

## 1.2 线性方程组的初等变换

## 定义

$$\text{设} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (\text{L1})$$

$$\text{与} \left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ c_{t1}x_1 + c_{t2}x_2 + \cdots + c_{tn}x_n = d_t \end{array} \right. \quad (\text{L2})$$

都是以  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为未知数的线性方程组

如果方程组(L1)的解都是方程组(L2)的解,

方程组(L2)的解也都是方程组(L1)的解,

那么,这两个方程组称为是**同解的**.

## 线性方程组的三种变换:

互换第  $i$  个方程与第  $j$  个方程的位置;

方程组中第  $i$  个方程乘以非零常数  $h$ ;

第  $i$  个方程的  $k$  倍加到第  $j$  个方程上.

这三种变换统称为线性方程组的初等变换.

例 2

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \quad (\mathbf{L}_1)$$

互换第1个方程与第3个方程的位置

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \quad (\mathbf{L}_2)$$

第 2 个方程

乘以 $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \quad (\mathbf{L}_2)$$


得到新的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \quad (\mathbf{L}_3)$$

第1个方程的  
(-2) 倍加到  
第3个方程上

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \quad (\mathbf{L}_3)$$

得到新的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \quad (\mathbf{L}_4)$$


**定理 1** 如果对线性方程组(L1)作有限次初等变换得方程组(L2), 则方程组(L1)与方程组(L2)是同解的. ■

如果对方程组(L1)作一次初等变换得方程组(L2),  
则方程组(L1)与方程组(L2)是同解的.