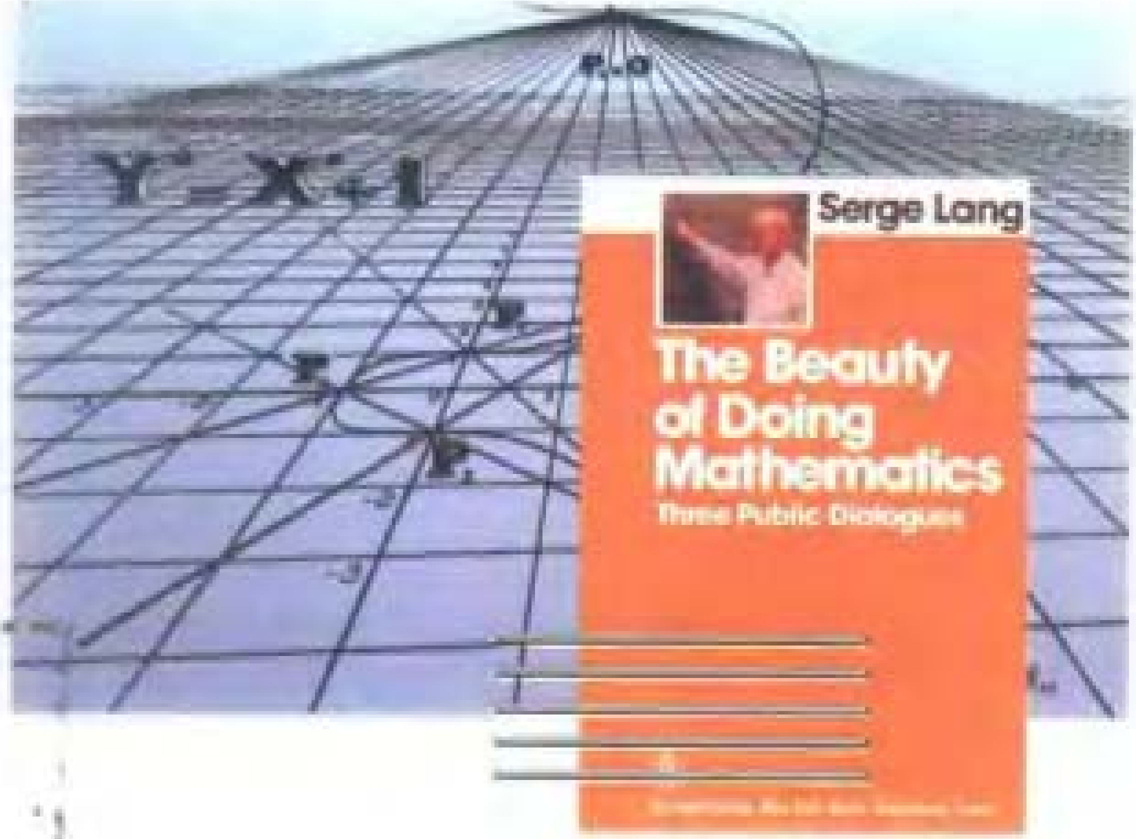
通识文库

做数学之美妙

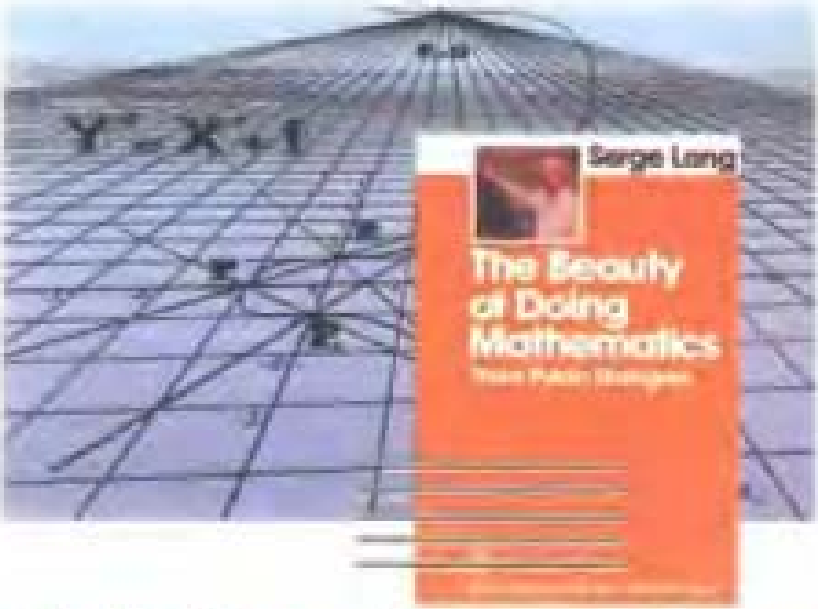
The Beauty of Doing Mathematics Three Public Dialogues

三次公开讲演

[法] 塞吉 · 兰/著
李 德 琅/译
郑 秋 成/校



四川大学出版社



做数学之美妙三次公开讲演

“在一群非数学专业的普通听众面前做数学，对我来说完全是一种全新的体验。我从没想到它会如此成功。”塞吉·兰——当代数学大师谈及他在巴黎科学博物馆的三次演讲时如是说。

本书忠实地再现了这三次数学演讲。塞吉·兰通过演讲旨在就数学思想之美同普通观众进行沟通。就像大家看到的那样，听众始终如一的热情证实了他的成功。亲切、随和的气氛带出了三次演讲的主题——素数、丢番图方程以及几何与空间中的几个重大问题。

ISBN 7-5614-1974-0

9 787561 419748 >

ISBN 7-5614-1974-0/O·126
定价：12.00元

TS 通识文库

做数学之美妙

三次公开讲演

[法]塞吉·兰/著　李德琅/译　郑秋成/校

Serge Lang

The Beauty of Doing Mathematics

Three Public Dialogues

四川大学出版社

2001年·成都

责任编辑：张　晶
责任校对：郑秋成
封面设计：冯永革
责任印制：吴雨时

图书在版编目（CIP）数据

做数学之美妙：三次公开讲演／（法）兰（Lang，S.）著；李德琅译.—成都：四川大学出版社，2001.1

书名原文：The Beauty of Doing Mathematics Three Public Dialogues

ISBN 7-5614-1974-0

Ⅰ.做…　Ⅱ.①兰…　②李…　Ⅲ.①数学-普及读物　Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 46540 号

Translation from the English language edition：
The Beauty of Doing Mathematics by Serge Lang

四川省版权局著作权合同登记号：图字 21-2000　023 号

书名	做数学之美妙：三次公开讲演
作者	［法］塞吉·兰 著　李德琅 译　郑秋成 校
出版	四川大学出版社
地址	成都市一环路南一段 24 号（610065）
印刷	郫县犀浦印刷厂
发行	新华书店经销
开本	889mm×1 194mm　1/32
印张	5
字数	180 千字
版次	2001 年 1 月第 1 版
印次	2001 年 1 月第 1 次印刷
印数	0 001-5 000 册
定价	12.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电话：5412526/5414115/5412212　邮编：610064
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回印刷厂调换。

译者的话

凡学过中学数学的人都对数学之妙有所体会，但很少有人听说过数学之美；也有一些书讲解数学之美，但塞吉·兰先生在本书中着重强调的是“做数学之美”（the beauty of doing mathematics）。这是本书的独到之处。

本书是塞吉·兰先生三次讲演的实录，生动的对话形式使你有身临其境之感。

数学就像一座险峻的高山，其险峻背后藏着美丽的风景。数学家就是勇敢的登山者。吸引他们攀登的动力，除了美丽的风景外，还有攀登的艰辛。试想，当你历尽艰辛终于欣赏到美景时，其感觉不是比在家舒适地欣赏照片强烈得多吗？当然，数学这座山对于普通人来说实在是太高了。如果没有受过足够的数学训练，任何人都无法将你带到山顶。但塞吉·兰先生却先陪你攀登一段山路，再坐一段缆车而到达一个较高的观景点。站在这里，驻足了望，层层山峦

若隐若现。这样，你就会明白数学为什么是美的，为什么有人要毕其一生研究数学，以及数学同我们的生活存在什么样的关系。通过这三次讲演，塞吉·兰先生达到了他的目的。

两位年轻同事读过本书后甚赞其美，建议译者将其译成中文，介绍给普通中国读者。译者欣然从命，也基于以下考虑：

一、数学在素质教育中有重要的作用，本书恰恰可以作为一般大、中学生数学课程的一个有益补充，它不能提高学生的考分，但能提高学生对数学的兴趣和理解。

二、大学数学教师和专业数学工作者可从塞吉·兰先生的成功演讲中学到如何用简单生动的语言引出深刻的数学思想的方法。

在教学和生活中，我们常常碰到许多人抱怨数学太难，或许本书能使他们改变一些看法。这是译者和出版者最大的心愿。

译　者

2000 年 12 月于四川大学

前言

如果有人告诉你，数学是很美妙的，你可能会感到惊奇。但你应该知道，有些人毕生研究数学、创造数学，就像作曲家创作音乐一样。一般来说，每当数学家解决一个问题，就会产生很多新的问题。当然，这些问题通常是非常困难的。就像其他学科的问题一样，只有对这门学科有相当深人研究的人，才能充分理解。

1981 年，让·布雷特（Jean Brette）作为巴黎科学博物馆数学部负责人，邀请我在该博物馆作一个讲演。我还从未向非数学专业听众作过这种讲演。我面临一个挑战：是否能向这些把演讲作为周末活动的听众，讲明什么是数学研究和为什么要研究数学？数学一词在这里是指纯粹数学。不是说纯粹数学比其他数学好，只是我及其他一些同仁研究纯粹数学，而且这次讲演中我只谈它。

数学有一个坏名声，甚至连最初等的数学就已经是这样。“数学”一词，实际上被用在各种各样不同的背景下。首先，我需要简

略地介绍一下这些可能的背景，有些是我下面的谈话将涉及到的。人们在各种课题中提出大量问题：纯粹数学的，应用数学的，具体与抽象的关系，以及数学教育等等，它们都能导出生动的对话。但重要的是，我要用例子，用与听众一起研究数学的办法，告诉听众什么是纯粹数学，是真资格做研究的数学家们所理解的、真实的数学，而不是假冒的，或肤浅的数学。

一方面，我得选择某些课题，它们对没有受过数学专门训练，而想学一些数学的普通听众，是可以接受的，而不致使他们感到厌倦。

另一方面，我必须选择深刻的课题，它们能阐明数学家们正在研究的一些重要的、没有解决的难题。发现新数学，是数学家的本分。你知道的越多，你越发认识到不知道的太多。我不能欺骗听众，我得做真正的数学。

这就是 1981 年我第一次讲演中所做的。那次成功使我于 1982 年及 1983 年又再做了两次讲演。每次我都选择各自不同的课题。头两个课题是代数的：素数和丢番图方程。第三次是几何的：几何与空间的一些重大课题。第三次讲演是马拉松式的，成百名听众听了三个半小时以上。本来，我并未指望会有如此好的效果。我深深地为听众的反应所感动，每次都是，特别是第三次。

我要强调一下，多数听众不是数学家。我要求在场的数学家不要介入我们的对话。听众有各种各样的人，从年轻的高中学生（包括文科学生）到年老的退休人员，也有家庭主妇，还有工程技术人员，只要感兴趣的都可以来。他们都积极参加听讲，并且提出多种饶有趣味的问题。

三个演讲是互相独立的，你不必按某种特定的顺序去读它们。每次演讲是一个完整的篇章，可以单独地阅读、鉴赏。阅读的时候，如果你觉得某处太困难，读起来太艰苦，不要失去信心，跳过它而继续读下一段、下一页，或者下一个演讲。也许，在阅读过程中，

你会发现有的内容很容易懂，很能引起你的兴趣。如果有兴趣，你可以再回到使你感到不懂的地方。你常常会发现，睡一觉后，有的问题突然显得容易了。

小学和中学的相当一部分课程，枯燥乏味且技术性强，你很少有幸看出数学的美妙。对中学生或大学生来说，我希望你能从阅读中发现到一些东西，它们是你已经学过的，或者是不得不学的课程的补充。

本书重现了我在巴黎的三个演讲。它们是尽可能忠实地从录音带上记下来的，以求保持它现场的鲜活生动的风格。最初，这些演讲发表在《科学博物馆杂志》（*Revue du Palais de la Découverte*）上。我非常感谢布雷特，感谢他的鼓励，感谢他在记录录音以及绘制插图方面的合作。一些人建议将三个讲演单独成书，于是，才有了该书的出版。我感谢贝林（Belin）出版社，特别是社长马克什·布诺索列（Max Brossollet），他们的热情使本书才得以首次用法文出版。我也感谢斯普林格－维勒格（Springer-Verlag）出版社，是他们发行了本书现在的英文版。最后，感谢卡洛尔·麦克菲孙（Carol MacPherson），他提供了本书的封面照片。我还要感谢科学博物馆，他们给与了通力合作。感谢他们，他们中的每一位，都对尽可能保持讲演的原状作出了贡献。

塞吉·兰

(*Serge Lang*)

塞吉·兰其人

塞吉·兰(Serge Lang)1927年生于巴黎。他在巴黎郊区念书至十年级。以后，他移居美国。在加州念两年高中后，他进入加州理工学院卡尔特克分校，并于1946年毕业。在美军服役一年半后，他进入普林斯顿大学哲学系。一年后，他转入该校数学系并于1951年获得博士学位。他在该校短期教学，并在普林斯顿高级研究所呆了一年。以后，他得到正规职位：芝加哥大学讲师，1953—1955；哥伦比亚大学教授，1955—1970，其间，他在富尔布莱特基金资助下访问巴黎一年(1958)。他于1970年离开哥伦比亚。他在普林斯顿大学作了一年访问教授(1970—1971)，又在哈佛大学作一年访问教授(1971—1972)。1972年后，他是耶鲁大学教授。数学之外，他最爱音乐。他有时弹钢琴，有时也玩诗琴。1966年到1969年，是美国面临诸多问题的时期，而这些问题对大学有深刻影响。塞吉·兰积极投身政治和社会活动。他也关心各大学的财政问题，关心受到政治及

官僚干涉的学术自由，用他的话来说，关心在各种主义的影响下永远存在的问题。但是，他的主要兴趣总是在数学。他出版了 28 本著作，发表了 60 多篇论文。他获得过美国的科尔(Cole)奖和法国的卡丽耶尔(Carriere)奖。

目　　录

数学家做什么和为什么做?

素　　数

1981 年 5 月 16 日

摘要：本讲演先用 10 分钟讲“为什么”。我做数学是因为我喜欢它。我们简要地讨论纯粹数学与应用数学的区别，但是，它们实际上相互交织，而难以给出明确的界限。我们也涉及数学的美学方面。然后，我们一起做数学。我先定义素数，然后，回顾欧几里得关于存在无穷多个素数的证明。最后，定义孪生素数，(3,5),(5,7),(11,13),(17,19)等等，它们之间的差为 2。是否存在无穷多个这样的素数对？没人知道，不过人们猜测答案为“是”。我给出一个直观论断，来描述这种素数可期望的密度。你何不试试去证明它？这个问题是数学上最重大的未解决问题之一。

从每年10月到第二年6月，几乎每个星期六，巴黎科学博物馆传统地组织各个学科的精彩讲演，并欢迎公众参加。

于是我们荣幸地邀请到在巴黎短期停留的世界著名数学家塞吉·兰（Serge Lang）。他是二十多本数学专著和教科书的作者。当我邀请塞吉·兰时，我知道他的名声，也知道他的一些工作，在数学方面，我没有丝毫担心。

但我也有一点焦虑：他是一个好教员吗？他知道如何与一大批不是数学家的公众交流吗？在讲演前喝咖啡时，我向他谈到这些想法。他告诉我，一个好教员，不只是一个本行专家，而且是一个演员，他们对公众的反应，应该是敏感的。他表示很高兴有这一次新的经历，与一些人，并非他的学生，一起讲数学和做数学，并且通过与他们一起做数学，而教给他们什么是数学。他笑着补充道：你会看到什么事情将会发生。

我真的看到了！这次讲演是如此成功！当然，人们惊讶的是，不单要聆听，还得要参与。仅仅几分钟后，塞吉·兰的激情已经使他赢得了听众，对话正顺利进行。

接下来的问题是讲演的出版。似乎应该发表整个讲演，包括所有提出来的问题，只作些微小改动，而不作过多的技术处理。事实上，除了实在的数学内容外，我想还应尽可能保留讲演的动态，再现对话的生动，并且，为什么不尽量呈现出演员的表演呢？当日的听众、科普学者及教师们都不会反对这样做吧。

于是我提交给他一个从录音整理的文稿。塞吉·兰不单非常细心

地校对此稿，关注其准确性（此乃他的秉性），而且，重新打印了全文。为此，他必须熟悉我们的计算机终端，在我们这里，惟有这些终端有美式键盘。为此，在一周多的时间里，他每天都来这里。他同意在坚持其风格的同时，作一些改动：选择适当的用词，添加一些条目，特别加上黎曼（Riemann）假设一段，附上与论题有关的参考文献。

让·布雷特

（Jean Brette）

巴黎科学博物馆数学组负责人

演讲

这次讲演，我想先用10分钟来泛泛而谈，然后，我们一起做数学。讲演内容，将如标题所说：纯粹数学家干什么和为什么干？

很难泛泛地说，我们干什么和为什么干。“数学”一词被用于五花八门、互不相干的各种场合。我肯定，这个词对不同的人，意味着不同的东西。例如，你，女士［塞吉·兰指向听众中一妇女］数学对你意味着什么？

女士： 数字的抽象，数字的运作。

塞吉·兰： 事实上，人们可以完全不用数字而做数学，例如几何与关于空间的数学。是的，我一会儿要给你一个数学的例子，要用到数字，但是，我想，它会同你想像的数字有些区别。而你，先生，数学意味着什么？

先生： 结构的运作。

塞吉·兰： 是的，但是哪些结构？很多结构不是数学。数学不只是结构问题。例如，你作物理时，你要掌握某些结构。事实上，“数学”一词用于各种不同的背景。有小学和中学的数学，有计算机数学，有用于通讯问题的数学。如果你研究物理或化学，你会用数学去描述经验世界。但我今天想谈的是所谓“纯粹数学”，它是从纯美学观点去做的。做这种数学很不同于经验世界，它不同于用数学模型对经验世界进行的描述和分类。一个实验科学家在很多可能模式中作出选择，从而发现符合经验世界的模式，试图为这个世界找出一个适当的体系。很多纯粹数学并不用于研究经验世界，只是为其

美丽而为之。这已进行了若干世纪。自从有人类文明以来，阿拉伯文明、印度文明等等，就是这样。古希腊人就已经为数学的漂亮而做过数学①。

是的，某些数学源于经验世界，但也有一些不源于此。这个观点已由其他一些数学家表述。这里我想念一段他们的话，例如，关于做数学与运用数学之间的关系。

贾可比（Jacobi）是19世纪的数学家，他在写给勒让得(Legendre)的信中说②：

> 我愉快地读到泊阿桑（Poisson）先生关于我的工作的报告，我想，我应很满意……但泊阿桑先生不应重复付立叶（Fourier）的话，责备阿贝尔（Abel）和我不愿研究热传递理论。是的，付立叶先生认为，数学的主要目标是为大众服务及解释自然现象。像他这样的哲学家应该知道，科学的惟一目标是人类精神的荣誉；也应该知道，作为这一目标，一个数论问题的价值，并不亚于关于世界体系问题的价值。

在勒里昂内斯（F. Le Lionnais）1948年主编的文集《数学思想的伟大潮流》一书中，魏依（Andre Weil，本世纪伟大数学家之一）这样引用贾可比的话：

> 但是，如果我们像帕努吉（Panurge）一样向圣贤提出一些莽撞的问题，圣贤也像回答帕努吉一样回答：饮水。

---

① 不排除他们也做有实际用途的数学。人人都认为，科学一词包括物理、化学、生物。要说科学是否也包括我所说的纯粹数学，则是一个用词的问题，现在我不想再深论了。

② 无写信日期，邮戳日期：1830年7月2日，《贾可比选集》第一卷（*Collected Works of Jacobi*, Vol. 1. p. 454.）。

> 数学家太乐意遵从这个教导，使他用知识的源泉满足自己的渴求，这个源泉总是涌出丰足的清水。而别的人却不得不穿过污秽世界的泥泞小路，去寻找清水。如果哪个人谴责数学家的傲慢，挑战数学家，要求他去面对现实世界，责问他为什么坚持呆在高高的冰山顶端，只有少数趣味相投的人可以跟随他，那么，他就引用贾可比的话回答：为了人类精神的荣誉。

好了，这些是文献上的。它有些夸大，不一定准确反映了贾可比的想法。说“别的人却不得不穿过污秽世界的泥泞小路，去寻找清水”并不完全等同于说“一个数论问题的价值，并不亚于关于世界体系问题的价值”。在另外的地方，魏依用另一方式解释他做数学的原因。在《科学美国人》法文版的一篇采访报道中，他说：

> 按普鲁塔赫（Plutarch）的说法，通过奋斗使自己的名字永垂不朽，是一种高尚的理想。从年轻时起，我一直希望，我的工作会在数学史上占有一席之地。这不是与争取获得诺贝尔奖一样高尚的动力吗？①

所以，不是为了人类精神的荣誉，而是为了他自己精神的荣誉。我想，一个人做数学，是他喜欢做数学，或者更自然地，如果你有做某件事的天才，你通常不再有做其他事的天才，而你有幸具有某种天才时，你就应该发挥这种天才。我还想加一句，我做数学是因为它困难，是对头脑的一种美妙的挑战。我做数学是要证明，我自己有能力面对这个挑战并取得胜利。

---

① 在1976年赫尔辛基国际数学家大会的一次会议上，魏依已经谈到这个话题：“人类应该为高度成就带来的永恒名誉所激励，这是自古有之的经典话题；比之父辈，我们似乎已减少了对此之兴趣，虽然还没完全失去它。”

于是有人做数学，但这并不意味着，人们不为自己做出好到可以上历史书的数学而高兴。当然，我认识的所有数学家，都为做出这样高水平的数学而极为高兴。他们为自己由此而得的荣誉高兴，为在数学史上留名而高兴。但我不是说，他们专为此而做数学，他们献身数学，可能是纯粹数学，也可能是应用数学。

如果我问你，音乐意味着什么？你会答“音符的运作”吗？一个人做纯粹数学时，他做的事很不同于运作。要从审美的观点弄清纯粹数学家的思考方法，我必须给你举一个例子。但是要告诉一个不懂数学的人，什么是数学，我感到相当困难，就像告诉一个从未接触西方文明的古代日本人或印度人，什么是贝多芬（Beethoven）的交响乐和肖邦（Chopin）的叙事曲。如果有一个人对西方文明一无所知，而且是聋子，你怎么能让他了解什么是贝多芬的交响乐或肖邦的叙事曲呢？完全不可能。即使他不是聋子，能听，这也依然几乎不可能，除非让他去听若干次这些音乐。西方音乐与日本音乐、印度音乐太不相同，它们用不同的乐器，有不同的配器，不同的节奏等等。所以，要让一个人理解这些音乐是很困难的。反过来，柯托（Koto）或席它尔（Sitar）在巴黎举办音乐会也只有少量知音。

除此之外，这里有审美观不同的困难。有人喜欢甲而不喜欢乙。有些人喜欢柏拉姆斯（Brahms）而不喜欢巴赫（Bach），或者，喜欢巴赫而不喜欢肖邦，或喜欢肖邦而不喜欢道南得（Dowland，莎士比亚时代的一位英国诗琴作曲家）。

不让一个人去听道南得的歌或者肖邦的叙事曲，你如何能使他理解这些音乐呢？那不可能。让人去听音乐，远比让人去做数学容易，因为听音乐时，人可以是被动的。音乐的美感会吸引你，你可以让作曲家和演奏家当主动角色。而做数学，要求你更高度的集中和个人的努力。更有甚者，要你去做数学，我就必须找一个足够深刻的数学课题，它是数学家们正在思考的、真正的数学课题。我不能骗人，而又要用每个人都能理解的语言来诠释。这样的课题是不

多的，而我必须作出一个确定的选择。可能有些人会喜欢这个选题，而有些人不喜欢。

这个选题应该足够深刻，以便让你们知道，为什么有些人毕生研究数学，可能会忽视其妻子，或丈夫，或子女，或天晓得的其他什么。让我顺便念一封信中的两句话，这信是勒让得给新婚的贾可比的：[1]

> 祝贺你娶得一个年轻妻子。长期的交往让你确信，她会使你永远幸福。你已经是当婚之年。一个注定要在办公室花费大量时间的人，需要一个伴侣处理家务，以使其从日常琐事中解脱。

这些句子在现在解放了的年代看来很可笑。

好了，我已经用了10分钟来泛泛而谈，足够了。现在我们来做数学。在话题选择上我很受限制，差不多只限于选关于数的话题。现在，我们来谈素数。

谁听说过素数？［各种反应和回答。］差不多每个人都听说过，或者，没有人听说过？谁从未听说过素数？请举起手来。［几乎每个听众都听说过素数并且大概知道这个词的意义。］例如，你，女士，什么是素数？

女士：1，3，5，7，……

塞吉·兰：不！那是奇数。我说的是素数，就是2，3，5，7，11，13。下一个是啥？

女士：17，19，……

塞吉·兰：很好，你已经懂得什么是素数了。

女士：我忘了2。

---

① 写于1832年，6月30日，《贾可比选集》第一卷。

塞吉·兰： 是的，你是对的。我误解了。但是，一般约定 1 不算素数。所以，一个数是素数意味着，它至少等于 2，而且只能被 1 和它自己整除。

数　4　不是素数　因为　$4=2\times2$，

　　6　不是素数　因为　$6=2\times3$，

　　8　不是素数　因为　$8=2\times4$，

　　9　不是素数　因为　$9=3\times3$，

诸如此类。至于素数，我们已经罗列到 19，再往后是 23，29，31，37，……

现在有一个关于素数的问题。有无穷多个素数或者只有有限多个呢？

女士： 是的，无穷多个。

塞吉·兰： 很好。你怎样证明此事呢？

女士： 我不知道。

塞吉·兰： [指着一个青年] 你知道怎样证明吗？

青年： 数学家已经找出成百万个素数。

塞吉·兰： 不，我不是说找出了成百万个，我是说证明素数的序列永不停止。[听众议论纷纷，一些人提出各种证明。]

塞吉·兰： 你是数学家吗？是？好了，我要求听众席上的数学家们不要开口，我不是为他们作的讲演。[笑声。] 不然，就是欺骗。

我说有无穷多个素数，这意味着素数序列永不终止。现在我就来证明它，因为有一个非常简单，也非常古老的证明。这要归功于欧几里得（Euclid）。下面就是这位古希腊人的做法。

我们先注意一件事。取任一整数，例如 38，我可把它写成 2×19，这里 2 和 19 都是素数。于是 38 是两个素数的乘积。如果我取 144，此时我可以写成

$$144=12\times12=3\cdot4\cdot3\cdot4=3\cdot2\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2.$$

照样，它还是一些素数的乘积。有些素数出现了多次。不管怎么说，

我们总可以把整数写成一些素数的乘积。因为，如果给我一个大于2的整数 N，于是，要么 N 已经是素数，要么 N 可以写成两个较小整数的乘积。每个较小的整数或者是素数，或者是更小的数的乘积，如果你继续这个过程，最终会得到素数。

现在我们来看这个古希腊人怎样证明有无穷多个素数。我们将看到，如果我们列出从2到 p 的一串素数

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \cdots,\ p,$$

我们总可找出另一素数，它没有列在上面。我们的做法如下。我取列出的所有素数的乘积。这给我一个数，我再在这个数上加1。设 N 是这个新数。这样我们得到

$$N=(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots p)+1.$$

于是要么 N 是素数，要么 N 不是素数。如果 N 是素数，它不能等于我们列出的从2到 p 中的任何一个，所以，我们找出了一个新素数。如果 N 不是素数，我们可以把 N 表成素数的乘积。我们可以写成 $N=qN'$，其中 q 是一个素数，它可以整除 N。那么，q 是否等于从2到 p 的某一个素数呢?

听众：它是一个新素数。

塞吉·兰：为什么？让我们挑一位，那位年轻人。

年轻人：不然的话，除法不能正常进行。

塞吉·兰：对了。如果你用 q 去除 N，将没有余数。如果用2到 p 间的素数去除 N，余数是1，所以我们发现了一个新素数，它不是原来列出的。这意味着，你不可能用有限列表的方法，给出所有素数，这就完成了证明。

现在问，素数在所有整数中怎样分布？是否有某种规律可以告诉你，某一段数中有多少个素数？它们在所有整数中是如何分布的?

一男士：它们成百万。

塞吉·兰：肯定是的，还能成亿。但这不是我想提的问题。例如，大约有多少个素数小于10,000？你能回答吗?

某人： 你可以数嘛。

塞吉·兰： 没错。但是如果把界限提高到1,000,000或者到一个任意 x 数呢？让我们把这问题换一个提法：是否存在一个公式，它能给出小于 x 的素数的个数？谁说了“是”？只要一个近似公式。[听众们犹豫，也有人议论。] 好吧！这有点儿复杂，我要把素数描绘得更精确一些。我现在不做这件事。让我提出另一类关于素数的问题，特别是孪生素数的问题。

例如：

3 和 5 之差是 2；

5 和 7 之差是 2；

11 和 13 之差是 2；

17 和 19 之差是 2；

29 和 31 也是差 2。

基于显然的理由我们称之为孪生素数。

那么，是否存在无穷多这样的素数，无穷多对孪生素数？

说是的请举起手来。[一些人举手。]

有人说不？[另一些人举手。]

有人谨慎地保持沉默？[更多的人举手。笑声。]

有人认为这是一个有趣的问题吗？

听众： 是的，有趣。[许多人同时说。]

塞吉·兰： 当然，你可以喜欢它，也可以不喜欢它。事实上，数学家们一般认为，这是一个有趣的问题。你看，这是一个问题，没有人知道它的答案。如果你找到答案，你可以进普鲁塔赫（Plutarch古希腊传记作家）的书，你会名留青史。事实上，人们猜想有无穷多对，甚至希望猜想得更准确一点。人们试图去了解，为什么应该存在无穷多对孪生素数。

一听众： 是否有无穷多组三胞胎素数？

塞吉·兰： 这个问题有意思。你能立刻回答吗？

听众中许多人：是的，我想有无穷多。

塞吉·兰：请看！让我们试一下，加一个数到我们已经有的孪生素数上去。

3，　5，　7；

5，　7，　9；

11，　13，　15；

17，　19，　21；

29，　31，　33；

等等。

一听众：21 不是素数。

塞吉·兰：是的。你注意到什么了吗？这里有一组三胞胎素数，3，5，7。但是，此后呢？发生了什么事？你不知道？仔细看：9，15，21，33。

听众：他们是合数。

塞吉·兰：嘘！请那位男士说。［这位男士犹豫没回答。］

男士：［没给回答。］

塞吉·兰：他们有一个性质，这些数都被 3 整除。这是一个很容易的习题，证明每一组三胞胎奇数中，总有一个被 3 整除。因此不存在三胞胎素数。

听众：除去第一组，3，5，7 外。

塞吉·兰：当然，除第一组外，这一组也包含一个 3 的倍数，但 3 本身是素数，不会有其他的了。

让我们回到孪生素数，如果你愿意，也可以叫它素数偶。我们试图去理解，为什么它应该有无穷多。但在这之前，我们回到原来的问题：有多少个小于或等于 x 的素数？找一个近似公式。

好。让我们取直到 x 的所有整数：

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots, x.$$

这些数当中，你可以写出奇数和偶数。一个数是素数意味着什么？

这意味着，它只能被 1 和它自身整除。因此，一个素数一定不是偶数。

听众： 除去 2 以外。

塞吉·兰： 当然，除去 2 以外。现在，如果一直算到 x，有多少个奇数？

众多声音： 一半。

塞吉·兰： 大约一半。对的，$\frac{x}{2}$。这是 x 乘上一个分数。小于或等于 x 的素数的个数应当是某个分数乘上 x，而这个分数依赖于 x。就是这个分数需要我们去费神。

好的。所有整数 1，2，3 直到 x 中，有大约一半是奇数，故不被 2 整除。而这些奇数中，有多少个不被 3 整除？

听众： 三分之一。

塞吉·兰： 不对。三分之一被 3 整除，三分之二不被 3 整除。让我们把 $\frac{2}{3}$ 写成 $1-\frac{1}{3}$ 的形式。现在，在剩下的数中，有多少不被 5 整除？

听众中有人说： $1-\frac{1}{5}$。

塞吉·兰： 你是数学家吗？是的？那就闭上嘴。这是欺骗，不好。其他人，有多少个数不被下一个素数整除？

听众： $1-\frac{1}{7}$。

塞吉·兰： 好的，那最终要找出素数的个数，我们需要如何做？我们需要不被任何素数整除的数，从 2 到某个地方的素数。于是我们就得取乘积

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdots,$$

但是到什么地方为止呢？

听众： 到 x 前的最后一个素数。

塞吉·兰：是的，但可以做得再好一点。不管怎样，最坏的情况是乘积：

$$所有因子\left(1-\frac{1}{p}\right)的乘积,$$

其中 p 一直跑到 x。就是 x 乘这一个分数近似地给出素数的个数。

现在，实际上，我不需要跑到 x。我只要跑到 x 的平方根 $\sqrt{x}$ 就可以了。因为若有一个小于 x 的数不是素数，它被一个大于 $\sqrt{x}$ 的素数整除，它一定也被一个小于 $\sqrt{x}$ 的素数整除①。因而只要碰到一个数的最小素因子，这个数就会被去掉。但当 x 大时，若 p 在 $\sqrt{x}$ 与 x 之间，则项 $\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 非常接近 1。可以证明对 $\sqrt{x}\leq p\leq x$ 的所有 p，上述乘积接近于 $\frac{1}{2}$。为了简化公式，我继续把这个乘积写成对所有 $p\leq x$ 作 $\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 的乘积。为了获得更好的近似值，或者说最佳的可能的近似值，我还得在这个乘积上再乘上一个常数。这个常数比较难确定，它反映了一些更深层的关系。

这样，我作一个近似计算，就得到这个乘积。以 x 乘这个分数，就近似地表示小于或等于 x 的素数的个数。这个分数非常神秘，但它总给出了事情的一些状况。例如，这个分数是常数吗？显然不是。我们走得越远，它变得越小。如果取非常大，这个分数就非常小。它变小的速度有多快并不清楚。这个乘积的变化规律很不清楚。现在我已被它迷住了。呆会儿，我要给一些回答，但我不能去证明它，因为证明太技术性了。

分析这个乘积，是很复杂的，但我们总算往前走了一步，就是发现它随 x 增加而减少。

---

① 我把这个论段的细节讲一下。设 N 小于或等于 x。设 N 是一个乘积，$N=PN'$，其中 p 是素数且大于 $\sqrt{x}$。那么，$N'=N/p$，而 N' 必小于 $\sqrt{x}$。如果 q 是 N' 的一个素因子，则 q 小于 $\sqrt{x}$，而且 q 也是 N 的一个因子。

数学家用符号

$$\prod$$

来表示乘积。我们要表示，对所有小于或等于 x 的素数 p 取因子 $(1-\frac{1}{p})$ 的乘积，我们就用记号

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p}).$$

这样，小于或等于 x 的素数的个数应该近似等于

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})x.$$

因为写这个乘积多少有些麻烦，我们用一个符号 $F(x)$ 来简记之，(F 表示分数，它依赖于 x)。于是我们令

$$F(x)=\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p}).$$

利用这一简化，我们说，小于或等于 x 的素数个数近似地等于

$$F(x)\cdot x.$$

这就简单多了。

现在，我们试试把此法用于分析孪生素数。有什么事情发生在孪生素数身上，而不发生在一般素数身上呢？这就是有另一限制：p 是素数，$p+2$ 也是素数。让我们取所有数

1，2，3，4，5，6，7，8，9，直至 x.

其中大约一半是奇数。于是我们得到一个因子 。现在看不被 3 整除的数。让我们把每个数被 3 除以后的余数写下来：

1 2 3　　4 5 6　　7 8 9…

1 2 0　　1 2 0　　1 2 0…

因为素数不能被 3 整除，我们用 3 去除它以后，得到余数是 1 或 2。我们有两种可能的选择。

对孪生素数来说，p 和 $p+2$ 两者都必须为素数。所以，不单 p

不能被 3 整除，$p+2$ 也不能被 3 整除。这意味着，用 3 去除 p 后余数必须是——

听众： 不能是 1。

塞吉·兰： 对了。因为如果余数是 1，那我再加上 2 之后，就看到 $p+2$ 被 3 整除。这样我们发现一个新条件，就是 p 被 3 除以后，余数只能是 2。与先前我们除去一种可能性不同，现在我们要除去两种可能性。我们的乘积要从

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

开始。

现在我们来对 5 作同样的事情。如果用 5 去除一个整数，设若它不被 5 整除，那有四种可能的余数即 1，2，3，4。这些余数中间，如果加上 2，我希望 $p+2$ 也不被 5 整除。有好多种可能的余数？换句话说，为了使 $p+2$ 也不被 5 整除，余数不能等于什么？

听众： 3。

塞吉·兰： 完全正确。如果用 5 去除一个整数，余数要不等于 0 或 3。这就给我们一个因子

$$\frac{3}{5}\text{或}\left(1-\frac{2}{5}\right).$$

下一个是 7。我想刻划这样一些整数 p，它不被 7 整除，并且加上 2 以后，$p+2$ 也不被 7 整除。这样，我必须去掉 7 的倍数，还要去掉被 7 除以后余 5 的数。下一个因子应该是——

听众： $\left(1-\frac{2}{7}\right)$。

塞吉·兰： 非常好。这样一来，我们想找的那个分数可以写成乘积

$$\frac{1}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right),$$

这个乘积是对所有≥3 而小于或等于 x 的素数作的。当我们考察所

有素数时，没有进一步限制，我们取所有因子 $(1-\frac{1}{p})$ 的乘积。现在要进一步限制 $p+2$ 是素数时，我们取所有因子 $(1-\frac{2}{p})$ 的乘积。所有这些都是近似的，但它给出了研究孪生素数个数的一个好的想法。那就是一个猜想：

猜想：小于或等于 x 的孪生素数的个数近似等于

$$\frac{1}{2}\prod_{3\le p\le x}(1-\frac{2}{p})\cdot x,$$

和前面一样，它是 x 同一个乘积之积，这个乘积随 x 而变，它是 x 的一个函数。它不是一个常数，不像 $\frac{4}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$。仿照以前，我们把这个乘积简记为

$$F_2(x)=\frac{1}{2}\prod_{3\le p\le x}(1-\frac{2}{p}),$$

于是 $\le x$ 的孪生素数的个数，近似等于 $F_2(x)\cdot x$。现在，我们处于与计算所有素数的个数时相似的状况。剩下的事是分析这个乘积。这个乘积是在所有素数上作的乘积，而我们又要计算素数的个数。这似乎是在循环，但其实并非完全如此。

我们从这个乘积得到一些信息。这个乘积是可以计算的。虽然这个分数

$$\frac{1}{2}\prod_{3\le p\le x}(1-\frac{2}{p})$$

随 x 增大而减小，它还是相当大的。这里，我必须解释一下“相当大”的意思。现在我感到有些困惑：要把这事儿说清楚，一定要用到一些更高深的术语，需要稍多一点数学知识。直至目前为止，我都只用到七年级学生会用的算术基本知识。无论如何，让我们试一试。

有人听说过对数吗？［一些人举手。］有人从未听说过对数吗？［一些人举手。］哪些人在保持谨慎的沉默？［很多人举手。］好吧！

有一种东西叫对数，记作 $\log x$，随处可以买到的袖珍计算器上都能见到它。我现在没有时间仔细地解释它，呆会儿会多少作些解释。

实际上，

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})\text{ 近似等于}\frac{1}{\log x}.$$

但这不是很容易证明的，我也没办法告诉你们怎样去证明它。它是技巧性的，甚至很困难。如果你会微积分，这个证明是初等的。虽然初等，但很困难。比如说，你可以用 30 页纸完成它。

［听众中产生各种反应。］

塞吉·兰： 好！你知道，30 页，那不算什么。6 个月前一些新定理被证明，用了10,000 页①。所以 30 页，没什么大不了。当然，这是说从头写起。

好了，有一个函数叫 $\log x$ 。而且，第一个乘积

$$\prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})$$

近似等于 $1/\log x$.

至于与孪生素数相关的另一个乘积，可以证明

$$F_2(x)\text{ 近似等于}\frac{1}{(\log x)^2},$$

这个平方的来历是我们用 $\frac{2}{p}$ 去代替了 $\frac{1}{p}$。例如，我们知道

$$(1-\frac{1}{p})^2=1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2},$$

而如果 p 很大，则 $1/p^2$ 就比 $2/p$ 小很多。所以，近似地我们可以去掉它，我们看到

$$\prod(1-\frac{1}{p})^2\text{ 近似等于}\prod(1-\frac{2}{p}).$$

因此，猜测是：

① 指有限单群分类定理的证明，它由许多数学家的多篇论文组成。——译者注

小于或等于 x 的孪生素数的个数，近似等于

$$F_2(x)x\text{，或者}\frac{x}{(\log x)^2}.$$

自然，我需要更明确地解说"近似"是什么意思，可我现在没时间了。这是有些技术性的问题。也许讲演完以后，我们有时间再谈。

函数 $\log x$ 随 x 增大而慢慢增大。因此，我们得到的数相对较大。但是，尽管有这些直观的论证，还是没有人知道，怎样去证明存在无穷多个孪生素数。

那么，刚才我做了些什么呢？无疑，我们在做数学！但是，什么也没证明，除了欧几里得的第一个定理之外。我们给出的推断只是直观的。但这并不意味着，这些想法毫无作用。反之，我们作出一个猜测，那意味着我们试图去猜出答案，于是，我们面临一个问题。好了，这就是做数学；找出有趣的问题，然后试图去解决它，并且最终真的解决这个问题。

现在，让我提出其他一些问题。我们观察：

$2^2+1=4+1=5$　是素数

$4^2+1=16+1=17$ 是素数

$6^2+1=36+1=37$ 是素数，

$8^2+1=64+1=65$ 不是素数，

$10^2+1=101$ 看起来像素数，其实，它真的是素数。

问题：在这张可以写成整数平方加 1 的素数的表中，是否有无穷多个素数？

想一下，这是考查你们的直觉，我并不要求你们证明任何事。是否存在无穷多个 n^2+1 形素数？

有人：不。

塞吉·兰：有谁说是？谁说不是？谁保持谨慎的沉默？［听众中各种反应、各种猜测都有。］这不是很清楚，是吧？

听众：它们之间有更多间隔，它们不常出现。

塞吉·兰：是的，女士。它们之间有更多间隔。它们之间的间隔大于孪生素数之间的，而孪生素数之间的间隔大于素数之间的。你能猜出这个间隔大概有多大吗？一点点？很大？你能给一个定量的描绘吗？

先让我给你答案：没有人知道，是否有无穷多个这样的素数。这是一个未解决的问题。它是数学上最大的问题之一。人们猜测答案应该是有。我重说一遍，如果你找出了答案，可以在数学史上写上一笔（但你不必以此为目的而去做它）。

猜想有无穷多个形为 n^2+1 的素数。像孪生素数的情况一样，还可以指望做得更好一点。我们可以对相应的素数有一些想法。

对所有素数，这个数是

$$F(x)x \quad 或 \quad \frac{1}{\log x}x=\frac{x}{\log x}.$$

对孪生素数，这个数是

$$F_2(x)x \quad 或 \quad \frac{1}{(\log x)^2}x=\frac{x}{(\log x)^2}.$$

对 n^2+1 形素数的个数我们能得到什么？

一位听众：你必须要求 n 小于$\sqrt{x}$。

塞吉·兰：是的。如果 n^2+1 小于 x，那么一定以$\sqrt{x}$为上界。我们试着猜一下用 n^2+1 表出的素数的个数。如果素数分布是随机的，那很可能这种素数个数与$\sqrt{x}$之比，与所有素数个数与 x 之比一样。这似乎还可信。无论如何，这是一个可行的假设。那么，猜测应该是怎样的呢？有请那位男士。

那位男士和所有听众：［犹豫。］

塞吉·兰：小于或等于 x 的素数个数是

$$\frac{1}{\log x}x.$$

如果你应用这个比例到$\sqrt{x}$，你得到

$$\frac{1}{\log x}\sqrt{x}.$$

这就是猜测。这是粗略的说法，可以相差一个常数因子。

某位听众：为什么不是$\frac{1}{\log\sqrt{x}}\sqrt{x}$?

塞吉·兰：很好。并不猜楚这里应该是 x 或者是$\sqrt{x}$。但是，首先我们知道

$$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x,$$

所以，这两个表达式只差一个因子 2；其次，我们只宣称，给出了一个可以差一个常数因子的近似值。总之，这些直观想法，完全靠直觉，给你一种思想，相信有无穷多个这种素数，因为已经有一个定量的描绘。

当然，我理应说明“近似”的准确意思，不光是对 n^2+1 形素数，也对所有素数和孪生素数。这可以是另一次讲演的话题，但今天我已不能再讲，要讲就要再用一个小时。正是这个近似表达式中的误差项，是问题的主题，它被普遍地认为，是数学中的大问题。这就是用$\frac{x}{\log x}$表达所有素数的个数的误差项。有一个精确的猜测是130 年前黎曼给出的，称为黎曼假设，它给出最好的可能误差项。它至今未能被证明，尽管很多大数学家都试过。但我已经讲了 1 个小时，到此为止吧！

问题

问题： 你谈到了其他的纯粹数学家，但你，你本人为什么做数学呢？

塞吉·兰： 为什么？你为什么写交响乐或叙事诗？我已经告诉你了，因为它对我很刺激，那就是为什么。但我并不是说你也应该去做，那是你的自由。

问题： 你能说说纯粹数学与应用数学的界线吗？

塞吉·兰： 没有这样的界线。这两种东西互相交织，使我无法定出一个界线。如果你试图定义一个准确的界线，一般说来，我不好说你一定不能获得成功，但在这件事上，我本人从未见到过任何人成功。

问题： 你刚才做的这些，你认为它在什么地方可能有用吗？

塞吉·兰： 你说“可能”。既然你问的是可能性，逻辑上我不得不说：是的。

问题： 当你作数学研究时，你心中有一个目标吗？

塞吉·兰： 目标就是证明猜想。

问题： 那在开头呢？

塞吉·兰： 在开头，首先要找出你想证明的猜想，然后试着去证明它。数学上的一个主要困难，就是找到一个你乐于集中精力去做的课题，以及你试图去解决的那个问题。

问题： 那你是用逻辑推理还是用直观来做呢？

塞吉·兰： 刚才我用了逻辑吗？一半对一半，很少一点。这里有

大量的直观材料，至于逻辑，你知道，当我说某甲是某乙的三分之一或五分之一时，我假定了很多事情而没有去证明。我刚才做的数学是直观多于逻辑。总之，一般说来，新结果的发现靠直观，证明的发现靠直观，而最后按逻辑形式成文。但不要混淆这两者。像文学一样，语法与句法并非文学。当你写一段音乐时，你要用音符，但音符并非音乐。在乐谱上读一段音乐，不能代替在卡内基大厅听一段音乐。逻辑是数学的保健法，就像语法与句法是语言的保健法。诗句“Under the bam，under the boo，under the bamboo tree”中没有任何语法。莎士比亚和哥德的本质不是语法或造句法。那是诗，是词的音乐效果，是诗的暗喻，是审美印象，以及其他很多很多。但是，诗的美经过语言翻译往往就淡漠了，而数学的美经过语言翻译却不会改变。

问题：你用直觉推断，近似表示，来描述纯粹数学家们做的事。但数学家也要做别的事。

塞吉·兰：看，我并没说数学家只做这些。人们试图证明某件事，发现一个猜测，就像我刚才讲的那样。一旦提出一个猜测，就试着去证明它。有时我们能成功，有时不能。不断地猜测，不断地试图证明，使我们逐渐接近成功。否定一个绝对化，不是肯定反面的绝对化。

根据你成功的多少，你的结果的深浅，你可以是一个大数学家、一个普通数学家，或看……

问题：例如，你没有谈及公现化。

塞吉·兰：公现化是最后才做的，是废话。公理化是数学的保健法，它是思想的原则，就像语法和句法。但是，做你想做的事。每个人有权决定他想做什么。“废话”一词有些过份，当我觉得合适的时候，我也做公理化。还有很多事情我没谈及，我必须作选择。我想谈数学的一个本质方面，而它正是大多数人不明白的一个方面。

一听众：有一个问题使我感到很刺激，就是实数不可数的问题。

康托 (Cantor) 曾试图解决这个问题，我想这使他变得有些狂燥了。我听说康托已证明了这个问题，是真的吗？

塞吉·兰：证明了什么，实数不可数？是的，他肯定证明了。

同一听众：你能给我们谈谈证明的思路吗？

塞吉·兰：［犹豫。］

同一听众：不必讲得太深。

塞吉·兰：好吧！这位男士想……［议论纷纷。］好，我可以用几分钟来讲讲。

男士：我只是有些好奇。

塞吉·兰：但是，一切都是因为好奇！［笑声。］反过来，这次演讲就是用使我感到好奇的东西，来加强你们的好奇心。现在我给一个证明。什么是实数？它是一个无穷的十进位数，例如，27.9130523…，因为我不能写出无穷多位数，我只能用省略号表示。为简便起见我只考虑 0 和 1 之间的数。假设我们可以把这些数写成一个序列，有第一个、第二个、第三个等等，不漏掉任何一个，像下面这个样子：

$0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\cdots$

$0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\cdots$

$0.a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\cdots$

其中整数 a_{ij} 在 0 与 9 之间。我要证明：存在无限十进制数不在这个表中。我选一个整数 b_1，它不等于 a_{11}，然后选一个整数 b_2 不等于 a_{22}。然后选 b_3 不等于 a_{33}。一般地，我选 b_n 不等于 a_{nn}，我选 b_n 在 1 到 8 之间（为了避开全是 0 的序列和全是 9 的序列带来的麻烦）。这样，我们的选择 b_i 的方法保证了无限十进制数

$$0.\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\cdots$$

不等于已经列出的任何一个数。因此我们得到一个新的数。

注意，我们这里做的类似于欧几里得的方法。我们列出一些数，

然后证明，有一个十进制数不在列出的数中。

问题：我想知道你对数学上无限性思想学派的想法。

塞吉·兰：我没有想法。对我来说这是早已解决的问题。它有某种历史上的重要性，但今天来说，早已解决。某种东西或者是无限的，或者是有限的。

问：但并不如此简单。

塞吉·兰：是的，你是对的。

问：无限是否存在？

塞吉·兰：当我说到素数时，你知道怎么回答是否存在无穷多个素数的问题吗？

问：是的。

塞吉·兰：那就对了，你已经懂了。这就回答了你的问题。

问：但康托的证明多少有些难以为直觉主义者接受。我想在这个问题上曾有很多争议。

塞吉·兰：如果有人喜欢争议，他们有其自由，我只做数学。

问：你本人是否研究你今天谈的这些问题？

塞吉·兰：是的，我研究 n^2+1 形素数的问题。因为这个问题使你感兴趣，你一直坚持到现在，让我再把这问题说得准确一些。当我开始考虑今天应该讲什么的时候，我想到了孪生素数，但我不知道，是否有关于它的猜测以及它是如何提出来的。我查了哈代(Hardy)和瑞特（Wright）合写的书，我找到了。关于孪生素数的猜测和关于 n^2+1 形素数的猜测，是哈代和利特吾德（Littlewood）1923年写的一篇文章中提出的。我现在把他们的猜测讲得更准确一点。

我讲到过好几次关于可以相差一个常数因子的近似表示。这是什么意思呢？假设我有两个表达式 $A(x)$和 $B(x)$。我们说 $A(x)$ 渐近地等于 $B(x)$是指 x 变得很大时，商

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

接近于1。就是说当 x 非常大时，这个商就非常接近于1。把 $A(x)$ 与 $B(x)$渐近相等记为

$$A(x) \sim B(x).$$

我们可以把素数定理作以下陈述：

设 $\pi(x)$是 $\leq x$ 的素数的个数。我们可以得出

$$\pi(x) \sim e^{\gamma} F(x) x,$$

其中 e 和γ 是数学中常用的常数，而 $F(x)$如前面所讲。常数 e 称为自然对数的底；而 γ 称为欧拉（Euler）常数。因为乘积$F(x)$本身显得有些神秘，人们宁愿用另一表示式来代替它。麦滕（Mertens）的一个定理给出了渐近关系

$$e^{\gamma} F(x) \sim \frac{1}{\log x},$$

因此我们看到

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

这就是素数定理的通常表述法。写成这种形式是有益的，因为 log 函数是人人知道的。我们知道 x 变大时，它怎样增加。例如我们有如下这些值：

$\log 10 = 2.3\cdots$	$\log 10,000 = 9.2\cdots$
$\log 100 = 4.6\cdots$	$\log 100,000 = 11.5\cdots$
$\log 1,000 = 6.9\cdots$	$\log 1,000,000 = 13.8\cdots$

等等。

注意数字按10、100、1,000、10,000、100,000、1,000,000，成 10 倍增长，而对数则每一次大约只加上 2.3，这就是说增长得慢得多。

类似地，设$\pi_2(x)$表示$\leq x$ 的孪生素数的个数。那么，哈代和利特吾德猜测

$$\pi_2(x) \sim (e^{\gamma})^2 F_2(x) x.$$

这个公式也可以渐近地用对数来写，那就是

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \frac{x}{(\log x)^2},$$

其中 C_2 是一个常数，它由一个在所有的素数上的乘积表出，即

$$C_2 = \prod_{3 \leq p} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

哈代与利特吾德给出了一个概率论断，它比我今天一小时演讲中得到的更加准确。特别是，当我写下乘积时，我不明显地假定了，被 2，3，5 等等除尽的条件是相互独立的。但我并没有证明这个假设，而它其实是不正确的。这些条件不是相互独立的，而常数 e^{γ} 正好反映了这些可除性条件的相关性。但这就变得越发技巧化了，我不能再深入计算出常数 e^{γ} 的细节。① 我只好让你去请教哈代与利特吾德的原始文章，或者，哈代与瑞特的书了。

回头来谈谈我自己的工作。我和一个朋友哈尔·特罗特（Hale Trotter）对一个类似的问题感兴趣，也是关于素数分布的。但这问题要复杂得多，这里我不能细说了。我们发现了与哈代－利特吾德的关于 n^2+1 形素数的分布相同的渐近公式，而且有同一个常数 C_2（万幸！）我与特罗特的文章给出一个概率模型，它却与哈代－利特吾德的模型完全不同。当然，这只有训练有素的数论专家才能完全懂得。

问：在纯粹数学和应用数学之间，我看不大清楚它们的差别。

塞吉·兰：初看起来，计算 n^2+1 形素数的个数，好像没有什么

---

① 猜想的素数公式的证明绝非显然的。实际上，哥德巴赫（Goldbach）问题说每一个充分大的偶数是两个奇素数之和，这与孪生素数问题颇为类似。哈代和利特吾德甚至猜测，把 2n 表为两素数和的表法数有一个渐近公式为

$$N_2(n) \sim 2C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod \frac{p-1}{p-2},$$

其中的乘积是对所有整除 n 的奇素数来作的。注意，这里出现的常数 C_2，以及分母中对数的平方都与孪生素数的公式相同。但哈代与利特吾德指出，希尔维斯特（Sylvester）在 1871 年和布朗（Brun）在 1915 年猜测的公式是不成立的，原因是他们没有考虑到相关性引出的因子 e^{γ}。

用处。这不等于说，它永远不会有用。在数学史上，纯粹从审美观点出发而得的研究成果，已经有不少的在非常具体的问题上得到应用，有时，是在一个世纪以后。例如，今天，素数定理的一些结果被用于编码理论。据我所知，用到的不是我今天讲到的这些定理，但是，这些定理也很可能某天会有用。

我带来了一段冯·诺伊曼（von Neumann）的引文[1]，但是，我还没时间读它。也许现在该读一读了。［听众中有赞同声。］好，这就来读读。

真理太复杂，只能逐步逼近它而没有别的办法。源于实验的数学思想是对真理的比较好的逼近，虽然这些思想与实验的关系，可能错综复杂或模糊不清，而一旦这些数学思想被确信为对真理的逼近，问题就进入一个新阶段，它更像一个人造的、由审美动力控制的课题，而不是其他的如像实验科学一类的东西。但是，这里有另一点应该强调：当一个数学原则已经从实验源泉走出很远很远，进而产生了第二代、第三代思想，只是很间接地与“现实”相联系，这些思想会被重大危险所包围。它变得越来越纯审美化，单纯地为艺术而艺术。如果，这个研究领域周围，仍有与实验密切联系的课题，或者，这学科是在具有特别优秀的鉴赏力的人们的影响下，这不一定是坏事。但重大的危险是，学科会沿这条阻力特别小的路线发展下去，像远离源泉的水流，细分成众多无意义的支流，学科会变成杂乱无章的繁文缛节。换言之，远离实验源泉，或者经过大量抽象而“近亲繁殖”，数学学科就有退化的危险。在最初阶段，风格总是经典的；一旦变成以花样繁多著称的巴

---

① J. von Neumann, The Mathematician, *Collected Works* I, pp. 1-9.

罗克风格，危险的信号就升起。很容易举出一些例子来说明巴罗克风格和高度巴罗克风格，但这太具技术性了。

我对冯·诺伊曼的表述方法有一些异议。如果他仅表述他自己的个人品味，那很好，他有权决定自己的品味。与他不同，当我做看不出与实验世界有关联的数学时，我从不感到危险。我一生多次见到这样的情景，即一些数学家埋怨某个研究领域太过抽象——冯·诺伊曼可能会说“巴罗克”。但 15 年后，这种研究会与其他工作结合起来，解决非常经典的问题，19 世纪已经提出的问题。

在数论中，如果只做与实验相结合的数学，很有可能是无趣的、琐屑的。至于“近亲繁殖”，我不大明白冯·诺伊曼所指为何。数学上很多最漂亮的发现，来自原本看来风马牛不相及的一些分支的结合。数学天才的特点之一，就是把不同分支结合在一起的能力（这也许就是所谓“近亲繁殖”吧）；或者说，把奔向各种不同方向的很多根线拧到一起，以发现埋在别人已经堆集起来的繁琐小事中的基本思想的能力。这当然不是说别人的工作都毫无价值。

历史上，在 50 年代，很多纯粹数学分支的确是平行发展，互不相交。抱怨这些分支互不联系、过于抽象的不只冯·诺伊曼一人。但到 60 年代，我们看到这些分支深刻地从本质上互相联系起来。不单如此，我们看到，它们与多年来毫不时兴，或者从 19 世纪以来就差不多被人遗忘的课题联系起来。我们还看到，一些古老猜测之所以能被证明，正是因为过去 15 年中，人们发现了怎样使用综合方法。综合方法正是数学史上最成功的方法。事后看来，50 年代的平行发展，是综合方法产生前的一个必经阶段。

一男士：回到素数，我们承认有无穷多个素数，因而有无穷多个素数的倒数。这些倒数之和是有限的吗？

塞吉·兰：这是一个很好的问题！你想算和式

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$$

男士：是的。

塞吉·兰：就是说，和式

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p}.$$

好，如果我想安置一个人到听众中，让他提出一个问题，完全适合今天所讲内容，我不可能找到比这位男士更适合的人了。[笑声。]

记住，我们的乘积是

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

刚才写了$\frac{1}{p}$的和，这二者看起来很像。一个是乘积，一个是求和。但它们之相像不是偶然的，而是因为对数。不过因为时间关系，我没法去深入讨论了。如果你给我两分钟……

对数有两条基本性质。其一是

$$\log(ab)=\log a+\log b.$$

换言之，乘积的对数是对数之和。如果你知道对数，你一定知道这个性质。

其二，当 t 非常小时，$\log(1+t)$与 t 近似地相等。因此$\log(1-t)$近似地等于$-t$。

现在，若是我取上述乘积的对数。因为乘积的对数等于对数之和，我们有

$$\log\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

但 $\log\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 近似等于$-\frac{1}{p}$。因而，我们的和近似等于

$$\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim-\sum_{p\leq x}\frac{1}{p},$$

这正是那位男士想算的和。有一个定理说，当你分析这个和时可以

得到渐近关系

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log \log x .$$

因为对数函数增长很慢，二重对数 $\log \log x$ 增长更慢，但它总在增长。这个和非常有趣。对所有素数 p，取其倒数$\frac{1}{p}$，再求和，其结果是并非有限。

你看，如果你研究那个和，你得到 $\log \log x$，要研究那个果积，你就作逆运算，取指数函数，从而得到 $\log x$，有一个负号，于是你得到

$$\prod_{p \leq x} (1-\frac{1}{p}) \text{渐近等于} \frac{1}{\log x}.$$

这正好是我们以前得到的，所有这些属于同一思路。这位男士的得分应该是 A+。

问：你知道素数定理在科学上的应用吗?

塞吉·兰：科学? 你是说物理、化学、生物吗? 我不知道，但数学史证明，被视为纯理论的学科可能会在某个时候有不可预期的具体应用。我不能预言什么事会发生。我不知道任何应用，不等于不存在任何应用，因为我对物理和化学实际上一无所知。也许有某种应用，而我不知道。另一方面，我也不会预测不会有应用。事实上，恰恰相反，我说它某个时候可能会有用。例如，过去一些年中，微分几何与拓扑学的一二十年前发现的一些纯数学理论，忽然在物理学基本粒子理论上找到了应用。

我试图避免绝对化，一个方面或者另一个方面的绝对化。我告诉了你们我喜欢什么。我讲了我喜欢的东西，我希望你们也喜欢它。如果真是这样，那我就达到目的了。

附注

问：你说到黎曼假设，你能告诉我们它是什么吗？

塞吉·兰：好。我们想得到素数定理公式中误差项的更精确一些的估计。项 $\frac{x}{\log x}$ 只是非常粗糙的逼近，或者说渐近。有另外一个表达式，可以给出好得多的逼近。

我们已经找到一个函数

$$e^{\gamma}F\ (x),\ \text{或}\quad \frac{1}{\log x}$$

我们称之为素数的密度，或者 x 是素数的概率，当然是渐近的。然后，我们说$\pi(x)$渐近等于这个密度与 x 的乘积，就是

$$\pi(x)\sim\frac{1}{\log x}x.$$

但是，我们可以做得更好一点。因为 $\log x$ 随 x 而变，我们从 2 到 x，取密度的和，而得到一个更好的公式，我们用$L(x)$来表示它。这就是说，令

$$L(x)=\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}+\frac{1}{\log 5}+\cdots+\frac{1}{\log x}$$

$$=\sum_{n=2}^{x}\frac{1}{\log n}.$$

现在我们有渐近关系

$$\pi(x)\sim L(x)\sim\frac{x}{\log x},$$

但$L(x)$给出比$\frac{x}{\log x}$好得多的关于$\pi(x)$的渐近表达。黎曼假设说

$$\pi(x)=L(x)+O(\sqrt{x}\log x),$$

其中 O $(\sqrt{x}\log x)$ 是一个误差项，以 $C\sqrt{x}\log x$ 为上界，而 C 是某个常数。因为$\sqrt{x}$及 $\log x$ 比起 x 来非常小，我们看到$L(x)$给出$\pi(x)$的一个非常好的逼近。

黎曼假设也使我们对乘积$F(x)$ 与 $\frac{1}{\log x}$之间的关系有更深刻的理解。实际上，蒙哥马利（Montgomery）告诉我，它可推出

$$e^{\gamma}F(x)x=\frac{x}{\log x}+O(\sqrt{x}),$$

其中$O(\sqrt{x})$也是误差项，以 $C\sqrt{x}$为上界，而 C 是适当的常数。因此，$e^{\gamma}F(x)x$ 与 $\frac{x}{\log x}$差不多一样地逼近$\pi(x)$，但都比$L(x)$差。

参考文献

V. BRUN, "Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare," *Archiv for Mathematik* (Christiania) **34** Part 2 (1915), pp. 1-15.

G. H. HARDY, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1969.

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, "Some problems of Partitio Numerorum", *Acta Math*. **44** (1923), pp. 1-70.

G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the*

Theory of Numbers, Fourth Edition, Oxford University Press, 1980.

A. E. INGHAM, *The Distribution of Prime Numbers*, Hafner Publishing Company, New York, 1971 (Reprinted from Cambridge University Press).

S. LANG and H. TROTTER, *Frobenius Distributions in GL_2-extensions*, Springer Lecture Notes 504, Springer-Verlag, New York, 1976.

J. J. SYLVESTER, "On the partition of an even number into two prime numbers," *Nature*, **55** (1896 – 1897), pp. 196 – 197 (= *Math. Papers* **4**, pp. 734 – 737).

D. ZAGIER, "The first 50 million prime numbers," *Mathematical Intelligencer*, 1978.

一次生动的活动：做数学

丢番图方程

1982 年 5 月 15 日

摘要：求方程的整数解和有理数解的兴趣自古有之。我试图展示一些至今未能解答的基本问题。早在古代，欧几里得和丢番图（Diophantus）就已经解出了方程 $a^2+b^2=c^2$，给出了解的公式。而从另一个最困难的方程 $y^2=x^3+ax+b$ 出发，提出了一些非常重要的问题，这些问题 19 世纪以来就处于数学的中心。没有人知道求它的所有解的有效方法。我们要描绘这些解具有的某些结构，企图看出寻找这种方法的途径。

1981年5月，塞吉·兰在巴黎短暂访问期间举行了关于素数的报告会，阐明数学家们做数学的动机。

听众的欢迎，到场学生的关注和热情，使他愿意今年再重温旧梦。我们很感谢他能这样做。

以下的行文，力求保持与去年相同的风格，力求保持塞吉·兰的生动语气和格调。文中特别注意反映了他与听众的交流。删去了一些关于高中数学教学问题的讨论，它或者过于空泛，或者过于个性化，似乎对主题无大裨益，我们决定删去。另一方面，因为塞吉·兰宁愿去做数学，而不愿仅仅空谈什么什么可以做。如果读者想更准确地了解他对这种程度的数学书的写法，可以参考他写的书《基础数学》①，或者他与马饶（Gene Murrow）合写的书《几何》②。

章末附了一些材料涉及演讲会上来不及提到的数学知识。所附这些材料，在某种程度上反映出塞吉·兰的耐心和友善，因为在会后的几个星期里，他回答了我的各种问题，包括一些显得颇为天真的问题。我愿借此机会表示谢意。演讲的最后几页，涉及到关于解的大小的某些猜测，它们是6个月后加上去的。演讲讨论的是生龙活虎的数学，正在发展的数学。那以后不久，数学研究的生命力和相互关联得到一个最好不过的证明：有60年历史的莫德尔（Mordell）猜测（见65页），终于被德国数学家法尔廷斯（Gerd Faltings）证明。这是一个一流的结果。一方面，它用到过去30年中发展起来的代数几何学的深刻结果；另一方面，它借助了苏联数学学派的工作。数学发展中常常见到的情况是：当一个人作出重大贡献时，他离不开整个数学界积极发展起来的成果。

布雷特

① *Basic Mathematics*, Addison-Wesley, 1971年（已售完）。
② *Geometry*, Springer-Verlag, 1983年。

演讲

塞吉·兰：这次讲演的目的依然是同大家一起做数学。为了去年未到场的听众方便，我先作几分钟泛泛而谈。上次我问道："数学对你意味着什么？"有人回答："数字的运作，结构的运作。"那如果我问你音乐是什么，你是不是回答说"音乐是音符的运作"呢？所以我再问一次："对你说来：数学是什么？"

一位男士：是跟数字打交道。

塞吉·兰：不，不！不是跟数字打交道。

一位高中学生：是解决问题。

塞吉·兰：你比较接近了。解决问题——那是我上次试图告诉你们的。不仅仅是掌握什么东西，它对我们的心灵有更深的触动。不幸的是，除去个别天才的教员外，我们的小学、中学没有，或几乎没有让学生理解，什么是数学，做数学是怎么回事。就在讲演会之前，我在布雷特（他组织了这次讲演）的办公室翻了翻十年级的教科书，叫人恶心。[听众中议论。] 是恶心，从各方面看都是，从头到尾缺少逻辑连贯，充塞毫无意义的小问题、枯燥无味的讲述……真令人作呕。[听众热烈讨论，一些笑声。]

问：你能告诉我们此书的书名吗？

塞吉·兰：啊！我该把它带到这里来，我不在乎。你知道，我不怕坦言我之所想，但我把它放在楼上了。管他的，这些东西其实都差不多。[笑声。] 这些东西是同类项。所以我想告诉你们点别的，说明为什么数学家要做数学，而且毕其终身，那就是我试图告诉你

们的。

上次，我们还谈了纯粹数学和应用数学的作用及其关系，简短地谈了谈。我还读了一段冯·诺伊曼的引文，就是他抱怨“巴罗克”数学的那段，他说：

> 当一个数学原则从实验源泉走出很远很远，进而产生了第二代、第三代思想，只是很间接地与“现实”相联系的思想，这些思想会为重大危险所包围。它变得越来越纯审美化，单纯地为艺术而艺术。如果这个研究领域周围有仍与实验密切联系的课题，或者，这学科是在具有特别优秀的鉴赏力的人们的影响下，这不一定是坏事。但重大的危险是学科会沿这条阻力特小的路线发展下去，像远离源泉的水流，分成众多无意义的支流，学科会变成杂乱无章的繁文缛节。换言之，远离实验源泉，或者经过大量抽象“近亲繁殖”，数学学科就有退化的危险。

这是他在抱怨。还有一段冯·诺伊曼的引文，应该读给那些人听，这些人用前一段引文来烦扰我们，他们不知道或不提到第二段。现在我来读读。

> 但仍有很大一部分数学，它们的发展，原来绝无实用需求，无人知道，在哪个领域里它可能有用，而最终它变得有用；一般来说，数学上的普遍情况是：从一个数学发现到其应用之间，有一个时差，它可以从30年到100年不等，有时甚至更长。整个体系似乎在没有任何指向，没有任何实用背景的情况下运行。……这对所有学科都是对的。在很大程度上，成功归于完全忘掉最终所求；拒不研究获利之事，只依赖于智能雅趣之准则的指引；遵循此道，长

远来看其实会走到前面，远胜于严格按功利主义行事之所获。

我想，在数学中这种现象应好好研究。我还想，科学上，每个人都可以去判断这些观点的正确性。我相信，观察科学在日常生活中的作用，以及注意在这个领域中无为原则会得到的奇妙结果，是很有教益的。

正反两面都说到比什么都正确。[笑声。]

好，泛泛之论已经够多了，让我们来做数学。

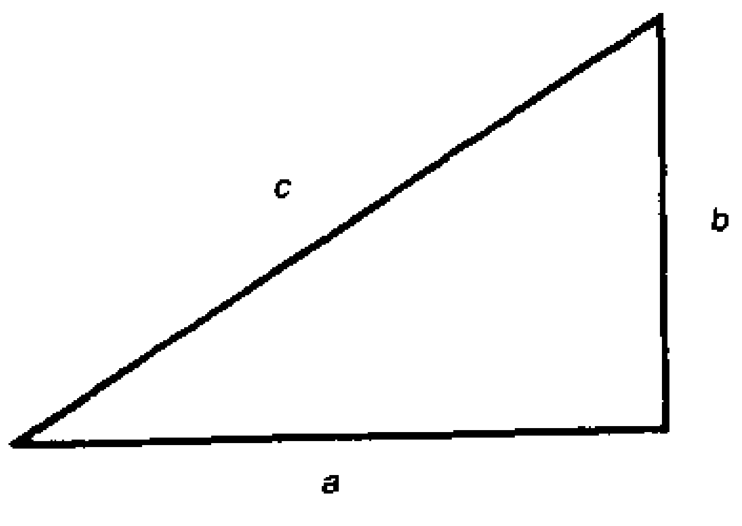
当然，如我去年所说，我不得不选择原则上人人能懂的课题。这意味着，大多数数学都被排除了。我为今天选的话题中肯定会出现数字。但我们要考虑的，要处理的，却不完全等同于计数时的数字。

我们不从数字出发，而像毕达哥拉斯（Pythagoras）一样，取一个直角三角形，边长为 a，b，c。我想，人人都记得毕达哥拉斯定理，它说的是什么？[塞吉·兰指向一个男青年，笑声。]

男青年： 平方的和——

塞吉·兰： 是的，第一个平方是什么？它是 a——

男青年： a 平方加 b 平方等于 c 平方。



塞吉·兰：对的，那就是方程

$$a^2+b^2=c^2.$$

现在，你知道这个方程的整数解吗？人人都知道什么是整数吧？1，2，3，4，5，6等等。那它有没有整数解呢？

听众：3，4，5.

塞吉·兰：不，等一下！我是问那个伙计。［笑声。］让我来挑选。［笑声。］特别重申我们的规则：听众中可能有，甚至一定有一些数学家。我要求他们不要介入对话，我的讲演不是针对他们的，如果他们介入对话，那是骗局。好了，让我回到坐在那里的年轻人，给我一个解。

年轻人：3平方加4平方等于5平方。

塞吉·兰：是的。现在，还有别的解吗？好，让我们举手表决，我们可是非常民主。你，先生，你说没有。坐在那边的男士说有。谁说没有？请举手。谁说有？有很多人说有。说答案是有的人，请给我另一个解。先生？

一先生：［不回答。］

塞吉·兰：你说过“有”。

一先生：我知道还有很多其他解，但不知道哪些是解。

塞吉·兰：好，有谁知道另一个解吗？

听众：5，12，13.

塞吉·兰：那是对的，$25+144=169$。

一位高中学生：如果你有一个解（a，b，c），如果d是任一数，那（da，db，dc）也是解。

塞吉·兰：对，如果（a，b，c）是一个解，如果你用一整数d去乘它，你得到另一个解

$$(da)^2+(db)^2=(dc)^2.$$

因此，问题的合理提法是：除去已经知道的两个解及其倍数外，还有没有其他解？

哪些说“有”？哪些说“没有”？哪些保持审慎的沉默？［笑声。］无论如何，我们面对一个古希腊人就已经知道的问题。好，我们现在用5到10分钟来找出所有的解，我会证明这一点。我怎样证明呢？我把它们全都写出来。但我不能把它们一个一个地写下来，因为有无穷多个。我必须找一个一般的方法来写。我们先把问题变一变形式。如果我用 c^2 去除这个方程 $a^2+b^2=c^2$，我得到

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

令 $x=\frac{a}{c}$，$y=\frac{b}{c}$，于是方程 $a^2+b^2=c^2$ 变成

$$x^2+y^2=1.$$

而如果 a，b，c 是整数，那 x，y 会是……什么类型的数？

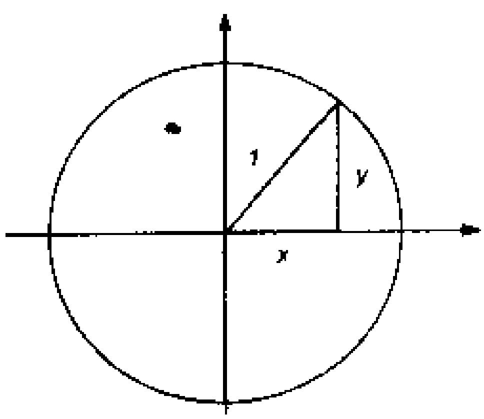
听众：有理数。

塞吉·兰：完全正确。因而，要找出 $a^2+b^2=c^2$ 的所有整数解，等于去找 $x^2+y^2=1$ 的所有有理数解。因为反过来，如果我有一个有理数解（x，y），那我可以把每个数写成分数，以 c 为公分母；然后消去分母就得到 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解。现在问题是找 $x^2+y^2=1$ 的所有有理数解。

你们知不知道方程 $x^2+y^2=1$ 表示什么？它的图像是什么？

听众：一个圆。

塞吉·兰：是的，我们可以画在这里。



它是一个半径为 1 的圆，中心在坐标轴的原点。我们有一个斜边为 1 的直角三角形，直角边边长是 x，y。我们的问题可以说成，找出这个圆上的所有有理点，即坐标 x，y 为有理数的所有点。

在我找出所有这些解之前，我先写下一大批来。我令

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{及} \quad y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

我写下这些公式——

A 先生：［略带挑战。］但你把它想得就像……

塞吉·兰：不，不是我把它想得"就像"，老早以前就有人把它想得"就像"。

A 先生：是吗？真的是突然想到的？

塞吉·兰：不，当然不是，他玩数学，他看到了很多东西，然后他认识到这个式子给出解。当他认识到这点时，他是在做数学，他是一个很棒的数学家。一旦他发理此事之后，晚辈们就用它，抄它。我现在就是这样，我并未声称其他什么。

A 先生：你是否认为，发现这些结果以求有效地做数学正是数学稍差者之难处。

塞吉·兰：对这种事情，就像打鱼，数学家到哪里打鱼，是说不清楚的。数学家各自到自己能打到鱼的地方去。现在，我试图告诉你这个问题的完全解答。然后，我会给你一些未解决的问题。你可以做这些题，你自己可以去打鱼，如果这些鱼饵使你钓起一条大鱼，那你可以得到一个金质奖章或者巧克力奖章。

另一人：这是三角学吗？不是？

塞吉·兰：你想它是什么就是什么，我没有时间讲太多细节了。

它同时来自许多地方。[①]

现在，我们来验证我们的公式的确给出方程 $x^2+y^2=1$ 的解。用一点点代数，我们得到

$$x^2=\frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4},\qquad y^2=\frac{4t^2}{1+2t^2+t^4},$$

因此

$$x^2+y^2=\frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}=1.$$

于是我们得出一个等式，它对 t 的任何值都成立。如果我给 t 一个有理数值，对 x 和 y 我能得到什么？

听众：???

塞吉·兰：我得到有理数。我们从 t 出发，经过加、减、乘、除得到它们。因此我们得到有理数。

听众：是的。

塞吉·兰：看一个例子。哪一位，你，女士，请给我一个 t 的值。

女士：二分之一。

塞吉·兰：谢谢。我们令 $t=\frac{1}{2}$，算一算

$$x=\frac{1-1/4}{1+1/4}=\frac{3/4}{5/4}=\frac{3}{5},$$

---

① 至今这些公式从何而来的问题常被提起，我原不知其答案。考虑到听众反应之强烈，包括演讲会上和会后，我决定查一查这些公式的历史。历史上，古希腊人已感兴趣于 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解。欧几里得（公元前三世纪）已经知道公式

$$a=m^2-n^2,\quad b=2mn,\quad c=m^2+n^2,$$

其中 m，n 是整数。丢番图（公元三世纪）已经知道如何处理分数，也知道如果用 m^2+n^2 去除上式且令 $t=m/n$，则可得到我前面已写出的公式。这些公式当然不是来自三角学。丢番图感兴趣于找这一类方程的整数解，就像刚才考虑的那个以及下面我们还要考虑的那些。找这种解的问题现在称为丢番图问题。这些方程称为丢番图方程。可参看文献 [Di]，特别是Ⅵ册，那里丢番图用这些公式解决了涉及毕达哥拉斯三角形及其他一些条件的问题。反过来的问题参见本演讲的末尾及文献 [La - Ra]。人们也许对丢番图如何表达他自己有兴趣，我把他的书第Ⅵ册的问题 XⅧ 抄一些在这里：

要找一个直角三角形，其面积加上其斜边长是一个立方数，且其周长是一个平方数。

如上情况下，如假定其斜边长是一个立方数减去其面积之数，这会引到求一立方数，它加上 2 可得一个平方数的问题。

共有约三百页此类问题。

而

$$y=\frac{2\cdot 1/2}{1+1/4}=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}.$$

这样我们得到三角形 3，4，5 是吧！$\frac{1}{2}$不是很大，很自然地我们得到已经知道的解。现在，如果你想用另一个分数来做一些计算，可能不是如此简单的计算，你会找到其他解。你愿意给我另一分数吗？

女士：$\frac{2}{3}$。

塞吉·兰：很好，让我们快速计算一下

$$x=\frac{1-4/9}{1+4/9}=\frac{9-4}{9+4}=\frac{5}{13},$$

$$y=\frac{2\cdot 2/3}{1+4/9}=\frac{4/3}{13/9}=\frac{12}{13}.$$

现在我们又回到刚才有人说到过的解 5，12，13。很明显，你可以从任何分数 t，或者整数 t 出发，继续往下做。例如，如果你让 $t=154/295$，你会得到 x，y 的值，它们会更大些，且也给出解。由此，你已经看到怎样可得到无穷多个解。有一个定理说，所有的解，除去 $x=-1$，$y=0$ 不能由此法获得外，都能由这个公式给出。只要把 t 的有理值代入公式

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad 和 \quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

中，就可以得到所有其他解。因为我想谈另外一个有些长的话题，我现在要跳过这个定理的证明。也许晚些时候，在演讲以后，可以有时间给出这个证明。

A 先生：你说人们看出存在无穷多个解，谁看出了？

塞吉·兰：如果你把 t 的无穷多个值代入这些公式，你得到 x 的无穷多个值。

A 先生：但这并不是很容易看出的。

塞吉·兰： 这很容易，但我现在不想谈其细节了。

A 先生： 但我想说这不是那么容易看出的。[听众中议论纷纷。]

塞吉·兰： 那要看是哪个人在看它，他的眼睛有多好。[①] [笑声。]

好，我们刚才考虑了方程 $x^2+y^2=1$。假定我们想推广这个方程，想研究其它的更复杂的方程。下一个复杂一些的，我们应考虑的方程类型是什么呢？让我指定一个人来说。那位女士。

女士： 用另一个数来代替 1。

塞吉·兰： 那是一种可能，我们可以研究 $x^2+y^2=D$。这有一套理论很类似于我们刚才所看到的。现在让我跳过它。

听众： 看看方程 $x^2+y^2+3^2=d$。

塞吉·兰： 很好，我们可以增加变量的个数，这引出一些非常有趣的问题。但我试图让你说出我心中所想，让你建议我希望所做。

听众： 用立方来代替平方。

塞吉·兰： 正是它。例如，方程 $x^3+y^2=D$，用 3 代替了 2。让我们把它写成经典的形式：

$$y^2=x^3+D.$$

例如：$y^2=x^3+1$，是否存在解？有解时，有无穷多个解吗？

听众： 是的，2 和 3，因为 $3^2=2^3+1$。

塞吉·兰： 还有其他解吗？

听众： $x=0$，$y=1$，以及 $x=-1$，$y=0$。

塞吉·兰： 好的，我们已经有三个解了。还有其他解吗？

听众： $x=0$，$y=-1$。

塞吉·兰： 很对，因为平方，我们可以取 y 或 $-y$。总结一下，

---

① 无论你怎样去看，你可立即发现你想找的。例如，我们有方程

$$x(1+t^2)=(1-t^2),$$

所以 $(1+x)t^2=(1-x)$ 及 $t^2=\frac{1-x}{1+x}$，因而对 x 的每个值对应 t 或 $-t$ 的一个值，至多 t 的两个值给出同一个 x。

也可注意，如果 t 从 0 增加到 1，此时 $1-t^2$ 减小，而 $1+t^2$ 增加，因而 $x=(1-t^2)/(1+t^2)$ 从 1 减小到 0。特别，不同的 t 给出不同的 x。

我们有五个解了：

$$x=0,\quad y=\pm 1,$$
$$x=-1,\quad y=0,$$
$$x=2,\quad y=\pm 3.$$

还有其他解吗？哪位说“是的”？请举手。哪位说“不是”？哪位保持谨慎的沉默？

这很不明显。找出这个方程以及其他一些类似方程的解，比起找方程 $x^2+y^2=1$ 的解来说，要困难得多。有一个定理说没有其他解了，可是我现在不能证明它。

现在，对于图像，谁知道一些什么？你知道怎样画图像吗？有谁不知道？请举起你的手，让我能够看到。[一些人举手。] 好，我简单解释一下什么是图像。

假定在这根轴上有 x 的值，另一根轴上有 y 的值。假设 x 的每个值是实数，对每个实数 x，我算出其立方，再加 1，这样我得到 y 的两个值：

$$y=\sqrt{x^3+1}\quad 及\quad y=-\sqrt{x^3+1}.$$

例如：

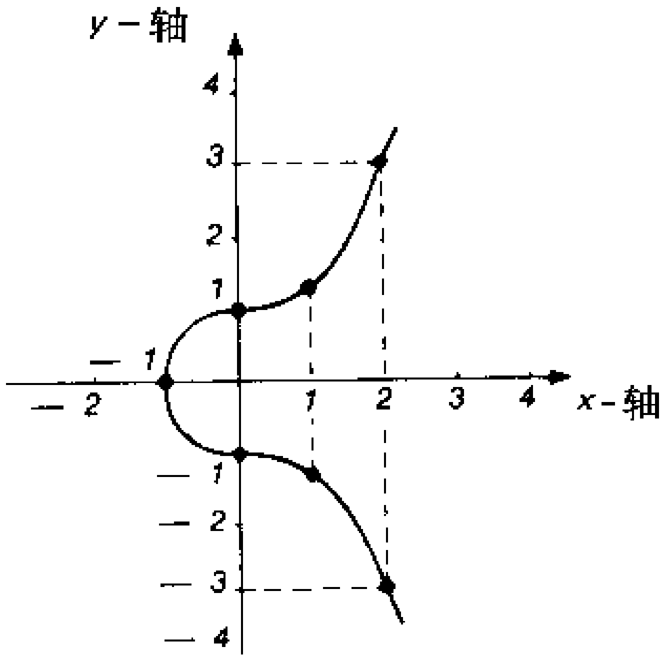
如 $x=1$，则 $y=\pm\sqrt{2}$；

如 $x=2$，则 $y=\pm 3$；

如 $x=3$，则 $y=\pm\sqrt{28}$；

如 $x=-1$，则 $y=0$。

如果 x 是负数且小于 -1，那么 x^3+1 是负的，这就没有对应的 y 值了。反过来，如果 x 增加到无穷大，那 y 也增加到无穷大。对于每个 x，相应地有 y 和 $-y$，如下图所示：



我们可以推广我们的方程，就如你们早些时候对 x^2+y^2 所作的那样，我们去考虑方程

$$y^2=x^3+D,\text{其中 } D \text{ 是正数或负数。}$$

我们还可以考虑方程 $y^2=x^3+x$，或 $y^2=x^3+ax$，在历史上，它们曾特别引人注意。例如，古希腊人和古阿拉伯人提出了如下的问题。什么样的有理数可以是一个直角三角形的面积？这个直角三角形要求有整数直角边长 a 及 b，就像我们在开头考虑过的那样。可以证明，A 是这样的数当且仅当方程

$$y^2=x^3-A^2x$$

有无穷多个有理解。①

① 直角边为 a，b，斜边为 c 的直角三角形的面积可表为公式

$$A=ab/2.$$

因此，我们得到

$$c^2+4A=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2,$$
$$c^2-4A=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.$$

由此推知，有理数 A 是直角三角形的面积当且仅当方程

$$u^2+4Av^2=w^2,$$
$$u^2-4Av^2=z^2.$$

同时有有理数解 (u, v, w, z)。在最近的一篇文章中汤那尔（J. Tunnell 参见［Tu］）研究了这个问题并注意到如果从点（1，0，1，1）投影到 $z=0$ 定义的平面，则可得上述方程组定义的曲线与一条平面曲线间的对应，这条曲线可以写成

$$y^2=x^3-A^2x,$$

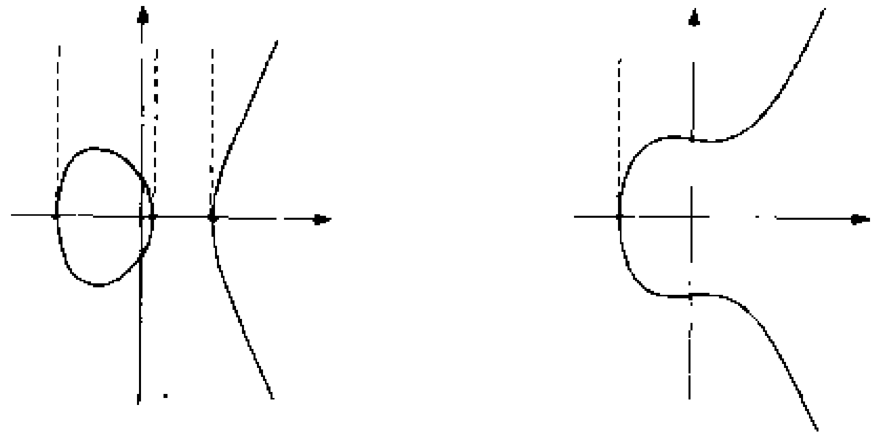
它正是我们现在要讨论的。汤那尔给出了一个判别法则以判定是否存在无穷多个解，这用到很新的，非常困难的数学理论。

最后，让我们考虑方程

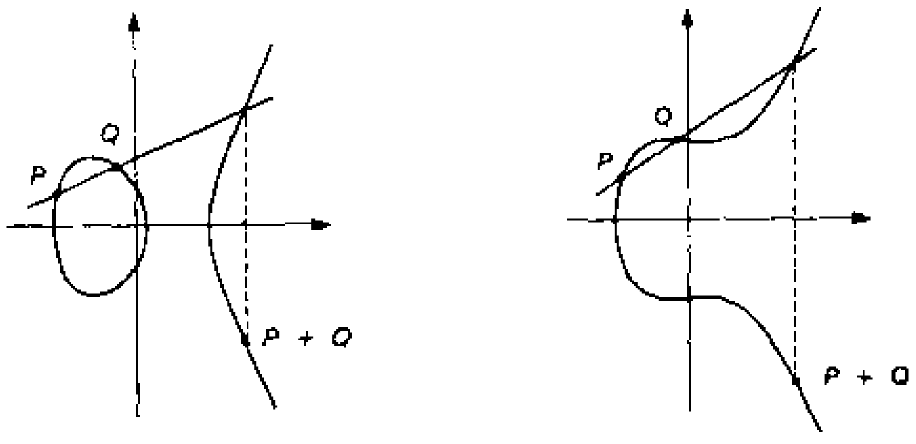
$$y^2=x^3+ax+b.$$

它包含了所有的情形。当我们讨论 $y^2=x^3+b$ 或 $y^2=x^3+ax$ 时，我们假定了 $b\neq0$ 及 $a\neq0$，不然这些方程会退化。同样，对一般的方程，我们假定 $4a^3+27b^2\neq0$，以保证适当的非退化性。为我们现在的目的，你不必深入到这种技术性问题中去。

一般的方程 $y^2=x^3+ax+b$ 的图像看起来像这样，有一支跑到无穷远，而有时，还有一个卵形线。



用这个图，我们可以定义点的加法。在曲线上取两个点 P 及 Q。我们用下述方法定义其和。通过 P 及 Q 的直线与此曲线交于第三个点。沿 x 轴取其镜像，我们找到一个新的点，记为 $P+Q$，这已画到下面的图上：



a) 有卵形线的情形　　　b) 没有卵形线的情形

一位大学生： 但是，通过两点的直线不--定与曲线交于第三点。

塞吉·兰： 啊，是吗？你可以给我一个例子吗？

一学生： 是的，如果这直线是竖直的。

塞吉·兰： 非常好的注解。她是对的，如果 Q 是 P 经 x 轴的镜像，那这条竖直的直线，并不与曲线相交于任何其他点。待会儿，我再回到这个特殊情况。但这实质上是这种现象的仅有的例子。在考察这种特殊情况之前，让我们先回到两个点的加法的定义。

我用到了符号 + ，你有权指望它有某些性质，否则，我不应该用符号 + ，这些性质是什么呢？

听众： ???

塞吉·兰： 你知道，+ 号是从通常的数的加法来的，我刚才定义了点的加法。那么，数的加法有哪些性质呢？

听众中一些人： 它是一个群的法则。

塞吉·兰： 不要用这种稀奇的字眼。

另一人： 项的顺序可以掉过来。

塞吉·兰： 是的，这是头一个性质，即，我们一定有

$$P+Q=Q+P.$$

这是对的。要计算 $Q+P$，我用同一条直线，所以我得到同一交点，因此有 $Q+P=P+Q$。还有什么别的性质可以指望？

听众中某人： 结合律。

塞吉·兰： 显然，你知道得太多了。［笑声。］让别人说说。比如，那位女士。

女士： 结合律。

塞吉·兰： 是的，这是对的。什么意思呢？如果我取三个点的和，我可以有两种方法算它：

$$P+(Q+R) \quad 和 \quad (P+Q)+R.$$

结合律的意思是这两种表示法是相等的，因此我们有

$$P+(Q+R)=(P+Q)+R.$$

很明显 $P+Q=Q+P$，但你若试图证明结合律，你会发现不是这么容易。如果你试图蛮干，那你不可能成功，但是，这结论是对的。

还有别的什么性质？

一高中学生： 一个零元素？

塞吉·兰： 对了。哪点会是零元素呢？它是一个元素，满足

$$P+\text{零元素}=P.$$

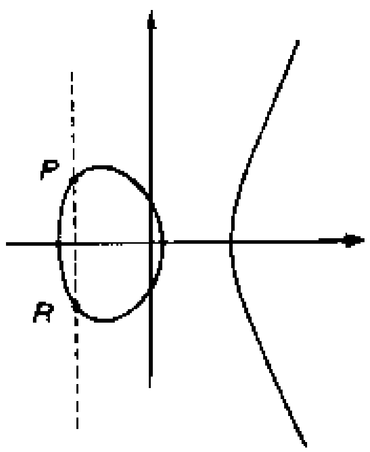
有这样的元素吗？

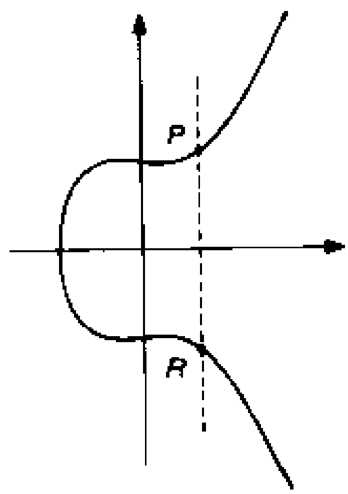
某人： 就是那一点。

塞吉·兰： 不。这要有些想像力。啊，［笑着说］坐在那里的男士喜欢这个。［指向上方。］你是数学家吗？

男士： 不，但我曾经是。［笑声。］

塞吉·兰： 我们不得不发明一个零元素。让我重画一下图像。





现在，给了你一个定点 P。我要找什么呢？我希望找这样的一个点，当我作通过 P 点与此点的直线时，这条直线与曲线相交在 P 点关于 x 轴的镜像。在图中，P 点的镜像用 R 点表示，而通过 P 点与 R 点的直线是竖直直线。因此，如果有一个点 O 适合 $P+O=P$，这个点不能是平面上的任何点，因为它必须既在曲线上，又在竖直直线上。那我们怎么办？我们发明这样一个点。所有的竖直直线通向无穷远，向上和向下。我们约定，在无穷远的点都是同一个点。

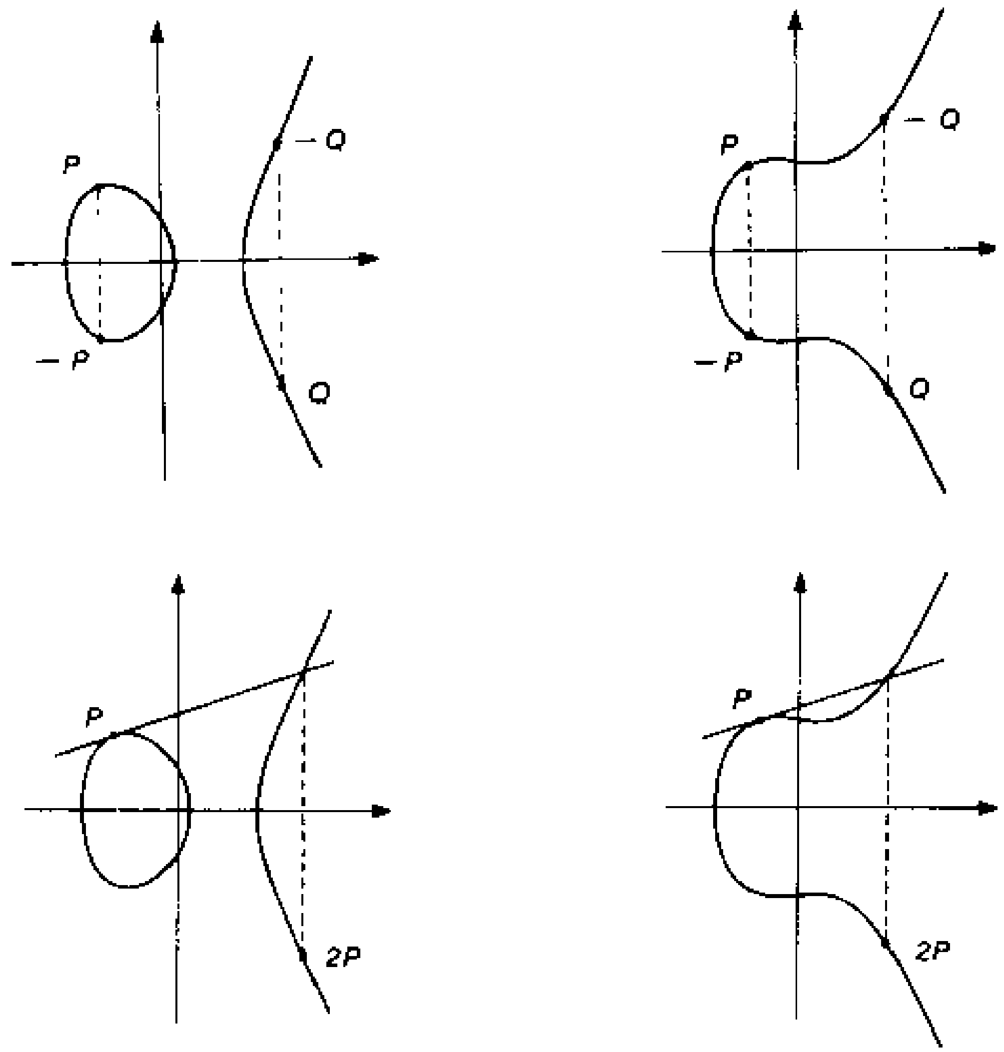
我们定义了惟一的在无穷远的点，把它视为所有竖直直线的交点。我们承认这一个约定，就是通过 P 点的竖直直线都同时通过 P 点和 O 点，而且，如果这条直线与曲线交于 R 点，那么 $P+R=O$。我们应把 R 称作什么?

听众： 负 P。

塞吉·兰： 是的，非常好，因为我们有条件

$$P+(-P)=O.$$

这就是我们采用的约定。



如果我想求 $P+P$，我该怎么办?

听众： 取切线。

塞吉·兰：完全对。曲线的过 P 点的切线，与曲线交于一个点，取其镜像就得到 $P+P$，我把它记成 $2P$。如果我想求 $3P$，怎么办？遵循同一过程取 $2P+P$ 即可：画一条通过 P 到 $2P$ 的直线，它与曲线相交于一个点，作其镜像就可求出 $3P$。同样可作

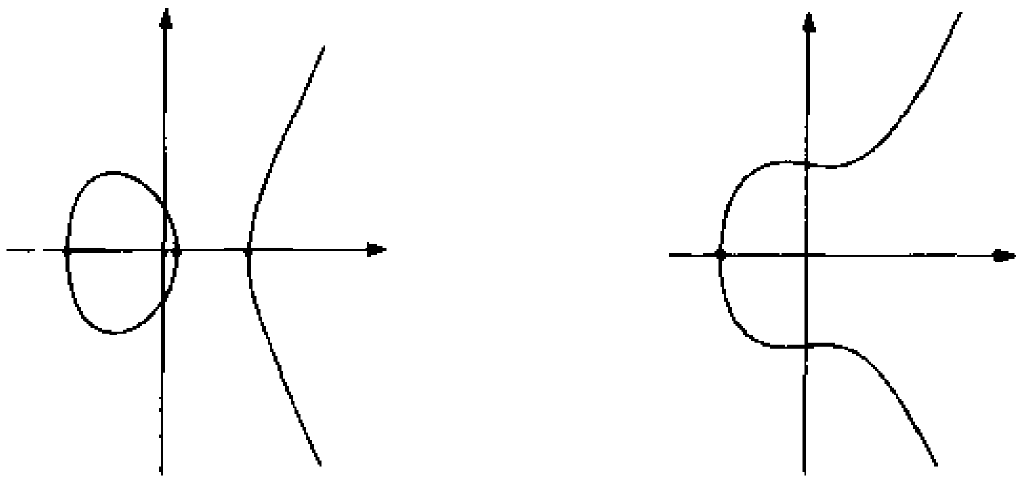
$$4P=3P+P,\ 5P=4P+P \text{ 等等。}$$

现在有一个小问题。适合 $2P=O$ 的点 P 在哪里？用你的想象力。它们在哪里？你——［指向一听众。］

一听众：不知道。

塞吉·兰：你已经知道怎样求 $2P$。我们作切线，看切线与曲线交在哪里，然后取镜像，我们得到 $2P$。现在，我希望 $2P$ 在无穷远点。

一男士：在竖直直线上。



塞吉·兰：对了。满足 $2P=O$ 的点 P 应当是那些切线为竖直直线的点，因此，就在水平直线上，即 x 轴上的点。如果有卵形线的话，应当有3个这样的点。而如果没有卵形线，那就只有一个这样的点。当然，还要加上 O 点。

假设我们已找到一个点 $P=(x,\ y)$，它是有理点，即它的坐标 $(x,\ y)$ 是有理数。

那么，一般来说，我可以找到其他有理点：倍数点 $2P$，$3P$，

$4P$ 等等都是有理点。我们看出这点道理是因为我们可以对两个点的加法给出一个公式。

我们来观察曲线 $y^2=x^3+ax+b$ 上的三个点：

$$P_1=(x_1,\ y_1),\ P_2=(x_2,\ y_2),\ P_3=(x_3,\ y_3)$$

且假定 $P_3=P_1+P_2$。怎样能从 x_1，x_2，y_1，y_2 算出 x_3，y_3？公式是

$$x_3=-x_1-x_2+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2.$$

当然，如果 $x_1=x_2$，这个公式失去意义。在这种情形下，如果 $P=(x,\ y)$，我们用公式

$$x_3=-2x+\left(\frac{3x^2+a}{2y}\right)^2$$

来计算 $2P$。

[有 6 位听众此时离场。]

这些公式，不是很容易发现的。它们比之求圆上有理点的公式来说，要深刻得多。你需要有系统的、具普遍性的一些想法，才能得出通过两点的直线与曲线相交于第三点的观念。但，你只要照此办理，你又不觉得代数太麻烦的话，那你可以作几页纸的计算导出这些公式。让我们用这些公式去求有理点。举一个具体的例子，例如方程

$$y^2=x^3-2.$$

首先有一个解，$x=3$ 和 $y=5$。我们把这个解叫做 P。布雷特先生（演讲会组织者）友善地用计算器做了必要的计算，以求出 P 的倍数点。设 $2P=(x_2,\ y_2)$ 的坐标是

$$x_2=\frac{129}{100},\qquad y_2=\frac{-383}{1000}.$$

他的做法就是把 $x=3$，$y=5$ 代进求 $2P$ 的公式。继续下去，他求出了以下的表。

曲线 $y^2 = x^3 - 2$

点（3，5）的倍数点 $nP=(x_n, y_n)$[①]

n	x_n	长度
1	3	
	1	1
2	129	
	100	3
3	164323	
	29241	6
4	2340922881	
	58675600	10
5	307326105747363	
	160280942564521	15
6	794845361623184880769	
	513127310073606144900	21
7	49680317504529227786118937923	
	34585191047026166790447194441	29
8	30037088724630450803382035538503505921	
	30106839828987630717868429937799118400	38
9	182386897568483763089689099250940650872600619203	
	127572396335305049740547038646345741798859364401	48
10	29167882803130958433397234917019400842240735627664950533249	
	13329936285363921819106507497681304319732363816626483202500	59
11	82417266114155280418772719003794470451177252076388075511412015463008803	
	918020566047336292639939825980373481958168604589649639535939426806601	71

为了节省地方，y_n 的值被省略了。这可以用公式

$$-y_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_3 - x_1) + y_1$$

① 1后的两个数上面的表 x_1 的分子，下面的表 x_1 的分母，其余类推。——译者注

来算出。

观察一下表中 x_n 的分母，你会发现，这些分数的分母非常规则地增长。实际上，它们增长方式的研究，正是丢番图方程理论中的基本问题之一，是在圆的方程之后，我已经讲了的最简单的例子。问题是找出这类方程的所有的解，整数的或有理数的。但是，这极为困难。至今，还不知道有一个方法可以求出所有的解。对特别的方程 $y^2 = x^3 - 2$，我们凭观察写下了第一个解。但若我另外给你一个这种类型的方程，我们并没有一个有效的、系统的方法帮你求出第一个解来。这是数学家们面对的一大难题：用一个有效的方法求出第一个解。但是，假若我给了你第一个解，那你就可以用公式求出其他的解。

两种情况会随之发生。首先是类似于 $2P = O$ 的情形，但有可能用 $3P = O$，$4P = O$，$5P = O$ 等等来代替 $2P = O$。一般而言，若 P 是曲线上一个点，对某个正整数 n，它满足

$$nP = O,$$

那我们说 P 是一个有限阶点，或者，一个 n 阶点。一个问题就是是否存在很多有限阶点。现代数学的一个重要发现就是美泽（Mazur）在 4 年前发现的事实，若 P 是 n 阶有理点，那 n 不超过 10 或 $n = 12$。此外，至多有 16 个有限阶有理点。①

第二种情况是，当你求 $2P$，$3P$，$4P$，…时，你每次都得出一个新的点，就像一分钟以前看到的那张表一样，你可以看到这些点的数位很规则地增长。

在剩下的几分钟里，我要告诉你们，关于这些方程及其解的一些定理和猜测。

在 1922 年，莫德尔（见文献［Mo］）证明了庞卡莱（Poincaré 见文献［Poi］）的一个猜测，这个猜测说总可以找到有限多个有理点

---

① 墨泽的方法是现代数学中最先进的，用到了代数几何和模曲线理论。

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_r$$

使得曲线上所有的有理点都可以写成这些点的和；这意思是说存在整数 n_1，n_2，…，n_r，它们依赖于 P，使得 P 可以写成和式

$$P = n_1P_1 + n_2P_2 + \cdots + n_rP_r.$$

当然，这里的加法，是我刚才定义过的曲线上的加法。

［有人举手。］

塞吉·兰： 什么？

一高中学生： 什么是“r”？

塞吉·兰： 问得好！在点 P_1，…，P_r 之间有可能有一些关系。例如，其中一些可能是有限阶的。我们可以这样来选取 P_1，…，P_r 使得每个有理点可以表为

$$P = n_1P_1 + \cdots + n_rP_r + Q,$$

其中系数 n_1，…，n_r 由 P 惟一确定，而 Q 是有限阶点。这意味着，在 P_1，…，P_r 之间没有关系。如此选择 r，则 r 是没有关系的点的最大可能个数。从庞卡莱以来，r 就被称为曲线的秩。问题就在于决定秩 r 并求出点 P_1，…，P_r。

一般说来，没有人知道怎样做。在一些特定情况下，有办法给这个问题一个答案。这里有一张卡塞尔什（Cassels）对曲线 $y^2 = x^3 - D$ 作出的表，其中 D 是从 -50 到 $+50$ 的整数。对这些情形，秩是 0，1，2。卡塞尔什给出了点 P_1，P_2（见文献［Ca］）。［表见附录］

对一般情形，有一些非常深刻的猜测；其中之一应归功于两位英国数学家贝奇（Birch）和斯温勒腾－代尔（Swinnerton－Dyer）(见文献［B－SD］)；它把秩表示成与方程相关的另一个非常复杂的东西，这里，我不可能再深入下去了。但是，你可以看出，我们知道得甚少。因为，没有人知道一个秩非常大的例子，甚至没有人知道一个秩大于 10 的例子（我想，也许应改为 12)。然而，数学家猜

测存在秩任意大的情况。任何人都可以思考这个问题：求一曲线

$$y^2=x^3+D,$$

其中 D 是整数，其秩大于 15 或 20 或 100，或任意大。我们相信这样的曲线存在，但求出它却是一巨大挑战。

最近，哥德费尔德（Goldfeld）从另一角度提出问题（见文献[Go]）。他考察曲线

$$Dy^2=x^3+ax+b,$$

其中 a，b 是固定的而 D 可以变。假定 D 是整数，$D=1, 2, 3, 4$，…对这些 D 值，曲线的秩怎样变呢？例如，有多少个小于或等于一个数 X 的整数 D，曲线的秩是 0，也就是说，曲线上最多可能有有限阶点，而没有其他点。有多少个 $D\leq X$，使曲线的秩为 1？又有多少个 $D\leq X$，使曲线的秩为 2？等等。哥德费尔德设想，秩为 0 和 1 的情况，会比较规则地出现；实际上，他指望秩为 0 的情形和秩为 1 的情形，各有密度二分之一。这就是说，大约一半这样的曲线，其秩为 0，还有大约一半，其秩为 1，当然这有依赖于曲线的另一些更复杂的不变量的波动。只有相对较少的一些 D 值，其秩大于 1。

一个基本的课题是，对上面的问题给出一个定量的回答。当然，对像曲线

$$y^2=x^3+D,$$

其中 D 是变量，也可以有同样的问题，更一般地，对曲线族 $y^2=x^3+ax+b$，其中 a，b 是变量，也可以有同样的问题：对哪些 a，b 的值，其秩为 0，1，2，3，4 或者其他某个整数。因为我们甚至不知道是否存在这样的曲线，其秩大于 10，我们离问题的答案还很远，有的只是一些猜测。

啊……一大堆代数。我希望不至于太多了。我只想试一试，看能不能把数学家们提出的问题，讲得让你们都能理解。但我已经讲了一个小时，该打住了。现在，我们看看，你们对以上所讲有些什么想法，另外，还有没有什么问题。

问题

某人：您讲的这些东西有什么用处？

塞吉·兰：我去年就回答了这个问题：它让某些人感到刺激，其中包括我①。我不知道其他用处，也不关心它②，但我只是说我自己。就像冯·诺伊曼所说，一个人不知道，别人是否会给它找到用途。我只是想告诉你们，这是一类鼓舞人们，也鼓舞我的问题。

一高中生：这有些像物理学和电子学中的研究者，他们做实验但不知道会发现什么。例如，像发现青霉素一样。

塞吉·兰：没有万灵的答案，但你的评论在很大程度上是对的。

一男士：有一个问题我很感兴趣：就是空间的超维数。我听说罗巴切夫斯基（Lobatchevski）发现了三维空间。你相信这是极限呢，还是还有更高维的？

塞吉·兰：我不懂你所说的超维数的意思。

男士：你不懂超维数的意思？你是否相信空间只有三维？

塞吉·兰：如果你这样提出问题，［笑。］那我至少可以给你分析这个问题，如果不是答案的话。你问我："你是否相信空间只有三维？"你的空间一词是什么意思？如果你的空间是指"那个"［塞吉·兰手指房间］，那由定义知道它只有三维。如果你想看到更高维，你就得接受给"维数"一个更一般的含义，那其实是很久以前人们就接受的含义。每次你可以把一个数同一个概念联系起来，你得到一

① 更不消说丢番图。
② 它已经在编码理论中得到应用。——译者注

个维数，不管你从哪种概念出发：物理的、力学的、经济的或其他的什么。力学上，除去三个表空间的维数外，你还可以有速度、加速度、曲率等等。经济学上，比如，可以取商业上的大公司、石油公司、食糖公司，也可以有钢铁公司、农业公司等等，还可以加上它们在去年的毛利润。对每个公司你得到一个数，因此得到一维；除此之外，当然，去年，1981 年，这个数字 1981 就与时间相关。这样，你可以得到成百维。

顺便一提，如果你查一下狄得罗（Diderot）的百科全书，在“维数”这一条目中，你会看到达伦倍特（d'Alembert）写的评论，下面就是他的话：

> 用这种方式去考查多于三维的量，就像别的任何事一样正确；因为代数上，字母可以表示数，有理数或无理数。我上面说到，不可能相信有高于三维的空间。一位聪明的男士朋友相信，可以把时间看作第四维，时空在一起可以成为某种意义下的四维空间。这种想法可能被置疑，但是，对我来说，它似乎有某些好处，它是一种新观念。（见文献[*Did*]）。

自然，他的那位朋友，其实就是他自己，不过他很小心罢了。他懂得，维数概念不一定限于现实空间，你可以把它与任何情况相联系，只有你有一个变数。时间只是一个例子。

前面讨论的曲线的秩是另一个例子。我们可以说，如果曲线的秩为 r，那么，有理点形成一个 r 维空间。

某人： 用计算机求解，在你的理论中对你有帮助吗？也许不是所有解，而是一些解。

塞吉·兰： 肯定是的。贝奇和斯温勒腾－代尔猜测之提出，就是基于计算机上的实验数据、直观感觉以及理论的结果。历史上，一

个点的倍数点的数位长度的增长率，就是由计算机发现的。说得确切些，如果你有曲线上的一个点 $P=(x,y)$，把 x 写成$\frac{c}{d}$，c 是分子，而 d 是分母。写出

$$nP=(x_n,y_n),\ x_n=\frac{c_n}{d_n}.$$

问 c_n 增长得有多快？勒容（Néron）的一个定理说，c_n 的长度大体如n^2一般增长。在 P 的倍数点的表中，你可看出，当 $n\leq 11$ 时这种增长的情况。要把“大体”一词说得更准确一点的话，就需要更精确的数学语言，我可以说它是一个二次函数，但可相差一个有界函数。但在这里，我不想再深入下去了。我们可以写出长度的一个更精确的公式，但那要困难得多①。这里我只是说长度“大体”怎样变。

某人：你讲的点的加法与奇异引力问题有某种关系吗？

塞吉·兰：什么地方的奇异引力，物理上的？

某人：是的，多体问题，它给出某种类型的曲线。

塞吉·兰：你是物理学家吗？

某人：是的。

塞吉·兰：我不懂你的物理，而你不懂我的椭圆曲线。也许我们该互相了解一下了。我不知道如何回答你的问题，我不太懂物理。但那是可能的。［转向听众。］你们看到了吧，刚才发生了什么事？我写下的一些公式，触动了这位先生的心弦。这些公式，向物理学家建议了某种东西，这就是思想的自由交融，这就是人们做研究的方法。两件事情可能发生。要不，什么事也没有，要不，这位男士

---

① 设我们把 x 写成一个分数，$x=c/d$，c 是分子，而 d 是分母。定义点的高度为

$$h(p)=h(x(p))=\log|c|,\log|d|\text{之大者}$$

勒容定理说$h(nP)=q(P)n^2+O(1)$，其中$q(P)$是一个依赖于 P 的数，而$O(1)$是一个有界项。数 $q(P)$ 称为勒容－忒特（Tate）二次型，因为忒特给出了一个非常简单的证明。数学家对数 $q(P)$ 提出了众多的问题。例如它是不是有理数。人们相信不是，除非 P 是有限阶点。可以在点 P 与点 Q 间定义一个距离，使其平方正好是 $q(P-Q)$。这套理论的基本问题之一就是研究这个距离。

会追随这种想法，它也许会引出某种物理理论和称之为椭圆曲线的三次方程之间的新关联。也许我们明年就知道了。这位物理学家或许会给一个关于这种关联的演讲。这就是科学研究。但现在，我不知道答案。

一男士：你能讲点费马（Fermat）大定理吗？

塞吉·兰：费马猜测？

男士：是的。

塞吉·兰：我们可以把刚才考察的问题加以推广，例如，考察 $x^3+y^3=1$，或更一般地

$$x^n+y^n=1,$$

其中 n 是任意正整数。当3变成4时，会发生什么事？

某人：没有解！

塞吉·兰：先生，你懂得太多了，这是欺骗，请不要插嘴。另外，这里还是有解的：

$$x=1,\ y=0 \quad 或 \quad x=0,\ y=1.$$

[笑声。] 除了 $x=0$ 或 $y=0$ 外还有其他解吗？谁说"有"？谁说"没有"？谁不知道答案？[仍有少数人没举手。] 谁认为答案已经知道了？[笑声。] 谁认为还不知道答案？[笑声。]

其实，还不知道答案。对 n 的一大批值，答案是知道的，但不知道一般的答案。这就是费马问题：

方程 $x^n+y^n=1$，其中 n 是大于2的整数是否有 $x\neq0$，$y\neq0$ 的有理数解？

一般的答案是不知道的。人们相信，答案是"没有这种解"。①

一高中学生：人们是否指望某天能知道答案？

另一听众：但是费马说他知道答案。

---

① 在这次演讲后几年，费雷（Frey）把费马问题与椭圆曲线理论联系起来。又经过许多数学家的努力，最终在1994年怀尔斯（Andrew Wiles）证明了费马大定理，即费马方程没有 $x\neq0$，$y\neq0$ 的有理解。其证明除了用到椭圆曲线理论外，还用到许多高深的数学理论。——译者注

塞吉·兰：是的，费马说了①，但人们仍然不知道。至于“人们是否指望某天能知道答案”，这是什么意思？

学生：人们是否指望知道答案？这是可证明的，或者已经知道它是不能证明的？

塞吉·兰：不，实际上它是可证明的。数学家们，啊，小心点，我认识的数学家们——［笑声。］相信它是可证明的。我想，如果你提出一个聪明的数学问题，总有一天可以找到它的答案②。这就是说，只要认真思考这个问题，总有人能找到答案。不可解的问题，也就是，可以证明不能用各种方法去解决的问题，是病态的，我不关心它们。它们在“做数学”时不会出现。你得特意去找它们。

某人：聪明的问题的定义是什么？

塞吉·兰：没有定义。［笑声。］

像这类你会遇到的问题，数学家相信，你可以试着去解决它，而且你可能成功。就是这样。人们甚至没有想过，它们是不可证明的这种可能性。如果你对这种可能想得过多，那你最好去干点别的什么，而不要做这种数学。它会妨碍你思考。

但是请看，也有一些模棱两可的问题，例如所谓连续统假定。它是我现在能想到的惟一的反例。

问：什么是连续统假定？

听众：康托……

塞吉·兰：好，让我们稍微谈一点连续统假定。去年，有一位听众对实数是否可数感到很刺激。取所有的实数，就是在数直线上所有的数，或者换句话说，所有无限十进制数，就像

$$212.35420967185\cdots$$

---

① 更确切地说，费马在丢番图的文集上写了很多评注。在丢番图写到毕达哥拉斯方程 $a^2+b^2=c^2$ 的解的地方，费马写道：对更高次的方程，没有非平凡的解，他有一个奇妙的证明，但这里地方太小，他不能写下这个证明。

② 我的用词“聪明”显然是荒唐的，这个句子也有缺陷，它没有适当地考虑到各人研究课题是怎样选取的。

你另外还有正整数 1，2，3，4，…称一个集合可数，是说你可以给这个集合中的元素列一个表，有第一个、第二个、第三个等等，你可以列出这个集合中所有的元素，一个也不落下。一位听众去年要我证明实数是不可数的，我也给了证明。

数学家们，或康托，提出这样的问题。在可数集合（即可以像整数一样一个一个地去数的集合）和实数集合之间，是否有其他的数的集合，其基数介于它们之间，即是说，这个中间集合是不可数的，它的元素比可数集合的元素多，但又比实数集合的元素少？“少”的意思是什么？它的意思是，你不可能在这个集合的元素与实数集合的元素之间，建立起一个一一对应来。连续统假定就是说，没有这样的集合存在，它不可数，但它的元素比实数集合的元素少。考察我们记实数的方法，是用无限十进制数，它们看起来很像有理数（有理数是可数的）。看起来，没有中间基数的集合的想法是合理的。

某人：也许有人试图在找答案。

塞吉·兰：当然，那就是为什么我说，这是我前面的说法的一个反例的原因。毫无疑问，这个问题是聪明的。有人已经找到答案，他没有被问题的提法所困惑，他就是柯恩（Paul Cohen）。

问：哪一个世纪的？

塞吉·兰：最近，大约 15 年前。答案是，这个问题没有意义。你既不能证明存在这样的集合，也不能证明不存在这样的集合。答案就是这样，我们现在用的数学体系，对所有的需要，除去这个问题外，是够用的了，如果你再加上一个公理，断言连续统假定是对的，你仍然得到一个相容的体系。而如果你加上一条相反的公理，断言连续统假定不对，你依然可以得到一个相容的体系。

听众：它独立于你已经有的各公理。

塞吉·兰：对了。我的意思是说，这个问题提法就不好。就是说，当你说“集合”的时候，你并不知道你在说什么，模棱两可，

来自集合的直观概念。人们对集合有某种直觉：一个集合就是——一堆东西。[笑声。] 说一堆东西，如果你是说，所有实数，那可以；如果你是说，所有有理数，那也可以；如果你还说，一条曲线上的所有点，那还是可以的；但如果你说，所有集合，说所有的包括实数的集合，那就不可以了，它就不干活了。柯恩的答案的意义就是：我们的集合概念太空泛了，不足以保证，连续统假定有一个正面的或反面的答案。剩下的事就是，许多数学家感到，我们需要一个公理体系，它要在心理上让人满意；同时，又能包含连续统的一个答案，正面的，或反面的都好。数学的这个方面使一些人感兴趣，而我个人不是真正感兴趣。但是，我承认，这是有价值的：一个问题，没人想到它的答案既非"是"也非"否"；而这位伙计说：你们都错了，根本不可能有答案。

高中学生： 费马猜测会不会也是这种类型呢？

塞吉·兰： 你希望我怎样回答？从我的观点来说，我的答案是显而易见的。说它可能是这种类型的人，绝不是我。没门。

除此之外，有这样一个推断……［犹豫。］如果，你成功地证明了费马问题是不可解的，那你事实上证明了费马猜测是对的。因为，如果存在一个反例，那某年某月某日某人，会用一个大型计算机把它找出来。但我不喜欢这种推断，就我而言，我把它视为一种正常状态，某年某人会证明费马大定理，或者证明它是错的。

问题： 那你个人相信它是对的还是错的？

塞吉·兰： ［犹豫。］它是对的，除开 $x=0$ 或 $y=0$ 没有其他解。下面是我的理由。我们先从一个一般的观点来看这种方程的理论。莫德尔有一个一般的假设，我来描述一下。

取一个方程，例如

$$y^3+x^2y^7-312y^{14}+2xy^8-18y^{23}+913xy+3=0.$$

这是所谓的一般的丢番图方程。我们一般地问：这个方程是否有无穷多个有理数解 x，y 呢？我们已经看到两类例子，存在这样的解。

在第一个例子中，我们可以把 x，y 表示成 t 的两个式子，得到 t 的一个恒等式而知道它成立。这就是我们运用公式

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{及} \quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

时发生的事情，后来发现 $x^2+y^2=1$ 是关于 t 的一个恒等式。显然(虽然有人反对)，你会得到无穷多个解。那是一种可能性。

另一种可能性是，可以得到三次方程的解，这时公式是

$$x=R(t,u) \quad \text{及} \quad y=S(t,u).$$

其中 t，u 满足方程 $t^2=u^3+au+b$，它有无穷多组解，而 R，S 是有理系数多项式的商。

第一种可能性称为亏格 0，而第二种可能性称为亏格 1。

莫德尔猜想说的是这样一件事。假设 $f(x,y)=0$ 是一个方程，其中 f 是一个整系数多项式。如果不可能把这个方程用类似于前面的公式化成亏格 0 或亏格 1 的情形，那么，这个方程只有有限多个解。这就是莫德尔猜想。

在一族像费马方程那样的方程中，让 n 变，应该只有很少个数的解。可以证明，对 $n\geq 4$，方程 $x^n+y^n=1$ 不能化为亏格 0 或亏格 1 的曲线。根据莫德尔猜测，费马方程只能有有限多个有理数解 x，y。有人用计算机算了很多，大约直到 $n=1,000,000$，到此为止，除去平凡的 $x=0$ 或 $y=0$ 外，都没有解。如果我们的感觉是对的，那么对更大的 n 应当仍然没有解，因为这一族方程应该比较规则地行事。如 n 比较小时没有解，那么 n 大时也应该没有解。这就是一般的直觉，常用来指引我们研究丢番图方程。好了，这是合理的假设。如果有人证明这是错的，我们随时准备放弃。这就是数学家的工作方法，我们作一些合理的假设，试图去证明某些事。但是，我们随时准备接受这些假设错了的证据，而后我们再重新开始。

[有人举手。] 谈谈计算机，你们用它吗?

塞吉·兰：啊，你说计算机，用了很多次。就是用计算机证明了

直到 n 大约为1,000,000，方程无解。

问：先生，我有一个问题——有一些问题，开始是在一定限制条件下解决的，而后，更好的数学家能够减少这些条件。但第一个证明依然用这些条件，为什么？

塞吉·兰：当你试图解决一个问题时，你先试着解决一些特殊情形，然后试着做更一般的情形。你的头一个想法。也许只对特殊情况有效。或许，更普遍的情况需要其他的想法。谁知道这些新想法什么时候到来？或着它们会跑到一个人那里，而不是另外的一个人那里。有人发表了第一篇文章，而后，另外的一个人基于这些结果和一些新想法，得到了进一步的结果，发表了第二篇文章；如此下去，直至一般的情况得以解决。事情就是这样发展的。这并不意味着，成功地减少了限制条件的数学家，就比别人“更好”。恰恰相反，第一个数学家，可能显示了更多的想像力，可能开辟了整个的新研究领域，而那是以前没有人理解的领域。也许第一个人的贡献，应该比后继者受到更多的赞扬，后继者仅仅是发展了第一个人的计划。

问：让我稍稍改变一下话题。在你的演讲的开头，你提到法国的数学教育——

塞吉·兰：到处如此，全世界都一样。

问：话题是关于眼前利益。你怎么看事情的这个方面？这似乎是一个一般性问题。

塞吉·兰：我怎么看事情吗？我不懂这个问题，它太一般性了。

一高中学生：你认为数学应该怎么教呢，只为它的美妙，而不管它在物理上的应用，还是至少在高中后期，应转向物理、转向应用？

塞吉·兰：你的问题的提法太、太……不共戴天了。一种方法不应排斥另一种方法。显而易见，一个极端的否定，并不是相反的极端。要顺其自然。当然，教数学要讲应用。但不时地，你可以说：

好，让我们来看看 $x^2+y^2=1$，让我们来求它的所有有理解。有些人会喜欢它，而另一些人不喜欢它，但我知道，这种东西会使学生喜欢。我知道这点，是因为我曾经多次给十五六岁的青年讲过这个问题，而他们喜欢，他们觉得有趣。演讲的开头，他们知道一个解，也许有的人知道其他解，也许更多的解，但没人知道得更多。而5分钟以后，我们成功地给出了无穷多个解！听着，你若没有积极反应那实在是麻木不仁。[笑声。] 好吧，这不是说你不能搞应用。

问：你在耶鲁大学时，你是这样教学的吗？

塞吉·兰：这样？像在这里一样？是的，当然，就像这样。[塞吉·兰指向某人。笑。] 自然地！你希望我用别的什么方法呢？今天，有些人听不懂，我挑选一个话题……我想看看，与你们一起做数学时能走多远。话题有些深。因为我需要代数公式，用它们面对周末演讲会听众，有些危险。[笑。] 不要认为我没有意识到困难。[提到写出第一个公式时有6个人退场。] 我就想看看结果如何，这还不太坏。

听众：不坏，不坏。

塞吉·兰：例如说，他，他 [指向这些人]，还有坐在那里的物理学家。显然，他们体会到了一些东西，各自不同的东西。即使只有这三个人，那也值，何况还有其他许多人。即使你没听懂一些公式，你仍然坐在这里，没人强迫你①。

问：是否有希望解决尚未解决的那些数学上的大问题？

塞吉·兰：那正是数学家正在做的研究。他们希望能解决至今未解决的问题。如果他们不这样希望，那按定义，他们就不能算是做研究的数学家。

问：但你们也发现问题吗？

塞吉·兰：是的，当然。发现问题而为之工作，为之集中精力去

---

① 演讲开头有约200人，几乎客满。问题讨论期间，约有一半人留下。

干，至少也与解决问题一样重要。做数学也包含发现问题，提出猜测。例如，在哥德费尔德的工作之后，我提出了一个问题，找出曲线族

$$y^2 = x^3 + D$$

的秩的渐近性状。例如当 D 变化时，对一个给定的大于 1 的秩来说，它的密度应该是 0；但是，它也许还有某些渐近性状，如下界，这是一个比简单地找出任意大的秩的曲线更强的问题。

问：也许在数学教学中，至少是开始阶段，过多地强调了解决问题，而没有向学生展示怎样提出问题。这就是为什么我想回到你刚才所说到的话题的原因。有些人提出，在应用数学中搞模式化或者类似的东西。很有意义的是，联系一些简单问题而提出更多的问题，然后再去解决它们。或许，这方面正是数学教育的缺陷。

塞吉·兰：不是某一点上有缺陷，总是有很多缺陷。如果你给我教科书，我会告诉你其中具体的缺陷。我不能给出一般的评论，我喜欢说具体的例子。我可以指出书中我认为是缺点的东西。许多缺点与教师有关，与班级有关，与内部或外部的环境有关。无论我说了什么，我都不是指有单一的原因、单一的条件引起这些缺点。

问：把这些缺点罗列出来也许有益。

塞吉·兰：也许，但那以后呢……听着，我把去年的演讲写下来了，就在这里。这是我说过的，说到做到。今年我还会这样做，这次演讲也要发表。你可以看到，我如何表述自己，我怎样做数学，这是严肃的事。但不是说，别人也要按我的做法去做。不同的人可以有不同的做法。总之，做你爱做的事。我的观点从来是不排他的。我只说我自己，不喜欢推广。

一高中学生：我是一位高中学生，我反对数学教学中的某些东西。

塞吉·兰：几年级？

学生：十一年级。打从很小开始，我面对各种证明，但是，用

你的与音乐相类比的话来讲，我看不出它们的美妙。学校里的做法毫无味道。当一个人搞音乐时，他进入音乐的美妙，而不只是节奏，或音乐理论……

塞吉·兰：总之，美妙的证明不在课程表上。有大量的美妙的证明，常常被略去了。管他的，你是否喜欢我今天讲的，这些结构，丢番图方程？

学生：是的。

塞吉·兰：你会用计算机吗？

学生：是的。

塞吉·兰：在哪里，这里吗？

学生：不，是在学校里，在郊区。但如果你愿意，我想那里的人们也愿意听听你今天的讲演。但是，他们也许看不出其中的美妙，不是人人都能看出来的。

塞吉·兰：当然，在一种审美环境中，一些人立即感觉到美，一些人迟一点感觉到美，也有些人根本不觉得美。这是审美环境中的典型状况。我并不求每个人都认为，我今天所讲的是美妙的。而且，我们今天的公式

$$x_3 = -x_2 - x_1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2$$

稍复杂了一点，但它能给出方程的无穷多个解这一点，我觉得很诱人。我不知道你怎么想，但你提出这么多问题，说明你的反应是积极的。

物理学家：在法国学校中，看起来，负担沉重和缺乏理解的主要原因，是在整个教学大纲背后，总是试图讲明逻辑结构，甚至对很小的孩子也这样做，这是完全不容争议的。无论在物理上或数学上，从不允许教师不给出清楚的证明就断言某件事。

塞吉·兰：我完全同意你的估计，我与你一样感到痛心。教科书真是变得某种程度上的枯燥无味和卖弄学问。我说不出别的。

一大学生：我是一个学生。我看到了这些问题，但我没有时间去处理它们。如果我们要去做这些，那么，到了40岁我们还会是初学者。

塞吉·兰：但是没人让你全年都去做。当你走进音乐会，没人要你全部时间搞音乐直到40岁。

学生：数学课上，我们见到一些有趣的问题，但如果深入进去，就会花去一个又一个小时。但是，我们又有许多其他事要做。课程也太重，不允许我们对这类事情感兴趣。

塞吉·兰：那与水平有关。我想课程表中充满了废物，扔掉这些废物没人会觉得可惜。[笑。]

学生：你能告诉我哪些是废物吗？

塞吉·兰：把书给我拿来我就告诉你。你可以发现越来越多练习仅是技术性的，它没有教给任何人任何东西[①]。

[上段对话是从一长段泛泛的讨论中摘出——太宽泛了，主要是关于教育。现在，转向我对最后一个问题的回答。]

我终生沉缅于数学。就像这次一样，我也不时地和你们一起做数学。我宁愿做这件事，而不愿泛泛而谈。我宁愿来这里作这种演讲，让你们看到，我怎样教学，用手指着你，让你问问题……如果这样做行的话，那也不失为一种行事方法。也许，这样一来，你会发现你自己的灵感，也会想和别人试比高低。我的办法就是这样，而不是训诫式地高谈阔论。我不喜欢广泛性。这不是说我不作推广，有时也作，但我并不喜欢。

今天，我取得了某种成功，例如[指那位高中生]你叫什么名字？

学生：吉列斯。

① 这里我误解了。我在说初中和高中，到大学生的程度，情况有些不同，而且很复杂。我对他所说的很同情，但现在不是讨论大学程度的教育的互相矛盾的各种要求的时候。

塞吉·兰： 吉列斯是问了数学问题的人之一。别的人躲在教学法问题后面。我喜欢吉列斯的问题。

另一中学生： [叫昂图望，他去年也参加了。] 你讲了公式

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad 和 \quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

这公式给出方程 $x^2+y^2=1$ 的，除去 $x=-1$，$y=0$ 外的所有解。现在，你可以给我们证一下吗？

塞吉·兰： 是的，当然，我早就盼望有谁问这个问题了。证明很容易。设 (x, y) 是一个有理解。令

$$t=\frac{y}{x+1};$$

不要问我它从哪里来的，稍有才干你就能自己把它求出来。①

现在我们有

$$t(x+1)=y,$$

平方起来得到

$$t^2(x+1)^2=y^2=1-x^2=(1+x)(1-x).$$

约去 $x+1$ 得到

$$t^2(x+1)=1-x.$$

因此 $t^2x+t^2=1-x$，即

$$x(1+t^2)=1-t^2.$$

除以 $(1+t^2)$ 得出公式

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

再写一行就可得出 y 的相应公式。

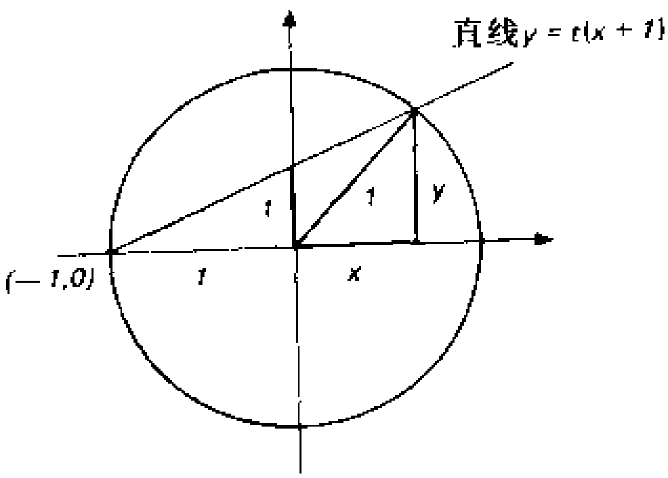
利用17世纪就有了的坐标法，及用曲线来表示方程的思想，可

① 拉肖德（G. Lachaud）告知我，丢番图，以及古希腊人，并未考虑公式是否给出所有解的问题。他告诉我这个结果归于10到11世纪的阿拉伯人（见文献［La-Ra］）。证明这个结果所需的代数程度大体与丢番图用的代数相当，我们事后来看，一旦问题提出，解决问题就容易了。

以给出以上讨论的一个几何解释。就是说 $y=t(x+1)$ 是一根直线的方程，这根直线通过点 $x=-1$，$y=0$，而其斜率为 t。这根直线和以原点为圆心，半径为1的圆相交于点 (x, y)，其中

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},$$

这正是我们所要证明的。



我还想对整数解与有理解的关系说几句话。我们已经看到，像

$$y^2=x^3+ax+b$$

这样的方程可以有无穷多个有理点，正如对某个有理点 P 作出其倍数点 nP 所得出的。例如在例子

$$y^2=x^3-2$$

中，我们从点 $P=(3, 5)$ 出发而得到。可以证明这些点是曲线上仅有的整点。进而，有一个非常普遍的定理叫泽格尔（Siegel）定理，它说，曲线 $y^2=x^3+ax+b$ 上的整点的个数总是有限的（见文献 [Sie]）。

当 a，b 皆为整数时，任何有限阶点 (x, y) 必定是整点，也就是说 x，y 是整数，这是努茨－纳盖尔（Lutz－Nagell）的定理断言的。当然，反过来不一定对，例如 $x=3$，$y=5$ 的例子中，这个点不是有限阶点。

顺便提一下，让我给你一个关于有限阶点的练习。我们回到曲线 $y^2=x^3+1$，已找出它的整点

$$x=0,\ y=\pm 1;\quad x=2,\ y=\pm 3;\quad x=-1,\ y=0.$$

我说过，没有其他有理点了。由此推知，你取上述点中任何一个，例如 $P=(2,3)$，那它的某个倍数点 nP，一定是 O。所以，我要你们去计算出 $2P$，$3P$，$4P$，$5P$ 这可以很容易地用加法公式算出，也可以在图上画出。你会很容易地得出其他整点，而且看到

$$5P=-P.$$

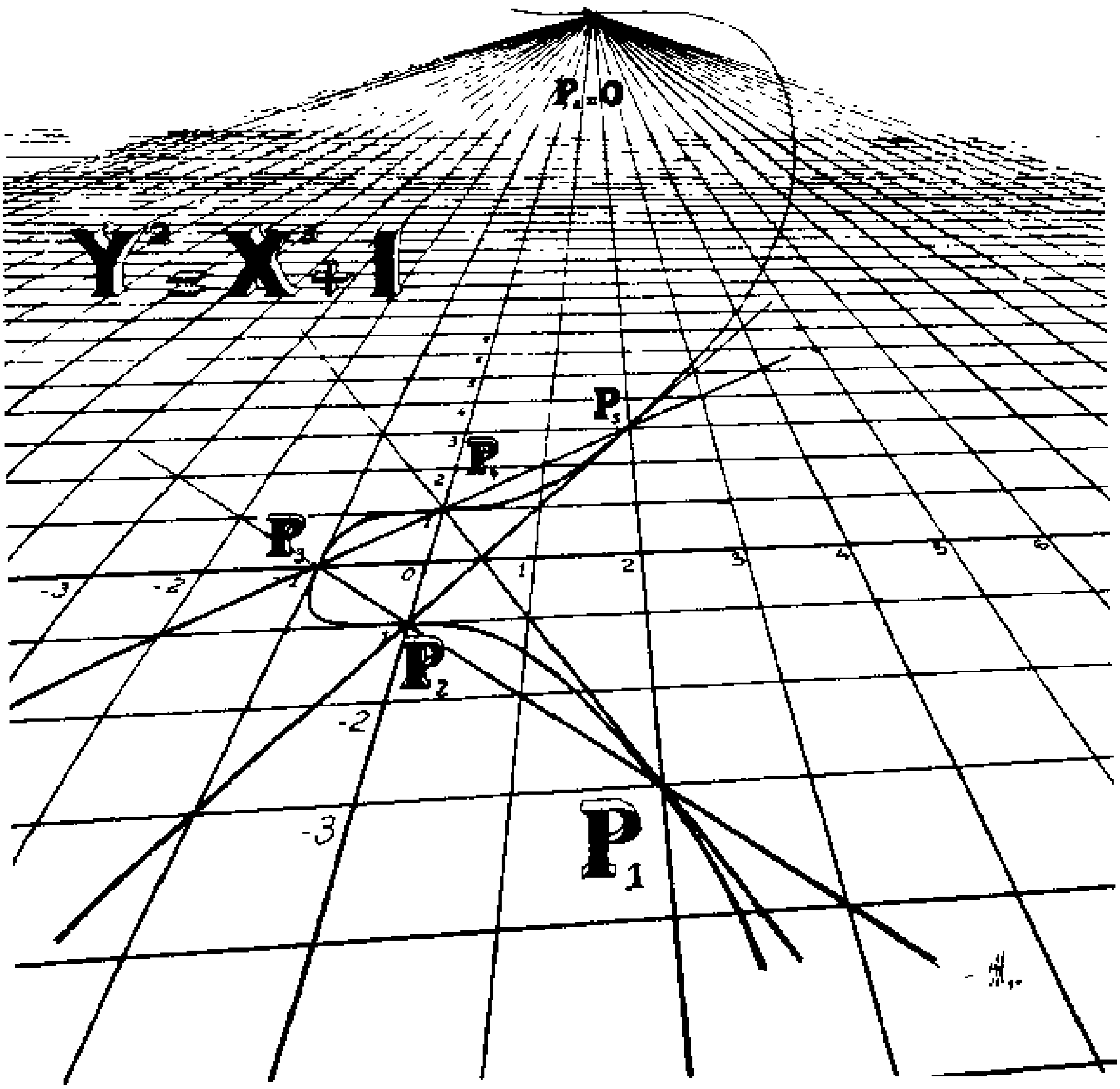
因此 $6P=5P+P=0$，即点 P 是 6 阶点。[①]

布雷特先生：［两天后问的一个问题。］你说过有理点的阶最多是 12。但如果考察所有实数点，是否有任意高阶的点？

塞吉·兰：是的，而且可以把它们描述得相当精确。首先，为简单起见，设这曲线没有卵形线。这时对任何整数 $n\geq 2$，一定存在一个点 P，其阶正好为 n（即 P 不是更低阶的点），而且每个 n 阶点，都是 P 点的一个倍数点。如果有卵形线，情况差不多一样，但是，有可能相差一个二阶点。

---

① 感谢布雷特先生，他画了一张非常清晰的图（见下页）。图中清楚标出了无穷阶点和有限阶点。注意，P_1 是 6 阶点，P_2 是 3 阶点，P_3 是 2 阶点。


$Y^2=X^3+1$
$P_0=O$
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5

1982 年 8 月补注

演讲之后，我继续考虑了如何确定有理点和整点的问题，试图得到更紧凑的猜测。泽格尔的证明不能给出整点的上界（指用方程

$$y^2=x^3+ax+b$$

的系数表示的上界）。现在设 a，b 是整数。

在特殊情况 $y^2=x^3+b$ 时，贝克（Baker，参见文献［Ba］）给出了有效的上界，虽然这远不是可以指望的最佳可能上界。例如，霍尔（Marshall Hall）猜测当 b 是整数时，x 的绝对值的上界是 b^2 乘一个与 P 无关的常数①。我想，也许人们对一般情况也可以指望一个类似的界。一件很有意思的事是，证明存在一个常数 k，使得对任何整点（x，y），整数 x 的绝对值不超过一个常数乘以 a^3 与 b^2 的绝对值中大者的 k 次方。可以写成如下形式

$$|x|\leq C\max(|a|^3,|b|^2)^k.$$

找出这样的界，将是对这类曲线的研究的重大进展。

另一有趣的问题是，求一些无限阶元的界。更准确地说，设 $P=(x, y)$ 是一个有理点，如我们已经做过的，令 $x=c/d$。定义 P 的高度

$$h(P)=\log\max(|c|,|d|).$$

对贝奇－斯温勒腾－代尔猜测的研究，使我得出如下的猜测。对非数论专家来说，这个猜测也容易理解。

---

① 一个数的绝对值是它的数值而永远取正号。例如 3 的绝对值是 3，－3 的绝对值也是 3。而 x 的绝对值记作 $|x|$。

存在点 P_1，…，P_r，它们的顺序，是按高度的增加来排列的，就像我们早先考察过的，它们满足关系

$$h(P_r) \leq C^{r^2} \max(|a|^3, |b|^2)^{1/12+\epsilon},$$

其中 C 是某一常数，而当 $\max(|a|^3, |b|^2)$ 无限增大时，ϵ 会接近于 0（见 [La2]）。

存在这样的界，可以使得求出所有有理点的有效方法成为可能，因为，它们都可以从点 P_1，…，P_r 及有限阶点出发，经过加法及减法而求出。

注意，从一些表中，例如卡塞尔斯或塞尔墨（Selmer）造的表（参看 [Se]），似乎可以看出，有一个更好的界存在。如果我们令

$$H(P) = |c| \text{ 及 } |d| \text{之大者},$$

那么，大体上有不等式

$$H(P) \leq \max(|a|^3, |b|^2)^k,$$

其中 $k = 1$，2 或 3。

让我给你一个具体的数字例子，它取自塞尔墨的表。他考虑的是方程（有点像费马方程）

$$X^3 + Y^3 = DZ^3$$

布雷特先生使用计算机把表中最大的解化回我们考察过的方程的形式，即

$$y^3 = x^3 + 2^4 3^3 D^2,$$

也就是 $b = 2^4 3^3 D^2$.

取 $D = 382$。于是我们有一个解 $x = u/z$，其中

$$u = 96,793,912,150,542,047,971,667,215,388,941,033$$

$$z = 195,583,944,227,823,667,629,245,665,478,169.$$

读者可以把这个解与 b^2 比较一下。你可看出 $u \leq b^6$，所以 $k = 3$ 就行了。一件有趣的事是，我们对这种多项式界作统计分析，而不使用先前猜测的对数界。

附录

下面看一张卡塞尔斯的表（参看［Ca］)。先说一下表的内容和如何读它。

给了一条曲线

$$y^2 = x^3 - D, \quad -50 \leq D \leq 50,$$

我们想求曲线上的有理点 P_1，…，P_r，使得曲线上的任一有理点 P 皆可找出由 P 惟一确定的整数 n_1，…，n_r 使

$$P = n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r + Q,$$

其中 Q 是有限阶点。因此，r 就是秩。

我们碰到的情形是，$r=0$，1，或 2。例如，设

$$P_1 = (x, y).$$

我们不愿意在表中使用有理数，而宁愿用整数。所以把有理数 x，y 写成分数的形式：

$$x = u/t^2, \quad y = v/t^3,$$

其中 u，v，t 都是整数。曲线的方程可以改写成

$$v^2 = u^3 - Dt^6.$$

“无”表示秩为 0，因而，所有有理点都是有限阶点。

第一列给出 P_1，当然要它存在。

第二列给出 P_2，当然也要除 P_1 外还存在这个点 P_2。

表 1

$$v^2 = u^3 - Dt^6$$

D	P_1 u	P_1 v	P_1 t	P_2 u	P_2 v	P_2 t
1		无				
2	3	5	1			
3		无				
4	2	2	1			
5		无				
6		无				
7	2	1	1			
8		无				
9		无				
10		无				
11	3	4	1	15	58	1
12		无				
13	17	70	1			
14		无				
15	4	7	1			
16		无				
17		无				
18	3	3	1			
19	7	18	1			
20	6	14	1			
21	37	188	3			
22	71	119	5			
23	3	2	1			
24		无				
25	5	10	1			

续表

D	P_1			P_2		
	u	v	t	u	v	t
26	3	1	1	35	207	1
27		无				
28	4	6	1			
29	3,133	175,364	3			
30	31	89	3			
31		无				
32		无				
33		无				
34		无				
35	11	36	1			
36		无				
37		无				
38	4,447	291,005	21			
39	4	5	1	10	31	1
40	14	52	1			
41		无				
42		无				
43	1,177	40,355	6			
44	5	9	1			
45	21	96	1			
46		无				
47	12	41	1	63	500	1
48	4	4	1			
49	65	524	1			
50	211	3059	3			

续表

D	P_1			P_2		
	u	v	t	u	v	t
−1		无				
−2	−1	1	1			
−3	1	2	1			
−4		无				
−5	−1	2	1			
−6		无				
−7		无				
−8	2	4	1			
−9	−2	1	1			
−10	−1	3	1			
−11	7	19	2			
−12	−2	2	1			
−13		无				
−14		无				
−15	1	4	1	109	1,138	1
−16		无				
−17	−1	4	1	−2	3	1
−18	7	19	1			
−19	5	12	1			
−20		无				
−21		无				
−22	3	7	1			
−23		无				
−24	−2	4	1	1	5	1
−25		无				

续表

D	P_1			P_2		
	u	v	t	u	v	t
26	-1	5	1			
-27		无				
-28	2	6	1			
-29		无				
-30	19	83	1			
-31	-3	2	1			
-32		无				
-33	-2	5	1			
-34		无				
-35	1	6	1			
-36	-3	3	1			
-37	-1	6	1	3	8	1
-38	11	37	1			
-39	217	3,107	2			
-40	6	16	1			
-41	2	7	1			
-42		无				
-43	-3	4	1	57	2,290	7
-44	-2	6	1			
-45		无				
-46	-7	51	2			
-47	17	89	2			
-48	1	7	1			
-49		无				
-50	-1	7	1			

参考文献

[Ba] A. BAKER, "Contributions to the theory of Diophantine equations Ⅱ: The Diophantine equation $y^2 = x^3 + k$", *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A 263** (1968), pp. 173–208.

[B–SD] B. J. BIRCH and P. SWINNERTON–DYER, "Notes on elliptic curves I." *J. Reine Angew. Math.* **212** (1963), pp. 7–25.

[Ca] J. W. CASSELS, "The rational solutions of the diophantine equation $y^2 = x^3 - D$," *Acta Math.* **82** (1950), pp. 243–273.

[Did] DIDEROT, article "Dimension", *Encyclopédie* Vol. 4 (1754), p. 1010.

[Di] DIOPHANTE D'ALEXANDRIE, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Paul ver Eecke, Albert Blanchard, Paris, 1959.

[Go] D. GOLDFELD, "Conjectures on elliptic curves over quadratic fields", à paraître.

[Ha] M. HALL, "The diophantine equation $x^3 - y^2 = k$," *Computers and Number Theory*, Academic Press, 1971, pp. 173–198.

[La–Ra] G. LACHAUD and R. RASHED, Une lecture de la version arabe des "Arithmétiques" de Diophante;

cf. les *Oeuvres de Diophante*, Collection Guillaume Budé, Les Belles Lettres, Paris, 1984.

[La 1] S. LANG, *Elliptic Curves: Diophantine analysis*, Springer-Verlag, 1978.

[La 2] S. LANG, "Conjectured diophantine estimates on elliptic curves," in a volume dedicated to Shafarevich, Birkäuser, Boston - Basel, 1983.

[Ma] B. MAZUR, "Modular curves and the Eisenstein ideal," *Pub. Math. IHES*, 1978.

[Mo] L. J. MORDELL, "On the rationnal solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees," *Proc. Camb. Phil. Soc.* **21** (1922) pp. 179-192.

[Ne] A. NERON, "Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes," *Ann. of Math.* **82**, No. 2 (1965), pp. 249-331.

[Poi] H. POINCARÉ, "Arithmétique des courbes algébriques," J. De Liouville, 5^{e} série, t. Ⅶ, fasc. Ⅲ (1901), pp. 161 - 233, Oeuvres complétes, t. V, Gauthier-Villars, 1950.

[Pod] V. D. POSDIPANIN, "On the indeterminate equation $x^3 = y^2 + Az^6$," *Math Sbornik*, **XXIV** (66), No. 3 (1949), pp. 392-403.

[Si] C. L. SIEGEL, "The integer solutions of the equation $y^2 = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k$," *J. London Math. Soc.* **1** (1926), pp. 66-68 (under the pseudonym X).

[Tu] J. B. TUNNELL, "A classical diophantine problem and modular forms of weight 3/2." *Invent. Math.* (1983) pp. 323-334.

[vN] J. von NEUMANN, "The role of mathematics in the sciences and in society," address to Princeton Graduate Alumni, *Complete works*, vol. Ⅵ, pp. 477-490.

几何与空间的一些重大问题

1983年5月28日

摘要:做数学是要提出重大数学问题然后解决它们,或迟或早去解决它们。这次我们来讨论几何与空间的问题,我们要对二维和三维的几何对象进行分类。二维情况是经典的;它是曲面的分类,是在球面上加一些把手而得。也可以用庞卡莱-罗巴切夫斯基的上半平面来描述曲面。在高维情况下,会发生什么事?在维数大于或等于5时,斯墨尔(Smale)在1960年取得了决定性的成果。去年塞斯顿(Thurston)发表了关于三维情况的重大成果。他猜测了从简单模式出发造出这些对象的方法以及如何用上半平面的三维类比来得出它们。他证明了他自己的猜测中的很大一部分。我们来介绍塞斯顿的观点。

第一部分:橡皮几何

曲线,曲面,等价,章鱼,几何对象的和。

第二部分:距离几何

欧几里得几何,非欧几何,距离,运动,平移,旋转,对称,同一。

这两部分之间以及它们与塞斯顿猜测的联系。

真不简单，在五月的周末能看到230人去参加一个数学演讲会。他们不光是听，还得参与，经过短暂思考而回答问题，而且能得到乐趣。可以肯定，演讲人的热情，充沛的精力，对他所讲解的话题及其中思想的关注，使听众难以无动于衷。另一方面，此中乐趣显然也被我本人和塞吉·兰所分享。人们从他身上看到一位好教员应该具备的天分；从听众的积极反应中看出满意之情，从听众（特别是一些高中学生）的提问中看出他们的关注。在他的头两次演讲取得成功之后，你可以理解我欲邀请他再作一次演讲的愿望。他经过犹豫，还是接受了我的邀请。因为他说，很难再选一个可以让广大听众理解的、真正的数学课题，而两周后，他从德国打电话给我，说他已经找到一个可以讲的几何上的题目，但他还要去学这个课题。我问他："从哪本书上学？"他回答："不知道怎么读……或者说我虽知道怎么读，却不想去读。在一本书上，不是所有材料都一样重要。但你不把书读完，就不知道哪些东西重要。请一位朋友给我讲讲这些材料会使我学得快得多。这样更生动，而且我可以提问题。"

这一年中，我收到他的演讲的几个版本，这体现了他对清晰和简洁的关注。不用我说，这些版本比之下面的从三个多小时的马拉松演讲的录音上忠实记录下来的正文来，只是简短的提纲。

布雷特

演讲

头一小时

这是我第三次来这里，巴黎科学博物馆，和你们一起做数学。第一次是布雷特先生邀请了我，效果不错，所以我又来了。

我发现在座有不少人上次也来过，有多少人去年也来过？

[约 50 人举手。]

很好。我看到安图望坐在那里，他已经来过两次了，他是很忠实的听众。去年来过的听众可能记得，演讲会开始前我在布雷特的办公室翻了翻一些高中课本，看了这些令人作呕的课本我很不舒服，过了20 分钟才稍好一点。不知道你们是否注意到，今天的演讲会前，你们听到了一首诗琴曲的录音，那是我最喜欢的乐曲。布雷特放这些音乐可以使我平静下来。[笑声。]

两年前，我们讨论了素数的某些性质，去年，我又讲了丢番图方程，已经印在这个预印本上。我问过听众，数学对他们意味着什么？一位女士回答说："是跟数字打交道。"好，这个回答是牛头不对马嘴，因为这完全不是做数学的意思。我希望能告诉你们数学是什么，数学中的大问题是什么，以及为什么人们会为之振奋。

实际上，在头两个演讲中，我讲的事或多或少与代数有关。特别是去年，我写下了某些公式，而有 6 位听众立即退场，因为公式……是的，人们不大喜欢公式。但有时候，公式是必要的。而且，我怀疑，不用任何公式，不涉及任何代数，不涉及任何数字，我们还能做什么事呢？我想，这只能是某种几何的东西，空间中的东西，与几何物体相关

的问题。这不是我自己平常做的数学。就个人而言,我偏爱代数及数论。因此当我离开巴黎去德国波恩时,我考虑了这个问题,试图为今年的演讲物色一个话题。过去的20或25年中,我每年都去波恩。希兹布努赫(Hirzebruch)主持一个会议,参加者主要感兴趣于几何课题。我与他们的交谈使我意识到可以选这样一个课题,关于大约一年前发现的某些研究成果。

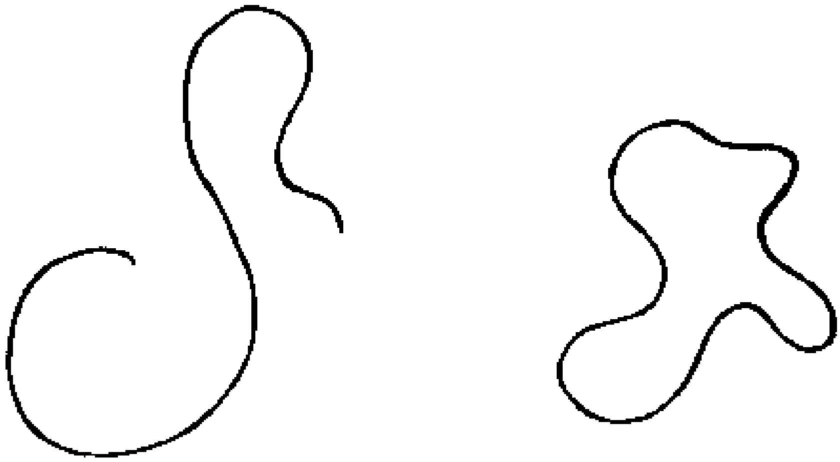
在波恩真是非常愉快。数学家们在欢快的气氛中举行会议,一边喝莱茵酒、吃草莓蛋糕——草莓正是季节,一边做数学,而且还在莱茵河上乘船漫游。

当然还是有时间做数学,在那里我学到了今天准备讲的这个课题,一位叫塞斯顿的伙计的某些新发现。我是从沃特诺伊曼(Walter Neumann)那里学到这些的。我们在黑板前花了三个小时,他给我讲塞斯顿做了什么。今天,我把这些传达给你们。原先我真不知道我也可以这样做,选择别的话题,因为这并不容易。首先,它必须是真正的数学,真正的数学家的工作。其次,它必须是能够向周末演讲会的听众讲清楚的。还有,像所有审美情况一样,有些人会喜欢,有些人则相反。也许它不灵。这是一个个人情趣的问题,你们对任何话题都可以有自己的反应。

好了,我今天要讲的,是几何对象的分类。这立即会引起我们的兴趣。我们生活在至少三维的空间中,就像这样。但是,你们已经知道还可能有多于三维的空间。所以我们想描绘我们生活中的空间,想知道它究竟像什么样子。局部地说,例如,这间大厅,它就是三维空间。这样一个模式,用来考察这间大厅是足够了。但我们知道,如果你看得更远些,就不同了。我们知道,欧几里得模式其实是不对的。它在某些限制下是对的,但不适用于其他一些情形。那么,物理学家们怎么办呢?他们试图找出,哪些模式是适用的。但是数学家,纯粹数学家,不在乎这些模式是否适用。他们构造出好的模式,当然是几何模式,只要感到美妙就行。他不在乎这个模式是否可以用以描绘宇

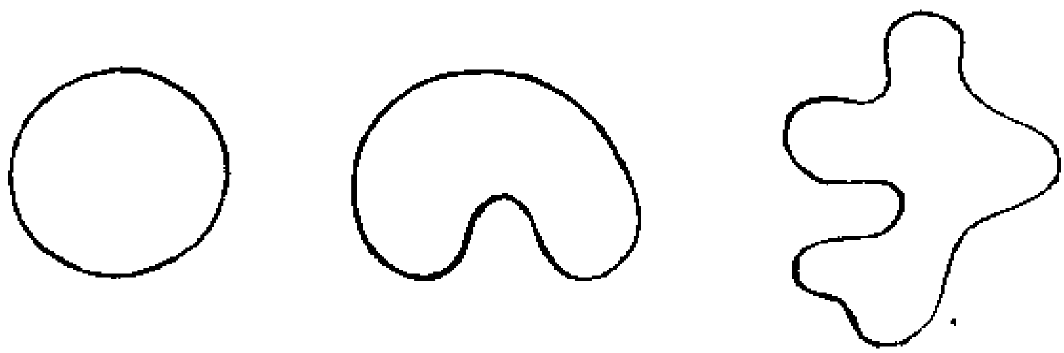
宙。

我们可以做一维的几何模式,也可以做二维的、三维的,以及更高维的,像四维、五维的等等。我原想今天谈谈高维的东西,但我很快就意识到,在一个半小时内我是办不到的,那会有太多的东西需要准备。所以,今天,我仅仅限于谈一维、二维和三维的。那么,一维的东西就像这样,是曲线。



一女士:那直线呢?

塞吉·兰: 直线是曲线的特别情形。现在如果我画一个圆,以及其他曲线,就像这样,它们看起来彼此相像。



我们是否应该认为它们等价呢? 它们有什么共通的性质呢?

一听众:它们是闭合的。

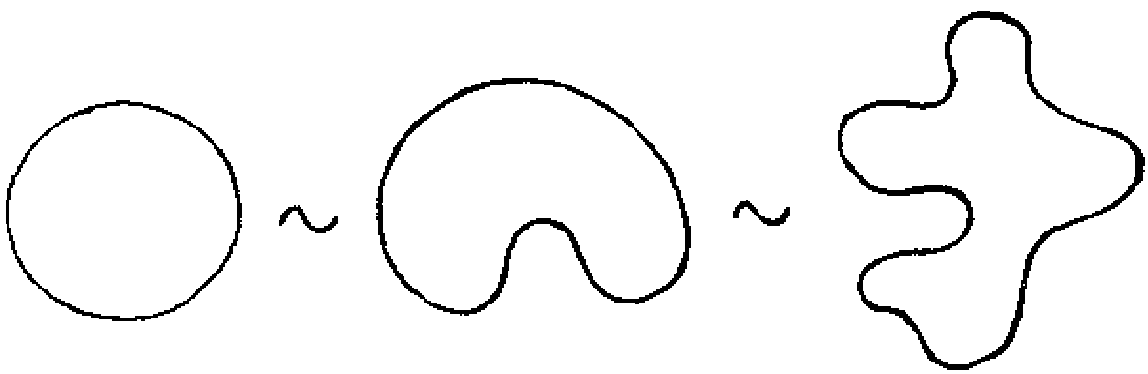
塞吉·兰：是的，它们是闭合的，它们转了一圈。如果我取一条线段，像这样：

那就不能转一圈，它是一条线段。

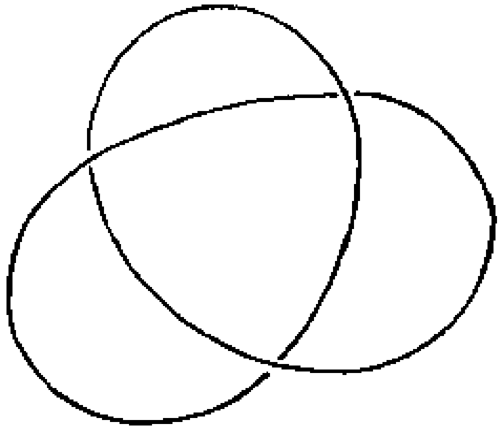
但上面三条曲线是闭合的。对于许多性质来说，我们不想区分这三条曲线。所以，我们说这些曲线是等价的。

一般说来，等价的意思是什么呢？啊，我不想给一个正式的定义，但我可以非正式地说，我们假定它们都是橡皮做成的，我们考察橡皮几何。我们说两个东西等价，如果可以从一个方向拉一拉，另一个方向压一压，如果它们都是橡皮的，那可以把一个变成另一个。这就给了我一个等价的概念。

如果这些曲线是一条橡皮绳，显然我可以把其中一条变成另一条，或者我可以把它变成一个圆。所以这些曲线是等价的。我用符号"～"来表示等价。我可以这样记：



我还可以这样画一条线：



这是闭合的还是开的?

听众:是闭合的。

塞吉·兰:它等价于原来那几条吗,假定它是橡皮绳?谁说它等价于其他几条?[一些人举手。]

哪些人说它不?[另一些人举手。]

哪些人保持审慎的沉默?[笑。]例如,你。[塞吉·兰指向第三排的一位女士。]

女士:它不等价。这里有一个结。

塞吉·兰:是的,有一个结。当我说那几条曲线等价时,我可以在平面上把它们变来变去。我的意思是,如果它们是橡皮绳,我可以完全在平面上完成变形。但这个结,就在那里,它只存在于三维空间中。你的直觉是对的:我不能在三维空间中把它变成一个圆。从某种意义来说,结不同于圆,也不同于另两条曲线。但是,你是否相信在有一种情况下,我可以把一个结变成一个圆?安图望,你想说什么?

安图望:[从录音带上听不清他的回答。]

一女士:有时你可以打两个相反的结,然后同时解开。

塞吉·兰:现在,这个结是在三维空间。但是没有理由把我们自己限于三维空间。事实上,在四维空间中我们可以把一个结变形为一个圆。也可以证明,在三维空间中这是办不到的。虽然,在三维空间中,我们可以依赖直觉,而要在高维空间中证明某件事,我们必须把事

情用更严格的方式写出来，因为我们的直觉变得有些无能为力。我还想让你们明白，事情不是那么简单。

我们看到，可以提出两个不同的问题：

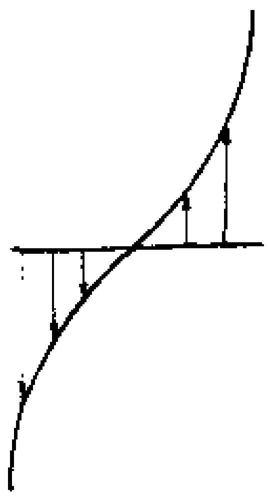
在三维空间中可以把结变成一个圆吗？

可以抽象地变形吗？在高维空间中可以变形吗？

答案是不同的，这取决于我们把这个结放在什么空间。起初，当我定义等价的概念时，我没有说你可以在哪里进行变形。现在我说我允许在任意的，高于二维及三维的高维空间中进行变形。于是，曲线的维数总是1，应该看作它完全不同于我们考察这个圆所在的空间的维数。现在，我想对变形再说点别的什么。取一条不是圆的曲线，例如说，一条线段，就像这样，包含或者不包含端点。

包含端点　　不含端点

如果包含端点，我说这条线段是闭的。如果不包含端点，那我说这条线段是开的。假定线段是用橡皮做成，我把它变形，就像这样。[塞吉·兰边说边画。]



我让右边的点往上动，而左边的点往下动。所以我拿这条橡皮绳，我往右走时，把它往上拉，越来越快。而我往左走时，把它往下拉，也是越来越快。于是我们看到，这条线段等价于一条曲线，它可以跑到任意远，就像人们常说的跑到无穷远了。

［有人举手。］

塞吉·兰： 请。

一女士： 它在无穷远处会闭合起来。

塞吉·兰： 不，无穷远不是一个点。取一直线，像这样：

这条直线是不会闭合的。

一男士： 如果它是橡皮做的，可以把它闭合起来。［笑。］它不是一条线段，但含有一条线段，你可以把它闭合起来成一个圆。

塞吉·兰： 看！如果你闭合一条直线，或者你闭合一条线段，那你必须放一些点在端头。取一条线段包含端点。如果我把端点连在一起，我得到一个圆。

男士： 但线段可以变形为一个圆。

塞吉·兰： 不，不是。因为如果我把它变形为一个圆，而且把两个端点视为同一个点，那我就干了某种为变形定义所不容的事。我使用变形一词是在不允许同一的意义下，即，不能够把两个点视为同一个

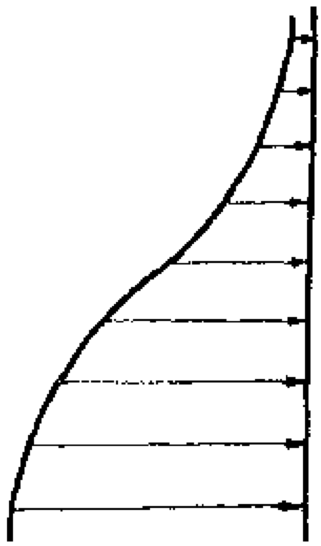
点。如果两个点不同,那它们经过变形也互不相同。

男士:但如果你把它们并置一处——

塞吉·兰:不,不,我不想这样做。[笑声。]这是一个定义的问题。我现在想用“变形”一词去指:如果两个点不同,经过变形它们也互不相同,行吗?

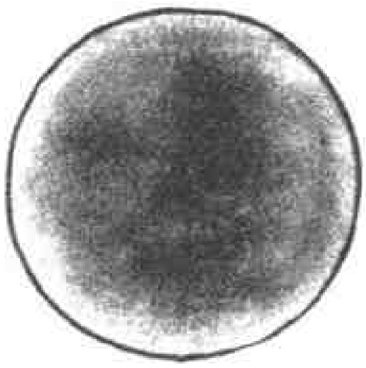
男士:行。

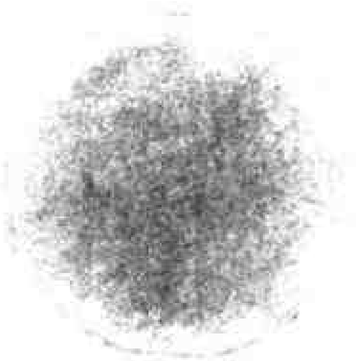
塞吉·兰:好。当然,也有其他的概念,那里允许同一。其实,待会儿我就要讨论这种概念,以及如何去使用它们。但是,现在,对变形,我不允许同一。我正是想让你看到这种特别的现象,可以把不含端点的线段变形为无穷长的一条绳,它本身就等价于无限长的直线。我可以把这条无限长的绳子与无穷直线的等价性画出来,就像

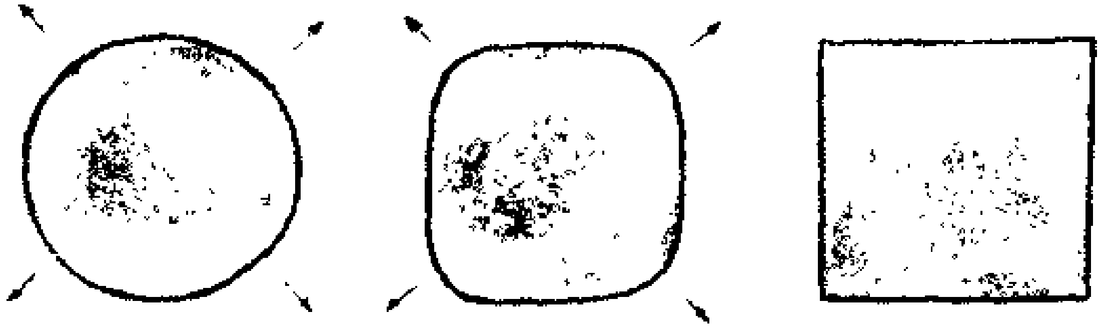


所以我可以把这条曲线拉直成一条直线。那就是我想要讨论的等价概念。

好了,我们刚才谈的是一维的事情。但是,即使是一维的情形,我们看到已经可以提出若干问题来。你也许觉得一切都是已知的,但事实并非如此。接下来,我们看二维的情况。这稍稍复杂一点。一维的东西称为曲线。二维的东西称为曲面。而且曲面可以含有边界,也可以不含边界。







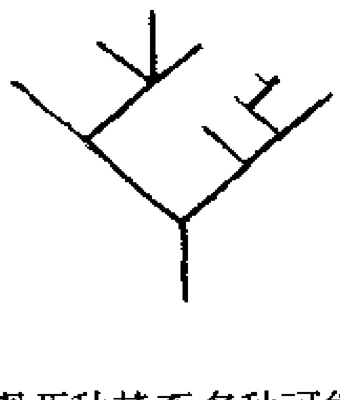
而圆盘的边界,就是这个圆,会变成正方形的边界。

[有人举手。]

塞吉·兰:请。

男士:但这里有某种不同之处,因为导数——

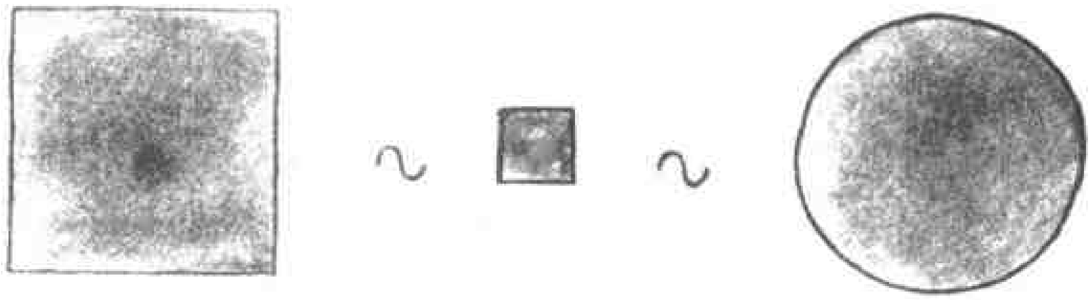
塞吉·兰:当然,你是指几个角。这位男士说这里有些区别,他完全正确。这里是有区别,但这不是橡皮几何的观点。可以定义其他类型的等价,在这新的定义下,圆盘和正方形这两个东西并不等价。因为,当我拉开圆盘并且做成一个角时,显然,这个角是不那么平滑的。从某种观点来看,你甚至可以说这个角是很不舒服的。[笑声。]它不光滑,它不是一条好的曲线。从某种意义上说,它们是不同的。还有关于角部的数学理论。你看,我们从某些相当简单的事情出发,已经列出了大量的问题,它们的发展就像一棵树:



我们爬上这棵树,发现两种甚至多种可能性可以继续下去。按照你考察的不同的等价关系,对同一个问题可以有不同的答案。但是现

在,我只想考察橡皮等价关系。于是,圆盘与正方形是等价的。

当然,这不依赖于它们的大小。我可以把正方形画得大点或小点。只要它是橡皮做的,它都等价于圆盘。



如果我只取圆盘的内部,那我得到一个没有边界的曲面,或者没有边界的正方形。这有点像没有端点的线段。你还记得没有端点的线段吗?现在我来看正方形的内部,或者圆盘的内部,这是等价的,不考虑边界,同时来看平面,它从各个方向延伸到无限远。请想想正方形的内部是否等价于平面?

哪些人说是的?

一男士:平面是无限的。

塞吉·兰:是的,平面是无限的。

男士:这个正方形没有边界?

塞吉·兰:对,它没有边界。我把它去掉了,那正是我用虚线画的原因。

男士:那它也是无限的?

塞吉·兰: 正如你所说,无限的。

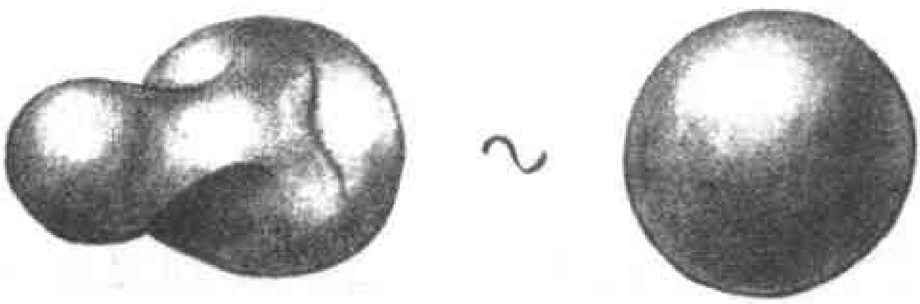
男士:那它们等价。

塞吉·兰: 很对。去掉了边界的正方形与平面等价。总结一下,每个去掉了端点的线段等价于无限长的直线,每个去掉了边界的正方形或者圆盘等价于整个平面。但是请留意:我取了一个去掉了边界的正方形,如果我愿意,我可以把边界加上去。但是,如果我取一个球面,像这样,一个球的表面:

它是一个曲面,但它没有边界,是吗? 如果我拉伸它,是否可以拉到使它的一部分拉到你想要多远就多远呢?

男士:你可以无限地吹胀这个气球。

塞吉·兰: 请看,我不想把这个气球弄破。[笑声。]这个东西必须保持等价。我吹胀这个气球,并且把它往里敲敲或往外拉拉,就像橡皮,但我不允许把它搞破。如果我拉长它,是不是可能像我们拉一条去掉端点的线段一样,把球面的一部分弄到你想多远就多远呢? 哪些人说是的?



［一些人举手。］

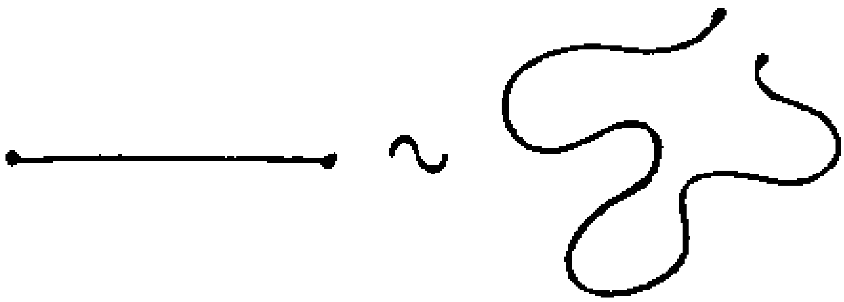
哪些人说不是？其实，答案是“不”。例如，如果我取一个带端点的线段，是否能把它拉长到等价于某种无限的东西呢？

一女士：应该是有界的。

塞吉·兰：对了。可以证明这是不可能的，带有端点的线段不能等价于无限的东西。

女士：你是否指端点是固定的？

塞吉·兰：啊，不！它们不必被固定起来，你可以移动它们。例如，它可以等价于这种东西。



只要拉一拉，压一压，扯一扯就行。但问题是可不可能拉得越来越快，就像我们以前拉线段那样。问题出在如果我拉得越来越快，那端点就将无处可去。先前，线段上越接近终端的点或者跑得越来越高，或者越来越低。因而，如果在变形过程中把终端加上去，我只得把端点撕掉。但这是不允许的。

一男士：你可以把端点放到无穷远处。

塞吉·兰：不，我们必须在平面上干这事，平面上没有无穷远点，当然有任意远的点，但这并不是一回事。

男士：为什么禁止用它呢？

塞吉·兰：禁止用它是为了等价概念的定义。原则上并不是总禁止用它，并不是绝对禁止用它。对其他的某些应用而言，你可以把无穷远点添到平面上去，但不是我们今天所要做的。所以，你必须区分

的是，有些东西有这样的性质，你可以经过变形把它的一部分送到任意远去；而有些东西不具有这样的性质，就不可能这样做。好，让我写一个定义：

> 说某物是紧致的，是指它包含它的边界（如果存在的话），而且此物的变形过程不能把它扩张到任意远处。换言之，此物的每个变形都是有界的。

归根到底是说球面是紧致的。当然，我们生活于其中的三维空间会跑到无穷远……[犹豫。]起码按我们心中的质朴的模式，它会跑到无穷远去。但若你生活在一个球面上，而且你又非常小，当你看你的周围时，从各个方向看出去，你看到的很像一个平面……

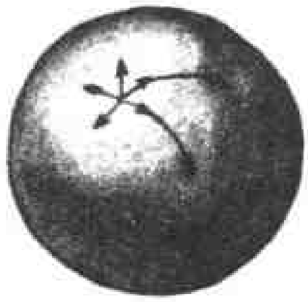
[有人举手。]

塞吉·兰：请。

一大学生：而球面没有边界。你说"没有边界的紧致……"

塞吉·兰：啊！如果曲面没有边界，那它自然包含了它的边界。这个术语必须这样来理解：如果某物没有边界，那它不得不包含它的边界，因为根本就没有。[笑。]你必须允许这种可能性，否则，一些简单数学命题都会很难办。

让我们回到住在球面上的人。也许他们只能看到一个平面，即使他有高倍望远镜在手；于是他们会很快得出一个结论，说他们住的空间是一个平面。如果一千年以后，他们造出了更高级的望远镜，也许他们会发现某种弯曲，他们会看到，空间是弯曲的，并且开始提出一系列问题。



这正是哥伦布以前发生的事。人们设想什么都是平的，只有少数聪明人例外，但聪明人并不多。

听众：多新鲜！［笑声。］

塞吉·兰：好，我们看起来就是那样。我们还可以问，如果我们一直往前走，会发生什么事，我们会回到出发点，还是会无限地走下去？球面是紧致物体的例子。如果你从某点出发，沿着一个固定的方向一直往前走，那你最终会回到你的出发点。

你能不能给我另外一个这种曲面，紧致曲面的例子？

听众：立方体。

塞吉·兰：是的，立方体的表面，但它等价于球面。给我一个例子，要它不等价于球面。

一男士：环面。

塞吉·兰：什么？

男士：环面。

另一人：在球面上打个洞。

塞吉·兰：你是数学家吗？

男士：知道一点。

塞吉·兰：那已经太多了。我希望数学家不要介人，要不然就是欺骗。［笑声。］当然数学家知道答案，但我这不是给他们作的演讲。［塞吉·兰把粉笔扔向那位男士。笑声。］

所以，你开了一个洞，你找到了这个东西，它有一个洞在中间。

可以证明这个曲面不等价于球面，因为有这个洞。现在，你能不能给我一个曲面的例子，它不等价于球面或者环面？

一人：克莱因(*Klein*)瓶。

塞吉·兰：你们中间有些人知道得太多了。[1]

一小孩：金字塔。

塞吉·兰：不，它等价于球面。[2]

一女士：一个没有顶部的盒子。

塞吉·兰：是的，但它有边界。我想要一个没有边界的曲面。前面谈到的这个没有，球面也没有，我要一个紧致曲面。

一大学生：你可以开两个洞，像眼镜架。

塞吉·兰：你说对了，那就是我希望你们说的。但是，你是不是学数学的？

学生：是的。

塞吉·兰：啊，不，不，不要这样。自然，如果你是数学家，你会说：开两个洞。但你不该参与这个游戏。[笑声。]那就是为什么我不要你们介入。我想让人们自己想出来。

好，你说对了，我可以开两个洞。像这样：

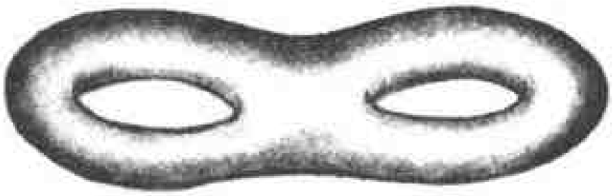
---

① 我不想现在深入到这样的技术细节。

② 听众中有各方面人士，包括12岁的孩子、高中生、大学生、工程师和退休人员。后来我知道这小孩是12岁。她的老师要求她的同班同学们来听演讲并在事后写一篇印象。这女孩写道：当然，有时我多少有点糊涂了，例如当兰先生要大家举一个与球面不同的例子时，我说“金字塔”，因为我知道兰先生想要一个类似的例子。此外，一切都好。

另一人写道：

如果我事先知道我的发言会被写在书里，我一定会多举几次手。



如果我还想要另一个例子，该怎么办？

一学生：环面上打个结。

一女士：你可以开更多的洞。

塞吉·兰：非常好。**女士**，第一次演讲你来了吗？两年前？你记不清了？我把你记得很清楚。总之，你可以开更多更多的洞，只要是有限多个洞。

于是，有一个定理：

> 紧致无边界曲面，在等价的意义下，可以由洞的个数完全刻划。没有其他的紧致无边界曲面。

我还需要在定理的陈述中加上一个假设。我应该说：一个可定向的曲面。但我现在不想深入到这种问题去了。所以，忘掉我刚才所说的。如果我不说到它，就有些人会提出挑剔，比如某位数学家。[笑声。]

[当塞吉·兰想在黑板上写出定理时，发现没地方写了，他不得不擦去黑板上的另一部分。]

啊,没地方写了!所以你们都应该写信给教育部长,要他给科学博物馆的布雷特先生更多资金,以便他能够买更多的黑板,更大的黑板,放在一个更大的厅里,诸如此类……如果可能的话,非紧致资金更好。[笑声。]你们在会后都去写信,而我来写这个定理:

> 可定向的(只是为使我安心),无边界的紧致曲面在等价的意义下由洞的个数刻划。

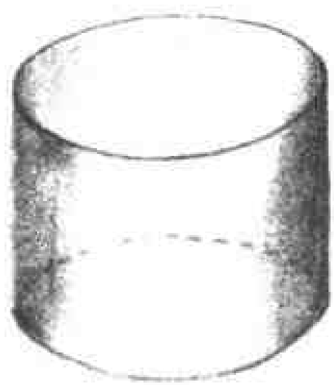
这就是曲面的一般模式。

现在我们来看有边界的曲面。

一男士:会不会只留下洞呢?

塞吉·兰:总会有曲面留下来的。我做这些都是为三维物体作准备,三维时事情更复杂。

好,我画一个有边界的曲面。刚才已经有人提到了圆柱面。



什么是这个圆柱面的边界?

一男士:一个圆。

塞吉·兰:对,有一个圆在顶上,还有一个圆在底部。圆柱面的边界由两个圆组成。

一女士:还有某些边。

塞吉·兰:不对,你让圆柱面转一周,你在旁边看它,你看不到有

边。

女士:那它有两个边界。

塞吉·兰:是的,或者再说清楚一点,它有一个边界,但由两个圆组成。没人说过边界只能由一片组成,它也不必是连通的。

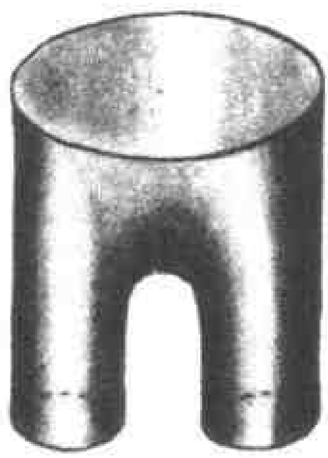
现在,我要画一个更好玩的。谁能告诉我怎样画一个曲面,其边界由多于两片组成?

一男士:人的脸。

塞吉·兰:是的,可作一个例子。

一女士:一个筛子[笑声。]

塞吉·兰:是的,非常好。让我再画一个。



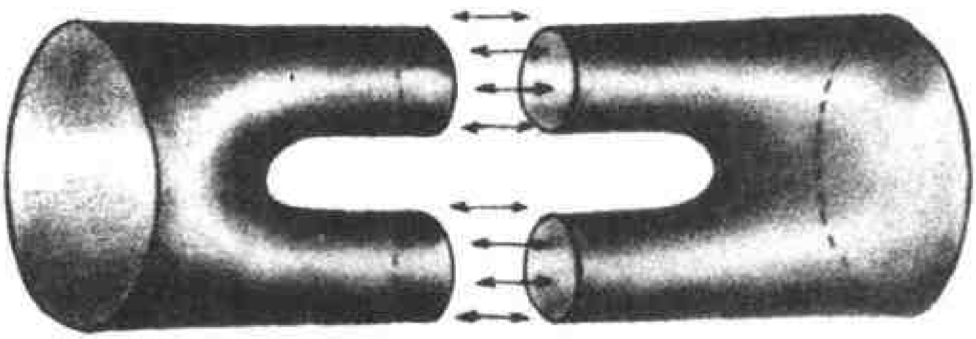
这是什么?

一男士:一个倒过来的花瓶。

其他听众:一条裤子。

塞吉·兰:是的,一条裤子。它的边界包括顶上的一个圆和底部的两个圆。所以边界包括三片。现在我要做一件数学家们爱做的事。数学家喜欢把事情放在一起而做加法。假设你有两条裤子。

我能对它们作些什么呢？如果我在它们上面各取一个圆，我可以把它们粘上。



我对另一只裤腿也做这种粘合。这样，我得到一个新玩意，可以称为两条裤子之和。

一男士：但你没有权利这样做，你是在把不同的东西视为同一。

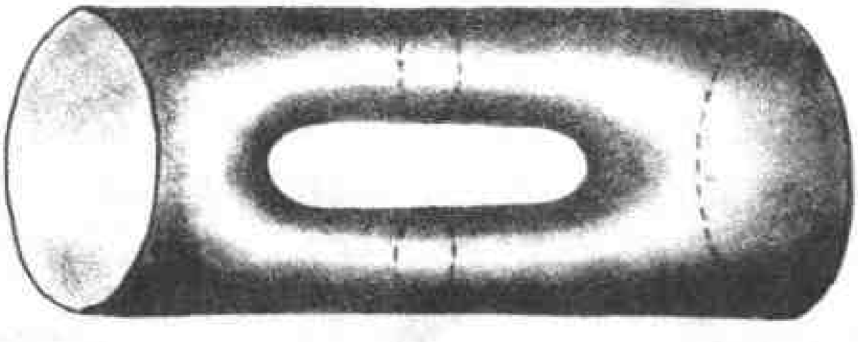
塞吉·兰：现在我有这个权利。我在做加法，我把两条裤子缝到一起。[笑声。]我有权做裁缝。我们到了可以谈同一的时候了。

女士：为什么刚才你还没权利搞同一，现在你就有权搞同一了？

塞吉·兰：你永远有权搞同一，把两个点放在一起，做你想做的。但是，为了什么目的？为了定义等价，你无权这样做。我没有说，我搞了同一则我得到一种等价。我只是说我得到了和。这是不同的事情。对等价性，我不允许不同的点同一。对求和，我有权这样做。求和就是对边界的一些片搞同一。

所以，如果我把和画出来，我得到某种像这样的东西，有一个洞，

仍然有边界,由两个圆组成。

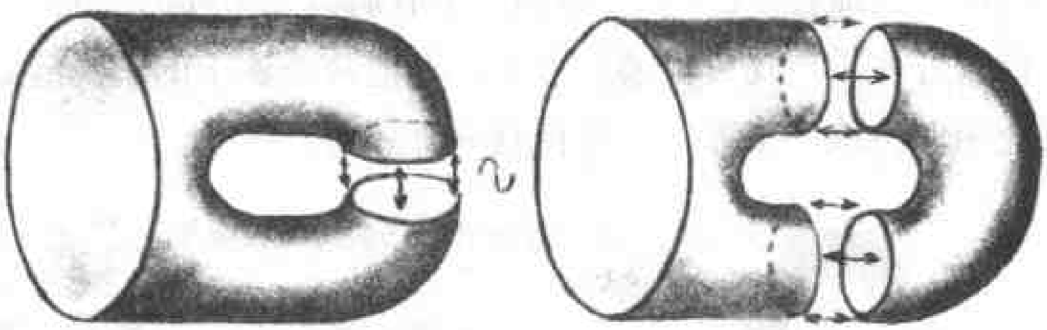


现在我可以再求和,消掉这两个圆。

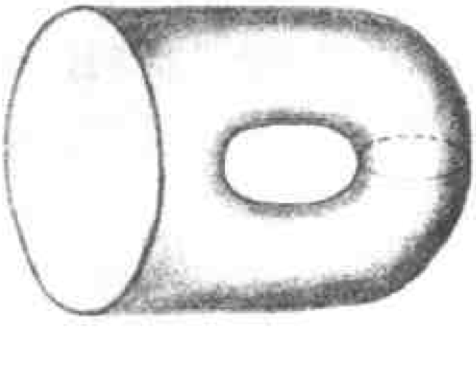
一男士:总而言之,你把两个不同东西的边界搞同一。

塞吉·兰:是的,两个不同的东西。我取两条裤子,你的和我的,然后我把它们缝在一起。[笑声。]

现在,我也可以取一条裤子来求和,就是把两条裤腿上的两片边界搞同一。它也给我一个有洞的曲面。



如果我把这个曲面与圆柱面求和,我得到的还是这个曲面,它们是等价的。我得到一个洞,而且还有一个圆作为其边界。

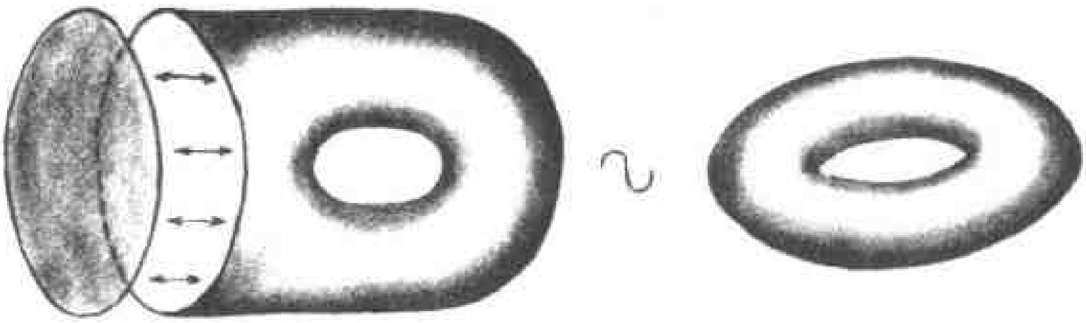


现在看这个圆，我想把它消去。我该怎样做？把它与什么东西求和就可以完全消去这个边界？

男士：半个球面？

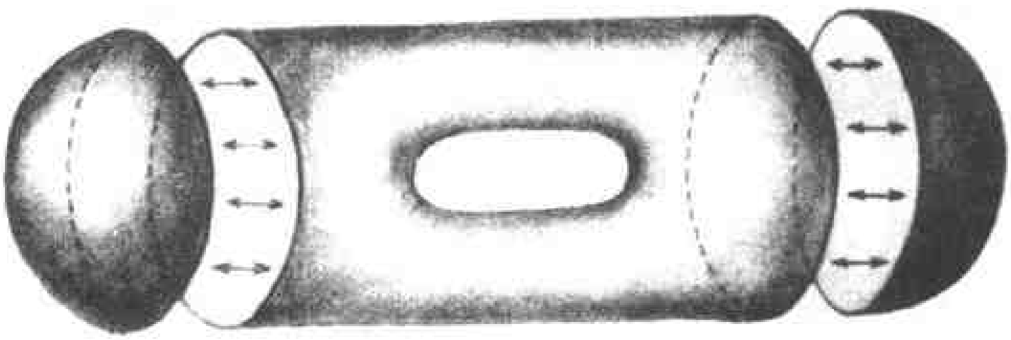
女士：一个盖子。

塞吉·兰：完全正确。一个盖子，它就是一个有边界的圆盘。



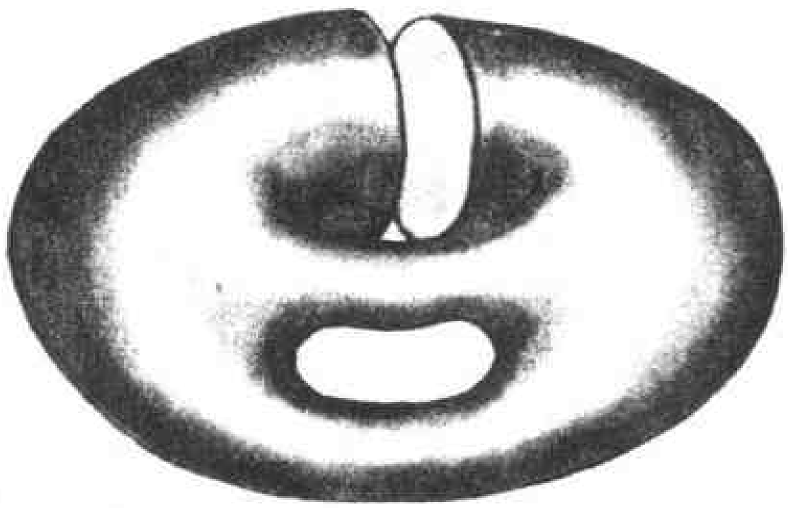
你把它们粘上，你得到某种没有边界的东西。这就是我想做给你们看的。如果我取一些有边界的曲面，其边界是圆，我作它们的和，我还可以把它们加若干次，最后得到一个有洞但无边界的曲面。

再来看裤子。我可以消去边界。先把两条裤子的裤腿缝到一起，然后在两端各放一个盖子。我得到一个环面。



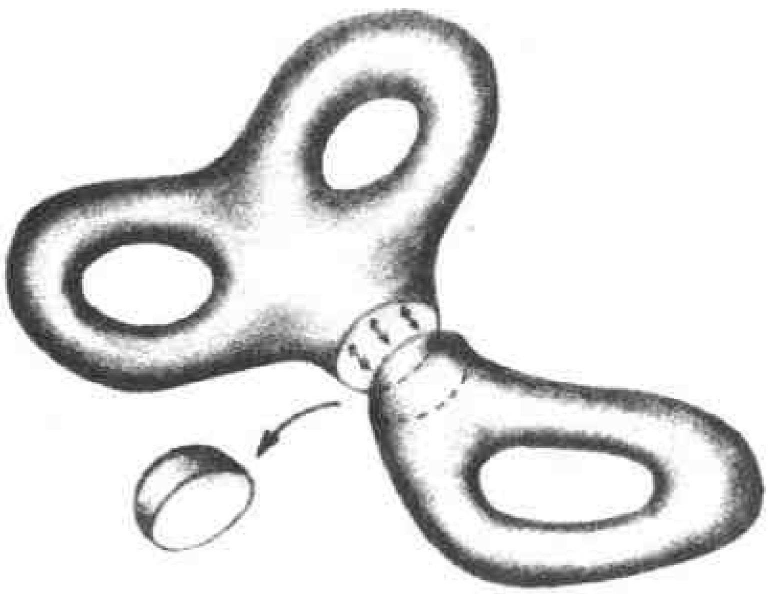
一学生：但你也可以把它们沿背带缝到一起。

塞吉·兰：是的，可以的，不过你会得到更多的洞。

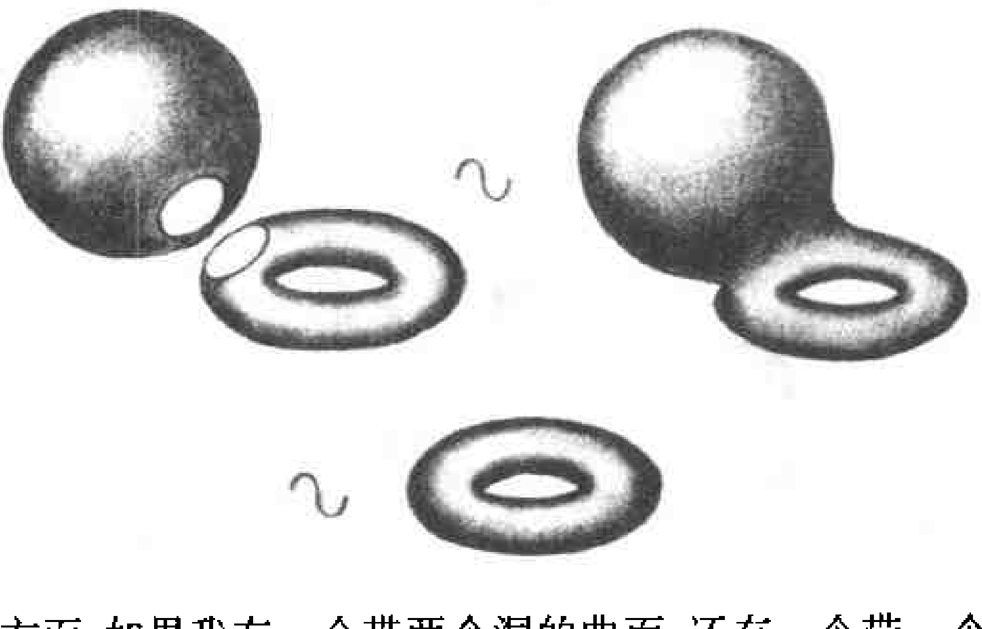


数学家们喜欢做这种事,这是一件使他们高兴的事情。[笑声。]如果你也乐于把裤子缝到一起,那按照定义,这是在做拓扑(topology),而你就是一位拓扑学家。即使没有边界,你也可以造出一个边界来,以定义另一种加法。直至目前,我们只做了缝合,但也可以做外科手术。取一个曲面,像这样,很光滑,没有边界。于是我切下一个圆盘。

这就造出一个边界来,它是一个圆,原来没有的。我想对另一曲面干同样的事,造出另一个圆。现在我处在与先前同样的地位,我有两个有边界的曲面,我可以沿着这两个圆作它们的和。



用这种办法,我可以定义无边界曲面的和。如果我用任何曲面与球面求这种和,我得到同一个曲面,当然是在等价的意义下得到的。人们称球面是这种求和法的零元素。



另一方面,如果我有一个带两个洞的曲面,还有一个带一个洞的曲面(即环面),我求它们的和,我得到一个新曲面,它有三个洞。如果我对带三个洞的曲面和带一个洞的曲面求和,则得到有四个洞的曲面,诸如此类。我再说一遍,我所说的一切,都是指可定向的曲面。我们已经讲了曲面理论,这就是二维的情形。

现在我想转向三维的物体。

刚才，我们说到住在二维空间(就是曲面)上的人。他们非常小。他们看到的周边环境也很小，看起来像个平面。但他们可以提出问题：如果我们能看得很远，这个空间会是什么样子？那我们自己呢？我们也非常小，生活在三维的环境中。我们生活的环境是不是类似于三维球面的某种东西呢？如果我们能看得很远，会不会发现一个洞呢？你可以对二维情况提出这些问题，但三维问题更与我们切身相关。

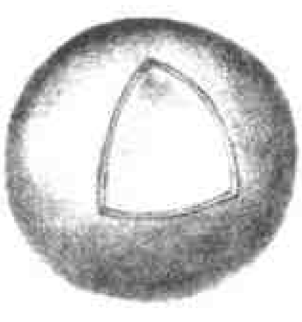
我们看到一个三维空间，我们有了望远镜，而且它越来越高级。如果我们能看到足够远，我们会发现什么？我们住的空间是等价于球面呢，还是有一些洞。这是个严肃的问题。真可以对宇宙的性质提出这个问题。所以，如果你一定要得到对今天我所讲的一个物理解释，这就是了。

我从二维出发，是因为它比之三维情况更容易定义加法。

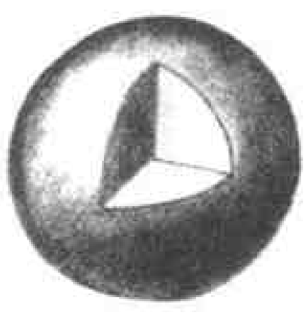
一男士：但裤子是三维的。

塞吉·兰：不，不！裤子的曲面是二维的。当然裤子一定是存在于三维空间中的，但裤子本身是二维的。你必须区别物体自身，即曲面本身的维数和它存在于其中的空间的维数。现在要考虑的物体，它本身就是三维的。

例如，取一个球，就是球面的内部，实心球。它是三维的。



球　面



球

这个球,不考虑它的边界(即球面),它就等价于整个三维空间,如同圆盘的内部等价于平面 R^2,而没有边界的线段等价于直线 R。这里,字母 R 表示实直线,我在右上角加一个 2 表示维数为 2 的空间。对三维空间,我就写 R^3。

一维的东西是曲线,二维的东西是曲西,三维的东西该叫什么呢?

听众:体积(*volume*)。

塞吉·兰:如果你喜欢的话,那也行。但"体积"一词有其他意思。它可以指这个空间的体积的数值。例如,手提箱的内部,你可以说它是体积,但你更可能说它的体积是 3 立方英尺。我们要对此加以区别。

在橡皮几何中,我们不去量体积的数值。因为一个东西可以等价于另一个大得多的某物,只要拉一拉,扯一扯就行。

我也可以说关于三维的物体,但它们在数学上有一个名字,相当专业的名字——它们叫做流形,三维流形。我不喜欢这个名字,但大家都这么叫。同样,我也有橡皮等价的概念,我也有紧致流形的概念,换言之,在任何变形下都不会跑到无穷远去的流形。我还有边界的概念,边界应该是什么?

女士:曲面。

塞吉·兰:完全对。你已经懂得我所讲的了。

好了,我已经讲了一个小时。前两年的演讲,都是一个小时结束,然后提问题,听众又呆了很久。因此,只要愿意都可离去,我们可以休息几分钟。我想讨论的主要课题是三维流形的分类,甚至涉及某些非紧致东西。

讲二维情形时,我给出了曲面分类定理:只有球面、环面、带越来越多的洞的曲面。在三维情形下,这是一个极端困难的问题,数学家们至今仍企图去解答。这正是塞斯顿的贡献,他提出描述所有三维流形的一个猜测。这里也有求和,也有洞,但都要复杂得多。这就是我下面要讲的。

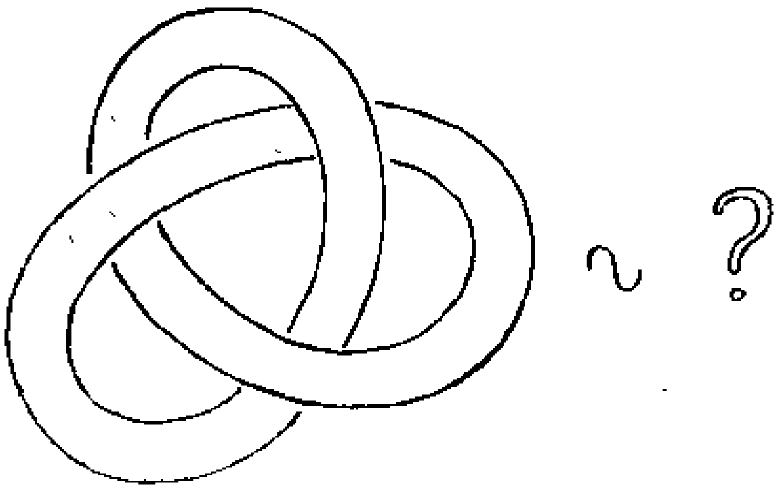
但现在，暂停或者休会，看你喜欢哪种修辞。

[掌声响起来，有人问，是否有足够时间到街对面喝点什么？我说，可以。约 15 分钟后继续讲。]

第二小时演讲

[开始时，大厅座无虚席，约有 230 人。大约$\frac{3}{4}$的听众回到大厅听第二部分的演讲。]

[黑板上，某位听众画了如下的图。]



塞吉·兰：[看图。]啊，画得很好。它像一个结，但有一个洞。对我前面所讲有没有问题？

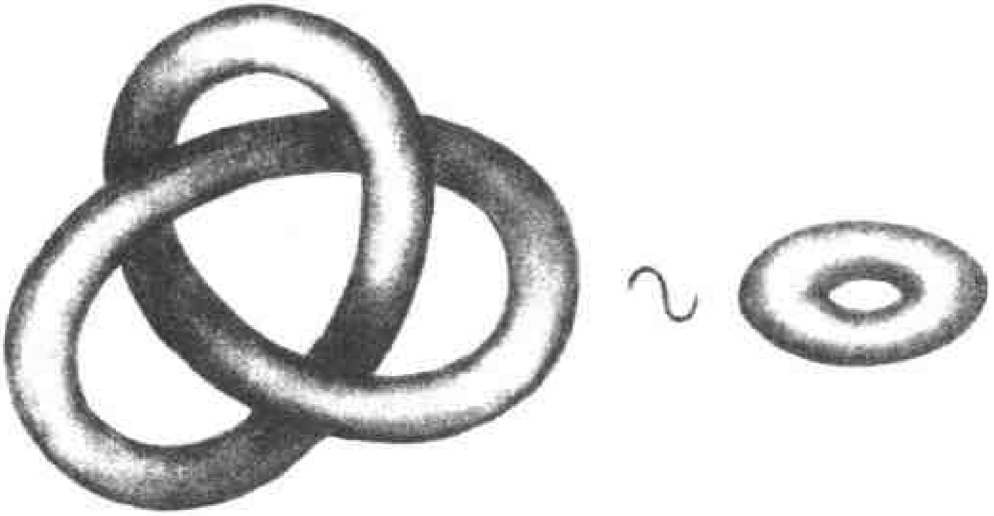
男士：这个曲面是否等价于环面？

塞吉·兰：问得很好。你认为呢？

一听众：这个曲面有几个洞？

塞吉·兰：啊，这是有一个洞的曲面，放在三维空间中，而如果你想在三维空间中把它变形为环面，那是办不到的。但如果你允许在更

高维空间中作变形，它可以变成环面。你可看到，有多种方式来表示同一曲面。



男士：如果有人在曲面的内部行走，那他无法判别是否有结。

塞吉·兰：是的，精彩的注解。它就像一个结。如果你在结上一直往前走，那你迟早会回到出发点，但你没法知道你不是在一个圆上走。

［有人举手。］

塞吉·兰：请。

一女士：莫比乌斯(Möbius)带是怎么回事？

塞吉·兰：我已经说过，我只想讨论可定向的曲面，就是要避免这种东西，因为我想避开过多的技术性而谈简单一些的命题。提到可定向性只是为了防止有人抱怨我说得不全面。如果我涉及到不可定向曲面，我就没时间谈三维问题了，但这恰恰是我想谈的。好了，莫比乌斯带，也许你们中不少人已听说过，而现在我没时间去谈了。你们大概对三维的情形知之甚少。

此外，三维情形与我们生活的世界密切相关。我早已说过，数学家研究各种可能性，各种模式。作为数学家，我们对这些模式之美妙感兴趣，而不在乎其物理应用。今天，我已经对曲面进行了分类，我还对三维流形的分类感兴趣。我试图对它们进行描述。一旦我们知道了所有的三维流形，我们自然会问，其中哪一个对应着物理世界——

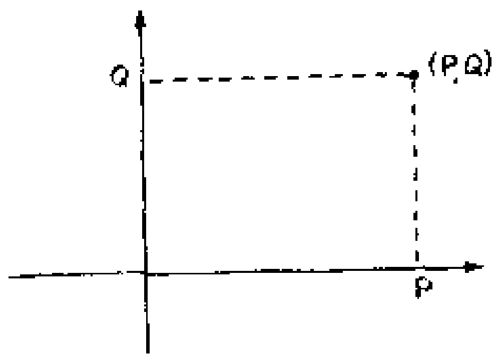
我们生活于其中的世界。物理学家要研究这些模式,以便找出哪些能与现实世界相吻合。我本人不做物理,数学与经验世界的关系常让我搞不清。打从我当学生以来,我总感觉我对物理无能为力,物理真的引不起我的兴趣。

一女士:没错,学生们要把所学的数学知识应用于物理是很困难的。

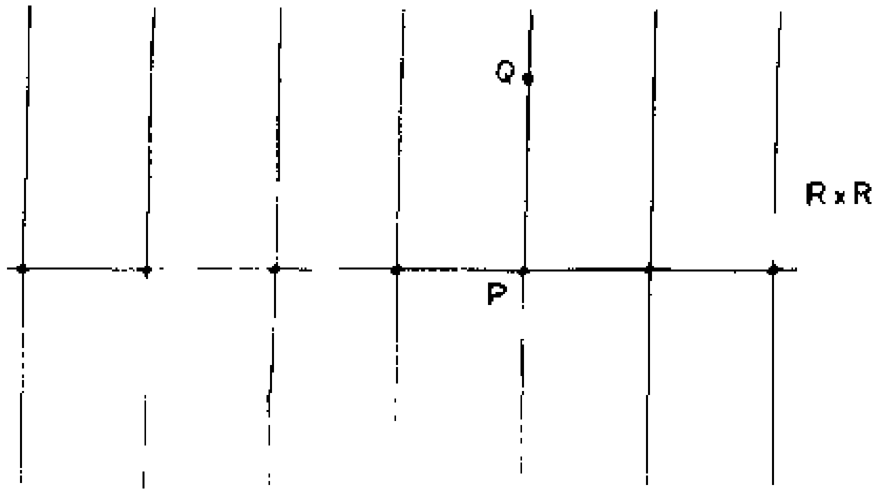
塞吉·兰:我不必隐藏我自己的品味,但我也不把它看成自然规律。我喜欢对事物进行分类,我构造一些模式,然后对物理学家说:"请选择适用于你的一个模式吧!"另一方面,也有其他数学家,像阿梯亚(Atiyah)或者辛格(Singer)等,他们对物理感兴趣。反过来,也有物理学家对数学有深刻理解,既搞数学也搞物理。我是不行了。但我向学生们讲得很清楚,如果他们喜欢,也有此能力,那我鼓励他们二者都搞。但任何人都有其自身的限制。

好,让我们回到三维情形。要画图变得困难多了,因为举例来说,就是三维球面,我也不能画得很清楚。通常的球面,二维球面,我可以把它看作与一个给定点,称为球心,保持恒定距离的点的集合。而三维球面 S^3,也可以定义为在四维空间中与球心保持恒定距离的点的集合。我们虽然画不出来,但我们相信有这个东西。

我所能做的,是画一些图,它可以帮助你设想会发生什么。或者,作一些别的表示法。举例来说,在平面上,画两条坐标轴,和两轴上的点 P 和 Q。



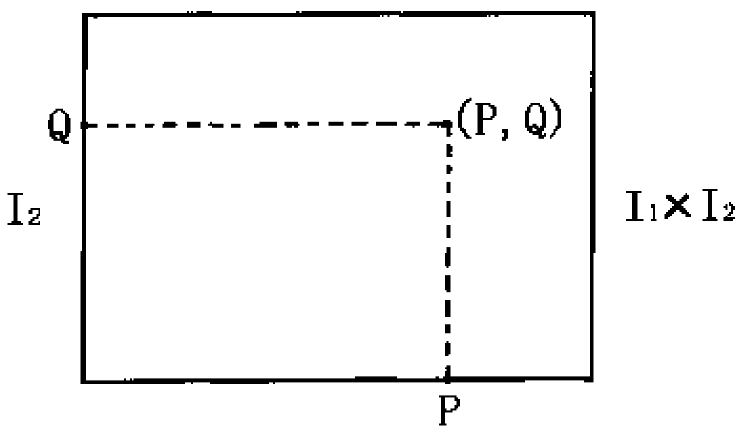
我可以写点(P,Q),其中 Q 在直线R 上,而(P,Q)在平面上。这种作法称为乘积。这就像在每一个点 P 上放一条直线,而点 Q 就在这条直线上游走。



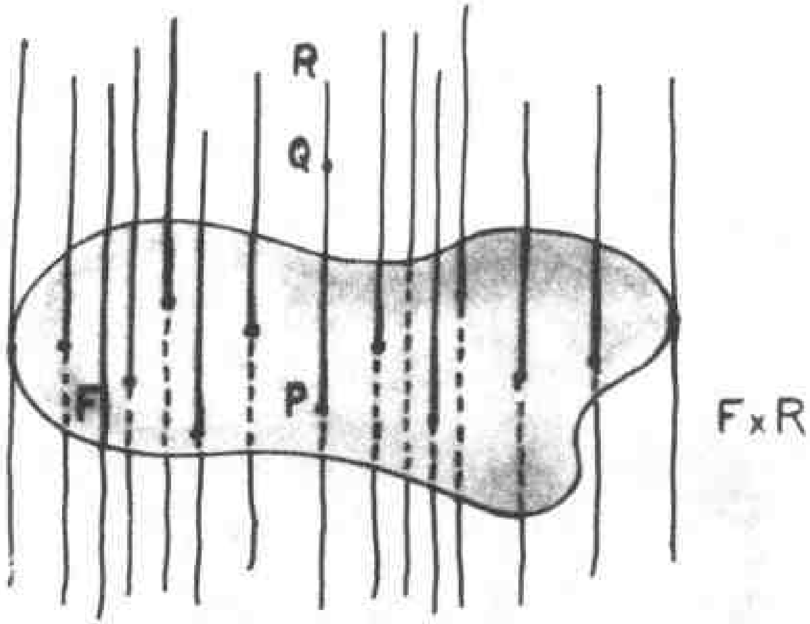
我已经说了,这种作法称为作乘积。我们看到,平面是直线 R 和直线R 的乘积,我们把它写成

$$R^2 = R \times R.$$

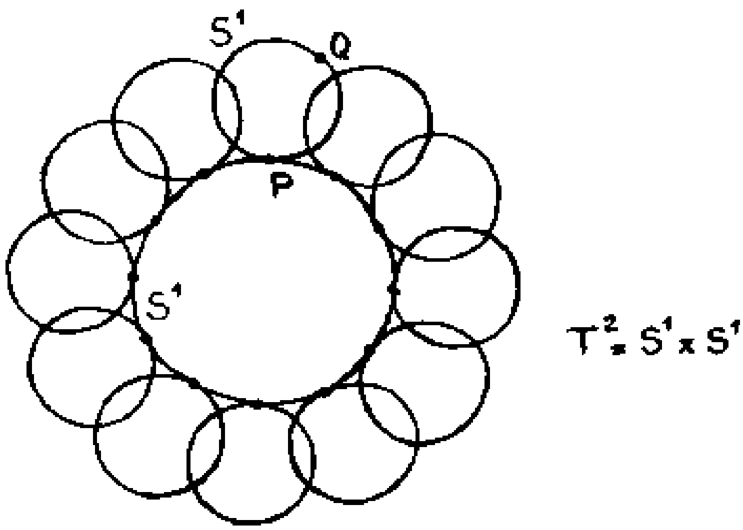
类似地,如果我有两条线段 I_1 和 I_2,而我取第一条线段上的所有点 P 的集合和第二条上所有点Q 的集合,那所有这些点对(P,Q)组成了长方形上的所有点,就像这样



对任意两个集合,我可以用此法作出乘积来。如果我有一个二维的曲面 F,我可以把它和任何一维的东西作乘积。如果 F 是二维的,那这个乘积是三维流形。它是一些点(P,Q)的集合,其中 P 是曲面上的一个点,而 Q 属于一个一维空间。



让我再举一个例子。设 S^1 是圆。我作乘积 $S^1\times S^1$,即所有偶(P,Q)的集合,其中 P 在一个圆上,而 Q 在另一个圆上。对第一个圆上的每个点 P,我可以让第二个圆上的每个点与之相配。



我会得到什么曲面?

听众:环面。

塞吉·兰:很好,一个环面。$S^1 \times S^1$ 是一个环面。我把它称为 T^2,T 是环面(torus)的第一个字母,而 2 表示它是二维的。

乘积的概念使我可以构造高维的东西,我可以把它写出来,而不必画出来。

现在,我可以得到更高维的东西。举个例子,我作 T^2 与 R 的乘积,环面与直线的乘积。画出它来很困难,但我可以这样来表示它,画一个环面,一条直线,像这样,我可以把环面想像成这个东西,三维的乘积的一个截面。

当然,这个图并非一个逼真的图,但它可以帮助你想像。

现在我要画更复杂的三维物体。我已经有了三维球面,有了乘积 $T^2 \times R$,但我想要某种相当于有洞曲面的东西。这种东西会是什么样子?

一女士:像一根壁很厚的管子。

塞吉·兰:对的。我想要有洞的,环面,还有跑到无穷远的东西。[塞吉·兰画出下图。]

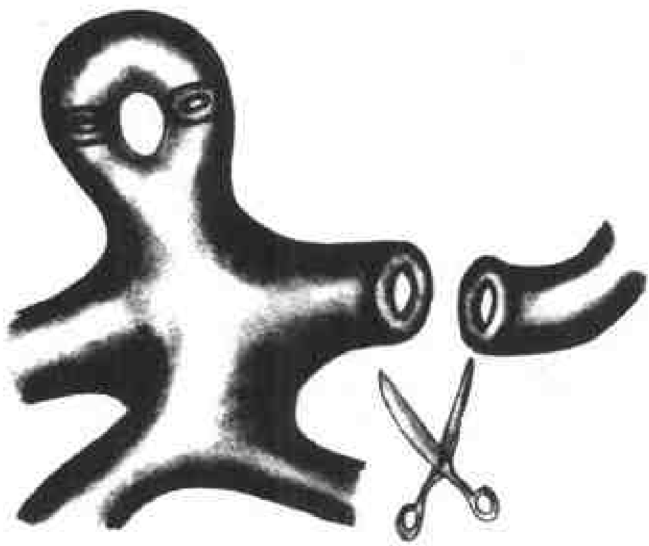
[笑声。]好,这是个三维的东西,它该叫什么呢?

听众:章鱼。

塞吉·兰:很准确,章鱼。二维情况,我有裤子;三维情况,我有章鱼。这样一来……设若我有一把剪刀,我剪掉一条腿,我得到什么?

听众:……

塞吉·兰:我们这个章鱼没有边界[①]。如果我切去它的腿,我得到某种东西,它的边界是二维的,会是一个环面。



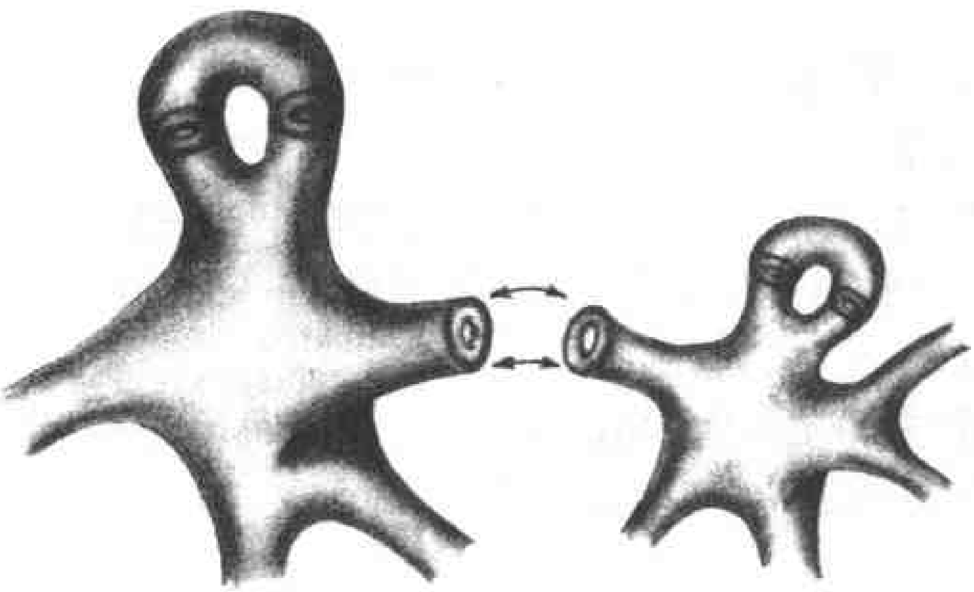
① 不幸的是,不可能逼真地画下此图,还有三维球面 S^3 也如此。按我们的作图法,画了一个边界,但它总算大体能表现事情的真象。

现在，设你有某种三维东西，它的边界是一个环面，你还有另一件东西，它的边界也是环面。你一定情不自禁地想对它们做点什么。你想做什么？你[指向一女士]。

女士：把它们粘到一起。

塞吉·兰：正确，就像早先对圆所作的。所以我取两个章鱼。

把每个章鱼切下一条腿，我得到两个环面，我把它们粘到一起。这样，我们对两个章鱼沿着环面求和了。



我也可以对一个章鱼作这种手术，切下它的两条腿，把所得的两个环面粘起来。

先前我们还有盖子。现在我们有什么呢？我有一个环面为边界，我想消去边界，怎么办？

一男士：粘一个戒指上去。

塞吉·兰：很好，那是对的。戒指是环面的内部。我取一个戒指，把它粘到环面上，这与在圆上粘一个盖子类似，但是维数不一样。这样，我就可以消去一片边界。

男士：一条章鱼可以有多少条腿？

塞吉·兰：随便多少都行。两条章鱼的腿的数目还可以不一样，这种情况下它们就不等价。[笑声。]

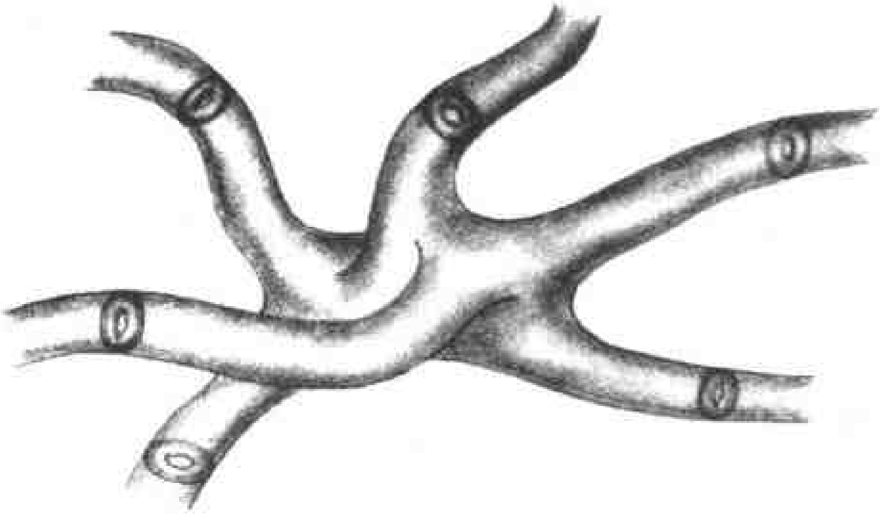
男士：如果一条章鱼的腿的数目是奇数，另一条章鱼的腿的数目是偶数，你怎样作它们的和呢？

塞吉·兰：我没有说要你把一条章鱼的所有腿与另一条的所有腿都粘上。你可以把一部分腿粘起来，把另一些腿用戒指盖上。

男士：什么是 $T^2 \times R$？

塞吉·兰： 好，$T^2 \times R$，它是……嗯……它像一个没有洞的章鱼，只有两条腿。

如果我切开 $T^2 \times R$，作成一个截面，我得到一个边界，它是一个环面。也存在没有洞的章鱼，但有很多条腿。



就像对曲面一样，我们说一个章鱼是不可约的，如果你把它表成两个章鱼的和，那其中之一必定等价于 $T^2\times R$，或者就是盖上一个盖子，就像那位男士刚才所说，粘上一个戒指。

如果我取一个章鱼，求它与 $T^2\times R$ 的和，那我得到一个新的章鱼，它与原来的章鱼是等价的。从等价的观点来看，什么也没改变。我们说，对于这种切去和粘上腿的办法作成的加法来说，$T^2\times R$ 是零元。

现在完全可以相信，经过有限步这种加法我可以去掉所有的腿。让我把它写下来。

> 经有限步加法后，可以有多种方法消去所有的腿。这样，我们得到一个三维流形，它是紧致的，没有边界。

女士：但可能有洞。

塞吉·兰：是的，肯定是的。我们消去了腿，但创造了洞，而且可能有很多洞。这是构作三维流形的方法之一，这些流形是紧致的，没有边界……还有，是可定向的，加上这条足以使我良心上过得去，也使别人无法抱怨。

当然，下一次你去海滩，你可以试试——[笑声。]切下章鱼的一些腿，然后粘到一起，甚至可以先打一个结再粘。

为了对章鱼分类,我们必须对不可约的章鱼进行分类,然后对加的方法进行分类,就是切腿和粘上的方法。直到现在,我已经描述了一些几何模式;先是曲面的模式,然后是三维流形的模式,章鱼,和三维球面 S^3,它不是章鱼而是另外的东西。

一听众:它没有洞。

塞吉·兰:是的,它没有洞。于是人们可以提出这样的问题。

取所有的紧致三维流形,没有洞,也没有边界。你能把它们描述清楚吗?这个问题至今未能解决。庞卡莱猜测说:紧致的、没有洞的、没有边界的三维流形一定是三维球面 S^3。他猜测没有其他东西。当然,应该把"没有洞"的意思说得更精确一些,但今天让我们把这个技术性问题放在一边。

很多人企图找到庞卡莱猜测的答案,但至今无人成功。1960 年,斯麦尔对五维及五维以上的情形证明了类似的猜测。从那以后,就只剩下三维和四维的情形了。但维数愈小,证明愈困难,因为你没有足够的空间左右移动。1981 年,弗雷得曼(Freedman)解决了四维的情形。很多数学家的工作对此都有贡献。他们用"纯粹的思想",而不是用很多复杂技术,把这门理论尽力发展,终于攻破难关。

弗雷得曼经过 6 至 10 年的努力得到成功。这是非常困难的,很带技巧性的、极其复杂的工作。它是现代数学最伟大的成就之一,是一流水平的工作。

现在只剩下三维的情况了。

因此,我说不出三维流形的完全分类,因为庞卡莱猜测还没证明。除庞卡莱猜测,对其他的三维流形,塞斯顿提出了一个猜测(而他自己已经证明了相当大一部分):

可以列出一张具体的某些流形的表,不算太大,使得:

每一个没有边界,可定向的,紧致的三维流形或者是在这张表中,或者是一些章鱼的和。

至此，我已经把涉及橡皮几何的部分讲完了。至于塞斯顿猜测和它的那张表的更确切的描述，则需要完全不同的另外一些思想。

相当有趣的，甚至是非常有趣的，是那张表中的流形的构作方法与构作带腿的章鱼的方法差不多。换言之，用同一种办法可以造出有腿的和没腿的流形。要做这件事，我们要放下橡皮几何，做完全不同的另一种几何。多数听众可能已经听说过非欧几何。但我们是要做三维的非欧几何。

继续讲下去之前，谁有问题？你们对今天所讲感觉如何？

一男士：在章鱼身上的每一点，有一个环面还是有多个环面？

塞吉·兰：那不一定。如果我切下一条腿得到一个断面，那我得出一个环面。如果我切另外的什么地方，那就不一定了。只有切的地方对了，切的是腿，才能得到一个环面，数学家会这样说：

> 章鱼是一个非紧致，无边界的三维流形，它有有限多个端头，每个端头等价于 $T^2 \times R$。

所以，如果我在某点切章鱼，切下的不是腿，我切的某处不是等价于 $T^2 \times R$ 的端头，那就无法保证得出一个环面。其实，如果我切某处，我可以切一个球，就像你取一个冰淇淋球，你会留下一个球面为边界。你也可以想像瑞士奶酪中的气泡，与曲面的情形一样。在曲面的情形，我切下一个圆盘，留下一个圆作为边界，那正是我们定义用粘接方法求两个曲面之和时所为。

切下一些球，我可以把一些三维流形加在一起。在第一个流形上切下一个球，再在另一流形上切下一个球，每个流形上都留下了边界，它是一个球面。把这两个球面粘到一起就得到两个流形的和。说一个流形不可约是指，若你把它表为两个流形之和，则其中之一必等价

于一个球面 S^3。[①] 米尔诺(Milnor)1962年证明每个紧致、无边界三维流形可以表示成不可约流形之和,且表示法本质上是惟一的。[②]这把三维流形的分类问题化成了不可约流形的分类问题。当然,总是在等价的意义下谈的。

有其他问题吗?没有?好,那我们继续下去,我们来谈距离几何,以及非欧几何。但我已讲了两个半小时。我该拿这些非欧玩意儿怎么办呢?你们想走了吗?听够了吗?你们说怎么办就怎么办吧。

一女士:不,我们留下,你诱发了我们的好奇心,我们愿听下去。

塞吉·兰:啊,我诱发了你的好奇心!那么,章鱼沉下去了。好[笑],休息五分钟如何?

听众:不,我们都坐在这里,请继续吧。

一男士:现在我们正想听,继续吧。[这位男士做了一个手势,意指"继续"。]

塞吉·兰:好,那就继续讲。你们对数学还真有胃口!如果哪位想走,有约会,请便。[笑声。]不是我想赶你走,但是……

[若干人离场,在最后一小时演讲中,陆续有人离场。]

第三小时

现在,我们放下橡皮几何,来谈距离几何。在实直线上,或者平面上,或者通常的三维空间中,我们都有距离的概念。我们现在感兴趣于一种新的等价关系,它得保持距离。我们把保持距离的变换称为运动。在欧氏几何中有运动,在非欧几何中也有运动。但我想从欧氏情

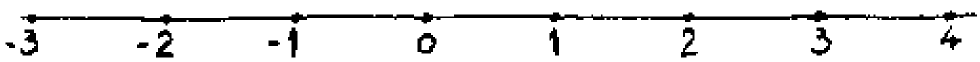
---

① 注意这里的"不可约"是对沿球面作和而言,与前面的沿环面作和而言的不可约是不同的。这是两种不同的求和法,提到求和时应在上下文中指明是指何种求和法。

② J. Milnor, "A unique factorization theorem for 3-manifolds," *Amer. J. Math*. 84 (1962).

况开始，以求讲清其中的思想。运用这些运动，我们可以规定某种同一，它会使我们再次看到章鱼，而距离几何就这样与橡皮几何汇合到一起。所以，我们现在要讲的东西，是相当实质性的。

让我们从直线 R 开始，它上面有 $1,2,3,\cdots,-1,-2,-3,\cdots$

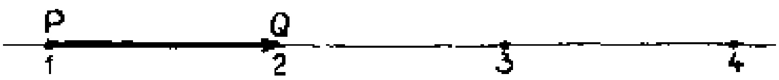


如果给定了一个方向，和一段距离，我把它表示成一个箭头：

取一个点 P。我可以让它沿箭头所指方向移动箭头给定的距离。于是我得到一个点 Q，把它称为 P 的平移并记成 $\tau(P)$①.

$$P \longrightarrow Q=\tau(P).$$

为具体起见，取箭头的长度为 1。于是 1 的平移是 2；2 的平移是 3，等等。现在我把一点 P 和它的所有平移同一起来。让我来画一个点和它的平移。



如果我作这样的同一，我得到一个圆，就如同本讲开头所作的。我取一条线段，带有端点，而我让两个端点等同起来，就得到一个圆。

对你来说，期望作这样的同一，是很正常的反应，很数学化的反

① 字母 τ 是希腊字母，发音类似于 /tau/，我本来也可以用字母 T，但我们已经用 T 表示环面，所以换一个字母。

应。我们现在就正在用这种方法。此法在定义橡皮几何中的等价性时是不允许的。简而言之,在一条直线上,我让每个点与其按给定方向、给定距离的平移同一起来,就得到一个圆。

当然,如果 P 是一个点,那我把 P 和下一个点 $Q=\tau(P)$ 同一,然后,再下一个 $R=\tau(Q)$。我应当怎样写 R?

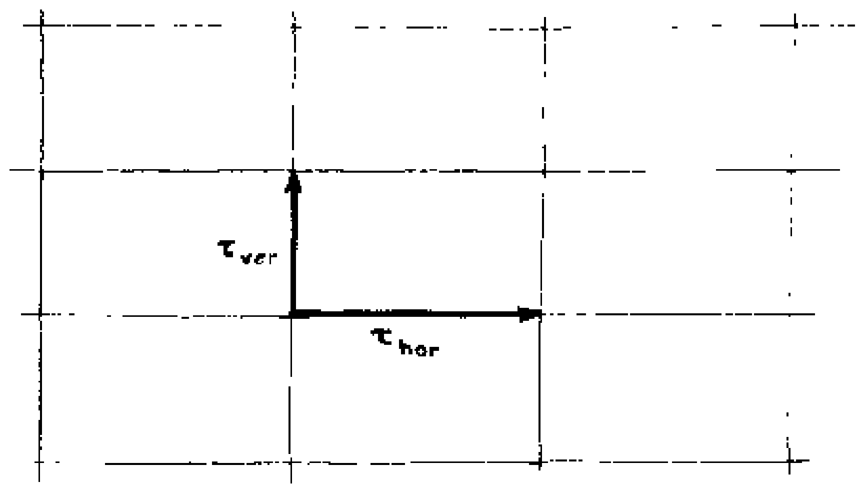
听众:$\tau(\tau(P))$.

塞吉·兰:对了,$\tau(\tau(P))$,也可写成 $\tau^2(P)$。如果我再来一次,我就写

$$\tau(R)=\tau(\tau(\tau(P)))=\tau^3(P).$$

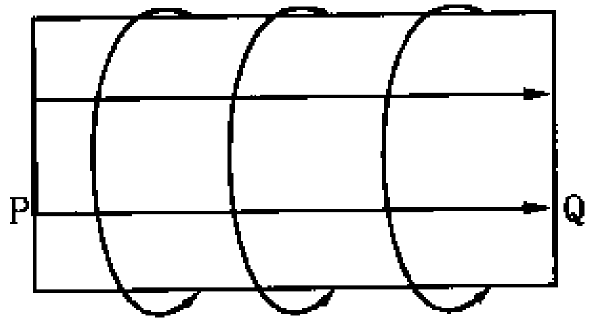
如果往相反方向作平移,我就写 $\tau^{-1}(P)$。

好了,我们转向二维情形。这时我有水平的平移和垂直的平移,分别表示为 τ_{hor} 和 τ_{ver}。



我现在又可以往两个方向作平移和同一:水平的和垂直的方向。如果我把下图中点 P 和点 Q 同一起来,就是把长方形的左边和右边

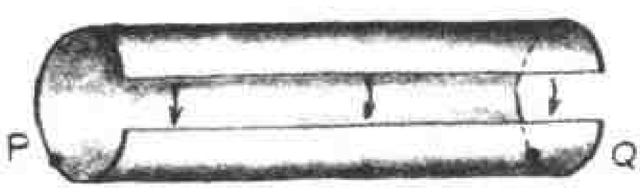
同一起来。我还把上边和下边同一起来。



我得到什么?

女士:一个球面。

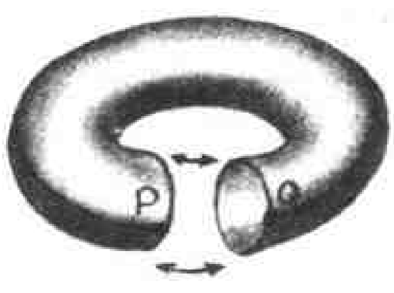
塞吉·兰:不! 请看,同一的意思是什么? 当我把上边和下边同一起来,我得到柱面。



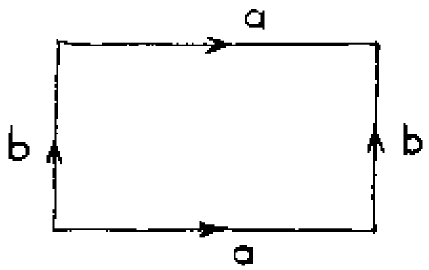
现在若把两边同一起来,我得到什么?

听众:环面。

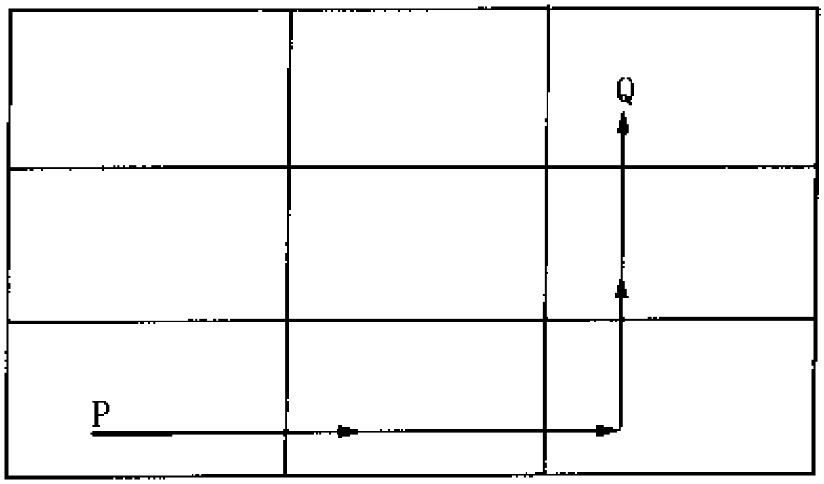
塞吉·兰:对了,一个环面,T^2。



现在你看到了,我可以由二维的图形,经过水平的和垂直的同一而描述环面。



我可以对整个平面做这种同一。



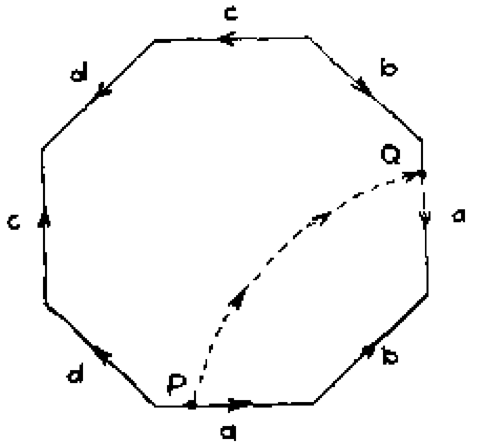
如果平面上的一个点可以经过若干次垂直的或水平的平移跑到另一个点,我就说这两个点等价。但这种等价与橡皮几何中的等价是不同的。这里我加进了方向和距离的概念。现在我需要这两个概念,而从前我完全没有管它们。

所以我必须说清楚,所指的是哪一种等价。我需要两个不同的词来表示这两种等价。我得约定某种术语,我马上要来系统地解说它。

好,运用作同一的办法我得到一个环面,就是有一个洞的曲面。如果我想要得到一个有多个洞的曲面,你能猜出该怎样做吗?这里,我从一个长方形出发,作出了一个环面。如果我想要得到一个,例如说,有两个洞的曲面,我应该怎样作同一呢?

女士:画另一条直线在当中,诸如此类。

塞吉·兰:是的,你说对了,应该画更多的线,但你说得也不完全对。让我告诉你怎么做。不用四边形,而用一个八边形。



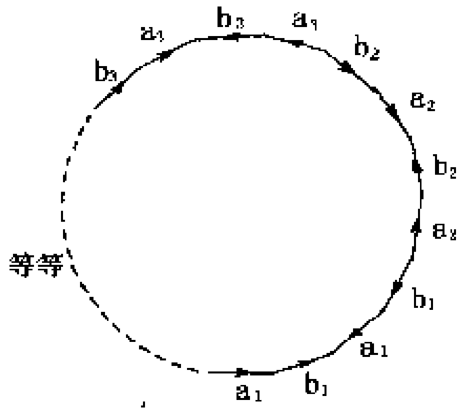
像我画的那样去做同一。例如,把我画的点 P 和点 Q 同一起来。如果我想要一个有三个洞的曲面呢?

听众:用十二边形。

塞吉·兰:对,两个洞的曲面要八条边,三个洞的曲面要十二条边。如果我想要 n 个洞的曲面呢,我需要——

听众: $4n$ 条边。

塞吉·兰:很好,我把它画成这样。



这就是如何得到一个有多个洞的曲面的方法。

男士:如果你有一个六边形呢?

塞吉·兰:那我不能像前面一样得出一个有洞的曲面。我可以得到某种别的东西,不可定向的曲面,但是,今天,我只想谈可定向的曲面。① 但你的问题表明你已经懂了我所讲的。

你看到了,环面可以作为平面的商西得,就是说用取同一的方法,这将被写成一个斜线

$$T^2 \quad \sim \quad \text{同一} \setminus R^2.$$

这里的同一是平移。

男士:2 的意思是什么?

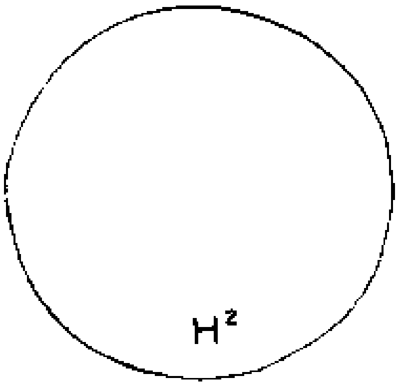
塞吉·兰:它表示维数。写在肩上的数字,即上标,就是用来表示维数的,不表示其他意思。我发了誓不用数字,但是肩上写一个小小的 2 仍然是有用的。我说了我只谈几何的事情,但是这个 2 只表示维数。你们允许我这样做吗?

听众:可以。

塞吉·兰: 谢谢。因为我答应了今天不用数字,但这个 2 不是真正的数字。[*笑声。*]

好,所以我把 T^2 表成了 R^2 关于平移的商。而这是欧氏空间及其上的平移。现在,让我转向非欧几何的运动。

非欧平西的模式之一是圆盘。我把它称为 H^2,H 代表双曲,H 是双曲的英文词(hyperbolic)的第一个字母。

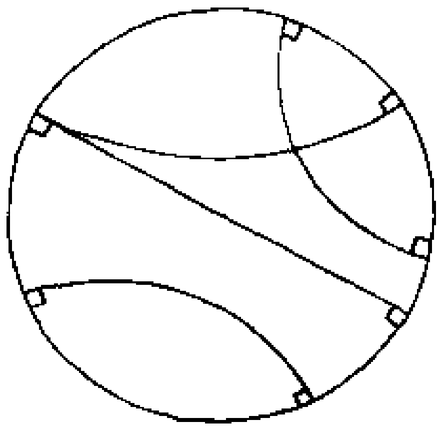


① 这依赖于作同一的边的位置和方向。有时会得到环面,有时会得到不可定向曲面。这是一个很好的练习:研究把 $2n$ 个边的多边形作同一能得到哪些曲面。

我需要双曲距离的概念,和在这种距离下的"直线"的概念。今天的听众中,一定有些人已经知道这些。谁知道?

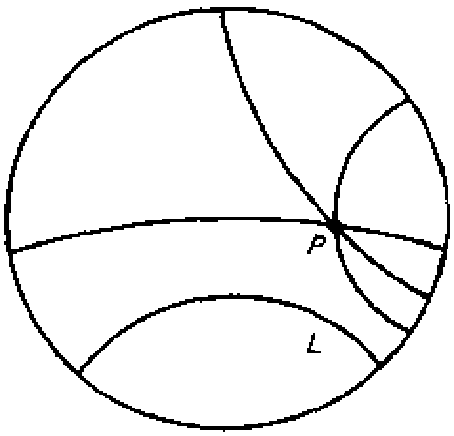
听众:???

塞吉·兰: 好,我来讲它的意思。按定义,双曲直线就是 H^2 中的一段圆弧,与边界相垂直者。我可以把它画成这样,这里是一些双曲直线。

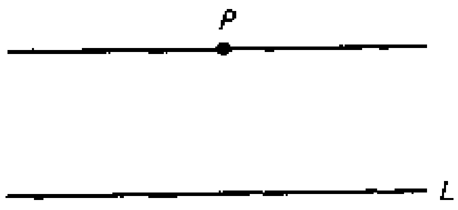


其中有些互相相交,而另一些则不然。垂直一词的含义与欧氏几何的一样。

你看到了,你可以有无穷多条直线通过一个点 P,它们都不与另一条直线 L 相交。这在欧氏几何中是不会发生的。



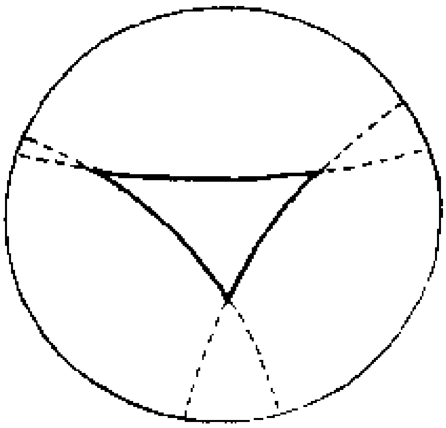
非欧情形



欧氏情形

在欧氏几何中，给定一条直线 L 和一个点 P，一定正好有一条通过 P 的直线与直线 L 相平行。

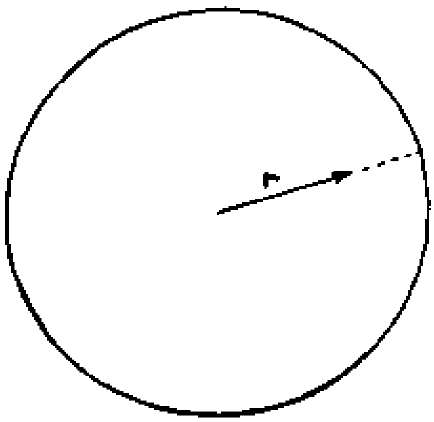
我们定义三角形，就像在欧氏几何中那样。这是一个三角形，它的边是线段。



现在，我们已经看到直线是什么样子，我们来描述双曲距离的概念，以及从这种观点看来，空间是什么样子。然后，我们会看到它和章鱼的关系，与三维流形分类的关系。我想讲到塞斯顿猜测为止。

所以，我们得定义一种新的距离，称为双曲距离。它又被法国人称为庞卡莱距离，而被俄罗斯人称为罗巴切夫斯基距离。我把它称为双曲距离，两面都不得罪。[笑声。]

要完全描述双曲距离，我需要一些公式，而我不想在这里写一些太技术性的公式。但我要说到当我从中心往边上走时距离变化的速度。这意味着，如果 r 表示从中心算起的欧氏距离，



那么,双曲距离沿着一条射线变化的速度可以很简单地写出来,那就是

$$\frac{1}{1-r^2}.$$

这里,我假定了圆的半径是1。所以,如果我从圆的中心出发,沿一条射线走向边界,变化的速度如何呢?你看,如果 r 接近于1,那 r^2 也接近1,而 $1-r^2$ 就很小,于是,这个分式就很大。因此,当我走近边界时,距离变化的速度就很大,越来越大。有一个用来表示距离的公式,它要用到对数。有谁听说过对数吗?

[很多人举手。]

啊!很多人知道。那么,我来写出这个公式,不懂对数的听众可以不听。沿着射线的双曲距离是

$$d=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}.$$

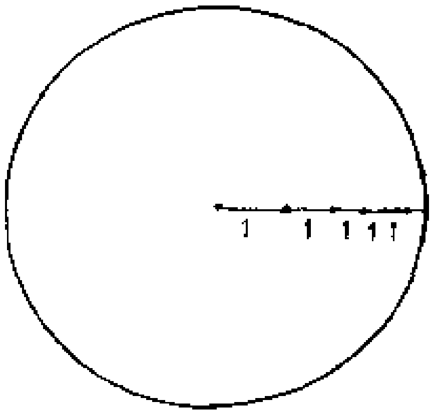
所以距离随着我们接近边界而越来越大。

你看,这很像欧氏几何的情况,也很像我们的世界。如果我们从中心出发,向边界走去,尽量走快些,那么,在我们这个宇宙,会发生什么情况呢?

我们知道欧氏模式不灵了,我们知道空间会变得弯曲,有一些像双曲直线。我们来加快速度。假设一束光线往同一方向射去。我测量它的速度,那是每秒300,000公里。现在,假定我走得快一些,如果世界是欧氏模式,那我再来测量,我会发现光速的值减小了。是吗?好了,答案是不,完全不。我总是测得同一数值。如果两列火车用同一速度往同一方向开,那么它们彼此之间相对就没有动。但是,这不适用于光,光速是恒定的。原因就是,如果我走得越来越快,我就变得越来越小,而我用以测量的工具,也变得越来越小,我用它来测量光速,总得到同一数值。

在双曲平面中,我们碰到同样的现象。这里我画了一些点,彼

此距离是 1 个单位，它们排列在一条射线上。



所以，我们怎么能知道我们不是住在这样的空间里呢？我们走得愈远，我们对另一边的事物知之愈少——甚至“另一边”是否有意义都不知道。

但是，我们依然会提出问题：我们住的世界是什么样的？那么，数学家创造一些模式，而物理学家来判定哪一种模式适合于我们住的世界。“另一边”的含义是不清楚的。若用另一种方法来看双曲平面，不把它放在适常平面中，而是内在地看它，它就是它自己，那就无所谓“另一边”。一个可以提出的问题是，我们的宇宙是不是放在另一个宇宙之中的。但我们没法同这个大宇宙打交道，我们只能从它对我们的宇宙的影响来推测它的性质。

好了，让我们回到数学。我有了这种模式，我可以做同一，就像在欧氏模式中一样。

[有人举手。]

塞吉·兰：请。

男士：你定义了到中心的距离，但能不能也定义任意两点间的距离呢？

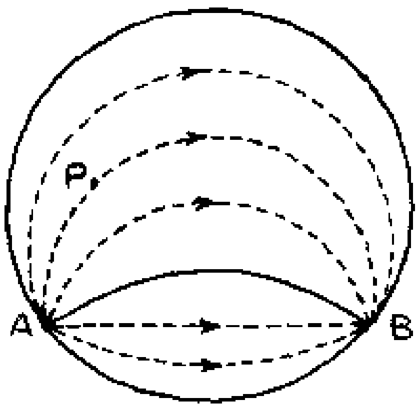
塞吉·兰：当然可以，但要这样做会涉及到更多技术性问题，公式也更加复杂，需要用双曲函数来写这些公式，所以，我不想去做

了。

好，现在，我想作同一。我需要某种运动，这种运动应该保持双曲距离。像从前一样，我可以定义平移。如果我有一条双曲直线，它给了我一个方向，我还有双曲距离的概念。取任何一个点 P，现在问：哪一点是它沿这个方向的平移？P 点沿着哪条曲线来运动？

听众：???

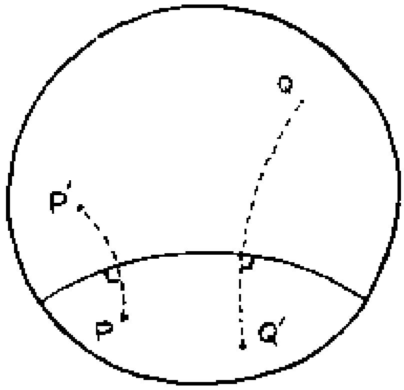
塞吉·兰：设 A，B 是双曲直线的两个端点，就像下图中所画。P 点在这条直线方向上的平移会沿弧 APB 而运动。



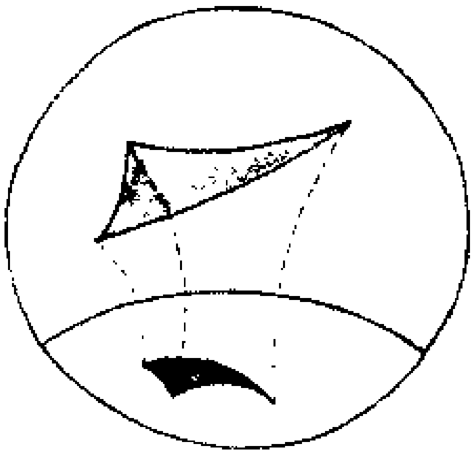
我可以沿一个方向平移，也可以沿反方向平移，也还可以多次平移等等。平移是保持距离的运动的一个例子。还有另外的例子，你知道是什么吗?

一高中学生：旋转，取镜象。

塞吉·兰：完全正确。在双曲平面上，旋转与欧氏平面上一样。至于取镜象，我来画一个点 P 及其关于一条直线的镜象。



我还可以画三角形，以及三角形关于这条直线的镜象。



一个点关于中心的镜象与欧氏情况是完全一样的。

女士： 那双曲平面有一个中心，是吗?

塞吉·兰： 不，双曲平面本身没有中心，但我们作的这个模式有中心。在双曲平面上，到处看起来都是一样的，不管这地方按欧氏距离与边界有多近。给定两个点 P 和 Q 总存在一个平移把 P 送到 Q。可以说，双曲平面是各向同性的。在双曲平面上，你离边界总是无限远。当我用圆盘来表示它时，我取了一个中心点，也就像给欧氏平面选了一个坐标原点。

好了，让我们再来作同一。我有旋转，平移，以及取镜象，我还可以把它们连起来作，重复地做。一般来说，这些就给出了所有的保持距离的变换。如我先前所说，我把它们简单地称为运动。

现在，我还要定义另一概念，运动群。我将说：

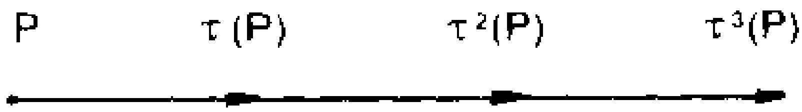
Γ 是一个运动群是指：

1）当两个运动 M_1 和 M_2 在 Γ 中，那它们的合成 M_1M_2 也在 Γ 中。

2）Γ 中一个运动 M 的逆运动也在 Γ 中。

这里说的合成 M_1M_2 是这样一个运动，当你把它作用到一点 P 时，你得到 M_1（M_2（P））。一个运动的逆运动是指：若运动把 P 送到 Q，则逆运动把 Q 送到 P。所以现在我有了运动群的概念。

我还需要离散群的概念。让我们从一个例子说起，在通常平面上，平移作为要考察的运动。取一个点 P，然后平移它。



一学生：这些点完全不相同。

塞吉·兰：是的。如果我取平面上一个有界区域，会发生什么事？

学生：这些点迟早会跑出这个区域。

塞吉·兰：对了。我可以对一个群做这件事。我说两个点 P 和 Q 关于群 Γ 等价是指存在 Γ 中的一个运动 M 使得

$$Q=M\ (P).$$

这是一个等价关系。我说 Γ 是离散的是指：给定一个点 P，那对 Γ 中所有可能的运动 M，点 M（P）中只有有限多个可以在空间中的一个有界部分中。这其实就是说在空间中任何有限部分中，在任何有界区域中，只能有有限多个点与点 P 关于 Γ 等价。

为了区分这种新等价与橡皮等价，我只得把 Γ 明确说出，所以

我会简单地说 Γ - 等价。

现在，设 Γ 是离散的。我可以来作关于 Γ 的同一。我可以把所有相互 Γ - 等价的点同一起来。经过这种同一，我得到一个新空间。我把这个新空间写成

$$\Gamma \backslash H^2.$$

这个空间也是二维的。

我刚才做了二维空间中的同一。当然，我也可以在三维空间中做。在三维空间中，我们取什么东西来作双曲空间的模式?

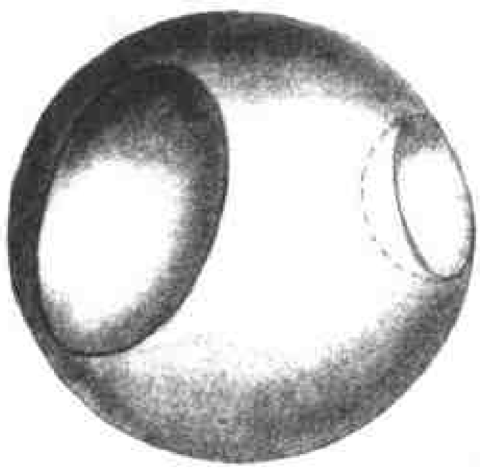
男士：球面。

塞吉·兰：是的，是球面的内部，一个球。在三维情形，我们有 H^3，它是通常的球，但是用双曲距离，这与平面上相似。当你跑向边界时，距离会变得任意大。

在三维双曲空间中，平面是什么样子?

男士：球面的一部分。

塞吉·兰：对了。



我们也可以定义平移，取镜象等等。

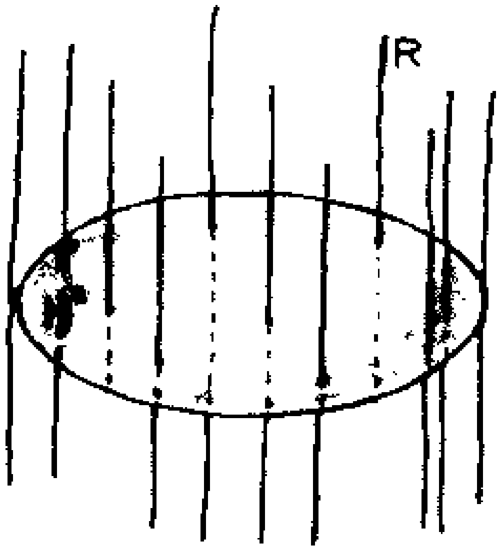
但是还有另一种办法来构作三维空间，就是用某个一维的东西和某个二维的东西来作。前面我已经用到了作乘积。现在谁能给我三维空间的另一个例子，它可以用作乘积的方法作出?

学生：取一条直线和一个双曲平面。

塞吉·兰：啊！非常好！那正是我期望你们想到的。所以，我们有了另一个例子，取双曲平面 H^2 和直线 R 的乘积，它可以写成

$$H^2 \times R。$$

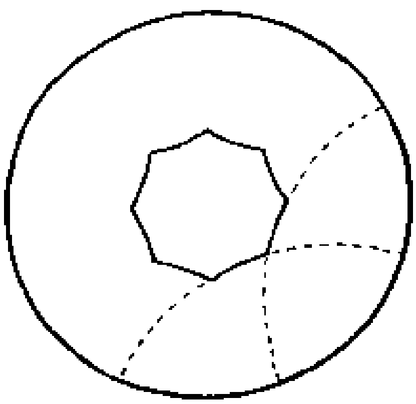
这个空间在 H^2 上有双曲距离，而在 R 上有通常距离。



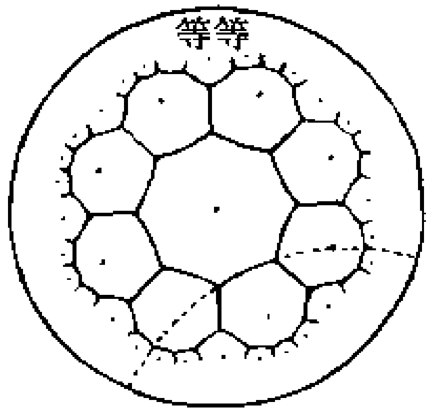
现在我们有了两个基本例子

$$H^3 \quad 和 \quad H^2 \times R$$

我们已经作好准备，下面要与橡皮几何和橡皮等价联系起来。我首先要回顾一下曲面理论的一个经典定理。让我们回到多边形，不过这次是双曲平面上的多边形。它的边是双曲直线的一段，但这样的多边形与通常的多边形是等价的，就是通过多边形的边的同一来造出曲面的那种多边形。



双曲平面可以用这种多边形的平移来覆盖，也就是说，两个平移要么没有共同点，要么有一个边全是公共点。



这就像在欧氏平面上你可以用正方形，长方形来覆盖一样。但欧氏平面不能用正八边形来覆盖，而你却可以用任何正多边形来覆盖双曲平面。

如我们先前所做的，让某些边同一，现在变成按一个平移群来作同一。我们有定理：

定理： 设 F 是紧致、可定向、无边界的曲面，不等价于球面或者环面，则存在一个离散群 Γ 使得 F 等价于双曲平面 H^2 关于 Γ 作同一。换言之，

$$F \sim \Gamma \backslash H^2.$$

这个定理是十九世纪发现的。但在塞斯顿之前，没有人想到在三维情形下有与之类似的东西。塞斯顿的重大发现就是猜测到应该有类似的结果，并且对某些情形证明了这个猜测。首先，我想谈到一个结果，它把演讲的第一部分——橡皮几何，与第二部分——非欧几何联系起来。

我们用 Γ 表示一个离散运动群，但我们进一步假定：

——对每个点 P，Γ 中的使 $M(P)=P$ 的运动 M 只能是恒等运动，即使每个点都不动的运动。

——Γ 中的运动保持方向。

我们永远假定 Γ 满足这两个附加条件，即使我没有明显提到①。例如，设 Γ 是 H^3 上的一个运动群。那我们可以有两种情况。

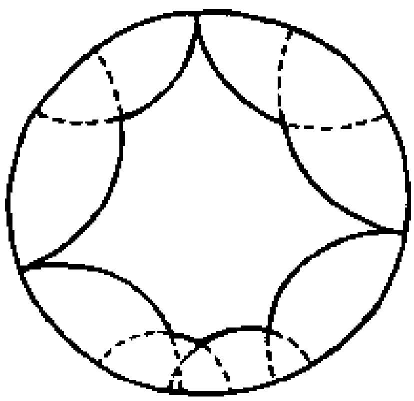
第一种情况：$\Gamma\setminus H^3$ 是紧致的。

在这种情况下，关于 Γ 作同一而得的空间是紧致的、无边界的三维流形。这是得到这种流形的方法之一。

第二种情况：$\Gamma\setminus H^3$ 不紧致。

在这种情况下，我们不单要用到距离的概念，而且要用到由它导出的体积的概念。当我作关于 Γ 的同一之后，有可能空间 $\Gamma\setminus H^3$ 的体积有限。以下总假定 Γ 表示一个群使得 $\Gamma\setminus H^3$ 的体积有限。

当然，在二维情形也有类似的现象。可能有的多边形之边跑到边界上，因此这多边形的顶点离中心任意远，如下图所示。



但你可以有一个运动群 Γ，甚至是一个平移群，使得你关于 Γ

① 平移其实就是这种情况，而这些条件将排除 Γ 中包含取镜象的可能性。

作同一而得的曲面有可以跑到无穷远的顶点。

同样的事也会在三维情形中发生，但这时就很难画出来了。跑向无穷远的那部分像根管子。

除 H^3 外，也可以取 $H^2\times R$，然后考虑群 Γ 使得$\Gamma\backslash(H^2\times R)$ 是紧致的，或者是非紧致的但体积有限，它的一些管子可跑到无穷远。这些管子看起来像什么样子？

> **定理**：设 Γ 是H^3 或者 $H^3\times R$ 上的离散运动群，让我们作关于 Γ 的同一。设所得空间的体积有限，那么，这个空间或者是紧致的，或者是一个章鱼。而且，$\Gamma\backslash H^3$ 是不可约的章鱼。

在这个定理中，应把群 Γ 看成满足上述附加条件，例如，$\Gamma\backslash H^3$或 $\Gamma\backslash(H^2\times R)$ 的体积是有限的。

一女士：是离散的，再附加这些条件吗？

塞吉·兰：是的，这是一个必须的附加条件。我要假定，经过作同一，所得的流形体积有限。

还有一个逆定理，它已经给出关于章鱼分类的某些思想。

> **定理**：每一个不可约章鱼等价于
> $$\Gamma\backslash H^3 \qquad 或 \qquad \Gamma\backslash(H^2\times R)$$
> 型空间。

所以，我们又回到了章鱼！很意外。我们从一个完全不同的观点出发，我们在一个有距离的几何中作同一，取保持距离的运动，我们得到什么？紧致流形和章鱼！这就是关于橡皮几何的第一部分和关于距离几何的第二部分的关联。

现在来看塞斯顿的猜测。我们看到两个例子，H^3 及 $H^2\times R$，

都是有距离的空间。我曾经提到适当定义的空间的表。它由

$$R^3,\quad S^3,\quad S^2\times R,\quad H^3,\quad H^2\times R$$

这5个空间，以及另外3个空间组成。而那3个我不想去写，因为它们太带技术性了。一共是8个空间。让我们用 X 表示这8个空间之一。

现在塞斯顿猜测可以作如此陈述：

猜测： 设 V 是三维流形，紧致，无边界，以及可定向。(这使我们避免事情太复杂。) 设 V 对于沿球面求和是不可约的。那么，V 等价于下列情况之一。

——存在惟一的空间 X，它是8者之一，及一个群 Γ，使得 $V\sim\Gamma\setminus X$ 且是紧致的。①

——V 是一些章鱼的有限和，且每个章鱼等价于某个 $\Gamma\setminus X$，其中　$X=H^3$　或者　$X=H^2\times R$。

除此之外，在第二种情况中，还有某种惟一性。或多或少地，这意味着如果我们把 V 写成章鱼的最小和，那么，出现在这个和中的 $\Gamma\setminus X$ 本质上是惟一决定的，即在某种等价意义下是惟一的。把这点说精确要用到太多术语，要把“本质上”的意义说清楚也是这样。你必须定义一些新的等价，现在不是做这些东西的时候。

所以你看到，要得到章鱼，你所需要的就是 H^3 及 $H^2\times R$。这就是塞斯顿企图去证明的定理，而他其实已经证明了相当一部分。②

男士： 庞卡莱猜测与此有关吗?

塞吉·兰： S^3 就在这张表中，要得到 S^3，Γ 就是平凡群。庞卡莱猜测在这张表中就这样孤立出来，你拿它没办法。

---

① 这里原文误作使 X 紧致。——译者注

② W. P. Thurston, "Three dimensional manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry", Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 63 (1982).

女士：我有点跟不上了，R^3 与 S^3 的区别是什么？

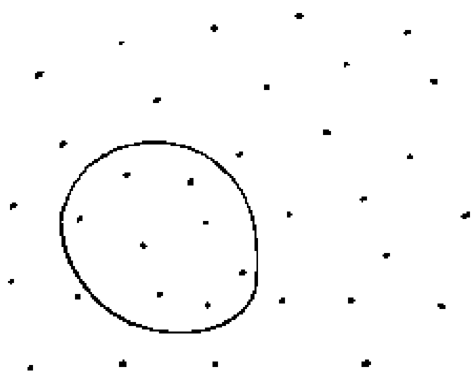
塞吉·兰：R^3 不是紧致的，它是我们周围的通常的欧氏空间，而 S^3 像一个球面，它是紧致的，但 R^3 跑到无穷。

［有人举手。］

塞吉·兰：请。

女士：你可以重复一下离散的定义吗？

塞吉·兰："离散"意味着，如果 P 是任一点，我们用 Γ 中所有可能的运动 M 去作用在 P 上，也就是对 Γ 中的所有 M 来考察点 $M(P)$，那么，在空间的任何有界区域中只有有限多个这种点。



这就是它的意思，Γ 是离散群的意思。再加上我所作的附加条件。

一高中学生：如果你取一个群，它不是离散的，你会得到什么？

塞吉·兰：某种很恶心、乱糟糟的东西。［笑声。］不，还会更复杂，它不是一个曲面。如果这个群不是离散的，首先你得问问它是不是闭的并且可看作部分适合条件的某种东西；如果是的，那么，维数会减少。[1]但是，如果群是离散的，则被你同一的两个点之间有

---

[1] 这话有些难懂，我们用一个例子来说明。在 R^2 上，设 τ 是垂直平移一个单位，σ_a 是水平平移一段距离 α，若取 Γ 为所有 σ_α，其中 α 是任意实数，那么，Γ 是闭的但非离散子群，且有 $\Gamma \backslash R^2 \sim R$，故作同一使维数减少 1。若取 Γ_1 为所有 $\tau^i\sigma_a$，其中 i 是整数（可正可负），而 α 是实数，Γ_1 也是闭的但非离散子群，这时有 $\Gamma_1 \backslash R^2 \sim \Gamma_2 \backslash R \sim S^1$，其中 Γ_2 是所有 τ^i 组成的群，而作同一也使维数减少 1，而所得空间 S^1 是紧致空间，这就是部分满足条件的含义。——译者注

大量的空间，所以作同一时维数不会改变。如果群不是离散的，也可以给你某种可怕的东西——啊，不一定可怕，但有时维数会下降。好吧，你查查书就能弄明白什么事会发生。

男士： 刚才，你用双曲几何即双曲距离的概念定义了流形。这是不是只为了方便，或者塞斯顿理论是否依赖于邻域、开集、闭集这些比双曲距离更一般的概念？

塞吉·兰： 当你说邻域、开集、闭集时，你正好是讨论一种没有距离的几何。我列了一张表包含8种几何：

R^3，　S^3　和　$S^2\times R$ 上有普通距离；

$H^2\times R$ 在 H^2 上有双曲距离，在 R 上有普通距离；

H^3 上有双曲距离；

而其余3种情形有更复杂的距离，也不是双曲距离①。

男士： 那么章鱼的拓扑性质应该与这种距离有密切联系，但初看起来它应与此无关？

塞吉·兰： 这是一个精妙的注解。塞斯顿的发现正是两种不同概念之间的联系。这正是他的理论引起广泛兴趣的原因。

高中学生： 是的，但你应该对双曲平面上的离散群进行分类，否则你得不出结果。

塞吉·兰： [笑且显出非常高兴的样子。] 他简直是绝对正确。你叫什么名字？

学生： 保尔。

---

① 这里我列出其余三种几何以供数学家参考。其一是 $\widetilde{PSL_2(R)}$，其中～表示万有复盖空间。另两种涉及的群是矩阵群。一个是由矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

组成，叫海森伯格（Heisenberg）群。

另一种由矩阵

$$\begin{pmatrix}a & 1 & b\\0 & a^{-1} & c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}，a\text{ 为正实数}$$

组成。它们作用的空间等价于 R^3，但使用的距离不同于欧氏距离。

塞吉·兰：实际上，我们在这里做了什么事？我们把一种不知道的东西化成另一种知道的或者不知道的东西。

在数学史上，在某些情况下，我们对离散群知之甚多，而在另一些情况下则不然。我们已经知道得很多，但仍然有很多依然神秘。在19世纪和20世纪中有很多人在研究它们。过去的30年中，关于这些群的研究有重大进展。我们已经对某些群了如指掌，类似地，人们对某些三维流形也知之甚多，而对另外一些却全然不知。所以我的回答是，把对流形的研究化为距离几何对离散群作商的方法，是向前进了一大步。因此我的回答是相对的。

你看，在数学上，经常发生这样的事：有两件我们完全不懂的事情，而我们去证明它们一个等价于另一个。这并非意味着毫无进展，因为问题已经减少了一半。[笑声。] 但现在发生的事不完全是这样。人们对三维流形有某些了解，也对离散群有所了解。某种意义上说，它们是互补的。把它们放到一起，塞斯顿能对二者都有了解。

这不是说我本人懂得离散群的分类，这不是我擅长的数学。我可以学，但我研究的是别的东西。我知道一些例子，如果你想听，我也可以讲一些，但我对大部分内容知之不多。数学上可做的事很多。当你需要某方面知识时，你可以找一位朋友给你讲，就像我请诺伊曼给我讲塞斯顿理论那样。

男士：让我们回到二维情形。把一个正方形作同一，你得到环面。但球面怎么办呢？

塞吉·兰：S^2除外，你不能用同一的办法得出来，至少不能用我这里讲的办法。同样，S^3 也是例外。那是庞卡莱猜测：证明紧致、无边界、没有洞的三维流形只能等价于 S^3。这个猜测仍孤傲地站在这套理论的外边。与 S^3 相关联的困难不同于与章鱼相关联的困难。

庞卡莱猜测是不可约的。①

男士： 那低维的呢，如 S^2?

塞吉·兰： 至于 S^2，没问题，19 世纪人们就知道答案了，没有洞、没有边界、可定向的二维曲面等价于 S^2。

男士： 它可以从平面的表示得出——

塞吉·兰： 不……嗯……什么样的表示?

男士： 用圆盘 H^2。

塞吉·兰： 再用离散群？不，有一个定理说不。如果你取一个圆盘，使用庞卡莱－罗巴切夫斯基几何，再取一个离散运动群，然后作同一，你永远得不到 S^2。这是一个定理。你是数学家吗?

男士： 不是。

塞吉·兰： 啊，很清楚，数学家应该知道答案。［笑声。］啊，不，不！不开玩笑，这个问题很切题，你的良好反应很引人注目。

女士： 但庞卡莱描述了两种几何，至少我觉得是。

塞吉·兰： 好，我们又回到刚才那位男士的问题。他说可以给同一个空间用多种方法赋与距离。在双曲平面上，不只是有我已说到的距离，就是距离变化速率为 $1/(1-r^2)$ 的距离，还有多种方法可以定义距离。有无穷多种定义方法。对这类距离的研究叫做微分几何。它包括研究定义距离的各种可能方法，以及引入某种等价关系来对距离进行等价分类。但真要讲这些就得开一门微分几何的课程。你是对的，这个课题在很多方面还是公开的，尚未解决的。

女士： 但具体说来，并没有实现——

塞吉·兰： 啊，具体地说，某人觉得是具体的东西，另一人会觉得很抽象。它牵涉到你的头脑，你的知识结构，你在数学上的天分，你的智力，你的品味，你的感觉。它完全是相对的，没有绝对的具体或者抽象的概念。例如，你昨天或者今天觉得太抽象的东西，明

---

① 这里作者用了不可约、不可化简（irreducible）一词的双关语义开了一个玩笑。——译者注

天就可能已变得很具体。

如果我画足够多的章鱼，它们会让你觉得很具体。在一定程度上，这是一个习惯的问题，它依赖于环境，没有绝对的答案。当然，数学家可以做一些旁人不能懂的事，旁人会从心理上说这些东西太抽象，这其实是“我不懂”的另一说法。

女士：它没有现实性。

塞吉·兰：什么“现实性”？

女士：物理上的。

塞吉·兰：啊！物理世界比你想的要广阔得多。首先，你知道，你可以取三个表空间的维数，再加上一个表时间的维数，你已经得到四维空间。如果你跑得非常快，你会看到什么？你会看到章鱼吗？你看到四维空间的东西吗？这已经有物理现实性。你的物理现实性终止于何处？你住在一个什么样的空间中？它是弯曲的吗？它是一个章鱼吗？它是不是某种像 H^3 的东西，或者球，而有另一种度量的球？至于发现是什么样的空间，有什么样的度量，是物理学家的事。应该让物理学家来从各种模式中选择，而数学家已经发现了很多模式，也许还会创造更合适的模式。一般说来，人们相信我们的空间是各向同性的。也许实际情况并非如此。

取一个在空间中游走的点。除开它的空间坐标外，它有时间坐标，还可以有速度、加速度、曲率，这些给出其他参数，其他的数值，其他的维数。取一个在空间运动的电子，同时，它还转动，振动，这又给我一些维数。要给这样的电子构造一个模式是很复杂的，甚至给电子概念一个有意义的模式也是这样。要描述这类振动的东西，要描述基本粒子，你需要其他模式，它们也是从微分几何中出来的，当然还涉及到别的东西。物理不在任何特定的地方停下来！它不是我可以在黑板上画出来的物理。对其他物理现象，也许我还需要别的模式，它们可能对你来说太抽象了。

女士：是的，当然。[这女士做一个手势，以表示她明白在物理

中可以运用的数学模式也可以从其他理论中来，不管多么抽象多么高深的理论。]

塞吉·兰： 所以，一个好的物理学家应该不被复杂的模式吓倒，他不是小鸡，他会去找他的模式，也许别人觉得太抽象的模式。发现好模式的物理学家将是胜利者。他会出现在科学史上，就是因为他能从束缚别人的思想桎梏中解放出来，把别人认为太抽象的东西具体化。换言之，没有极限。惟一的极限是每个人个体的，他的头脑、他的素质、他的品味。

[塞吉·兰停下来舒了一口气。]

啊！[笑] 一次马拉松！

[热烈掌声。经过三个半小时演讲，仍有约 100 人在场。]

好了，再见吧。不是天天有这种事，这是惟一的，能够和像你们这样的听众谈三个半小时。真是惟一的！我真的非常欣赏，我真的高兴极了！