《数学奥林匹克辅导丛书》之五

# 解析几何的技巧

单 墫 程 龙

中国科学技术大学出版社

1989·合肥

## 内 容 简 介

运用解析几何方法解决几何问题，有一定的程序可循，不需挖空心思去寻找解法，但是，如果不掌握一定的技巧，那将陷入繁琐的演算之中，令人生畏。本书列举了大量例题，其中包括一些数学竞赛题，很好地表现了解析几何的技巧。运用这些技巧，许多几何问题的求解过程变得十分简洁和优雅。可供具有高中文化程度的数学爱好者、中学生、中学数学教师及其他数学工作者阅读，也可作为培训数学竞赛选手的基本教材以及数学爱好者小组的讲座材料。

《数学奥林匹克辅导丛书》之五

解析几何的技巧

单 墫 程 龙

责任编辑：胡升华 封面设计：罗 洪

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：787×1092/32 印张：5.875 字数：131千

1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷

印数1－20000册

ISBN7－312－00048－7/O·21 定价：1.70元

# 序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌。写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也可堪称是这方面的范本，

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色。

最近，他们编写了“数学奥林匹克辅导丛书”，我看了几本原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序。

龚 昇

1988年6月28日

于中国科学技术大学

# 前　言

“几何难！”

很多人有这样的感慨。

感谢笛卡尔发明了解析几何，为解决几何问题开辟了一条康庄大道。可是，仍然有不少人不乐意采用这一方法，原因之一是他们觉得解析几何“繁”。其实，真正掌握了技巧，许多问题用解析几何来解，不但不繁，而且解答井井有条，十分优雅。

这本小册子的目的就是撷取一些问题来表现解析几何的技巧。希望读者阅读此书时带着纸和笔，在看例题的解答之前，自己先演算一遍。这样才能真正掌握解题的技巧。如果您的解答更好，请告诉我们，以便今后改进。

单 墫　程 龙

1988 年 12 月20日

# 目　次

# 1 距 离 公 式

点 $(x_1, y_1)$ 与 $(x_2, y_2)$ 之间的距离是

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{1.1}$$

这是大家熟悉的距离公式。它可以用来解很多几何问题。

**例 1** 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 $a$、$b$、$c$，则 $BC$ 边上的中线 $m_a$ 的平方为

$$m_a^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2. \tag{1.2}$$

**解** 设 $BC$ 中点为 $D$，则 $D$ 的坐标为

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}, \qquad y_D=\frac{y_B+y_C}{2} \tag{1.3}$$

（以后我们用 $x_P$、$y_P$ 分别表示 $P$ 点的横坐标与纵坐标，不一一声明）。于是由公式（1.1），

$$\begin{aligned}
m_a^2&=(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2\\
&=\left(x_A-\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_A-\frac{y_B+y_C}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{4}[(x_A-x_B)+(x_A-x_C)]^2\\
&\quad+\frac{1}{4}[(y_A-y_B)+(y_A-y_C)]^2\\
&=\frac{1}{4}[(x_A-x_B)^2+(x_A-x_C)^2+2(x_A-x_B)(x_A-x_C)]\\
&\quad+\frac{1}{4}[(y_A-y_B)^2+(y_A-y_C)^2+2(y_A-y_B)(y_A-y_C)],
\end{aligned}$$

注意到恒等式

$$
\begin{aligned}
&2(x_A-x_B)(x_A-x_C)\\
&=(x_A-x_B)^2+(x_A-x_C)^2-(x_B-x_C)^2, \qquad (1.4)\\
&2(y_A-y_B)(y_A-y_C)\\
&=(y_A-y_B)^2+(y_A-y_C)^2-(y_B-y_C)^2, \qquad (1.4')
\end{aligned}
$$

便可得出

$$
\begin{aligned}
m_a^2&=\frac{1}{4}[2(x_A-x_B)^2+2(x_A-x_C)^2-(x_B-x_C)^2]\\
&\quad+\frac{1}{4}[2(y_A-y_B)^2+2(y_A-y_C)^2-(y_B-y_C)^2]\\
&=\frac{1}{2}[(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2]\\
&\quad+\frac{1}{2}[(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2\\
&\quad-\frac{1}{4}[(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2],
\end{aligned}
$$

即（1.2）式成立。

上面的推导仅是极简单的计算，没有添辅助线，没有巧妙的推理，甚至没有明确用到余弦定理，只用了距离公式（1.1）与中点的坐标（1.3）。这正是解析几何的优点所在，请读者回忆中线公式（用纯几何方法）的证明，对比一下体会更深。

注 1　上面出现的一些式子中，横坐标与纵坐标处在平等的地位。由于这种对称性，在非正式的书写中，可以只写出含 $x$ 的部分，而将含 $y$ 的部分用“$+\cdots\cdots$”来代替（学过向量的读者将关于两个坐标的表达式改成一个用向量表示的式子，更为简单）。

注 2　上面的（1.4）与（1.4′）相加得出

$$(x_A - x_B)(x_A - x_C) + (y_A - y_B)(y_A - y_C) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \tag{1.5}$$

它相当于余弦定理，即（1.5）式左边就是 $bc\cos A$。这一点我们以后将会用到（熟悉向量的读者可以看出（1.5）式左边是向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 的数量积）。

**例 2**　求证当 $P$ 为 $\triangle ABC$ 的重心时，$P$ 到三个顶点的距离的平方和最小。

**证**　设重心为 $G$，则

$$x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \qquad y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C). \tag{1.6}$$

因为

$$\begin{aligned}(x_P - x_A)^2 &= [(x_P - x_G) + (x_G - x_A)]^2 \\ &= (x_P - x_G)^2 + (x_G - x_A)^2 + 2(x_P - x_G)(x_G - x_A),\end{aligned}$$

关于 $x_B$、$x_C$ 也有类似的等式，这样的三个等式相加得

$$\begin{aligned}\sum(x_P - x_A)^2 = 3\cdot(x_P - x_G)^2 &+ \sum(x_G - x_A)^2 \\ &+ 2(x_P - x_G)\sum(x_G - x_A),\end{aligned}$$

（其中 $\sum$ 表示将字母 $A$、$B$、$C$ 轮换后所得的三个式子相加，例如 $\sum(x_P - x_A)^2 = (x_P - x_A)^2 + (x_P - x_B)^2 + (x_P - x_C)^2$）由于（1.6），上式右端最后一个和为零。所以

$$\sum(x_P - x_A)^2 = 3(x_P - x_G)^2 + \sum(x_G - x_A)^2.$$

关于纵坐标也有类似的等式。于是

$$\begin{aligned}&PA^2 + PB^2 + PC^2 \\ &= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2.\end{aligned}$$

即当且仅当点 $P$ 与重心 $G$ 重合时，$PA^2 + PB^2 + PC^2$ 取得最

小值 $GA^2+GB^2+GC^2$。

注1　如果读者不熟悉轮换的和号，可以将式子中所有的项逐一写出。但轮换的和号是方便的，我们今后多次用到，希望不熟悉的读者渐渐熟悉它。

注2　如果取 $G$ 为原点，计算更简单，可参看第8节例6。

**例 3**　证明任意四边形四条边的平方和，等于两条对角线的平方和，再加上对角线中点连线的平方的4倍。

**证**　如果不用解析几何，需要添辅助线，还要一些细致的分析，并不很容易。采用解析几何，只需要简单直接的计算，图都不必画。

设四个顶点的坐标为 $A_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$。这时对角线中点为 $B\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$, $C\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$,

而

$$
\begin{aligned}
&4\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\\
&\quad=(x_1+x_3-x_2-x_4)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\\
&\quad 2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1)\\
&\quad=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2.
\end{aligned}
$$

关于纵坐标也有类似的等式，所以

$$4BC^2+A_1A_3^2+A_2A_4^2=A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_1^2.$$

用解析法（代数方法）解几何题是本书的重点之一。本节举了三个例子，从这些例子可以看出在解某些几何题时，解析几何比纯几何或纯三角的方法优越。当然要解得好，就必须掌握一些技巧。从第2节到第7节，我们先介绍一些基本、简单的技巧。

# 2 平行四边形的顶点

已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标为 $A(3,2)$，$B(4,-3)$，$C(2,5)$。求$D$的坐标。

这个问题的解法很多。如果利用平行四边形的对边平行，可以先求出直线 $AD$ 与 $CD$ 的方程，再定出它们的交点$D$的坐标。如果利用平行四边形的对边相等，可以由$D$到$A$的距离为 $BC$ 及$D$到$C$的距离为 $AB$ 定出它的坐标。当然还可以利用 $AD$ 与 $BC$ 平行并且相等来确定$D$。但最简单的方法是利用平行四边形的对角线互相平分，即 $AC$、$BD$ 的交点 $E$既是（线段）$AC$ 中点，也是 $BD$ 中点，所以有

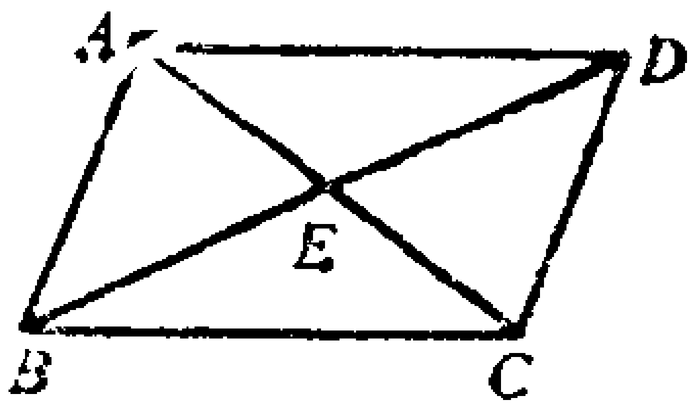


图 1

$$x_E=\frac{1}{2}(x_A+x_C)=\frac{1}{2}(x_B+x_D)$$

及

$$y_E=\frac{1}{2}(y_A+y_C)=\frac{1}{2}(y_B+y_D),$$

于是

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D,\\ y_A+y_C=y_B+y_D,\end{cases}\qquad(2.1)$$

(2.1)式虽然简单，却很有用处（本书中将多次用到(2.1)。

对于开始的问题，我们有

$$x_D=x_A+x_C-x_B=3+2-4=1,$$

$$y_D = y_A + y_C - y_B = 2 + 5 - (-3) = 10。$$

同一个问题，往往可以从几种不同的途径入手，我们应当选用最简单的方法。

如果将平行四边形 $ABCD$ “压扁”，使 $A$、$C$ 都落到 $BD$ 上，那么便产生下面的结果：

设 $B$、$A$、$C$、$D$ 为一直线上顺次四点，并且 $BD$ 与 $AC$ 的中点相同，则

$$x_A + x_C = x_B + x_D,$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D.$$

这个结论，后面（如第 30 节例题 2）还要用到。

# 3 过已知点的平行线

**例 1** 直线 $l$ 过点 $(3,2)$ 并且与已知直线 $5x-2y+4=0$ 平行，求 $l$ 的方程。

教科书上这道题的解法是先求出直线

$$5x - 2y + 4 = 0 \tag{3.1}$$

的斜率为 $\frac{5}{2}$。由于 $l$ 与 (3.1) 平行，所以 $l$ 的斜率也是 $\frac{5}{2}$。再利用点斜率得出 $l$ 的方程为

$$y - 2 = \frac{5}{2}(x-3)$$

即

$$5x - 2y - 11 = 0.$$

在刚开始学习解析几何时，这样按部就班地解，当然是

必要的。但在完成解析几何的初级阶段后，就应当采用下面的解法：

首先注意直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

与直线

$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

平行的充分必要条件是

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},$$

（约定在此的后项为0时，它的前项也自动为0．所以 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{0}$ 表示 $b_1=0$）．因此在直线 $l$ 与

$$5x-2y+4=0$$

平行时，$l$ 的方程应当呈

$$5x-2y+c=0$$

的形式。由于点（3,2）在直线 $l$ 上，所以

$$c=-(5\times3-2\times2)=-11,$$

即 $l$ 的方程为

$$5x-2y-11=0$$

以上过程均可用心算完成（凡是能用心算完成的，决不要用笔算．凡是能一步完成的运算，决不要分成几步去完成）．

**例 2** 直线 $l$ 与直线 $2x-3y+12=0$ 平行，并且经过点（2，－1），求 $l$ 的方程。

**解** $l$ 的方程为

$$2x-3y-7=0.$$

其中“头” $2x-3y$ 与直线 $2x-3y+12=0$ 相同，可以立即写出．而“尾”（常数项）$-7$ 则是 $2x-3y$ 在点（2，－1）

处的值的相反数，可以通过心算得出，所以 $l$ 的方程能够也应当直接写出。在这里，任何过程都是多余的。

一般地，过点 $(x_0, y_0)$ 且与直线 $ax+by+c=0$ 平行的直线是

$$ax+by-(ax_0+by_0)=0.$$

## 4 过已知点的垂线

**例 1** 直线 $l$ 过点 $(-1,3)$，并且与直线 $3x+2y-1=0$ 垂直，求 $l$ 的方程。

**解** 由于两条直线垂直时，它们的斜率的乘积为 $-1$，所以直线

$$ax+by+c=0 \tag{4.1}$$

的垂线为

$$bx-ay+c'=0 \tag{4.2}$$

因而直线 $l$ 的“头”是 $2x-3y$，而它的“尾”则是 $2x-3y$ 在 $(-1,3)$ 的值的相反数 11。即 $l$ 的方程为

$$2x-3y+11=0.$$

和上节一样，熟练之后可以把答案直接写出（一个好的学生应当自觉地减少那些不必要的过程，删去那些“花枪”，“一招破敌”）。

**例 2** 直线 $l$ 过点 $(3,-2)$ 并且与直线 $3x+4y-7=0$ 垂直，求 $l$ 的方程。

**解** $l$ 的方程为

$$4x-3y-18=0.$$

一般地，过点 $(x_0, y_0)$ 且与直线 $ax+by+c=0$ 垂直的直线是

$$bx-ay-(bx_0-ay_0)=0. \tag{4.3}$$

关于垂直，我们顺便再说几句话：要证明直线 $AB$ 与 $CD$ 垂直，通常是用这两条直线的斜率之积为 $-1$，即

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=-1, \tag{4.4}$$

但用等价的、形式整齐的条件（参看（1.5））

$$(x_A-x_B)(x_C-x_D)+(y_A-y_B)(y_C-y_D)=0 \tag{4.5}$$

更好。以后我们就采用（4.5）（它还可以用向量的数量积来解释）。不要忽视这种小技巧。请注意，如果每个环节都能省这样一小步，解题速度就大大加快了。

## 5 同 心 圆

如果圆的圆心为 $(c, d)$，那么它的方程可写成（请参看第18节）

$$x^2+y^2-2cx-2dy+f=0 \tag{5.1}$$

的形状。所以两个同心圆的方程具有相同的"头" $x^2+y^2-2cx-2dy$。

**例 1** 圆 $C$ 与圆 $x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\sqrt{2}y+109.5=0$ 同心，并且通过点（1,0），求圆 $C$ 的方程。

**解** 圆 $C$ 的方程为

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\sqrt{2}\ y+\frac{1}{2}=0,$$

其中“尾”（常数项）$\frac{1}{2}$是$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\sqrt{2}\,y$在(1,0)的点的相反数。

一般地，与（5.1）同心并且过点（$x_0,y_0$）的圆的方程为

$$x^2+y^2-2cx-2dy=x_0^2+y_0^2-2cx_0-2dy_0$$

这当然也可以写成

$$x^2+y^2-2cx-2dy+f=x_0^2+y_0^2-2cx_0-2dy_0+f, \tag{5.2}$$

（5.2）式右端称为点（$x_0,y_0$）关于圆（5.1）的幂（参看第21节）。当（$x_0,y_0$）在圆外时，它就是点（$x_0$, $y_0$）向圆所引的切线的平方（因为（5.1）的圆心为（$c,d$），半径的平方是$c^2+d^2-f$，点$(x_0,y_0)$到圆心的距离是$(x_0-c)^2+(y_0-d)^2$，所以由勾股定理，切线平方为$(x_0-c)^2+(y_0-d)^2-(c^2+d^2-f)=x_0^2+y_0^2-2cx_0-2dy_0+f$）。

**例 2** 点$P$到圆

$$x^2+y^2+4x-4y-1=0 \tag{5.3}$$

的切线的长为3。求与(5.3)同心并且过点$P$的圆的方程。

**解** 根据（5.2）所求的方程是

$$x^2+y^2+4x-4y-1=3^2,$$

即

$$x^2+y^2+4x-4y-10=0$$

例2中的两步可以并作一步，即利用心算直接写出答案。

这几节介绍的都是极基本、极简单的技巧，似乎不足

道．但复杂的问题正是由简单的问题复合而成，只有在这些基本技巧纯熟自如之后，处理复杂问题才能得心应手．

# 6　渐近线相同的双曲线

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$的渐近线是 $y=\pm\frac{b}{a}x$．这两条渐近线也可以用一个二次方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$来表示．由此可见，渐近线的方程与双曲线的方程仅差一个常数．一般情况也是如此，所以如果两条双曲线有相同的渐近线，那么它们的方程有相同的“头”，仅仅“尾”（常数项）不相同．

**例 1**　已知双曲线的渐近线为 $2x+3y-5=0$ 与$5x+3y-8=0$，并且过点（1，-1），求它的方程．

**解**　设它的方程为

$$(2x+3y-5)(5x+3y-8)+\lambda=0, \tag{6.1}$$

将（1，-1）代入（6.1）得

$$\lambda=-36,$$

于是双曲线的方程为

$$(2x+3y-5)(5x+3y-8)-36=0,$$

上面的待定系数$\lambda$当然也可以用心算直接得出，它就是$(2x+3y-5)(5x+3y-8)$在点（1，-1）的值的相反数．

**例 2**　一双曲线与双曲线 $3x^2-2xy-5y^2+7x-9y=0$ 有相同的渐近线，并且经过点（2,2），求它的方程．

**解**　这双曲线的方程为

$$3x^2-2xy-5y^2+7x-9y+20=0,$$

其中常数项20是 $3x^2-2xy-5y^2+7x-9y$ 在 (2, 2) 的值的相反数。

从第2节至第6节，使用的是同一个技巧：具有某种性质的曲线，它们的方程有相同的"头"，而"尾"可以用待定系数法定出。

同一个技巧往往能用于许多场合。能在不同的场合使用一个技巧，才是真正掌握了这一技巧。

## 7 复数与旋转

平面上的每一个点，在建立坐标系后，可以用一对实数 $(x, y)$（即它的坐标）来表示，这也就是说，可以用复数 $x+iy$ 来表示。同样地，向量 $\{x, y\}$ 也可以用复数 $x+iy$ 来表示。因此，很多几何问题可以用复数来解决。用复数解题在本质上与用解析几何解题是一致的。但复数可以进行乘法将 $x+iy$ 乘以 $e^{i\theta}$ 就相当于把向量 $\{x, y\}$（依逆时针方向）旋转 $\theta$ 弧度。所以处理与旋转有关的问题，复数是一个有力的工具。

**例 1** 已知正方形 $ABCD$ 的两个顶点 $A(3,5)$，$B(1,6)$ 求其他两个顶点的坐标。

**解** 将 $B$、$A$ 的对应坐标相减便得到向量

$$\overrightarrow{AB}=\{-2,1\}=-2+i,$$

将它旋转 $\pi/2$，即乘以 $e^{i(\pm\pi/2)}=\pm i$ 后得到向量

$$\overrightarrow{AD}=\pm(-2+i)i=\mp1\mp2i,$$

从而$D$的坐标为

$$(3+5i)+(-1-2i)=2+3i,$$

或

$$(3+5i)+(1+2i)=4+7i.$$

即 (2,3) 或 (4,7) .

由第 2 节，$C$ 的坐标为 (0,4) 或 (2,8) .

**例 2** 已知正三角形$ABC$的顶点$A(1,1)$，$B(-1,-1)$. 求顶点 $C$的坐标.

**解** $$\overrightarrow{AB}=-2-2i=-2(1+i),$$

$$\overrightarrow{AC}=-2(1+i)e^{i\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)}=-2(1+i)\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$=(-1\pm\sqrt{3})+(-1\mp\sqrt{3})i$，所以$C$点坐标为$(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$.

**例 3** 已知正方形$ABCD$的两个顶点$A(-2,4)$，$C(3,-6)$. 求$B$、$D$的坐标.

**解** $AC$中点$E$为$\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$，$\overrightarrow{EC}=\frac{5}{2}-5i$，所以$B$的复数表示为

$$\frac{1}{2}-i+i\left(\frac{5}{2}-5i\right)=\frac{11}{2}+\frac{3}{2}i,$$

$D$的复数表示为

$$\frac{1}{2}-i-i\left(\frac{5}{2}-5i\right)=-\frac{9}{2}-\frac{7}{2}i,$$

即$B$、$D$的坐标分别为

$$\left(\frac{11}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{9}{2},\ -\frac{7}{2}\right).$$

**例 4** 在$\triangle ABC$的外边作正方形$ABEF$与$ACGH$（图 2）则

（1）$\triangle ABC$的高$AD$平分线段$FH$.

（2）$\triangle ABC$的中线$AM=\frac{1}{2}FH$.

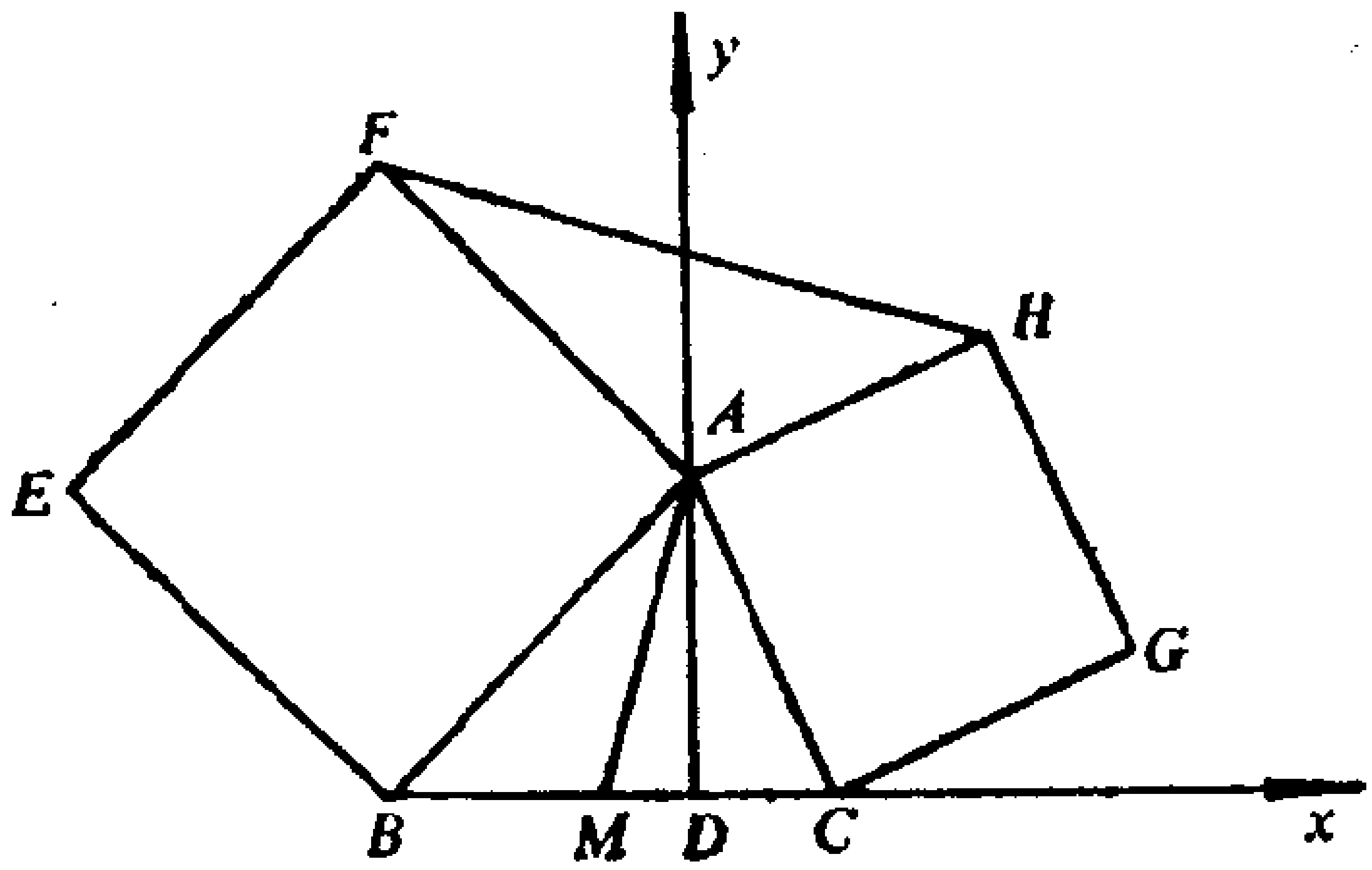


图 2

**解** 建立坐标系如图所示。设$A$、$B$、$C$的坐标分别为$(0,a)$，$(b,0)$，$(c,0)$.

则$H$点的复数表示为

$$ai+i\cdot(c-ai)=a+(c+a)i,$$

即$H$点的坐标为$(a,a+c)$.

$F$ 点的复数表示为

$$ai+(-i)(b-ai)=-a+(a-b)i,$$

即$F$点的坐标为$(-a,a-b)$.

因此$FH$被$y$轴平分（$F$、$H$的横坐标之和为零）.

$M$点的坐标为$\left(\frac{b+c}{2},0\right)$，所以

$$(2AM)^2=(b+c)^2+4a^2=FH^2,$$

即

$$\frac{1}{2}FH=AM.$$

注　注意$F$、$H$的横坐标的绝对值均等于$AD$。因此，可以"诱发"出一个纯几何的证明，即从$F$、$H$向直线$AD$作垂线，然后利用全等三角形证明这两条垂线均等于高$AD$，从而直线$AD$平分$FH$。

复数当然不是万能的。不注意问题的特点，每道几何题都用复数去硬算的人是愚蠢的人。

# 8　三角形的心

设$\triangle ABC$的顶点坐标均为已知，重心、内心、外心、垂心分别为$G$、$I$、$O$、$H$，三个傍心为$I_A$、$I_B$、$I_C$。我们来确定这些点的坐标。

熟知$G$的坐标为

$$\left(\frac{1}{3}\sum x_A,\ \frac{1}{3}\sum y_A\right), \tag{8.1}$$

它也是在顶点$A$、$B$、$C$各放一个质量相等的质点所构成的质点组的重心（更确切些说，是质点组的质心。我们不去研究质心与重心有何差异，那是物理学家感兴趣的事情）。

如果在三个顶点$A$、$B$、$C$处放的质点质量分别为$m_A$、$m_B$、$m_C$，这时质点组的质心$M$的坐标为

$$\left(\frac{\sum m_A x_A}{\sum m_A},\ \frac{\sum m_A y_A}{\sum m_A}\right), \tag{8.2}$$

理由如下：

$B$、$C$两质点的重心$N$到$B$、$C$的距离之比为$m_C:m_B$，所以由分点公式，$N$的坐标为

$$\left(\frac{m_Bx_B+m_Cx_C}{m_B+m_C},\ \frac{m_By_B+m_Cy_C}{m_B+m_C}\right), \tag{8.3}$$

同样，$A$与$N$两质点（$N$处的质量是$B$、$C$两处质量之和，即$m_B+m_C$）的重心为

$$\left(\frac{m_Ax_A(m_B+m_C)x_N}{m_A+m_B+m_C},\ \frac{m_Ay_A+(m_B+m_C)y_N}{m_A+m_B+m_C}\right),$$

将$(x_N,\ y_N)$用（8.3）式代入便得到（8.2）．

公式（8.2）有很多应用．

**例 1** 点$F$、$E$分别在$\triangle ABC$的边$AB$、$AC$上，并且$AF=\frac{1}{4}AB$，$AE=\frac{1}{3}AC$．$BE$与$CF$相交于$D$，求$D$的坐标（图3）．

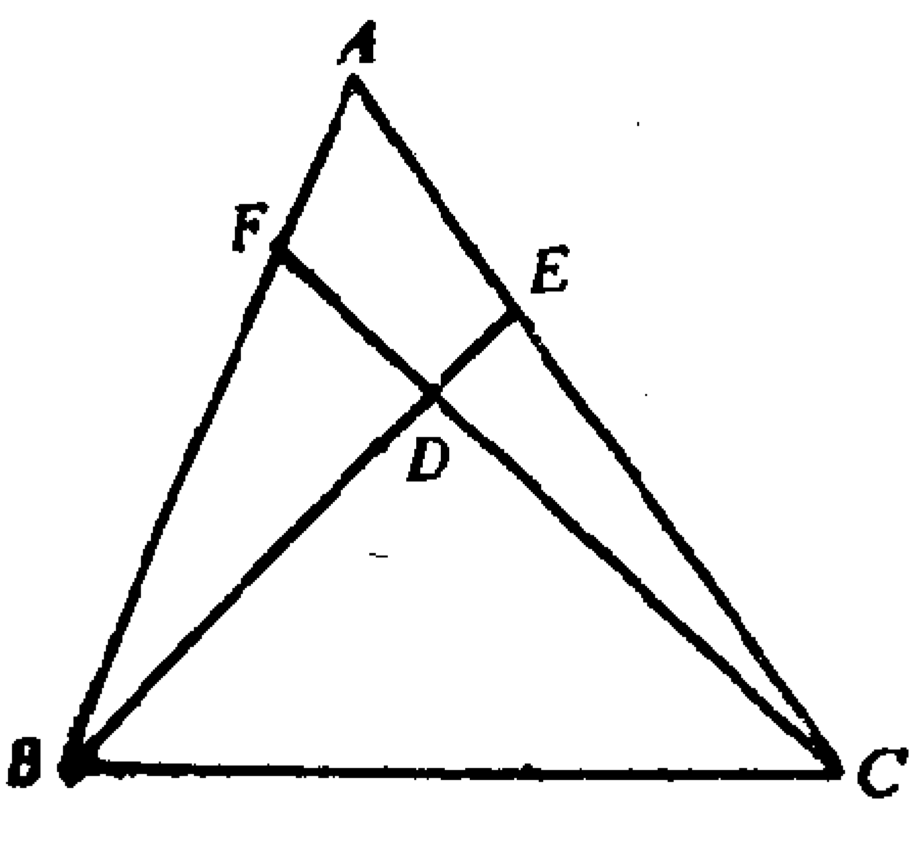

图 3

**解** 为了使$A$、$B$处的两个质点的重心在$F$，$A$处质点的质量应当是$B$处的3倍$\left(因为\frac{AF}{FB}=\frac{1}{3}\right)$，为了使$A$、$C$处的两个质点的重心在$E$，$A$处质点的质量应当是$C$处的2倍$\left(因为\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}\right)$．我们在$A$处放质量为6的质点，$B$处质量为2，$C$处质量为3．这时$A$、$B$的重心在$F$，$A$、$B$、$C$的重心在$CF$上．同样，$A$、$C$的重

心在 $E$，$A$、$B$、$C$ 的重心在 $BE$ 上。因此，$A$、$B$、$C$的重心就是$CF$与$BE$的交点$D$。由（8.2）可知$D$的坐标为

$$\left(\frac{6x_A+2x_B+3x_C}{11},\ \frac{6y_A+2y_B+3y_C}{11}\right).$$

一般地，如果$\frac{AF}{FB}=\frac{m}{l}$，$\frac{AE}{EC}=\frac{n}{l}$（经过通分总可以使两个分数分母相同），用上面的方法可以求出$BE$、$CF$的交点为

$$\left(\frac{lx_A+mx_B+nx_C}{l+m+n},\ \frac{ly_A+my_B+ny_C}{l+m+n}\right). \qquad (8.4)$$

**例 2** 求内心$I$的坐标。

**解** 设$BI$、交$AC$于$E$，$CI$交$AB$于$F$，则$\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$，$\frac{AE}{EC}=\frac{c}{a}$，所以由（8.4）可知

$$x_I=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\ y_I=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}. \qquad (8.5)$$

**例 3** 求垂心$H$的坐标

**解** 若 $BE$ 为高，则$\frac{AE}{EC}=\frac{c\cos A}{a\cos C}=\frac{c/\cos C}{a/\cos A}$。同样，若$CF$为高，则$\frac{AF}{FB}=\frac{b/\cos B}{a/\cos A}$所以由（8.4）得：

$$\left.\begin{aligned} x_H&=\frac{ax_A/\cos A+bx_B\cos B+cx_C/\cos C}{a/\cos A+b/\cos B+c/\cos C}\\ y_H&=\frac{ay_A/\cos A+by_B/\cos B+cy_C/\cos C}{a/\cos A+b/\cos B+c/\cos C}\end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

**例 4** 求外心$O$的坐标

**解** 设$BO$交于$AC$于$E$，则

$$\frac{AE}{EC}=\frac{\dfrac{BE}{\sin A}\times\sin\angle EBA}{\dfrac{BE}{\sin C}\times\sin\angle CBE}=\frac{\sin C\times\sin\dfrac{\pi-\angle AOB}{2}}{\sin A\times\sin\dfrac{\pi-\angle BOC}{2}}$$

$$=\frac{\sin C\cos C}{\sin A\cos A}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A}.$$

所以$O$点坐标为

$$\left(\frac{\sum x_A\sin 2A}{\sum\sin 2A},\ \frac{\sum y_A\sin 2A}{\sum\sin 2A}\right). \tag{8.7}$$

**例 5** 求傍心$I_A$、$I_B$、$I_C$的坐标

**解** $I_A=\left(\dfrac{-ax_A+bx_B+cx_C}{-a+b+c},\ \dfrac{-ay_A+by_B+cy_C}{-a+b+c}\right)$

$I_B=\left(\dfrac{ax_A-bx_B+cx_C}{a-b+c},\ \dfrac{ay_A-by_B+cy_C}{a-b+c}\right)$

$I_C=\left(\dfrac{ax_A+bx_B-cx_C}{a+b-c},\ \dfrac{ay_A+by_B-cy_C}{a+b-c}\right)$

在例 5 中，比$\dfrac{m}{l}$或$\dfrac{n}{l}$可能是负的（也就是出现了“负质量”），这并不是不可思议的，它不妨碍我们照旧采用公式（8.4）.

上面的方法对于平面几何中的问题也很有用．例如在例 1 中，如果要求比值$\dfrac{CD}{DF}$与$\dfrac{BD}{DE}$，那么根据上面的解法，$A$、$B$ 的重心在$F$，可认为$F$处有一个质量为 $6+2=8$ 的质点，在 $C$处有一个质量为 3 的质点，它们的重心为$D$，所以$\dfrac{CD}{DF}=\dfrac{8}{3}$，同样$\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{9}{2}$.

公式（8.6），（8.7）没有太多的用处，不必记忆。公式（8.5）比较重要。

**例 6** 设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心，证明对任意点 $P$，

$$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2=a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot IC^2+(a+b+c)\cdot IP^2 \tag{8.9}$$

**解** 取 $I$ 为原点，则由公式（8.5）

$$\sum ax_A=\sum ay_A=0,$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum a(x_p-x_A)^2+\sum a(y_p-y_A)^2\\&=\sum ax_p^2+\sum ax_A^2-2x_p\sum ax_A+\cdots\cdots\\&=\sum a(x_p^2+y_p^2)+\sum a(x_A^2+y_A^2)\\&=(x_p^2+y_p^2)\cdot\sum a+\sum a(x_A^2+y_A^2).\end{aligned}$$

即（8.9）成立。

# 9 法 线 式

求点到直线的距离以法线式为好。

**例 1** 设原点 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 $p$，并且 $l$ 的垂线 $OD$ 的倾角为 $\alpha$，求 $l$ 的方程。

**解** 直线 $OD$ 的方程为

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=0, \tag{9.1}$$

因此直线 $l$ 的"头"是 $x\cos\alpha+y\sin\alpha$。

设 $D$ 为 $O$ 在 $l$ 上的射影，则 $OD=p$，从而 $D$ 点坐标为

$$(p\cos\alpha, p\sin\alpha), \tag{9.2}$$

所以 $l$ 的方程为

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = (p\cos\alpha)\cos\alpha + (p\sin\alpha)\sin\alpha = p,$$

即

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{9.3}$$

(9.3)称为 $l$ 的法线式。

如果 $l$ 的方程由一般式

$$ax + by + c = 0 \tag{9.4}$$

给出，则它的法线式就是

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0. \tag{9.5}$$

通常认为 $c$ 是负的或零（否则在 (9.5) 的两边同时乘以 $-1$），这时与 (9.3) 比较，有

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad p = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{9.6}$$

**例 2** 求点 $p(x_1, y_1)$ 到直线 (9.3) 的距离 $d$ .

**解** 过 $P$ 作(9.3)的平行线 $l'$ .如果 $P$ 与 $O$ 在直线 (9.3) 的两侧，那么 $O$ 到 $l'$ 的距离为 $p+d$，所以 $l'$ 的方程为

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (p+d) = 0, \tag{9.7}$$

从而由于 $P(x_1, y_1)$ 在 (9.7) 上，可得到

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p,$$

如果 $P$ 与 $O$ 在直线 (9.3) 的同侧，那么 $O$ 到 $l'$ 的距离为 $p-d$. 所以 $l'$ 的方程为

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (p-d) = 0,$$

从而

$$d = -(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p).$$

如果 $P$ 在直线 (9.3) 上，那么

$$d=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

总之，不论那一种情况均有

$$d=|x\cos\alpha+y\sin\alpha-p|. \tag{9.8}$$

如果直线 $l$ 的方程为（9.4）先把它化为法线式（9.5）. 这时点 $P(x_1,y_1)$ 到 $l$ 的距离为

$$d=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|. \tag{9.9}$$

注意直线 $l$ 把平面分成两个“半平面”，在同一个“半平面”内的点，$\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$有相同的符号. 不在同一个“半平面”内的点（即在 $l$ 两侧），$\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$的符号不同. 至于 $l$ 上的点，当然有 $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$. 有时，我们也把$\dfrac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$称为点 $(x_1,y_1)$ 到直线 $l$ 的（有向）距离，根据它的符号，称点 $(x_1,y_1)$位于直线 $l$ 的正侧（正半平面）或负侧（负半平面）.

**例 3** 证明不论 $k$ 为什么值，圆

$$x^2+y^2-2kx-4ky+4k^2=0 \tag{9.10}$$

必与 $y$ 轴及直线 $3x-4y=0$ 相切.

**解** 圆（9.10）的圆心是 $(k,2k)$，半径为$|k|$. 圆心到$y$ 轴的距离显然是$|k|$，因而（9.10）与 $y$ 轴相切. 直线 $3x-4y=0$ 的法线式为

$$\frac{3x-4y}{5}=0, \tag{9.11}$$

圆心 $(k,2k)$ 到（9.11）的距离为

$$\left|\frac{3k-4\cdot(2k)}{5}\right|=|k|,$$

因此圆（9.10）与直线 $3x-4y=0$ 相切。

注　证明（9.10）与直线 $3x-4y=0$ 相切的另一种方法是通过解方程组，证明它们只有一个公共点（两个公共点合而为一）。解这种方程组，以令 $x=4t$，$y=3t$ 代入(9.10)为好；可以避免分数运算的麻烦。

**例 4**　求平行直线 $3x-4y+7=0$ 与 $3x-4y+5=0$ 之间的距离。

**解**　$3x-4y+7=0$ 的法线式为

$$\frac{3x-4y+7}{5}=0, \tag{9.12}$$

直线 $3x-4y+5=0$ 上任一点 $(x,y)$ 到直线（9.12）的距离（也就是这两条平行线之间的距离）为

$$\frac{3x-4y+7}{5}=\frac{2}{5}.$$

**例 5**　直线 $l$ 过点 $(4,-3)$，与平行直线 $3x-4y+7=0$ 及 $3x-4y+5=0$ 分别交于 $A$、$B$。如果线段 $AB$ 被直线 $2x-5y+4=0$ 平分、求 $l$ 的方程

**解**　由几何知识，我们知道线段 $AB$ 的中点 $E$ 到直线 $3x-4y+7=0$ 与 $3x-4y+5=0$ 的距离相等，所以（参见下面的（9.14））$E$在直线

$$3x-4y+6=0 \tag{9.13}$$

上。由（9.13）及

$$2x-5y+4=0$$

得$E$点为 $(-2,0)$。再由 $(-2,0)$ 及 $(4,-3)$ 两点求得 $l$ 的方程为

$$x+2y+2=0.$$

注 1 在解析几何中，用一点几何知识往往是有好处的。

注 2 与两条平行线 $ax+by+c_1=0$，$ax+by+c_2=0$ 的距离相等的点的轨迹是直线

$$ax+by+\frac{c_1+c_2}{2}=0. \tag{9.14}$$

**例 6** $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(1,2)$，$B(8,-5)$，$C(3,5)$。求 $\angle BAC$ 的内角平分线与外角平分线的方程。

**解** $AB$ 的方程为

$$x+y-3=0, \tag{9.15}$$

其法线式为

$$\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}=0, \tag{9.15'}$$

$AC$ 的方程为

$$-3x+2y-1=0, \tag{9.16}$$

其法线式为

$$\frac{-3x+2y-1}{\sqrt{13}}=0, \tag{9.16'}$$

$\angle BAC$ 的内角平分线或外角平分线上的点到 $AB$、$AC$ 的距离相等，因此对这些点有

$$\left|\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{-3x+2y-1}{\sqrt{13}}\right|, \tag{9.17}$$

即内角平分线与外角平分线的方程为

$$\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}=\frac{-3x+2y-1}{\sqrt{13}}, \tag{9.18}$$

与

$$\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}=-\frac{-3x+2y-1}{\sqrt{13}}, \qquad (9.19)$$

问题在于（9.18）、（9.19）中谁是内角平分线的方程？谁是外角平分线的方程？

要回答这个问题．只需注意$C(3,5)$到$AB$的距离是正的（把C的坐标代入（9.15）或（9.15′）的左边即知），所以$\triangle ABC$的内部在$AB$的正侧．而$B(8,-5)$到$AC$的距离是负的，所以$\triangle ABC$的内部在$AC$的负侧．对于内角平分线上的点，$\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}$与$\frac{-3x+2y-1}{\sqrt{13}}$一正一负，要使两者相等，必须将其中一个改变符号，所以（9.19）是内角平分线的方程．（9.18）是外角平分线的方程．

（9.18）、（9.19）当然可以化为一般式，但我们对此并无兴趣．

**例 7** 线段$AB$的端点为$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，求$AB$在直线（9.4）上的射影的长．

**解** 直线（9.4）的垂线为

$$bx-ay=0 \qquad (9.20)$$

（常数项的值在这里无关紧要，令它为零比较简单）．

点$A$、$B$到（9.20）的（有向）距离分别为

$$\frac{bx_A-ay_A}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bx_B-ay_B}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

两者之差就是$AB$在直线（9.4）上的射影的长．即

$$\text{射影之长}=\left|\frac{b(x_A-x_B)-a(y_A-y_B)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|. \qquad (9.21)$$

**例 8** 线段$AB$同例7．如果直线$l$与$AB$的夹角为$\alpha$．求$AB$在$l$上的射影的长．

**解** 不妨假定 $l$ 过 $A$ 点。在 $l$ 上取 $AC=1$。由（1.5）及其说明，

$$(x_A-x_B)(x_A-x_C)+(y_A-y_B)(y_A-y_C)=bc\cos\alpha=c\cos\alpha$$

所求射影的长。又

$$x_A-x_C=\frac{x_A-x_C}{AC}=\cos\alpha,\quad y_A-y_C=\frac{y_A-y_C}{AC}=\sin\alpha.$$

因此射影长为

$$(x_A-x_B)\cos\alpha+(y_A-y_B)\sin\alpha. \tag{9.22}$$

# 10　一　次　式

直线的方程

$$ax+by+c=0$$

是一次方程。它的左边 $ax+by+c$ 是 $x$、$y$ 的一次式。为方便起见，常数 $c$ 我们也看作是一次式。

显然，如果 $x$ 的一次式 $ax+c$ 在 $x=x_1$ 与 $x=x_2$（$x_1\neq x_2$）时取相同的值，那么 $ax+c$ 必定是常数 $c$（即 $a$ 必定为零）。这一个简单的事实有许多应用。

**例 1** 求证等腰三角形底边上一点到两边距离之和为定值。

**解** 设底边 $BC$ 为 $x$ 轴，腰 $AB$、$AC$ 的法线式为

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

及

$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$

并且 $\triangle ABC$ 的内部在这两条直线的正侧。点 $P$ 在线段 $BC$

上，它的坐标为（$x$,0）。因此，$P$到两腰的距离之和为

$$d_1+d_2=a_1x+c_1+a_2x+c_2, \tag{10.1}$$

是$x$的一次式。

由于当$P$与$B$或C重合时，（10.1）的值均为腰上的高$h$，所以（10.1）式是常数$h$。

注意点到直线的距离是正负的。当$P$沿$x$轴移动到线段$BC$外时，$d_1$、$d_2$中有一个由正变负，所以上面的论证表明：

等腰三角形底边延长线上一点到两腰的距离的差为定值，即一腰上的高。

**例 2** $\triangle ABC$中有两个内接矩形$D_1E_1F_1G_1$，$D_2E_2F_2G_2$，都有一条边在$BC$上，另两个顶点分别在$AB$、$AC$上（图4）。如果两个矩形的周长都是20，

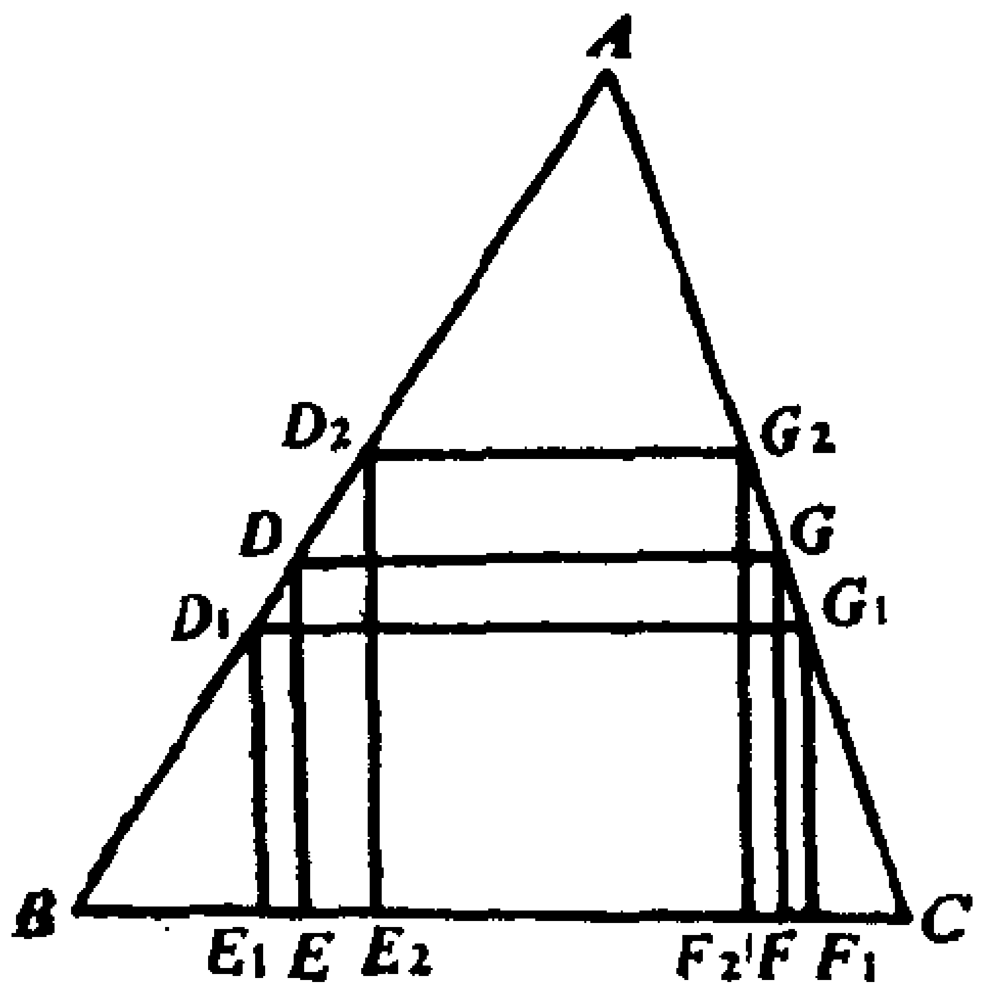


图 4

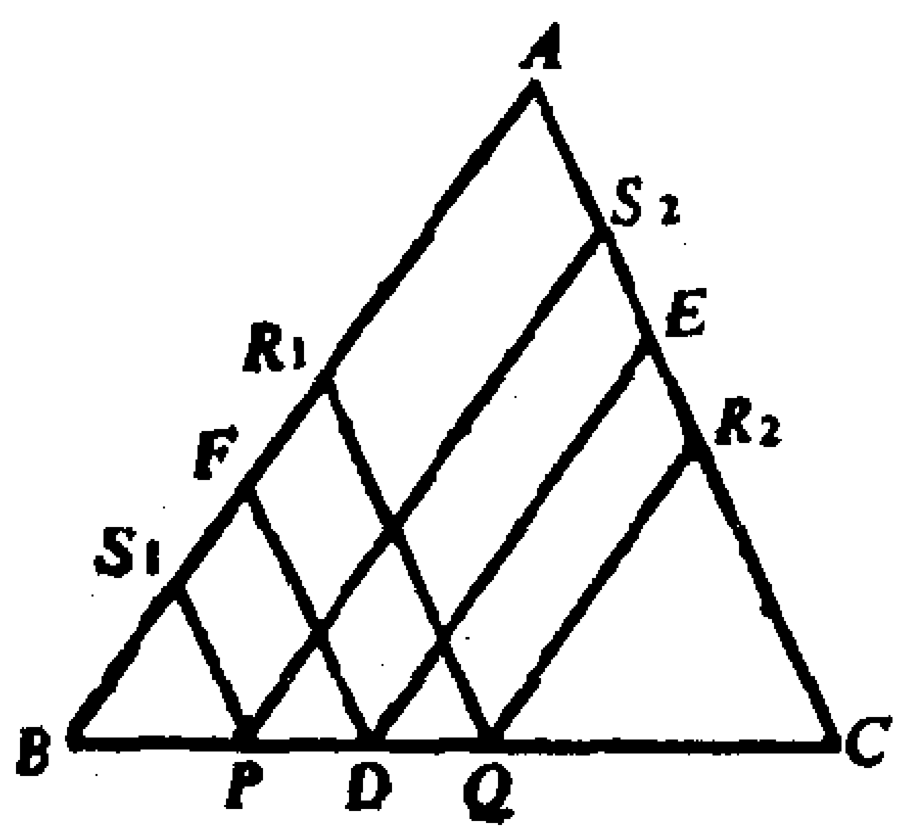


图 5

1） 求证任意一个一边在$BC$上，另两个顶点分别在$AB$、$AC$上的矩形$DEFG$的周长是20。

2） 求$\triangle ABC$的面积

**解** 以$AB$为$x$轴，$D$点坐标为（$x$,0），

由于$DG$与$D$到$AC$的距离只差一个常数因子$\sin C$，所以$DE+DG$是$x$的一次式。这个一次式在$D$与$D_1$或$D_2$

重合时，它的值都是10，因此这一次式是常数10。即矩形$DEFG$的周长是20。

当$D$与$A$重合时，矩形退化为$BC$上的高的两倍，所以这高为10。当$D$与$B$重合时，矩形退化为$BC$的两倍，所以$BC$为10。从而$\triangle ABC$的面积为50。

**例 3** 在$\triangle ABC$的底边$BC$上，有一条长为定值$k$的线段$PQ$在滑动。自$P$、$Q$作$AC$的平行线分别交$AB$于$S_1$、$R_1$，作$AB$的平行线分别交$AC$于$S_2$、$R_2$。证明梯形$PQR_1S_1$与梯形$PQR_2S_2$的面积之和为定值（图5）

**证** 设$D$为$PQ$的中点。作$DE\parallel AB$，交$AC$于$E$。作$DF\parallel AC$，交$AB$于$F$。则$DE$、$DF$分别为梯形$PQR_2S_2$、$PQR_1S_1$的中线。而这两个梯形的高分别为$k\sin B$、$k\sin C$。所以它们的面积之和

$$S=\frac{1}{2}(DE\times k\sin B+DF\times k\sin C)$$

$$=\frac{k}{2}(DE\times\sin B+DF\times\sin C).$$

与前两个例题的推理相同，我们有

$$DE\times\sin B+DF\times\sin C=b\sin C=c\sin B=h_a.$$

这里$h_a$是$\triangle ABC$的$BC$边上高。于是

$$S=\frac{kh_a}{2}.$$

**例 4** （第二届全国中学生数学冬令营试题）

将边长为1的正三角形$ABC$的各边都$n$等分，过各分点作平行于其它两边的直线，将这个三角形等分成小三角形。各小三角形的顶点称为结点。在每个结点上放置了一个实数。已知

（1）$A$、$B$、$C$ 三点上放置的数分别是 $a$、$b$、$c$。

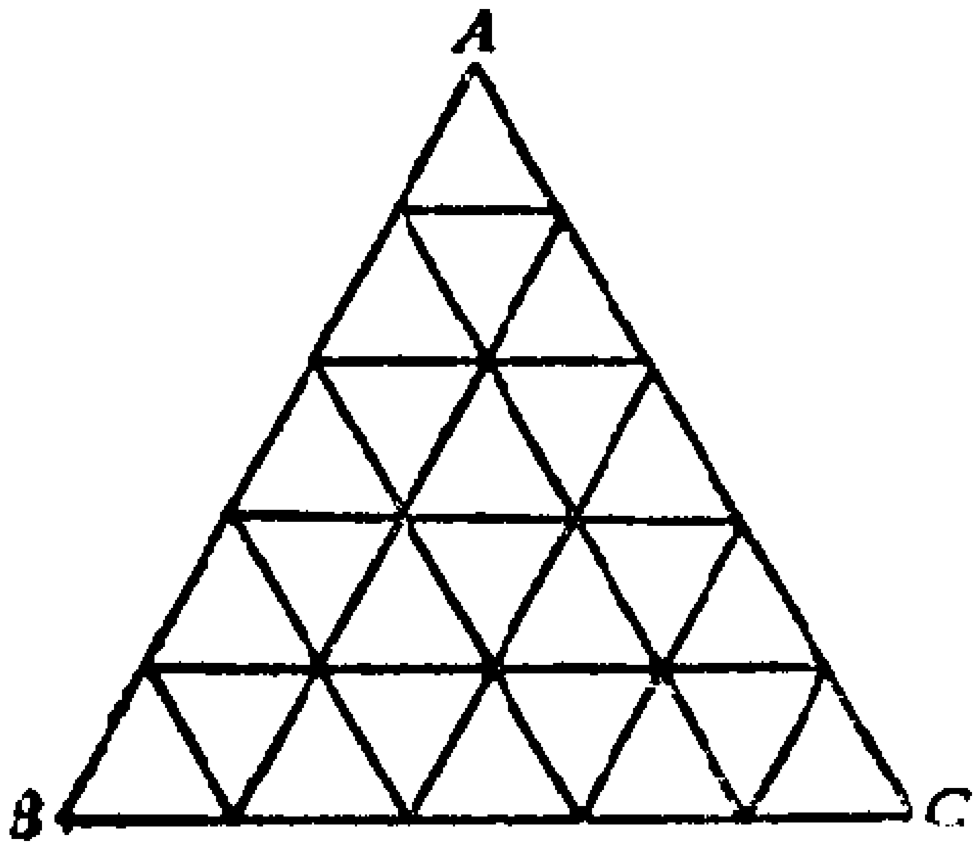



图 6

（2）在每个由有公共边的两个小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点上放置的数的和相等。

试求：

（1）放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 $r$。

（2）所有结点上的数的总和 $S$。

**解** 条件（2）可叙述成：

在所述菱形中，两相邻顶点上放置的数的差与另两个相邻顶点上放置的数的差相等。

由此可知，图 6 中同一条线上的三个连续的结点上放置的数成等差数列（因为有两个结点既与这三个连续结点的前两个构成菱形，也与后两个构成菱形）

由于等差数列的每一项都是首项与另一项的一次式，所以各结点上放置的数都是 $a$、$b$、$c$ 的一次式。

如果 $a=b=c$，那么所放置的数均相等，$r=0$。如果 $a$、$b$、$c$ 不等，设 $a$ 最大，$c$ 最小。由于等差数列中，最大（最小）的项是首项或最末一项，所以在所放置的数中也是 $a$ 最大，$c$ 最小。$r=1$。

现在考虑总和 $S$。它也是 $a$、$b$、$c$ 的一次式。而且，当 $a$、$b$、$c$ 中任意两个字母互换时，相当于改变三角形的位置，所以总和 $S$ 保持不变，即 $S$ 是 $a$、$b$、$c$ 的对称式（对称函数）。因此 $a$、$b$、$c$ 的系数相等，即

$$S=k(a+b+c)+h.$$

其中 $k$、$h$ 为待定系数。

令 $a=b=c=0$，这时所有结点上的数为 0，$S=0$。从而 $h=0$。

令 $a=b=c=1$，这时所有结点上的数为 1，$S$ 等于结点的个数

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

从而

$$k=\frac{(n+1)(n+2)}{6},$$

因此

$$S=\frac{(n+1)(n+2)}{6}(a+b+c).$$

# 11 表示直线的高次方程

将直线方程

$$a_1x+b_1y+c_1=0. \tag{11.1}$$

与直线方程

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{11.2}$$

相乘得二次方程

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0. \tag{11.3}$$

这个二次方程（11.3）就表示两条直线（11.1）、(11.2)。这种将二条直线的方程合成一个二次方程的方法是极有用的，请参看第 26 节。

反过来，一个高次方程如果可以分解为若干个一次方程，它便表示若干条直线。

**例 1** $x^2-xy-6y^2-7x+31y-18=0$ 表示两条直线，求它们的方程。

**解** 原方程可分解（例如用所谓双十字相乘法分解）为

$$x-3y+2=0 \text{ 与 } x+2y-9=0.$$

注 二次方程 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ 可分解为两条直线的充分必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}=0. \tag{11.4}$$

**例 2** $x^3-6x^2+11x-6=0$ 表示三条直线，求它们的方程。

**解** 所求方程为

$$x-1=0, \quad x-2=0, \quad x-3=0$$

一般地，仅含 $x$（或 $y$）的 $n$ 次方程表示 $n$ 条平行于 $y$ 轴（或 $x$ 轴）的直线（其中可能有重合的直线或虚的直线）。

**例 3** $x^3-6x^2y+11xy^2-6y^3=0$ 表示三条直线，求它们的方程

**解** 所求方程为（请与上例比较）

$$x-y=0, \quad x-2y=0, \quad x-3y=0.$$

一般地，$x$、$y$ 的 $n$ 次齐次方程（齐次指多项式的每一的次数都是 $n$）表示 $n$ 条过原点的直线（其中可能有重合的与虚的）。

**例 4** 求经过原点，并且分别与

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\cdots+a_ny^n=0 \tag{11.5}$$

所表示的 $n$ 条直线垂直的 $n$ 条直线的方程。

**解** 对于（11.5）所表示的直线

$$y=m_i x \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

它的（过$O$点的）垂线为

$$y=-\frac{1}{m_i}x \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

因此，所求方程可由（11.5）将$\frac{x}{y}$换成$-\frac{y}{x}$得出，即所求方为

$$a_0y^n-a_1y^{n-1}x+a_2y^{n-2}x^2-\cdots+(-1)^na_nx^n=0.$$

**例 5** 如果$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3=0$所表示的三条的直线中有两条互相垂直，求其系数间的关系。

**解** 问题的实质即方程

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0 \tag{11.6}$$

有两个根的积为$-1$。由韦达定理（参见第 25 节），第三个根为$\frac{d}{a}$代入（11.6）得

$$a^2+3ac+3bd+d^2=0.$$

**例 6** 证明对任意实数$m$

$$m(x^3-3xy^2)+y^3-3x^2y=0 \tag{11.7}$$

表示三条（过原点的）直线，两两夹角相等、

**解** 本题以用极坐标为宜。将

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

代入（11.7）得

$$m(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\sin^3\theta-3\sin\theta\cos^2\theta=0,$$

即

$$m=\text{tg}3\theta,$$

从而

$$3\theta=\alpha,\quad \alpha+\pi,\quad \alpha+2\pi\quad (\alpha=\operatorname{arctg}m),\qquad (11.7)$$

示三条直线

$$\theta=\frac{\alpha}{3},\quad \theta=\frac{\alpha+\pi}{3},\quad \theta=\frac{\alpha+2\pi}{3},$$

两两夹角为$\frac{\pi}{3}$。

**例 7** 证明

$$\cos 3\alpha(x^3-3xy^2)+\sin 3\alpha(y^3-3x^2y)+3a(x^2+y^2)-4a^3=0 \qquad (11.8)$$

表示三条直线，它们构成正三角形。

**证** 化为极坐标得

$$\cos 3(\theta+\alpha)=\frac{4a^3}{\rho^3}-\frac{3a}{\rho}, \qquad (11.9)$$

由三倍角公式看出（11.9）表示三条直线

$$\frac{a}{\rho}=\cos(\theta+\alpha),\quad \frac{a}{\rho}\cos=\left(\theta+\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\frac{a}{\rho}=\cos\left(\theta+\alpha+\frac{4\pi}{3}\right).$$

即

$$x\cos\alpha-y\sin\alpha=a,$$

$$x\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)-y\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=a,$$

$$x\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-y\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=a,$$

原点至这三条直线的垂线的倾角分别为$-\alpha$，$-\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$，

$-\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$，所以这三条线构成正三角形。

# 12 过原点的曲线

一条代数曲线 $F(x,y)=0$（$F(x,y)$ 为 $x$、$y$ 的多项式）通过原点的充分必要条件是 $F(x,y)$ 的常数项 $F(0,0)=0$（即“没有”常数项）。

**例 1** 一圆的圆心为 $(c,d)$，通过原点。求这圆的方程。

**解** 这圆的方程为

$$x^2+y^2-2cx-2dy=0.$$

它的“头” $x^2+y^2-2cx-2dy$ 由圆心 $(c,d)$ 定出，而“尾”为 0。这样的方程应当直接写出，任何过程都是多余的。

**例 2** 一直线经过原点，又经过直线 $3x+4y+5=0$ 与 $x-2y+1=0$ 的交点，求它的方程。

**解** 将方程

$$x-2y+1=0 \tag{12.1}$$

乘以 5 后减去方程

$$3x+4y+5=0 \tag{12.2}$$

得出一个常数项为 0 的方程

$$2x-14y=0,$$

即

$$x-7y=0. \tag{12.3}$$

(12.3) 显然通过直线 (12.1) 、(12.2) 的交点，且又过原点，所以 (12.3) 就是所求的方程。

**例 3** 在$X$轴上有一定点$A(a,0)$及一动点$A'$，在$Y$轴上有一定点$B(0,b)$ 及一动点$B'$。如果始终有$A'B'//AB$求$A'B$与$AB'$的交点$P$的轨迹。

**解** 设$OA'=\lambda a$，则$OB'=\lambda b$直线$AB'$的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda b}=1, \tag{12.4}$$

直线$A'B$的方程为

$$\frac{x}{\lambda a}+\frac{y}{b}=1, \tag{12.5}$$

两式相减得

$$\frac{x}{a}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{y}{b}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=0, \tag{12.6}$$

在$\lambda\neq 1$时，即

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}, \tag{12.7}$$

点$P$适合 (12.4) 、(12.5) 因而适合 (12.7) ，它是一条过$O$的直线。

在$\lambda=1$时，$A'$、$B'$分别与$A$、$B$重合。可以认为直线$AB$上的每一点均是交点。

因此，所求轨迹是直线 (12.7) 及直线$AB$，后者的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

注 1 当定点$B$不在$y$轴上时，采用斜坐标则结论仍然

成立。

注 2 关于轨迹请参看第28节。

**例 4** $O$为原点。直线 $lx+my=1$ 与二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 相交于 $A$、$B$ 两点。求直线 $OA$、$OB$ 的方程。

**解** 由上述两个方程作出二次齐次方程

$$ax^2+bxy+cy^2+(dx+ey)(lx+my)+f(lx+my)^2=0 \tag{12.8}$$

这是两条过原点的直线，它们通过已知锥线与直线的交点，因而（12.8）就是所求的方程。

例 4 的结论很重要，在后面我们将一再用到它。

**例 5** 圆 $x^2+y^2-4x-2y=4$ 与 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 相交于 $A$、$B$ 两点。求直线 $OA$、$OB$ 的方程（$O$为原点）。

**解** 两圆方程相减得

$$x-y=0,$$

这直线过原点$O$，又过 $A$、$B$ 两点。因此就是所求的方程。

**例 6** 锥线 $ax^2+bxy+cy^2+dx=0$ 与 $a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x=0$ 除原点$O$外还有两个公共点 $A$、$B$，求 $OA$、$OB$ 的方程。

**解** 由方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx=0$$

与

$$a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x=0$$

消去一次项得二次齐次方程

$$(ad_1-a_1d)x^2+(bd_1-b_1d)xy+(cd_1-c_1d)y^2=0,$$

这就是 $OA$、$OB$ 的方程。

例 5、例 6 均注意到已给方程的特点。若不注意这些特

点，一味硬算，吃力而不讨好。

在例 5 中，$O$ 正好与 $A$、$B$ 共线。$O$ 不与 $A$、$B$ 共线时，需利用第 22 节的根轴（22.4）及本节例 4 的方法去求 $OA$、$OB$ 的方程。

# 13 直 线 束

若直线 $l_1$：

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{13.1}$$

与直线 $l_2$：

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{13.2}$$

相交于 $P$，则（13.1）与（13.2）的线性组合（$\lambda$、$\mu\in R$，不全为 0）

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0 \tag{13.3}$$

表示过 $P$ 点的所有直线，称为过 $P$ 点的直线束。当参数 $\lambda$、$\mu$ 一组确定的值时，（13.3）表示一条过 $P$ 的直线。特别地，当 $\lambda=0$ 时，（13.3）成为（13.2）当 $\mu=0$ 时，（13.3）成为（13.1）。对于 $l_1$、$l_2$ 以外的直线，我们往往只在（13.3）中保留一个参数，而使另一个为 1。

如果 $l_1$ 与 $l_2$ 平行，这时（13.3）表示所有与 $l_1$ 平行的直线。

**例 1** 一直线经过直线 $x+2y-3=0$，$3x-y+1=0$ 的交点，并且与直线 $2x+y+3=0$ 垂直。求这直线的方程：

**解** 设所求方程为

$$\lambda(x+2y-3)+\mu(3x-y+1)=0, \qquad (13.4)$$

(13.4) 与直线$2x+y+3=0$垂直，所以它的“头”应当是$x-2y$，从而

$$\begin{cases}\lambda+3\mu=1,\\ 2\lambda-\mu=-2.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-\frac{5}{7}$， $\mu=\frac{4}{7}$。于是

$$-3\lambda+\mu=\frac{19}{7},$$

从而 (13.4) 成为

$$x-2y+\frac{19}{7}=0,$$

这就是所求的方程。

例 1 是个很普通的例子，下面的几个例子稍有技巧。

**例 2** 自$\triangle ABC$的顶点$A$引$BC$的垂线，垂足为$D$，在$AD$上任取一点$H$，直线$BH$交于$AC$于$E$，$CH$交$AB$于$F$。试

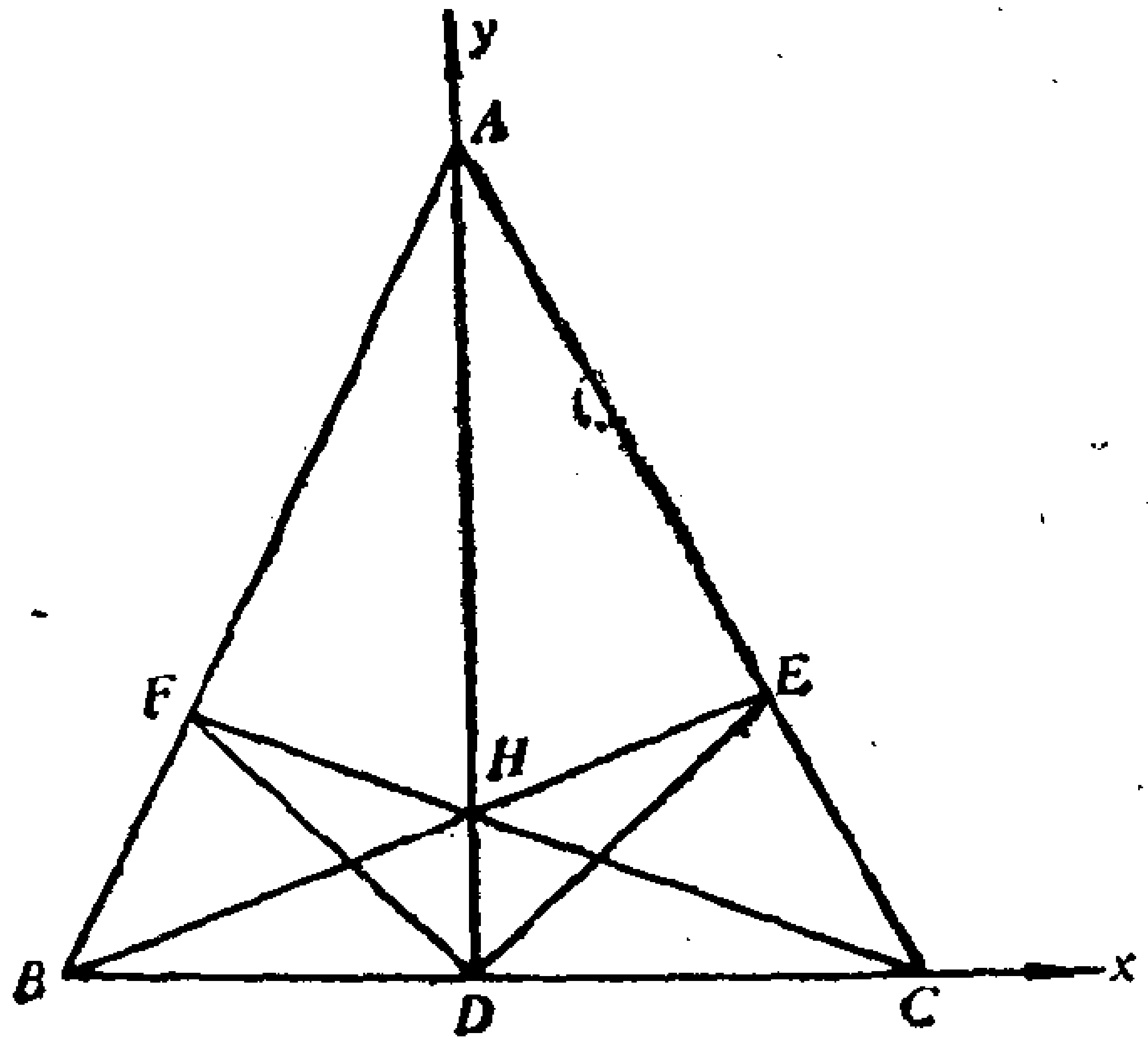


图 7

证$AD$平分$ED$与$DF$所成的角．

**解** 以$D$为原点，$BC$、$AD$分别为$x$、$y$轴．设$A$、$H$、$B$、$C$的坐标分别为

$$(0,a),\quad (0,h),\quad (b,0),\quad (c,0)$$

则由截距式（此时宜用截距式），$BH$ 方程为

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{h}=1,$$

$AC$ 方程为

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1,$$

相减得（即取 $\lambda=1$，$\mu=-1$）

$$x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{a}\right)=0, \tag{13.5}$$

(13.5) 是直线（方程是一次的），通过$BH$与$AC$的交点$E$，通过原点$D$（常数项为0），所以 (13.5) 就是直线$DE$．同样，$DF$的方程为

$$x\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{a}\right)=0, \tag{13.6}$$

(13.5)、(13.6) 的斜率互为相反数，这就等价于 $AD$ 平分$ED$与$DF$所成的角．

注1．当$H$是垂心时，这个问题是大家熟悉的：三角形的高是垂足三角形的角平分线．不难用四点共圆来证明．一般情形，用纯粹几何来证较为困难（当然也不是不能证，有兴趣读者不妨试上一试）．

注2 直线的方程，我们选用了截距式．选用哪一种"式"，是根据问题而定．在本例中，截距式是最合适的．它可以很快产生$DE$的方程．这种消去常数项产生过原点的曲线

方程，也是常用的方法，值得玩味。

注3　$B$、$C$两点的"地位"是平等的，求出$DE$的方程后，将其中字母$b$、$c$互换就得到$DF$的方程。注意到这种对称性，往往能事半功倍。

**例 3.** $H$是$\triangle ABC$的垂心，$P$是任意一点。$HL\perp PA$，交$PA$于$L$、交$BC$于$X$。$HM\perp PB$，交$PB$于$M$、交$CA$于$Y$。$HN\perp PC$，交$PC$于$N$、交$AB$于$Z$。求证$X$、$Y$、$Z$三点共线。

**解**　过$H$的直线比较多，所以我们以$H$为原点较为方便（这时过$H$的直线均无常数项）。

$PA$的斜率为$\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}$，所以$HL$的方程为

$$x(x_P-x_A)+y(y_P-y_A)=0,\qquad(13.7)$$

$HA$的斜率为$\dfrac{y_A}{x_A}$，所以$BC$的方程的"头"为$xx_A+yy_A$。由于$BC$过$B$，所以$BC$的方程为

$$xx_A+yy_A=x_Ax_B+y_Ay_B,\qquad(13.8)$$

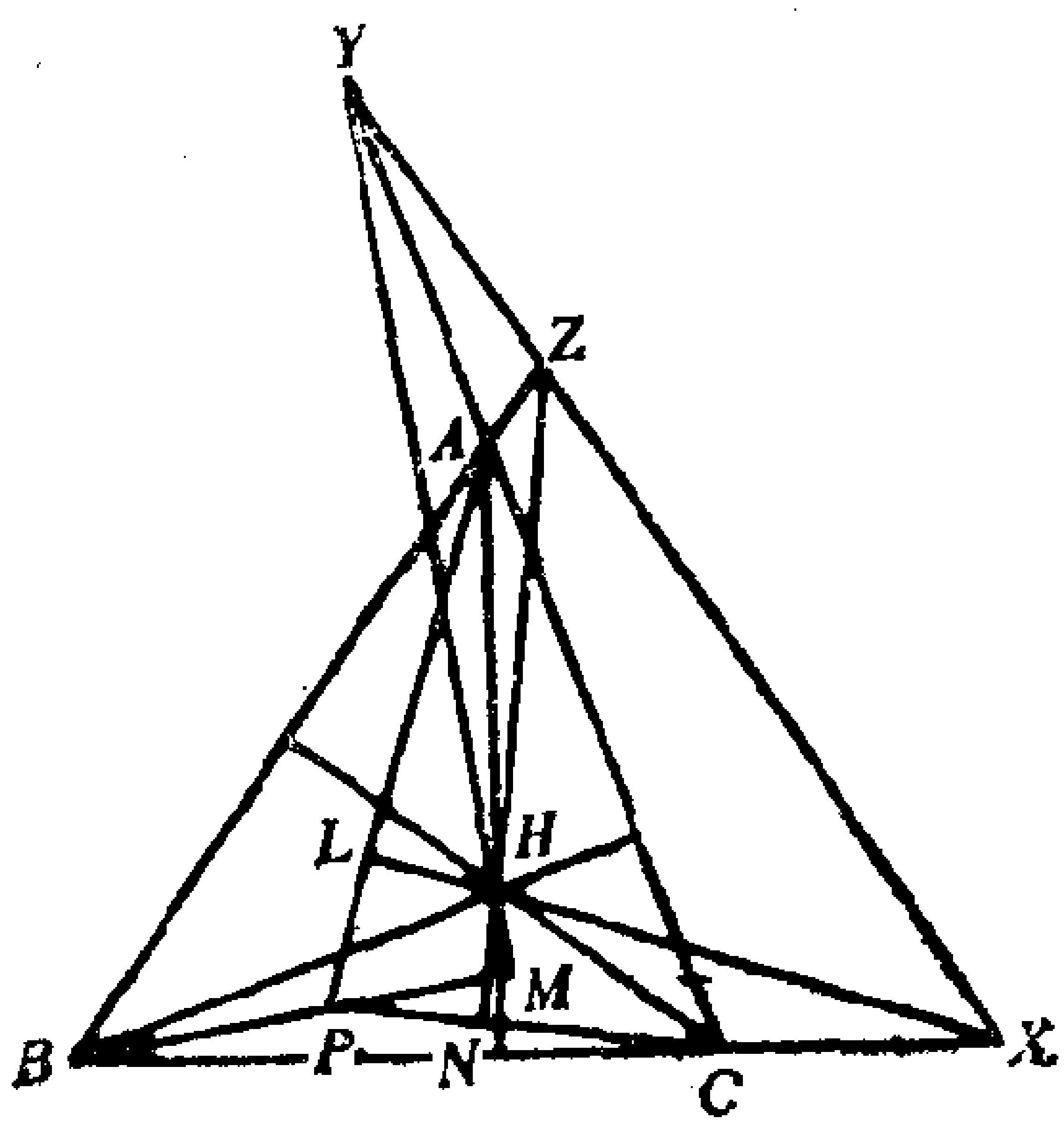


图 8

$BC$也过$C$，因此

$$x_Cx_A+y_Cy_A=x_Ax_B+y_Ay_B.$$

由轮换性（或者说是"同理"），

$$x_Bx_C+y_By_C=x_Cx_A+y_Cy_A=x_Ax_B+y_Ay_B.\qquad(13.9)$$

$X$是$BC$与$HL$的交点，因此将（13.7）、（13.8）相加所得的直线

$$xx_P+yy_P=x_Ax_B+y_Ay_B \tag{13.10}$$

应当过$X$。

由于（13.9），直线（13.10）也就是直线

$$xx_P+yy_P=x_Bx_C+y_By_C \tag{13.11}$$

与

$$xx_P+yy_P=x_Cx_A+y_Cy_A \tag{13.12}$$

所以直线（13.10）也过$Y$、$Z$。即$X$、$Y$、$Z$三点共线。

注1．由（13.10），我们还知道直线$XY\perp HP$。

注2．选择$BC$或过$H$与$BC$平行的直线为$x$轴，虽然也能解决这个问题。但由于这样做破坏了对称性（$A$、$B$、$C$及$X$、$Y$、$Z$的地位不平等），反而麻烦。注意这种对称性是解析几何的一个重要技巧。

注3 （13.7）、（13.8）相加是为了消去不对称的部分$xx_A+yy_A$，只留下对称的部分$xx_P+yy_P$（与$A$、$B$、$C$均无关）及$x_Ax_B+y_Ay_B$（由（13.9），我们知道后者关于$A$、$B$、$C$是对称的）。

注4 如果题目不仅要求证明$X$、$Y$、$Z$共线，还进一步要我们证明$XY\perp HP$，那么情况对我们有利。因为它告诉我们$XY$的"头"必为$xx_P+yy_P$，只要设法从（13.7）、（13.8）把这个"头"凑出来就可以了。这与归纳法有些类似：要证明的结论越强，归纳假设也就越强，证明往往越方便。

**例4** 设四边形$ABCD$为平行四边形，直线$CF\perp AD$，交直线$AD$于$F$．直线$CE\perp AB$交直线$AB$于$E$．直线$EF$与$BD$相交于$P$，则

$$\angle ACP=90^\circ \text{（图9）}$$

**解** 以$C$为原点（因为过$C$的直线多），$CD$为$x$轴，$CE$为

$y$ 轴. 设$D$、$E$、$B$、$A$的坐标分别为

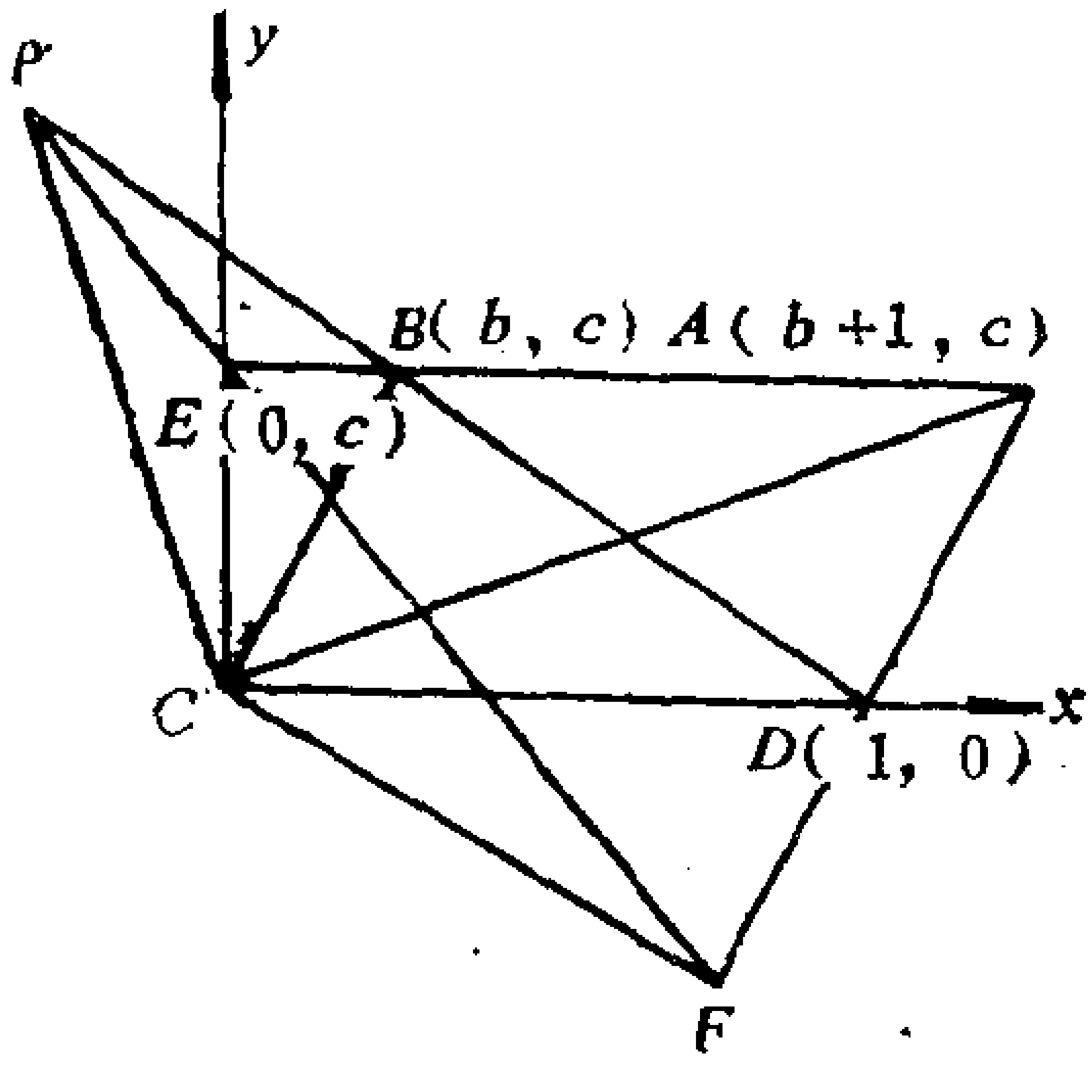


图 9

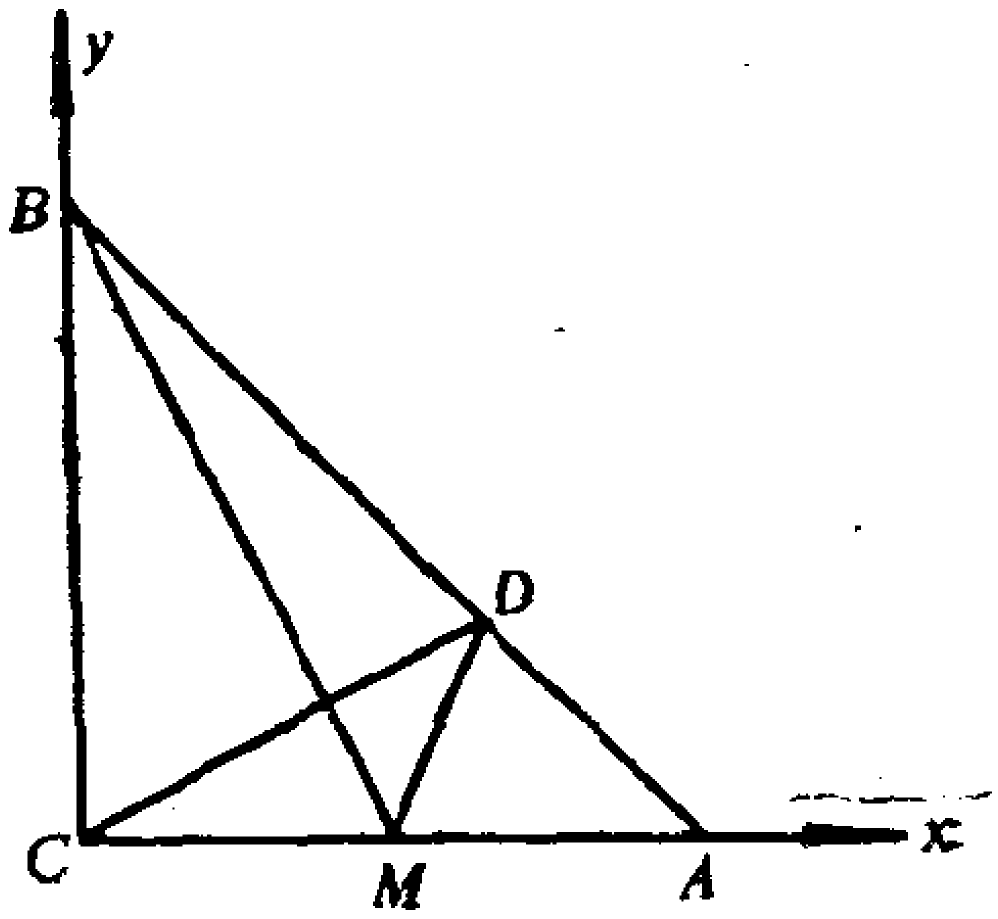


图 10

$$(1,0),\ (0,c),\ (b,c),\ (b+1,\ c).$$

$BC$ 的斜率为$\frac{c}{b}$，而$CF\perp BC$，所以$CF$的方程是

$$y+\frac{b}{c}x=0, \tag{13.13}$$

$AD$的方程是

$$cx-by-c=0, \tag{13.14}$$

将 (13.13) 乘以 $b+1$ 后与 (13.14) 相加得

$$y+\left(\frac{b(b+1)}{c}+c\right)x-c=0. \tag{13.15}$$

(13.15)当然过$CF$与$AD$的交点$F$，又$E(0,c)$也在(13.15)上，所以 (13.15) 就是直线$EF$（的方程）.

直线 $BD$ 的方程是

$$cx-c=(b-1)y, \tag{13.16}$$

将 (13.15) 与 (13.16) 相减消去常数项得

$$\frac{b(b+1)}{c}x+by=0, \tag{13.17}$$

由于$b\neq 0$（否则$B$与$E$重合，▱$ABCD$成为矩形），所以

$$\frac{b+1}{c}x+y=0.$$

这是$CP$的方程。$CA$的方程为

$$cx=(b+1)y, \tag{13.18}$$

所以$\angle ACP=90°$。

注 1　在▱$ABCD$为菱形时，$b^2+c^2=1$，所以$\frac{b+1}{c}=\frac{-c}{b-1}$。由方程（13.15）、（13.16）、（13.18）可知这时$BD$、$EF$、$CP$平行。我们可以认为点$P$为无穷远点。结论为$BD\perp CA$，即菱形的两条对角线垂直。

注 2　如果两条直线的交点只是在解题的过程中出现，而不是最终需要得出的结果，我们往往不求出交点的坐标（可省去解方程组的麻烦），用直线束来代替它。例如本例中的$F$。

**例 5**　设$M$是等腰直角三角形$ABC$的腰$CA$的中点，自$C$引$BM$的垂线交斜边于$D$。则

$$\angle AMD=\angle BMC$$

**解**　建立坐标系如图10。设$A$、$B$坐标分别为（2，0），（0，2）。则$M$坐标为（1，0），直线$BM$的方程为

$$x+\frac{y}{2}=1, \tag{13.19}$$

$CD$的方程为

$$2y-x=0, \tag{13.20}$$

$AB$的方程为

$$x+y=2, \tag{13.21}$$

（13.21）—（13.20）得

$$2x-y=2,$$

这是$MD$的方程。

$MD$与$BM$的斜率符号相反、绝对值相同，因而倾角分别为$\alpha$与$\pi-\alpha$，从而

$$\angle AMD=\angle BMC=\alpha.$$

注 1　以$CA$为$x$轴便于比较倾角，胜于以$CB$为$x$轴。

注 2　本题用纯几何的方法来解并不很容易(例2、3、4均如此)。凡是仅有直线有关(或有一、二个圆)的几何问题，如果其中涉及的角度、距离均不多，则用解析几何来解往往是方便的。

**例 6**　在四边形$ABCD$中，$AB$与$CD$的垂直平分线相交于$P$，$BC$与$AD$的垂直平分线相交于$Q$，$M$、$N$分别为对角线$AC$、$BD$的中点。求证$PQ\perp MN$。

**解**　$AB$的垂直平分线是（注意第4节（4.5））

$$\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)\left(y_A-y_B\right)+\left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)\left(x_A-x_B\right)=0, \tag{13.22}$$

$CD$的垂直平分线是

$$\left(y-\frac{y_C+y_D}{2}\right)\left(y_C-y_D\right)+\left(x-\frac{x_C+x_C}{2}\right)\left(x_C-x_D\right)=0, \tag{13.23}$$

两式相加得

$$y(y_A+y_C-y_B-y_D)+x(x_A-x_C-x_B-x_D)$$
$$-\frac{1}{2}(y_A^2+y_C^2-y_B^2-y_D^2+x_A^2+x_C^2-x_B^2-x_D^2)=0. \tag{13.24}$$

这是过$P$的直线。由于对称性（在（13.24）中将$B$与$D$互

换，(13.24) 仍保持不变)，这也是过$Q$的直线. 因而就是直线$PQ$。

$M$点坐标为$\left(\frac{x_A+x_C}{2},\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)$，$N$点坐标为$\left(\frac{x_B+x_D}{2},\ \frac{y_B+y_D}{2}\right)$，且坐标差为

$$x_M-x_N=\frac{x_A+x_C-x_B-x_D}{2}, \tag{13.25}$$

$$y_M-y_N=\frac{y_A+y_C-y_B-y_D}{2}. \tag{13.26}$$

与 (13.24) 比较即知$PQ\perp MN$。

**注** 为什么将 (13.22) 与 (13.23) 相加? 因为我们容易算得 (13.25)、(13.26)，从而可以知道 (13.24) 的"头"应该是什么，然后再由 (13.22)、(13.23) 把它凑出来。所以解析几何往往是知道答案，设法去凑. 这比平面几何纯粹用脑子去想要容易得多.

# 14 共点线与共线点

三点（或更多个点）共线、三线（或更多条线）共点的问题用解析几何来解也是很方便的。

**例 1** 四边形中，每双对边的中点连线及两对角线的中点连线共点。

**解** 设四个顶点为$A$、$B$、$C$、$D$，$AB$、$BC$、$CD$、$DA$、$AC$、

$BD$的中点分别为$E$、$F$、$G$、$H$、$I$、$J$。则$E$、$F$、$G$、$H$、$I$、$J$的坐标为分别

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\ \frac{y_A+y_B}{2}\right),\ \left(\frac{x_B+x_C}{2},\ \frac{y_B+y_C}{2}\right),$$

$$\left(\frac{x_C+x_D}{2},\ \frac{y_C+y_D}{2}\right),\ \left(\frac{x_D+x_A}{2},\ \frac{y_D+y_A}{2}\right),$$

$$\left(\frac{x_A+x_C}{2},\ \frac{y_A+y_C}{2}\right),\ \left(\frac{x_B+x_D}{2},\ \frac{y_B+y_D}{2}\right).$$

线段$EG$、$FH$、$IJ$的中点都是

$$K\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},\ \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right),$$

因此这三条线段相交于同一点$K$。

**例 2** 证明$\triangle ABC$的重心$G$、外心$O$、垂心$H$共线，并且$OG:GH=1:2$。

**证** 以外心$O$为坐标原点，设外接圆的方程为

$$x^2+y^2=1,$$

顶点$A$、$B$、$C$的坐标分别为

$$(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ (\cos\beta,\ \sin\beta),\ (\cos\gamma,\ \sin\gamma)$$

其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$分别为射线$OA$、$OB$、$OC$与$x$轴正向所成的角。

重心$G$的坐标为

$$\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3},\ \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right),$$

因此点

$$H'(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

在直线$OG$上，并且

$$OG:GH'=1:2$$

由于$BC$的斜率为$\dfrac{\cos\gamma-\cos\beta}{\sin\gamma-\sin\beta}$，$AH'$的斜率为

$\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\beta+\sin\gamma}$,

$(\cos\beta+\cos\gamma)(\cos\gamma-\cos\beta)+(\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\gamma-\sin\beta)=0$，所以$AH'\perp BC$。

同理$BH'\perp CA$。$H'$就是$\triangle ABC$的垂心$H$。这就表明$O$、$G$、$H$共线，并且$OG:GH=1:2$。

直线$GH$通常称为欧拉线。

注1　在仅有一个圆时，通常以圆心为坐标原点。

注2　我们并不假定坐标轴通过三角形的顶点（例如点$A$）。这样，三个顶点的地位是完全“平等”的，我们可以利用“同理”的手段，以收事半功倍之效。

注3　在例2中，我们不是由$\triangle ABC$的高的方程去确定$H$点，而是先给出一个点$H'$的坐标，验证它在两条高上。如果所要证明的结论越多，即未知点所应具备的性质越多，那么在解析几何中，这未知点就越容易确定，即根据一部分性质确定这点，再证明它满足其它性质。本例中即是根据$H$在$OG$上，并且$OG:GH=1:2$定出一点$H'$，再证明$H'$就是垂心$H$。

注4　基于上面的理由，同一法在解析几何常常运用。

注5　例1也是先给出$K$点坐标，证明每条线段($EG$、$FH$、$IJ$)都过$K$点。

证明三线共点的另一种方法是设法将第三条直线表为前两条直线的线性组合，也就是证明第三条直线在前两条直线所形成的直线束中。

**例3**　证明三条直线

$$(b-c)x+(c-a)y+a-b=0, \qquad (14.1)$$

$$(c-a)x+(a-b)y+b-c=0, \qquad (14.2)$$

$$(a-b)x+(b-c)y+c-a=0, \tag{14.3}$$

交于一点。

**证** 将（14.1）、（14.2）相加即得

$$(b-a)x+(c-b)y+a-c=0, \tag{14.3'}$$

这实际上就是（14.3）（仅差一个符号），所以三条直线共点。

注 如果能看出点（1，1）在三条直线上，解答更简洁而且还给出了交点的坐标。

下面的例4，用纯几何的方法来解颇不容易。我们有意多选一些“难题”，非如此不足以显示解析几何的威力。

**例 4** 设$AD$为$\angle BAC$的角平分线，如果射线$AL$与$AL'$关于$AD$对称，那么$AL$与$AL'$称为（关于$\angle BAC$的）等角线。证明在$\triangle ABC$中，如果$AL$、$BM$、$CN$三条射线交于一点$P$，则它们（分别关于$\angle BAC$，$\angle CBA$，$\angle ACB$）的等角线$AL'$、$BM'$、$CN'$也交于一点。

**证** 我们知道用直线

$$ax+by+c=0$$

的法线式

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

可以算出一点$(x_0, y_0)$到这条直线的距离

$$d_0=\pm\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

其中当$(x_0, y_0)$与原点在这直线同侧时，取负号。当$(x_0, y_0)$与原点在这直线异侧时，取正号。

现在设原点取在$\triangle ABC$内部，$BC$、$CA$、$AB$的法线式分别为

$$\frac{a_i x+b_i y+c_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}=0,\quad i=1.2.3. \tag{14.4}$$

将 (14.4)式左边记为$-d_i(i=1,2,3)$. 由于直线$AL$过$CA$、$AB$的交点$A$及$P$点，$P$到$CA$、$AB$的距离之比是 $\sin\alpha:\sin\beta$ 其中$\alpha=\angle PAC,\beta=\angle BAP$. 所以将$d_2=0$乘以$\sin\beta,d_3=0$乘以 $\sin\alpha$ 再相加得$AL$的方程为

$$(\sin\beta)\cdot d_2-(\sin\alpha)\cdot d_3=0, \tag{14.5}$$

同样$BM$、$CN$的方程分别为

$$(\sin\delta)d_3-(\sin\gamma)d_1=0, \tag{14.6}$$

$$(\sin\tau)d_1-(\sin\theta)d_2=0, \tag{14.7}$$

其中$\delta=\angle CBP$, $\gamma=\angle PBA$, $\theta=\angle PCB$, $\tau=\angle ACP$.

于是$AL'$、$AM'$、$AN'$的方程分别为

$$(\sin\alpha)d_2-(\sin\beta)d_3=0, \tag{14.8}$$

$$(\sin\gamma)d_3-(\sin\delta)d_1=0, \tag{14.9}$$

$$(\sin\theta)d_1-(\sin\tau)d_2=0, \tag{14.10}$$

设$P$到$BC$、$CA$、$AB$的距离分别为$d_{P1}$、$d_{P2}$、$d_{P3}$，则由 (14.5) (14.6) (14.7)，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\tau}=\frac{d_{P2}}{d_{P3}}\cdot\frac{d_{P3}}{d_{P1}}\cdot\frac{d_{P1}}{d_{P2}}=1, \tag{14.11}$$

将 (14.8) 乘$\sin\gamma$与 (14.9) 乘$\sin\beta$相加（消去$d_3$）得

$$(\sin\alpha\sin\gamma)d_1-(\sin\beta\sin\delta)d_2=0.$$

由于 (14.11)，上式就是 (14.10)，所以$AL'$、$BM'$、$CN'$三线共点. 这点通常称为点$P$的等向共轭点.

内心、傍心的等角共轭点就是它自身. 外心与垂心互为等角共轭点.

# 15. 行列式的应用

行列式是一种有用的工具．

**例 1** 求直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{15.1}$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{15.2}$$

的交点．

**解** 如果$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2$不等于0，那么交点为

$$x=\frac{-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{15.3}$$

(15.3) 可以作为公式记忆．

如果$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，直线(15.1)、(15.2)平行，没有交点．

类似地，如果有方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases}$$

则

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{15.4}$$

这里约定一个比的分母为0时，分子自动为0．

注　如果使用所谓齐次坐标，则点$(x, y)$可写成$(x, y, 1)$或$(\lambda x, \lambda y, \lambda)$，这里$\lambda$是任一个不为0的实数。而$(x, y, 0)$则表示无穷远点，这点在所有斜率为$y/x$的平行线上。(15.4)与(15.3)一样，给出了两条直线的交点，只不过前者给出的是交点的齐次坐标

$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right), \tag{15.5}$$

后者给出的是普通坐标。当$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$时，两条直线相交于无穷远点$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, 0\right)$。

行列式的另一个重要应用是计算面积。

$\triangle ABC$的面积可以用三阶行列式表示成

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}. \tag{15.6}$$

当$A$、$B$、$C$呈逆时针顺序时，行列式的值为正，我们说$\triangle ABC$的面积为正。当$A$、$B$、$C$呈顺时针顺序时，行列式的值为负，我们说$\triangle ABC$的面积为负。

**例 2**　求三条直线

$$a_i x + b_i y + c_i = 0,\quad i = 1, 2, 3 \tag{15.7}$$

所围成的$\triangle ABC$的面积。

**解**　设行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad A_2=\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix},\quad A_3=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$B_1=\begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad B_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad B_3=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\quad C_2=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\quad C_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

分别为$a_1$、$a_2$、$a_3$、$b_1$、$b_2$、$b_3$、$c_1$、$c_2$、$c_3$的代数余子式。

由行列式的乘法，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \Delta & & \\ & \Delta & \\ & & \Delta \end{vmatrix}=\Delta^3.$$

所以

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\Delta^2.$$

顶点$A$、$B$、$C$的坐标可由(15.3)算出，所以由(15.6)

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} C_1 & A_1 & B_1 \\ C_2 & A_2 & B_2 \\ C_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}=\frac{\Delta^2}{2C_1C_2C_3}$$

$$=\frac{\Delta^2}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}. \qquad (15.8)$$

**例 3** 求平行直线$a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_1x+b_1y+d_1$

$=0$ 与平行直线 $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_2x+b_2y+d_2=0$ 所围成的平行四边形 $ABCD$ 的面积。

**解** 由 (15.3),

$$x_A\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\qquad y_A\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix},$$

$$x_B\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix},\qquad y_B\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ d_2 & a_2\end{vmatrix},$$

$$x_D\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\qquad y_D\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}d_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}.$$

所以由 (15.6)

$$S_{\square ABCD}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^3}\left\|\begin{matrix}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ d_2 & a_2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}d_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2}\left\|\begin{matrix}1 & \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}\\ 1 & \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ d_2 & a_2\end{vmatrix}\\ 1 & \begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}d_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & * & *\\ 0 & \begin{vmatrix}b_1 & 0\\ b_2 & d_2-c_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & a_1\\ d_2-c_2 & a_2\end{vmatrix}\\ 0 & \begin{vmatrix}b_1 & d_1-c_1\\ b_2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}d_1-c_1 & a_1\\ 0 & a_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}\cdot\begin{vmatrix} b_1(d_2-c_2) & -a_1(d_2-c_2) \\ -b_2(d_1-c_1) & a_2(d_1-c_1) \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{(d_1-c_1)(d_2-c_2)}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{15.9}$$

注　如果利用向量的向量积算出

$$\sin A=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

再利用法线式算出平行四边形的两条高为

$$\frac{d_i-c_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}},\quad i=1,2.$$

也可导出公式（15.9）

当且仅当$A$、$B$、$C$三点共线时，$\triangle ABC$的面积为0（这时三角形已经“退化”为线段）所以$A$、$B$、$C$三点共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}=0, \tag{15.10}$$

而三条直线

$$a_ix+b_iy+c_i=0,\quad i=1,2,3$$

共点的充分必要条件是行列式，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0. \tag{15.11}$$

**例 4**　设$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，试证

$$x\sin^2\alpha+y\operatorname{ctg}\alpha+1=0,$$

$$x\sin^2\beta+y\operatorname{ctg}\beta+1=0,$$
$$x\sin^2\gamma+y\operatorname{ctg}\gamma+1=0,$$

这三条直线共点。

**解**
$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \operatorname{ctg}\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \operatorname{ctg}\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \operatorname{ctg}\gamma & 1 \end{vmatrix}\times\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$=\begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin^3\beta & \cos\beta & \sin\beta \\ \sin^3\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$$
$$=\Sigma\sin^3\alpha(\cos\beta\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma)$$
$$=\Sigma\sin^2\alpha\sin(\gamma-\beta)$$
$$=\Sigma\sin^2\alpha\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)$$
$$=\frac{1}{2}\Sigma\sin^2\alpha(\cos2\beta-\cos2\gamma)$$
$$=\Sigma\sin^2\alpha(\sin^2\gamma-\sin^2\beta)=0,$$

所以三条直线交于一点。

# 16 面　　积

第 15 节给出的面积公式是很有用的

**例 1**　$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是在同一平面内的两个三角形，$AA'//BB'//CC'$。求证

$$3(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'})=S_{\triangle AB'C'}$$
$$+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}.$$

这里的面积都是有向面积，即当 $A$、$B$、$C$ 呈逆时针顺序时，

面积为正，否则面积为负。

**解** 以平行于 $AA'$ 的直线为 $x$ 轴，则 $A$ 与 $A'$，$B$ 与 $B'$，$C$ 与 $C'$ 的纵坐标相同。所以

$$
\begin{aligned}
&2(S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}\\
&+S_{\triangle C'AB})=2(S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle A'BC'}+S_{\triangle A'B'C}+S_{\triangle A'BC}\\
&+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle ABC'})\\
&=\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_{B'} & y_B\\ 1 & x_{C'} & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_{A'} & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_{C'} & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_{A'} & y_A\\ 1 & x_{B'} & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix}1 & x_{A'} & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_{B'} & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_{C'} & y_C\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}1 & 3x_A+3x_{A'} & y_A\\ 1 & 3x_B+3x_{B'} & y_B\\ 1 & 3x_C+3x_{C'} & y_C\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}1 & 3x_A & y_A\\ 1 & 3x_B & y_B\\ 1 & 3x_C & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3x_{A'} & y_A\\ 1 & 3x_{B'} & y_B\\ 1 & 3x_{C'} & y_C\end{vmatrix}\\
&=2(3S_{\triangle ABC}+3S_{\triangle A'B'C'}).
\end{aligned}
$$

这就是所要证明的结论。

**例 2.** 点 $P$ 在 $\square ABCD$ 的对角线 $AC$ 的延长线上。过 $P$ 作两条直线。第一条交 $AB$ 于 $M$、交 $BC$ 于 $E$。第二条交 $CA$ 于 $N$，交 $CD$ 于 $F$。求证

$$\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle AMN}}=-\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle CEF}}. \tag{16.1}$$

**解** 设 $P$ 为原点，直线 $AC$ 为 $x$ 轴。$A$、$C$ 的坐标分别为 $(a,0)$，$(c,0)$。又设过 $A$ 点的直线 $AB$ 为

$$a_1x+b_1y=a_1a, \tag{16.2}$$

直线 $DA$ 为

$$a_2x+b_2y=a_2a, \tag{16.3}$$

则 $CD$ 的方程为

$$a_1x+b_1y=a_1c, \tag{16.4}$$

$BC$ 的方程为

$$a_2x+b_2y=a_2c, \tag{16.5}$$

设直线 $PM$、$PN$ 的方程分别为

$$y=kx, \tag{16.6}$$

$$y=hx, \tag{16.7}$$

由第 15 节公式（15.6），

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle PMN}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & x_M & y_M\\ 1 & x_N & y_N\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & x_M & y_M\\ 1 & x_N & y_N\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x_M & y_M\\ x_N & y_N\end{vmatrix}-a(y_N-y_M)}{\begin{vmatrix}x_M & y_M\\ x_N & y_N\end{vmatrix}}$$

$$=1-\frac{a(y_N-y_M)}{\begin{vmatrix}x_M & kx_M\\ x_N & hx_N\end{vmatrix}}=1-\frac{a(hx_N-kx_M)}{(h-k)x_Nx_M}$$

$$=1-\frac{a}{h-k}\left(\frac{h}{x_M}-\frac{k}{x_N}\right),$$

而由（16.2）（16.6）

$$\frac{h}{x_M}=\frac{h(a_1+b_1k)}{a_1a},$$

由（16.3）、（16.7），

$$\frac{k}{x_N}=\frac{k(a_2+b_2h)}{a_2a},$$

所以

$$a\left(\frac{h}{x_M}-\frac{k}{x_N}\right)=\frac{h(a_1+b_1k)}{a_1}-\frac{k(a_2+b_2h)}{a_2}$$

$$=h-k+hk\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right), \tag{16.8}$$

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle PMN}}=\frac{hk}{k-h}\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right). \tag{16.9}$$

同理

$$-\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle PEF}}=\frac{hk}{k-h}\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right). \tag{16.10}$$

所以（16.1）式成立。

注　由于对称性，将 $a$ 换为 $c$，下标 1 与 2 互换，便可由（16.8）得出一个相应的表达式，从而（16.10）成立。这可以省去不少的计算。

正是为了保持这种对称性，在例 1 中我们并不要求 $x$ 轴通过 $A$、$B$、$C$、$A'$、$B'$、$C'$ 中任一点。如果选择其中一点为原点或以 $AA'$、$BB'$、$CC'$ 中某一条线面 $x$ 轴，反而破坏了对称性，得出的式子形状不很整齐。

**例 3**　$P$、$Q$ 在 $\triangle ABC$ 的 $AB$ 边上，$R$ 在 $AC$ 边上，并且 $P$、$Q$、$R$ 将 $\triangle ABC$ 的周长分为三等分，证明

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}. \tag{11}$$

**证**　以 $A$ 为原点，$AB$ 为 $x$ 轴，建立直角坐标系。设 $\triangle ABC$ 的三边的长分别为 $a$、$b$、$c$。设 $Q$、$P$ 的横坐标分别为 $q$、$p$，则

$$q-p=\frac{1}{3}(a+b+c), \tag{12}$$

$$AR = PQ - AP = q - 2p \tag{13}$$

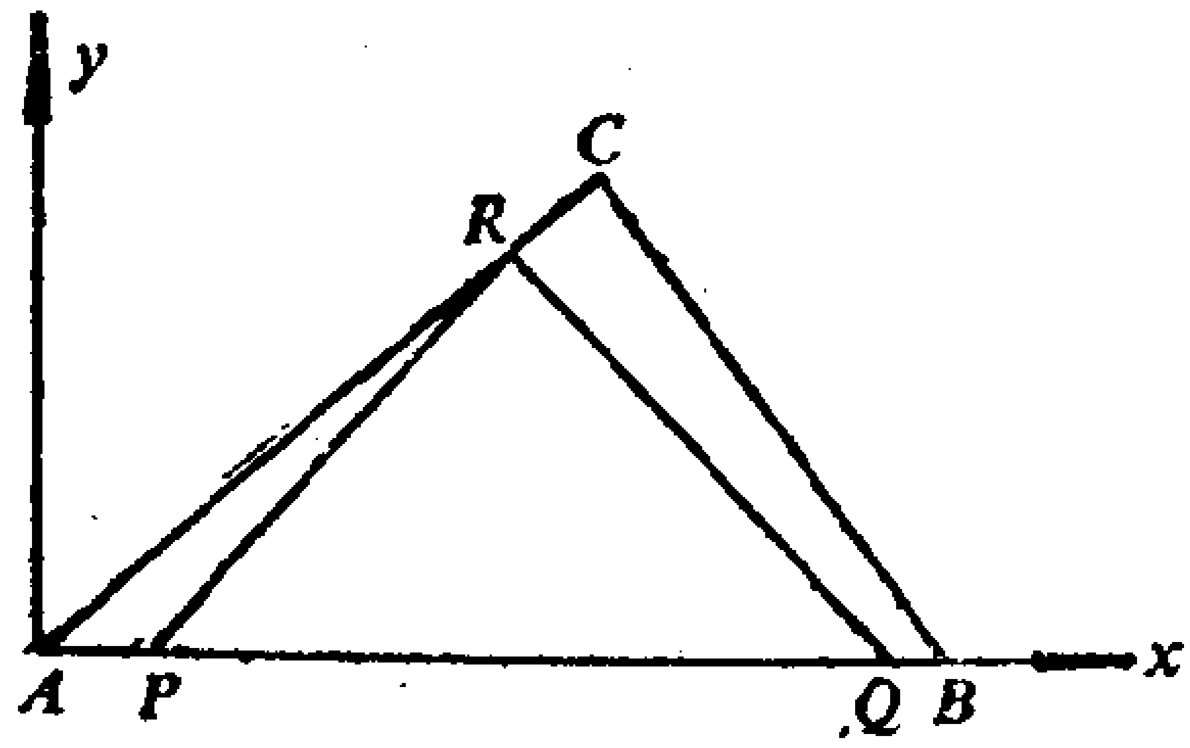


图 13

从而

$$\frac{y_R}{y_C} = \frac{AR}{AC} = \frac{q-2p}{b}, \tag{14}$$

由于

$$2S_{\triangle PQR} = \begin{vmatrix} 1 & p & 0 \\ 1 & q & 0 \\ 1 & x_R & y_R \end{vmatrix} = y_R(q-p),$$

$$2S_{\triangle ABC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_B & 0 \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = x_B y_C,$$

所以

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{y_R(q-p)}{y_C x_B} = \frac{(q-p)(q-2p)}{bc}.$$

注意

$$p = q - \frac{1}{3}(a+b+c) < c - \frac{1}{3}(a+b+c),$$

所以

$$q - 2p > \frac{2}{3}(a+b+c) - c > \frac{2}{3}(a+b+c) - \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$=\frac{1}{6}(a+b+c),$$

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}\times\frac{(a+b+c)^2}{4bc}>\frac{2}{9}\times\frac{(b+c)^2}{4bc}>\frac{2}{9},$$

注 1　2/9 是最佳值。取 $b=c$，$Q$ 与 $B$ 重合，则在 $a\to 0$ 时，$p\to\left(\frac{1}{3}\right)q$，面积之比 $\to 2/9$。

注 2　选择 $A$ 为原点，$AB$ 为 $x$ 轴，可以使计算面积的行列式中产生许多 0，便于化简。

注 3　利用长度之比 $AR/AC$ 来定 $R$ 点坐标的方法也值得注意。其他方法均难以确定 $R$ 的坐标。

# 17　斜　坐　标

直线的交角未必都是直角。因此，有时采用斜坐标（两个坐标轴的夹角不等于 90°）。

在斜坐标中，直线的方程仍然是一次式，并且定比分点的公式，两线平行的条件等均与直角坐标系相同，所以在证线段平行或成比例等结论时颇为方便。直线的截距式、两点式也与直角坐标系完全相同。但距离公式、两线垂直的条件均需修改。所以在证线段垂直及计算距离时不如用直角坐标系好。

在证数点共线或数线共点时，斜坐标也是很有用的。

**例 1**　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 是固定角，$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ 是定值。证明 $BC$ 通过一个定点。

**解** 以$A$为原点，$AB$、$AC$分别为$x$轴、$y$轴(图14)。设$AB=a$，$AC=b$，则由截距式，$BC$方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{17.4}$$

已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$为定值，设为$\frac{1}{k}$则直线（17.4）过定点（$k,k$）。

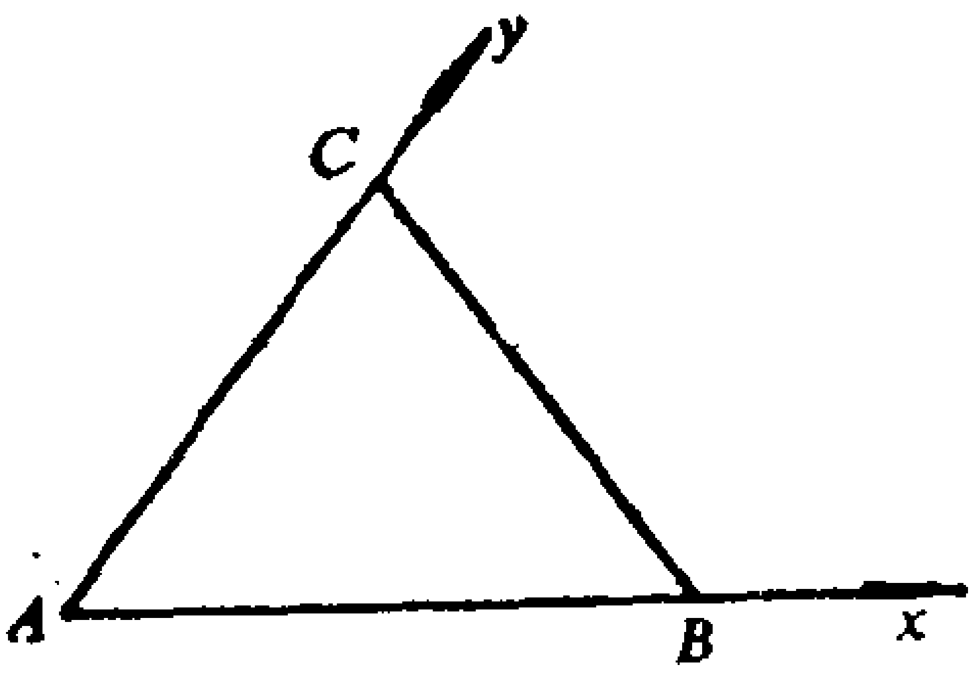


图 14

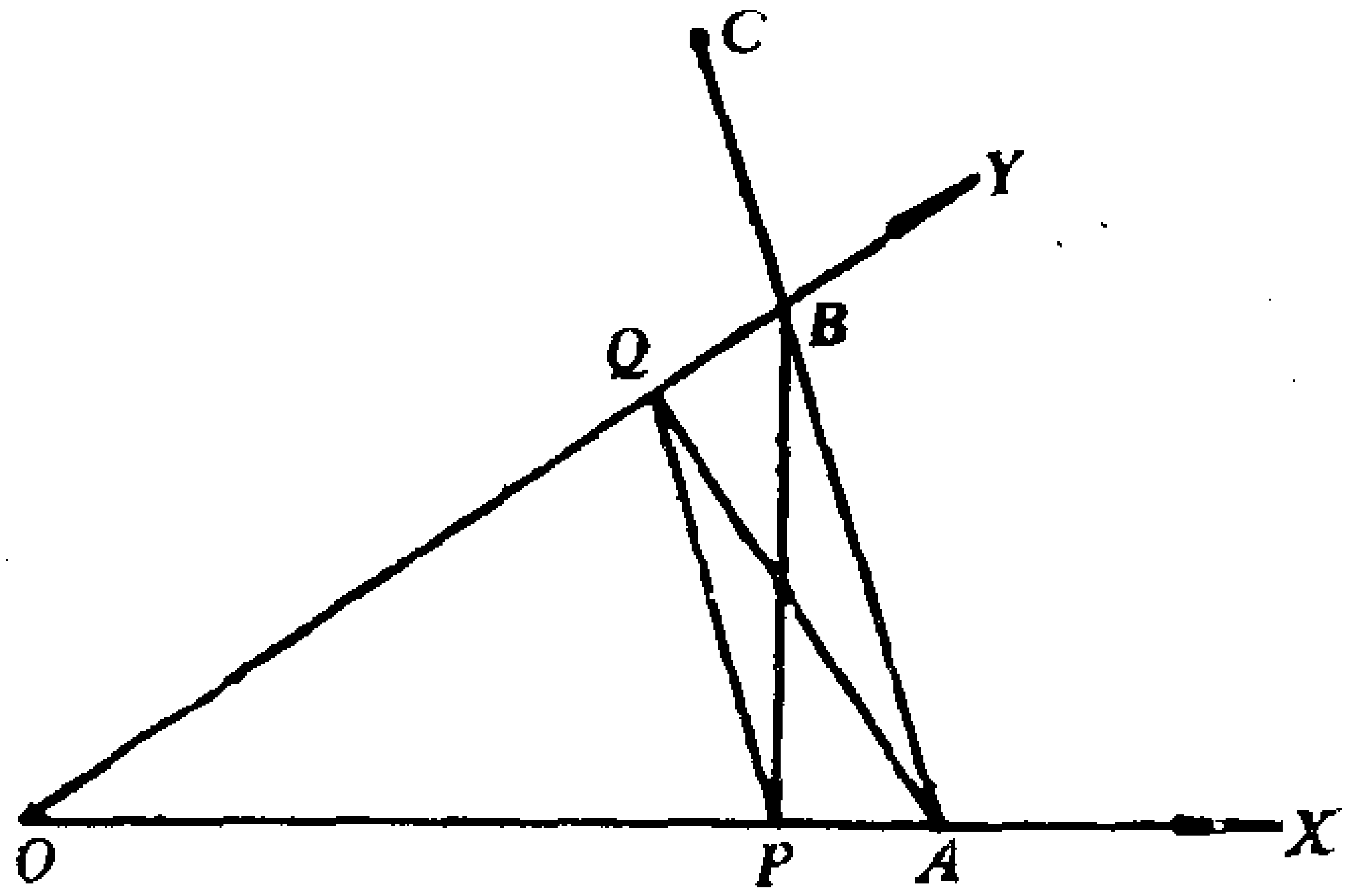


图 15

**例 2** 已知定直线$OX$、$OY$及定点$C$，过$C$任作一直线交$OX$、$OY$于$A$、$B$。作$BP\perp OX$，垂足为$P$。作$AQ\perp OY$，垂足为$Q$。求证$PQ$过一定点。

**解** 建立斜坐标如图15所示。设$\angle XOY=\omega$，$C$为($h,k$)，$A(a,0)$，$B(0,b)$。则$AB$方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

这直线过$C$，因此有

$$\frac{h}{a}+\frac{k}{b}=1. \tag{17.2}$$

$P$、$Q$坐标分别为$P(b\cos\omega,0)$，$Q(0,a\cos\omega)$，$PQ$方程为

$$\frac{x}{b\cos\omega}+\frac{y}{a\cos\omega}=1. \qquad (17.3)$$

由于（17.2），直线（17.3）过点（$k\cos\omega$，$h\cos\omega$）。

**例 3** 延长等腰三角形 $ABC$ 的腰 $AB$ 至 $E$、$AC$ 至 $F$，使 $BE\times CF=AB^2$。求证 $EF$ 过定点。

**解** 设 $AB=AC=a$，$AE=h$，$AF=k$。以 $AB$、$AC$ 分别为 $x$、$y$ 轴。由已知

$$(h-a)(k-a)=a^2,$$

即

$$\frac{a}{h}+\frac{a}{k}=1,$$

所以直线 $EF\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1\right)$ 过定点（$a,a$）。

**例 4** $A$、$B$、$C$ 在直线 $l$ 上，$A'$、$B'$、$C'$ 在直线 $l'$ 上。若 $AB'//A'B$，$AC'//A'C$。求证 $BC'//B'C$。

解 若 $l$ 与 $l'$ 相交于 $O$（图 16）。我们以 $O$ 为原点，$l$、$l'$ 分别为 $x$、$y$ 轴。设各点坐标为 $A(a,0)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，$A'(0,a')$，$B'(0,b')$，$C'(0,c')$，则直线 $AB'$ 为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b'}=1,$$

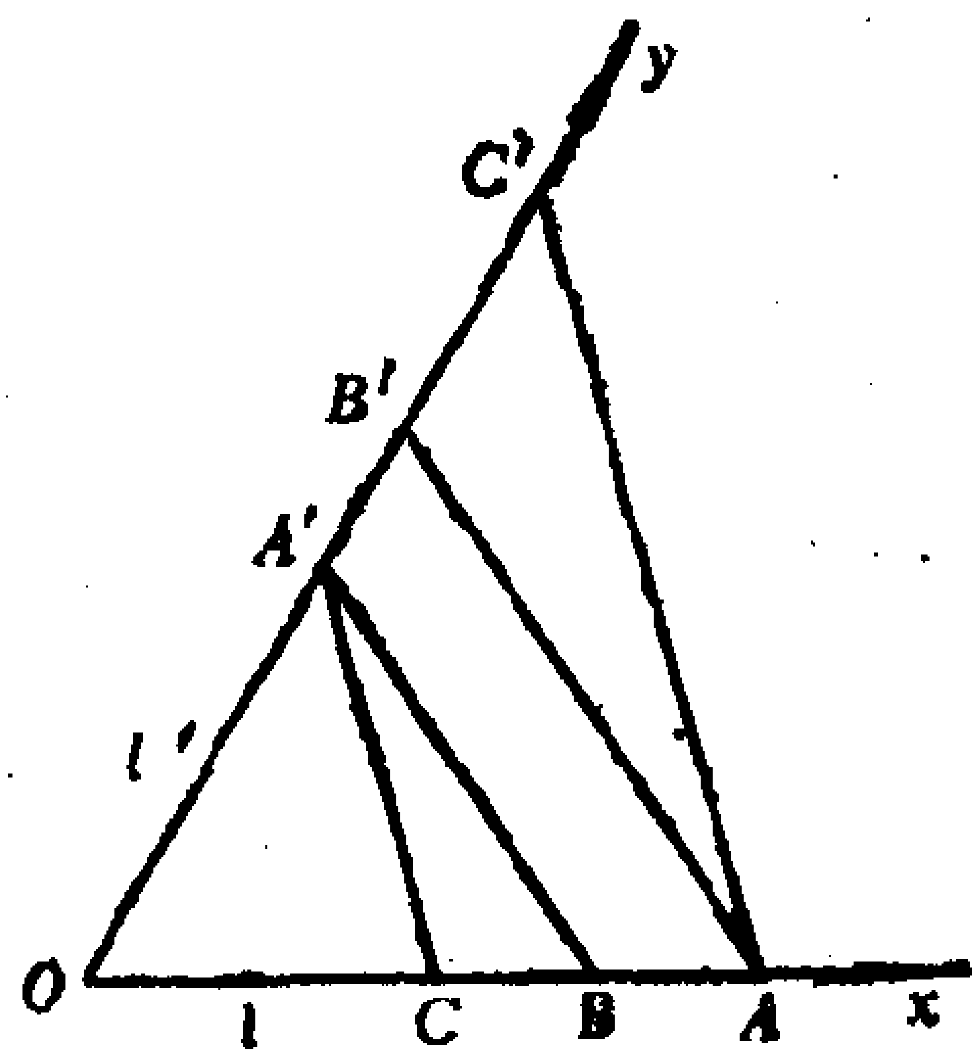

图 16

直线 $A'B$ 为

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a'}=1.$$

这两条直线平行，所以

$$\frac{a}{b}=\frac{b'}{a'}, \tag{17.5}$$

同理

$$\frac{a}{c}=\frac{c'}{a'}, \tag{17.6}$$

由（17.5）、（17.6）得

$$\frac{b}{c}=\frac{c'}{b'},$$

这表明直线 $BC'$：

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{c'}=1,$$

与直线 $B'C$：

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{b'}=1,$$

平行

若 $l//l'$ 证明甚易. （略）

**例 5** （Menelaus 定理）设$X$、$Y$、$Z$分别为$\triangle ABC$的三边$BC$、$CA$、$AB$或其延长线上的点（图17），则它们共线的充分必要条件为

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1. \tag{17.7}$$

**解** 首先假定$X$、$Y$、$Z$共线. 以$BC$、$BA$分别为$x$、$y$轴，设$C$、$A$坐标分别为（1,0），（0,1）. $X$、$Z$的坐标分别为（$a$,0），（0,$b$），则直线$XZ$与$AC$的方程分别为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

$$x+y=1,$$

由这两方程联立可得 $x=\dfrac{a(1-b)}{a-b}$，它就是 $XZ$ 与 $AC$ 的交点 $Y$ 的横坐标。由于

$$\frac{YC}{YA}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}=1-\frac{a-b}{a(1-b)}=\frac{b(1-a)}{a(1-b)},$$

所以

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{b(1-a)}{a(1-b)}\cdot\frac{1-b}{-b}=1.$$

反之，若（17.7）式成立。我们采用同一法，设 $ZX$ 交 $AC$ 于 $Y'$，则根据上面所证

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{Y'C}{Y'A}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1,$$

所以 $\dfrac{Y'C}{Y'A}=\dfrac{YC}{YA}$，从而 $Y'$ 与 $Y$ 重合，即 $X$、$Y$、$Z$ 共线。

注 1　仅涉及点线从属关系时，可以自由地选择两个轴上的单位，例如分别以 $BC$、$BA$ 为 $x$、$y$ 轴上的单位。这样可使计算简化。

注 2　利用同一法及唯一性（两条直线的交点唯一等等），常常可由充分性（必要性）导出必要性（充分性）。所以在解析几何中，往往只证明充分性或必要性中的一个。

**例 6**　设 $\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$AC=16$．$D$ 是 $BC$ 的中点，$E$、$F$ 分别在边 $AC$、$AB$ 上，直线 $EF$ 与 $AD$ 相交于 $M$。如果 $AE=2\cdot AF$，求比值 $EM/MF$。

**解**　以 $A$ 为原点，$AB$、$AC$ 为坐标轴．$B$、$C$ 坐标分别

为 (12,0)，(0,16)。则$D$点坐标为 (6,8)。设 $AF=z$,

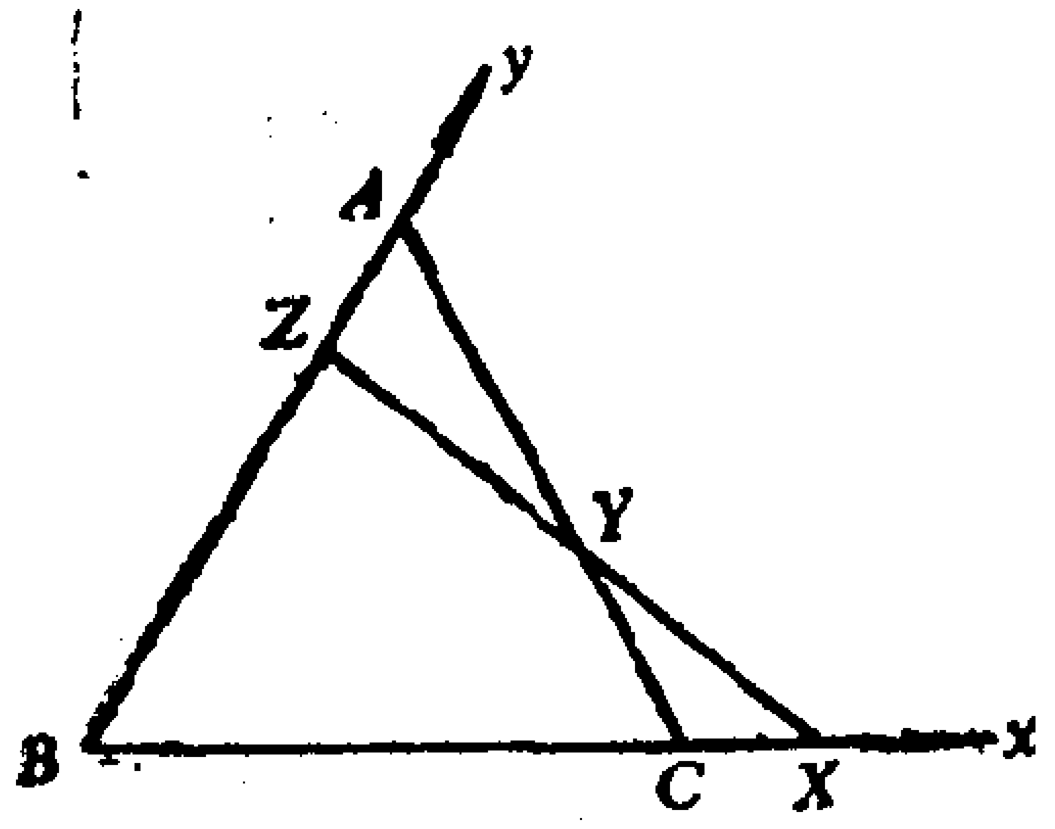


图 17

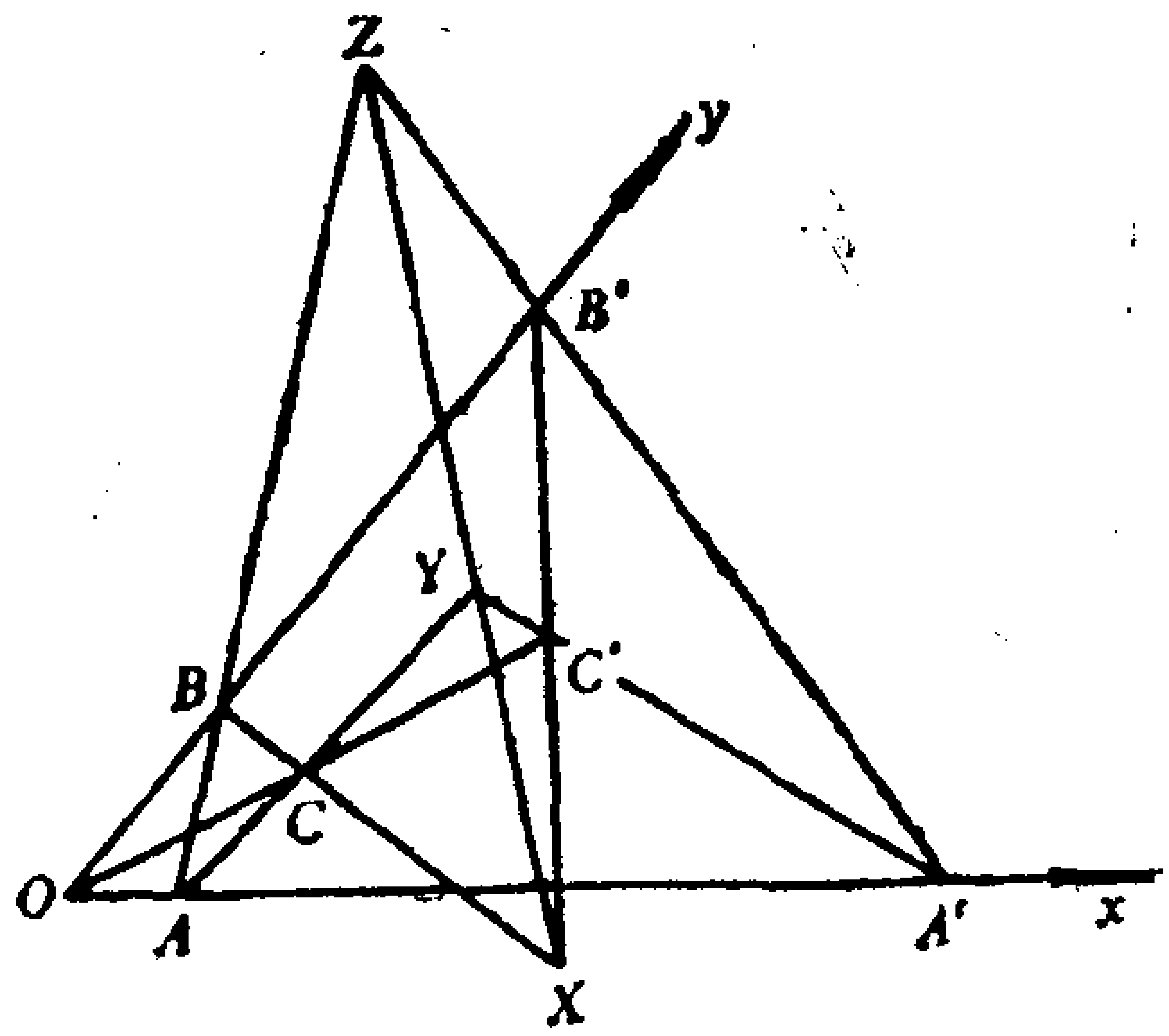


图 18

则 $AE=2z$，$E$、$F$ 坐标分别为 $(0,2z)$，$(z,0)$。设 $EM/MF=\lambda/\mu$，$\lambda+\mu=1$，则$M$点坐标为 $(\lambda z,2\mu z)$。由于 $M$ 在直线 $AD$ 上，所以，

$$\frac{\lambda z}{6}=\frac{2\mu z}{8},$$

即

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{2}.$$

**例 7** (Desarques 定理) 设 $AA'$、$BB'$、$CC'$ 交于 $O$，$BC$ 与 $B'C'$、$CA$ 与 $C'A'$、$AB$ 与 $A'B'$ 分别交于$X$、$Y$、$Z$，则$X$、$Y$、Z共线 (图 18)。

**解** 建立坐标系如图 18 所示。设 $A$、$A'$。$B$、$B'$ 坐标分别为 (1,0)，$(a,0)$，(0,1)，$(0,b)$。则 $AB$、$A'B'$ 方程分别为

$$x+y=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

它们的交点$Z$为

$$\left(\frac{a(1-b)}{a-b},\ \frac{b(1-a)}{b-a}\right),$$

设$C$、$C'$点坐标分别为$(x_c, y_c)$，$(kx_c, ky_c)$，则$BC$、$B'C'$方程分别为

$$(y_c-1)x-x_c(y-1)=0 \tag{17.8}$$

$$(ky_c-b)x-kx_c(y-b)=0 \tag{17.9}$$

点$X$在（17.8）、（17.9）构成的直线束上。问题是如何确定这线束中的一条直线使得它通过$Z$点。为此，我们计算（17.8）、（17.9）左端在$Z$点的值：

$$(y_c-1)\cdot\frac{a(1-b)}{a-b}-x_c\left(\frac{b(1-a)}{b-a}-1\right)$$

$$=\frac{a(1-b)}{a-b}(x_c+y_c-1),$$

$$(ky_c-b)\cdot\frac{a(1-b)}{a-b}-kx_c\left(\frac{b(1-a)}{b-a}-1\right)$$

$$=\frac{ab(1-b)}{a-b}\left(\frac{kx_c}{a}+\frac{ky_c}{b}-1\right),$$

于是$Z$点坐标满足

$$\frac{(y_c-1)x-x_c(y-1)}{(ky_c-b)x-kx_c(y-b)}=\frac{x_c+y_c-1}{b\left(\frac{kx_c}{a}+\frac{ky_c}{b}-1\right)}.$$

换句话说直线$XZ$的方程为

$$(y_c-1)x-x_c(y-1)$$

$$=n\left[\left(\frac{ky_c}{b}-1\right)x-\frac{kx_c}{b}y+kx_c\right],\qquad(17.10)$$

其中

$$n=\frac{x_c+y_c-1}{\dfrac{kx_c}{a}+\dfrac{ky_c}{b}-1}.\qquad(17.11)$$

同样 $AC$、$A'C'$ 的方程分别为

$$y_c(x-1)-(x_c-1)y=0,\qquad(17.8')$$

$$ky_c(x-a)-(kx_c-a)y=0,\qquad(17.9')$$

而 $YZ$ 的方程为

$$y_c(x-1)-(x_c-1)y$$

$$=n\left[\frac{ky_c}{a}\cdot x-\left(\frac{kx_c}{a}-1\right)y-ky_c\right],\qquad(17.10')$$

这些均只需在相应的方程（17.8）、（17.9）、（17.10）中将字母 $x$ 与 $y$，$a$ 与 $b$ 互换即可得出。

将（17.10）乘 $y_c$（17.10′）乘 $x_c$ 然后相加，这时常数项显然为 0，而 $x$ 的系数为

$$y_c\left[(y_c-1)-n\left(\frac{ky_c}{b}-1\right)+x_c-n\cdot\frac{kx_c}{a}\right]$$

$$=y_c\left[(x_c+y_c-1)-n\left(\frac{kx_c}{a}+\frac{ky_c}{b}-1\right)\right]=0,$$

（我们利用了（17.11））$y$ 的系数为

$$x_c\left[-y_c+n\cdot\frac{ky_c}{b}-(x_c-1)+n\left(\frac{kx_c}{a}-1\right)\right]$$

$$=x_c\left[-(x_c+y_c-1)+n\left(\frac{kx_c}{a}+\frac{ky_c}{b}-1\right)\right]=0.$$

所以得出一个恒等式 $0=0$，这表明（17.10）与（17.10′）

其实是同一条直线，即$X$、$Y$、$Z$共线。

直角坐标需要以两条互相垂直的直线为坐标轴。如果已知的两条直线不成直角，要使其地位平等，若不另选两条（或一条）直线组成直角坐标，就需要采用斜坐标。

如果要使三角形的三条边地位均平等，就需要采用重心坐标，将三条边都作为坐标轴。限于篇幅。本书不予讨论。

## 18 圆的方程

以点（$c$, $d$）为心，$R$为半径的圆的方程是

$$(x-c)^2+(y-d)^2=R^2, \tag{18.1}$$

或展开成

$$x^2+y^2-2cx-2dy+c^2+d^2-R^2=0, \tag{18.1'}$$

所以一条二次曲线为圆的充分必要条件是方程中没有$xy$项并且$x^2$与$y^2$的系数相等。

**例 1** 已知$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$求以线段$AB$为直径的圆的方程。

**解** 设点$M(x,y)$为圆上任一点，则$MA\perp MB$，所以由第4节（4.5），

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0,$$

这就是所求的圆的方程。

注若先求圆心、半径，再用（18.1）或(18.1′）定出方程，不及上面的解法简洁。

**例 2** $AB$为$\odot O$的定弦,$C$为圆周上的动点。求$\triangle ABC$的垂心的轨迹。

**解** 设⊙$O$的方程为$x^2+y^2=1$，$A$、$B$、$C$的坐标分别为

$$(\cos\alpha,\sin\alpha),\ (\cos\beta,\sin\beta),\ (\cos\gamma,\sin\gamma)$$

则由第14节例2，垂心$H$的坐标为

$$x=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma, \tag{18.2}$$

$$y=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma. \tag{18.3}$$

由（18.2）、（18.3）消去$\cos\gamma$、$\sin\gamma$得

$$(x-\cos\alpha-\cos\beta)^2+(y-\sin\alpha-\sin\beta)^2=1.$$

这就是所求的轨迹方程，它是一个以（$\cos\alpha+\cos\beta$，$\sin\alpha+\sin\beta$）为心，1为半径的圆。

**例 3** 一圆切$y$轴于（0，4），在轴$x$上截得的线段长为6，求这圆的方程。

**解** 由于这圆与$y$轴相切于（0，4），所以圆心$O$到$x$轴的距离为4，即$O$到一条长为6的弦的距离为4．因此，由勾股定理，圆半径为5．圆心坐标为（±5，4），圆方程为

$$(x\pm5)^2+(y-4)^2=5^2.$$

**例 4** 证明直线$x+y+2=0$，$x-y=4$与圆$x^2+y^2-2x+4y-4=0$所成的两个弓形的面积相等。

**解** 由几何知识可知只要证明圆心（1，−2）到直线$x+y+2=0$与$x-y=4$的距离相等。由法线式易知这两个距离都是$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

**注** 例3与例4都利用了一点几何知识，这往往使解法简单许多。

**例 5** 点$P$到定点$A$、$B$的距离之比为$\dfrac{n}{m}$，求$P$点的轨迹。

**解** 以直线 $AB$ 为 $x$ 轴，设 $A$、$B$ 的坐标分别为 $(a,0)$、$(b,0)$，$P$ 点坐标为 $(x,y)$，则

$$m^2[(x-a)^2+y^2]=n^2[(x-b)^2+y^2]$$

或化为

$$(m^2-n^2)(x^2+y^2)-2(am^2-bn^2)x+m^2a^2-n^2b^2=0$$

这是一个以 $D\left(\dfrac{am^2-bn^2}{m^2-n^2},\ 0\right)$ 为心的圆，这圆与 $x$ 轴相交于点

$$E\left(\frac{ma+nb}{m+n}0,\ \right),\quad F\left(\frac{ma-nb}{m-n},\ 0\right),$$

这两点是线段 $AB$ 的内分点与外分点 $\left(\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{n}{m}\right)$，$D$ 是线段 $EF$ 的中点，$\odot D$ 的半径是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ma-nb}{m-n}-\frac{ma+nb}{m+n}\right)=\frac{mn(a-b)}{m^2-n^2}.$$

这个圆通常称为阿氏（阿波罗尼斯）圆。

**例 6** 求过不在同一直线上的三点 $(x_i,\ y_i)$ $i=1,2,3$，的圆的方程

**解** 设圆的方程为

$$x^2+y^2+cx+dy+f=0, \tag{18.4}$$

则对圆上任一点 $(x,y)$，(18.4) 成立。并且

$$x_i^2+y_i^2+cx_i+dy_i+f=0.$$

因此 $u$、$v$、$w$、$t$ 的方程组

$$(x^2+y^2)\cdot u+x\cdot v+y\cdot w+1\cdot t=0,$$

$$(x_i^2+y_i^2)\cdot u+x_i\cdot v+y_i w+1\cdot t=0,$$

有不全为 0 的解 $u=1$，$v=c$，$w=d$，$t=f$，根据线性方程组的理论，系数行列式

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18.5)$$

圆周上任一点 $(x,y)$ 的坐标适合 (18.5)，所以 (18.5) 也就是所求的方程。

不熟悉线性方程组理论的读者可以不看例6(你可以随意地选出一些例题来读或不读)，或者只看它的结论，不看推导。

# 19 和圆有关的线

**例 1** 设圆方程为

$$x^2+y^2=r^2, \qquad (19.1)$$

则圆上一点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线为

$$x_1x+y_1y=r^2. \qquad (19.2)$$

如果圆的方程为

$$x^2+y^2+2cx+2dy+f=0, \qquad (19.3)$$

则过圆上一点 $P(x_1,y_1)$ 的切线为

$$x_1x+y_1y+c(x+x_1)+d(y+y_1)+f=0. \qquad (19.4)$$

**例 2** 圆 (19.1) 的、斜率为$m$的切线是

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}. \qquad (19.5)$$

**例 3** 设点 $P(x_1,y_1)$ 在圆 (19.1) 外，求自$P$向这圆所作的两条切线的方程。

**解** 设 $Q(h,k)$ 为切线上任意一点。$PQ$的方程可写成

$$(y-y_1)(k-x_1)-(x-x_1)(h-y_1)=0, \tag{19.6}$$

因此圆心 $O(0,0)$ 到 (19.6) 的距离

$$\pm\frac{-y_1(k-x_1)+x_1(h-y_1)}{\sqrt{(k-x_1)^2+(h-y_1)^2}}=r,$$

即

$$(ky_1-hx_1)^2=r^2((k-x_1)^2+(h-y_1)^2). \tag{19.7}$$

反之，若 $Q(k,h)$ 满足 (19.7)，则$O$到 (19.6) 的距离为 $r$，所以 (19.6) 为 $\odot O$ 的切线，$Q$ 在切线上。于是所求的方程为

$$(xy_1-yx_1)^2=r^2((x-x_1)^2+(y-y_1)^2), \tag{19.7'}$$

或改写成更易记忆的形式

$$(xx_1+yy_1-r^2)^2=(x_1^2+y_1^2-r^2)(x^2+y^2-r^2). \tag{19.8}$$

类似地，自 $P(x_1,y_1)$ 向圆 (19.3) 所引的两条切线为

$$(xx_1+yy_1+c(x+x_1)+d(y+y_1)+f)^2$$
$$=(x^2+y^2+2cx+2dy+f)(x_1^2+y_1^2+2cx_1+2dy_1+f), \tag{19.9}$$

**例 4** 自点 $P(x_1,y_1)$ 向圆 (19.1) 引两条切线，切点为$A$、$B$，求直线 $AB$ 的方程

**解** 设$A$点坐标为 $(x_A, y_A)$，则由 (19.2)，切线$PA$的方程为

$$x_Ax+y_Ay=r^2,$$

它过$P$点，所以

$$x_Ax_1+y_Ay_1=r^2$$

因此$A$在直线

$$xx_1+yy_1=r^2 \tag{19.10}$$

上。同理$B$也在 (19.10) 上。所以 (19.10) 就是 $AB$ 的方程。

一般地，自点$P(x_1,y_1)$向圆（19.3）引两条切线，则过两个切点的直线为

$$x_1x+y_1y+c(x+x_1)+d(y+y_1)+f=0. \qquad (19.11)$$

不论$P$在圆外、圆内、圆上，直线（19.11）都称为点$P$的极线。

方程（19.11）中．（$x_1$，$y_1$）与（$x,y$）地位平等（即将两者互换，（19.11）不变）．因此，如果点$P(x_1, y_1)$的极线过$Q(x,y)$，则点$Q(x, y)$的极线也过$P(x_1, y_1)$。

**例 5** 设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$为圆（19.1）上两点，求直线$PQ$的方程。

**解** $P$、$Q$的坐标均满足方程

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=x^2+y^2-r^2, \qquad (19.12)$$

并且（19.12）是一次方程（两边的二次项恰好抵消），所以（19.12）就是所求的方程。

**例 6** 求圆$(x-c_1)^2+(y-d_1)^2=r_1^2$与$(x-c_2)^2+(y-d_2)^2=r_2^2$的内公切线的方程。

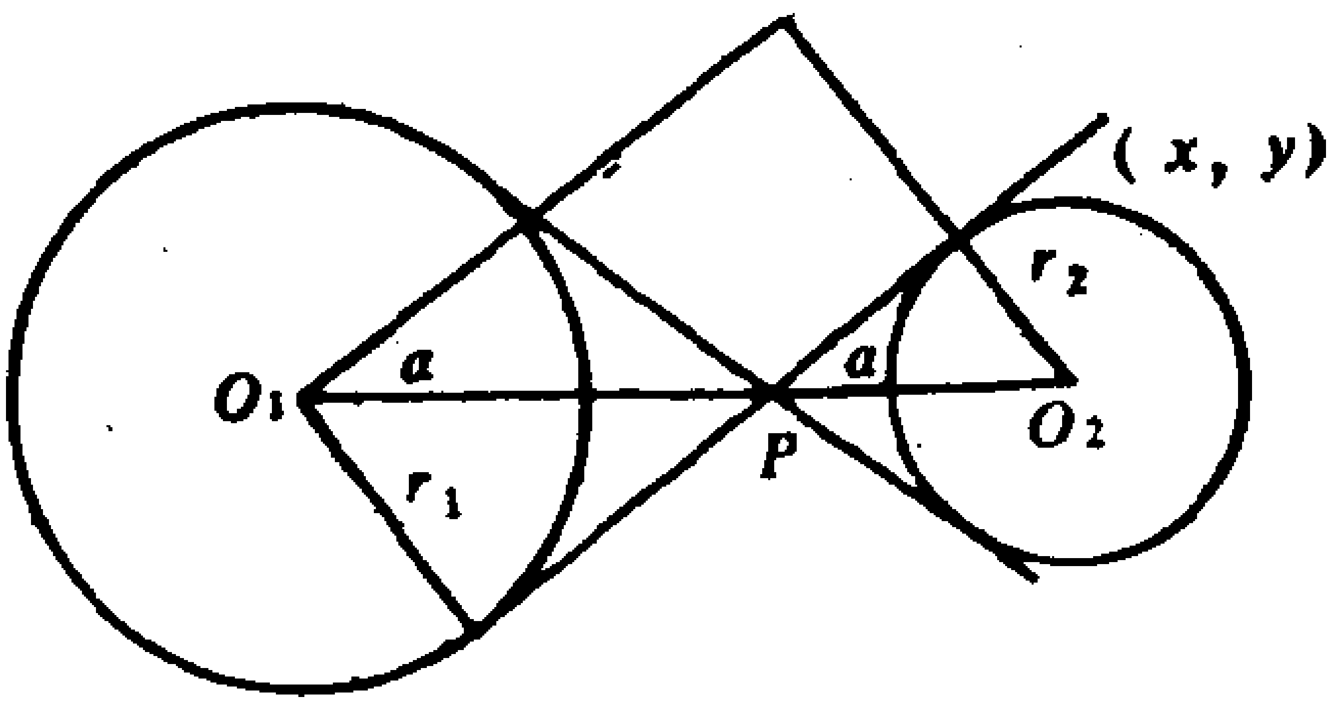


图 19

**解** 两圆的内相似心$P$分圆心的连线为$\frac{r_1}{r_2}$，所以$P$点坐标为

$$x_p=\frac{r_2c_1+r_1c_2}{r_1+r_2},\quad y_p=\frac{r_2d_1+r_1d_2}{r_1+r_2}. \tag{19.13}$$

设内公切线的法线式为

$$A(x-x_p)+B(y-y_p)=0. \tag{19.14}$$

其中

$$A^2+B^2=1, \tag{19.15}$$

由于圆心到切线的距离等于半径，所以

$$A(c_1-x_p)+B(d_1-y_p)=\pm r_1,$$

由于（19.13），上式即

$$A(c_1-c_2)+B(d_1-d_2)=\pm(r_1+r_2). \tag{19.16}$$

由（19.14）、（19.16）可解出 $A$、$B$（参见第15节例1），

$$A^2=(r_1+r_2)^2(y-y_p)^2/[(d_1-d_2)(x-x_p)-(c_1-c_2)(y-y_p)]^2,$$

$$B^2=(r_1+r_2)^2(x-x_p)^2/[(d_1-d_2)(x-x_p)-(c_1-c_2)(y-y_p)]^2,$$

代入（19.15）得

$$(r_1+r_2)^2[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]=[(d_1-d_2)(x-x_p)-(c_1-c_2)(y-y_p)]^2,$$

即

$$[(r_1+r_2)^2-(d_1-d_2)^2](x-x_p)^2+2(c_1-c_2)(d_1-d_2)(x-x_p)(y-y_p)+[(r_1+r_2)^2-(c_1-c_2)^2](y-y_p)^2=0. \tag{19.17}$$

（19.17）就是内公切线的方程。

又解　由勾股定理易知内公切线的长 $l$（两个切点之间的距离）的平方为

$$l^2=(c_1-c_2)^2+(d_1-d_2)^2-(r_1+r_2)^2. \tag{19.18}$$

设内公切线与连心线 $O_1O_2$ 的夹角为 $\alpha$，则对内公切线上任一点 $(x, y)$ 有

$$\cos\alpha=\frac{(x-x_P)}{\sqrt{(x-x_P)^2+(y-y_P)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{y-y_P}{\sqrt{(x-x_P)^2+(y-y_P)^2}}. \tag{19.19}$$

由第9节（9.22），线段 $O_1O_2$ 在内公切线上的射影的平方为

$$[(c_1-c_2)(x-x_P)+(d_1-d_2)(y-y_P)]^2/[(x-x_P)^2+(y-y_P)^2], \tag{19.20}$$

于是

$$[(c_1-c_2)(x-x_P)+(d_1-d_2)(y-y_P)]^2=l^2[(x-x_P)^2+(y-y_P)^2]. \tag{19.21}$$

利用（19.18）易知（19.21）与（19.17）等价。

这两种解法都用了一些几何知识

类似地，外公切线的方程为

$$[(r_1-r_2)^2-(d_1-d_2)^2](x-x_Q)^2+2(c_1-c_2)(d_1-d_2)(x-x_Q)(y-y_Q)+[(r_1+r_2)^2-(c_1-c_2)^2](y-y_Q)^2=0. \tag{19.22}$$

其中

$$x_Q=\frac{r_2c_1-r_1c_2}{r_2-r_1},\quad y_Q=\frac{r_2d_1-r_1d_2}{r_2-r_1}. \tag{19.23}$$

是外相似心Q的坐标。

注1　本题当然还有其他的解法，例如用（19.11），以内（外）分点作为 $(x_1, y_1)$。求出自它向已知圆所作的切线方程。

注2。关键的技巧是由（19.14）、（19.16）组成的一

次方程组（用行列式）解出$A$、$B$（再代入（19.15））。如果是解一次方程与二次方程组成的方程组。那将麻烦得多。曾经尝试过这个问题的读者，对此体会一定更深。

本节的很多结果不难推广到二次曲线。

# 20 共　圆　点

在解析几何中，虽然有计算直线交角的公式，但应用起来不甚方便，所以证明数点共圆时，往往是先定出圆心，再证明各点到圆心的距离相等。

**例 1** 三角形三边的中点、三条高的足，垂心与顶点连线的中点，这九个点共圆。

**解** 设外接圆为$x^2+y^2=1$，三角形的顶点为

$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$C(\cos\gamma,\ \sin\gamma)$。

则由第14节例2，垂心$H$的坐标为

$$H(\Sigma\cos\alpha,\ \Sigma\sin\alpha),$$

所以$AH$中点$P$的坐标为

$$P\left(\cos\alpha+\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{2},\ \sin\alpha+\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{2}\right)$$

而$BC$中点$L$的坐标为

$$L\left(\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{2},\ \frac{\sin\beta+\sin\gamma}{2}\right),$$

所以$LP$的中点为

$$K\left(\frac{1}{2}\Sigma\cos\alpha,\ \frac{1}{2}\Sigma\sin\alpha\right),$$

并且

$$KL=\left[\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

设 $BH$、$CH$ 中点分别为 $Q$、$R$，$AC$、$AB$ 中点分别为 $M$、$N$，则用同样的方法可知 $MQ$、$NR$ 的中点也是 $K$，并且

$$KM=KN=\frac{1}{2}.$$

因此 $L$、$M$、$P$、$Q$、$R$ 均在以 $K$ 为圆心，1/2 为半径的圆上.

设三条高为 $AD$、$BE$、$CF$，则

$$\angle LDP=90°$$

所以 $D$ 在以 $LP$ 为直径的圆上，也就是在 $\odot K$ 上，同样 $E$、$F$ 也在 $\odot K$ 上.

$\odot K$ 称为三角形的九点圆. 从上面的证明可以看出九点圆的半径是外接圆的一半，圆心 $K$ 与外心 $O$、重心 $G$、垂心 $H$ 都在欧拉线上，并且 $OG:OK:OH=2:3:6$.

**例 2** 四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC\perp BD$，交点为 $O$，自 $O$ 向各边作垂线，垂足为 $E$、$F$、$G$、$H$，$EO$ 交 $CD$ 于 $E'$，$FO$ 交 $DA$ 于 $F'$，$GO$ 交 $AB$ 于 $G'$，$HO$ 交 $BC$ 于 $H'$（图 20），求证、$E$、$F$、$G$、$H$、$E'$、$F'$、$G'$、$H'$ 八点共圆.

**解** 以 $O$ 为原点，$CA$、$DB$ 分别为 $x$、$y$ 轴. 设 $A$、$B$、$C$、$D$ 坐标分别为

$$A(a,0),\ B(0,b),\ C(c,0),\ D(0,d).$$

则 $AB$ 方程为

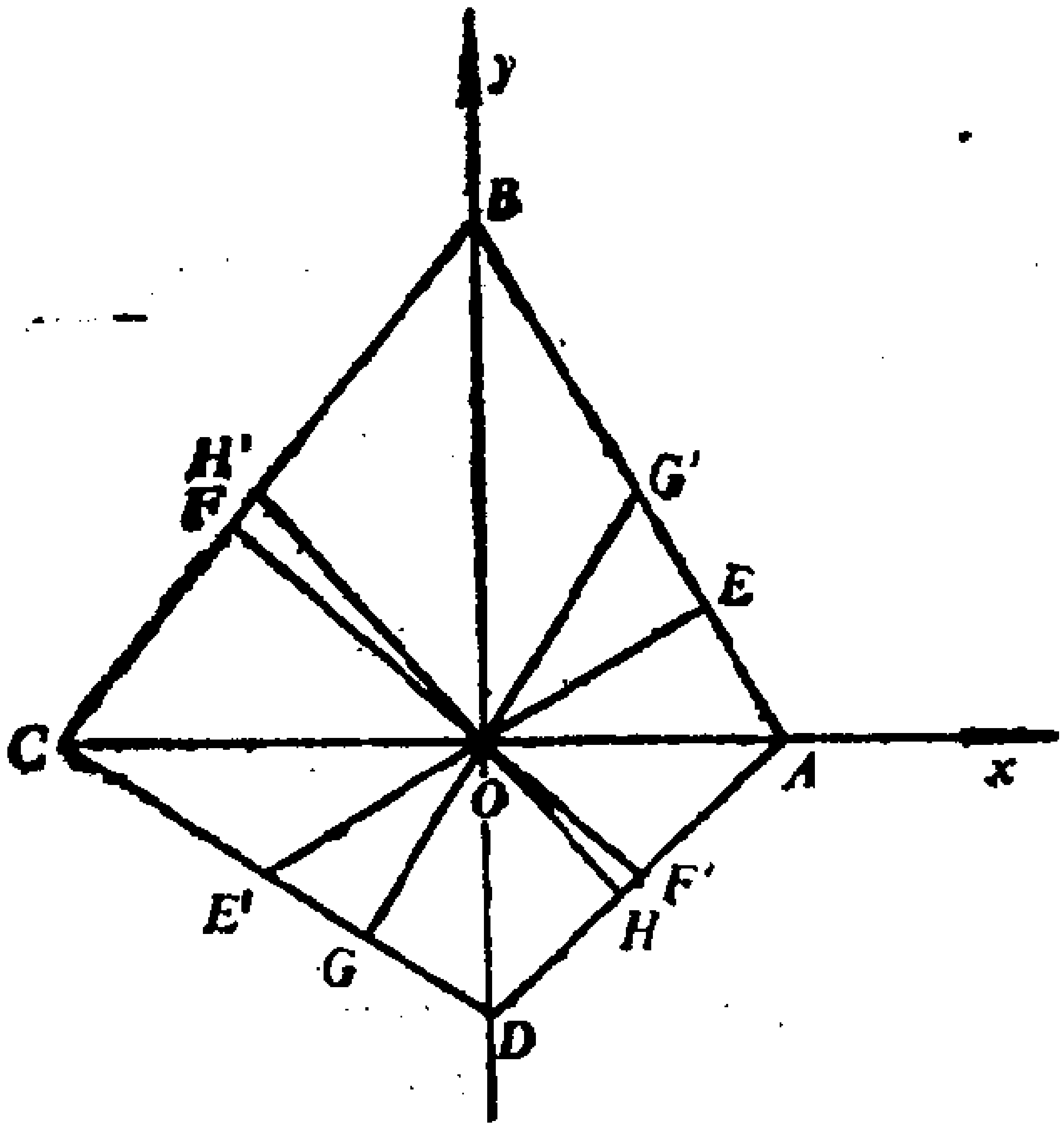


图 20

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{20.1}$$

于是 $OE$ 方程为

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{a}, \tag{20.2}$$

而 $CD$ 方程为

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1, \tag{20.3}$$

由 (20.2)、(20.3) 可得 $E'$ 的坐标。我们的解法是由 (20.2) 得

$$x=bt,\ y=at.$$

代入 (20.3) 得

$$t\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{d}\right)=1,$$

从而 $E'$ 的坐标为

$$\left(\frac{bcd}{bd+ac},\ \frac{acd}{bd+ac}\right).$$

同理 $G'$ 的坐标为（将 $a$ 与 $c$，$b$ 与 $d$ 互换）

$$\left(\frac{dab}{bd+ac},\ \frac{cab}{bd+ac}\right).$$

$F'$ 的坐标为

$$F'\left(\frac{bad}{bd+ac},\ \frac{cad}{bd+ac}\right).$$

$H'$的坐标为

$$H'\left(\frac{dcb}{bd+ac},\ \frac{acb}{bd+ac}\right).$$

我们看到 $F'$、$G'$ 的横坐标相同，因此 $F'G'$ 平行于 $y$ 轴。同样 $E'H'$ 也平行于 $y$ 轴，$E'F'$ 与 $G'H'$ 平行于 $x$ 轴所以四边形 $E'F'G'H'$ 是矩形，以它的对角线为直径作圆，这圆过 $E'$、$F'$、$G'$、$H'$ 四点。又由于 $\angle G'EE'=90°$，所以这圆也过 $E$、及 $F$、$G$、$H$ 四点。

注　我们可以求出圆心，即对角线 $E'G'$ 的中点，也可以算出各点到圆心的距离。但在解题过程中，我们发现了一个矩形 $E'F'G'H'$，这就省去了求圆心、算半径等计算。在解题过程中，根据情况改变原先的解题计划，是经常发生的，切勿执一不变。

**例 3**　若 $m_1m_2m_3m_4=1$，则点 $A_i\left(am_i,\ \frac{a}{m_i}\right)$，$1\leqslant i\leqslant 4$，共圆。

**解**　设点 $(x,y)$ 与 $A_1$、$A_4$ 距离相等，则

$$(x-am_1)^2+\left(y-\frac{a}{m_1}\right)^2=(x-am_4)^2+\left(y-\frac{a}{m_4}\right)^2,$$

即

$$2a(m_4-m_1)x+2a\left(\frac{1}{m_4}-\frac{1}{m_1}\right)y$$

$$=a^2\left(m_4^2-m_1^2+\frac{1}{m_4^2}-\frac{1}{m_1^2}\right),$$

这可化简为（注意 $m_1m_2m_3m_4=1$）

$$2x-2m_2m_3y=a[m_4+m_1]-a\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_4}\right)m_2m_3, \tag{20.4}$$

同样与 $A_2$、$A_4$ 与距离相等的点满足

$$2x-2m_1m_3y=a(m_4+m_2)-a\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_4}\right)m_1m_3, \tag{20.5}$$

（20.4）、（20.5）两式相减后约去 $m_1-m_2$ 得

$$2m_3y=a+am_3\left(\frac{1}{m_4}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right),$$

于是

$$y=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}\right). \tag{20.6}$$

代入（20.4）或（20.5）得

$$x=\frac{a}{2}(m_1+m_2+m_3+m_4). \tag{20.7}$$

以（20.7）、（20.6）为坐标的点到 $A_1$、$A_2$、$A_4$ 的距离相等，由于它的坐标对于下标1，2，3，4是完全平等的，这点也就是到 $A_1$、$A_3$、$A_4$ 距离相等的点．因此 $A_i$，$1\leqslant i\leqslant4$，在以这点为圆心的一个圆上．

注　在第25节，我们给出另一种解法．

有时利用圆方程的特点来证明诸点在一个圆上。

**例 4** 证明椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{20.8}$$

与抛物线

$$y=x^2+cx+d \tag{20.9}$$

的四个交点共圆。

**证** 将 (20.8) 减去 (20.9) 乘$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$得

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-c\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)y$$
$$-d\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-1=0. \tag{20.10}$$

曲线 (20.10) 显然过所述的四个交点。由于 (20.10) 中 $x^2$ 与 $y^2$ 的系数相等，没有 $xy$ 项，所以它是一个圆。于是所述的四个交点共圆。

将 (20.8) 改为双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

结论仍然成立。

# 21 与圆有关的问题

与圆有关的问题很多，如果其中没有角的相等关系（或这种关系不多），往往可用解析几何来解。

**例 1** 圆幂定理：过点$A$任作直线交定圆于$B$、$C$，证明$AB\times AC$为定值.

**证** 以$A$为原点，设圆的方程为

$$x^2+y^2-2cx-2dy+f=0. \tag{21.1}$$

过$A$的直线为

$$y=kx.$$

则$B$、$C$的横坐标是方程

$$x^2(1+k^2)-(2c+2dk)x+f=0$$

的两个根$x_1$、$x_2$. 由韦达定理

$$(1+k^2)x_1x_2=f,$$

于是

$$AB\times AC=\pm\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=(1+k^2)x_1x_2=f.$$

圆（21.1）亦可写成

$$(x-c)^2+(y-d)^2=R^2, \tag{21.1'}$$

其中$R^2=c^2+d^2-f$为圆的半径的平方. 所说的定值$f$也就是$A$（原点）与圆心（$c,d$）的距离的平方减去半径的平方. 当$A$在圆外时，这就是自$A$向圆所引切线（长）的平方.

这定值称为点$A$到这圆的幂.

在上面的解法中，我们以$A$为原点，这可以使问题简化.

如果给定点$A(x_A,\ y_A)$，未必是原点，要求出$A$关于圆（20.1）的幂（即$AB\times AC$），我们可以设直线$AB$的方程为

$$x=x_A+\rho\cos\alpha, \tag{21.2}$$

$$y=y_A+\rho\sin\alpha. \tag{21.3}$$

这里$\alpha$是$AB$与$x$轴的夹角，$\rho$表示直线上的点（$x$, $y$）与

$A$的距离。在需要计算$AB$、$AC$等线段的长时，用这种参数式常常是有益的。

将（21.2）、（21.3）代入（21.1）得

$$(x_A+\rho\cos\alpha)^2+(y_A+\rho\sin\alpha)^2-2c(x_A+\rho\cos\alpha)$$
$$-2d(y_A+\rho\sin\alpha)+f=0,$$

即

$$\rho^2-2(cx_A\cos\alpha+dy_A\sin\alpha)\rho+x_A^2+y_A^2-2cx_A$$
$$-2dy_A+f=0. \tag{21.4}$$

$AB=\rho_1$、$AC=\rho_2$是（21.4）的两个根，所以由韦达定理$AB\times AC$是定值。

$$x_A^2+y_A^2-2cx_A-2dy_A+f, \tag{21.5}$$

（21.5）是$A$关于圆（21.1）的幂（当$A$为原点时，这值就是$f$）它也可以写成

$$(x_A-c)^2+(y_A-d)^2-R^2, \tag{21.5'}$$

即$A$与圆心（$c$，$d$）距离的平方减去半径的平方。

当$A$在圆内时，幂为负值。$A$在圆上时，幂为0。$A$在圆外时幂为正值，这时幂就是自$A$向圆所引的切线长的平方。

注1　直线的参数式（21.2）、（21.3），在求距离（直线上的动点（$x$，$y$）与定点（$x_A$，$y_A$）之间的距离）时极为有用，下面的例3还要用到它。

注2　在证明圆幂定理时，我们取$A$为原点，将圆方程表成一般形式（21.1）。当然也可以取圆的方程为$x^2+y^2=R^2$，表$A$为（$x_A$，$y_A$），然后去解。这些化简的手段值得学习。为以后的应用，我们讨论了一般情况中的幂，但对于本题来说，并不是必须的。

注3　关于韦达定理，后面第25节要详细讨论。

**例 2** 设四边形 $ABCD$ 内接于圆，并且对角线 $AC\perp BD$。自对角线交点 $O$ 向一边作垂线，证明这垂线恰好平分对边：

**证** 以 $O$ 为原点，直线 $AC$、$BD$ 分别为 $x$ 轴、$y$ 轴。设圆的方程为

$$x^2+y^2-2gx-2hg+f=0.$$

点、$A$、$B$、$C$、$D$分别为

$$A(a,0),\ B(0,b),\ C(c,0),\ D(0,d).$$

又设 $AB$ 的垂线 $OE$ 交 $CD$ 于 $E'$，则由第20节例 2，$E'$ 点坐标为

$$\left(\frac{bcd}{bd+ac},\ \frac{acd}{bd+ac}\right).$$

但由例 1（圆幂定理），

$$bd=ac\quad(=f),$$

所以 $E'$ 点即 $CD$ 的中点$\left(\frac{c}{2},\ \frac{d}{2}\right)$.

**例 3** 自圆外一点 $P$ 向圆引割线交圆于 $R$、$S$，又作切线 $PA$、$PB$，$AB$ 与 $PR$ 相交于 $Q$。求证 $PR$、$PQ$、$PS$ 成调和数列，即

$$\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}=\frac{2}{PQ}. \tag{21.6}$$

**证** 设圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2, \tag{21.7}$$

点 $P$ 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，$PR$ 的方程为

$$x=x_1+\rho\cos\alpha, \tag{21.8}$$

$$y=y_1+\rho\sin\alpha. \tag{21.9}$$

这里 $\alpha$ 是 $PR$ 与 $x$ 轴的夹角，$\rho$ 表示直线上的点 $(x,\ y)$ 与

$P$点的距离。

将 (21.8)、(21.9)代入 (21.7) 得

$$(x_1+\rho\cos\alpha)^2+(y_1+\rho\sin\alpha)^2=r^2,$$

即

$$\rho^2+2(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)\rho+x_1^2+y_1^2-r^2=0. \quad (21.10)$$

$PR$、$PS$ 是 (21.10) 的两个根 $\rho_1$、$\rho_2$，因此，由韦达定理

$$\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{-2(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)}{x_1^2+y_1^2-r^2}. \quad (21.11)$$

另一方面，由第 19 节例 4，极线 $AB$ 的方程为

$$x_1x+y_1y=r^2, \quad (21.12)$$

将 (21.8)、(21.9) 代入 (21.12) 得

$$x_1(x_1+\rho\cos\alpha)+y_1(y_1+\rho\sin\alpha)=r^2. \quad (21.13)$$

因此这方程的根 $PQ=\rho$ 满足

$$\frac{1}{PQ}=-\frac{x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha}{x_1^2+y_1^2-r^2}. \quad (21.14)$$

由 (21.11)、(21.14) 即知 (21.6) 成立。

注　当$P$在圆内时，极线 (21.12) 仍然存在，上面的推导及结论 (21.6) 均成立，其中$Q$是极线与 $PR$ 的交点。

**例 4**　设$A$、$B$、$C$关于一圆的极线分别为$B'C'$，$C'A'$，$A'B'$，求证 $AA'$，$BB'$，$CC'$ 三条直线交于一点。

**证**　设圆为$x^2+y^2=r^2$，$A$、$B$、$C$ 的坐标分别为 $(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$，$(x_3, y_3)$。又令

$$f_i=x_ix+y_iy-r^2,\ 1\leqslant i\leqslant 3$$

$$f_{ij}=x_ix_j+y_iy_j-r^2,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant 3.$$

显然 $f_{ij}=f_{ji}$。$C'A'$、$A'B'$ 的方程分别为

$$f_2=0,$$

与

$$f_3=0.$$

于是 $A'$ 是直线束

$$\lambda f_2+\mu f_3=0 \tag{21.15}$$

的交点。若 (21.15) 过 $A$，则

$$\lambda f_{12}+\mu f_{13}=0.$$

所以（从以上二式消去 $\lambda$、$\mu$）$AA'$ 方程为

$$f_{13}f_2-f_{12}f_3=0. \tag{21.16}$$

同样 $BB'$、$CC'$ 的方程分别为（将下标 1，2，3 轮换）

$$f_{21}f_3-f_{23}f_1=0, \tag{21.17}$$

$$f_{32}f_1-f_{31}f_2=0. \tag{21.18}$$

由于 $f_{ij}=f_{ji}$，(21.16)、(21.17)、(21.18) 三式相加成为恒等式，$0=0$，这也就是说前两式的和恰好是第三式乘以 $-1$，因此这三条直线交于一点。

**例 5** 扇形 $OAB$ 中，$\angle AOB=90°$。$\odot C$ 与 $OA$、$OB$ 及 $\odot O$ 相切，$\odot D$ 与 $OA$、$\odot O$、$\odot C$ 相切。作 $DE\perp OC$，垂足为 $E$。求证 $\triangle ODE$ 的三边成等差数列（图21）

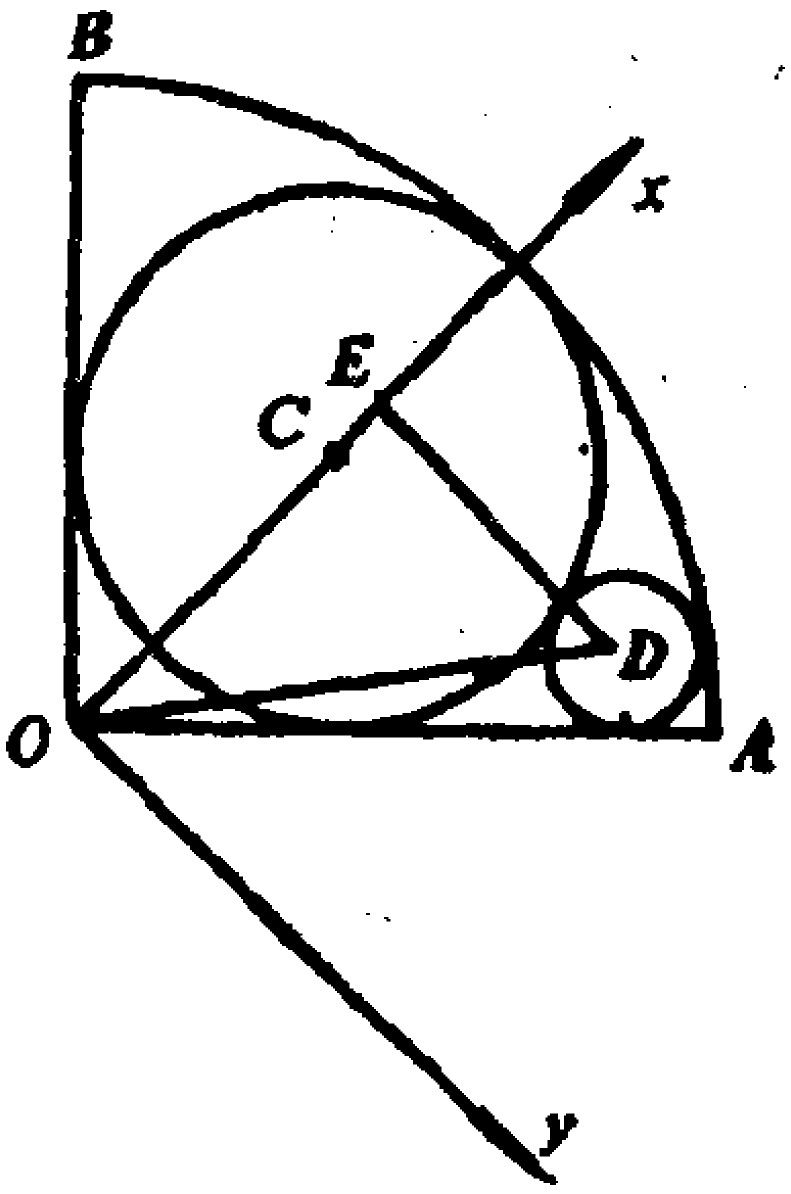


图 21

**证** 以 $O$ 为原点，直线 $OC$ 为 $x$ 轴，建立直角坐标系如图。设 $C$ 点为 $(c, 0)$，$D$ 点为 $(a, b)$，$\odot O$、$\odot C$、$\odot D$ 的半径分别为 1，$R$，$r$。

由于$\odot C$与$OA$、$OB$均相切，所以$\angle AOC=45°$，$OA$的法线式为

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=0.$$

由相切条件，

$$\frac{C}{\sqrt{2}}=R, \tag{21.19}$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{2}}=r, \tag{21.20}$$

$$c=1-R, \tag{21.21}$$

$$a^2+b^2=(1-r)^2, \tag{21.22}$$

$$(a-c)^2+b^2=(R+r)^2. \tag{21.23}$$

由（23），（25）得

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1,$$

$$c=1-R=2-\sqrt{2},$$

代入（21.23）得

$$(a-1+R)^2+b^2=(R+r)^2.$$

上式可化简为

$$a^2+b^2+1-2a-2R+2aR-r^2-2Rr=0. \tag{21.24}$$

（21.24）减（21.22）得

$$1-a-R+aR-r-Rr=0, \tag{21.25}$$

从而

$$a=1-\frac{1+R}{1-R}r=1-\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}r=1-(\sqrt{2}+1)r$$

$$=(1-r)-\sqrt{2}r=(1-r)-(a-b),$$ （利用

(21.20)），

即

$$2a=(1-r)+b,$$

所以

$$b=ED,\ a=OE,\ 1-r=OD.$$

成等差数列。

**例 6** 设$A$、$B$、$C$、$D$为一圆上任意四点，$O$为任一点。求证

$$OA^2\cdot S_{\triangle BCD}-OB^2\cdot S_{\triangle CDA}+OC^2\cdot S_{\triangle DAB}$$
$$-OD^2\cdot S_{\triangle ABC}=0. \qquad (21.26)$$

**证** 本题似乎很难。确实，不用解析几何去做，这题十分棘手。而用解析几何，却很简单。

以$O$为原点。因为$A$、$B$、$C$、$D$、四点共圆，所以有（请参看第18节例6）

$$\begin{vmatrix} x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_D^2+y_D^2 & x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}=0.$$

将这行列式依第一列展开，注意$x_A^2+y_A^2=OA^2$等等及计算面积的公式（第15节（15.6），便得到（21.26））。

**例 7** 设$A$、$B$、$C$、$D$为任意四点，每三点不共线。$O_A$、$O_B$、$O_C$、$O_D$及$r_A$、$r_B$、$r_C$、$r_D$分别为$\triangle BCD$，$\triangle CDA$，$\triangle DAB$，$\triangle ABC$的外接圆的圆心与半径。证明

$$\sum\frac{1}{AO_A^2-r_A^2}=0. \qquad (21.27)$$

**证** $\triangle BCD$的外接圆的方程为

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_D^2+y_D^2 & x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (21.28)$$

而 $AO_A^2-r_A^2$ 就是$A$关于$\odot O_A$的幂。由例1，它就是(21.28)左边在点$A(x_A,y_A)$处的值除以$x^2$（$y^2$）的系数，即(21.28)中$x^2+y^2$的代数余子式。因此

$$\sum(AO_A^2-r_A)^{-1}=\sum\pm\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_D^2+y_D^2 & x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}.$$

注意其中

$$\sum\pm\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & 1 \\ 1 & x_B & y_B & 1 \\ 1 & x_C & y_C & 1 \\ 1 & x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}. \qquad (21.29)$$

即将上式右边依第一列展开就得到左边，其中左边的±号的选取正是为了使得每一项都是右边相应元素的代数余子式。

(21.29)的右边有两列相同，因而值为0，即(21.27)成立。

读者已经看到解析几何可以解决很复杂的问题（如例6、例7）。这些问题不用解析几何是无法或很难解决的。切莫小觑了解析几何。当然事情总是有利有弊，解析几何中缺少一种简洁的工具来处理与圆有关的角（圆周角、圆心角、圆外角、圆内角、弦切角等），所以涉及许多角度的问题仍以用初等几何的方法为好。

# 22 共　轴　圆

共轴圆与直线束类似（也有人称之为圆束）．

**例 1**　圆

$$x^2+y^2-2c_1x-2d_1y+f_1=0, \tag{22.1}$$

与圆

$$x^2+y^2-2c_2x-2d_2y+f_2=0 \tag{22.2}$$

相交于 $A$、$B$ 两点，求直线 $AB$ 的方程．

**解**　如果先求 $A$、$B$ 的坐标，再求直线 $AB$ 的方程，那是一件很麻烦的事．简单的方法是将（22.1）、（22.2）相减消去二次项得

$$2(c_2-c_1)x+2(d_2-d_1)y+(f_1-f_2)=0. \tag{22.3}$$

（22.3）就是直线 $AB$ 的方程（因为它是一次的，并且过两个圆的公共点）．

不论圆（22.1）、（22.2）是否有公共点（即公共点是实或虚），方程（22.3）所表示的直线，称为这两个圆的根轴．

用 $S_i$ 表示（22.1）或（22.2）的左边（$i=1,2$），则根轴的方程就是

$$S_1-S_2=0. \tag{22.4}$$

**例 2**　三个圆两两相交，证明三条公共弦交于一点．

**证**　这三个圆的公共弦为（22.4）及

$$S_2-S_3=0, \tag{22.5}$$

$$S_3-S_1=0. \tag{22.6}$$

三式相加成为恒等式，这就表明三条直线交于一点．

实际上，我们证明了三个圆中，每两个圆的根轴交于同一点．这点称为三个圆的根心．

**例 3** 设直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{22.7}$$

与圆（22.1）交于 $A_1, B_1$．直线

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{22.8}$$

与圆(22.2) 交于 $A_2$、$B_2$．如果 $A_1$、$B_1$、$A_2$、$B_2$四点共圆，求证行列式

$$\begin{vmatrix} c_2-c_1 & d_2-d_1 & f_1-f_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0. \tag{22.9}$$

**证** 过 $A_1$、$B_1$、$A_2$、$B_2$的圆与圆（22.1）、圆（22.2）的根轴分别为（22.7）、（22.8)，圆（22.1）与圆（22.2）的根轴为（22.3）．

由例 2，这三条根轴交于根心．于是（22.9）成立．参见第 15 节（15.11）．

对于任意的实数 $\lambda$、$\mu$，方程

$$\lambda S_1+\mu S_2=0, \tag{22.10}$$

也就是

$$(\lambda+\mu)x^2+(\lambda+\mu)y^2-2(\lambda c_1+\mu c_2)x-2(\lambda d_1 \\ +\mu d_2)y+\lambda f_1+\mu f_2=0. \tag{22.10'}$$

表示一族圆，称为圆（22.1）与圆（22.2）的共轴圆（在 $\lambda$ 与 $\mu$ 互为相反数时，（22.10）就成为根轴（22.3））．

**例 4** （22.10）中任意两个圆的根轴都是（22.3）

**解** 对于方程（22.10）来说，$\lambda$ 与 $\mu$ 的值同乘一个非零实数后仍表示同一个圆，所以可以设 $\lambda$ 与 $\mu$ 的和为 1．

设 $\lambda S_1+\mu S_2=0$（$\lambda+\mu=1$）及 $\lambda' S_1+\mu' S_2=0$（$\lambda'$

$+\mu'=1$）是（22.10）中的两个圆，则它们的根轴为

$$(\lambda-\lambda')S_1+(\mu-\mu')S_2=0. \qquad (22.11)$$

由于 $-(\lambda-\lambda')=\mu-\mu'$，所以（22.11）就是（22.3）.

因此，共轴圆具有相同的根轴．这也就是（22.10）称为**共轴**圆的道理．

容易看出根轴还有以下性质：

1．根轴上任一点到两个圆的切线长相等．

这是因为根轴上的点 $(x,y)$ 到圆（22.1）、（22.2）的切线长的平方差

$$(x^2+y^2-2c_1x-2d_1y+f_1)-(x^2+y^2-2c_2x-2d_2y+f_2)$$
$$=2(c_2-c_1)x+2(d_2-d_1)y+f_1-f_2=0.$$

2．根轴与圆心的连线垂直．

事实上，两个圆心的对应坐标之差为

$$c_1-c_2,\ d_1-d_2.$$

3．如果以圆心的连线为 $x$ 轴，根轴为 $y$ 轴，这时（22.10′）中所有方程均无 $y$ 的一次项，而且常数项全相等（因为每两个的差产生根轴 $x=0$）．即这时共轴圆的方程为

$$x^2+y^2-2cx+f=0. \qquad (22.12)$$

其中 $f$ 是常数，$c$ 可取任意的实数值．

共轴圆有很多应用．

**例 5** 已知一圆，经过圆 $x^2+y^2-2x+3y-7=0$ 及 $x^2+y^2+3y-4=0$ 的交点，又经过点（$-2$，1），求它的方程．

**解** 所求的方程呈(10′)形．取 $\lambda+\mu=1$，则这方程是

$$x^2+y^2-2\lambda x+3y-7\lambda-4\mu=0. \qquad (22.13)$$

因为它过 $(-2,1)$ 所以

$$5+4\lambda+3-7\lambda-4\mu=0,$$

从而

$$\lambda=-4,\quad \mu=5$$

代入（22.13），得所求的方程为

$$x^2+y^2+8x+3y+8=0.$$

**例 6** 求过圆 $x^2+y^2=4$ 及 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的交点，并且与 $x+2y=0$ 相切的圆的方程.

**解** 设所求的圆为

$$\lambda(x^2+y^2-4)+\mu(x^2+y^2-2x+4y+4)=0, \qquad (22.14)$$

取 $\lambda+\mu=1$，则（22.14）成为

$$x^2+y^2-2\mu x-4\mu y+4\mu-4\lambda=0. \qquad (22.14')$$

（22.14′）与直线

$$x+2y=0$$

相切，即两者只有一个公共点。所以将 $x=-2y$ 代入（14′）得出的方程

$$5y^2+4\mu-4\lambda=0$$

应当有重根，因此 $4\mu-4\lambda=0$，从而

$$\lambda=\mu=1/2.$$

代入（22.14）得所求的方程为

$$x^2+y^2-x-2y=0.$$

注 在求出（22.14′）后，如果利用圆心到切线的距离等于半径来确定 $\lambda$、$\mu$，虽也可以，却比较麻烦。又如果利用几何知道所求圆过原点，方程很容易求。但这是由于本题数据较为特殊所致，一般情形并不如此.

**例 7** 已知两圆的方程为 $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ 及 $x^2+y^2+4x+3y+2=0$，求以它们的公共弦为直径的圆的方程.

**解** 仍在（22.10′）中取 $\lambda+\mu=1$，所求方程为

$$x^2+y^2+(2+2\mu)x+3y+(1+\mu)=0 \tag{22.15}$$

由于它的圆心 $(-(1+\mu),\ -3/2)$ 在根轴（即公共弦所在直线）

$$2x+1=0 \tag{22.16}$$

上。所以 $\mu=\dfrac{1}{2}$. 答案为

$$x^2+y^2+x+y+\frac{1}{2}=0. \tag{22.15′}$$

在圆（22.1）与圆（22.2）相切时，根轴就是过切点的公切线。这时切点也可以看作是共轴圆中的一员，它是半径为 0 为"点圆"。

点圆在解题时很有帮助。

**例 8** 求一圆的方程，它过点 $(x_1,y_1)$，并且与直线 $ax+by+c=0$ 相切于点 $(x_2,y_2)$

**解** 点 $(x_2,y_2)$ 可以看作是一个圆

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=0.$$

所求的圆在共轴圆

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+\lambda(ax+by+c)=0 \tag{22.17}$$

中。由于这圆过 $(x_1,y_1)$，所以它的方程是

$$[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2](ax_1+by_1+c)$$
$$=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2](ax+by+c).$$

注 在前几个例中，我们取 $\lambda+\mu=1$是为了使$x^2+y^2$的系数为 1 。（22.17）的二次项系数已经为 1，就不需要那样做了.

**例 9** 一圆半径为 $r$，与直线 $ax+by+c=0$ 相切于 $(x_1,y_1)$，求它的方程。

**解** 设所求方程为

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+2\lambda(ax+by+c)=0, \qquad (22.18)$$

即

$$(x-x_1+a\lambda)^2+(y-y_1+b\lambda)^2=\lambda^2(a^2+b^2)$$
$$-2(ax_1+by_1+c)\lambda.$$

由于 $ax_1+by_1+c=0$，所以

$$\lambda^2(a^2+b^2)=r^2.$$

从而 $\lambda=\pm\dfrac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

所求的方程为

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\pm\frac{2r(ax+by+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}=0. \qquad (22.19)$$

注 1 在 (22.18) 中，我们以 $2\lambda$ 作为 $ax+by+c$ 的系数，而不用 $\lambda$，这是为了计算的方便。

注 2 本题有两解。这与几何圆形符合。因为在直线的每一侧有一个以 $r$ 为半径，切这直线于 $(x_1,y_1)$ 的圆。例 6 那样的问题通常也有两解，但在该例中，公共弦恰好与直线 $x+2y=0$ 平行，这时仅有一解。

**例 10** 一圆过点 $(x_1,y_1)$ 并且与圆

$$x^2+y^2-2cx-2dy+f=0$$

相切于 $(x_2,y_2)$，求它的方程。

**解** 所求方程为

$$(x^2+y^2-2cx-2dy+f)[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]$$
$$=(x_1^2+y_1^2-2cx_1-2dy_1+f)((x-x_2)^2+(y-y_2)^2).$$

**例 11** 求与圆 $x^2+y^2-2cx-2dy+f=0$ 相切于 $(x_1,y_1)$，半径为 $r$ 的圆的方程。

**解** 如果用共轴圆来解，比较麻烦。本例以用定比分点去确定圆心为好。

如果所求圆心$P$与已知圆心$A(c,d)$在点$B(x_1,y_1)$的两侧，则$P$分$AB$为$(R+r):(-r)$，这里$R^2=c^2+d^2-f$所以$P$点坐标为

$$
\begin{aligned}
x_p&=\frac{-rc+(R+r)x_1}{R},\\
y_p&=\frac{-rd+(R+r)y_1}{R}.
\end{aligned}
\tag{22.20}
$$

如果$P$与$A$在$B$的同侧，则$P$分$AB$为$\frac{R-r}{r}$，所以

$$x_p=\frac{rc+(R-r)x_1}{R},\quad y_p=\frac{rd+(R-r)y_1}{R}. \tag{22.21}$$

所求圆的方程为

$$(x-x_p)^2+(y-y_p)^2=r^2.$$

其中$x_p,y_p$由（22.20）或（22.21）给出.

注1　本题也有两解，与几何事实吻合.

注2　当$P$与$A$在$B$的同侧时，根据$R$与$r$的大小，$P$在$A$、$B$之间或在$BA$的延长线上。但这两种情况不必分开讨论，因为$P$点坐标均由（22.21）给出。其实（22.20）与（22.21）也可以统一起来，只要允许$r$可正可负。

**例 12**　点$P(x_1,y_1)$对于共轴圆的极线均通过一个定点，试证明之。

**解**　设共轴圆为

$$x^2+y^2-2cx+f=0,$$

其中$f$为定值，则$P(x_1,y_1)$关于这些圆的极线为

$$x_1x+y_1y-c(x+x_1)+f=0,$$

它们都过直线

$$x+x_1=0$$

与直线

$$x_1x+y_1y+f=0$$

的交点$\left(-x_1,\ \dfrac{x_1^2-f}{y_1}\right)$.

## 23 较复杂的几何题

解析几何可以解决很复杂的问题.

**例 1** 在$\triangle ABC$中，$\angle C=30°$，$O$是外心，$I$是内心，边$AC$上的点$D$与边$BC$上的点$E$使得$AD=BE=AB$. 求证$OI=DE$并且$OI\perp DE$.

这是1988年，为选拔参加29届国际数学竞赛的队员，所出的一道选拔题.

这道题里，外心、内心“悬浮”在三角形中，与边、角的关系不很紧密，所以用纯粹几何的方法难以下手. 当然不是说一定不能做，但在考场上，誰也没有把握一定能做得出. 这样的题正宜用解析几何来处理.

建立直角坐标系. 外心$O$为原点，外接圆的方程为（我们以该圆半径为单位长）

$$x^2+y^2=1.$$

又设三边的长分别为$a$、$b$、$c$、，$OA$、$OB$、$OC$与$x$轴的夹角（自$x$轴的正方向逆时针旋转到$OA$、$OB$、$OC$所绕过的角）

分别为 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$. 则 $A$、$B$、$C$ 的坐标为

$$(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ (\cos\beta,\ \sin\beta),\ (\cos\gamma, \sin\gamma). \tag{23.1}$$

由于 $AD=AB=c$，所以 $D$ 分线段 $AC$ 为两部分，比为 $c:(b-c)$，从而 $D$ 点坐标为

$$\begin{aligned} x_D &= \frac{cx_C+(b-c)x_A}{b}, \\ y_D &= \frac{cy_C+(b-c)y_A}{b}. \end{aligned} \tag{23.2}$$

其中 $x_C$，$y_C$，$x_A$，$y_A$ 由 (23.1) 给出.

同样 $E$ 点坐标为

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{cx_C+(a-c)x_B}{a}, \\ y_E &= \frac{cy_C+(a-c)y_B}{a}. \end{aligned} \tag{23.3}$$

于是

$$\begin{aligned} x_E-x_D &= \frac{a(b-c)x_A+b(c-a)x_B+c(a-b)x_C}{ab}, \\ y_E-y_D &= \frac{a(b-c)y_A+b(c-a)y_B+c(a-b)x_C}{ab}. \end{aligned} \tag{23.4}$$

表达式 (23.4) 很整齐. 第一式与第二式几乎完全相同，其差别仅在于将 $x$、$y$ 互换.每一式的分子是 $a(A)$、$b(B)$、$c(C)$ 的"轮换式"，即将 $a(A)$ 换成 $b(B)$，$b(B)$ 换成 $c(C)$，$c(C)$ 换成 $a(A)$，这表达式不变.

由第 8 节，我们知道内心 $I$ 的坐标是

$$\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\ \frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right) \tag{23.5}$$

要证明 $OI\perp DE$，只需证明

$$\frac{\sum a(b-c)x_A}{ab}\cdot\frac{\sum ax_A}{a+b+c}+\frac{\sum a(b-c)y_A}{ab}\cdot\frac{\sum ay_A}{a+b+c}=0.$$

这通过直接的计算便可得出。过程如下：

首先，与第1节例1相同，

$$x_Ax_B+y_Ay_B=\frac{1}{2}[2-(x_A-x_B)^2-(y_A-y_B)^2]=\frac{2-c^2}{2},$$

$$x_Bx_C+y_By_C=\frac{2-a^2}{2},$$

$$x_Cx_A+y_Cy_A=\frac{2-b^2}{2}.$$

所以，

$$ab(a+b+c)\left[\frac{\sum a(b-c)x_A}{ab}\cdot\frac{\sum ax_A}{a+b+c}+\frac{\sum a(b-c)y_A}{ab}\cdot\frac{\sum ay_A}{a+b+c}\right)$$

$$=\sum a(b-c)x_A\cdot\sum ax_A+\sum a(b-c)y_A\cdot\sum ay_A$$

$$=\sum a^2(b-c)(x_A^2+y_A^2)+\sum ab(b-a)(x_Ax_B+y_Ay_B)$$

$$=\sum a^2(b-c)+\sum ab(b-a)\cdot\frac{2-c^2}{2}$$

$$=\sum a^2(b-c)+\sum ab(b-a)-\frac{abc}{2}\sum c(b-a)$$

$$=0.$$

（如读者不熟悉轮换式，可将以上各式中的项全部写出来，例如

$$\sum c(b-a)=c(b-a)+a(c-b)+b(a-c)=0.$$

当然，使用简单的记号$\sum$方便得多）.

请注意，我们并未利用条件 $\angle C=30°$，所以对于**任意**的三角形，均有 $DE\perp OI$。

为了证明 $OI=DE$，只要把 $OI$ 与 $DE$ 的长都算出来，再加以比较即可. 首先

$$OI^2=\sum\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+2\sum\frac{ab}{(a+b+c)^2}\cdot\frac{2-c^2}{2}$$

$$=\sum\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+2\sum\frac{ab}{a+b+c}-abc\sum\frac{c}{(a+b+c)^2}$$

$$=\left(\sum\frac{a}{a+b+c}\right)^2-abc\sum\frac{c}{(a+b+c)^2}$$

$$=1-\frac{abc}{a+b+c}. \tag{23.6}$$

$$\frac{1}{C^2}DE^2=\left(\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x_A\right)^2+\left(\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)y_A\right)^2$$

$$=\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)^2+2\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\cdot\frac{2-c^2}{2}$$

$$=\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)^2+2\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$$

$$+\sum c^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(\sum\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\right)^2+\frac{\sum c(b-c)(a-c)}{abc}$$

$$=\frac{1}{acb}\sum c(b-c)(a-c). \tag{23.7}$$

以上的计算中未用到$\angle C=30°$ 这一条件. 现在我们证明在 $\angle C=30°$ 时，（23.6）、（23.7）两式相等. 容易看

出这时 $\angle AOB=60^\circ$，$\triangle AOB$ 为正三角形，$c=1$。又由余弦定理，在 $\triangle ABC$ 中有

$$a^2+b^2-\sqrt{3}ab=c^2=1$$

代入（23.6）中得

$$OI^2=1-\frac{ab}{a+b+1}=1-\frac{ab(a+b-1)}{(a+b+1)(a+b-1)}$$

$$=1-\frac{ab(a+b-1)}{a^2+b^2+2ab-1}=1-\frac{ab(a+b-1)}{2ab+\sqrt{3}ab}$$

$$=1-(2-\sqrt{3})(a+b-1).$$

同样，

$$DE^2=\frac{a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-b^2a-a^2c-b^2c-c^2a-c^2b}{abc}$$

$$=\frac{1}{ab}[(a+b)(a^2+b^2-ab)+1+3ab-(a+b)ab$$

$$-(a^2+b^2)-(a+b)]$$

$$=\frac{1}{ab}[(a+b)(1+\sqrt{3}ab-ab)+1+3ab-(a+b)ab$$

$$-(1+\sqrt{3}ab)-(a+b)]$$

$$=3-\sqrt{3}+(\sqrt{3}-2)(a+b)$$

$$=1-(a+b-1)(2-\sqrt{3}).$$

所以

$$IO=DE.$$

注（23.6）式给出内心与外心的距离。由于在三角形中，设外接圆、内切圆半径为 $R$、$r$，则

$$abc=ab\cdot 2R\sin C=4R\Delta=4Rrs=2Rr(a+b+c),$$

其中 $\Delta$、$s$ 分别为三角形的面积与半周长。所以（23.6）也

就是

$$OI^2=R^2-2Rr. \tag{23.8}$$

(23.8) 通常称为欧拉公式。

**例 2** (Feuerbach 定理) $\triangle ABC$ 的九点圆与内切圆、傍切圆相切。

**解** 建立坐标如上题. 由第 20 节例 1，九点圆的圆心为

$$K\left(\frac{1}{2}\sum x_A,\ \frac{1}{2}\sum y_A\right),$$

半径为1/2。于是

$$IK^2=\left(\frac{\sum ax_A}{\sum a}-\frac{\sum x_A}{2}\right)^2+\left(\frac{\sum ay_A}{\sum a}-\frac{\sum y_A}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(2\sum a)^2}\left[\left(\sum(a-b-c)x_A\right)^2+\left(\sum(a-b-c)y_A\right)^2\right],$$

其中[ ]

$$=\sum(a-b-c)^2+\sum(a-b-c)(b-c-a)(2-c^2)$$

$$=\left(\sum(a-b-c)\right)^2-\sum c^2(a-b-c)(b-c-a)$$

$$=\left(\sum a\right)^2-\sum c^2\left(c^2-(b-a)^2\right)$$

$$=\left(\sum a\right)^2-\sum c^4+\sum c^2a^2+\sum c^2b^2-2abc\sum a.$$

由三角形面积公式（$\varDelta$表示面积）

$$-\sum c^4+\sum c^2a^2+\sum c^2b^2=16\varDelta^2,$$

所以

$$IK^2=\frac{1}{(2\sum a)^2}\left[\left(\sum a\right)^2+16\varDelta^2-2abc\sum a\right].$$

另一方面，$\varDelta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}abc$（因为外接圆半径为1），

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{2\varDelta}{\sum a}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{abc}{2\sum a}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(2\sum a)^2}(\sum a-abc)^2$$

$$=\frac{1}{(2\sum a)^2}[(\sum a)^2-2abc\sum a+a^2b^2c^2]$$

$$=\frac{1}{(2\sum a)^2}[(\sum a)^2-2abc\sum a+16\Delta^2].$$

因此 $IK^2=\left(\frac{1}{2}-r\right)^2$，即九点圆与内切圆内切.

用类似的计算可以证明九点圆与三个傍切圆外切.

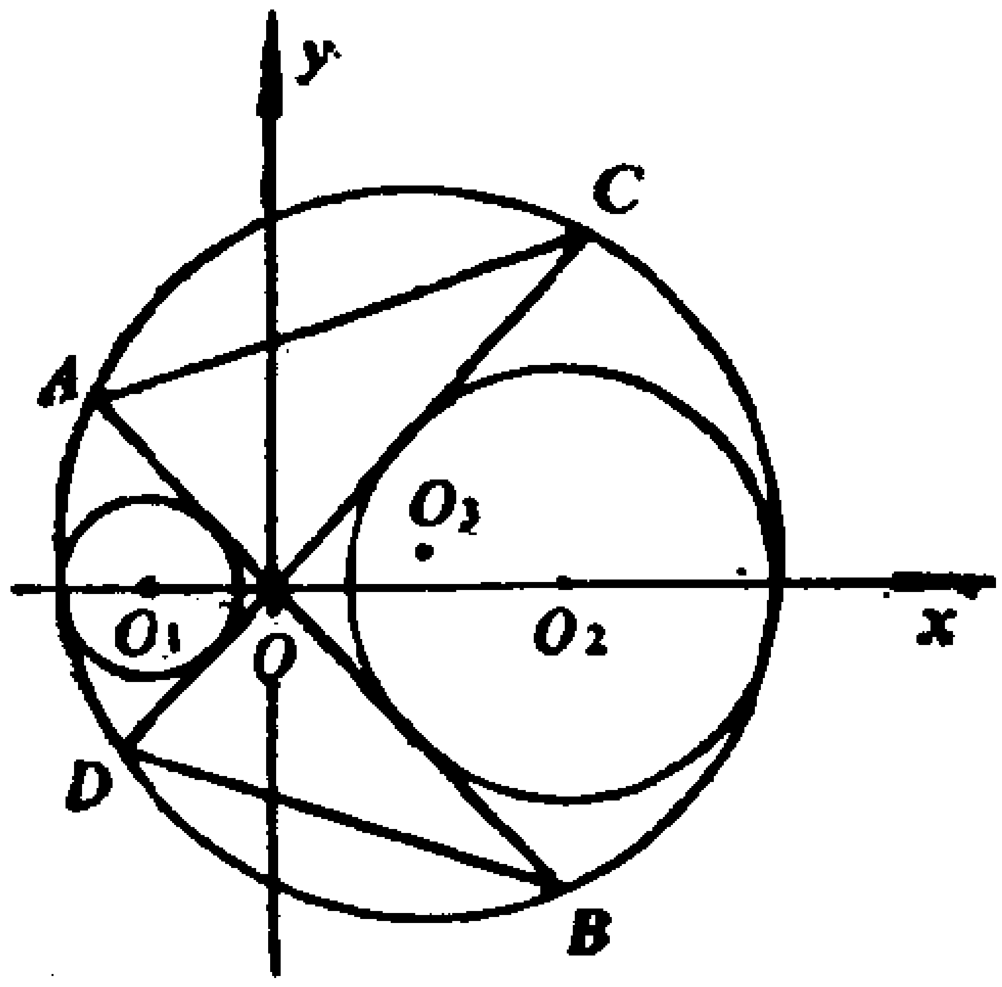


图 22

下面的两个问题是叶中豪先生提供的：

**例 3** $\odot O_1$、$\odot O_2$均与$\odot O_3$内切，$\odot O_1$、$\odot O_2$的内公切线$AB$、$CD$分别交$\odot O_3$于$A$、$B$、$C$、$D$，求证$AC$、$BD$分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$的两条外公切线平行(图22)。

**证** 以$\odot O_1$、$\odot O_2$的内相似心$O$（也就是内公切线$AB$、$CD$的交点）为坐标原点，直线$O_1O_2$为$x$轴，建立直角坐标系。设$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为$r_1$、$r_2$，$\angle O_2OC=\alpha$，则$O_1$、$O_2$的横坐标分别为

$$a_1=-\frac{r_1}{\sin\alpha},\quad a_2=\frac{r_2}{\sin\alpha}.$$

$AB$、$CD$的方程为

$$x^2\sin^2\alpha-y^2\cos^2\alpha=0. \qquad (23.9)$$

又设$\odot O_3$的方程为

$$(x-c)^2+(y-d)^2=R^2. \qquad (23.10)$$

将（23.10）乘 $4r_1r_2$ 减去（23.9）乘 $(a_1-a_2)^2$ 得

$$4r_1r_2(x^2-2cx+y^2-2dy+f)$$
$$-(a_1-a_2)^2(x^2\sin^2\alpha-y^2\cos^2\alpha)=0. \qquad (23.11)$$

其中

$$f=c^2+d^2-R^2.$$

（23.11）当然过 $A$、$C$、$B$、$D$ 四点，它可以写成

$$-(r_1-r_2)^2x^2+[(a_1-a_2)^2-(r_1-r_2)^2]y^2$$
$$-8r_1r_2cx-8r_1r_2dy+4r_1r_2f=0. \qquad (23.12)$$

（23.12）如果表示（两条）直线，则由第 19 节（19.22），这两条直线（分别）与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的外公切线平行，因此，只要证明（23.12）可以分解．由第11节（11.4），这等价于行列式

$$\begin{vmatrix} -(r_1-r_2)^2 & 0 & -4r_1r_2c \\ 0 & (a_1-a_2)^2-(r_1-r_2)^2 & -4r_1r_2d \\ -4r_1r_2c & -4r_1r_2d & 4r_1r_2f \end{vmatrix}=0.$$

(23.13)

即要证

$$\begin{vmatrix} (r_1-r_2)^2 & 0 & c \\ 0 & (r_1-r_2)^2-(a_1-a_2)^2 & d \\ -4r_1r_2c & -4r_1r_2d & f \end{vmatrix}$$

$$=[f(r_1-r_2)^2+4r_1r_2c^2][(r_1-r_2)^2-(a_1-a_2)^2]$$
$$+4r_1r_2(r_1-r_2)^2d^2=0. \qquad (23.13')$$

注意 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 内切，所以

$$(a_1-c)^2+d^2=(R-r_1)^2, \qquad (23.14)$$
$$(a_2-c)^2+d^2=(R-r_2)^2. \qquad (23.15)$$

即

$$r_1^2\operatorname{ctg}^2\alpha+2\left(r_1 R+\frac{cr_1}{\sin\alpha}\right)+f=0, \qquad (23.14')$$

$$r_2^2\operatorname{ctg}^2\alpha+2\left(r_2 R-\frac{cr_2}{\sin\alpha}\right)+f=0. \qquad (23.15')$$

(23.15′) 乘 $r_1$ 减去(23.14′) 乘 $r_2$ (消去$R$)得

$$r_1r_2\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot(r_2-r_1)-\frac{4r_1r_2}{\sin\alpha}c+(r_1-r_2)f=0. \quad (23.16)$$

由 (23.16) 可得出$(r_1-r_2)f$，从而（消去$f$后）(23.13′)式左边成为

$$r_1r_2\left[4c^2+\frac{4(r_1+r_2)}{\sin\alpha}\cdot c+(r_1-r_2)^2\operatorname{ctg}^2\alpha\right]\cdot$$

$$[(r_1-r_2)^2-(a_1-a_2)^2]+4r_1r_2(r_1-r_2)^2d^2$$
$$=r_1r_2(r_1-r_2)^2[(r_1-r_2)^2-(a_1-a_2)^2]$$
$$\cdot\left\{\frac{4\left(c-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}{(r_1-r_2)^2}-\frac{4d^2}{(a_2-a_1)^2-(r_1-r_2)^2}-1\right\}\cdot$$

(23.17)

由于$O_3$到$O_2$、$O_1$的距离之差为$r_2-r_1$，所以$O_3$在以$O_1$、$O_2$为焦点的双曲线上，这双曲线的焦距为$a_2-a_1$，实轴为$r_2-r_1$，虚轴为$[(a_2-a_1)^2-(r_1-r_2)^2]^{1/2}$，中心为$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ 0\right)$，所以上面{　}中的值为零，即(23.13′)成立。证毕。

注1　不利用行列式时也可以用（23.12）式左边可分解为（这里$l=\sqrt{(a_1-a_2)^2-(r_1-r_2)^2}$是内公切线的长）

$$[(r_1-r_2)x+ly+m][-(r_1-r_2)x+ly+n]$$

的充分必要条件是

$$(m+n)l=-8r_1r_2d,$$
$$(m-n)(r_2-r_1)=-8r_1r_2c,$$
$$mn=-4r_1r_2f.$$

即（消去 $m$、$n$）

$$r_1r_2\left[-\frac{4d^2}{l^2}+\frac{4c^2}{(r_1-r_2)^2}\right]=f, \qquad (23.18)$$

然后由（23.16）及（23.17）的{ }为 0 即知（23.18）成立。

注 2　$\odot O_1$、$\odot O_2$ 中有一个与$\odot O_3$ 外切、一个与 $\odot O$ 内切或两个都与$\odot O_3$ 外切时，类似的结论也成立。

注 3　熟悉反演的读者选取适当的点为反演中心，可以由例 3 导出许多有趣的结果。

注 4　作者没有在文献中发现这个命题，很可能是一个新命题。作者也不知道这个命题的纯几何证明。

**例 4**　以 $\triangle ABC$ 的边为边向外作正方形 $ABEF$、$BCGH$、$CAIJ$（图23）。$AH$、$BJ$ 交于 $P_1$，$BJ$、$CF$ 交于 $Q_1$，$CF$、$AH$ 交于 $R_1$；$AG$、$CE$ 交于 $P_2$，$BI$、$AG$ 交于 $Q_2$，$CE$、$BI$交于 $R_2$。求证 $\triangle P_1Q_1R_1\cong\triangle P_2Q_2R_2$。

**证**　绕 $A$ 点旋转 $\phi=\pi/2$，则$F$点成为$B$，$C$点成为$I$，所以$CF$与$BI$的夹角为 $\phi$，于是$\triangle P_1Q_1R_1$的边与$\triangle P_2Q_2R_2$的对应边的夹角都是 $\phi$。将$\triangle P_1Q_1R_1$（绕任一点）旋转$\phi$后，它的边与$\triangle P_2Q_2R_2$ 的对应边平行。所以

$$\triangle P_1Q_1R_1\sim\triangle P_2Q_2R_2.$$

为了证实这两个三角形是全等的，我们证明它们的面积相等。

之所以选择面积而不选择边长，是因为面积 顶点坐标

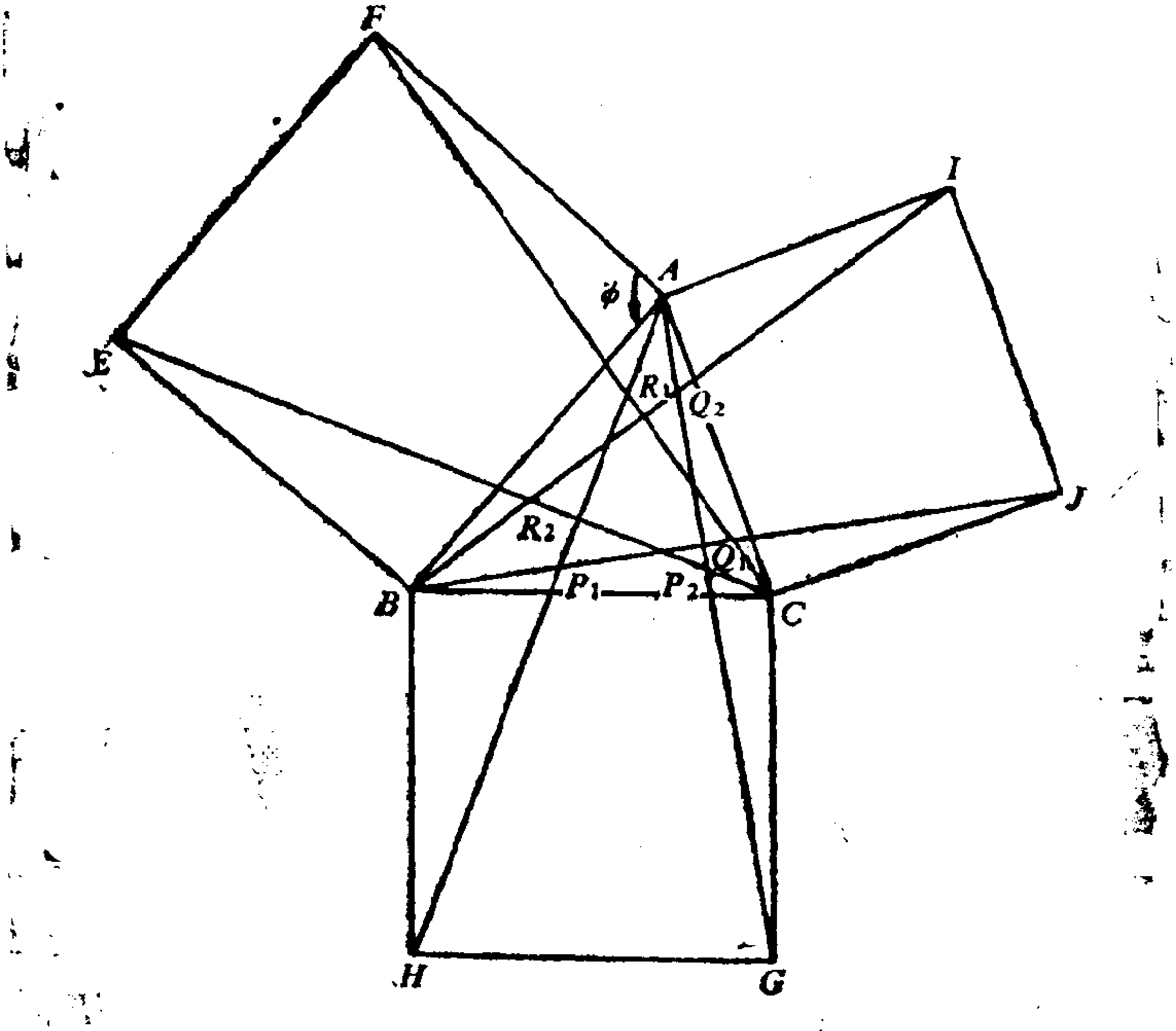


图 23

（或边长）的对称函数，而某一边之长不是对称函数。不对称，是解析几何的大忌。

由第 15 节例 2，我们知道直线 $l_i$：

$$a_i x + b_i y = c_i \quad (i = 1,2,3) \tag{23.19}$$

所围成的三角形的面积为

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right|^2 \Bigg/ 2\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{matrix}\right|. \tag{23.20}$$

设 $AH$、$BJ$、$CF$ 分别为 $l_1$、$l_2$、$l_3$，$CE$、$AG$、$BI$ 分别为 $l'_1$、$l'_2$、$l'_3$ .$l'_i$的方程是

$$a'_i x + b'_i y = c'_i.\quad (i=1,2,3) \tag{23.21}$$

设点 $A$、$B$、…的复数表示为 $A$、$B$、…则

$$H-B=-i(C-B).$$

（即向量 $\overrightarrow{BH}$ 由向量 顺 $\overrightarrow{CB}$ 时针旋转 $\pi/2$ 得出）所以

$$\begin{aligned} x_H + iy_H &= x_B + iy_B - i[(x_C - x_B) + i(y_C - y_B)] \\ &= x_B + iy_B + y_C - y_B - i(x_C - x_B), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} x_H &= x_B - y_B + y_C, \\ y_H &= y_B - x_C + x_B. \end{aligned}$$

于是过 $A$、$H$ 两点的直线 $l_1$ 为

$$\begin{aligned} &(y_B - y_A + x_B - x_C)x - (x_B - x_A + y_C - y_B)y \\ &= (y_B - y_A + x_B - x_C)x_A - (x_B - x_A + y_C - y_B)y_A. \end{aligned}$$

即

$$a_1 = y_B - y_A + x_B - x_C, \tag{23.22}$$

$$b_1 = -(x_B - x_A + y_C - y_B), \tag{23.23}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 x_A + b_1 y_A \\ &= y_B x_A - x_B y_A + x_A x_B - x_C x_A + y_A y_B - y_C y_A \end{aligned} \tag{23.24}$$

将字母 $A$、$B$、$C$ 轮换即可得出 $a_i$、$b_i$、$c_i$ 及 $l_i\,(i=2,3)$.

由于 $l'_i$ 与 $l_i$ 的夹角为 $\phi=\pi/2$，所以 $l'_1$ 为

$$-b_1 x + a_1 y = -b_1 x_C + a_1 y_c,$$

即

$$a'_1 = -b_1,\quad b'_1 = a_1, \tag{23.25}$$

$$\begin{aligned} c'_1 = -b_1 x_C + a_1 y_C = y_C x_B - x_C y_B + x_B x_C - x_C x_A + y_B y_C \\ - y_C y_A. \end{aligned} \tag{23.26}$$

$a'_i$、$b'_i$、$c'_i$ 及 $l'_i\,(i=2,3)$ 有类似的表达式.

于是，由（23.20）、（23.25）等可知，我们只需要证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3' \end{vmatrix}. \tag{23.26}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 - c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 - c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 - c_3' \end{vmatrix} = 0. \tag{23.27}$$

将（23.27）左边的行列式的第一行、第二行加到第三行上，注意由（23.22）、（23.23）、（23.24）、（23.26）等，

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 0, \tag{23.28}$$

$$(c_1 + c_2 + c_3) - (c_1' + c_2' + c_3')$$

$= (x_A y_B - x_B y_A + x_B y_C - x_C y_B + x_C y_A - x_A y_C) -$（内容同前）$= 0$，　　(23.29)

所以行列式的第三行元素全变为 0，（23.27）成立。

注 1　为了证明（23.29）成立，也可以选择顶点坐标为

$$A(0,0),\ B(1,0),\ C(x_C, y_C).$$

代入计算：

$$\begin{aligned} &(c_1 + c_2 + c_3) - (c_1' + c_2' + c_3') \\ &= (a_2 + a_3 x_C + b_3 y_C) - (a_1 y_C - b_1 x_C - b_3) \\ &= (y_C + x_C) + x_C(-1 - y_C) - y_C(1 - x_C) + y_C x_C + \\ &\quad + x_C(-1 - y_C) + x_C = 0. \end{aligned}$$

注 2　叶中豪先生还将例 4 中的正方形推广为两腰与下底（三角形的边）相等的相似梯形。

如果用解析几何来证，方法与上面类似。首先令腰与下

底的夹角为 $\phi$，

$$e^{-i\phi}=m+ni,\quad m^2+n^2=1. \tag{23.30}$$

则

$$H=B+(C-B)\cdot e^{-i\phi}$$

$$=(x_B+y_B i)+[(x_C-x_B)+i(y_C-y_B)](m+ni)$$

$$=[x_B+m(x_C-x_B)-n(y_C-y_B)]+[y_B+m(y_C-y_B)$$

$$+n(x_C-x_B)]i,$$

$l_1$ 的方程为

$$[y_B-y_A+m(y_C-y_B)+n(x_C-x_B)]x-[x_B-x_A+m(x_C-$$

$$-x_B)-n(y_C-y_B)]y=c_1,$$

其中

$$c_1=a_1x_A+b_1y_A,$$

$$a_1=y_B-y_A+m(y_C-y_B)+n(x_C-x_B),$$

$$b_1=-(x_B-x_A+m(x_C-x_B)-n(y_C-y_B)).$$

而 $l'_1$ 的方程为

$$a'_1x+b'_1y=c_1.$$

其中（由于 $l'_1$ 与 $l_1$ 的夹角为 $\phi$）

$$a'_1+b'_1i=(a_1+b_1i)\cdot e^{-i\phi}$$

$$=(a_1+b_1i)(m+ni)=(ma_1-nb_1)+i(na_1+mb_1),$$

即

$$a'_1=ma_1-nb_1,$$

$$b'_1=na_1+mb_1,$$

$$c'_1=a'_1x_C+b'_1y_C=m(a_1x_C+b_1y_C)+n(a_1y_C-b_1x_C).$$

标号为2、3的其他各量可以由字母轮换得出。

不难验证等式

$$\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

等成立（最简单的方法是用向量。向量$\{a'_1,b'_1\}$、$\{a'_2,b'_2\}$分别由$\{a_1,b_1\}$，$\{a_2,b_2\}$旋转$\phi$而得到，所以前两个的叉积的模与后两个的相等）。于是只要证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1-nb_1 & na_1+mb_1 & c'_1 \\ ma_2-nb_2 & na_2+mb_2 & c'_2 \\ ma_3-nb_3 & na_3+mb_3 & c'_3 \end{vmatrix}. \qquad (23.26')$$

上式右边行列式

$$= m^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c'_1 \\ a_2 & b_2 & c'_2 \\ a_3 & b_3 & c'_3 \end{vmatrix} + n^2\begin{vmatrix} -b_1 & a_1 & c'_1 \\ -b_2 & a_2 & c'_2 \\ -b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c'_1 \\ a_2 & b_2 & c'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

所以（23.26′）即，（23.26），它等价于（23.27）。用与前面完全相同的方法便可导出。

注 3　上面的例 4 及其推广，作者未在文献中见过。叶先生有一个优雅的、纯几何的证明。囿于篇幅，不能收在这里诚为憾事。

# 24 二 次 曲 线

在一定意义上说，解析几何是研究二次曲线。二次曲线的问题非常之多，本节我们举一些例子。其余的放在第25节韦达定理与第26第二次曲线束中去处理。

**例 1**　自椭圆的准线上一点$P$引两条切线，证明连结切点的弦$T_1T_2$垂直于$PF$，这里$F$是与所说准线在同一侧的焦点。

**证**　设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{24.1}$$

点$P$坐标为$\left(\frac{a^2}{c},\ y_1\right)$，$F$ 坐标为（$c$，0），这里

$$c=(a^2-b^2)^{1/2},$$

于是$PF$的斜率为

$$\frac{y_1}{\frac{a^2}{c}-c}=\frac{cy_1}{a^2-c^2}=\frac{cy_1}{b^2} \tag{24.2}$$

与圆的情况类似（很多关于圆的结果都可以推广到二次曲线，证明完全一样），点$P$的极线$T_1T_2$的方程为

$$\frac{(a^2/c)x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1. \tag{24.3}$$

其斜率之负倒数为

$$+\frac{y_1}{b^2}\Bigg/\frac{a^2/c}{a^2}=\frac{cy_1}{b^2},$$

即（24.2）．因此$PF\perp T_1T_2$.

注　本题有多种解法．利用极线方程（24.3）比较简单．

**例 2**　椭圆的外切四边形的对角线的中点连线必过椭圆中心．

**解**　设椭圆的方程为（24.1），它的参数表示为

$$x=a\cos\theta, \tag{24.4}$$

$$y=b\sin\theta. \tag{24.5}$$

其中$\theta$称为离心角．设外切四边形的四个切点$E$、$F$、$G$、$H$的离心角分别为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\delta$，则过$E$的切线$AD$的方程为

$$\frac{x\cos\alpha}{a}+\frac{y\sin\alpha}{b}=1, \tag{24.6}$$

过$F$的切线$AB$为

$$\frac{x\cos\beta}{a}+\frac{y\sin\beta}{b}=1. \tag{24.7}$$

由（24.6）、（24.7）解得（例如用第 15 节行列式来解）$A$点坐标为

$$A\left(\frac{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},\ \frac{b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right).$$

同样$C$点为

$$C\left(\frac{a\cos\frac{\gamma+\delta}{2}}{\cos\frac{\gamma-\delta}{2}},\ \frac{b\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{\cos\frac{\gamma-\delta}{2}}\right).$$

于是$AC$的中点$M$为

$$M\left(\frac{a\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}+\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}},\right.$$

$$\left.\frac{b\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}+\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}}\right).$$

$OM$的斜率为

$$\frac{b\left(\sin(s-\alpha)+\sin(s-\beta)+\sin(s-\gamma)+\sin(s-\delta)\right)}{a\left(\cos(s-\alpha)+\cos(s-\beta)+\cos(s-\gamma)+\cos(s-\delta)\right)}. \tag{24.8}$$

其中 $s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

同样$ON$的斜率也是（24.8），这里$N$是$BD$的中点。于是$AC$、$BD$中点连线$MN$过$O$。

注 1　椭圆、双曲线、抛物线的参数方程也经常使用。尤其（24.4）、（24.5）使用起来颇为便利。这些参数方程把点（$x_1$，$y_1$）在曲线上所需要满足的条件（例如24.1），化为一个参数$\theta$（或其他参数），省去利用（24.1）来消去两个字母$x_1$、$y_1$的麻烦。当然，这些麻烦的取消是以一些三角运算为代价的，幸而本题的三角运算并不困难。

注 2　例 2 中用了两次“同样”，这体现了解析几何的“整齐”之“美”。

注 3　本题的特殊情况是圆的外切四边形对角线中点连线过圆心。不用解析几何是不易证明的，而且很难避免复杂的计算。

注 4　用第31节的术语可以把命题叙述成椭圆的外切四边形的牛顿线过椭圆中心。

**例 3**　自双曲线上任一点引另一条有相同渐近线的双曲线的切线，则过两个切点的直线与两条渐近线围成的三角形的面积为定值。

**解**　设$P(x_P, y_P)$为双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{24.9}$$

上一点。则它关于双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k$$

的极线为

$$\frac{x_P x}{a^2}-\frac{y_P y}{b^2}=k.$$

它与渐近线

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

及

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

的交点 $A$、$B$ 的横坐标分别为

$$x_A=\frac{ak}{\dfrac{x_P}{a}-\dfrac{y_P}{b}},\quad x_B=\frac{ak}{\dfrac{x_P}{a}+\dfrac{y_P}{b}}. \qquad (24.10)$$

而$\triangle OBA$的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & O & O\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_A & y_A\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_B & y_B\\ x_A & y_A\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(x_By_A-x_Ay_B)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_B\cdot\frac{b}{a}x_A+x_A\cdot\frac{b}{a}x_B\right)$$

$$=\frac{b}{a}x_Ax_B, \qquad (24.11)$$

由（24.10）、（24.11）得

$$S=abk^2\Big/\left[\left(\frac{x_P}{a}-\frac{y_P}{b}\right)\left(\frac{x_P}{a}+\frac{y_P}{b}\right)\right]$$

$$=abk^2\Big/\left[\frac{x_P^2}{a^2}-\frac{y_P^2}{b^2}\right]=abk^2.$$

注 1　切勿把（24.10）中的繁分数化为普通分数。化简是重要的，但如果破坏了形式的整齐，那就得不偿失了。化简无非是为了简化运算，在解析几何中，要简化运算就必须保持整齐的形式。

注 2　本题也可引进参数表示 $x=a\sec\theta$，$y=b\operatorname{tg}\theta$ 或 $x=a\operatorname{ch}t$，$y=a\operatorname{sh}t$（$\operatorname{ch}t$，$\operatorname{sh}t$ 是所谓双曲正弦与双曲余弦）

来解。

注 3　如果利用仿射变换，例 3 还可做得简单些。因为利用仿射变换可以将双曲线变为等边双曲线，如果以渐近线为坐标轴，它的方程可表为 $xy=1$。$xy=1$ 上一点 $P$ 关于双曲线 $xy=k$ 的极线为 $x_P x+y_P y=2k$，与坐标轴构成面积为 $\frac{1}{2}\left(\frac{2k}{x_P}\cdot\frac{2k}{y_P}\right)=2k^2$ 的三角形。而在仿射变换下，所有图形的面积均依同样比值缩小或放大。特别地，在向 $x$ 轴压缩 $1/a$，向 $y$ 轴压缩 $1/b$ 时，这比值为 $1/ab$，所以原来的三角形的面积为 $2abk^2$。这里的系数 2 是由于我们考虑的双曲线是 $xy=1$ 而不是 $xy=\frac{1}{2}$。

**例 4**　抛物线 $y^2=2px$ 上两点 $P_1$、$P_2$ 的纵坐标之差 $|y_1-y_2|=4p$，则以 $P_1P_2$ 为直径的圆与抛物线在另一公共点处相切。

**解**　由第18节例 1，圆的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0, \qquad (24.12)$$

抛物线的方程即

$$x=\frac{y^2}{2p}, \qquad (24.13)$$

所以

$$x_1=\frac{y_1^2}{2p},\ x_2=\frac{y_2^2}{2p}. \qquad (24.14)$$

将 (24.13)、(24.14) 代入 (24.12) 得

$$(y^2-y_1^2)(y^2-y_2^2)+4p^2(y-y_1)(y-y_2)=0. \qquad (24.15)$$

这是图 (24.12) 与抛物线 (24.13) 的公共点的纵坐标所需满足的条件。在 (24.15) 两边约去 $(y-y_1)(y-y_2)$ 得

$$(y+y_1)(y+y_2)+4p^2=0. \qquad (24.16)$$

这里$P_1$、$P_2$以外的两个公共点（的纵坐标）所需满足的要求。

所谓圆（24.12）与抛物线（24.13）相切，就是它们有“两个”公共点合而为一. 现在二次方程（24.16）的判别式为

$$(y_1+y_2)^2-4(4p^2+y_1y_2)=(y_1-y_2)^2-16p^2.$$

由已知$|y_1-y_2|=4p$，这判别式为0，（24.16）有等根，圆与抛物线在$P_1$、$P_2$以外的公共点处相切.

注　一次或二次曲线与另一二次曲线相切均指它们有“两个”公共点合而为一，因此通常用二次方程的判别式去处理.

**例 5**　以抛物线的两条过焦点$F$的弦$AB$、$CD$为直径各作一圆，这两个圆的公共弦必过顶点$O$.

**解**　设抛物线为

$$y^2=4x. \qquad (24.17)$$

所作的圆为

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0,$$

及

$$(x-x_C)(x-x_D)+(y-y_C)(y-y_D)=0.$$

两式相减得公共弦的方程为

$$ax+by+x_Ax_B+y_Ay_B-(x_Cx_D+y_Cy_D)=0. \qquad (24.18)$$

其中系数$a$、$b$不必明确表示出来.

由于$AB$过焦点$F(1,\ 0)$，所以$A$、$B$是直线

$$y=k(x-1) \qquad (24.19)$$

与（24.17）的交点. 由（24.17）、（24.19）消去$x$得

$$4y=k(y^2-4). \qquad (24.20)$$

根据韦达定理，(24.20) 的两根 $y_A$、$y_B$ 之积为

$$y_Ay_B=-4. \tag{24.21}$$

于是由 (24.17)、(24.21)

$$x_Ax_B+y_Ay_B=\frac{1}{16}y_A^2y_B^2+y_Ay_B=1-4=-3, \tag{24.22}$$

同样

$$x_Cx_D+y_Cy_D=-3. \tag{24.23}$$

由 (24.18)、(24.22)、(24.23) 可知，公共弦的方程为

$$ax+by=0$$

它当然过顶点 $O(0,\ 0)$.

**例 6** $A$、$B$ 为抛物线上两点，$AR$、$BR$ 为切线. 求证 $\angle AFR=\angle RFB$.

**证** 设抛物线为

$$y^2=4x,$$

点 $A$、$B$ 的参数表示为

$$x_A=t_A^2,\qquad y_A=2t_A. \tag{24.24}$$

$$x_B=t_B^2,\qquad y_B=2t_B. \tag{24.25}$$

过 $A$ 的切线 $AR$ 的方程为

$$2t_Ay=2x+2t_A^2.$$

即

$$t_Ay=x+t_A^2. \tag{24.26}$$

$BR$ 方程为

$$t_By=x+t_B^2. \tag{24.27}$$

由 (24.26)、(24.27) 得交点 $R$ 为

$$R(t_At_B,\ t_A+t_B), \tag{24.28}$$

直线 $FA$ 的方程为

$$y=\frac{2t_A}{t_A^2-1}(x-1), \tag{24.29}$$

改写成法线式

$$\frac{2t_Ax-(t_A^2-1)y-2t_A}{t_A^2+1}=0.$$

于是$R$到$FA$的距离为

$$\frac{2t_A^2t_B-(t_A^2-1)(t_A+t_B)-2t_A}{t_A^2+1}$$

$$=\frac{t_A^2t_B-t_A^3-t_A+t_B}{t_A^2+1}=t_B-t_A. \tag{24.30}$$

同样，$R$到$FB$的距离为

$$t_A-t_B. \tag{24.31}$$

因此$R$到$FA$与$FB$的距离（的绝对值）相等，$R$在$\angle AFB$的平分线上。

注 1　抛物线的参数方程$x=2pt^2$，$y=2pt$。也是常用的。

注 2　本例及上例中均设抛物线方程为$y^2=4x$，对于一般形式的抛物线$y^2=2px$，解法完全相同。可以理解为，我们把$OF$作为$x$轴上的单位长，也可以认为是作了一个仿射变换（向$y$轴压缩），使$y^2=2px$变为$y^2=4x$。

注 3　(24.30) 与 (24.31) 异号表明当$A$、$B$在轴的同侧时，原点（即抛物线的顶点）$O$不在$\angle AFB$内．当$A$、$B$在轴的异侧时（$t_A$与$t_B$异号），原点$O$在$\angle AFB$内．

**例 7**　求证抛物线上三点$A$、$B$、$C$所成三角形的面积等于以这三点为切点的切线所成三角形的面积的两倍。

**证**　设抛物成方程为$y^2=4x$，三点为

$$A(t_A^2,\ 2t_A),\ B(t_B^2,\ 2t_B),\ C(t_C^2,\ 2t_C). \tag{24.32}$$

由例6，三条切线的交点为

$$P(t_Bt_C,\ t_B+t_C),\ Q(t_Ct_A,\ t_C+t_A),$$
$$R(t_At_B,\ t_A+t_B). \qquad (24.33)$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & t_A^2 & 2t_A\\ 1 & t_B^2 & 2t_B\\ 1 & t_C^2 & 2t_C\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & t_A & t_A^2\\ 1 & t_B & t_B^2\\ 1 & t_C & t_C^2\end{vmatrix}$$
$$=-(t_A-t_B)(t_B-t_C)(t_C-t_A). \qquad (24.34)$$

$$2S_{\triangle PQR}=\begin{vmatrix}1 & t_Bt_C & t_B+t_C\\ 1 & t_Ct_A & t_C+t_A\\ 1 & t_At_B & t_A+t_B\end{vmatrix}$$
$$=-t_At_B\begin{vmatrix}1 & t_B+t_C\\ 1 & t_C+t_A\end{vmatrix}-t_Bt_C\begin{vmatrix}1 & t_C+t_A\\ 1 & t_A+t_B\end{vmatrix}-t_Ct_A\begin{vmatrix}1 & t_A+t_B\\ 1 & t_B+t_C\end{vmatrix}$$
$$=-t_At_B(t_A-t_B)-t_Bt_C(t_B-t_C)-t_Ct_A(t_C-t_A)$$
$$=(t_A-t_B)(t_B-t_C)(t_C-t_A). \qquad (24.35)$$

于是$\triangle ABC$的面积是$\triangle PQR$的2倍（(24.35)与(24.34)异号表明两个三角形的方向不同）．

**例 8** 证明例7中的$\triangle PQR$的垂心$H$在准线上．

**证** 由例6，$PR$方程为

$$t_Ay=x+t_A^2, \qquad (24.26)$$

因此$PR$边上的高为

$$t_Ax+y=t_A\cdot x_Q+y_Q, \qquad (24.36)$$

即（因为$Q$点坐标可由(24.28)得出）

$$t_Ax+y=t_At_Bt_C+t_B+t_C, \qquad (24.37)$$

或写成

$$t_A(x+1)+y=t_At_Bt_C+t_A+t_B+t_C. \qquad (24.37')$$

由此可见点$(-1,\ t_At_Bt_C+t_A+t_B+t_C)$在高(24.37')

上。

根据对称性，这点也在其它的高上，因而垂心$H$就是

$$H(-1,\ t_At_Bt_C+t_A+t_B+t_C),$$

它显然在准线 $x=-1$ 上。

## 25 韦 达 定 理

二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{25.1}$$

的根 $x_1$、$x_2$ 满足

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \tag{25.2}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{25.3}$$

这就是解析几何中应用最为广泛的韦达定理、它的好处在于使我们免去解方程（25.1）的麻烦，直接由根与系数的关系（即（25.2）或（25.3）），导出所需要的结果。

更一般地，对于 $n$ 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{25.4}$$

的根 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$，有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{25.5}$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\cdot\frac{a_n}{a_0}.$$

但在解析几何中，三、四次方程的韦达定理尚有时用到，更高次的没有多少用处。

先讨论一个直线与圆的问题。

**例 1** 直线 $l_1$、$l_2$ 互相平行，分别与⊙$O$ 相切于 $A$、$B$。过 $l_2$ 上任一点 $G$ 作两条割线，分别交圆 $O$ 于 $C_1$、$C_2$，$D_1$、$D_2$。$AC_1$、$AC_2$、$AD_1$、$AD_2$ 分别交 $l_1$ 于 $E_1$、$E_2$、$F_1$、$F_2$（图24）。求证 $E_1F_1=F_2E_2$。

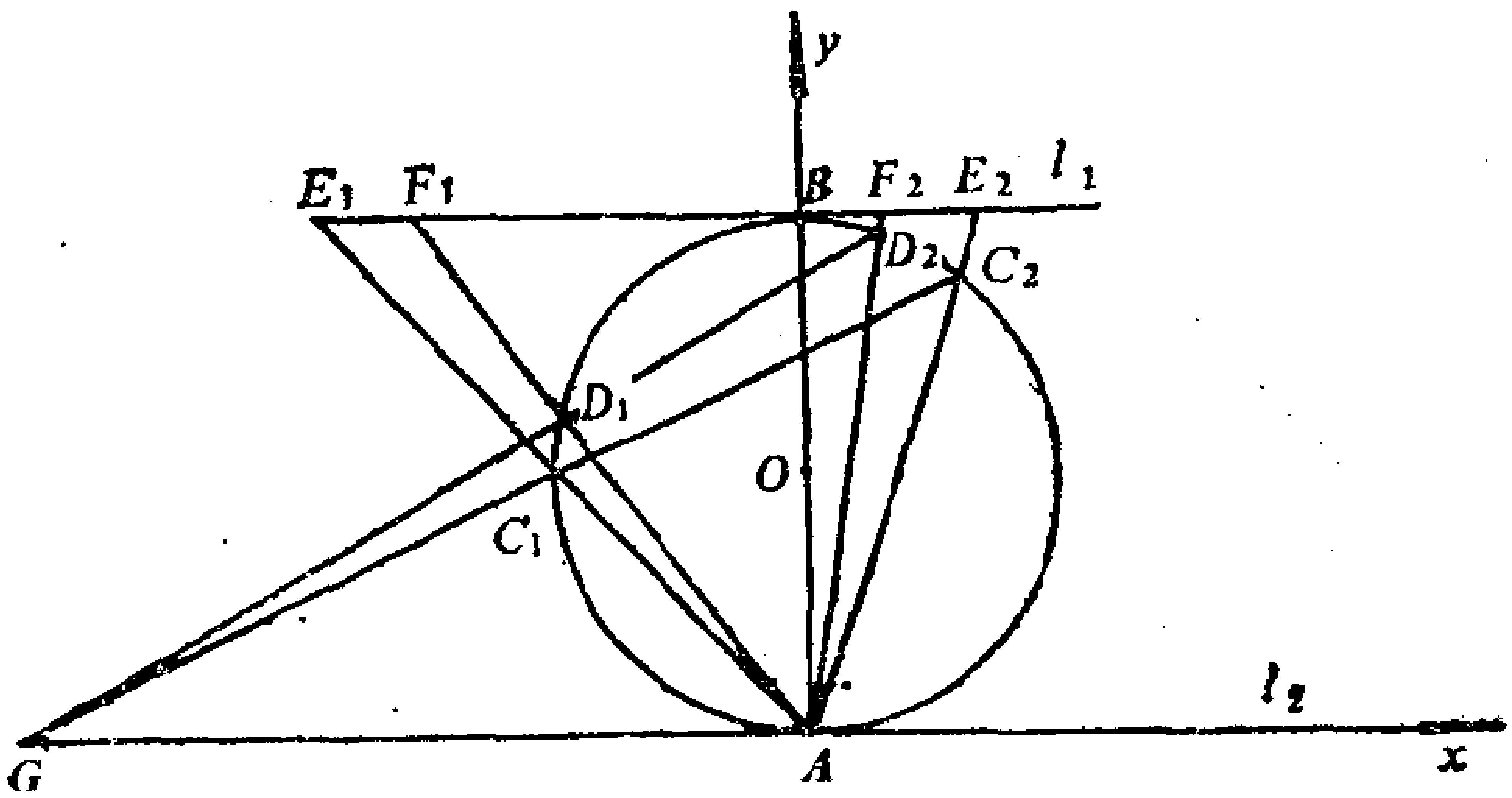


图 24

**证** 要证明的结论等价于 $E_1E_2$ 与 $F_1F_2$ 有相同的中点。

以 $A$ 为原点，$l_2$ 为 $x$ 轴，$AB$ 为 $y$ 轴。设 $B$、$G$ 坐标分别为 $(0,\ b)$，$(g,\ 0)$，过 $G$ 的割线 $GC_1$ 的方程为

$$y=k(x-g), \tag{25.6}$$

⊙$O$ 的方程应为（参见第12节例 1）

$$x^2+y^2-by=0,$$

所以由第12节例 4，直线 $AC_1$、$AC_2$ 的方程为

$$x^2+y^2-by\left(\frac{kx-y}{kg}\right)=0,$$

$l_1$的方程为

$$y=b,$$

所以$E_1$、$E_2$的横坐标是

$$x^2-\frac{b^2}{g}x+\left(b^2+\frac{b^3}{kg}\right)=0$$

的两个根。由韦达定理

$$x_{E_1}+x_{E_2}=\frac{b^2}{g},$$

从而$E_1E_2$的中点为 $M\left(\frac{b^2}{2g},\ 0\right)$，它的位置与直线$GC_1$的斜率$k$毫无关系．所以$F_1F_2$的中点也是$M$。证毕．

注　求中点的问题往往可用韦达定理．

**例 2**　直线$x-2y+1=0$交圆$x^2+y^2=9$于$A$、$B$，求$AB$的中点$M$的坐标及$AB$的长。

**解**　直线的方程可写成

$$x=2y-1,$$

代入

$$x^2+y^2=9$$

中，经化简得

$$5y^2-4y-8=0,$$

于是

$$y_A+y_B=4/5,$$

从而 $y_M=2/5$,

$$x_M=2y_M-1=-\frac{1}{5},$$

由勾股定理

$$AB=2AM=2\sqrt{9-(2/5)^2+(-1/5)^2}=\frac{4}{5}\sqrt{55}.$$

注　本题的解法很多。例如由 $OM\perp AM$ 可以得出 $OM$ 方程为 $2x+y=0$，与 $x-2y+1=0$ 联立解出 $M$ 的坐标．$AB$ 也可由 $\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{5(y_A-y_B)^2}=\sqrt{5[(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B]}$ 求出。

**例 3**　自抛物线 $y^2=2px$ 的顶点 $O$ 任作两条互相垂直的直线，分别交抛物线于 $P$、$Q$。证明弦 $PQ$ 与抛物线的轴相交于定点。

**证**　设 $PQ$ 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

则由第 12 节例 4，直线 $OP$、$OQ$ 的方程为

$$y^2-2px\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0,$$

即

$$y^2-\frac{2p}{b}xy-\frac{2p}{a}x^2=0. \tag{25.7}$$

因为 $OP\perp OQ$，它们的斜率 $k_1$、$k_2$ 的乘积

$$k_1k_2=-1, \tag{25.8}$$

由韦达定理及方程（25.7）（25.8）得

$$-\frac{2p}{a}=-1,$$

即

$$a=2p,$$

于是 $PQ$ 与轴交于定点（$2p$，0）．

**例 4**　$P_1$、$P_2$ 为抛物线上任意两点，过这两点的切线相交于 $Q$。$F$ 为抛物线的焦点。求证

$$QF^2 = P_1F \times P_2F. \tag{25.9}$$

**证**　以准线为 $y$ 轴，抛物线的方程为

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right). \tag{25.10}$$

设 $Q$ 点坐标为 $(x_Q, y_Q)$，则 $Q$ 关于抛物线 (25.10) 的极线 $P_1P_2$ 的方程可依第19节例 4 求出为

$$y_Q y = p(x + x_Q) - p^2, \tag{25.11}$$

(25.10)、(25.11) 消去 $y$ 得

$$[p(x + x_Q) - p^2]^2 = 2py_Q^2\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

即

$$x^2 + \left[2(x_Q - p) - \frac{2y_Q^2}{p}\right]x + (x_Q - p)^2 + y_Q^2 = 0. \tag{25.12}$$

由于抛物线上的点到焦点的距离等于这点到准线的距离，所以（注意 $F$ 的坐标为 $(p, 0)$）

$$P_1F \times P_2F = x_1x_2 = (x_Q - p)^2 + y_Q^2 = QF^2. \tag{25.13}$$

注　之所以把准线作为 $y$ 轴，就是为了在 (25.13) 中得到表达式 $x_1x_2$ 而不是稍复杂的 $\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\left(x_2 + \frac{p}{2}\right)$。

**例 5**　直线 $l$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k_1$ 相交于 $C_1$、$D_1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k_2$ 相交于 $C_2$、$D_2$。求证 $C_1C_2 = D_2D_1$。

**证**　设 $l$ 的方程为

$$y = mx + n,$$

代入

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k_1$$

中，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=k_1,$$

整理得

$$cx^2+dx+(e-k_1)=0.$$

其中 $c$、$d$、$e$ 均与 $k_1$ 无关。于是 $C_1D_1$ 的中点为

$$M\left(-\frac{d}{2c},\ -\frac{dm}{2c}+n\right),$$

$M$ 点的坐标与 $k_1$ 无关，因而也是 $C_2D_2$ 的中点。从而$C_1C_2=D_2D_1$。

**例 6** 若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k_1$ 的弦 $PQ$ 切椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k_2$ 于 $M$，则 $M$ 平分 $PQ$。

**解** 本题是例 5 的特殊情况：$C_2$、$D_2$ 均与 $M$ 重合。

**例 7** 直线 $l$ 截双曲线于 $P$、$Q$，截双曲线的渐近线于 $R$、$S$。求证 $PR=QS$。

**证** 设双曲线及其渐近线的方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

然后仿照例 5 即得。

**例 8** 证明双曲线的一条切线与两条渐近线形成的三角

形的面积被切点与中心的连线平分.

**证** 设切线与渐近线相交于 $P$、$Q$，切点为 $M$. 仿照例6可知 $M$ 为 $PQ$ 的中点. 从而中线 $OM$ 平分 $\triangle OPQ$ 的面积.

**例 9** 一个圆与双曲线 $xy=c^2$ 交于四点 $A_i\left(ct_i, \dfrac{c}{t_i}\right)$，$i=1,2,3,4$. 求证：

(1) $t_1t_2t_3t_4=1$;

(2) 这圆的圆心为$\left(\dfrac{c}{2}\sum t_i,\ \dfrac{c}{2}\sum\dfrac{1}{t_i}\right)$;

(3) $A_i$ $(i=1,2,3,4)$ 的重心是圆心与原点连线的中点;

(4) $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心与 $A_4$ 关于原点对称.

**证** 设圆的方程为

$$x^2+y^2-2ax-2by+f=0. \tag{25.14}$$

由双曲线方程得

$$y=\frac{c^2}{x} \tag{25.15}$$

代入 (25.14) (消去 $y$) 化简得

$$x^4-2ax^3+fx^2-2bc^2x+c^4=0. \tag{25.16}$$

于是由韦达定理

$$(ct_1)(ct_2)(ct_3)(ct_4)=c^4,$$

即

$$t_1t_2t_3t_4=1. \tag{25.17}$$

注 1 (25.17) 也可以叙述成：如果一个圆与正双曲线相交于四点，那么这四点至渐近线的距离的积为定值.

注 2　过 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 的圆与双曲线的第四个交点为 $A_4$ $(ct_4,\ c/t_4)$，其中 $t_1t_2t_3t_4=1$，所以这里给出第20节例 3 的另一个证明．现在的解法由于应用韦达定理，比较简单．

仍由韦达定理，

$$c\sum t_i=2a, \tag{25.18}$$

$$c^3\sum t_1t_2t_3=2bc^2. \tag{25.19}$$

由于（25.17）、（25.19）即

$$c\sum\frac{1}{t_i}=2b.$$

所以圆心坐标 $(a,\ b)$ 即 $\left(\frac{c}{2}\sum t_i,\ \frac{c}{2}\sum\frac{1}{t_i}\right)$. 而圆心与原点连线的中点 $\left(\frac{c}{4}\sum t_i,\ \frac{c}{4}\sum\frac{1}{t_i}\right)$ 是 $A_i\,(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的重心．

$A_4$ 关于原点的对称点是 $H\left(-ct_4,\ -\frac{c}{t_4}\right)$，它与 $A_1$ 的对应坐标差为

$$c(t_1+t_4),\qquad c\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_4}\right).$$

而 $A_2$ 与 $A_3$ 的对应坐标差为

$$c(t_2-t_3),\qquad c\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}\right).$$

因为

$$(t_1+t_4)(t_2-t_3)+\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_4}\right)\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}\right)$$

$$= (t_1+t_4)(t_2-t_3)+\frac{(t_1+t_4)(t_3-t_2)}{t_1t_2t_3t_4}$$

$$= (t_1+{}_4)(t_2-t_3)+(t_1+t_4)(t_3-t_2)$$

$$=0,$$

所以$A_1H\perp A_2A_3$。同样$A_2H\perp A_1A_3$，所以$H$为$\triangle A_1A_2A_3$的垂心。

**例 10** $P$为正双曲线$xv=c^2$上一点。$P$关于原点$O$的对称点为$Q$。以$P$为圆心、$PQ$为半径作圆交双曲线于$A$、$B$、$C$及$Q$。求证$\triangle ABC$为正三角形。

**证** 设$P$点坐标为$(x_P, y_P)$，则$Q$点坐标为$(-x_P, -y_P)$，$PQ^2=4(x_P^2+v_P^2)$。$\odot P$的方程为

$$(x-x_P)^2+(y-y_P)^2=4(x_P^2+v_P^2) \tag{25.20}$$

由于

$$xy=c^2,\quad x_Py_P=c^2.$$

在(25.20)两边同乘$x^2x_P^2$（消去$y$）得

$$x_P^2x^2(x-x_P)^2+(x_P-x)^2c^4=4x^2(x_P^4+c^4),$$

即

$$x_P^2x^4-2x_P^3x^3-3(x_P^4+c^4)x^2-2c^4x_Px+c^4x_P^2=0. \tag{25.21}$$

$x_A$、$x_B$、$x_C$、$x_Q$是(25.21)的四个根，由于$x_Q=-x_P$，所以由韦达定理

$$x_A+x_B+x_C=2x_P-(-x_P)=3x_P,$$

即

$$\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)=x_P. \tag{25.22}$$

同理

$$\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)=y_P. \tag{25.23}$$

(25.22)、(25.23) 表示 $\triangle ABC$ 的重心与它的外心 $P$ 重合，因此 $\triangle ABC$ 为正三角形。

**例 11** 设双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的中心为 $O$. 任一半径为 $r$ 的圆交双曲线于 $P$、$Q$、$R$、$S$ 四点。求证：

$$OP^2+OQ^2+OR^2+OS^2=4r^2. \tag{25.24}$$

**证** 设圆的方程为

$$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2. \tag{25.25}$$

(25.25) 与双曲线

$$x^2-y^2=a^2 \tag{25.26}$$

的交点用极坐标记为 $(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$（因为要算这点到原点 $O$ 的距离，使用极坐标是方便的）. 于是由 (25.26)

$$\rho^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=a^2, \tag{25.26'}$$

即

$$\cos2\alpha=\frac{a^2}{\rho^2}. \tag{25.27}$$

又由 (25.25)

$$(\rho\cos\alpha-c)^2+(\rho\sin\alpha-d)^2=r^2, \tag{25.25'}$$

即

$$\rho^2-2\rho(c\cos\alpha+d\sin\alpha)=r^2-c^2-d^2. \tag{25.28}$$

要从 (25.28) 与 (25.26′)（或 (25.27)）中消去 $\alpha$，方法是由 (25.28) 得

$$\begin{aligned}(\rho^2+c^2+d^2-r^2)^2&=4\rho^2(c\cos\alpha+d\sin\alpha)^2\\&=4\rho^2(c^2\cos^2\alpha+d^2\sin^2\alpha+cd\sin2\alpha)\\&=4\rho^2\left(\frac{c^2}{2}\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)+\frac{d^2}{2}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)+cd\sin2\alpha\right),\end{aligned}$$

（利用（25.27））移项，平方得

$$[(\rho^2+c^2+d^2-r^2)^2-2(c^2+d^2)\rho^2-2a^2(c^2-d^2)]^2$$
$$=16\rho^4c^2d^2\sin^2 2\alpha.$$

结合（25.27）消去$\alpha$得

$$[\rho^4-2r^2\rho^2+(c^2+d^2-r^2)^2-2a^2(c^2-d^2)]^2$$
$$=16c^2d^2(\rho^4-a^4). \tag{25.29}$$

（25.29）可看作是$z=\rho^2$的4次方程，$OP^2$、$OQ^2$、$OR^2$、$OS^2$是它的四个根。由于（25.29）中，$\rho^8$的系数为1，$\rho^6$的系数为$-4r^2$，所以由韦达定理，（25.24）成立。

# 26 二次曲线束

一般二次曲线的方程

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{26.1}$$

中有六个参数$a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$，其中我们可以指定一个为1或其它非零值（因为（26.1）的两边可同乘任一个非零实数），所以实际上只有五个需要确定。曲线上的每一点产生一个关于这五个参数的方程。因此，一般说来五个点可以确定一条二次曲线（只要这五个点所产生的五个方程组成的一次方程组有唯一解）。

两个二次曲线通常有四个交点（这些交点中可能有重合的，也可能有虚的）。如果这二个二次曲线的方程分别为$S_1=0$与$S_2=0$（$S_i$是$x$、$y$的二次式），那么过它们的交点的二次曲线束可写成

$$\lambda S_1+\mu S_2=0. \tag{26.2}$$

其中 $\lambda$、$\mu$ 为实数，不全为 0 .

**例 1** 在 $\odot O$ 中，弦 $GH$ 的中点为 $O_1$，过 $O_1$ 任作两条弦 $AB$、$CD$，$AC$、$BD$ 分别交 $GH$ 于 $E$、$F$，则 $EO_1 = O_1F$。（图25）

**解** 图25象一只翩翩起舞的蝴蝶，因此上面的命题称为“蝴蝶定理”．用纯几何的方法来证明，颇不容易．用曲线束来证相当简单．

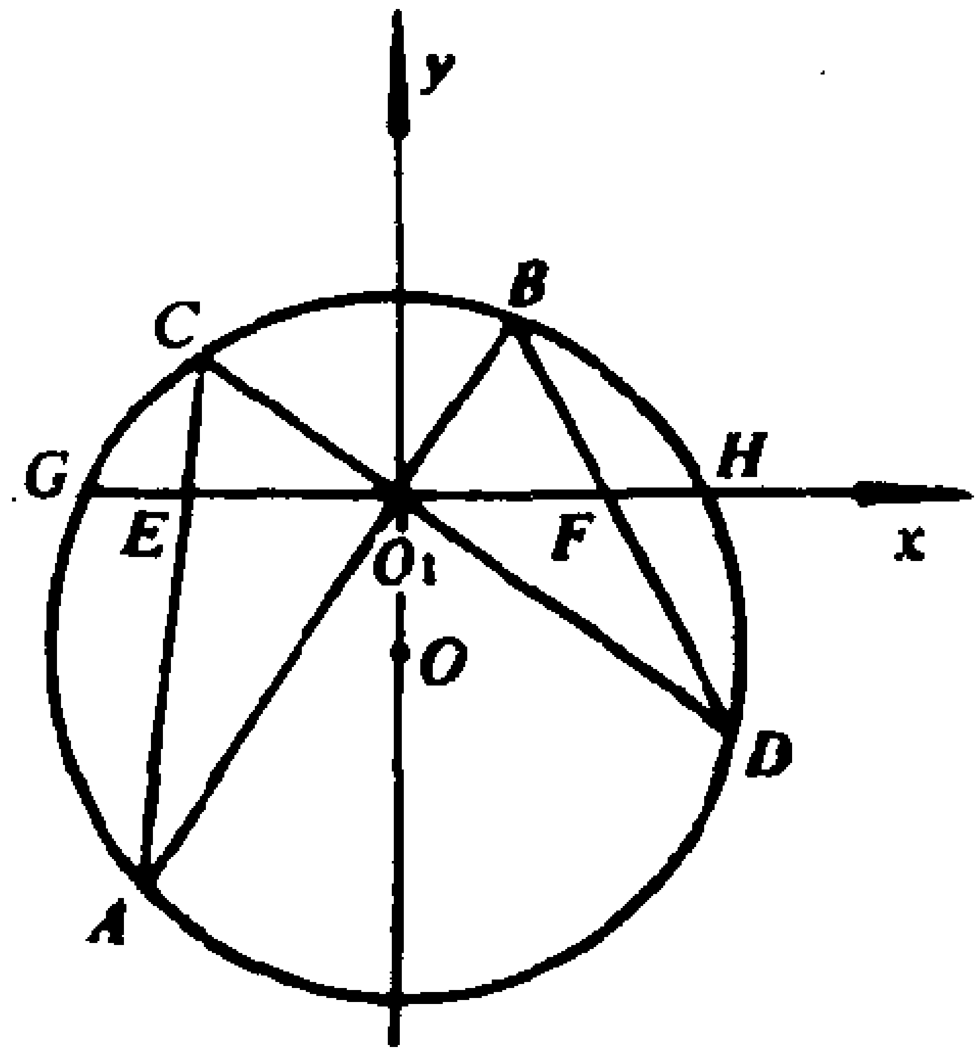


图 25

以 $O_1$ 为原点，直线 $GH$ 为 $x$ 轴；$OO_1$ 为 $y$ 轴．设 $\odot O$ 方程为

$$x^2 + y^2 - 2by + f = 0. \quad (26.3)$$

直线 $AB$、$CD$ 的方程分别为

$$y = k_1 x, \quad (26.4)$$

$$y = k_2 x. \quad (26.5)$$

或合并为

$$(y - k_1 x)(y - k_2 x) = 0. \quad (26.6)$$

于是过二次曲线（26.3）、（26.6）的四个交点 $A$、$B$、$C$、$D$ 的曲线束为

$$x^2 + y^2 - 2by + f + \lambda(y - k_1 x)(y - k_2 x) = 0. \quad (26.7)$$

曲线（26.7）与直线 $GH$，也就是 $x$ 轴的交点 $E$、$F$ 的横坐标满足

$$(1 + \lambda k_1 k_2)x^2 + f = 0.$$

根据韦达定理

$$x_E + y_F = 0.$$

这就是说$EF$的中点是$O_1$。

注 1　我们实际上证明了更一般的结论：过例 1 中 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点的任意一条二次曲线（26.7）在 $GH$ 上截得的线段 $EF$ 被 $O_1$ 平分。其中包括这二次曲线成为两条直线 $AC$、$BD$ 的情况。但没有必要去定出这时 $\lambda$ 是什么值，那样做不仅自找麻烦，而且得出的只是一个特殊的情况。

注 2　关于蝴蝶定理的推广，请参见第29节。

注 3　将两个一次方程（例如（26.4）、（26.5）乘起来（产生（26.6））是一个重要的手法。在组成二次曲线束时常需要这样做。

**例 2**　两条圆锥曲线相交于 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点。如果直线 $AC$ 与二条曲线的公切线 $l$ 平行，那么 $BD$ 与 $l$ 的交点 $O$ 平分两个切点 $E$、$F$ 组成的线段 $EF$。（图 26）

**解**　以 $l$ 为 $x$ 轴，$O$ 为原点。圆锥曲线为

$$x^2+b_ixy+c_iy^2+d_ix+e_iy+f_i=0,\quad i=1,2 \qquad (26.8)$$

由于（26.8）与 $x$ 轴相切，所以方程

$$x^2+d_ix+f_i=0$$

有重根。因此（26.8）可改写成

$$(x-g_i)^2+b_ixy+c_iy^2+e_iy+=0,\quad i=1,2. \qquad (26.8')$$

其中 $g_1$、$g_2$ 分别为 $E$、$F$ 的坐标。

设 $BD$ 方程为

$$y=kx,$$

$AC$方程为

$$y=l,$$

合并为

$$(y-kx)(y-l)=0. \qquad (26.9)$$

（26.9）是（26.8′）中两条曲线构成的曲线束中的一员，

它的特点是无 $x^2$ 项。要将（26.8′）中两个方程组合成无 $x^2$ 的方程，必须将它们相减。这样得出方程应当就是（26.9）或（26.9）乘一个非零常数。但（26.9）无常数项，所以必须有

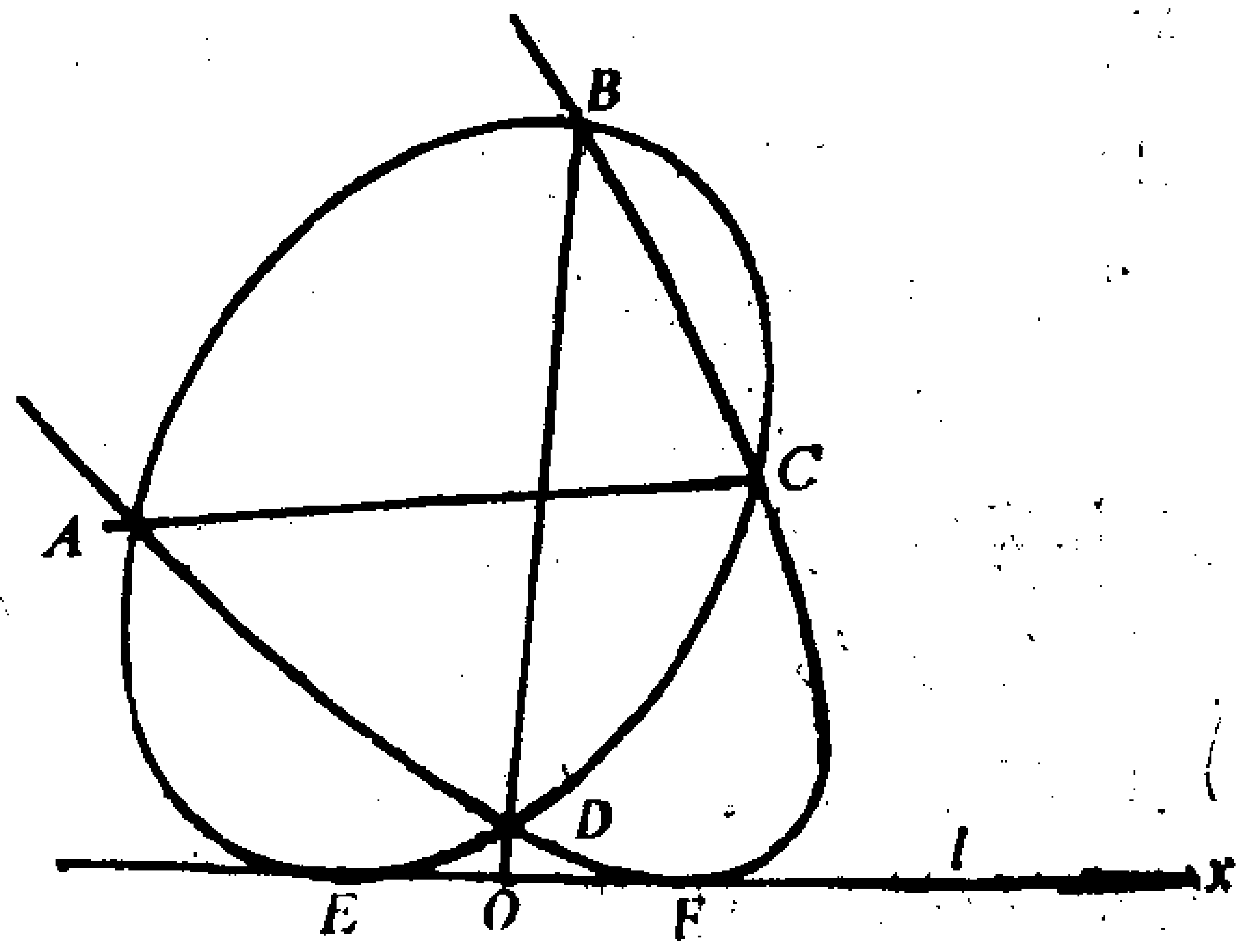


图 26

$$g_1^2=g_2^2,$$

从而

$$g_1=-g_2.$$

即 $O$ 为 $EF$ 的中点。

反过来，我们还有

**例 3** 在例 2 中，如果 $O$ 是 $EF$ 的中点，证明 $AC\parallel l$。

**证** 建立坐标系与例 2 相同。设 $E$、$F$ 坐标分别为 $g$，$-g$。两二次曲线的方程分别为

$$(x-g)^2+c_1y^2+b_1xy+d_1y=0, \tag{26.10}$$

$$(x+g)^2+c_2y^2+b_2xy+d_2y=0. \tag{26.11}$$

$BD$ 方程为

$$y-kx=0,$$

$AC$ 方程为

$$ax+by+c=0.$$

或合并为

$$(y-kx)(ax+by+c)=0. \tag{26.12}$$

（26.12）的特点是无常数项，它又是（26.10）、（26.11）

所构成的曲线束中的一员，所以必须将（26.10）、（26.11）相减才能产生（26.12）。但相减后的方程无 $x^2$ 项，所以（26.12）中 $a$ 必为 0，即 $AC//l$。

考虑一下例 3 的特殊情况。当一条二次曲线为圆，另一条由两条直线构成时，命题成为：

自⊙$M$外一点$E$作切线，切点为$F$。又作一条割线$EB$，交⊙$M$于$A$、$B$。连$B$与$EF$中点$O$交⊙$M$于$D$，$ED$交⊙$M$于$C$，则$AC//EF$。（图27）

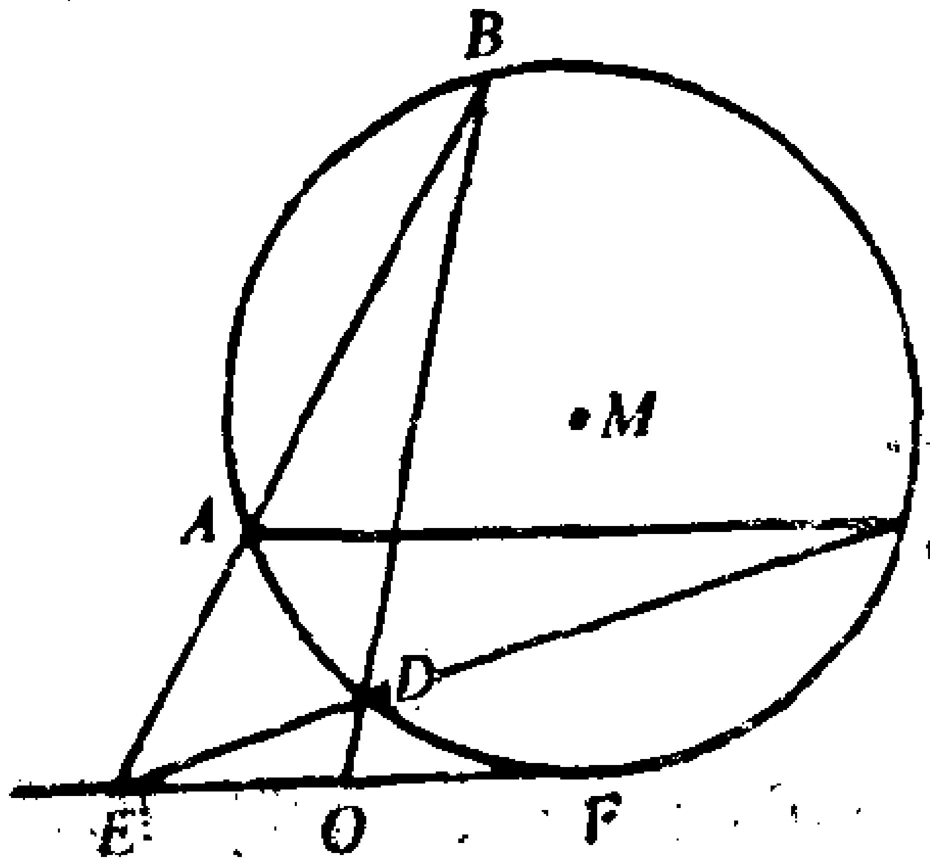

图 27

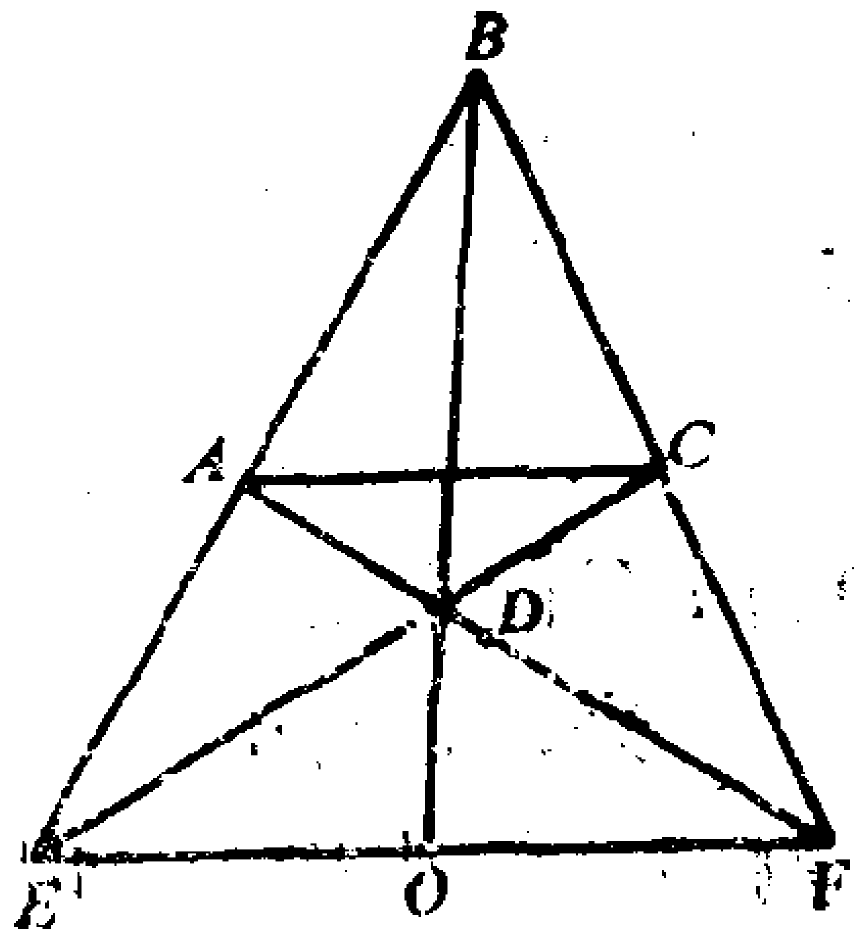

图 28

如果两条二次曲线都退化为相交直线，命题成为（射影几何的基本定理）：

在△$BEF$中，$A$、$C$分别在边$BE$、$BF$上，$EC$与$AF$相交于$D$，$BD$交$EF$于$O$。则$AC//EF$的充分必要条件是$O$为$EF$的中点。（图28）

在两条曲线都是圆时，只有两个实交点，（学过射影几何的人知道，另两个交点是虚的无穷远点（$\pm i$，1，0），它们的连线平行于 $x$ 轴），命题成为：

⊙$O_1$、⊙$O_2$的公共弦平分它们的外公切线。（图29）

**例 4** 自点 $P_1$ 向椭圆引两条切线，切点为 $Q_1$、$R_1$，又自点 $P_2$ 向这椭圆引两条切线，切点为 $Q_2$、$R_2$。证明 $P_1$、$Q_1$、$R_1$、$P_2$、$Q_2$，$R_2$六点在一条二次曲线上。

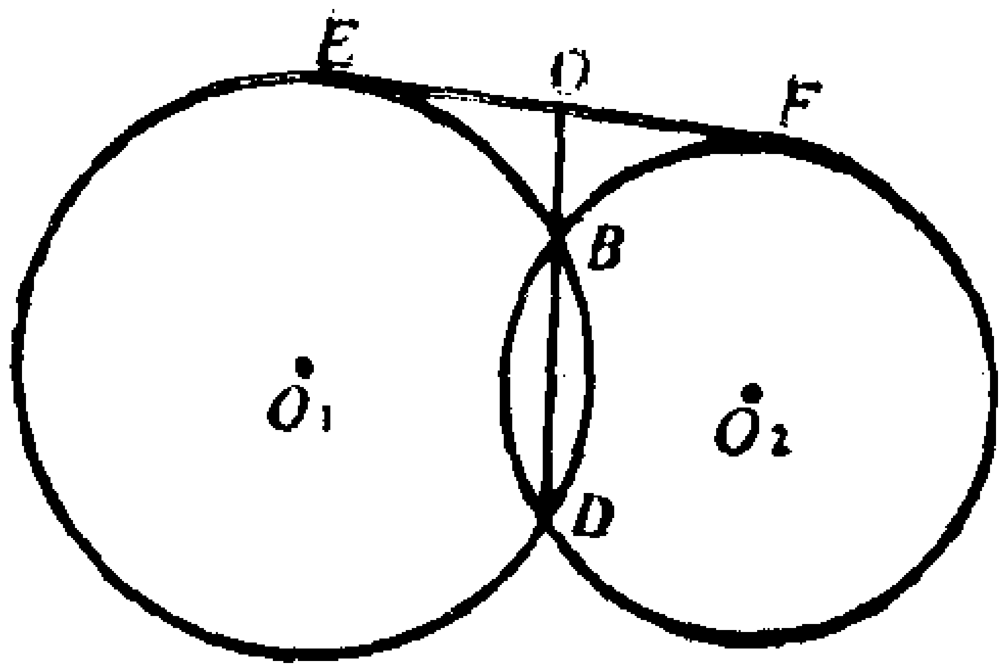


图 29

**证** 设这椭圆方程为

$$ax^2+by^2=1. \qquad (26.13)$$

$P_1$、$P_2$的坐标分别为$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$则与第 19节例 4 类似，极线$Q_iR_i$的方程为

$$ax_ix+by_iy-1=0, \quad i=1,2.$$

或合并为

$$(ax_1x+by_1y-1)(ax_2x+by_2y-1)=0. \qquad (26.14)$$

过$Q_1$、$R_1$、$Q_2$、$R_2$的二次曲线为

$$(ax_1x+by_1y-1)(ax_2x+by_2y-1)+\lambda(ax^2+by^2-1)$$
$$=0. \qquad (26.15)$$

要使（26.15）过$P_1$，则应取 $\lambda=-(ax_1x_2+by_1y_2-1)$，这时（26.15）成为

$$(ax_1x+by_1y-1)(ax_2x+by_2y-1)$$
$$=(ax_1x_2+by_1y_2-1)(ax^2+by^2-1) \qquad (26.16)$$

显然这条二次曲线也过 $P_2$。故所述六点在二次曲线(26.16)上。

**例 5** 求过(0,0)，(1,1)，(-1,1)，(2,0)，(3,-2)五点的二次曲线。

**解** 过$O(0,0)$，$C(2,0)$ 的直线为

$$y=0,$$

过 $A(1,1)$，$B(-1,1)$ 的直线为

$$y=1,$$

合并为

$$y(y-1)=0.$$

直线 $OB$ 方程为

$$x+y=0,$$

$AC$ 方程为

$$x+y-2=0,$$

合并为

$$(x+y)(x+y-2)=0.$$

过 $A$、$B$、$C$、$O$ 的二次曲线为

$$y(y-1)+\lambda(x+y)(x+y-2). \tag{26.17}$$

由于 (26.17) 过 $D(3,-2)$，所以 $\lambda=6$. 从而所求二次曲线为

$$y(y-1)+6(x+y)(x+y-2),$$

即

$$6x^2+12xy+7y^2-12x-13y=0.$$

注　这种解法比将五个点的坐标代入 (26.1) 解所得的方程组简单得多。

**例 6** 一条圆锥曲线过 $(1/2,-7/2)$，切直线 $x-2y+5=0$ 于 $(1,3)$，切直线 $5x+2y-20=0$ 于 $(4,0)$. 求它的方程.

**解**　过（1，3）、（4，0）的直线为

$$x+y-4=0, \tag{26.18}$$

由于（1，3）、（4，0）都是切点，直线 (26.18) 可以看作是两条重合的直线。于是所求方程可写成

$$(x-2y+5)(5x+2y-20)+\lambda(x+y-4)^2=0.$$

再由曲线过 $(1/2,\ -7/2)$ 得 $\lambda=\dfrac{9}{2}$. 故所求方程为

$$19x^2+2xy+y^2-62x+28y-56=0.$$

**例 7**　四边形 $ABCD$ 的边 $AB$、$CD$ 相交于 $O$，过 $O$ 任

作一直线 $l$ 交 $AC$ 于 $P$，交 $BD$ 于 $Q$、过 $A$、$B$、$C$、$D$ 任作一圆锥曲线，与 $l$ 交于 $R$、$S$。证明

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS}. \tag{26.19}$$

**证** 以 $O$ 为原点，$l$ 为 $x$ 轴。设 $AB$、$CD$ 的方程分别为

$$y=k_1x,$$

与

$$y=k_2x.$$

点 $A$、$B$、$C$、$D$ 的坐标分别为

$$(x_1,k_1x_1),\quad (x_2,k_1x_2),\quad (x_3,k_2x_3),\quad (x_4,k_2x_4).$$

于是过 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点的曲线为

$$\lambda(y-k_1x)(y-k_2x)+\left(y-k_1x_1-\frac{k_2x_3-k_1x_1}{x_3-x_1}(x-x_1)\right)\cdot\left(y-k_1x_2-\frac{k_2x_4-k_1x_2}{x_4-x_2}(x-x_2)\right)=0.$$

$OR$、$OS$ 是方程

$$\lambda k_1k_2x^2+\left(\frac{k_2x_3-k_1x_1}{x_3-x_1}x-\frac{(k_2-k_1)x_3}{x_3-x_1}x_1\right)\left(\frac{k_2x_4-k_1x_2}{x_4-x_2}x-\frac{(k_2-k_1)x_4}{x_4-x_2}x_2\right)=0$$

的两个根。因而 $\frac{1}{OR}$，$\frac{1}{OS}$ 是方程

$$\lambda e+(a+bz)(c+dz)=0$$

的两个根，其中 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$ 均与 $\lambda$ 无关。于是由韦达定理，

$$\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

与 $\lambda$ 无关，即对于所有过 $A$、$B$、$C$、$D$ 的二次曲线，

$\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS}$为定值。特别地，这二次曲线由直线 $AC$、$BD$ 构成。所以 (26.19) 成立。

**例 8** 设四边形 $ABCD$ 内接于椭圆，其三边 $AB$、$BC$、$CD$ 平行于固定的三个方向，则第四边 $DA$ 也平行于一个固定方向。

**解** 设前三边方程为

$$y=m_ix+b_i,\quad i=1,2,3.$$

其中 $m_i$ 为定值。又设 $DA$ 方程为

$$y=mx+b,$$

则由于 $DA$、$BC$ 在由 $AB$、$CD$（退化的二次曲线）与椭圆组成的束中，所以有实数 $\lambda$、$\mu$，使

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\mu(y-m_1x-b_1)(y-m_3x-b_3)$$

$$=(y-m_2x-b_2)(y-mx-b)$$

成为恒等式。比较两边 $x^2$、$xy$、$y^2$ 的系数即可定出 $m$。我们不必把 $m$ 算出来。只要知道 $m$ 是定值就已经解决了这个问题。

注 1　不难算出

$$m=\frac{b^2(m_1+m_3-m_2)+a^2m_1m_2m_3}{b^2+a^2(m_1m_2+m_2m_3-m_1m_3)}\qquad(26.21)$$

注 2　若前三条直线中有垂直于 $x$ 轴的，解法仍然适用，只需认为 (26.21) 中某个 $m_i$ 趋于无穷同样 (26.21) 的分母若为 0 而分子不为 0 则 $m$ 为无穷大即第四条线与 $x$ 轴垂直。若 (26.21) 的分子分母同时为 0（可以推出这点在 $m_2=0$，$m_1+m_3=0$ 时才会发生），则约定 $m=0$。解析几何中，为了方便，常常有这类默契与约定。

# 27 几何知识的应用

解析几何是用解析方法（代数方法）来处理几何问题，这并不意味着解析几何中决不利用几何知识。相反地，解析几何是将数与形有机地结合起来，所以总是或多或少地利用了一些几何知识。在适当的地方应用几何知识，往往使演算大为简化，这也是解析几何的一个重要技巧。

**例 1** 直线 $l$ 过点 $C(4,-5)$。点 $A(2,-5)$，$B(0,-1)$，到 $l$ 的距离相等，$AB$ 不与 $l$ 平行，求 $l$ 的方程。

**解** 直接采用法线式求距离比较麻烦。如果注意到 $l$ 过线段 $AB$ 的中点这一几何事实（不难证明），那么先定出 $AB$ 中点为 $(1,-3)$，再用两点式便得出 $l$ 的方程为

$$2x+3y+7=0.$$

下面举一些二次曲线的问题，我们特意用纯几何的方法来解。

**例 2** 证明以过抛物线焦点的的弦为直径的圆和准线相切。

**证** 设弦 $PQ$ 过焦点 $F$，$M$ 为 $PQ$ 的中点，$P$、$Q$、$M$ 在准线上的射影分别为 $P'$、$Q'$、$M'$。则（本节线段的长均加上绝对值符号，以免混淆）

$$\begin{aligned}|MM'| &= \frac{1}{2}(|PP'|+|QQ'|)=\frac{1}{2}(|PF|+|FQ|)\\ &=\frac{1}{2}|PQ|,\end{aligned}$$

即$M$到准线的距离是$|PQ|$的一半，所以以$PQ$为直径（$M$是圆心）的圆与准线相切。

例2用到抛物线的定义：抛物线上每一点到焦点的距离与到准线的距离相等。下面几个例子（例3至例5）也都要用到这一点。

**例 3** 以抛物线上一点$P$与焦点$F$的连线为直径的圆与抛物线顶点处的切线相切。

**解** 设顶点为$O$，$FO$交准线于$F'$。$P$在准线上的射影为$P'$，$PP'$交过$O$的切线$l$于$P''$，$PF$的中点为$M$，$M$在$l$上的射影为$M''$。（图30）

则

$$|MM''|=\frac{1}{2}(|PP''|+|FO|)=\frac{1}{2}(|PP''|+|OF'|)$$

$$=\frac{1}{2}(|PP''|+|P''P'|)=\frac{1}{2}|PP'|$$

$$=\frac{1}{2}|PF|,$$

所以以$|PF|$为直径的的圆与$l$相切。

**例 4** $A$为定点，在抛物线上求一点$P$，使$|PA|+|PF|$为最小，这里$F$是抛物线的的交点。

**解** 如果$A$在抛物线外部。连$AF$交抛物线于$P$，则$P$即为所求。因为三角形两边之和大于第三边，所以对任一点$P'$均有

$$|P'F|+|P'A|>|PF|+|PA|=|FA|.$$

如果$A$在抛物线内，自$A$向准线引垂线交抛物线于$P$，则$P$即为所求。因设所作垂线交准线于$Q$，则$|PA|+|PF|=|PA|+|PQ|=|AQ|$.对抛物线上任一意$P'$，设$P'$在准线

上射影为 $Q'$，则

$$|P'A|+|P'F|=|P'A|+|P'Q'|>|AQ|$$
$$=|PA|+|PF|.$$

**例 5** 长为定值 $l$ 的线段 $AB$，端点 $A$、$B$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上移动，求 $AB$ 中点 $C$ 到 $y$ 轴的最小距离.

**解** $C$ 到准线的距离

$=\frac{1}{2}$($A$ 到准线的距离 + $B$ 到准线的距离)

$=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)$

$\geqslant\frac{1}{2}|AB|=\frac{l}{2}$，其中 $F$ 为抛物线的焦点。

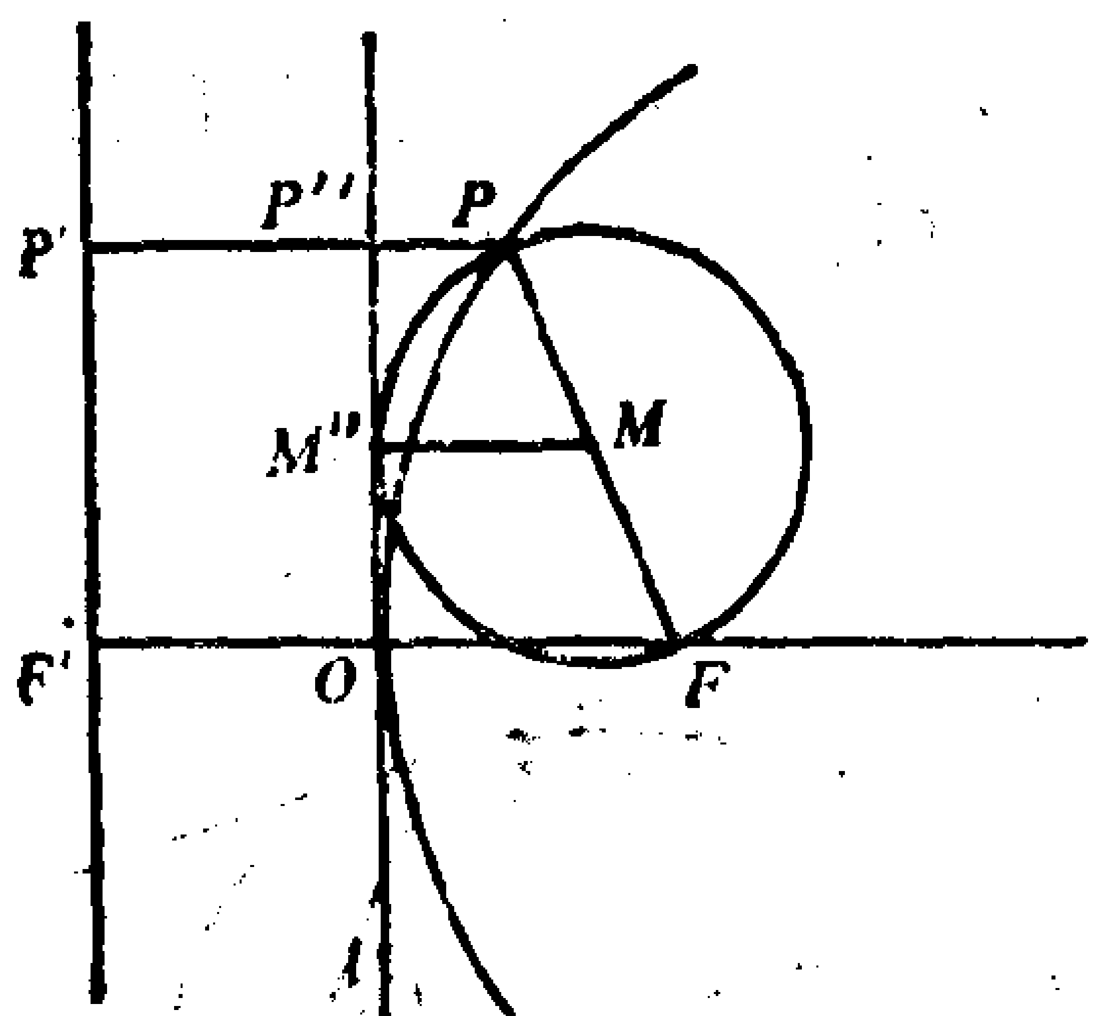

图 30

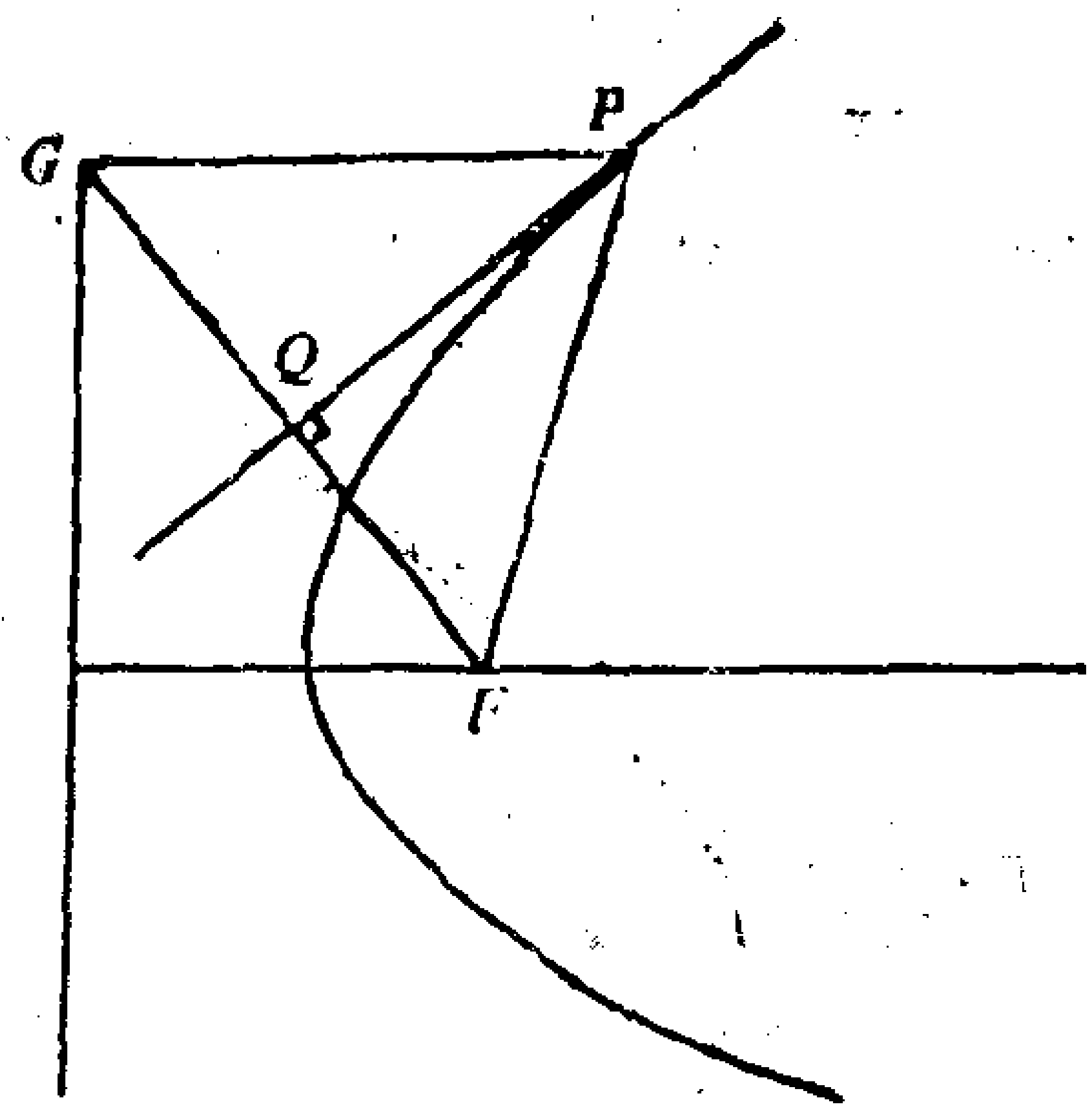

图 31

所以

$$C\text{ 到 }y\text{ 轴的距离}\geqslant\frac{l}{2}-\frac{p}{2}.$$

等号当且仅当 $AB$ 过 $F$ 时成立。

二次曲线的的光学性质也有很多应用。

**例 6** 自抛物线的焦点$F$向抛物线的切线$PQ$引垂线，则此垂线与过切点$P$的直径相交于准线上（抛物线的直径就是轴的平行线）（图31）。

**解** 设过$P$的直径与所述垂线相交于$G$，$FG$与$PQ$相交于$Q$。则由光学性质

$$\angle GPQ=\angle QPF,$$

又

$$\angle PQG=\angle PQF=90°,$$

所以有$\triangle PQG\cong\triangle PQF$，$|PG|=|PF|$，因而$G$在在准线上。

**例 7** 求证抛物线任意两条切线的夹角等于切点的焦点半径所成角的一半。

**证** 设$P_1$、$P_2$处的切线相交于$T$。过$T$作直线平行于轴，则由图32及抛物线的光学性质，$\angle P_1TP_2=\alpha+\beta$，而

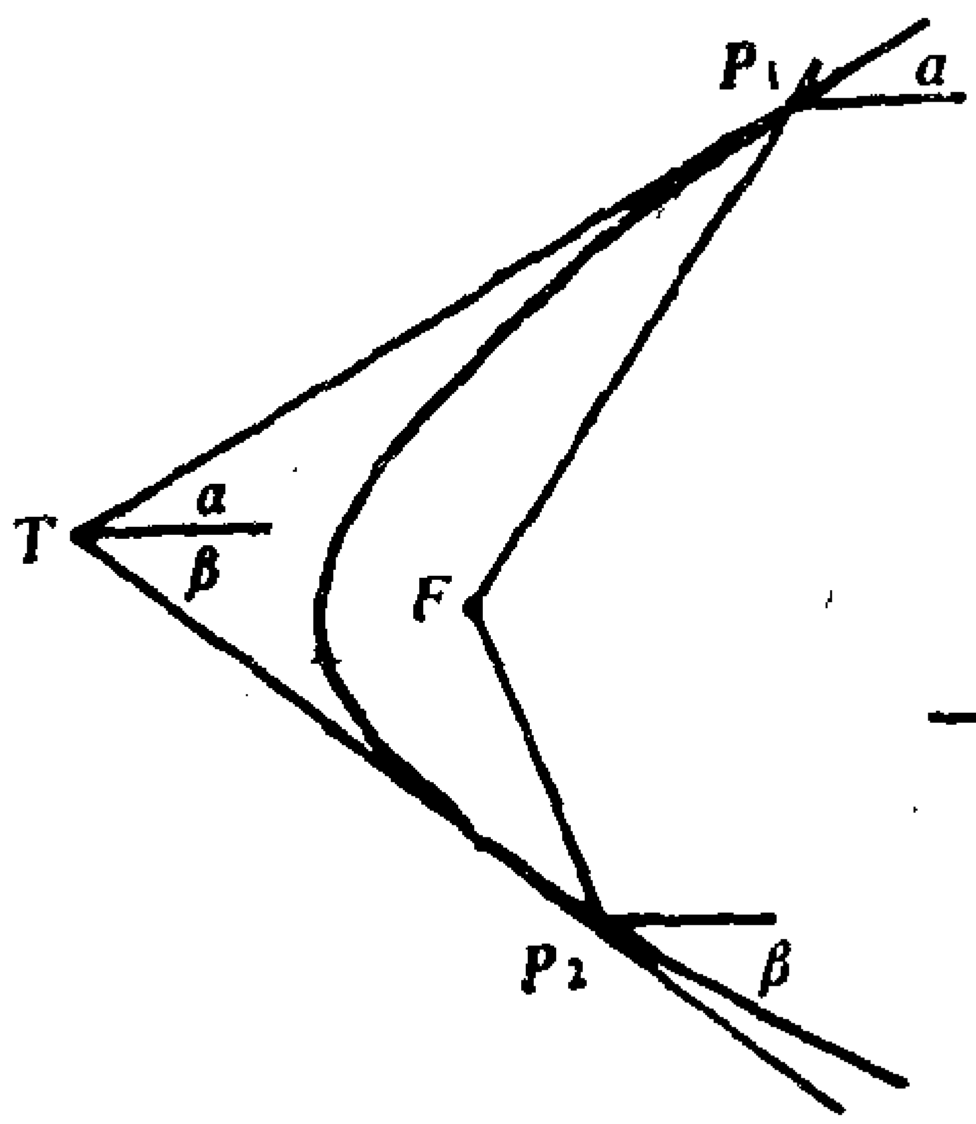

图 32

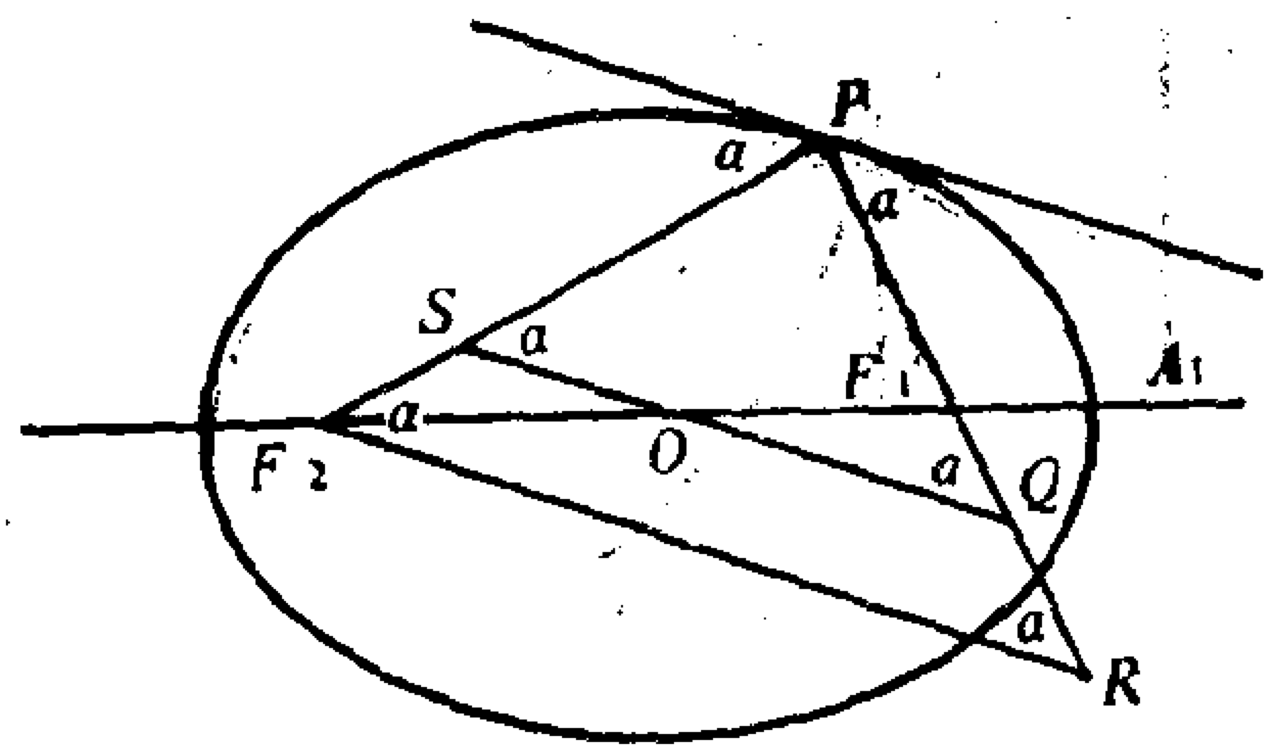

图 33

$$\angle P_1FP_2=\angle FP_1T+\angle P_1TP_2+\angle TP_2F$$
$$=\alpha+\beta+\angle P_1TP_2=2\angle_1 PTP_2.$$

**例 8** $P$为椭圆上一点。过中心$O$作直线与$P$处的切线平行，交$PF_1$于Q，求证$|PQ|=|OA_1|$。
这里$F_1$是一个焦点，$A_1$是顶点，$A_1$与$F_1$在短轴的同侧（图33）

**证** 设另一焦点为$F_2$，连$PF_2$交$OQ$于$S$，过$F_2$作$QS$的平行线交$PQ$于$R$。由光学性质，

$$\angle PSQ=\angle PQS=\angle PF_2R=\angle PRF_2=\alpha,$$

所以

$$|PS|=|PQ|,\quad |SF_2|=|QR|.$$

又$O$是$F_2F_1$的中点，所以

$$|F_1Q|=|QR|=|SF_2|,$$

从而

$$\begin{aligned}2|PQ|&=|PQ|+|PS|=|PF_1|+|F_1Q|+|PS|\\&=|PF_1|+|SF_2|+|PS|=|PF_1|+|PF_2|\\&=2|OA_1|,\end{aligned}$$

即 $$|PQ|=|OA_1|.$$

**例 9** 自椭圆外一点$P$向椭圆引两条切线，切点分别为$T_1$、$T_2$，$F_1$、$F_2$为椭圆的焦点。证明$\angle T_1PF_1=\angle F_2PT_2$。

**证** 连$F_1T_1$并延长至$F'_2$，使$|T_1F'_2|=|T_1F_2|$。则由光学性质（图34），

$$\angle F'_2T_1P=\angle F_2T_1P=\alpha,$$

所以

$$\triangle F'_2T_1P\cong\triangle F_2T_1P.$$

$$|PF'_2|=|PF_2|,\quad \angle F'_2PT_1=\angle F_2PT_1.$$

同样，延长$F_2T_2$至$F'_1$，使$|T_2F'_1|=|T_2F_1|$，则

$$|PF'_1|=|PF_1|,\quad \angle F'_1PT_2=\angle F_1PT_2.$$

由于

$$|F'_2F_1| = |F'_2T_1| + |T_1F_1| = |T_1F_2| + |T_1F_1|$$
$$= |T_2F_2| + |T_2F_1| = |F'_1F_2|,$$

所以

$$\triangle F'_2PF_1 \cong \triangle F_2PF'_1,$$
$$\angle F'_2PF_1 = \angle F_2PF'_1,$$
$$2\angle T_1PF_1 = \angle F'_2PF_1 - \angle F_1PF_2 = \angle F_2PF'_1 - \angle F_1PF_2 = 2\angle F_2PT_2,$$
$$\angle T_1PF_1 = \angle F_2PT_2.$$

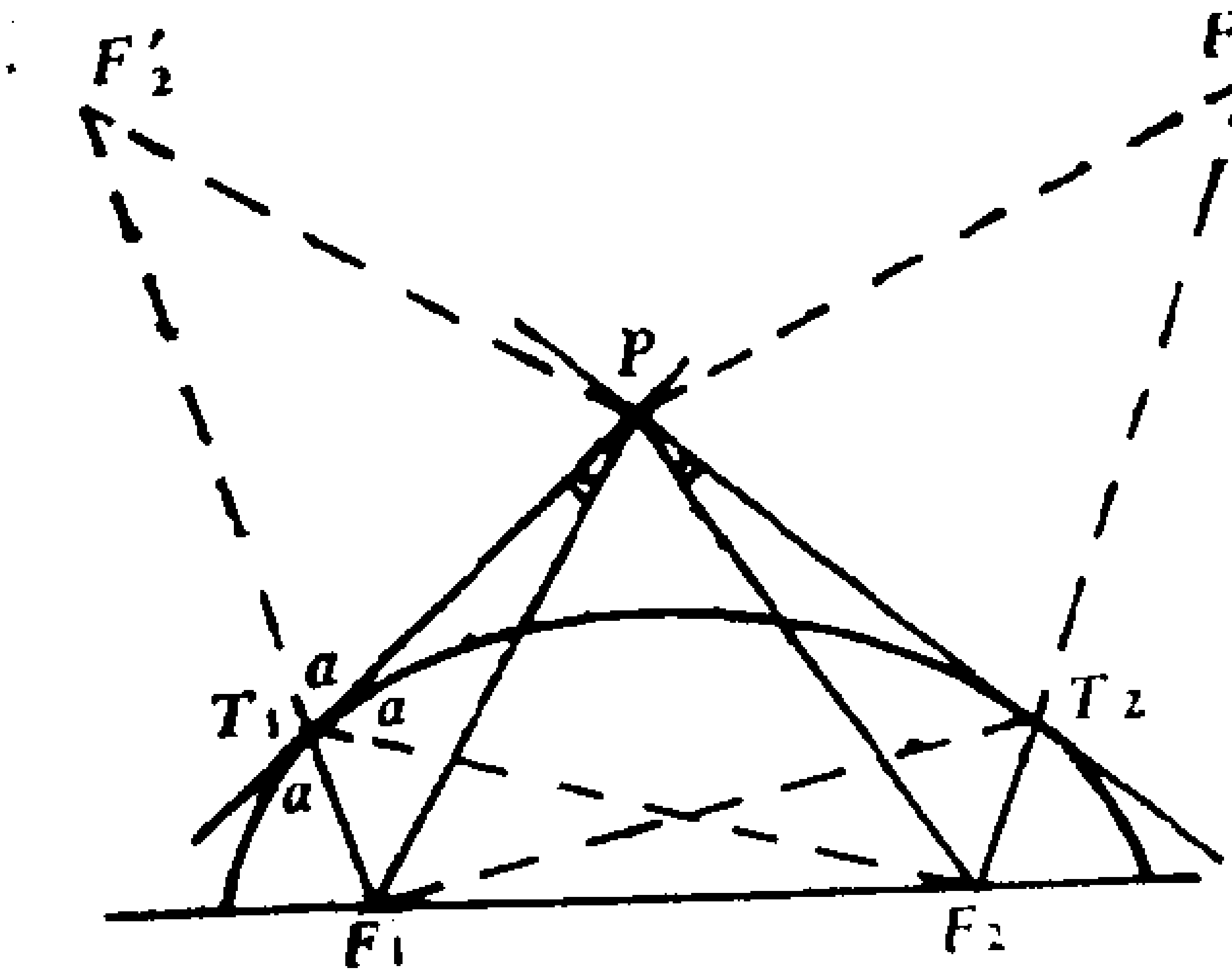


图 34

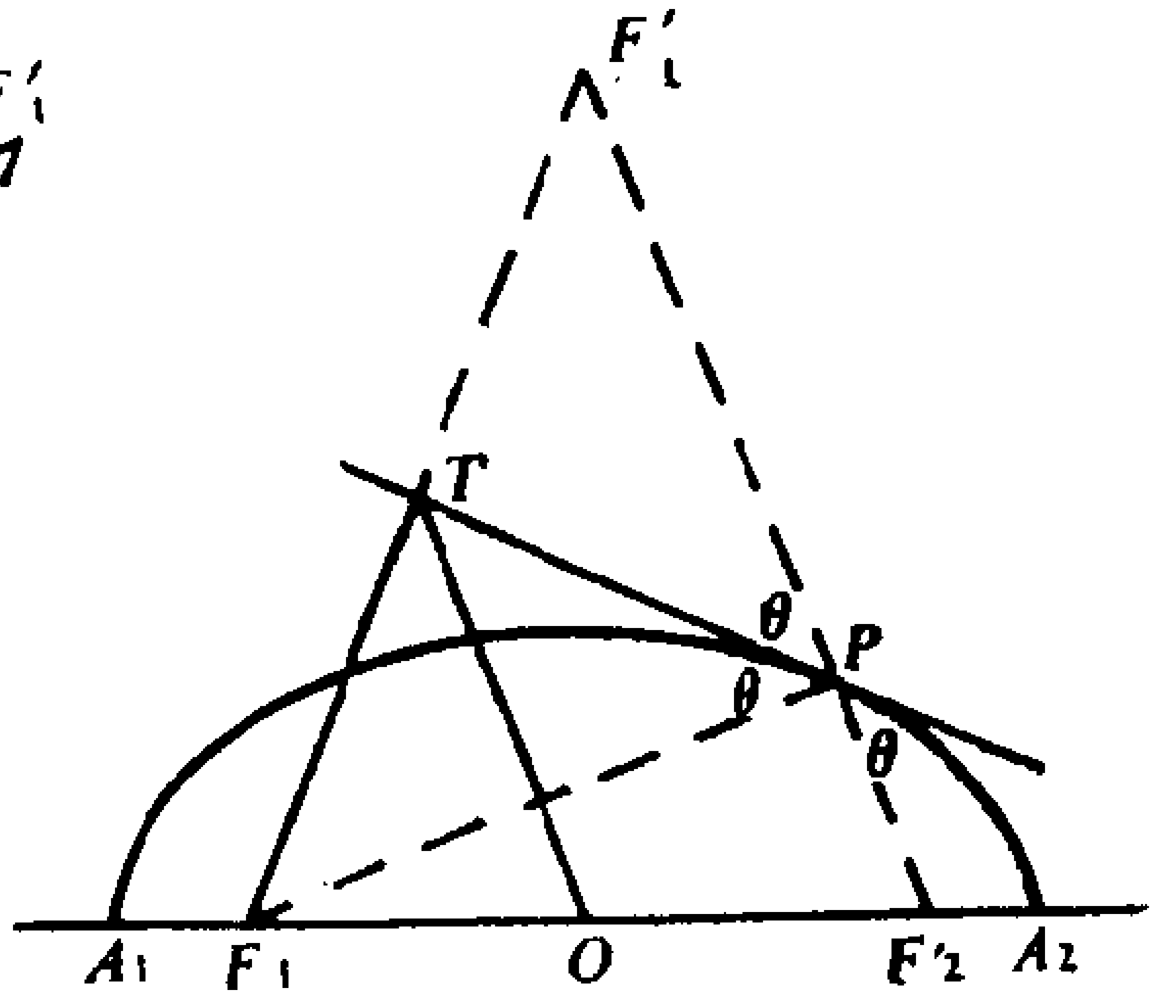


图 35

**例 10** 设椭圆长轴为$A_1A_2$。自焦点$F_1$向切线$PT$引垂线，垂足为$T$，证明$T$在以$A_1A_2$为直径的圆上(图35)。

**证** 延长$F_1T$至$F'_1$，使$|TF'_1| = |F_1T|$。则

$$\triangle F_1TP \cong \triangle F'_1TP,$$
$$\angle F'_1PT = \angle F_1PT.$$

由光学性质，另一焦点$F_2$与$P$、$F'_1$共线。

设$O$为椭圆中心，连$OT$。由于$|F_1O| = |OF_2|$，$|F_1T| = |TF'_1|$，所以

$$|OT| = \frac{1}{2}|F_2F'_1| = \frac{1}{2}(|F_2P| + |PF_1|) = \frac{1}{2}|A_1A_2|,$$

即$T$在以$A_1A_2$为直径的圆上。

# 28 轨　　迹

轨迹问题是解析几何的拿手项目。无论轨迹是直线、圆，还是椭圆、双曲线、抛物线，或者其它曲线，都可以用解析几何去处理。即使轨迹为直线与圆（或直线与圆的一部分），用纯几何的方法处理，往往需要预先猜出轨迹的形状与位置（这就必须绘制较精确的图，找若干个点）。而用解析几何，只需要将所给的条件写成一些相等的关系，再经过化简、消元、便可得到轨迹的方程。

**例 1**　已知定点$O$及两条互相垂直的定直线$l_1$、$l_2$。过$O$作两条成直角的动直线，一条交$l_2$于$P$，一条交$l_1$于$Q$，$O$在$PQ$上的的射影为$R$，求$R$的轨迹（图36）。

**解**　取$O$为原点。过$O$且与$l_1$平行的直线为$x$轴，建立直角坐标系。设$l_1$方程为

$$y=k, \tag{28.1}$$

$l_2$方程为

$$x=h, \tag{28.2}$$

这里$k$、$h$都是已知数。设$PQ$的法线式为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{28.3}$$

则$R$点的坐标为

$$x=p\cos\alpha,\quad y=p\sin\alpha. \tag{28.4}$$

由（28.1）、（28.3）得$Q$点坐标为

$$\left(\frac{p-k\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad k\right). \tag{28.5}$$

由（28.2）、（28.3）得$P$点坐标为

$$\left(h,\ \frac{p-h\cos\alpha}{\sin\alpha}\right). \qquad (28.6)$$

由$OP\perp OQ$及（28.5）、（28.6）得

$$\frac{h(p-k\sin\alpha)}{\cos\alpha}+\frac{k(p-h\cos\alpha)}{\sin\alpha}=0, \qquad (28.7)$$

即

$$h\cdot p\sin\alpha+kp\cos\alpha=kh. \qquad (28.7')$$

将（28.4）、代入（28.7′）即得$R$点的轨迹为

$$kx+hy=kh. \qquad (28.8)$$

这是一条直线，它在$x$轴、$y$轴上的截距分别为$h$，$k$。也就是说设$l_2$与$x$轴的交点为$R_1$，$l_1$与$y$轴的交点为$R_2$，则直线$R_1R_2$就是所求的轨迹。

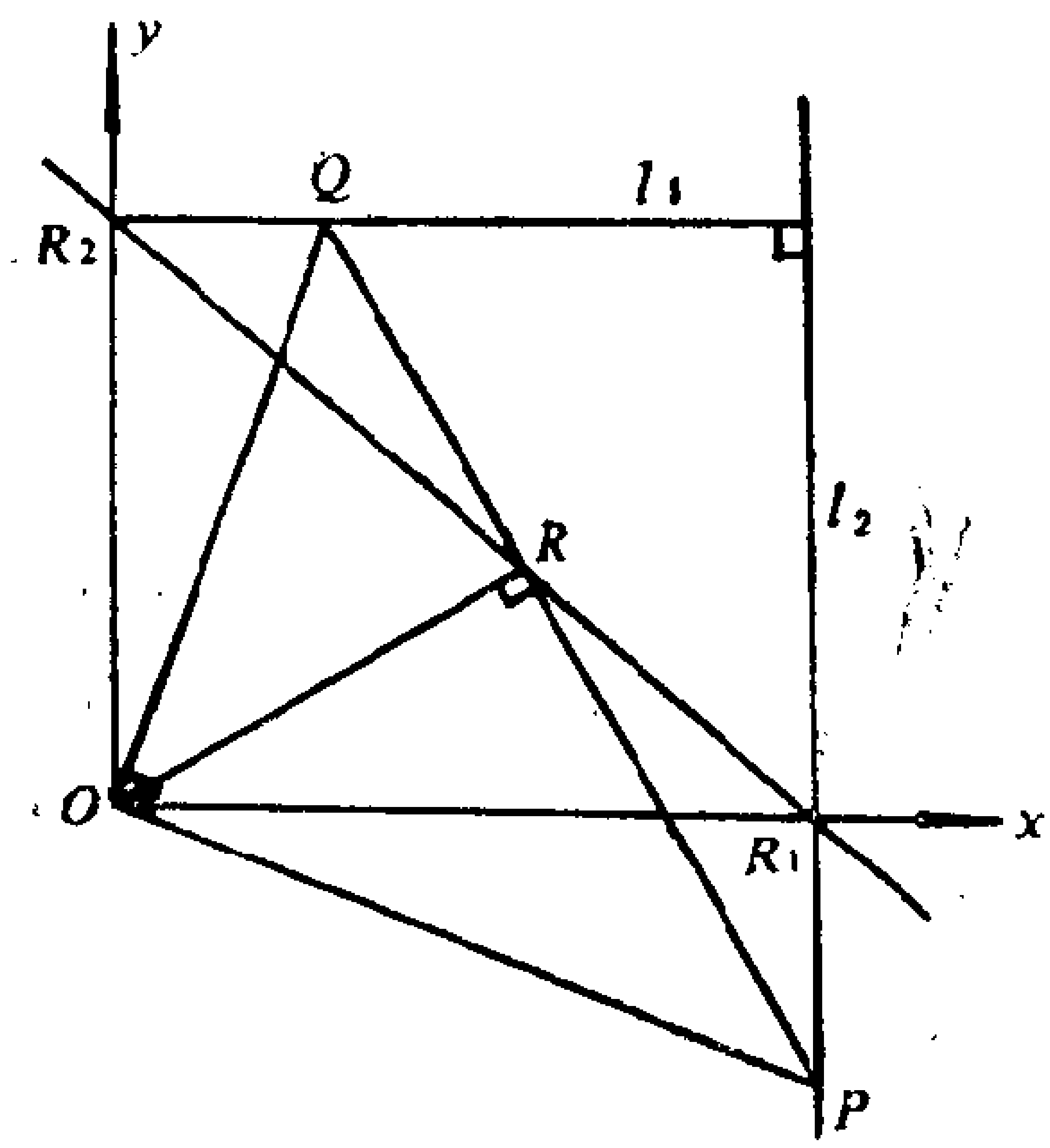


图 36

上面的推导表明合乎要求的点均在直线(28.8)上（完备性）。至于纯粹性，即是否（28.8）上的点均符合要求，在解析几何中往往略去。理由之一是纯粹性的证明并不困难，往往“包含”在完备性的证明之中。如本题中，对于（28.8）上任一点$R$，在$R$不同于$R_1$或$R_2$时，过$R$作$OR$的垂线分别交$l_2$、$l_1$于$PQ$，这时有（28.3）与（28.4）因而有（28.5）与（28.6），从而由（28.8）可导出(28.7′)与

(28.7) 即 $OP\perp OQ$. 所以$R$确实符合条件.

在$R$为$R_1$(或$R_2$)时，上面所求的垂线与$l_1$(或$l_2$)重合，但我们可以在$l_2$(或$l_1$)上选取$P$(或$Q$)点，使$OP\perp OQ$，这里$Q$(或$P$)是$l_1$与$l_2$的支点. 所以$R_1$、$R_2$也符合条件.

如果完备性的证明(即从已知条件导出方程的过程)是可逆的，那么纯粹性的证明也就是同时完成了. 如果推导的过程不是明显地可以逆推回去. 那么严格说来，纯粹性应当另加证明. 但在大多数情况下，纯粹性可以归结为作出符合要求的几何图形，必要时借助于同一法及完备性部分的证明即可完成. 有的时候，由于不存在符合要求的几何图形，需要在导出的方程中去掉一部分点. 但即使在这种场合下常常由于能给出某种合理的解释(如引进无穷远点.虚点之类)，仍将那些"例外点"算在轨迹中. 这也是解析几何中.通常不证纯粹性的一个原因.

**例 2** 定点$A$在$x$轴，$B$在$y$轴上. 动点$A'$在$x$轴上，$B'$在$y$轴上. 如果

$$(a)\qquad OA'+OB'=OA+OB, \tag{28.9}$$

$$(b)\qquad \frac{1}{OA'}-\frac{1}{OB'}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}. \tag{28.10}$$

求$A'B$与$AB'$的交点$P$的轨迹.

**解** (b) 设$OA=a$，$OB=b$，$OA'=a'$，$OB'=b'$. 则$AB'$方程为

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b'}=1, \tag{28.11}$$

$A'B$方程为

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b}=1. \tag{28.12}$$

两式相减得

$$x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)+y\left(\frac{1}{b'}-\frac{1}{b}\right)=0. \tag{28.13}$$

由 (28.10)，$\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}=\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}$. 所以轨迹方程为

$$x-y=0. \tag{28.14}$$

($a$)　记号与 ($b$) 中相同. 由 (28.9) $a-a'=b-b'$，所以从 (28.13) 导出

$$\frac{x}{aa'}+\frac{y}{bb'}=0, \tag{28.15}$$

将 (28.11) 乘$\frac{1}{b}$，(28.12) 乘$\frac{1}{a}$再相加得

$$\frac{x}{ab}+\frac{y}{bb'}+\frac{x}{aa'}+\frac{y}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \tag{28.16}$$

由于 (28.15)，(28.16) 可化成

$$\frac{x}{ab}+\frac{y}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \tag{28.17}$$

即

$$x+y=a+b. \tag{28.18}$$

这就是所求的轨迹方程.

严格说来，点 $P(a,b)$ 应当从 (28.18) 中去掉，因为这时$AP//y$轴，$BP//x$轴，无法作出$A'$、$B'$点. 对(28.18)上的其它点$P$，均可作出 $AP$ 与$y$轴的交点 $B'$，$BP$与$x$轴的交点 $A'$. 由 (28.11)、(28.12)可得(28.13)及(28.16)，由 (28.16)、(28.17) 得 (28.15)，由 (28.13)、(28.15)

可得（28.9），所以$P$符合要求。点$(a,b)$也可以作为"极限点"保留在（28.18）中。

同样地，（28.14）上的点符合要求，但点$(a,a)$与$(b,b)$是例外，只有把它们作为极限点来解释才能算是轨迹中的点。

还有一点需要指出：在上面的论证中均排除了$a'=a$（这时$b'=b$）的情况（所以我们在（28.13）两边可以约去$\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}$，或$a-a'$）。如果$a'=a$，那么$A'=A$，$B'=B$。有一种观点认为这时直线$AB$上每一点都是轨迹上的点，所以轨迹方程除（28.14）或（28.18）外，还应添上$AB$的方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$。究竟$AB$上的点算不算轨迹，实在是一个见仁见智的问题，不必争之不休。

求轨迹方程的最关键的一步是消元（消去参数）。(b)中将（28.11）、（28.12）相减消去$a'$、$b'$的技巧是很高的（第13节例2实际上已经用了这个技巧）。(a)中消去$a'$、$b'$的通常方法是由（28.11）、（28.12）解出$b'=\dfrac{y}{1-\dfrac{x}{a}}$，$a'=\dfrac{x}{1-\dfrac{y}{b}}$，再代入（28.9）中，经过化简得出$(x+y-a-b)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0$。

**例 3** 已知点$O$及二平行直线$l_1$、$l_2$。过$O$作动直线交$l_1$于$A$，交$l_2$于$B$。过$A$、$B$各作一直线分别与已知直线$l_3$、$l_4$平行，所作的两条直线相交于$C$，求$C$点的轨迹。

**解** 以$O$为原点，过$O$且与$l_1$平行的直线为$y$轴，建

立直角坐标系。设 $l_1$、$l_2$ 的方程分别

$$x=c_1,$$

$$x=c_2.$$

$l_3$、$l_4$ 的斜率分别为 $k_1$、$k_2$。设 $OA$ 方程为

$$y=kx,$$

则 $A$、$B$ 的坐标分别为

$$(c_1, kc_1),\quad (c_2, kc_2).$$

$AC$、$BC$ 的方程分别为

$$y-kc_1=k_1(x-c_1), \tag{28.19}$$

$$y-kc_2=k_2(x-c_2). \tag{28.20}$$

(28.19) 乘以 $c_2$ 减去 (28.20) 乘以 $c_1$，消去 $k$ 得

$$(c_2-c_1)y=(c_2k_1-c_1k_2)x+(k_2-k_1)c_1c_2.$$

这条直线就是所求的轨迹。

注 1　本题不必先由 (28.19)、(28.20) 解出 $C$ 的坐标。关键在于消去参数 $k$。

注 2　本题也可以用斜坐标来解。

**例 4**　已知正三角形 $ABC$ 的顶点 $A(a,0)$。$B$ 在 $y$ 轴上运动，求 $C$ 的轨迹。

**解**　设 $B$ 为 $(0,b)$，则 $C$ 点的复数表示为

$$a+(-a+bi)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}=a+(-a+bi)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\left(\frac{a}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)+\left(\frac{b}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)i,$$

即 $C$ 点的坐标为

$$x=\frac{a}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

$$y=\frac{b}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

这就是轨迹的参数方程。或者消去参数 $b$ 得

$$x\pm\sqrt{3}\,y+a=0. \qquad (28.21)$$

直线（28.21）就是所求轨迹，它通过 $A'(-a,0)$（$A$的对称点），与 $x$ 轴的夹角为 $\pm\frac{\pi}{6}$.

**例 5** 过 $A(0,a)$ 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线。$S$ 为这切线上动点。过 $S$ 再作一条切线，切点为 $R$. 求 $\triangle ARS$ 的垂心 $H$ 的轨迹。

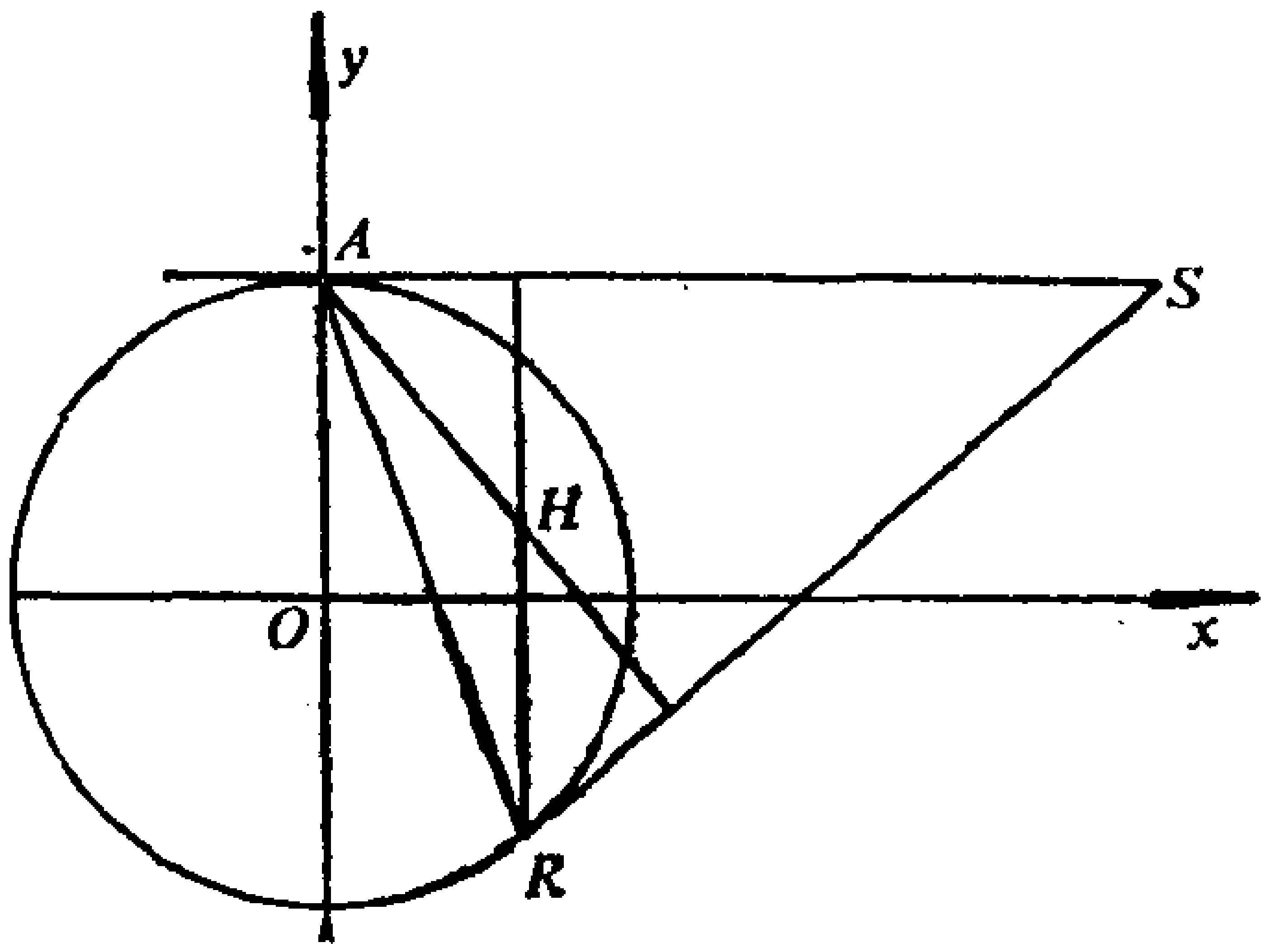


图 37

**解** 设 $R$ 点坐标为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$，则 $H$ 点的横坐标为

$$x=a\cos\theta, \qquad (28.22)$$

$SR$ 方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta=a,$$

$SR$ 的垂线 $AH$ 的方程为

$$x\sin\theta-(y-a)\cos\theta=0. \qquad (28.23)$$

将（28.22）代入并化简得

$$y-a=a\sin\theta, \tag{28.24}$$

由（28.22）、（28.24）得

$$x^2+(y-a)^2=a^2. \tag{28.25}$$

这是以 $A(0, a)$ 为圆心，$a$ 为半径的圆。这圆与 $y$ 轴的两个交点：原点 $O$ 与（0，$2a$）是极限点。圆上其他的点 $H$ 均符合要求（自 $H$ 作 $x$ 轴垂线交圆于 $R$，由（28.22）、（28.25）可导出（28.24）、（28.23）。

**例 6** 已知一圆绕这圆上的定点 $A$ 旋转，作这圆的平行于定直线 $l$ 的切线，求切点 $p$ 的轨迹（图 38）。

**解** 以 $A$ 为原点，过 $A$ 且平行于 $l$ 的直线为 $y$ 轴，建立直角坐标系。设动圆圆心为（$c$，$d$），半径为 1，则由于这圆过 $A$，所以

$$c^2+d^2=1, \tag{28.26}$$

动圆方程为

$$(x-c)^2+(y-d)^2=1, \tag{28.27}$$

设 $P$ 点坐标为（$h$，$k$），则过 $P$ 的切线为

$$(h-c)(x-c)+(k-d)(y-d)=1, \tag{28.28}$$

由于这切线与 $y$ 轴平行，所以这切线方程应当为

$$x=h. \tag{28.29}$$

（28.28）与（28.29）是同一个方程，所以（28.28）中 $y$ 的系数

$$k-d=0, \tag{28.30}$$

从而由（28.28）、（28.29）得

$$(h-c)^2=1, \tag{28.31}$$

即

$$c=h\pm1. \tag{28.32}$$

将（28.30）与（28.32）代入（28.26）得

$$(h\pm 1)^2+k^2=1,$$

或依照习惯将$h$、$k$改记为$x$、$y$得

$$(x\pm 1)^2+y^2=1.$$

这就是所求的轨迹方程，它是两个半径为1的圆，圆心分别为（1，0），（-1，0）.

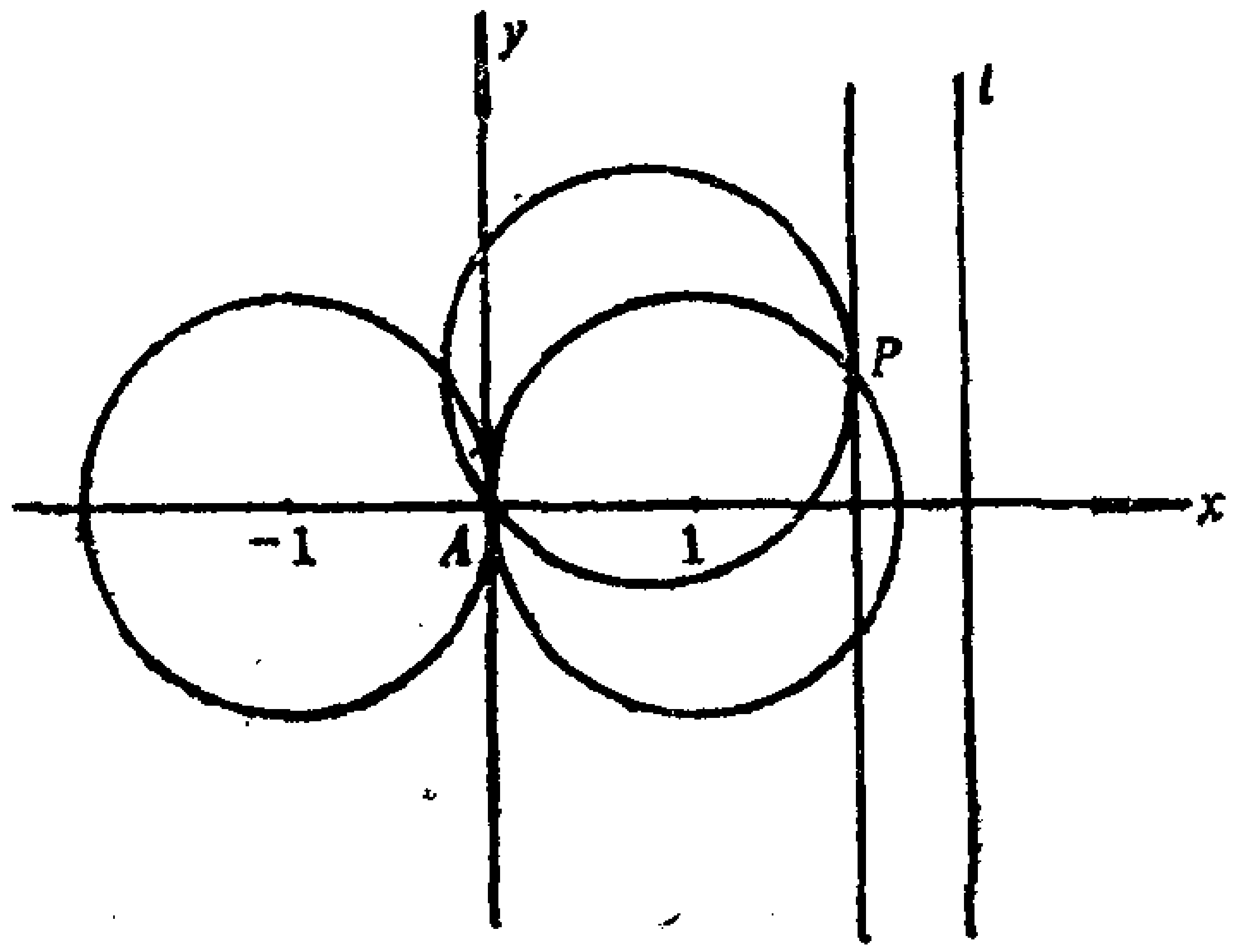


图 38

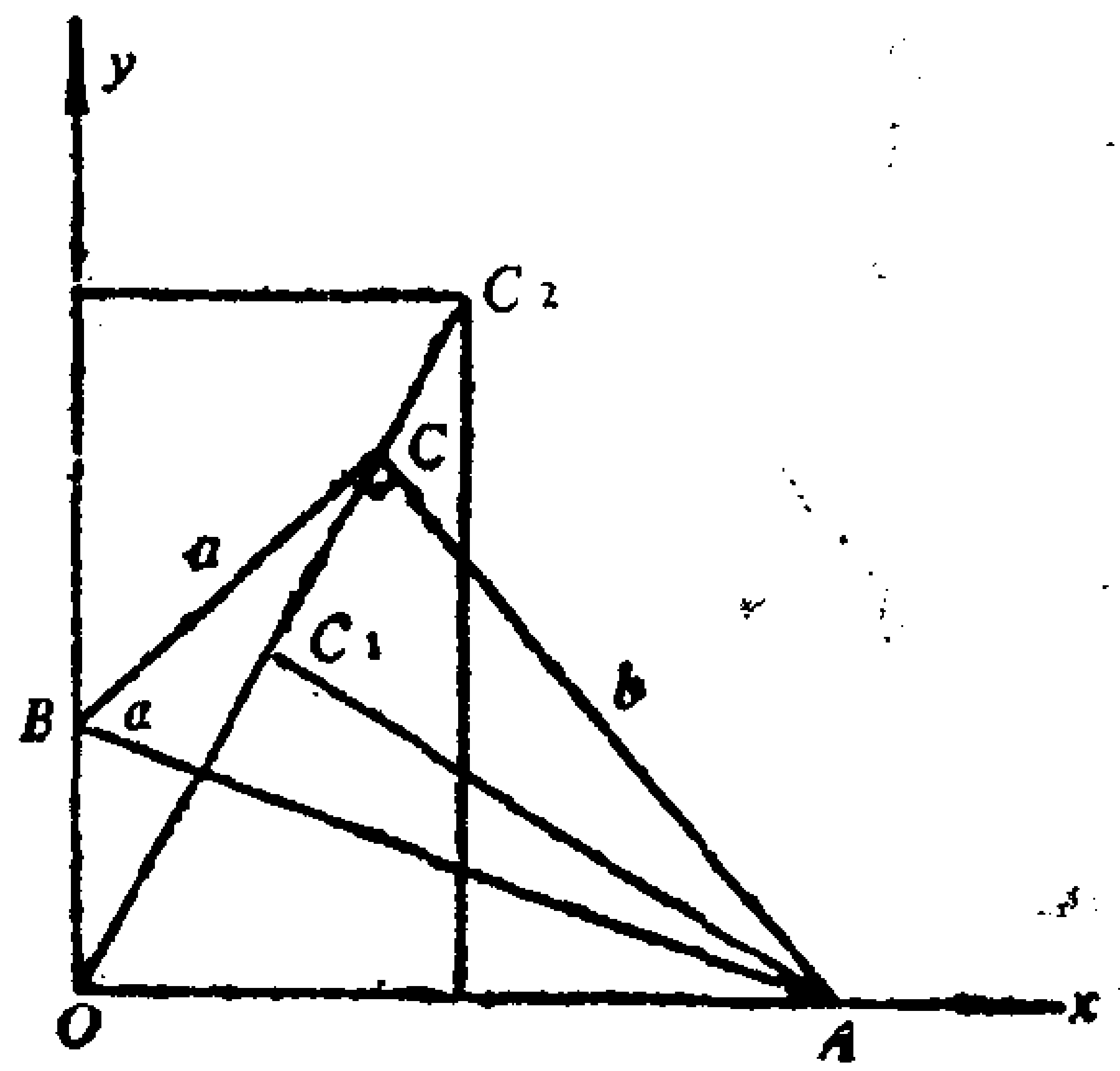


图 39

**例 7** 给定$\triangle ABC$，$\angle C=90°$，$A$、$B$两点分别在正半$x$轴、正半$y$轴上滑动．求$C$点的轨迹方程（图39）．

**解** 设$\angle ABC=\alpha$，$AC=b$，$BC=a$．不妨设$b\geqslant a$（即$\alpha\geqslant 45°$）．连$OC$，则由于

$$\angle BCA+\angle AOB=90°+90°=180°,$$

所以$O$、$A$、$C$、$B$四点共圆，$\angle AOC=\angle ABC=\alpha$，点$C$在直线$\left(\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}\right)$

$$y=\frac{b}{a}x \tag{28.33}$$

上．

但（28.33）上的点并不全符合要求．所求的轨迹只是一个线段$C_1C_2$．这里$C_1$与原点距离为$a$，所以它的坐标是$\left(\frac{ab}{c},\ \frac{b^2}{c}\right)$，其中$c$是斜边长．$C_2$的坐标是$(a,\ b)$．因此轨迹方程应写成

$$y=\frac{b}{a}x. \quad \left(\frac{ab}{c}\leqslant x\leqslant a\right)$$

注 1 轨迹的纯粹性还是一个作图问题，对线段$C_1C_2$上的点能作出符合要求的图形．线段$C_1C_2$外的点则不能．

注 2 本例运用了几何知识．如果不用四点共圆，虽也能求出轨迹方程，但比较麻烦．

**例 8** 已知圆$x^2+y^2=1$，过点$A(1,\ 0)$作直线交圆于$Q$．在这直线上取$P$，使$P$到$x=-1$的距离等于$|PQ|$，求$P$点轨迹．

**解** $P(x,\ y)$关于圆

$$x^2+y^2=1$$

的幂（第 21 节例 1）为 $x^2+y^2-1$，由圆幂定理，

$$|PQ\times PA|=x^2+y^2-1,$$

根据已知条件 $|PQ|=|x+1|$，所以上式即

$$(x+1)^2\cdot[(x-1)^2+y^2]=(x^2+y^2-1)^2,$$

展开整理得

$$y^2(y^2+x^2-2x-3)=0.$$

这轨迹由 $x$ 轴与一个圆组成。这圆的圆心为 $A$，半径为 2（图40）

例 8 也应用了几何知识（圆幂定理）．下面的例 9 正是由于应用几何知识，很快就获得了答案。

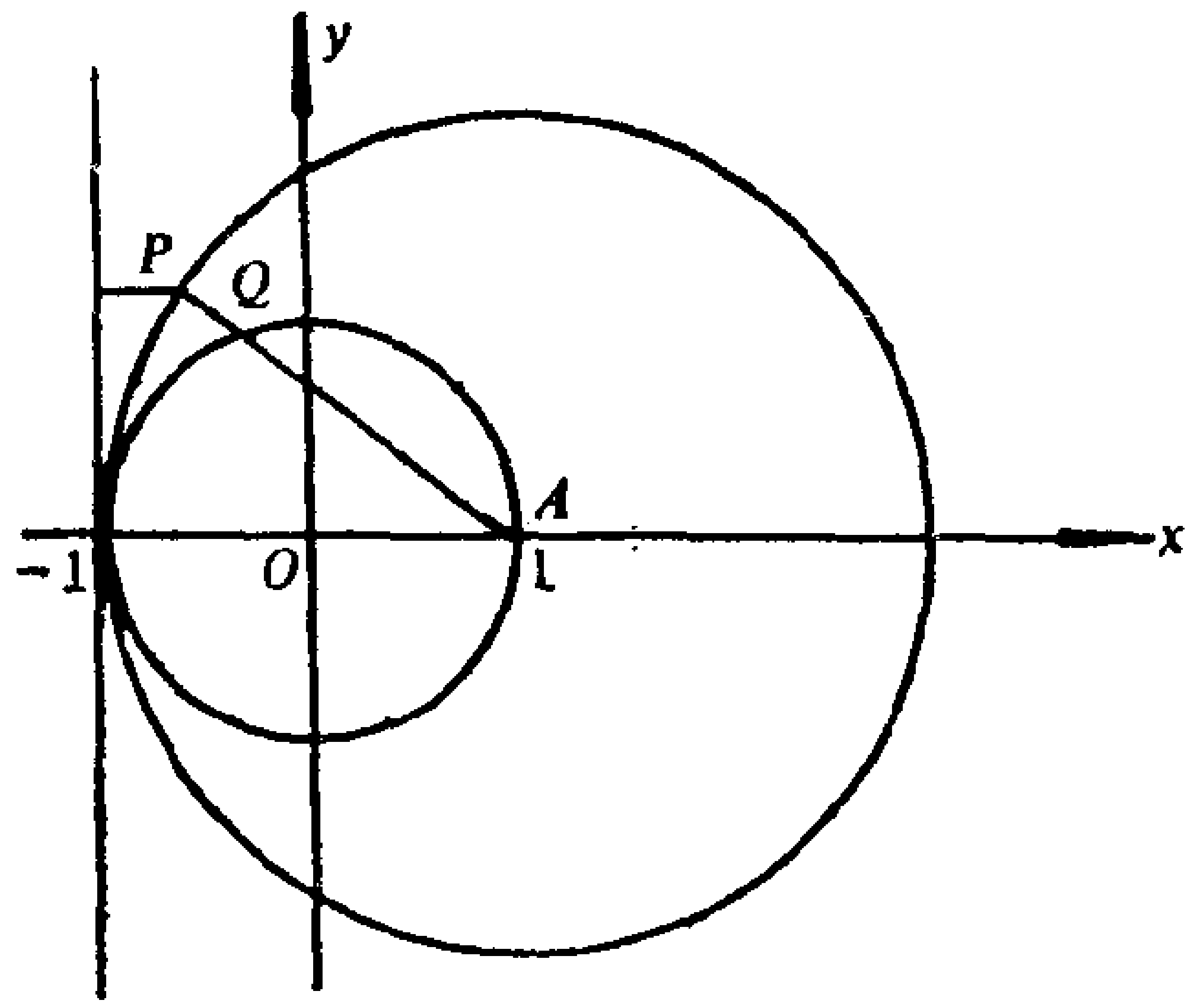


图 40

**例 9** $P(a,\ b)$ 为圆 $x^2+y^2=1$ 内一个定点．作直线 $PA\perp PB$，分别交圆于 $A$、$B$．以 $A$、$P$、$B$ 为三个顶点作矩形，求矩形的第四个顶点 $Q$ 的轨迹。

**解** 设对角线 $PQ$、$AB$ 相交于 $M$．由中线公式（第 1 节例 1）

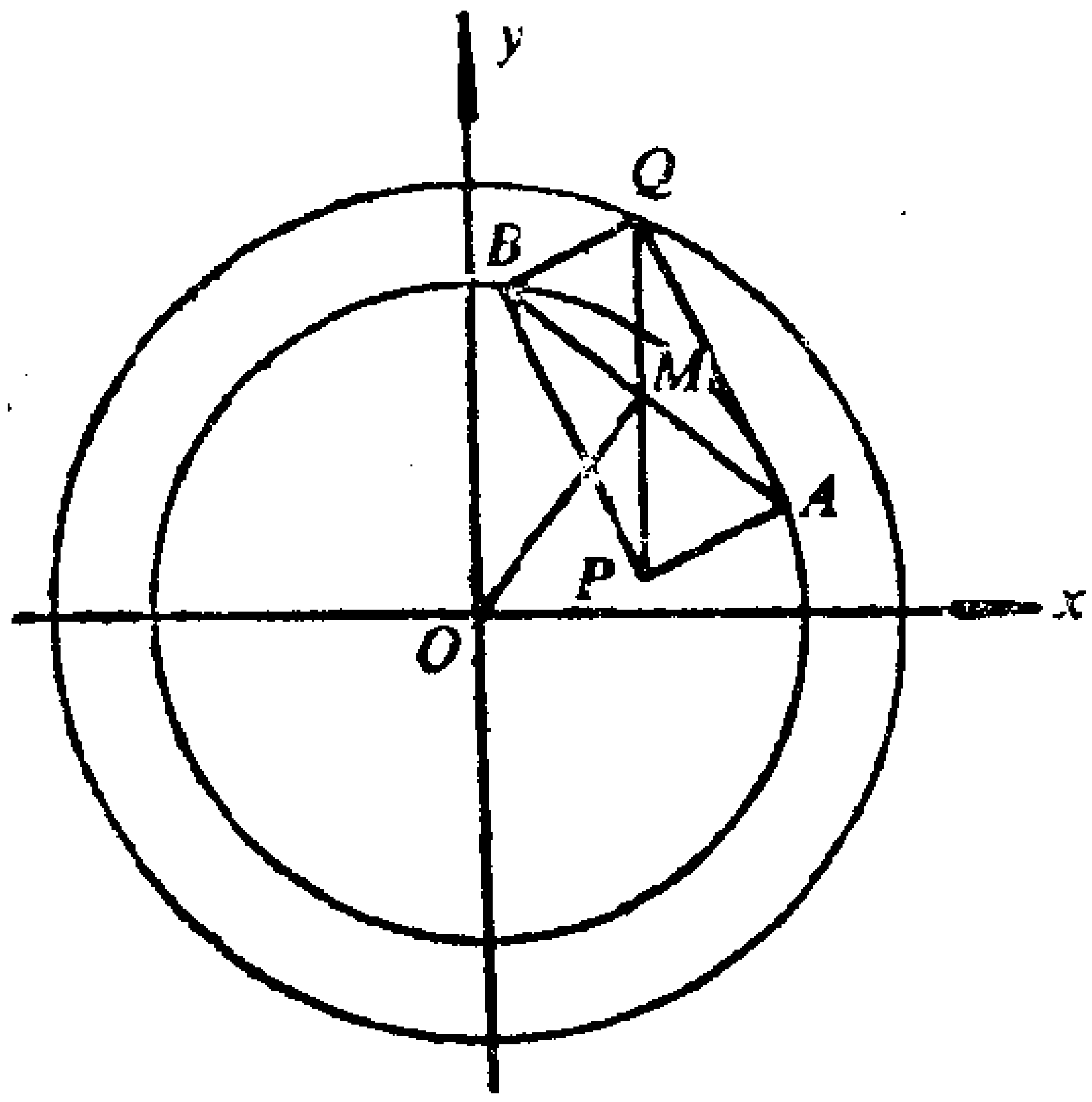

图 41

$$OP^2+OQ^2=\frac{1}{2}AB^2+2OM^2=OA^2+OB^2=2r^2,$$

所以

$$OQ^2=2r^2-(a^2+b^2),$$

即 $Q$ 点的轨迹是圆

$$x^2+y^2=2r^2-(a^2+b^2). \tag{28.34}$$

它的圆心为圆点，半径为

$\sqrt{2r^2-(a^2+b^2)}$ （图41）

要证明纯粹性，方法是以 $PQ$ 为直径作半圆交圆 $x^2+y^2=r^2$ 于 $A$，完成矩形 $PAQB'$。由（28.34）及 $OP^2+OQ^2=OA^2+OB'^2$ 得知 $OB'=r$，即 $B'$ 在圆上。所以 $Q$ 点符合要求。

在消元时，韦达定理也是常用手段。

**例 10** 证明抛物线 $y^2=2px$ 的每一对互相垂直的切线的交点的轨迹是抛物线的准线。

**解** 抛物线 $y^2=2px$ 的、斜率为 $k$ 的切线是

$$y=kx+\frac{p}{2k},$$

即

$$2k^2x-2ky+p=0. \tag{28.35}$$

如果 $M(x, y)$ 是一对互相垂直的切线的交点，那么它的坐标适合（28.35），而（28.35）作为 $k$ 的方程来说，它的两根之积 $k_1k_2$ 应为 $-1$。所以由韦达定理

$$\frac{p}{2x}=-1,$$

即点$M$在准线

$$x=-\frac{p}{2} \tag{28.36}$$

上。

反过来，对于准线（28.36）上一点$M$，自$M$向抛物线引切线$MT$，再作与$MT$垂直的切线交$MT$于$M'$。由完备性的证明，$M'$应当在准线上，但$MT$与准线只有一个公共点$M$，所以$M'$与$M$重合，$M$是一对垂直切线的交点。

例1末曾说过纯粹性的证明……“借助于同一法及完备性的证明即可完成”，例10的末段便是这段话的一个注释。

**例 11** 求对椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的视角为直角的点的轨迹。

**解** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的斜率为$k$的切线是

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}. \tag{28.37}$$

与例10类似，由（28.37）及韦达定理可知轨迹为

$$x^2+y^2=a^2+b^2. \tag{28.38}$$

（28.38）是以椭圆的中心（原点）为心，$\sqrt{a^2+b^2}$为半径的圆，称为椭圆的准圆。

由例10可以推知椭圆$\frac{x^2}{a_2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的所有外切矩形的对角线长均等于$2(a^2+b^2)^{1/2}$，即准圆的直径。

**例 11** 如果动点$M$向抛物线$y^2=2px$所引的两条切线分别交$y$轴于$A$、$B$，而$\triangle ABM$的面积为定值$c^2$。求$M$点的轨迹。

**解** 由例9解法，我们已经知道切线为

$$2xk_i^2-2yk_i+p=0,\quad i=1,\ 2.$$

它与$y$轴相交于$\left(0,\ \dfrac{p}{2k_i}\right)$，所以

$$|AB|=\left|\frac{p}{2k_1}-\frac{p}{2k_2}\right|=\frac{p}{2}\left|\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}\right|.$$

而由例9，$k_1$，$k_2$为方程

$$2xk^2-2yk+p=0$$

的两个根，其中$x$、$y$是$M$的坐标。因此

$$c^4=\left(\frac{1}{2}x\cdot AB\right)^2=\frac{p^2x^2}{16}\left(\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}\right)^2$$

$$=\frac{p^2x^2}{16}\cdot\frac{1}{(p/2x)^2}[(k_1+k_2)^2-4k_1k_2]$$

$$=\frac{x^4}{4}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{2p}{x}\right].$$

即所求的轨迹为四次曲线

$$x^2(y^2-2px)=4c^4.$$

**例 12** 设$A_i(x_i,\ y_i)$为抛物线$y^2=2px$上两个动点$(i=1,\ 2)$，满足$y_2=2y_1$。求过$A_1$的切线与过$A_2$的切线的交点的轨迹。

**解** 过$A_i$的切线为

$$y_iy=px+px_i,\quad i=1,\ 2.$$

即

$$y_iy=px+\frac{y_i^2}{2},\quad i=1,\ 2.$$

设切线交点$M$为$(x,\ y)$，则$y_1$、$y_2$是方程

$$ty=px+\frac{t^2}{2}$$

的两个根．由于$y_2=2y_1$，所以根据韦达定理

$$y_1\cdot 2y_1=2px, \tag{28.39}$$

$$y_1+2y_1=2y. \tag{28.40}$$

由（28.39）、（28.40）消去$y_1$得$M$的轨迹方程为

$$y^2=\frac{9}{4}px.$$

**例 13** $\triangle ABC$的顶点$A$固定，$BC$为定长$a$并沿所在直线滑动，求外心的轨迹．

**解** 以$BC$所在直线为$x$轴，过$A$并且垂直于$BC$的直线为$y$轴．设$A$的坐标为$(0, h)$．又设外心为$O(c, d)$．这时外接圆方程的"头"为$x^2+y^2-2cx-2dy$（参看第5节），由于外接圆过$A(0, h)$，所以它的方程为

$$x^2+y^2-2cx-2dy=h^2-2dh. \tag{28.41}$$

圆（28.41）与$x$轴相交于$B$、$C$，所以$B$、$C$的横坐标是方程

$$x^2-2cx=h^2-2dh$$

的两个根．这两根之差为$a$．因此，由韦达定理，

$$\begin{aligned}a^2&=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=4c^2+4(h^2-2dh).\end{aligned}$$

按习惯改记$(c, d)$为$(x, y)$，得外心$O$的轨迹为

$$4x^2=8hy+4h^2-a^2.$$

这是一条抛物线．

消去参数的方法很多，关键是根据问题的特点，灵活运用．

**例 14** 过双曲线的焦点向切线作垂线，求垂足的轨迹．

**解** 设双曲线为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，它的斜率为$m$的切线是

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2},$$

即

$$(y-mx)^2=a^2m^2-b^2. \tag{28.42}$$

自焦点向切线所作垂线为

$$my+x=\pm c,$$

即

$$(my+x)^2=a^2+b^2. \tag{28.43}$$

消去参数$m$的最好方法是将（28.42）与（28.43）相加得

$$(m^2+1)(x^2+y^2)=(m^2+1)a^2,$$

从而所求轨迹是以实轴为直径的圆

$$x^2+y^2=a^2.$$

**例 15** $PP'$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的任一条平行于$y$轴的弦，$A$、$A'$是$x$轴上的两个顶点，直线$A'P$与$AP'$相交于$Q$，求$Q$的轨迹.

**解** 设$P$点的坐标为（$a\cos\alpha$，$b\sin\alpha$）（椭圆的参数表示），则$P'$点的坐标为（$+a\cos\alpha$，$-b\sin\alpha$）. 直线$A'P$方程为

$$y=\frac{b\sin\alpha}{a(1+\cos\alpha)}(x+a), \tag{28.44}$$

$AP'$方程为

$$y=\frac{b\sin\alpha}{a(1-\cos\alpha)}(x-a), \tag{28.45}$$

（28.44）与（28.45）相乘得

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (28.46)$$

所以 $Q$ 点的轨迹是双曲线（28.46）.

# 29　一道几何题的推广

如图 42 所示，$AB$ 是⊙$O$ 的直径，$PA$ 为切线，过 $P$ 任作一割线交⊙$O$ 于 $C$、$D$，$BC$、$BD$ 分别与 $PO$ 相交于 $E$、$F$. 求证 $EO=OF$.

这道题原载梁绍鸿著《初等数学复习及研究》（157页第17题），可以用四点共圆来证明（并不容易），本书当然用解析几何来解.

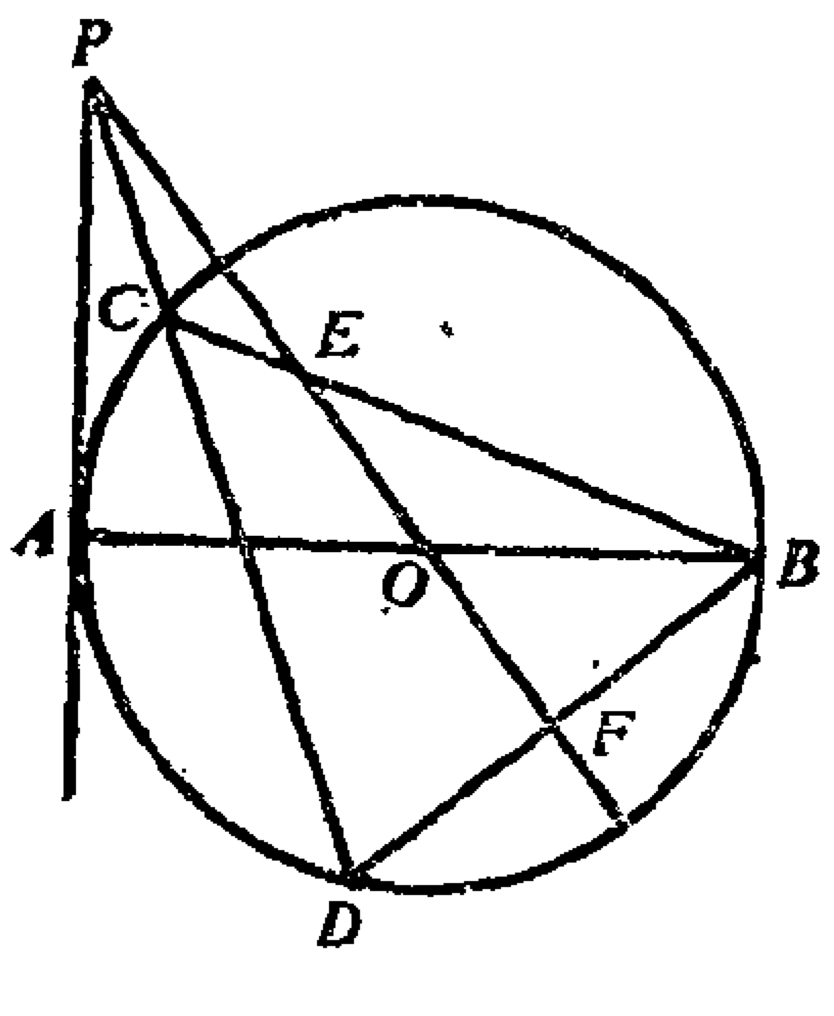


图 42

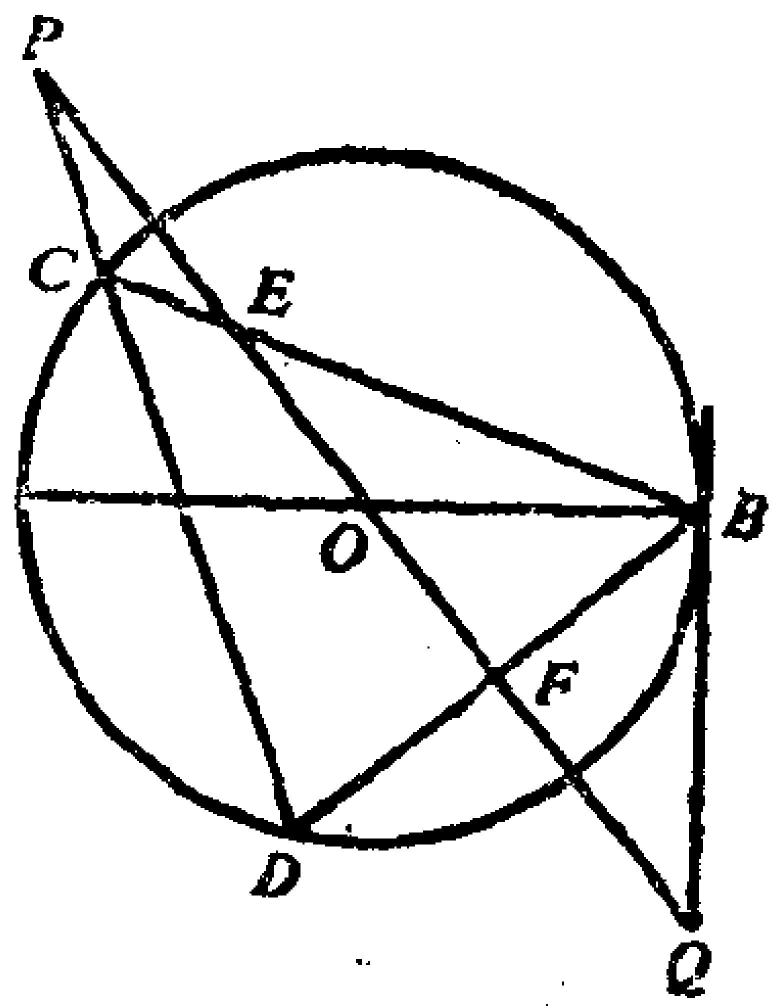


图 43

首先，原题可化成一个等价的命题：

直线 $PQ$ 过圆心 $O$，并且 $PO=OQ$. 过 $P$ 作割线 $PC$ 交

$\odot O$于$C$、$D$，过$Q$作切线$QB$，$B$为切点．$BC$、$BD$分别交$PQ$于$E$、$F$，则$EO=OF$（图43）．

切线无非是割线的特殊情况，所以上面的命题可进一步推广成：

设$P$、$Q$两点关于圆心$O$对称，过$Q$作割线交$\odot O$于$A$、$B$，过$P$作割线交$\odot O$于$C$、$D$，$AC$、$BD$分别交$PQ$于$E$、$F$，则$EO=OF$（图44）

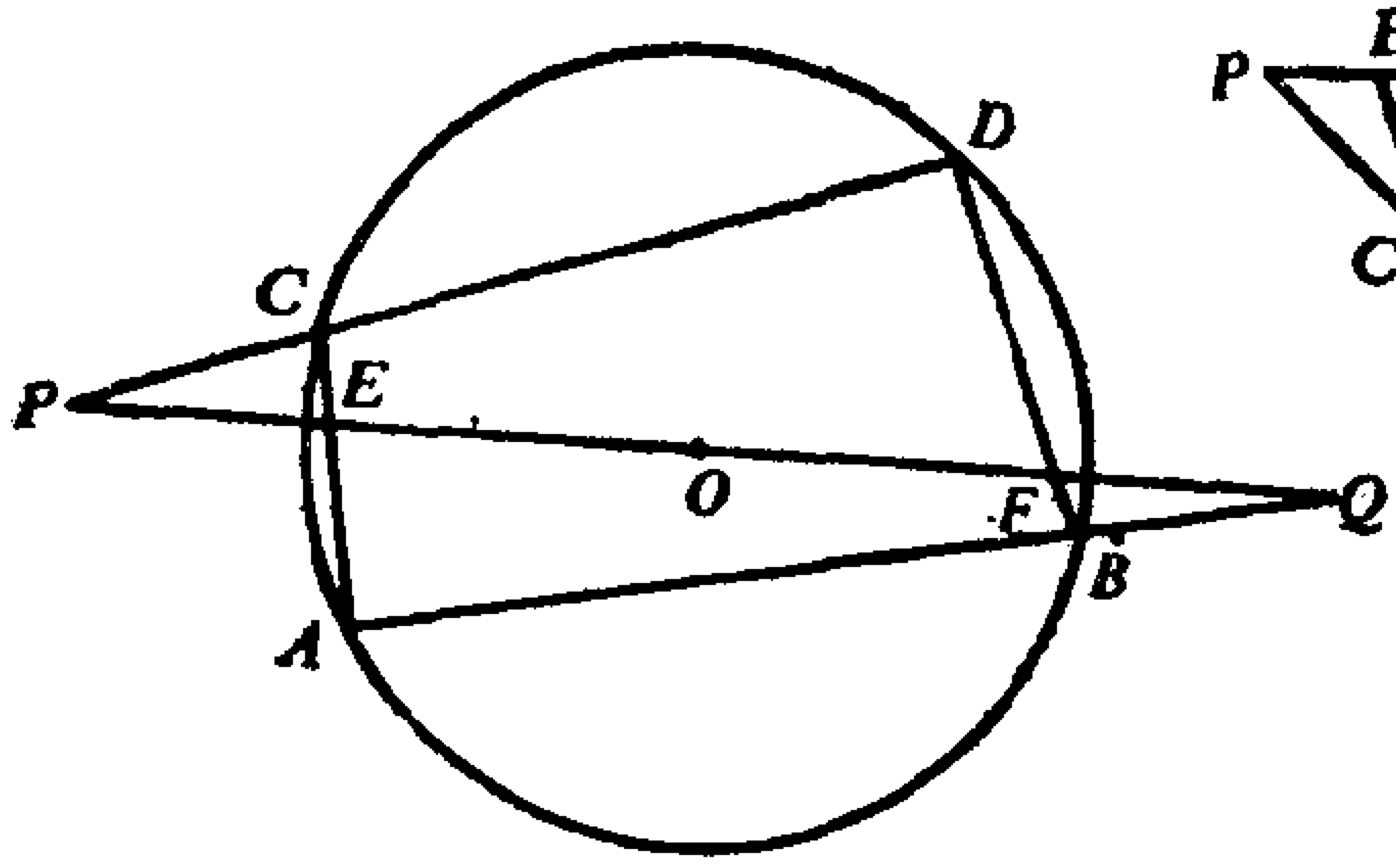


图 44

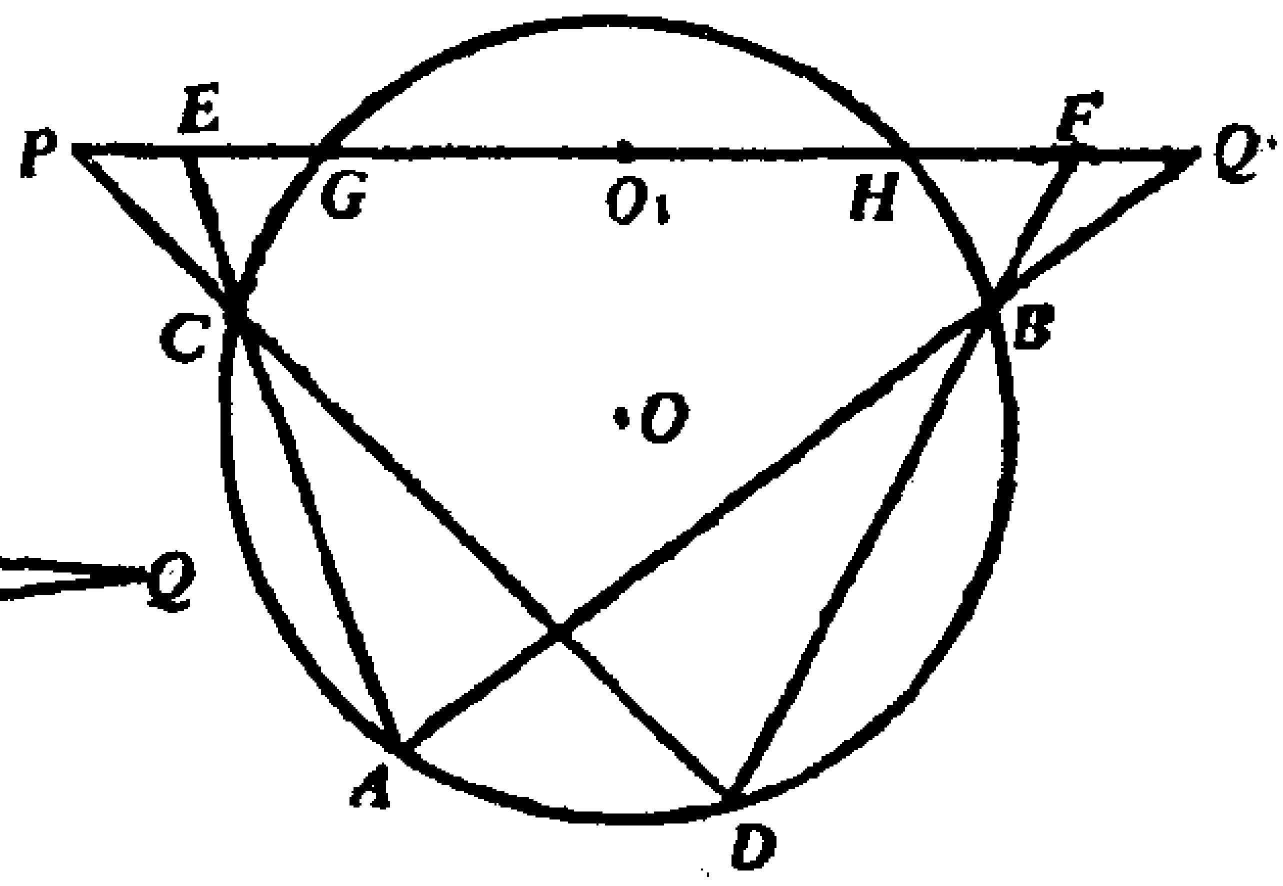


图 45

圆心是直径的中点，直径是特殊的弦．因此再推广一步，结论成为：

在$\odot O$中，弦$GH$的中点为$O_1$，$P$、$Q$在直线$GH$上并且关于$O_1$对称，过$P$作割线交$\odot O$于$C$、$D$，过$Q$作割线交$\odot O$于$A$、$B$，$AC$、$BD$分别交$PQ$于$E$、$F$，则$EO_1=O_1F$（图45）．

圆是圆锥曲线的一种，因此上面的命题都是下面的更一般的定理的推论．

**定理** 设圆锥曲线$\Gamma$的弦$GH$的中点为$O$，$P$、$Q$在直线$GH$上并且关于$O$点对称，过$P$作直线交曲线$\Gamma$于$C$、

$D$，过$Q$作直线交曲线$\Gamma$于$A$、$B$，$AC$、$BD$分别交$PQ$于$E$、$F$，则$EO=OF$。

**证** 建立坐标系如图46所示。设曲线$\Gamma$的方程为

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, \tag{29.1}$$

它与$x$轴的交点$G$、$H$的横坐标满足

$$ax^2+dx+f=0. \tag{29.2}$$

由于原点$O$是$GH$的中点，所以$G$、$H$的横坐标互为相反数，也就是它们的和为0。由韦达定理，(29.2)中系数$d=0$。因此曲线$\Gamma$的方程是

$$ax^2+bxy+cy^2+ey+f=0. \tag{29.3}$$

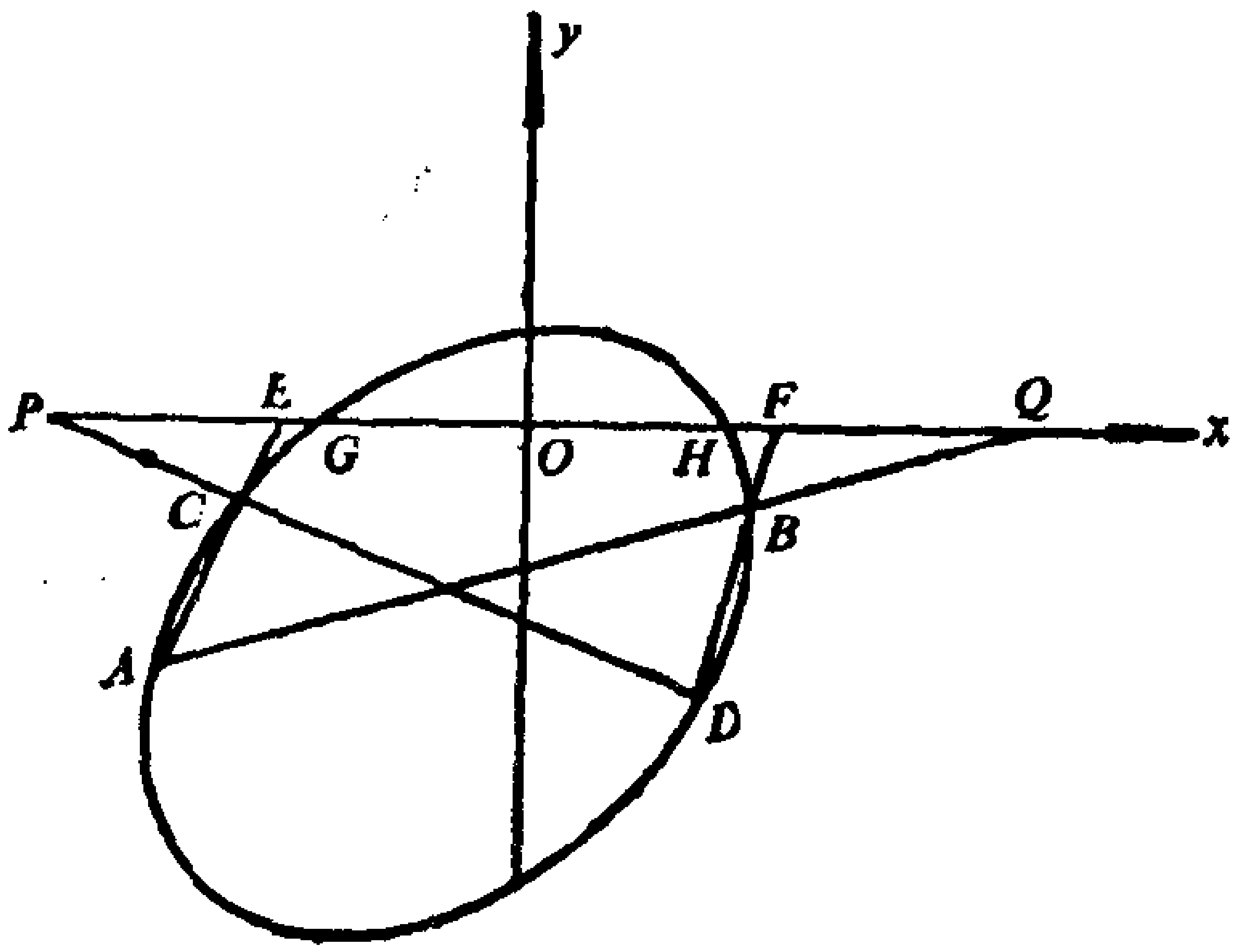


图 46

设$P$、$Q$的横坐标分别为$-g$、$g$，$CD$的方程为

$$y=k_1(x+g), \tag{29.4}$$

$AB$的方程为

$$y=k_2(x-g), \tag{29.5}$$

或结合起来，用

$$[y-k_1(x+g)][y-k_2(x-g)]=0 \tag{29.6}$$

表示两条直线 $AB$、$CD$。

过 (29.3) 与 (29.6) 的交点 $A$、$B$、$C$、$D$的任一二次曲线的形状是

$$\lambda_1(ax^2+bxy+cy^2+ey+f)+\lambda_2[y-k_1(x+g)]\cdot[y-k_2(x-g)]=0. \quad (29.7)$$

其中也包括两条直线 $AC$、$BD$——退化的二次曲线.

(29.7) 与 $x$ 轴的交点$E$、$F$的横坐标满足

$$\lambda_1(ax^2+f)+\lambda_2k_1k_2(x^2-g^2)=0 \quad (29.8)$$

由于 (29.8) 中没有$x$的一次项 (这就是问题的关键所在!),所以$E$、$F$的横坐标互为相反数,即 $EO=OF$.证毕。

实际上,按照上面的证法,我们证明了比定理还强的结论:

设圆锥曲线$\Gamma$的弦$GH$的中点为$O$,$P$、$Q$在直线$GH$上并且关于$O$对称,过$P$、$Q$的一条圆锥曲线交曲线$\Gamma$于$A$、$B$、$C$、$D$,过$A$、$B$、$C$、$D$的任一条圆锥曲线交$PQ$于$E$、$F$,那么$EO=OF$.

第 26 节例 1 中的蝴蝶定理是$P$与$Q$重合并且$\Gamma$是圆的特殊情况。

如果直线$l$不与圆锥曲线$\Gamma$相交,而平行于$l$的弦的中点的连线(直径)与$l$相交于$O_1$,则不难证明在以$l$为$x$轴、$O_1$为原点、建立直角坐标系时,曲线$\Gamma$的方程中无$x$的一次项.于是对于$l$上任意两个关于$O_1$对称的点$P$、$Q$,过$P$、$Q$的任一条圆锥曲线如果交$\Gamma$于$A$、$B$、$C$、$D$,则过$A$、$B$、$C$、$D$的任一条圆锥曲线与$l$的交点关于$O_1$对称。

证明与前面完全相同．事实上，这时可以认为$\Gamma$与$l$有两个"虚"交点，而$O_1$恰好是它们的中点．

作为特殊情况，我们有：

自$\odot O$外一点$O_1$引两条直线分别交$\odot O$于$A$、$B$及$C$、$D$，直线$AC$、$BD$分别交$OO_1$的垂线$l$于$E$、$F$，则$EO_1=FO_1$（图47）．

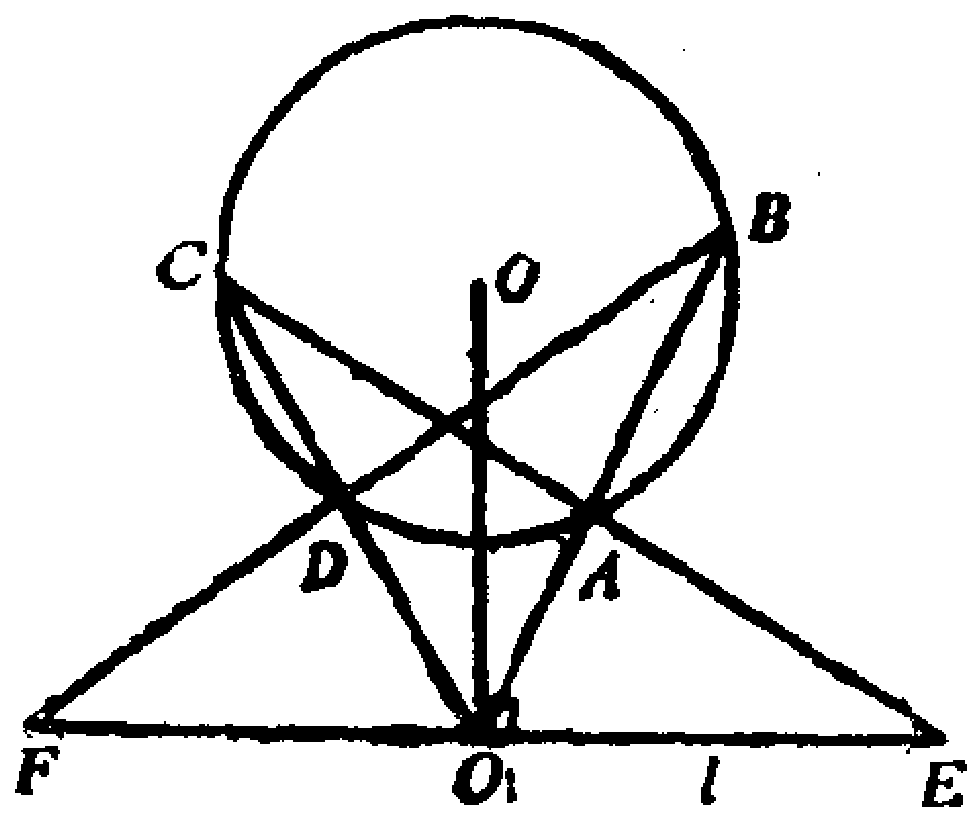



图 47

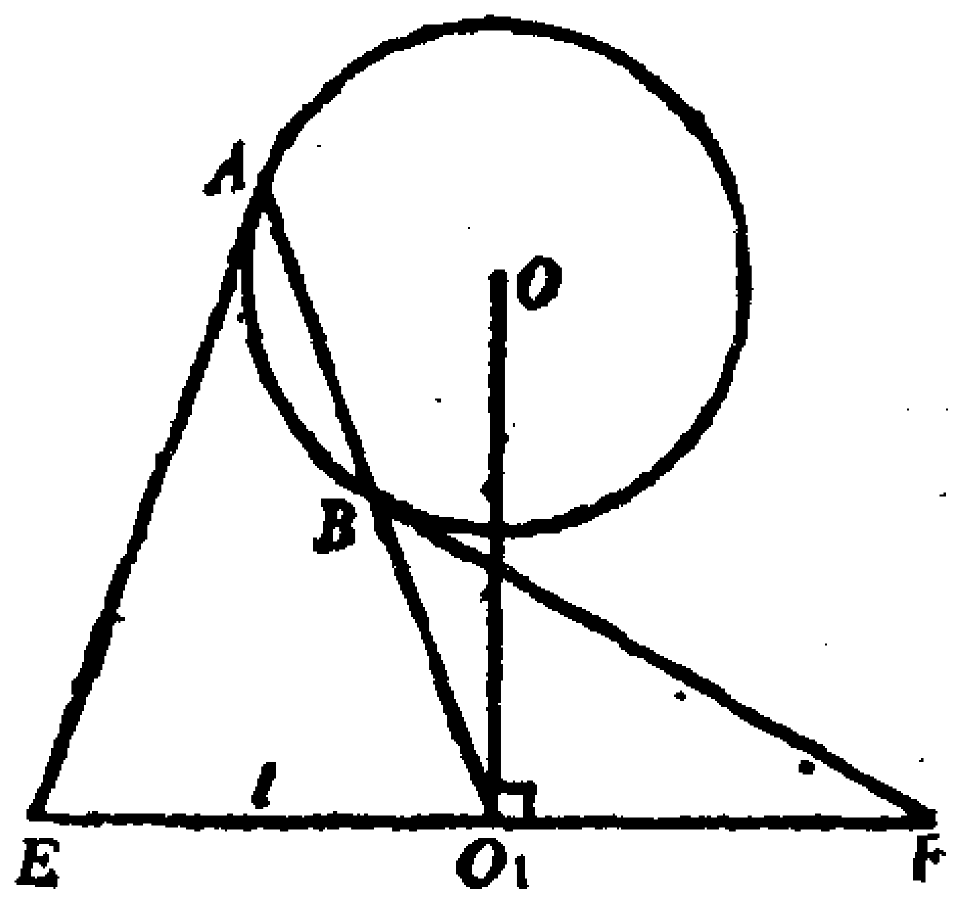



图 48

再特殊一点，在$A$与$C$、$B$与$D$重合时：

自$\odot O$外一点$O_1$引割线交$\odot O$于$A$、$B$，过$A$、$B$作切线分别交$OO_1$的垂线$l$于$E$、$F$，则$EO_1=O_1F$．（图48）

从本节可以看出，解析几何方法有时比纯几何的方法更深入，更易于获得普遍性的结论．而这普遍性的结论的证明并不困难，甚至比特殊的结论的证明还要容易．这是因为在特殊的问题中，问题的实质被掩盖在各种特殊性之下，而在一般的问题中，摒弃了各种特性（如本节中的圆、直径、切线等的特性），问题的实质（内在规律）便容易揭示出来．所以，先将命题推广至更一般的形式，然后再进行证明，是

一种重要的数学方法。

# 30 两道国际竞赛题

国际数学竞赛中，有不少几何问题，例如第29届的第1题、第5题，它们都可以用解析几何来解。

**例 1**（第29届第5题）在直角三角形$ABC$中，$AD$是斜边$BC$上的高。连接三角形$ABD$的内心与三角形$ACD$的内心的直线分别与边$AB$及边$AC$相交于$K$及$L$两点。三角形$ABC$与$AKL$的面积分别记为$S$与$T$。求证$S\geqslant 2T$。（图49）。

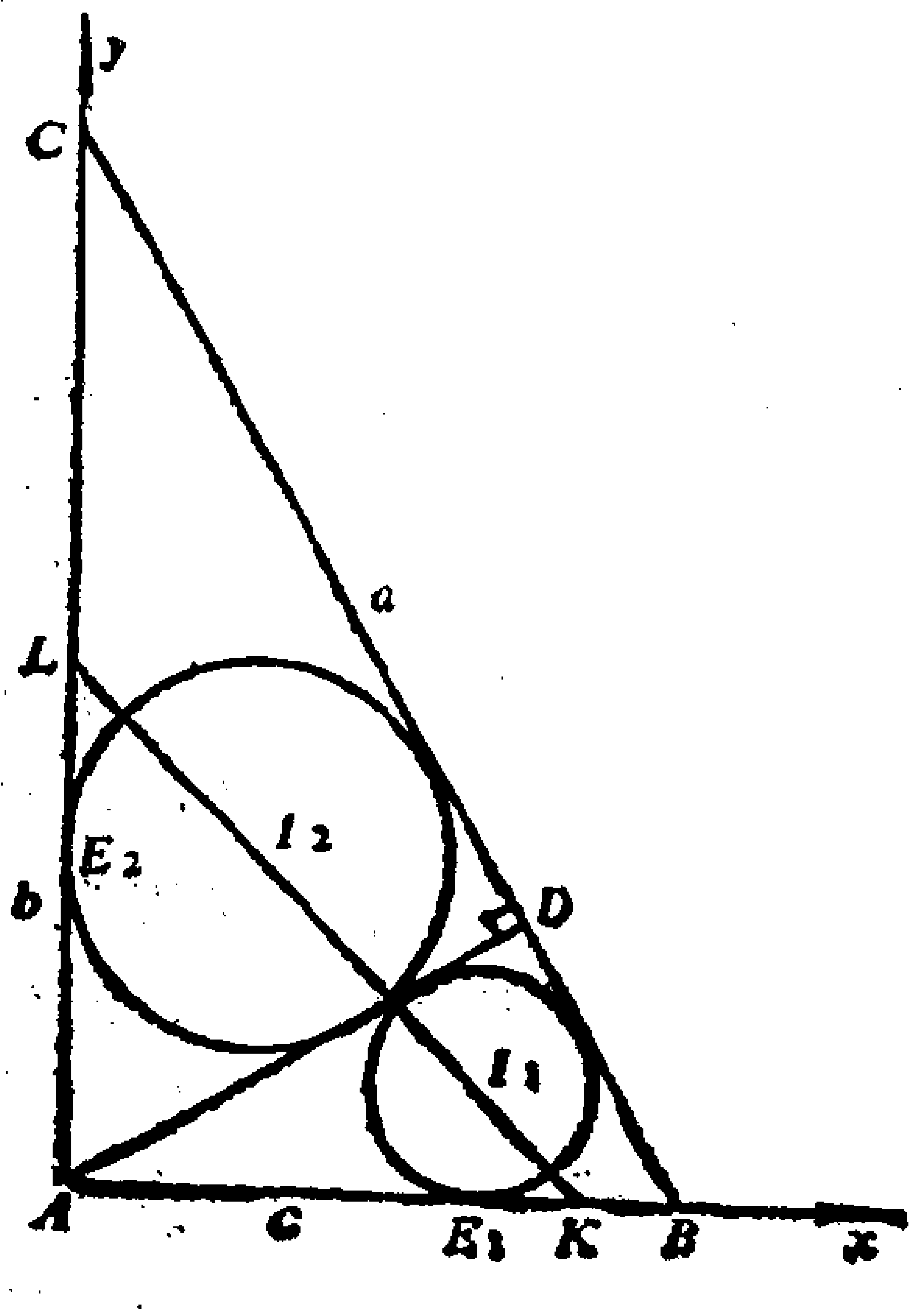


图 49

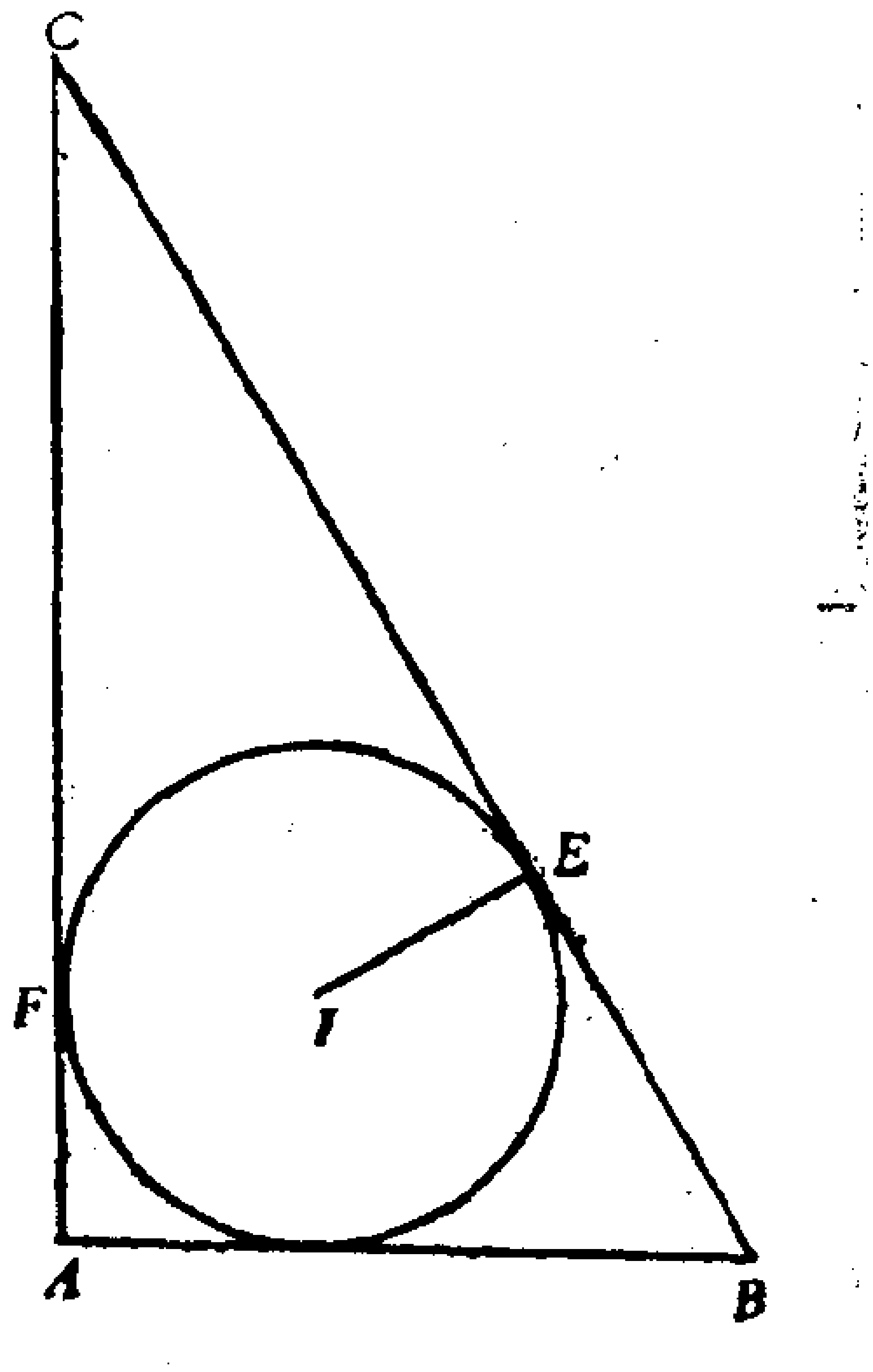


图 50

**证** 设$\triangle ABC$的三边长为$a$，$b$，$c$，则

$$a^2=b^2+c^2, \tag{30.1}$$

并且

$$S=\frac{1}{2}bc. \tag{30.2}$$

问题是如何计算$T$。

首先，设$\triangle ABC$的内切圆的圆心为$I$，内切圆切$BC$于$E$，$AC$于$F$（图50），则易知

$$EI+CE=FA+CF=b.$$

注意$\triangle ADB\sim\triangle CAB$，相似比为$\frac{c}{a}$，所以设$\odot I_1$切$AB$于$E_1$，则

$$AE_1+E_1I_1=\frac{c}{a}\cdot b. \tag{30.3}$$

同样，设$\odot I_2$切$AC$于$E_2$，则

$$AE_2+E_2I_2=\frac{b}{a}\cdot c. \tag{30.4}$$

建立坐标系如图49所示，则（30.3）表明$I_1$的坐标之和为$\frac{c}{a}\cdot b$，即点$I_1$在直线

$$x+y=\frac{bc}{a} \tag{30.5}$$

上。同样$I_2$也在直线（30.5）上，直线$I_1I_2$的方程就是（30.5），因此易得

$$AK=AL=\frac{bc}{a}, \tag{30.6}$$

$$T=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2=\frac{bc}{a^2}S. \qquad (30.7)$$

由（30.1）

$$\frac{bc}{a^2}=\frac{bc}{b^2+c^2}\leqslant\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2},$$

所以

$$S\geqslant 2T.$$

注　（30.6）表明$\triangle AKL$是等腰（直角）三角形。事实上，在图一中我们可以大致看出（猜出）这一结论，因此直线$KL$上任一点到两腰距离即坐标之和为定值。正因为我们猜到这一点，所以一开始就计算$AE_1+E_1I_1$。如果不去研究问题的特点，一味硬算，那将是非常麻烦的。

**例 2**（第29届第1题）考虑在同一平面上，具有相同圆心，半径为$R$与$r$（$R>r$）的两个圆。设$P$是小圆周上的一个固定点，$B$是大圆周上的一个变动的点。直线$BP$与大圆相交于另一点$C$。通过点$P$且与$BP$垂直的直线$l$与小圆周相交于另一点$A$（如果$l$与小圆相切于$P$，则$A=P$）

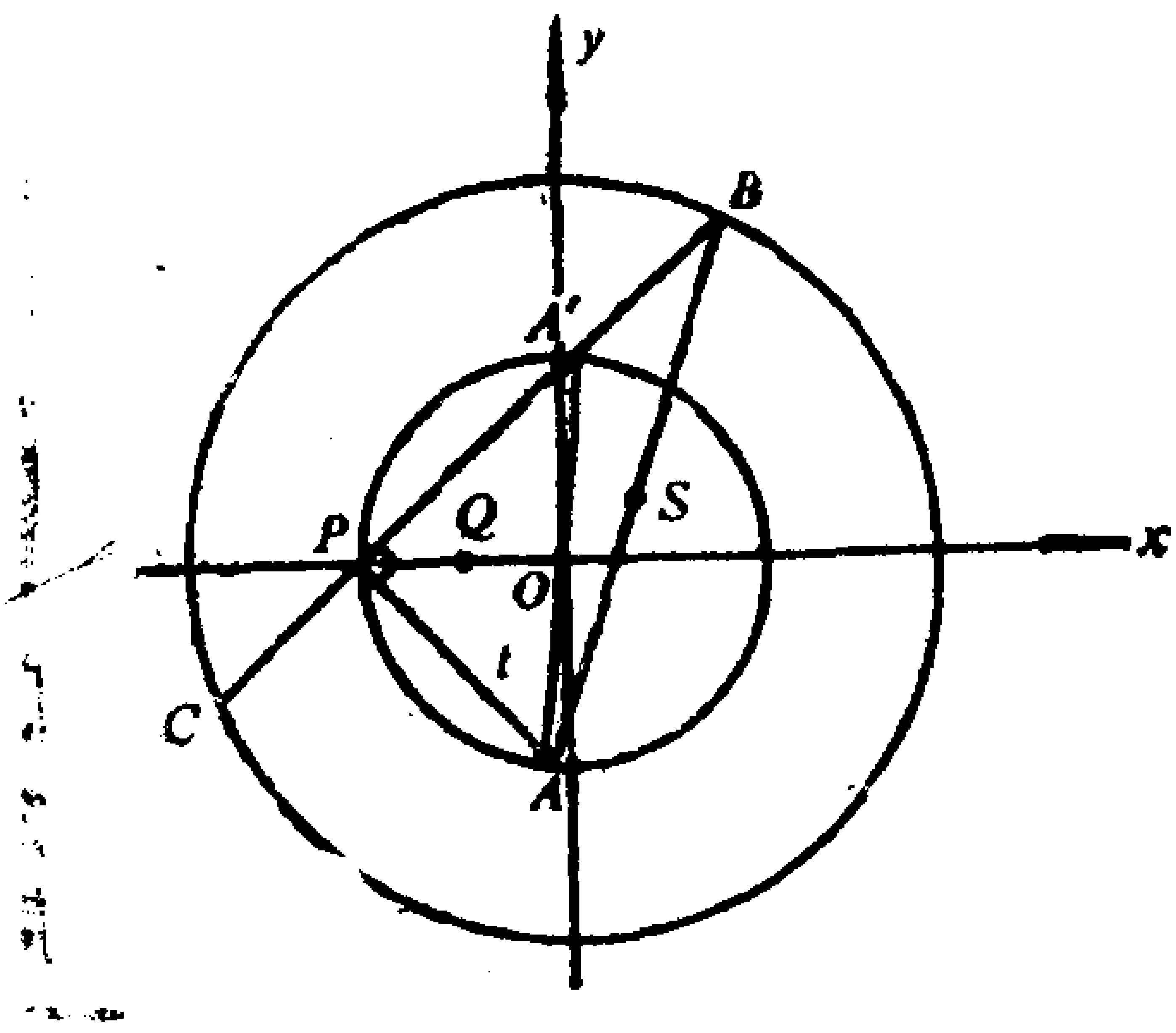


图　51

（i）求表达式$BC^2+CA^2+AB^2$所取值的集合；

（ii）求线段$AB$的中点的轨迹。

**解** 本题当然可以用纯粹几何的方法来解，而且解法不止一种。我们介绍两种解析几何的解法。

第一种解法 以圆心$O$为原点，直线$OP$为$x$轴建立直角坐标系。这时$P$点坐标为（$-r$，0）。两个圆的方程分别为$x^2+y^2=R^2$与$x^2+y^2=r^2$。

设直线$PB$方程为

$$y=k(x+r),$$

则直线$PA$方程为

$$ky+x+r=0,$$

由方程组

$$\begin{cases} ky+x+r=0, \\ x^2+y^2=r^2. \end{cases}$$

得出$PA$与小圆的交点$A$（另一交点是$p(-r, 0)$）的坐标为

$$\left(\frac{(k^2-1)r}{1+k^2},\ -\frac{2kr}{1+k^2}\right).$$

由方程组

$$\begin{cases} y=k(x+r), \\ x^2+y^2=R^2. \end{cases}$$

消去$y$得

$$(1+k^2)x_2+2k^2rx+k^2r^2-R^2=0. \qquad (30.9)$$

从而$PB$与大圆的交点$B$、$C$的坐标为

$$\left(\frac{-k^2r\pm\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2}}{k^2+1},\ \frac{k(r\pm\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2})}{k^2+1}\right)$$

(30.10)

于是

$$
\begin{aligned}
&BC^2+CA^2+AB^2\\
=&\left(\frac{2\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2}}{k^2+1}\right)^2\cdot(1+k^2)\\
&+\left(\frac{(2k^2-1)r-\sqrt{(1+k^2)R^2-k^2r^2}}{k^2+1}\right)^2\\
&+\left(\frac{3kr+k\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2}}{k^2+1}\right)^2\\
&+\left(\frac{3kr-k\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2}}{k^2+1}\right)^2\\
&+\left(\frac{(2k^2-1)r+\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2}}{k^2+1}\right)^2\\
=&4R^2-\frac{4k^2r^2}{k^2+1}+\frac{2}{(k^2+1)^2}[(2k^2-1)^2r^2\\
&+(k^2+1)R^2-k^2r^2+9k^2r^2+k^2(k^2+1)R^2-k^4r^2]\\
=&6k^2-\frac{4k^2r^2}{k^2+1}+\frac{2r^2}{(k^2+1)^2}(3k^4+4k^2+1)\\
=&6R^2-\frac{4k^2r^2}{k^2+1}+\frac{2r^2}{k^2+1}(3k^2+1)=6R^2+2r^2. \quad (30.11)
\end{aligned}
$$

即 $BC^2+CA^2+AB^2$ 的值的集合是 $\{6R^2+2r^2\}$.

利用韦达定理可以由（30.8）、（30.9）导出(30.11)（不必解出（30.10），但在解问题（ii）时还是要用到（30.10）.

由（30.8）、（30.10）、可知 $AB$ 中点 $S$ 的坐标为

$$2x_S=\frac{-r\pm\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2}}{k^2+1}, \qquad (30.12)$$

$$2y_s=\frac{-kr\pm k\sqrt{(k^2+1)R^2-k^2r^2}}{k^2+1}. \qquad (30.13)$$

于是 $y_s=kx_s$ 即 $k=\frac{y_s}{x_s}$，代入（30.12）（消去参数$k$）得

$$2(x_s^2+y_s^2)=-rx_s\pm\sqrt{(x_s^2+y_s^2)R^2-r^2y_s^2}, \qquad (30.14)$$

（30.14）可化简成

$$4(x_s^2+y_s^2)+4rx_s+r^2=R^2,$$

即$S$点的坐标（$x_s$，$y_s$）满足方程

$$\left(x+\frac{r}{2}\right)+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2. \qquad (30.15)$$

这是一个以点$Q\left(-\frac{r}{2},\ 0\right)$为圆心，$\frac{R}{2}$为半径的圆.

解法一中，由（30.12）、（30.13）消去$k$是导出方程（30.15）的关键. 如果不能及时发现 $y_s=kx_s$（它的几何意义是$OS//PB$），那将是非常麻烦的. 总的来说，这种解法没有多少技巧，因而计算的比较冗长. 但它有一个最大的好处，即循着这确定的路线走下去，一定（只要计算不出差错）能导出所要的结论.

解法二. 建立坐标系同前. 设$A$、$B$、$S$、…等点的坐标分别为（$x_A$，$y_A$），（$x_B$，$y_B$），（$x_s$，$y_s$），…. 则由于$S$是$AB$中点，所以

$$2x_s=x_A+x_B, \qquad (30.16)$$

$$2y_s=y_A+y_B. \qquad (30.17)$$

又由于 $PA\perp PB$，所以

$$(x_A+r)(x_B+r)+y_Ay_B=0. \tag{30.18}$$

将（30.16）、（30.17）平方再相加得

$$4x_S^2+4y_S^2=R^2+r^2+2(x_Ax_B+y_Ay_B). \tag{30.19}$$

（我们利用了 $x_A^2+y_A^2=r^2$，$x_B^2+y_B^2=R^2$）注意（30.18）即

$$x_Ax_B+y_Ay_B=-r^2-r(x_A+x_B)=-r^2-2rx_S,$$

代入（30.19）得

$$4x_S^2+4y_S^2=R^2-r^2-4rx_S,$$

即

$$\left(x_S+\frac{r}{2}\right)^2+y_S^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

这就解决了（ii）.

为了解决（i）我们需要利用一点几何知识。首先不难证明 $PB$ 与小圆的交点 $A'$ 是 $A$ 点的对径点（即 $AA'$ 是小圆的直经），它的坐标是（$-x_A$，$-y_A$）。其次，线段 $BC$ 与 $A'P$ 有相同的中点（即 $O$ 在 $BC$ 上的射影），所以有

$$x_B+x_C=-r-x_A, \tag{30.20}$$

$$y_B+y_C=-y_A. \tag{30.21}$$

从而

$$\begin{aligned}
&BC^2+AB^2+AC^2\\
&=(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2+(x_A-x_B)^2\\
&\quad+(y_A-y_B)^2+(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2\\
&=4R^2+2r^2-2(x_Bx_C+y_By_C+x_Ax_B\\
&\quad+y_Ay_B+x_Ax_C+y_Ay_C)\\
&=4R^2+2r^2-2[x_Ax_B+y_Ay_B+x_C(x_A+x_B)\\
&\quad+y_C(y_A+y_B)]
\end{aligned}$$

$$= 4R^2 + 2r^2 - 2[x_A x_B + y_A y_B - x_C(x_C + r) - y_C^2]$$

（利用（30.20）、（30.21））

$$= 6R^2 + 2r^2 - 2(x_A x_B + y_A y_B - r x_C)$$

$$= 6R^2 + 2r^2 - 2(x_A x_B + y_A y_B + r^2 + r x_A + r x_B)$$

（利用（30.20））

$$= 6R^2 + 2r^2.$$ （利用（30.18））

解法二利用了一点几何知识，因出计算比解法一简单。这种解法技巧颇高，请读者仔细玩味。

作为一个副产品，我们还可以求出

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2R^2 + 2r^2.$$

步骤如下：

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

$$= (x_A + r)^2 + y_A^2 + (x_B + r)^2 + y_B^2 + (x_C + r)^2 + y_C^2$$

$$= 2R^2 + 4r^2 + 2r(x_A + x_B + x_C)$$

$$= 2R^2 + 2r^2.$$ （利用（30.18））

# 31 牛 顿 线

四条直线 $l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$ 相截得6个点 $A_{12}$，$A_{13}$，$A_{14}$，$A_{23}$，$A_{24}$，$A_{34}$（图52），这样的图形称为完全四边形。线段 $A_{24}A_{13}$、$A_{14}A_{23}$、$A_{12}A_{34}$ 称为（这完全四边形的）对角线。牛顿（Newton）曾经证明这三条对角线的

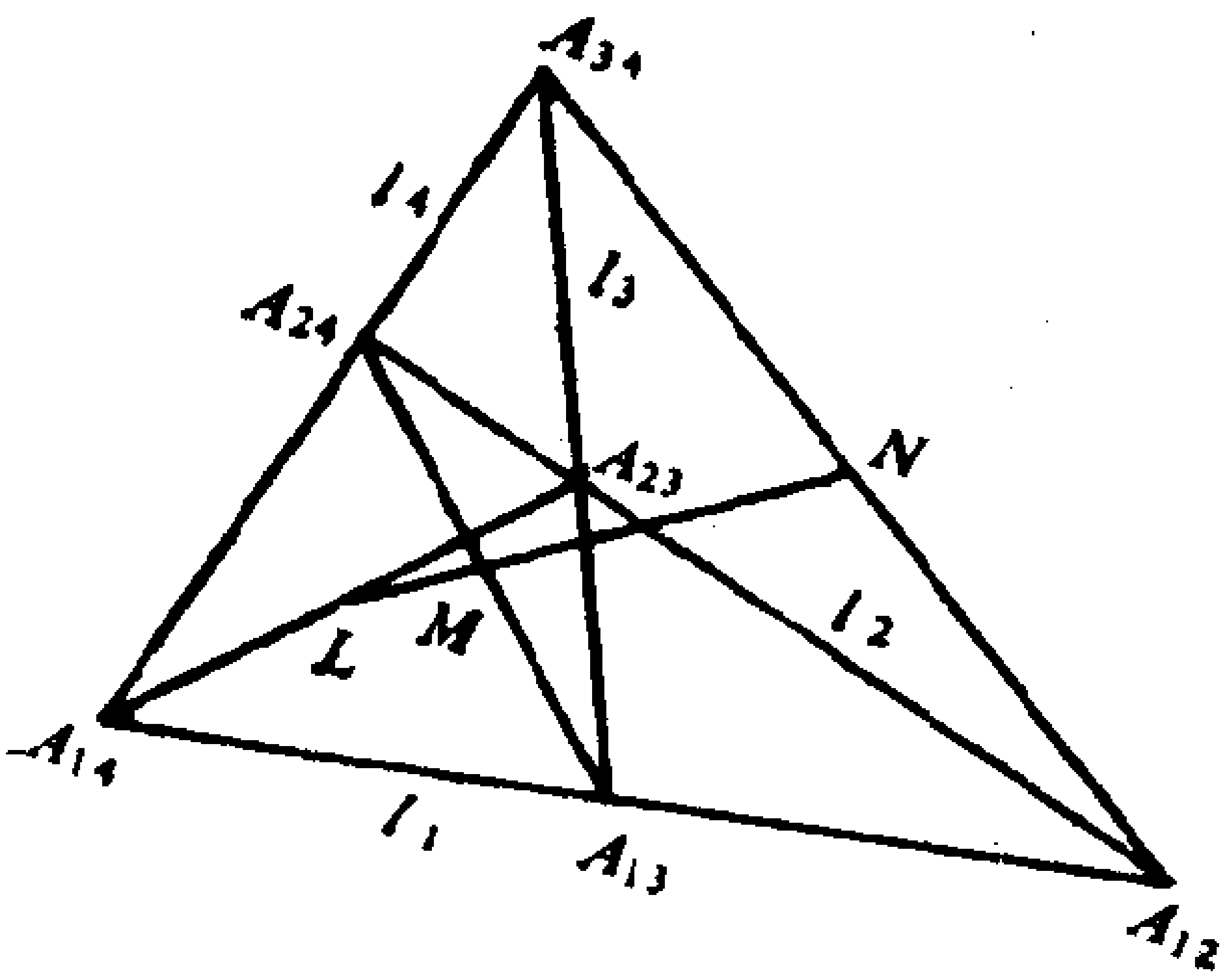


图 52

中点$L$、$M$、$N$共线。这条直线$LN$便称为（这完全四边形的）牛顿线。

证明$L$、$M$、$N$共线的方法很多，均不甚容易。我们采用面积与行列式来证。

设$A_{12}$、$A_{13}$、…的坐标为$(x_{12}, y_{12})$、$(x_{13}, y_{13})$、…。则$L$、$M$、$N$的坐标分别为

$$\left(\frac{x_{14}+x_{23}}{2}, \frac{y_{14}+y_{23}}{2}\right), \left(\frac{x_{13}+x_{24}}{2}, \frac{y_{13}+y_{24}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{x_{12}+x_{34}}{2}, \frac{y_{12}+y_{34}}{2}\right).$$

要证明$L$、$M$、$N$共线，只需证明

$$\begin{vmatrix} 1 & x_L & y_L \\ 1 & x_M & y_M \\ 1 & x_N & y_N \end{vmatrix} = 0, \qquad (31.1)$$

即

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{x_{14}+x_{23}}{2} & \dfrac{y_{14}+y_{23}}{2} \\ 1 & \dfrac{x_{13}+x_{24}}{2} & \dfrac{y_{13}+y_{24}}{2} \\ 1 & \dfrac{x_{12}+x_{34}}{2} & \dfrac{y_{12}+y_{34}}{2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (31.2)$$

这仅是一个计算问题，并无实质困难。只需将左边一步步地化简，最终会到达目的地——值为零。事实上，

$8\times(31.2)$ 左边

$$
=\begin{vmatrix} 2 & x_{14}+x_{23} & y_{14}+y_{23} \\ 2 & x_{13}+x_{24} & y_{13}+y_{24} \\ 2 & x_{12}+x_{34} & y_{12}+y_{34} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 2 & x_{14}+x_{23} & y_{14}+y_{23} \\ 2 & x_{13}+x_{24} & y_{13}+y_{24} \\ 1 & x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 2 & x_{14}+x_{23} & y_{14}+y_{23} \\ 2 & x_{13}+x_{24} & y_{13}+y_{24} \\ 1 & x_{34} & y_{34} \end{vmatrix}
$$

$$
=\cdots\cdots
$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & x_{14} & y_{14} \\ 1 & x_{13} & y_{13} \\ 1 & x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & x_{23} & y_{23} \\ 1 & x_{13} & y_{13} \\ 1 & x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} 1 & x_{14} & y_{14} \\ 1 & x_{24} & y_{24} \\ 1 & x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & x_{23} & y_{23} \\ 1 & x_{24} & y_{24} \\ 1 & x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} 1 & x_{14} & y_{14} \\ 1 & x_{13} & y_{13} \\ 1 & x_{34} & y_{34} \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & x_{23} & y_{23} \\ 1 & x_{13} & y_{13} \\ 1 & x_{34} & y_{34} \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} 1 & x_{14} & y_{14} \\ 1 & x_{24} & y_{24} \\ 1 & x_{34} & y_{34} \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & x_{23} & y_{23} \\ 1 & x_{24} & y_{24} \\ 1 & x_{34} & y_{34} \end{vmatrix},
$$

这八个三阶行列式中，有四个为0，即1、4、6、7这四个行列式。例如第一个行列式，由于点$A_{14}$、$A_{13}$、$A_{12}$共线（均在直线$l_1$上），所以它的值为0这样，上式

$$
=\begin{vmatrix} 1 & x_{23} & y_{23} \\ 1 & x_{13} & y_{13} \\ 1 & x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_{14} & y_{14} \\ 1 & x_{24} & y_{24} \\ 1 & x_{12} & y_{12} \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} 1 & x_{14} & y_{14} \\ 1 & x_{13} & y_{13} \\ 1 & x_{34} & y_{34} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_{23} & y_{23} \\ 1 & x_{24} & y_{24} \\ 1 & x_{34} & y_{34} \end{vmatrix}.
$$

再看一看下面的图 53 及行列式与面积的关系，我们有 上式

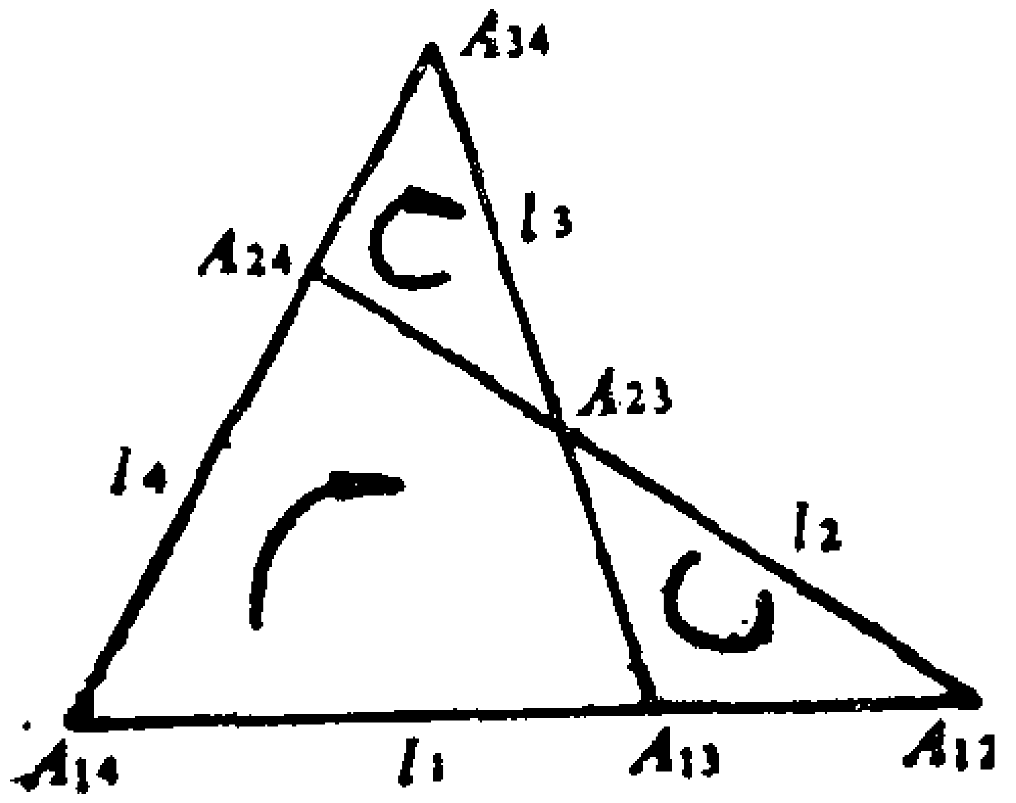


图 53

$$
\begin{aligned}
&=S_{\triangle A_{23}A_{13}A_{12}}+S_{\triangle A_{14}A_{24}A_{12}}\\
&\quad+S_{\triangle A_{14}A_{13}A_{34}}+S_{\triangle A_{23}A_{24}A_{34}}\\
&=S_{\triangle A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}}+S_{\triangle A_{14}A_{13}A_{23}A_{24}}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

于是（31.1）式成立。

牛顿线是一个古典问题，但近年来，我国数学工作者却使老树开花，导出一些新结果来，这些新结果，我们将在下节介绍。

## 32　机器证明的两个定理

我国数学家吴文俊先生领导着机器证明的新潮流。根据《中学生数学》1986 年第 2 期报道，遵循吴老先生指引的方向，胡森和王东明在 HP1000 小型计算机上发现了

**定理 1**　平面上任意五条直线，其中每四条确定一条牛顿线（见上节），则所得的五条牛顿线交于一点。

尽管这个定理看起来十分复杂，我们采用解析几何来处理并无太大困难。记已知的五条直线为$l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$、$l_5$。由$l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$确定的牛顿线记为$l_{56}$，由$l_2$、$l_3$、$l_4$、$l_5$确定的牛顿线记为$l_{16}$，依此类推，直线$l_i$以外的四条直线确定的牛顿线记为$l_{i6}$。我们先证明$l_{16}$、$l_{36}$、$l_{56}$这三条线共点。

由于$l_{16}$过点$\left(\frac{x_{34}+x_{25}}{2}, \frac{y_{34}+y_{25}}{2}\right)$及$\left(\frac{x_{45}+x_{23}}{2}, \frac{y_{45}+x_{23}}{2}\right)$，所以它的方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 2 & x_{34}+x_{25} & y_{34}+y_{25} \\ 2 & x_{45}+x_{23} & y_{45}+y_{32} \end{vmatrix} = 0. \tag{32.1}$$

或简化为

$$f_{16} = 0. \tag{1'}$$

其中$f_{16}$表示（32.1）式左边的行列式。

同样，$l_{36}$、$l_{56}$的方程分别为

$$f_{35} \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 2 & x_{12}+x_{45} & y_{12}+y_{45} \\ 2 & x_{14}+x_{25} & y_{14}+y_{25} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

及

$$f_{56} \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 2 & x_{12}+x_{34} & y_{12}+y_{34} \\ 2 & x_{14}+x_{23} & y_{14}+y_{23} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

要证明$l_{16}$、$l_{36}$、$l_{56}$共点，只要证明

$$f_{16}+f_{36}=f_{56}, \tag{32.2}$$

（即$l_{56}$在$l_{16}$与$l_{36}$所成直线束内）。

(32.2) 也就是

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 2 & x_{34}+x_{25} & y_{34}+y_{25} \\ 2 & x_{45}+x_{23} & y_{45}+y_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 2 & x_{12}+x_{45} & y_{12}+y_{45} \\ 2 & x_{14}+x_{25} & y_{14}+y_{25} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 2 & x_{12}+x_{34} & y_{12}+y_{34} \\ 2 & x_{14}+x_{23} & y_{14}+y_{23} \end{vmatrix} = 0. \qquad (32.3)$$

和上一节相同，左边可拆成

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{45} & y_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{25} & y_{25} \\ 1 & x_{45} & y_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{23} & y_{23} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{25} & y_{25} \\ 1 & x_{23} & y_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{12} & y_{12} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{45} & y_{45} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{12} & y_{12} \\ 1 & x_{25} & y_{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{45} & y_{45} \\ 1 & x_{25} & y_{25} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{12} & y_{12} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{12} & y_{12} \\ 1 & x_{23} & y_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{23} & y_{23} \end{vmatrix}.$$

消去第二与第八项、第三与第十二项、第五与第九项得

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{45} & y_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{25} & y_{25} \\ 1 & x_{23} & y_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{12} & y_{12} \\ 1 & x_{25} & y_{25} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{45} & y_{45} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{12} & y_{12} \\ 1 & x_{23} & y_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix}. \tag{32.4}$$

直接展开这6个三阶行列式便可以知道（32.4）的值为0（这只是“死”算，“硬”算，并无任何实质困难）。另一种方法是考虑下图54，图中三个三角形，即$\triangle AA_{34}A_{45}$，$\triangle AA_{45}A_{14}$，$\triangle AA_{14}A_{34}$的有向面积之和为零，也就是上面的第一、四、六3项之和为0。同样第二、三、五3项之和为0。熟悉四阶行列式的同志还可以看出行列式

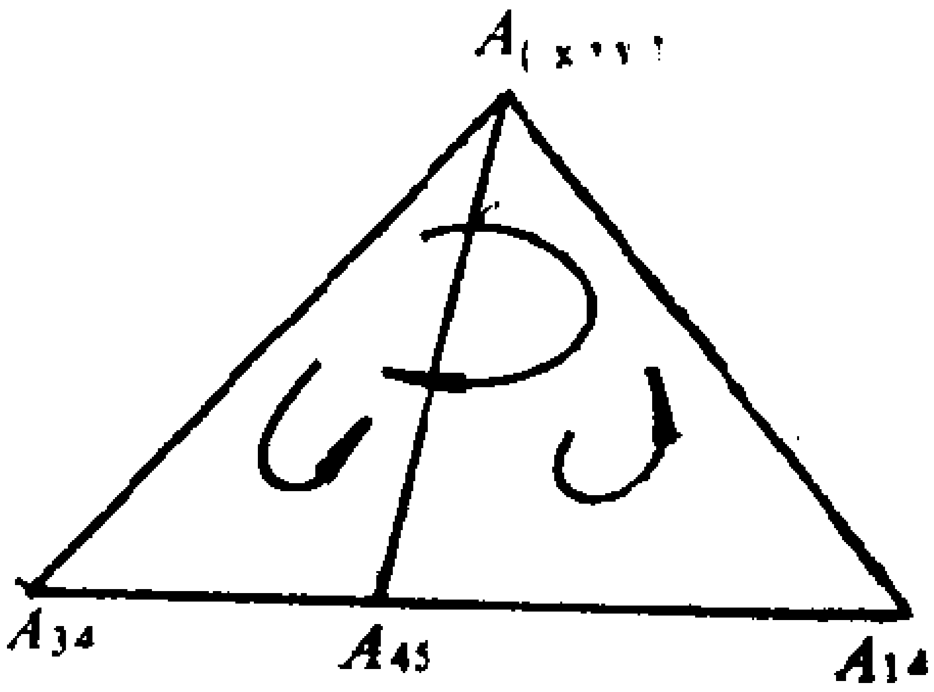


图 54

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x_{34} & y_{34} & 1 \\ 1 & x_{45} & y_{45} & 1 \\ 1 & x_{14} & y_{14} & 1 \end{vmatrix}$$

依最后一列展开得出

$$-\begin{vmatrix} 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{45} & y_{45} \\ 1 & x_{14} & y_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{45} & y_{45} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{14} & y_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{34} & y_{34} \\ 1 & x_{45} & y_{45} \end{vmatrix}.$$

其中第一个三阶行列式为0，因为$A_{34}$、$A_{45}$、$A_{14}$均在直线$l_4$上。所以这个四阶行列式就是(32.4)中第一、四、六这3项的和。由于这四阶行列式有两列相同，它的值为0。这也就导出上面所说的结果。总之，(32.4)式的值为0，从而(32.3)与(32.2)成立，$l_{16}$、$l_{36}$、$l_{56}$共点。同理，$l_{26}$、$l_{46}$也过所得的交点。定理1成立。

我们称定理1中，五条牛顿线的交点为吴点，并记为$A_6$。

在定理一的基础上，周咸青用$LM$机器发现了。

**定理 2** 平面上任意6条直线$l_1$、$l_2$、…、$l_6$中每五条确定一个吴点，所得的6个吴点必在同一条圆锥曲线上。

这个定理，用我们的方法（不用机器）也不难证明，但需要借助于著名的巴斯加（Pascal）定理。即

六个点在同一条圆锥曲线上的充分必要条件是这六点构成的六边形的三对对边的交点共线。

这个定理在很多书中都有（例如叶菲莫夫的《高等几何学》），我们不必花费篇幅去证明它。

注意过点$A_6$（由$l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$、$l_5$产生的吴点）的的五条牛顿线为

$$l_{16},\ l_{26},\ l_{36},\ l_{46},\ l_{56}.$$

而过点$A_1$（由$l_2$、$l_3$、$l_4$、$l_5$、$l_6$产生的交点）的五条牛顿线为

$$l_{21},\ l_{31},\ l_{41},\ l_{51},\ l_{61}.$$

这里$l_{16}$与$l_{61}$是相同的直线（都是$l_2$、$l_3$、$l_4$、$l_5$产生的牛顿线），所以边$A_1A_6$就是直线$l_{16}$。

根据巴斯加定理，只要证明三个点

$l_{12}\cap l_{45}$，$l_{56}\cap l_{23}$，

$l_{16}\cap l_{34}$

共线（图55）.

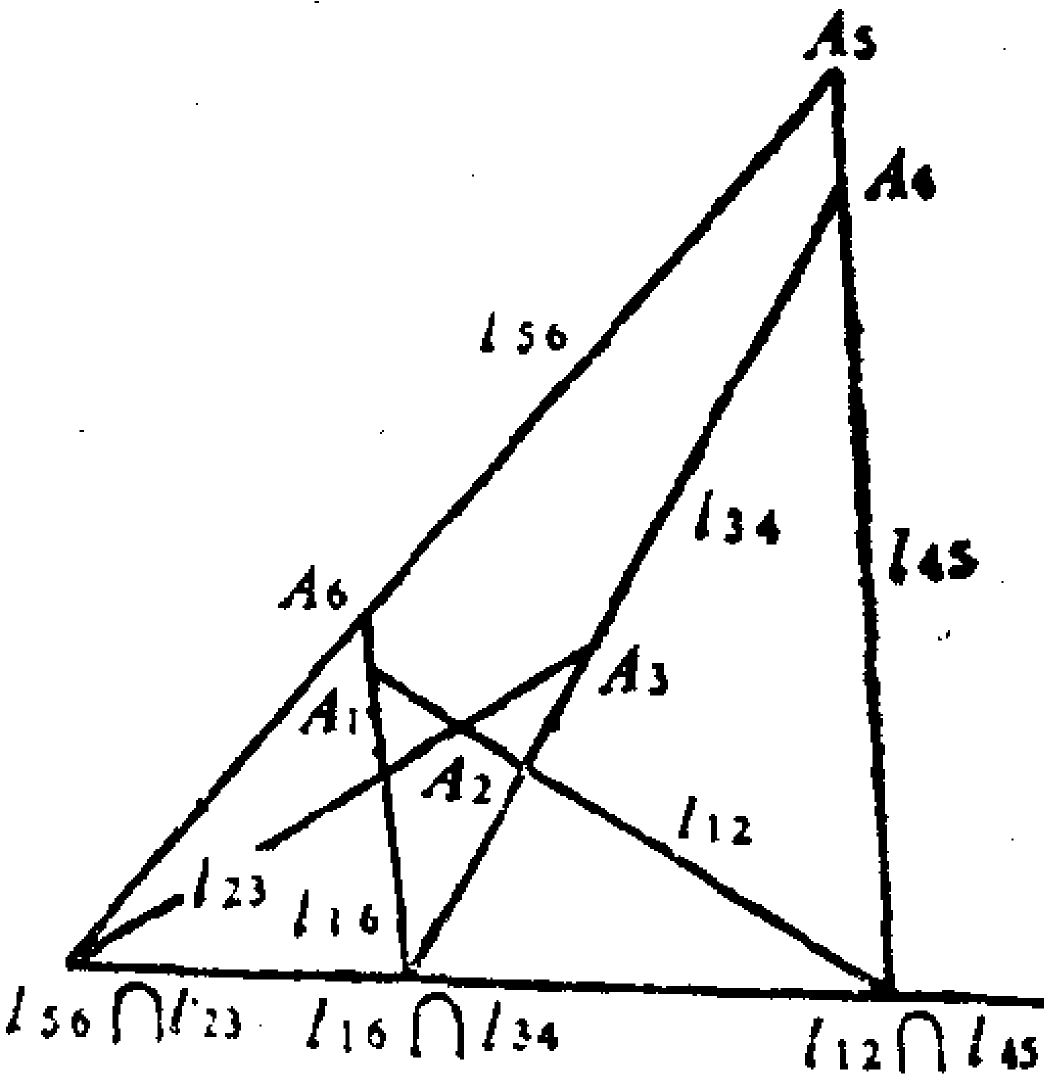


图 55

直线 $l_{ij}$ 的方程是 $f_{ij}=0$，如果有

$$f_{12}+f_{45}=f_{56}+f_{23}=f_{16}+f_{34}. \tag{32.5}$$

则结论成立. (32.5) 也就是

$$\begin{cases} f_{56}-f_{16}=f_{34}-f_{23}, & (32.6)\\ f_{56}-f_{45}=f_{12}-f_{23}. & (32.7)\end{cases}$$

在定理 1 的证明中，我们得到

$$f_{56}-f_{16}=f_{36}.$$

同理

$$f_{34}-f_{23}=f_{36}.$$

所以 (32.6) 成立. 同样 (32.7) 成立. 定理 2 证毕.

这两个定理的证明饶有技巧. 其中的点、线都采用了适当的记号，这虽是一件小事，不注意它就会茫然无绪，陷入一片混乱之中.

# 结　束　语

解析几何的优点在于使形数结合，把几何问题化作数、式的演算（当然反过来，数、式也可以用几何方法去处理），因而有一定的章程可以遵循，不需要挖空心思去寻找解法.

但是，如果不注意解析几何的技巧，陷入一大堆繁琐的演算之中，乱丝一团，茫无头绪也是挺糟糕的。

本书列举了不少例题，希望通过它们表现解析几何的技巧。例如：

1. 选择合适的原点、坐标轴，选用各种形式的方程，尽量使问题简化；

2. 注意对称性、轮换性，注意使计算有条不紊，井然有序；

3. 适当利用几何知识，注意各表达式的几何意义；

4. 选用合适的参数；

5. 巧妙地消元；

6. 利用行列式；

7. 从众多条件中选出几条，定出有关的几何对象后，再证明它满足其他条件。这是同一法；

8. 用韦达定理、曲线束(直线束、共轴圆、二次曲线束)等绕过求交点、解方程组的麻烦；

9. 注意问题的推广；

10. 从不同的角度来看问题。

任何技巧都必须通过自己实践、体会、总结才能掌握。就同游泳一样，不下水是永远也学不会的。经常下水的人，就能够学会游泳，从此岸胜利地到达彼岸。

阿弥陀佛。