2.5 矩阵的转置

定义 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$矩阵. 对任意的 $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, 令 $b_{ij}=a_{ji}$, $n\times m$矩阵 $B=(b_{ij})$ 称为A的**转置**, 记作 A^{T}.

如果 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

那么 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

例 9 如果$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是$1\times n$矩阵,

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$是$n\times 1$矩阵,那么 $$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

而且 $AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n$$

$$= (b_1, b_2, \cdots, b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

例 10 设$A=(a_{ij})$是n阶实矩阵. 证明如果 $AA^{\mathrm{T}}=0$, 则 $A=0$.

证明 对于任意的$i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 因为AA^{T}的(i,i)-元

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}=(a_{i1})^2+(a_{i2})^2+\cdots+(a_{in})^2=0,$$

所以$a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0$. 因此, $A=0$. **证毕**

性质 5 设A, B是两个矩阵, k是任意常数, 则有

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$;

(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

证明 前3个等式显然成立,下面我们证明第4个等式.

因为

$(AB)^{\mathrm{T}}$的(i, j)–元 $= AB$的(j, i)–元

$= (A$的j行$)\cdot(B$的i列$)$ (例9)

$= (B^{\mathrm{T}}$的i行$)\cdot(A^{\mathrm{T}}$的j列$)$

$= B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$的$(i, j)$–元

所以 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. 证毕

一般地, $(A_1A_2\cdots A_m)^{\mathrm{T}} = A_m^{\mathrm{T}}\cdots A_2^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}$.

例 11 设4个矩阵 A, B, C, D 满足 $A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}C = D$,

求 A 的表达式.

解 因为 $A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}C = D$, 所以 $A^{\mathrm{T}} = D - B^{\mathrm{T}}C$. 因此

$$A = (D - B^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}} - C^{\mathrm{T}}B.$$ ∎

n阶单位矩阵 I_n 的 n 个列记作

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

I_n 的 n 个行记作

$$(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0) = \varepsilon_1^{\mathrm{T}}$$

$$(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0) = \varepsilon_2^{\mathrm{T}}$$

$$\vdots$$

$$(0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1) = \varepsilon_n^{\mathrm{T}}$$

命题 2 如果 $m\times n$ 矩阵A 的n个列为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$n$阶单位矩阵 I_n 的 n 个列为$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，那么 $\alpha_j = A\varepsilon_j$，$j=1,2,\cdots,n.$ ∎

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) &= AI_n \\
&= A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) \\
&= (A\varepsilon_1, A\varepsilon_2,\cdots, A\varepsilon_n)
\end{aligned}
$$

命题 3 如果 $m\times n$ 矩阵A的m个行为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, m阶单位矩阵I_m的 m 个行为$\varepsilon_1^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \varepsilon_m^{\mathrm{T}}$, 那么

$A_i = \varepsilon_i^{\mathrm{T}} A,\ i = 1, 2, \cdots, m.$ ∎

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = I_m A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varepsilon_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{\mathrm{T}} A \\ \varepsilon_2^{\mathrm{T}} A \\ \vdots \\ \varepsilon_m^{\mathrm{T}} A \end{pmatrix}$$