

## 1.5 矩阵的初等行变换



## 线性方程组的 三种初等变换



## 增广矩阵的 三种行变换

互换第 $i$ 个方程  
与第 $j$ 个方程



互换第 $i$ 行  
与第 $j$ 行

第 $i$ 个方程乘  
以非零常数 $h$



第 $i$ 行乘以  
非零常数 $h$


第 $i$ 个方程的 $k$ 倍  
加到第 $j$ 个方程上



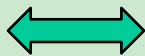
第 $i$ 行的 $k$ 倍  
加到第 $j$ 行上

## 例 5


$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

互换第1,3两个方程 

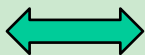
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$



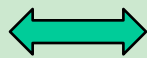
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

互换第1,3两行 

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

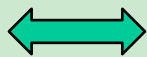


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

第2个方程乘以  $\left(\frac{1}{2}\right)$  

第2行乘以  $\left(\frac{1}{2}\right)$  

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

第1个方程的(-2)倍  
加到第3个方程上



$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ -5x_2 + 5x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$



第1行的(-2)倍  
加到第3行



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & -6 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$



**定义** 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵.

$R_i \leftrightarrow R_j$       互换  $A$  的第  $i$  行与第  $j$  行;

$hR_i$        $A$  的第  $i$  行乘以非零常数  $h$ ;

$kR_i + R_j$        $A$  的第  $i$  行的  $k$  倍加到第  $j$  行上.

上述三种变换称为**矩阵 $A$ 的初等行变换**.

如果 $A$ 可以经有限次初等行变换化成为 $B$ , 那么称  
 $A$ 与 $B$ 是**行等价的**.

## 如何用增广矩阵研究线性方程组

线性方程组(L1)  $\rightarrow$  增广矩阵  $B$

对  $B$  作有限次初等行变换得矩阵  $C$

矩阵  $C \rightarrow$  线性方程组(L2)

线性方程组(L1) 与(L2) 同解