1.3 解线性方程组的消元法

例 3 求下列线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases} \qquad (\mathrm{L}_1)$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

$\times(-2)$ $\times(-2)$ $\times(-3)$

第1个方程乘以(-2)分别加到第2, 第3个方程,

第1个方程乘以(-3)

加到第4个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases} \qquad (L_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases} \qquad (\mathrm{L}_2)$$

第 2 个方程乘以 $\frac{1}{2}$, 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases} \qquad (\mathrm{L}_3)$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\
x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
-5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 \\
3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3
\end{cases}
\quad \times 5 \quad \times(-3) \qquad (\mathrm{L}_3)
$$

第 2 个方程乘以5 加到第3 个方程,

第 2 个方程乘以(−3)

加到第4 个方程, 得

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\
x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
2x_4 = -6 \\
x_4 = -3
\end{cases}
\qquad (\mathrm{L}_4)
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\
\qquad x_2 - \ \ x_3 + x_4 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad 2x_4 = -6 \\
\qquad\qquad\qquad\ \ x_4 = -3
\end{cases}
\qquad (\mathrm{L}_4)
$$

互换第 3, 第 4 两个方程, 得

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\
\qquad x_2 - \ \ x_3 + x_4 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\ \ x_4 = -3 \\
\qquad\qquad\qquad 2x_4 = -6
\end{cases}
\qquad (\mathrm{L}_5)
$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ \quad\ \ x_2 - \ x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad\ \ x_4 = -3 \ \times(-2) \\ \qquad\qquad\quad 2x_4 = -6 \end{cases} \qquad (L_5)$$

第3个方程乘以(-2)加到第4个方程，并去掉方程$0=0$得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ \quad\ \ x_2 - x_3 + \ x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad\ \ x_4 = -3 \end{cases} \qquad (L_6)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & \times(-1) \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & \times(-1) \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad (L_6)$$

第3个方程乘以(−1)分别加到第1,第2个方程,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad (L_7)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \quad = 7 \\ \qquad x_2 - x_3 \quad = 3 \\ \qquad\qquad x_4 = -3 \end{cases} \quad \times(-1) \qquad (\mathrm{L}_7)$$

第 2 个方程乘以(–1) 加到第1 个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 \quad = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 \quad = 3 \\ \qquad\qquad x_4 = -3 \end{cases} \qquad (\mathrm{L}_8)$$

因此,原方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

与方程组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 是同解的.

将方程组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 中每个方程的第1个

未知数项留在等式左边，其余项都移到等式右边，得

$$\begin{cases} x_1 = 4 + x_3 \\ x_2 = 3 + x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \qquad (\mathrm{L}_9)$$

在 $\begin{cases} x_1 = 4 + x_3 \\ x_2 = 3 + x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 中, 对 x_3 的任意一个赋值 $x_3 = c$,

可得方程组 $\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 \quad = 4 \\ \quad\quad x_2 - x_3 \quad = 3 \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_4 = -3 \end{cases}$ 的一个解: $\begin{cases} x_1 = 4 + c \\ x_2 = 3 + c \\ x_3 = c \\ x_4 = -3 \end{cases}$

而且，如果s_1, s_2, s_3, s_4是方程组$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 4 \\ \quad x_2 - x_3 = 3 \\ \qquad\qquad x_4 = -3 \end{cases}$

的一个解，那么令$s_3 = c$，则有$\begin{cases} s_1 = 4 + c \\ s_2 = 3 + c \\ s_3 = c \\ s_4 = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 4 + c \\ x_2 = 3 + c \\ x_3 = c \\ x_4 = -3 \end{cases}$

因此, 方程组(L_1)的解的一般形式为

$$\begin{cases} x_1 = 4 + c \\ x_2 = 3 + c \\ x_3 = c \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

其中 c 为任意常数. ▮

例题中的方程组有无穷多个解,最后给出的对所有解的描述称为方程组的**通解**.

$$\begin{cases} x_1 = 4 + c \\ x_2 = 3 + c \\ x_3 = c \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

例题中解方程组的方法称为**消元法**.

从前面的讨论以及解线性方程组的过程可以看出以下几个事实:

(1) 方程作为整体参加运算.

(2) 在求解方程组的过程中, 运算在相同未知数的系数之间以及常数项之间进行, 未知数不参加运算.

(3) 线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 与有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$ 一一对应.

(4) $m \times n$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

与 m 个按顺序排列的有序数组 一一对应:

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \quad b_1)$$

$$(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \quad b_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, b_m)$$