2.6 初等矩阵

在 §1.5 中, 我们定义了矩阵A的初等行变换

$R_i \leftrightarrow R_j$ 互换A的第i行与第j行;

hR_i A的第i行乘以非零常数h;

$kR_i + R_j$ A的第i行的k倍加到第j行上.

现在定义矩阵A的初等列变换.

互换A的第i列与第j列;

A的第i列乘以非零常数h;

A的第i列的k倍加到第j列.

上述三种变换称为矩阵A的**初等列变换**.

如果A可以经有限次初等列变换化成为B, 则称**A与B是列等价的**.

定 义　矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

定 义　如果对矩阵A作有限次初等变换得B, 则称A与B是**等价的**, 记作 $A \cong B$.

定义 对n阶单位矩阵I_n作一次初等变换得到的矩阵称为**n阶初等矩阵**.

三种初等矩阵:

第1型：互换单位矩阵的两行或两列;

第2型：用非零常数乘以单位矩阵的某行或某列;

第3型：单位矩阵的某行(列)的常数倍加到另一行(列).

(1) 互换n阶单位矩阵的第 i, j 两行或第 i, j 两列得到的初等矩阵都是

$$E_n(i \leftrightarrow j) = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} & & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{第} \\ i \\ \text{列} \end{array} & & & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{第} \\ j \\ \text{列} \end{array} & & & \end{array} &
\end{array}$$

$E_n(i \leftrightarrow j)$ 按行表示为 $E_n(i \leftrightarrow j) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{i-1}^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_j^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_{i+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{j-1}^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_i^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_{j+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varepsilon_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$

$E_n(i \leftrightarrow j)$ 按列表示为

$$E_n(i \leftrightarrow j) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_j, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{j+1}, \cdots, \varepsilon_n).$$

(2) n阶单位矩阵的第i行或第i列乘以非零常数h得到的初等矩阵都是

$$E_n(i(h)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & h & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \uparrow \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}$$

$$E_n(i(h))\text{ 按行表示为 }E_n(i(h))=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \varepsilon_{i-1}^{\mathrm{T}}\\ h\varepsilon_i^{\mathrm{T}}\\ \varepsilon_{i+1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \varepsilon_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$E_n(i(h))\text{ 按列表示为 }(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i-1},h\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n).$$

(3) 设 $i < j$, n阶单位矩阵的第 i 行的 k 倍加到第 j 行得到的初等矩阵是

$$E_n(i(k) \to j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

设 $i<j$, n 阶单位矩阵的第 i 列的 k 倍加到第 j 列得到的初等矩阵是

$$
E_n(j(k)\to i)=\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{第} & & \text{第} & & \\
 & & i & & j & & \\
 & & \text{列} & & \text{列} & &
\end{array}
\end{array}
$$

$$E_n(i(k)\to j)\text{ 按行表示为}\begin{pmatrix}\varepsilon_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ \varepsilon_i^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ \varepsilon_{j-1}^{\mathrm{T}}\\ k\varepsilon_i^{\mathrm{T}}+\varepsilon_j^{\mathrm{T}}\\ \varepsilon_{j+1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ \varepsilon_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$E_n(j(k)\to i)$ 按列表示为

$$(\varepsilon_1,\cdots,\ \varepsilon_i,\cdots,\varepsilon_{j-1},k\varepsilon_i+\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1},\cdots,\varepsilon_n).$$

初等矩阵的转置

$$\left(E_n(i \leftrightarrow j)\right)^{\mathrm{T}} = E_n(i \leftrightarrow j)$$

$$\left(E_n(i(h))\right)^{\mathrm{T}} = E_n(i(h))$$

$$\left(E_n(i(k) \to j)\right)^{\mathrm{T}} = E_n(j(k) \to i)$$

命题 4 初等矩阵的转置是同种类型的初等矩阵. ▮