1.7 简化阶梯形矩阵

定义 设 T 是阶梯形矩阵. 如果 T 的主元所在列只有一个非零元, 则称 T 为**简化阶梯形矩阵**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 4 对任意矩阵A,存在简化阶梯形矩阵T,使得A与T 是行等价的 (或者A可以经有限次初等行变换化为简化阶梯形矩阵T,T 称为A的简化阶梯形).

证明 设T_0为A的阶梯形, T_0有r个主元, 主元所在列的标号为$j_1, j_2, \cdots, j_r$.

将T_0的第r行乘以适当常数加到第$1, 2, \cdots, r-1$行,可使第j_r列上主元以外的元素都为零.

然后将所得矩阵的第$r-1$行乘以适当常数加到第$1,2,\cdots,r-2$行,使得第j_{r-1}列上主元以外的元素都为零.

依此类推,就可以得到A的简化阶梯形T. 证毕

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8\\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{(-1)R_3+R_1 \\ (-1)R_3+R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

简化阶梯形

任意矩阵的简化阶梯形是唯一的.