线性代数

第1章 线性方程组

1.1 线性方程组

定义 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ 是常数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是未知数, 表达式 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 称为**n元线性方程**, 其中常数 a_i 是未知数 x_i 的**系数**, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, b 是**常数项**.

定义 对于 n 元线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$,

如果存在 n 个常数 $s_1, s_2, \cdots, s_n$, 当我们将

$$x_1=s_1, x_2=s_2, \cdots, x_n=s_n$$

代入方程时, 得恒等式 $a_1s_1+a_2s_2+\cdots+a_ns_n=b$,

则称 $\begin{cases} x_1=s_1 \\ x_2=s_2 \\ \vdots \\ x_n=s_n \end{cases}$ 是**线性方程的一个解**.

定义 由 m 个 n 元线性方程构成的集合

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{(L1)}$$

称为 $m \times n$ 线性方程组.

a_{ij}

方程的标号

未知数的标号

因为我们在这门课中涉及的方程组都是线性的，所以我们经常将线性方程组简称为方程组.

我们用F 表示实数集R或复数集C.

定义 系数和常数项都在数集 F 中的线性方程组称为 F 上的线性方程组.

定义 如果存在 n 个常数 $s_1, s_2, \cdots, s_n$, 使得

$$\begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

是线性方程组 (L1) 中所有方程的解,

则称
$$\begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = s_n \end{cases}$$
是**线性方程组 (L1) 的一个解**.

例 1 (1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 33 \\ 2x_1 + 4x_2 = 100 \end{cases}$ 有唯一解 $\begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 17. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ 有解,但是解不唯一.

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ 都是其解.

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$ 无解. ▮

一般来说, 一个线性方程组可能有解, 也可能无解;

在有解的情况下, 其解可能唯一, 也可能不唯一.

基本问题

(1) 如何判别线性方程组是否有解?

(2) 当线性方程组有解时, 如何判别其解是否唯一?

(3) 如何求出有解线性方程组的解?