2.8 矩阵的秩

在 § 1.6中, 我们定义了矩阵的秩:

矩阵A的阶梯形中非零行的个数称为A的**秩**.

引理 7 如果矩阵A与B是行等价的, 则A与B的非零列的个数相等;

如果矩阵A与C是列等价的, 则A与C的非零行的个数相等. ∎

命题 7 矩阵A的秩不大于A的非零行的个数, 也不大于A的非零列的个数. $\blacksquare$

引理 8 如果矩阵A与B是行等价的, 则$r(A)=r(B)$. $\blacksquare$

(B的阶梯形也是A的阶梯形)

引理 9　如果对矩阵 A 作一次初等列变换得矩阵 B，那么 $r(A) = r(B)$.

证明　设对矩阵 A 作一次初等列变换得矩阵 B，则根据定理1，存在初等矩阵 P 使得 $B = AP$. 根据命题5，存在初等矩阵 Q 满足 $PQ = I$.

设T_1是A的阶梯形. 由命题6知, $B=AP$与T_1P是行等价的, 所以

$$r(B)\overset{\text{引理8}}{=}r(T_1P)\overset{\text{命题7}}{\le}T_1P\text{的非零行数}\overset{\text{引理7}}{=}T_1\text{的非零行数}=r(A).$$

设T_2是$B=AP$的阶梯形, 则$A=BQ$与T_2Q是行等价的, 所以

$$r(A)\overset{\text{引理8}}{=}r(T_2Q)\overset{\text{命题7}}{\le}T_2Q\text{的非零行数}\overset{\text{引理7}}{=}T_2\text{的非零行数}=r(B).$$

综上所述, 我们有$r(A)=r(B)$. 证毕

由引理8和引理9可以直接推出下面的结论:

定理 2 如果矩阵A与B是等价的, 则$r(A)=r(B)$. $\blacksquare$

定理 3　$m\times n$矩阵 A 的秩为r的充分必要条件是 A 等价于如下形式的$m\times n$矩阵

$$K_r(m,n)=\begin{array}{rl}
 & \quad\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \cdots\quad 0}}^{\text{前 } r \text{ 列}} \\
\text{前 } r \text{ 行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \\[-5em]
 & \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$K_r(m,n)$的$(1,1)-$元, $(2,2)-$元,$\cdots$,$(r,r)-$元都为1,其余元都为0. ∎

命题 8　$r(A)=r(A^{\mathrm{T}})$.

证明　设$r(A)=r$. 根据定理3, $A\cong K_r(m,n)$. 根据定理1的推论, 存在初等矩阵$P_1,\cdots,P_s$, 以及$Q_1,\cdots,Q_t$, 使得

$$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=K_r(m,n).$$ 等式两边取转置得

$$Q_t^{\mathrm{T}}\cdots Q_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}\cdots P_s^{\mathrm{T}}=(K_r(m,n))^{\mathrm{T}}=K_r(n,m),$$ 所以根据命题4以及定理1的推论得 $A^{\mathrm{T}}\cong K_r(n,m)$. 因此

$$r(A)=r(K_r(m,n))=r(K_r(n,m))=r(A^{\mathrm{T}}).$$ **证毕**

定理 4 $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

证明 设$r(A)=r$,并且A与阶梯形矩阵T行等价.

根据命题6,AB与TB是行等价的. 根据命题1,TB的非零行的个数至多为r. 因此, $r(AB)=r(TB)\le r=r(A)$.

而且 $r(AB)=r((AB)^{\mathrm{T}})=r(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\le r(B^{\mathrm{T}})=r(B)$.

因此, $r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$. **证毕**

推论 如果m个矩阵$A_1, A_2, \cdots, A_m$的乘积有意义,则

$$r(A_1A_2\cdots A_m) \le \min\{r(A_1), r(A_2), \cdots, r(A_m)\}.$$

定理 5 设A为n阶矩阵. 如果$r(A)=n$, 则A 可以表示为有限个n阶初等矩阵的乘积.

证明 设A为n阶矩阵. 如果$r(A)=n$, 则A的简化阶梯形为n阶单位矩阵.根据定理1的推论,存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$, 使得$P_s \cdots P_2 P_1 A = I_n$.

根据命题5,存在初等矩阵Q_i ,满足

$$Q_i P_i = I_n,\ i \in \{1, 2, \cdots, s\}.$$

在等式$P_s\cdots P_2P_1A=I_n$两边依次左乘$Q_s,\cdots,Q_2,Q_1$得

$$Q_1Q_2\cdots Q_sP_s\cdots P_1A=Q_1Q_2\cdots Q_sI_n,$$

于是$A=Q_1Q_2\cdots Q_s$为有限个初等矩阵的乘积. 证毕