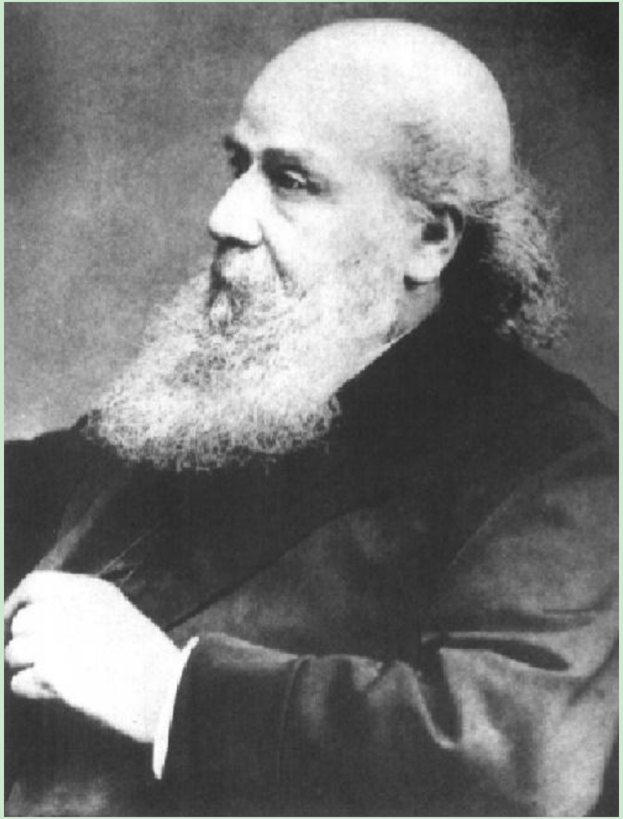
第2章　矩 阵

MATRIX

矩 阵



J . J . Sylvester　1814 - 1897

西尔维斯特　英国

2.1 矩阵的线性运算

定义 设 $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$是两个$m\times n$矩阵.

如果对任意的 $i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,$

都有 $a_{ij}=b_{ij}$, 则称 A与B相等, 记作 $A=B.$

如果 $A=B$,则A与B的对应行相等; 对应列也相等.

1. 矩阵的加法

定义 设 $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$是两个$m\times n$矩阵.

对任意的$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,$令

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$m\times n$矩阵$C=(c_{ij})$ 称为**A与B的和**, 记作

$$C=A+B.$$

2. 数乘

定义 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, k 是常数.

对任意的 $i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,$ 令 $b_{ij}=ka_{ij},$

$m\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})$ 称为常数 k 与矩阵 A 的乘积,

简称为数乘, 记作 $B=kA.$

矩阵的加法和数乘运算统称为**矩阵的线性运算**.

几个记号

(1) 零矩阵记作 $\mathbf{0}$.

(2) $(-1)\cdot A=-A$, 称为 **A 的负矩阵**.

(3) $A+(-B)=A-B$.

性质 1 设 A, B, C 是 $m\times n$ 矩阵, h, k 是常数, 那么, 下列结论成立:

(1) $A+B=B+A$;

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) $A+0=A$;

(4) $A+(-A)=0$;

(5) $1\cdot A=A$;

(6) $(hk)A=h(kA)$;

(7) $(h+k)A=hA+kA$;

(8) $k(A+B)=kA+kB$.

(1) $A+B=B+A$

$A=(a_{ij})\qquad B=(b_{ij})$

$A+B$的$(i,j)-$元为$a_{ij}+b_{ij}$

$B+A$的$(i,j)-$元为$b_{ij}+a_{ij}$

因为$a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$,所以 $A+B=B+A.$ $\blacksquare$

因为矩阵加法满足结合律, 所以$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$的和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$.

一般地, s个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s$的和记作

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_s.$$

例 1 设 $A-2B=3A+C$,其中

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}.$$

求矩阵 B.

解 因为$A-2B=3A+C$, 所以$-2B=2A+C$, 于是

$$B=-\frac{1}{2}(2A+C)=\begin{pmatrix}-1 & -3/2\\ -5/2 & 0\\ 1 & -7/2\end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$