1.4 矩阵的定义

定义 由 F 中的 $m\cdot n$ 个数构成的 m 行, n 列矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为**F 上的 $m\times n$ 矩阵**, 构成 A 的 $m\cdot n$ 个数称为 A 的**元素**. 位于矩阵A的第 i 行, 第 j 列的元素 a_{ij} 称为 **A 的 $(i,j)-$元**.

如果矩阵A的元素都是实数，则称A为**实矩阵**.

通常用大写英文字母表示矩阵，小写英文字母表示矩阵的元素.

$$m\times n \text{矩阵 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A有m个行:

$$(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n})$$
$$(a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

A有n个列:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的3种简记方法

$$m\times n\text{矩阵}\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

可以简记为 $A=(a_{ij})$.

如果将A的m个行记作

$$A_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$$
$$A_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$$

那么可以将A按行记作 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$.

如果将 A 的 n 个列依次记作

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

那么可以将A 按列记作 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

几种特殊类型的矩阵

$1\times n$ 矩阵 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 只有一行，称为**行矩阵**；

$n\times 1$ 矩阵 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 只有一列，称为**列矩阵**.

列矩阵也常用小写希腊字母表示.

1×1 矩阵 $A=(a)$ 有时等同于数 a.

如果矩阵A的所有元素都为零, 则称A为零矩阵;

至少有一个元素不为零的矩阵称为非零矩阵.

矩阵中所有元素都为零的行称为零行, 否则称为非零行;

所有元素都为零的列称为零列, 否则称为非零列.

例 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ 是一个 2×4 矩阵,

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 1+2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ 是一个 3×3 矩阵,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ 是一个 3×1 矩阵(列矩阵),

$(-2,\ 7,\ 5,\ 3/5)$ 是一个 1×4 矩阵(行矩阵). ▮

与线性方程组有关的矩阵

$m \times n$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (\mathrm{L1})$$

(L1)的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(L1)的未知数构成的列矩阵$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(L1)的常数项构成的列矩阵$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

(L1)的增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A, \beta)$$

$m\times n$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$