1.10 齐次线性方程组

定义 常数项都为零的线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
\qquad (\mathrm{H1})
$$

称为**齐次线性方程组**.

常数项不全为零的线性方程组,称为**非齐次线性方程组**.

齐次线性方程组 (H1) 一定有解, 因为

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

是它的一个解, 称为**零解**, 零解以外的解称为**非零解**.

关于齐次线性方程组 (H1), 我们关心的是它是否有非零解.

定理6 如果$m\times n$齐次线性方程组(H1)的系数矩阵为A,那么(H1)有非零解的充分必要条件是 $r(A)<n$. ■

证明

由定理5知, 齐次方程组的解唯一的充分必要条件是

$$r(A)=n.$$

所以(H1)有非零解的充分必要条件是 $r(A)<n$.

例 11 求下列齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

解 写出方程组的系数矩阵A，并将A化为简化阶梯形矩阵T

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4\\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5\\ 1 & -1 & 1 & 4 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

写出以T为系数矩阵的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 + \quad x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

其中x_2, x_4, x_5为自由未知数.

将所得方程组中含自由未知数的项都移到等式右边得

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_4 - \quad x_5 \\ x_3 = \qquad -2x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$, 则原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - 2c_2 - c_3 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = -2c_2 + 2c_3 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数. ▮

消元法

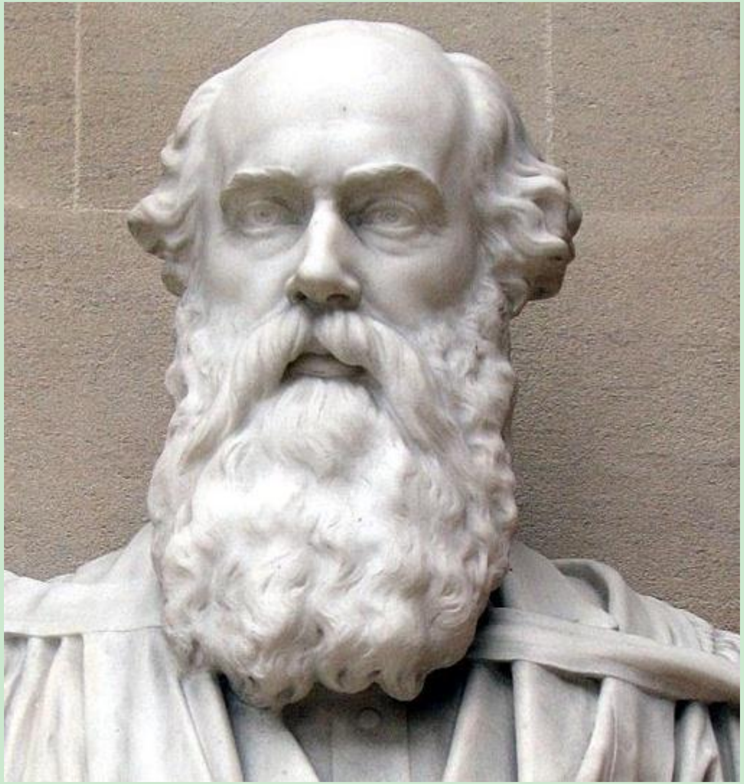
C. F. Gauss　1777 – 1855

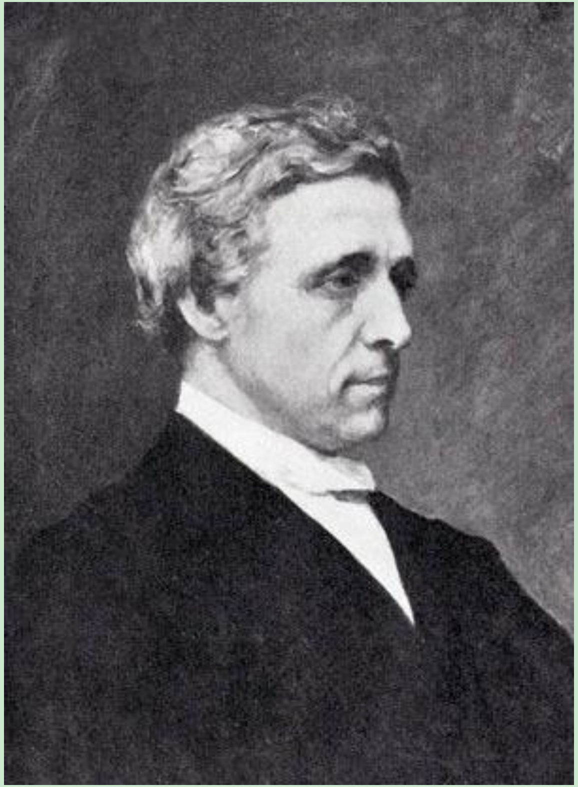
高斯　德国

增广矩阵

H. Smith　1826 – 1883

史密斯　英国





基本定理

爱丽丝漫游仙境

C. L. Dodgson　1832 – 1898

道奇森　英国