摔下。

在人类生存的地球上，万一出现不平衡呢？那末，也许海洋里万顷波涛会被抛向天空，山岳拔地而起，房屋倒塌，人就会混杂着地面的物品乱滚，或被卷向高空……。

然而，大家可以放心，这样的混乱局面永远也不会发生。因为大自然妥善地将我们安排在一个总能相对平衡的环境中生活，几千年的实践使得人类不但能够掌握平衡的规律，而且能够利用它来为我们造福，甚至还可以帮助我们解决数学中的极值问题呢！

在水平横杆上的 A、B 两点固定着一根绳子（图73 a），套着一件重物，用手托住，如果套重物处是摩擦力很小的滑轮，那末，撒手后，重物就会滑下，位于图73 b 的位置，据对称性质，重物分 $\angle APB$ 为

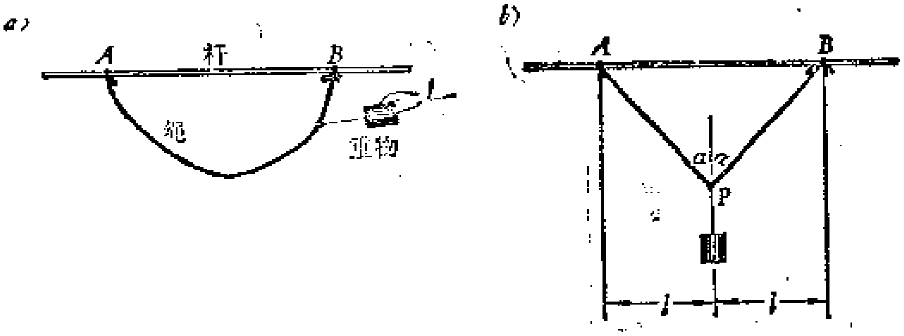


图 73

两个相等的角 α。

如果A与B不在一个水平上，而是一高一低呢？见图74，重物照样会把$\angle APB$ 分为两个相等的角α。怎么会是这样，很容易理解：要是固定A、B'两点，自然形成图74位置，就象图73 b一样。顺着PB'延长绳子至B点，当然放松固定点 B' 后，重物的位置还是不变。

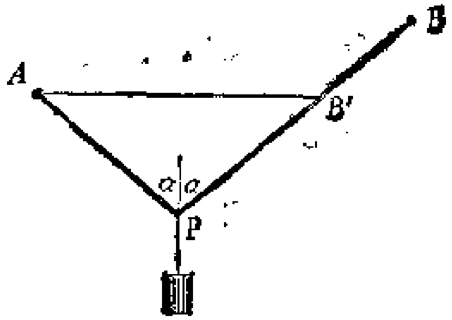


图 74

这种平衡现象说明什么问题呢？同样是个等角特征，能够解决“光程最短”所解决的那个问题。

那末，力的平衡理论应怎样解释，从图75便可以看出：

APB 是一根绳子，因此所受的力是一样的，其值为N，它承担着重物W。只有在等角条件下，左右两个N的水平分力才能相等（为$N\sin\alpha$），在水平方向得到平衡。

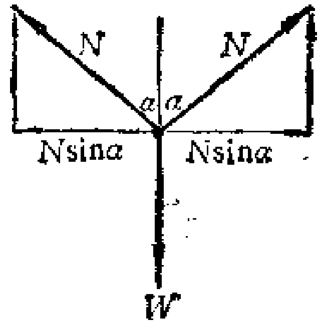


图 75

对王慧来说，这的确是个很简单的问题，用光

学、几何、代数的方法都可以解决，类似这样的问题该不会太复杂吧！

但是，刘老师提出的另一个问题却使王慧束手无策，无论是用以上哪种方法都解不出来。这是个什么样的怪题吗？

决不是怪题，而且看起来相当简单呢！是这样的：

按图1，如果AB段所用水管比BC段粗，每单位长度的重量为BC段所用水管的2倍，那末，B点应确定在哪儿，才能取得最经济的效果？

按图58，用数解法吧：

$$AB+BC=2\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

王慧发现，仿照图58那样，用那个不等式解不了，因为所得到的不是一个定值，如同图58那样的$\sqrt{(a+b)^2+d^2}$。用几何方法吧！动过不少脑筋了，找不到象图1b那样的，或者更复杂的方法。暂时又找不出什么利用光程最短原理的方法。

可是，办法总是有的，那就是刘老师进一步讲解的一种利用平衡原理的方法。

做一个实验：在平台上树立一个架子，这架子包括两个立柱和一根横杆，它们都是结实而不会变形的，如同图76所示。

以横杆表示图58的水平线，再在相应位置安设滑

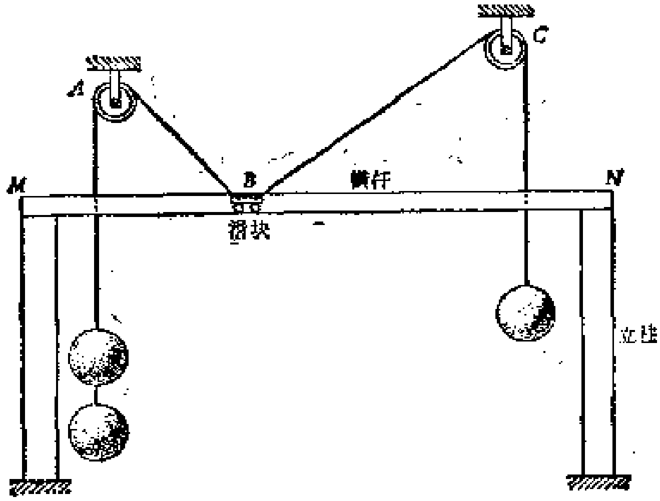


图 76

轮 A、C；滑轮上绳子的一端固定于滑块上；滑块的底面有滚轴，可以在横杆上灵活地作水平位移。在滑轮 C 的绳子上挂 1 个单位重量的重物，在滑轮 A 的绳子上则挂 2 个单位重量的重物，如果滑块原来是放在 AC 水平投影的中点，这时，它就会往一侧移动，等到它静止不动时，整个系统处于平衡位置，这个位置 B 就是所要定的点，$AB+BC=2\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$ 的值最小。

不单是上述那个例子可以利用平衡的方法求极小值，更复杂的有如图16的韩信点兵题也能够应用这个方法解。

见图77，在桌面上按比例定 A、B、C 三点，在

一个小环上固定三根绳（当然，根据实验规模，只能是小绳，或线、带之类），绳的另一端挂上相应重物，例如对图16，用500克、800克和1100克。挂上重

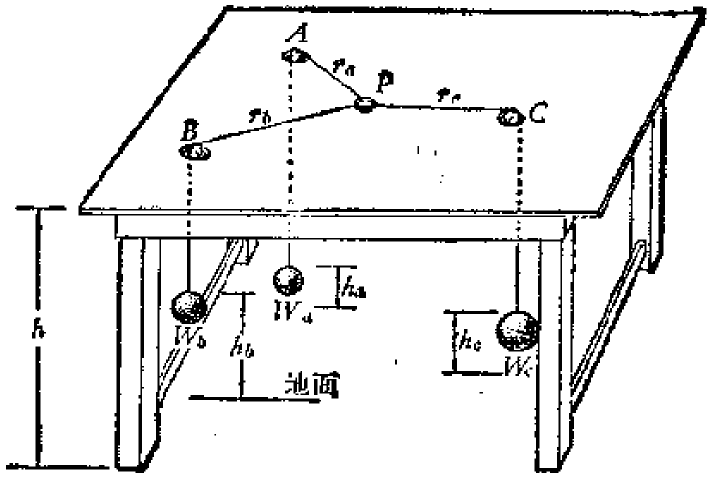


图 77

物后，借各点处的滑轮工作，小环就会自动调整位置，至静止不动时得到平衡，这时，它的位置P就是所求的点，大本营设在那一点最合适。

这种方法固然巧妙，可是它有什么理论根据呢？

要说到根据，那就是力学中的“势能极小原理”：

一件物体处于高位，下落时就能够依靠势能做功，势能是

$$E = Wh$$

式中W是物体的重量，h是下落高度。h愈小，势能也就愈小，如果让物体自由落下，它总会落到最低的位置，使它的势能达到最小。

图78是一个常见的例子，绳子系着重物，挂在钩上，用手托起重物，处于MN的水平上。当手离开重物时，它就会落下至$M'N'$的水平，存在势能Wh。这Wh值是最小值，重物被绳子吊住，再也下不来，它在这种尽可能位于最低位置的条件下得到平衡。

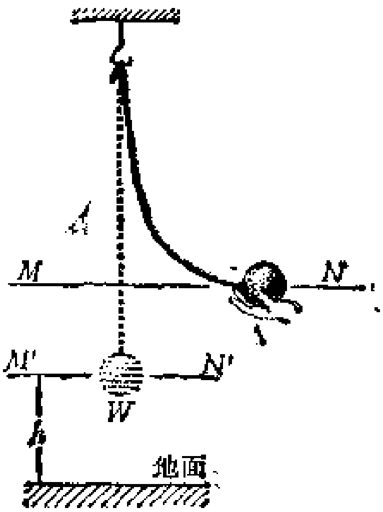


图 78

如果有一组重物构成整个系统，那末，显然，势能极小原理适应于它的重心（整个系统的重量乘以重心至地面的高度。也就是分别以各重物的重量乘以各自至地面高度的和）。

利用势能极小原理，我们就可以证明图77所确定P点位置的正确性：

当整个系统平衡时，势能最小。现在令桌面高度为h，h_a、h_b、h_c为A、B、C点重物至地面的高度，r_a、r_b、r_c为A、B、C至P点的距离，l_a、l_b、l_c为经过A、B、C的绳子长度，重量用符号W_a、W_b、W_c表示（不用500、800、1100具体数字），则

势能为

$$E = W_a h_a + W_b h_b + W_c h_c$$

又 $h_a = r_a + h - l_a$, $h_b = r_b + h - l_b$, $h_c = r_c + h - l_c$，代入得

$$E = W_a r_a + W_b r_b + W_c r_c + [(W_a + W_b + W_c)h - W_a l_a - W_b l_b - W_c l_c]$$

式中中括号内数值是定值，因此，在处于平衡状态时，既然E最小，$W_a r_a + W_b r_b + W_c r_c$也最小。这样，就证明了$P$点位置的正确性。

光 行 最 速

“走最近的路，都能够在最短时间内到达目的地吗？”刘老师要大家想想这个问题，然后补充说：“譬如说，在这条最近的道路上，崎岖坎坷，荆棘丛生……。”

这是很普通的常识。如果真是那样，走这条路必然“欲速则不达”，人们宁可绕远一些，也不会选择较近的道路。

在韩信之后，汉朝还有一员著名的将军，名叫李广，他率领的队伍神出鬼没，敌人经常不知道他是从哪儿来的，又到哪儿去了。一会儿出现，一会儿又消失了，无可奈何地送他一个外号，叫做“飞将军”

——飞将军从天降。

其实，李广所以不愧为飞将军，与他善于利用和选择行军路线，也是分不开的，他不拘泥于路近、路远，而是根据地形、地势，以及道路上的障碍物情况和沿线敌人兵力的分布现状，灵活地争取最有效的方案。

“现在，大家给李广当一次军师吧！”刘老师提出的是一个什么问题呢？

见图79 a，MN 线的一边是砂地，一边是草原。一队骑兵要从 A 地赶赴 B 地，途中须通过这两种不同地带的开

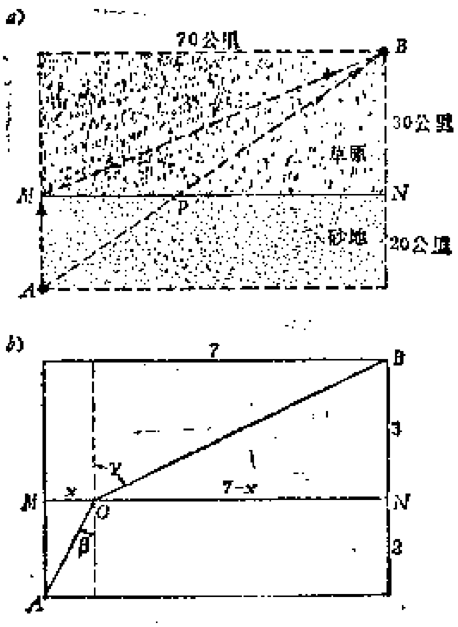


图 79

阔地，而在草原上行进的速度可比砂地快一倍，问怎样走法能使所用时间最短？

显然，走直线距离 AB 不见得省时间，因为这样，则所走砂地段较长，如果能从 AM（砂地最短段）取道 MB，或许所用时间能短一些？

设砂地马速为 v，则草原马速为 $2v$，距离以10公里为单位，于是，如走直线 AB：

$$AB=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$$

而 $$AP=\frac{2}{5}\sqrt{74} \qquad PB=\frac{3}{5}\sqrt{74}$$

所用时间为 $$\frac{2\sqrt{74}}{5v}+\frac{3\sqrt{74}}{2\cdot5v}\approx\frac{6.02}{v}。$$

如走 AM 和 MB 线：

$$MB=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}$$

所用时间为 $$\frac{2}{v}+\frac{\sqrt{58}}{2v}\approx\frac{5.81}{v}。$$

可是，还能有什么路线更省时间呢？王慧猛然地又想到光。“光行最速”，对，应该是这样！

“折射线在入射线和通过入射点的法线所决定的平面里，折射线和入射线分居在法线的两侧。入射角 β 的正弦与折射角 γ 的正弦之比，对于所给的两种媒质来说，是一个常数，等于光在第一媒质里的速度 v_1 与在第二媒质里的速度 v_2 之比，即

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{v_1}{v_2}$$ ”

这是光的折射定律。

那末，就是说，按图79 b，从AO取道OB，所用的时间最短。现在来求O点的位置吧：

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{v}{2v}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{2^2+x^2}}=\frac{7-x}{\sqrt{3^2+(7-x)^2}}$$

$$4x^2[9+(7-x)^2]=(4+x^2)(7-x)^2$$

整理得 $3x^4-42x^3+179x^2+56x-196=0$

因各项系数以及常数项的和为零，故 $x=1$。

按这条路线，所用时间为

$$\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{v}+\frac{\sqrt{6^2+3^2}}{2v}\approx\frac{5.59}{v}$$

王慧对自己提出的这种物理方法颇为自负，是啊！如果不用这个方法解题，恐怕不会有其它适合于中学生的解法了？而用数解法，列出的式子为

$$\frac{\sqrt{2^2+x^2}}{v}+\frac{\sqrt{3^2+(7-x)^2}}{2v}$$

求它的极小值，太难了。

可是刘老师不以为然。她认为，适合于当前中学生的解法还是存在的，不久以前，大家就曾经用过类似的原理，仿图75，可以画出力平衡图如图80，应满

足下式要求：

$$2N\sin\beta = N\sin\gamma$$

即 $$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{1}{2}$$

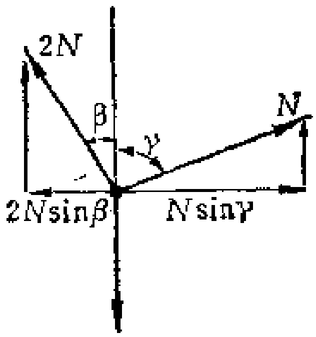


图 80

这与光行最速原理不谋而合。虽然一个是“速度”，另一个是“重量”；一个的始、终点分别位于图面水平线的两侧（如图79中的A、B位于MN的两侧），另一个位于同侧（如图76中的A、C位于MN的同侧），但是寓理相同，同学们稍加思索就可明白了。

不过，这究竟仍是物理方法，而数学方法也是有的。从图28可以看出，若过P点作RS的平行线，交QS和QR于MN，则可认为P与C重合，作为边界看待，知 $QM \cdot BP + QN \cdot AP$ 取极小值。那末，将这个图形用于水管问题，则可画如图81，确定B点应符合以下条件：

$$PM:PN = 2:1$$

$$BA \perp PM \qquad BC \perp PN$$

显然，在这种条件下必有

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\angle AMB}{\sin\angle CNB} = \frac{\dfrac{PQ}{PM}}{\dfrac{PQ}{PN}} = \frac{PN}{PM} = \frac{1}{2}$$

当然，上述方法无论用于速度或重量，都是合适的，而以上所举例子用的比率是2:1，同样适应于任何比率 $m:n$。

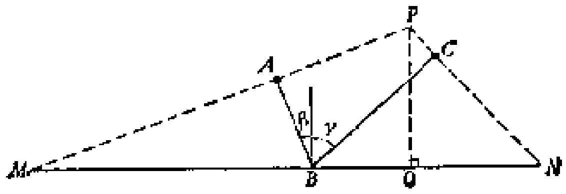


图 81

王慧和同学们叹服刘老师提出的这些方法，看来，结论是简单的，但思路是巧妙的，大家都感到兴味无穷。

但是，他们哪里知道，刘老师为了寻找这样一个中学数学方法来论证“光行最速”，不知熬过多少个不眠之夜啊！

殊途同归

“飞将军”，这个名字足以使敌人闻风丧胆，当李广和他率领的队伍突如其来地出现在对方面前时，敌人无不惊慌失措，乱成一团。那末，李广取胜之道难道就只是着重于“兵贵神速”这样一种战术吗？

当然不是。李广所用的战术是灵活多变的，他运筹于帷幄之中，决胜于千里之外，全仗日积月累的丰富经验，才能得心应手地施展军事技巧。

因此，解求极值问题也象打仗一样，掌握必要的方法后，不拘形式，以能达到解得结果为目的。

“我们已经学过如何利用几何、代数、三角、物理等方法解题，而这些方法中还有各自的分支，例如代数法中有定和求积原理和不等式等，有许多问题是可以同时应用几种方法解求的，要靠自己灵活处理。”刘老师接着说：“有时还可以综合几种方法共解一题。”

于是，刘老师举出以下几个例子。

一、图82的$\triangle ABC$中，c为定值，$a+b$亦为定值，求面积最大时的a、b。

解：作AB边的高，既然c为定值，则面积最大时，高最大，仅考虑高的极值即可。用几种解法：

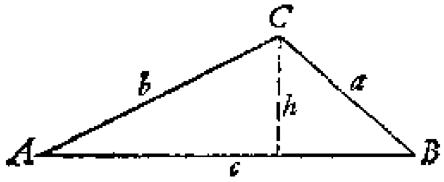


图 82

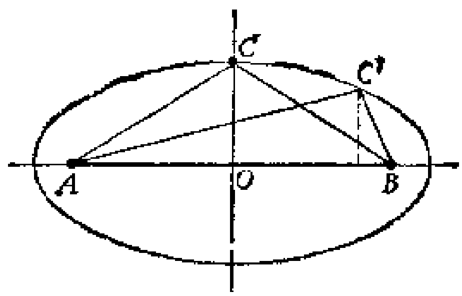


图 83

1．据图83，以A、B作为椭圆的两焦点，$AC+BC$为定值，则C点轨迹构成椭圆的周。显然，当AC

$=BC$ 时，$\triangle ABC$ 的高最大，为 CO。

2. 按图73 a 挂重物，平衡时重物位于最低点，此时 h 最大，而 $AC=BC$，如图84。

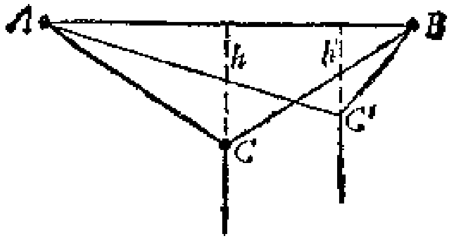


图 84

3. 据海伦公式：

$$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

s 和 $s-c$ 都为定值，而

$$(s-a)+(s-b)=2s-(a+b)$$

亦为定值，故据定和求积原理，知 $s-a=s-b$ 时，即 $a=b$ 时面积有极大值。

4. 见“几何解法”例二。

二、图85中⊙O 的半径为1米，$OA=2$ 米，在圆周上取一点 P，以 AP 为边作等边三角形 APC，求四边形 $AOPC$ 的极大值。

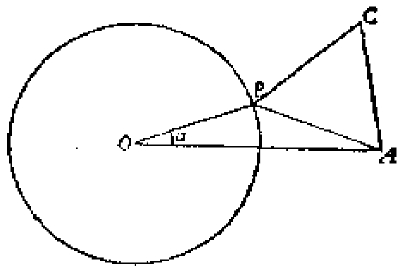


图 85

解：用几种解法：

1. 令 $\angle AOP=\alpha$，则

$$\triangle AOP=\frac{1}{2}\cdot OP\cdot OA\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin\alpha=\sin\alpha$$

据余弦定理：

$$AP^2 = OP^2 + OA^2 - 2OP \cdot OA\cos\alpha$$

$$= 1 + 4 - 4\cos\alpha = 5 - 4\cos\alpha$$

$$\triangle APC = \frac{1}{2}AP^2\sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(5 - 4\cos\alpha)$$

四边形 $AOPC = \triangle AOP + \triangle APC$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} + (\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2(\sin\alpha\cos 60^\circ - \sin 60^\circ\cos\alpha)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2\sin(\alpha - 60^\circ)$$

$\sin(\alpha - 60^\circ) = 1$ 时有极大值，故 $\alpha = 150^\circ$，此时，极大值为 $2 + \frac{5\sqrt{3}}{4}$ 平方米。P 点位置应在第二象限，如图86所示。同时，四边形面积应取绝对值，所以应该还有一个对称点 P'。

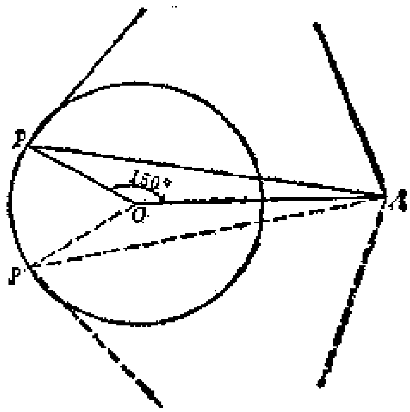


图 86

2．本题主要是求 $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$ 的极大值，它也可以用代数法解：

令 $y = \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$，

则

$$y+\sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$y^2+2\sqrt{3}\,y\cos\alpha+3\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

$$4\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\,y\cos\alpha+(y^2-1)=0$$

$$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}\,y\pm\sqrt{3y^2-4(y^2-1)}}{4}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}\,y\pm\sqrt{4-y^2}}{4}$$

$\cos\alpha$应为实数，故$4\geqslant y^2$，y取正值，极大值为2。

3．从 $y=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$ 可见，当 $\sin\alpha$ 为正、$\cos\alpha$ 为负时，y 值较大。

作单位圆如图87，取P点。在第三象限作与横轴成60°的线OM，则与纵轴平行的PQ线被横轴截为两段，其中

$$PT=\sin\alpha \qquad TQ=-\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$PQ=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$$

过O作OM的垂线交圆周于L，过L作OM的平行线交纵轴于G，并作纵轴的平行线交OM于N，则$GONL$为平行四边形。

第二象限圆周上的任一点形成的$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$值都比$L$点的小，例如$P$点的$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$为$PQ$，小于$L$的该值$LN$（小$SP$段）。故 $\alpha=150°$ 时 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$ 最大。

三、按图88，AB 为⊙O 的直径，过其上的一点

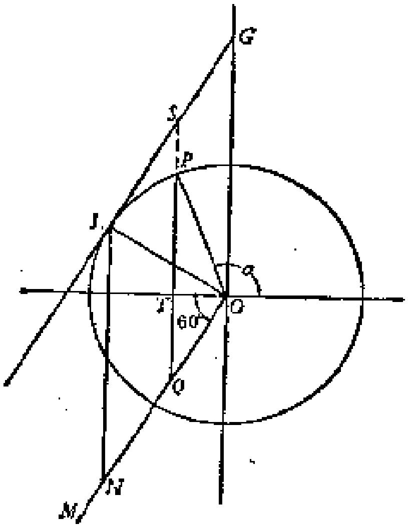


图 87

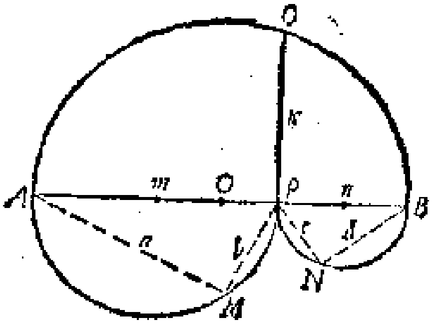


图 88

P 作垂线QP；以AP和 PB 分别为直径，画半圆，并分别在圆周上取M和N。

用 a、b、c、d 表示 AM、MP、PN、NB，用 k 表示QP。

求证 k 的极小值为$\sqrt{ac+bd}$。

解：综合几何和代数的方法来解：

用 m、n 表示 AP、PB，则 $k=\sqrt{mn}$，因此只需证明：

$$mn \geqslant ac+bd$$

因 $m^2=a^2+b^2$，$n^2=c^2+d^2$，故

$$m^2n^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

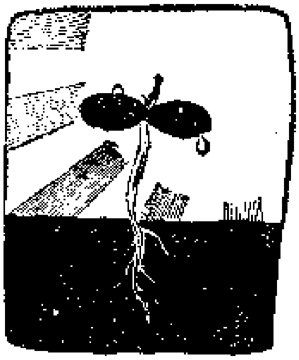
因 $\dfrac{a^2d^2 + b^2c^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2b^2c^2}$

即 $a^2d^2 + b^2c^2 \geqslant 2acbd$

得 $m^2n^2 \geqslant a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd = (ac + bd)^2$

诸值都为正数，因此 $mn \geqslant ac + bd$。

萌　　芽



春华秋实，这是一种千古不变的自然现象，那就是说，秋天到来，该收获了。

同学们可曾想到那些播种、耕耘的人们，只有经历过“锄禾日当午，汗滴禾下土”的辛勤劳动，才有丰收的喜悦。在稻菽千重浪的田野里，渗透着多少汗水呀！

一个学期即将结束，王慧和同学们都怀有一种欢庆丰收的心情。他们理解到，老师循循善诱的教诲，自己勤奋努力的钻研，都是获得硕果累累的因素，大家能够初步掌握这变化多端的极值问题，难道不就是一个明证吗？

可是，学海无涯，一切都不会终止于此，等过了

冬天，到百花盛开的季节，又要开始播种了，那时，新的嫩芽又将破土而出。

是啊！这就是周而复始的自然现象。然而，期待着收获的是什么样的果实，解求我们的极值问题还有些什么方法呢？

“方法当然还有，深入一步的方法叫做‘微分法’，学习这种方法的基础准备将有极限、图象等等。”在即将结束极值问题这一课程时，刘老师提醒大家注意，在长征的道路上只算迈出第一步呢！

王慧的眼前闪动着不久前的一幕情景。难道那就是某种基础准备吗？这时，她的脑际掠过一个奇妙的数字：

2.718281828459……

自从那一堂课上刘老师介绍它之后，再也没有提起过。

其实，这只是一个极限问题。可是，现在要理解它还为时过早。不过，有些问题，我们还是涉猎一二的，譬如说“图象”。

的确，关于图象，大家并不生疏，就拿二次抛物线来说，它的形式表现为

$$y = ax^2 + by + c$$

图象有如图89。当 $a>0$时，开口向上；当 $a<0$

时，开口向下。顶点的坐标是$\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$。

可是，这与极值有什么关系呢？很清楚，顶点是曲线的最低或最高点（极值点）。

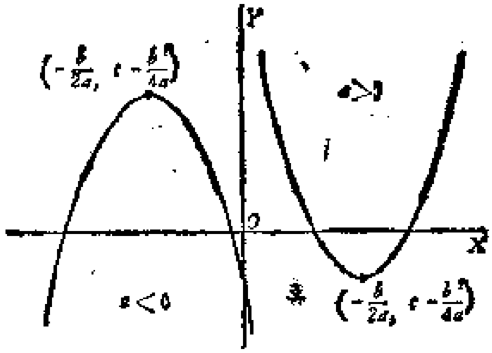


图 89

这样，如果把函数图象画出来，便很容易从图上确定极值了。

例如求下式的极值：

$$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

y 为实数，故

$$x-1\geqslant 0,\quad x-2\sqrt{x-1}\geqslant 0$$

函数的定义域为 $1\leqslant x<+\infty$。

化简原式：

$$y^2=x+2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)}$$
$$+x-2\sqrt{x-1}$$

$$y^2=2x+2\sqrt{x^2-4x+4}$$

$$y^2=2x+2\sqrt{(x-2)^2}$$

$$y^2=2x+2|x-2|$$

得 $\quad y=\sqrt{2(x+|x-2|)}$

据对应法则列出下表：

x	1	$\frac{3}{2}$	2	5	10
y	2	2	2	4	6

用描点法绘图象如图90。

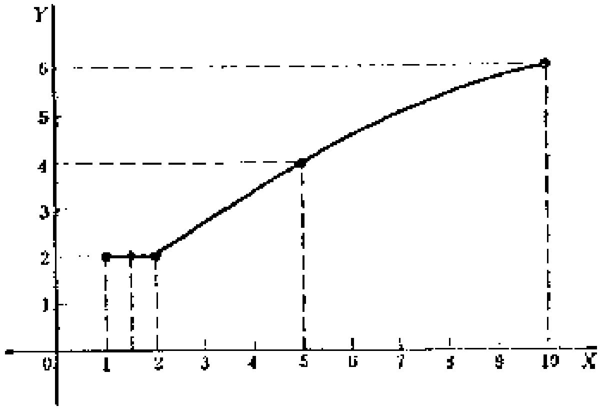


图 90

实际上，y尚可化简为：

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时：$y=2$

$x>2$ 时：$y=2\sqrt{x-1}$

曲线的最低点 $y=2$ 就是极小值。

春回大地，万物欣欣向荣，正是春风雨露滋润着幼苗茁壮成长。可是，播下去的种子刚在萌芽，这是什么样的作物呢？无疑地，娇绿的纤躯已经预示它旺盛的生命力。

"微分学能够使复杂的极值问题大为简化，现在我们举一个例子说明。"刘老师面对着急性而好奇的同学，摆了摆双手，讲述一个例子。本来她是不准备讲的，不能揠苗助长啊！她知道，没有牢固的基础，哪能谈得上深入呢？而现在同学们还不具备必要的基础知识，就连图象的性质，大家还只是了解一点皮毛哪！

不过，略为介绍也许有点好处，让智慧之光照射着一颗颗火热的心吧！愿出土的幼芽早日成苗吧！

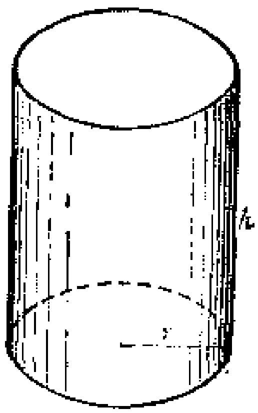


图 91

图91是一个圆柱形容器（有盖），容量为500立方厘米，问半径 r 和高 h 取多少，才能使制造容器所用的材料最省？

这是一道已知体积V，求表面积S极小值的题。

若 $V=500$，即 $\pi r^2h=500$，求

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的极小值。

用 $h=\dfrac{500}{\pi r^2}$ 代入得

$$S=2\pi r^2+\frac{1000}{r}$$

怎样解求呢？同学们可能一时想不出来，可是用

微分法，便可信手写出答案：

解　$4\pi r-\frac{1000}{r^2}=0$ 即得。

那末，用初等数学呢？刘老师胸藏万卷算经，她一定会巧妙地解决的。

同学们都这么想。是呀！从来没有看到她退却不前，她的攻关精神永远鼓舞着同学们勇于探新。

刘老师写出下式：

$$S=2\pi r^2+\frac{500}{r}+\frac{500}{r}$$

噢！明白了，这奥妙无穷的定积求和原理又出现在本式中，那末，结果应从下式求出：

$$2\pi r^2=\frac{500}{r}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\text{厘米}$$

代入得　$h=\frac{500}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{250^2}}=10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ 厘米。

刘老师的思路敏捷为同学们所叹服，然而，谁都理解，真正的创新都是出自她的勤奋和深追不舍的精神。

被刘老师点破了的这道题，现在看来并不复杂，还有更繁杂的吗？

求　$y=ax^3+bx^2+cx+d$　的极值，如果用微分法，也可以信手写出：

解 $3ax^2+2bx+c=0$ 即得。

妙啊！王慧和同学们不约而同地惊叫起来："这是怎么回事呢？"

对于三次式的极值，他们早有所闻，刘老师不是提过吗？只能在某种特定条件下，初等数学才有法解答（见"一个重要的不等式"）。

事实并非如此。

如何用初等数学解三次式的极值，刘老师曾经做过深入的研究，而且也取得一定成果，她原来准备在下学期的"微积分学"课程中讲授，以便与微分方法做对比，现在，不妨先提供一段线索。

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

可改写为 $$y=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)$$

a、$\frac{d}{a}$是定值，考虑极值时与它们无关。以 p、q 分别表示$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{a}$，则另写为下式：

$$y=x^3+px^2+qx$$

应用定和求积原理，则写成

$$y=x(x+m)(x+n)$$

式中用 $m+n$ 表示p，用 mn 表示q。

为组织定和条件，引入常数k，则

$$y=\frac{1}{k}\cdot x(kx+km)(x+n)$$

再改为

$$y=-\frac{1}{k(k+1)}(-kx-x)(kx+km)(x+n)$$

于是可得定和：

$$(-kx-x)+(kx+km)+(x+n)=km+n$$

取极值时：

$$-kx-x=kx+km=x+n$$

得 $k=-\frac{x}{2x+m}$ 和 $k=\frac{x+n}{x+m}$

合并两式为

$$-x^2-mx=2x^2+mx+2nx+mn$$

整理得 $3x^2+2(m+n)x+mn=0$

即 $3x^2+2px+q=0$

$$3x^2+2\cdot\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

因此，当满足下式时，y有极值：

$$3ax^2+2bx+c=0$$

推导上式的过程，使同学们产生无穷兴味。这到底是巧妙的定和求积原理在起作用呢，还是刘老师的智慧之光在闪耀明辉？

如果没有这样公式，以下题目是不易解答的：

图52的正方形改为矩形，长、宽分别为50、80厘米。问每角各边剪去多长，可使围成的盒子容积为最大？

列出　$V=x(50-2x)(80-2x)$

$=4(x^3-65x^2+1000x)$

利用以上公式，则可很容易得解：

V最大时，$3x^2-130x+1000=0$

$(3x-100)(x-10)=0$

故　$x=\frac{100}{3}$（不合题意，舍去）；

$x=10$厘米。

可是，是极大或极小值呢？应怎样确定有无极值呢？这里就不加以讨论了。至于更复杂的情况，如上面提过的求$2\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$的极小值，用微分方法的确容易，若用初等数学，则成为难题了。

那末，究竟什么是微分，同学们暂时是不知道的，正象出土的幼芽，只能看见一点绿，而难以分辨它是哪一种作物。

王慧和同学们以无限焦急的心情等待它的来临，为了探明这个新的数学领域，他们正在养精蓄锐，跃跃欲试！

尾　　声

这是一个愉快的假日。一大早，刘老师和王慧就

蹬着自行车来到久负盛名的胜地——千山。

蔚蓝色的晴空明媚妍丽，与她俩欢乐的心情形成和谐的对照。王慧小心地绕过悬崖，然后又慢慢地沿着陡直的台阶，攀缘着扶手拾级而上……。

她们在花木掩映的小道间穿行，在院落、墙垣旁停步，在古刹、亭阁内小坐，畅谈着学习、生活和理想、抱负。

站在山坡上，居高临下。脚底是宽广的林海，清风徐拂，枝叶簌簌作响，在日辉映照下，偶尔驰过的一朵朵白云，与苍翠葱郁的青松交相错综。她们置身于优美的大自然怀抱里，顿感心旷神怡。

远处，一座不高的山峰挡住她们的视线，那一侧

是什么样的呢？站在这个山坡上是望不见的，然而，刘老师说，可以上更高的地方去看看。随即，她们转过身，登上山巅。

视野扩大了，更加美妙的一幅图画铺展在面前。那座山峰并不高，另一侧的美景不是能够尽收眼底吗？刘老师不禁脱口朗诵一首唐人王之涣的诗句：

白日依山尽，
黄河入海流。
欲穷千里目，
更上一层楼。

周围的山峦起伏，象是大海中的波峰浪谷。刘老师掏出一张白纸，信手画下一个图形交给王慧（图92）。

迷惑不解的王慧对着这张突如其来的图象发愣。看来，两条互相垂直的直线是坐标轴，而波形线是指那些高峰低谷了。可是，这是什么意思呢？她茫然地摇摇头。

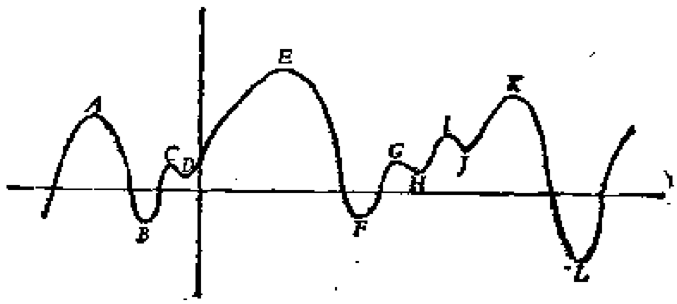


图 92

极值也象图92所示的峰、谷一样，A、B、C、D……都是极值点，峰点A、C、E……是极大点，谷点B、D、F……是极小点。在这个图象中，相应于各极值点的x值都有相应的极值y，它们是说明图象的局部性质，所谓极值点是与该点附近的y值相比较的。而如果取一个区间来说，包含着数个极值点，例如纵轴右侧区间共有八个极值点，极大值不一定比极小值大（如极大点G与极小点J）。同时，所有极值做出比较，还可以得出“最大值”和“最小值”（E点与L点）。

“对于‘极大极小’和‘最大最小’，这学期课程中是混用的，最初已经说明。那末，为什么还要重复一遍呢？因为讨论这样问题已超出初等数学范畴，在进一步深入的学习中则将予以区别。”刘老师在解释这张图象后做了补充。

王慧心中明白，有关极值的知识还多着呢！通过这学期学习，虽然已经入门，并没有深入，而且必须进一步巩固。

她想起数学学习的三要点：熟、练、化，那是一位数学家毕生的总结，要熟，要练，要消化，不练，也就谈不上消化。要巩固已学到的知识，演算练习题是非常重要的，她迎着山风，又翻阅着随时带在身边的练习题，那几张白纸上油印着刘老师精心草拟的作

业。

1. 在两条公路 OA 和 OB 上设邮筒 M 和 N，取信员每天从邮所 P 到 M、再到 N 取信，送至邮局 Q（图93）。问怎样确定 M 和 N 点，才能使取信员所走的路程最短？

2. 图94是一间房间，从 A 点引入电线，沿墙壁或天棚到达 B 点。问电线最短为多长？

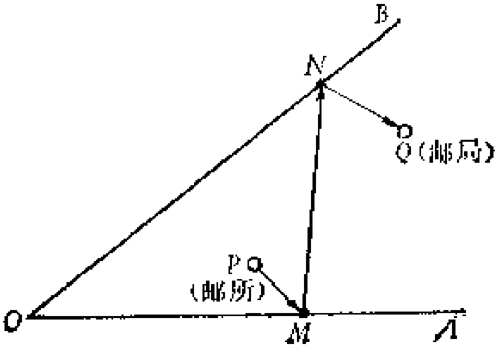


图 93

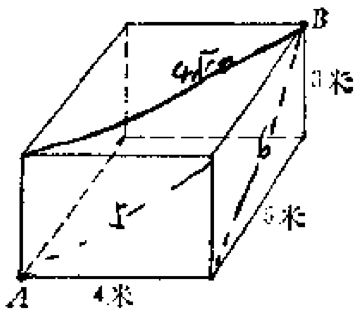


图 94

3. 试证明同边数的一切等周长多边形中，正多边形的面积最大。

4. 试证明两个等周长正多边形中，边数较多的面积较大。

5. $\triangle ABC$ 的一边 AB 和所对 $\angle C$ 为定值，问什么情况下 AB 边的中线有极值？什么情况下 $\angle C$ 的平

分线（从C至与AB的交点）有极值?

6．按图1a，AC与MN不平行，试在MN上确定一点B，使$|AB-BC|$为极大。

7．图95中，$\angle A$和高h_a为定值，试证明：当$AB=AC$时，$\triangle ABC$的面积为极小。

8．图96的定圆$\odot O$之外有两定点A、B，试在圆周上求一点P，使AP^2+BP^2为极小。

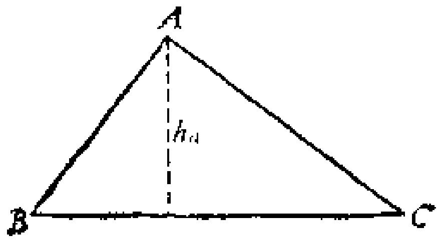


图 95

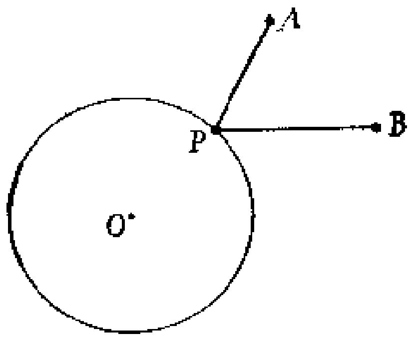


图 96

9．按图19，确定$BP\cdot PC$为极小的BPC线。

10．定圆$\odot C$切于定角$\angle AOB$的两边，切点为P、Q（图97）；在PQ的外侧（右侧）作一切线交AO和BO于M、N（切点为S）。试证$\triangle MON$的面积为极小时，$MS=SN$。

11．按图98，定角$\angle AOB$内有定点M、N，试以O为圆心，作一圆弧交AO和BO于P和Q，使$MQ+NP$为极小。

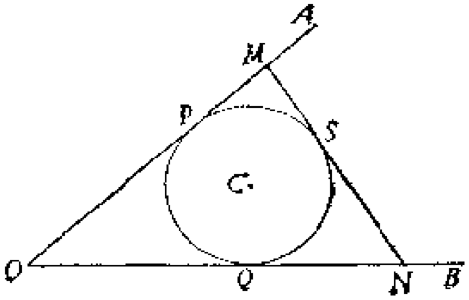


图 97

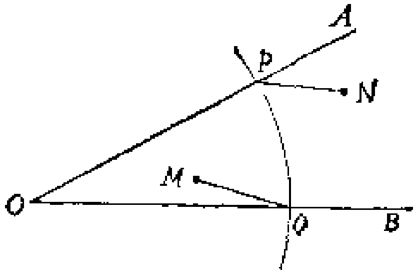


图 98

12. 试在$\triangle ABC$内找出一点P，使$PA^2+PB^2+PC^2$为极小。

13. 作弓形中的最大内接矩形。

14. 图99中 $ABCD$ 是块矩形场地，长和宽为 a 和 b，四个角各有一根电线杆。现在想扩大场地，仍为矩形（即$PQRS$），又不使电线杆落在场地内，怎样确定这个矩形，使它的面积为最大？

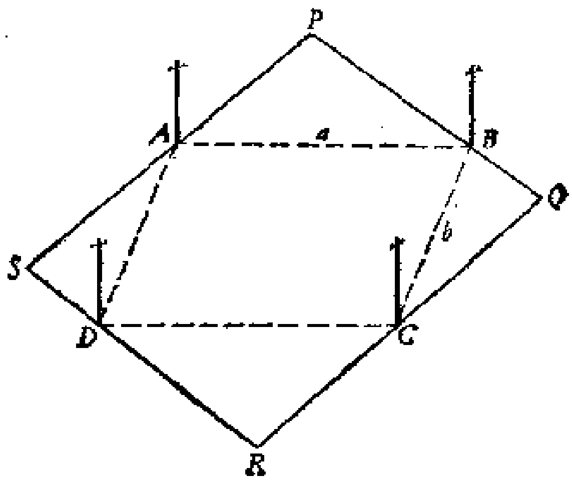


图 99

15. 见图100，甲、乙两厂搅拌混凝土，专供工地 P、Q用。甲厂每天能搅200立方米，

乙厂每天能搅160立方米。P工地和Q工地每天分别需用120和240立方米。问甲、乙应各供应P、Q多少立方米，才能使运送指标（以立方米-公里计）最低？

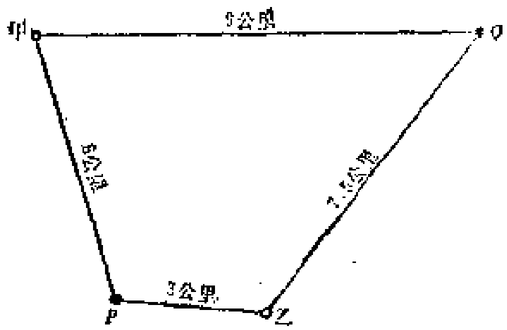


图 100

16．图101的ABC是现有的墙，现在想筑一围墙PQR($PQ \parallel BC$，$QR \perp BC$)，但筑墙材料只够30米，问怎样确定围墙位置，使所围面积最大？

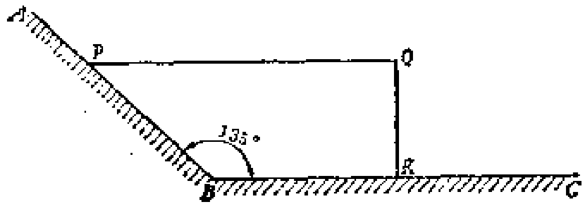


图 101

17．图102的MN是公路，公路的一侧是草地，现要从A地走去C地，已知在公路上行走的速度为每小时5公里，草地上为4公里。问在哪拐弯（即定出B点），所用的时间最短？

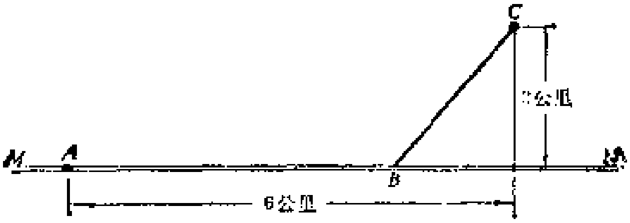


图　102

18. 用初速度 v_0 将物体铅直上抛，问这个物体到达的最大高度（从抛起点开始算）为多少？

19. 要修一个水道，截面如图 103 所示，上面是半圆形的，下面是矩形的。周围砌筑材料已定，即周长为 p，试确定 a、b 值，使水道的水流通过量最大（即截面积最大）。

20. 图104是个窗框，共用木料 6 米长，问a、b应为多少，才能使窗的面积为最大？

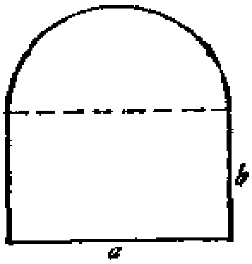


图　103

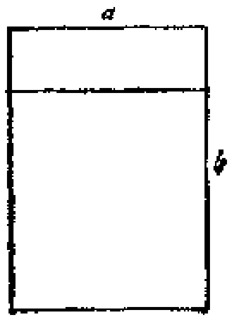


图　104

21. 用心算说出以下各题中 y 的极值：

（1） $y=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}$ （x、z 为正数）

（2） $y=|\log_a b|+|\log_b a|$

（3） $y=(2-x)(8+x)$

（4） $y=x^2+8x-7$

（5） $y=\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ （θ在第一象限）

（6） $y=-2x^2+x+4$

（7） $y=3-4x-\dfrac{25}{x}$ （x为正数）

（8） $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ （x为正数）

（9） $y=x^3-4x^2$

（10） $y=(1-\sin\theta)(2\sin\theta+1)$

22．求以下各题中 y 的极值：

（1） $y=\dfrac{x^3}{x-1}$ （$x>1$）

（2） $y=4x^2-x+5$

（3） $y=x\sqrt{2-3x^2}$

（4） $y=\dfrac{4x^2-2}{4x-3}$

（5） $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{1-x}$ （y为正数）

（6） $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

（7） $y=\dfrac{(3+x)(12+x)}{x}$ （x为正数）

(8) $y=\dfrac{(10+x)(2+x)}{1+x}$ (x为正数)

(9) $y=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$ (x为负数)

(10) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-7x+2}$ (x为负数)

23. 图105是一块正六边形铁皮，边长为m。若离各角x处剪去一小块（如图中影线部分），顺着里圈折起，就可以制成一个六边形盒子。问剪去x为多大，才能够使盒子的容积为最大？

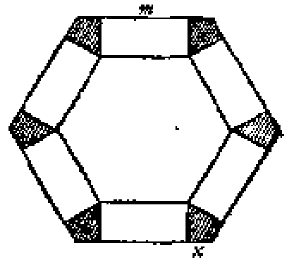


图 105

24. 一长方体开口水池，池壁和池底都是用同厚度钢筋混凝土筑成的，现在筑池材料只够施工192平方米，问可建水池的最大容积为多少？

25. 求以下各题中y的极值：

(1) $y=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^2$

(2) $y=a\sin x+b\cos x$（a、b、x均为正数）

(3) $y=(1+\sqrt{3})\cos x+(1-\sqrt{3})\sin x$（$x$在第一象限）

(4) $y=\cos 2x+\sin x$

(5) $y=\sin^2 x+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

（6） $y=3-2\cos x+\cos^2 x$

（7） $y=3-4\cos x+\cos^2 x$

（8） $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

（9） $y=\dfrac{\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{ctg}^2 x+1}{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x-1}$ （$x>0$）

（10） $y=\sin x(\sin x+\cos x)$

（11） $y=\cos 2x+3\sin x$ （x 在第一象限）

（12） $y=1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ （求极大值）

（13） $y=\cos 3x-3\cos^3 x-2\cos^2 x+4\cos x$（$x$ 在第一象限）

（14） $y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ （x 在第一象限）

（15） $y=\dfrac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$

26．图 106 的扇形所属圆的半径为 R，中心角为 α，求作面积最大的内接矩形，并算出面积值。

27．图107为一椭圆，求作周长最长的内接矩形。

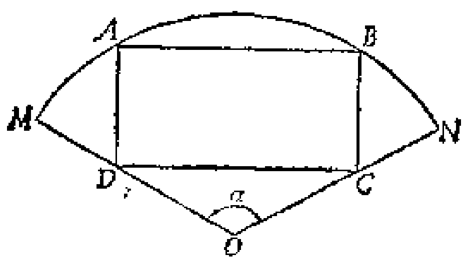


图　106

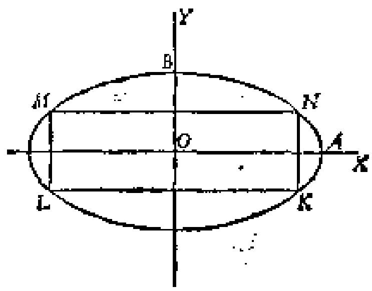


图　107

28. 1975年美国数学竞赛题：已知两圆交于 P、Q，试问如何作一经过 P 点的线段 AB，两端落在两圆上，使 $AP \cdot PB$ 为最大？（见图108）

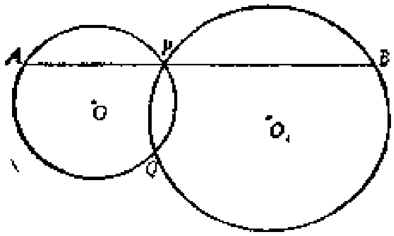


图 108

29. 按图109，一盏电灯挂在桌子的正上方，书本离桌面中心 m，问电灯离桌面多高时，书本处的照度最大？

（注：照度公式为

$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$，其中

I ——光源的发光强度

r ——被照点到光源之间的距离

α ——光线的入射角）

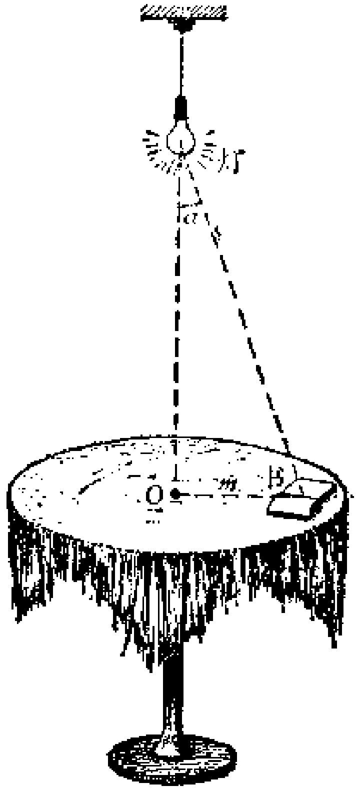


图 109

30. 在三角形ABC中，求 $\cos A\cos B\cos C$ 的极大值。

31. 将1979分成若干个正整数，使它们的乘积最大。

32. 将1979分成若干个相等的数（不一定是整数），使它们的乘积最大。

33. 图34的MQ原为60公里，现在改为160公里，试解该题。

34. 用光行最速原理解图34原题。

35. 若方程 $5x^2-10x\cos\alpha+6\cos\alpha+8=0$中两根相等，试求两邻边和为10厘米，且夹角为$\alpha$的平行四边形的最大面积。

36. 求“韩信点兵”题中

$$y=40[4\sqrt{30^2+x^2}+5(50-x)]$$

最小时的x值，并据图15 b 定P点位置。

37. 用图27的方法解图26。

38. 求以下各题中f的极值：

（1）若 $ax+by=8$，求 $f=xy$ 的极值。

（2）若 $x+y=1$，求 $f=x^4+y^4$ 的极小值。

（3）若 $x+y+z=1$，求 $f=x^2+y^2+z^2$ 的极小值。

（4）若 $ax+by=p$（a、b 为正数），求 $f=x^my^n$ 的极大值。

（5）若 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，求 $f=xyz$的极大值。

39. 按图107，作面积最大的内接矩形。

40. 见图110，⊙O和⊙O'为等径圆，半径为r。在OB上任作垂线交⊙O的圆周于P、Q，在⊙O'上任取一点A，试证明AP^2+AQ^2的极小值为$2r^2$。

41. 见图111，以定圆⊙O的直径CD为下底，作内接梯形$ABCD$，求梯形有最大面积时的上底长度。

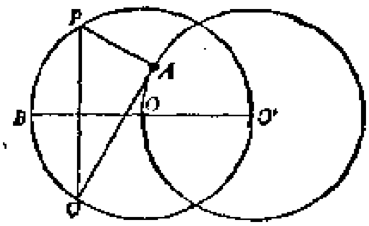


图 110

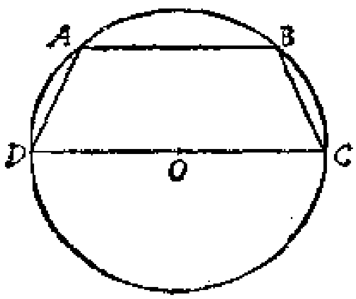


图 111

42. 图112为一直角三角形，AC的长度为定值k，任作一直线mn截AB和AC，但$x_1>x_2, y_1>y_2$。问什么情况下$\sqrt{x_1^2-x_2^2}+\sqrt{y_1^2-y_2^2}$有极大值？极大值为多少？

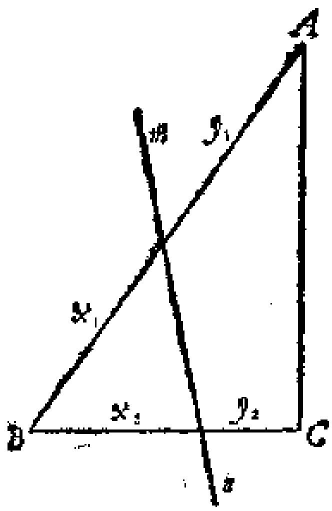


图 112

43. 见图113，在两定圆中心的联线上取一点P，作两圆的切线PC和PD。试确定P点的位置，使$PC+PD$为极大。

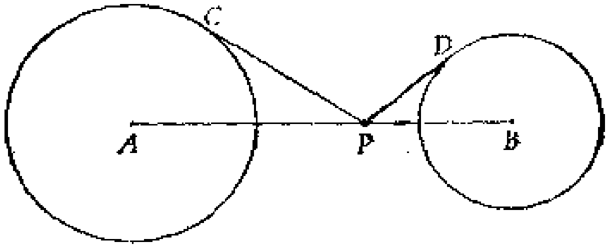


图 113

44. 球的半径为 r，试在其体内确定一圆柱体，使它的表面积为最大。

45. 三角形的三边为a、b、c，对角为 A、B、C，若角度以弧度表示，试证明

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

的极小值为$\frac{\pi}{3}$。

46. 见图114，定圆 ⊙O 的半径为R，作内接三角形 ABC 和它的内切圆⊙I，并作 ⊙I 的任一直径 MN，试证明三角形OMN的周长极大值为$2R$。

47. 令图114的 $\triangle ABC$ 各边为 a、b、c，试证明$\sqrt[3]{abc}$的极大值为$\sqrt{3}R$。

48. 同上题，试证明$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的极小值为$\frac{\sqrt{3}}{R}$。

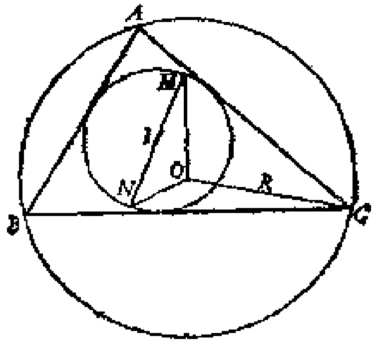


图 114

49. 1978年全国部分省

市中学数学竞赛试题：设有一边长为1的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求出这两个面积（须证明你的论断）。

50．试说明图74的P点处于势能极小位置。

51．求　$y=x^3+3x^2-24x+10$（$x>0$）的极值。

52．求　$y=\sin 3x-5\sin x\cos^2 x+4\sin^2 x-\sin x+4$ 的极值。

习题答案：

1．取P关于OA的对称点P'，取P'关于OB的对称点P''，联$P''Q$交OB于N，联NP'交OA于M。

2．$4\sqrt{5}$米。

3．取一个三角形看：如图115的$\triangle ABC$，若$AB=BC$，则面积大于$A'B\neq A'C$的等周长$\triangle A'BC$的面积。以此类推。

4．以等周长的正七边形与正六边形比较：如图116，正六边形可看做是不等边七边形$ABCDEFG$，小于正七边形。

5．当$AC=BC$时，中线有极值（如$\angle C>90°$为极小；如$\angle C<90°$为极大）。

当$AC=BC$时，角平分线为极大。

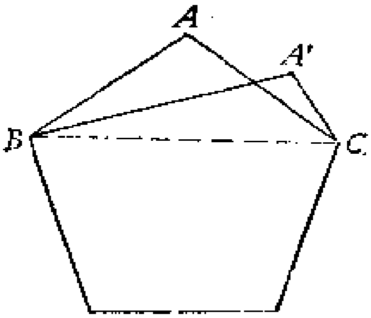


图 115

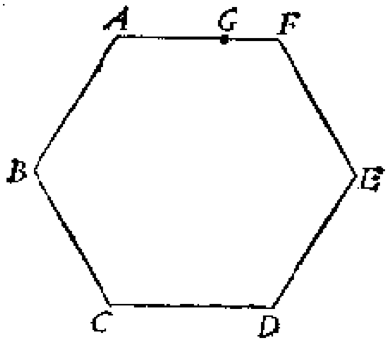


图 116

6. 联 CA，延长 CA 交 MN 于 B。

7. 提示：按图 117，以等腰 $\triangle ABC$ 与非等腰 $\triangle AB'C'$ 比较，证明 $CC' > BB'$。

8. 取 AB 的中点 M，联 MO 交圆周于 P。

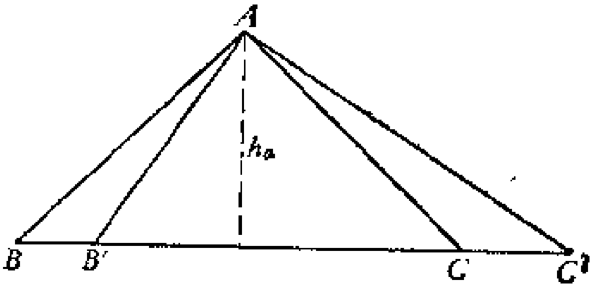


图 117

9. 过 P 作与 $\angle A$ 平分线垂直的直线交 AM、AN 于 B、C。

10. 提示：$\triangle MCN$ 中，$\angle C$ 为定角，CS 为定高。

11. 取 N 关于 $\angle AOB$ 平分线的对称点 N'，取 M 关于 OB 的对称点 M'，联 $M'N'$ 交 OB 于 Q。

12. P 点为 $\triangle ABC$ 的重心。

13．按图118，半径为r，弓弦心距为k，作

$$OM=\frac{\sqrt{k^2+8r^2}-k}{2}$$

过M作切线，切点P即所求矩形的一个顶点。

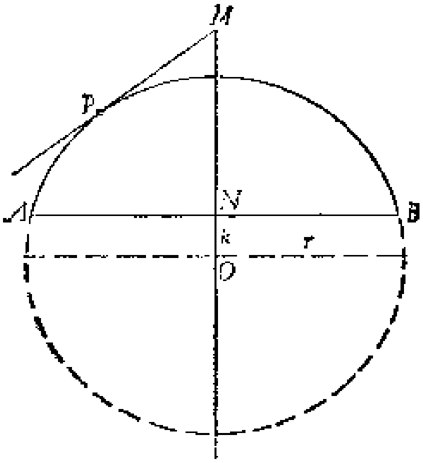


图 118

14．□$ABCD$ 的边与□$PQRS$ 的边都成45°交角。

15．甲供 Q200 立方米；乙供 P120 立方米，供Q40立方米。

16．$PQ=20$米，$QR=10$米。

17．$AB=3\frac{1}{3}$公里。

18．$\frac{v_0^2}{4g}$。

19．$a=\frac{2p}{4+\pi}$，$b=\frac{p}{4+\pi}$。

20．$a=1$米，$b=1\frac{1}{2}$米。

21．

（1）极小值2。（2）极小值2。

（3）极大值25。（4）极小值-23。

（5）极小值2。（6）极大值 $4\frac{1}{8}$。

（7）极大值-17。（8）极大值2。

（9）极小值 $-9\frac{13}{27}$。（10）极大值 $1\frac{1}{8}$。

22.

（1）极小值 $6\frac{3}{4}$。（2）极小值 $4\frac{15}{16}$。

（3）极大值$\frac{\sqrt{3}}{3}$，极小值$-\frac{\sqrt{3}}{3}$。

（4）极大值1，极小值2（即$y\geqslant 2$，$y\leqslant 1$，本题极大、极小并不是最大、最小）。

（5）极小值8。（6）极小值2。

（7）极小值27。（8）极小值16。

（9）极小值-3。（10）极小值$\frac{8}{25}$。

23. $x=\frac{m}{6}$。

24. 256立方米。

25.

（1）极小值4。（2）极大值 $\sqrt{a^2+b^2}$。

（3）极大值 $2\sqrt{2}$。（4）极大值 $1\frac{1}{8}$。

（5）极大值$\frac{3}{2}$，极小值$\frac{1}{2}$。

（6）极大值6，极小值2。

（7）极大值8，极小值0。

（8）极大值1，极小值$\frac{1}{2}$。

（9）极大值$\frac{5}{3}$。

(10) 极大值$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，极小值$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$。

(11) 极大值 $2\frac{1}{8}$，极小值 1。

(12) 极大值$\sqrt{2}+\frac{3}{2}$。

(13) 极大值$\frac{4}{27}$。　　(14) 极小值 1。

(15) 极大值$\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}$，极小值$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}$。

26. $\angle BON=\frac{\alpha}{4}$；面积为$R^2\text{tg}\frac{\alpha}{4}$。

27. 按图119，作$\angle AOP=\angle ABO$，作$AQ\perp OP$；以O为圆心，QA为半径作圆截OA于D，过D作OA的垂线交椭圆得N点，即为所求矩形的一顶点。

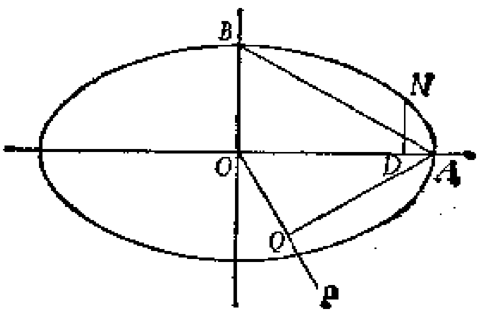


图 119

28. AB为与$\angle OPO_1$平分线的垂直的线。

29. $\frac{\sqrt{2}\,m}{2}$。

30. $\frac{1}{8}$。

31. 659个3和1个2。

32. 728个$\frac{1979}{728}$。

33. P点与N重合。

34. 作过P与NQ垂直的线，则NP与该线的交角为入射角，等于90°。

35. 15平方厘米。

36. x为负值或大于50，故P与C重合。

37. 以AB为边作等边三角形，并作它的外接圆，与图26上原有的圆交于P。

38.

（1）$\frac{16}{ab}$（ab 为正时极大，为负时极小）。

（2）$\frac{1}{8}$。　　　（3）$\frac{1}{3}$。

（4）$\frac{p^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}a^m b^n}$。

（5）$\frac{\sqrt{3}\,abc}{9}$。

39. 以BA为直径作圆，作与BA垂直的直径交圆于P，以O为圆心，BP为半径画圆弧截椭圆的点就是所求的矩形顶点。

40. 提示：据等角特征知$AP+AQ\geqslant 2r$。

41. 上底长度等于圆的半径。

42. 当mn与AC平行时，有极大值k。

43. 按图120，任引AN，使AM、MN分别等于⊙A、⊙B的半径；联NB，过M作NB的平行线交AB得P点。

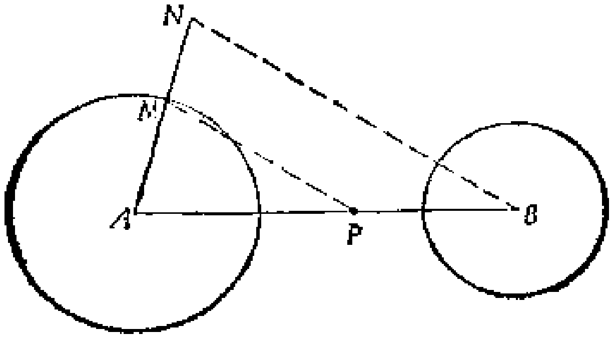


图 120

44．圆柱体的半径为 $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,r$，高为 $2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,r$。

45．提示：三角形中，大角对大边，故 $(a-b)(A-B)\geqslant 0$。

46．提示：如内切圆半径为 r，则

$$OI^2=R^2-2Rr。$$

47．提示：$abc=8R^3\sin A\sin B\sin C$。

48．提示：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$。

49．图 121 中实线三角形最大，面积为 $2\sqrt{3}-3$；虚线三角形最小，面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$。

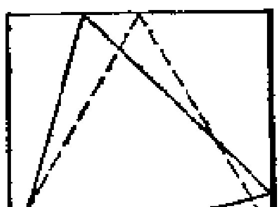


图 121

50．P 的轨迹为椭圆，据等角特征，切线成水平位置。而当切线成水平位置时，处于

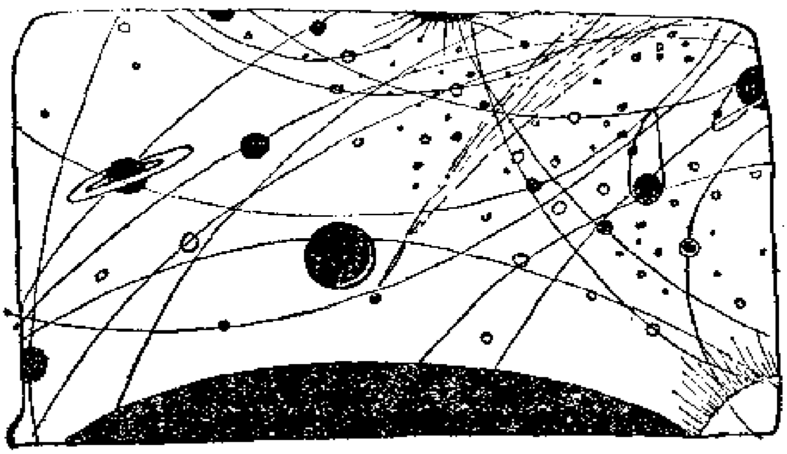
最低点。

51. 极小值 -18。

52. 极小值 $3\frac{13}{27}$。

从山顶下来，在一座凉亭中稍事休息时，刘老师取出照相机为王慧拍照。雕栏玉砌的亭阁固然引人入胜，但是真正的美还寓于大自然，于是，她们走向松林。

取景框里出现一朵娇嫩的鲜花。然而，刘老师选取的不是这个镜头，她后退了几步，一幅新的画面呈现在眼前，那是一棵刚劲耸拔的青松，在它的旁边，笔直地挺立着自己精心培植的一株新秀，躯干逐渐壮实，枝叶日臻繁茂，内在的青春活力跃然欲发。



将来的王慧能是什么样的人才呢？她不应该是弱不禁风的花卉，而必须是具有能够傲御狂暴的能力的青松。

归途中，月色如银，清光遍洒大地，也映入这两块互通气息的心田。难忘的这次郊游啊！它将深深地刻印在刘老师和王慧的脑海中，在漫长的未来岁月里，每当回忆这难能可贵的一天，便会感到彼此之间有无穷的力量，象是那永恒的宇宙一样，永远遵循着颠扑不破的万有引力定律，在互相吸引着……。