1.9 例 题

例8 求解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解 写出线性方程组的增广矩阵

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

写出增广矩阵的简化阶梯形对应的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

x_1, x_3, x_4 为主元未知数, x_2, x_5 为自由未知数.

将含自由未知数x_2, x_5的项移到等式右边得

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 7x_5 \\ x_3 = 2 - 4x_5 \\ x_4 = -1 + 3x_5 \end{cases}$$

令 $x_2 = c_1$, $x_5 = c_2$, 得原方程组的通解 $\begin{cases} x_1 = 1 + c_1 - 7c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = 2 - 4c_2 \\ x_4 = -1 + 3c_2 \\ x_5 = c_2 \end{cases}$

其中c_1, c_2为任意常数.

例 9 设线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2. \end{cases}$

讨论常数 a 与方程组的解的关系.

解 方程组的增广矩阵为

$$B = (A, \beta) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

用初等行变换将 B 化为阶梯形.

$$B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-a)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{因式分解}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a(1-a) \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a)(a+1)^2 \end{pmatrix}.$$

下面讨论 a 与方程组的解的关系.

情况1. $a=1$.

这时, 增广矩阵B的阶梯形为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

方程组有无穷多个解, 其通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

情况 2. $a=-2$.

这时, $B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a(1-a) \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a)(a+1)^2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

方程组无解.

情况 3. $a \neq 1, a \neq -2$.

$$\text{这时}, B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a(1-a) \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a)(a+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{a-1}R_2, \frac{1}{(1-a)(a+2)}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & (a+1)^2/(a+2) \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & a & a^2 \\
0 & 1 & -1 & -a \\
0 & 0 & 1 & (a+1)^2/(a+2)
\end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -(a+1)/(a+2) \\
0 & 1 & 0 & 1/(a+2) \\
0 & 0 & 1 & (1+a)^2/(a+2)
\end{pmatrix}.
$$

方程组有唯一解

$$x_1=-\frac{a+1}{a+2},\quad x_2=\frac{1}{a+2},\quad x_3=\frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

结论:

(1) 如果 $a=1$, 则方程组有无穷多个解;

(2) 如果 $a=-2$, 则方程组无解;

(3) 如果 $a\neq 1,\ a\neq -2$, 则方程组有唯一解.

设m,n为正整数, 前n个正整数的m次幂的和满足公式

$$1^m+2^m+\cdots+n^m=a_1n+a_2n^2+\cdots+a_{m+1}n^{m+1}.$$

当$m=1$时, $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

当$m=2$时, $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

下面我们求$m=3$时的公式.

例 10 设 n 为正整数,求前 n 个正整数的 3 次幂的和

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

的计算公式.

解 已知存在4个常数 a_1, a_2, a_3, a_4, 满足

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4.$$

为了求出常数 a_1, a_2, a_3, a_4, 我们分别令 $n=1,2,3,4$

得方程组 $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 9 \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 36 \\ 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 100. \end{cases}$

写出方程组的增广矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 9 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 36 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 100 \end{pmatrix}.$

将B化为简化阶梯形 $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}$.

于是得$a_1=0, a_2=1/4, a_3=1/2, a_4=1/4$. 因此,

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^4$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.\quad \blacksquare$$