2.4 方阵

定义 行数和列数相等的矩阵称为**方阵**; 行数和列数都为 n 的方阵称为 **n 阶矩阵**或 **n 阶方阵**.

n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为 A 的**对角元**.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角元都等于1, 其它元素都等于零的方阵称为

单位矩阵. n阶单位矩阵记作I_n.

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

对任意的$m\times n$矩阵A, 都有$I_mA=AI_n=A$.

定义 设 m 是正整数, A 是方阵. m 个A 的乘积称为**A 的 m 次方**,记作 A^m.

约定 $A^0 = I$, $A^1 = A$.

性质 3

(1) 如果 s, t 为非负整数, 则 $A^s A^t = A^{s+t}$, $(A^s)^t = A^{st}$.

(2) 设 A, B 为同阶方阵, m 为正整数. 如果 $AB = BA$,

那么 $(AB)^m = A^m B^m$. ∎

例 7 设 A, B 是同阶方阵. 证明:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

成立的充分必要条件是 $AB = BA$.

证明

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A(A+B) + B(A+B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2\end{aligned}$$

充分性. 设 $AB = BA$, 那么

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

必要性. 设 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, 那么

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$

$$=A^2+2AB+B^2.$$

因此, $AB=BA$. 证毕

定义 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是常数,

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m x^0$$

是 x 的多项式. 对于方阵A,

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m I$$

称为**方阵A的多项式**.

性质 4

设 $f(x), g(x), h(x)$ 是 x 的多项式, A是方阵.如果

$f(x)=g(x)\,h(x)$, 那么 $f(A)=g(A)\,h(A)$. ∎

斐波那契数列 $(\text{Leonardo Fibonacci}, 1170-1250)$

定义 如果数列F_n满足下列条件

(1) $F_0=1, F_1=1,$

(2) 当$n\geq 2$时, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2},$

则称为斐波那契数列.

例 8 斐波那契数列的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$