2.2 矩阵的乘法运算

矩阵的乘法的定义

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $1\times n$ 矩阵, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是 $n\times 1$ 矩阵.

A 与 B 的乘积 AB 定义为常数

$$AB=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, $B=(b_{ij})$ 是 $n\times t$ 矩阵.

将 A 按行记作 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, 其中 $A_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$,

$i=1,2,\cdots,m.$

B 按列记作 $B=(B_1,B_2,\cdots,B_t)$,

其中 $B_j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, $j=1,2,\cdots,t.$

A与B的乘积AB的$(i, j)-$元定义为

$$A_i B_j = (a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ \ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ t.$$

因此，$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_t \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_t \end{pmatrix}$是$m\times t$矩阵.

说 明

(1) 只有A的列数等于B的行数, A与B的乘积AB才有意义.

(2) AB继承了A的行数, B的列数.

约定

我们约定今后出现的矩阵运算都是合理的,不再每一次都强调矩阵的行数和列数.

如果出现 $A+B$, 则意味着 A 与 B 可以相加;

如果出现 AB, 则意味着 A 与 B 可以相乘.

例 2

设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 5 & -2 & 4\end{pmatrix}$,求 AB.

解 $A_1=(-1,\ 3)$, $A_2=(2,\ -1)$, $A_3=(0,\ 1)$;

$$B_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

因为 $A_1B_1=1,\ A_1B_2=15,\ A_1B_3=-9,\ A_1B_4=11,$

$A_2B_1=3,\ A_2B_2=-5,\ A_2B_3=8,\ A_2B_4=-2,$

$A_3B_1=1,\ A_3B_2=5,\ A_3B_3=-2,\ A_3B_4=4,$

所以

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 5 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 15 & -9 & 11\\ 3 & -5 & 8 & -2\\ 1 & 5 & -2 & 4\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

线性方程组的矩阵表示

设 $m\times n$ 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

的系数矩阵为 A, 未知数构成的列矩阵为 X, 常数项构成的列矩阵为 β, 那么根据矩阵乘法和矩阵相等的定义, 可将方程组表示为 $AX = \beta$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad AX = \beta .$$

进一步地，设A的列为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

因此,线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以表示为下列形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

$$AX = \beta,$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta,$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = AX.$$