1.8 关于线性方程组的基本定理

用增广矩阵的简化阶梯形研究线性方程组的性质

设 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (L1)$$

是 $m\times n$ 线性方程组, A 是 (L1) 的系数矩阵, (A, β) 是 (L1) 的增广矩阵.

设$r(A)=r$.用初等行变换将(L1)的增广矩阵(A,β)化为简化阶梯形(T,γ).

T是A的简化阶梯形.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & 1\le j_1 & & & & j_2 & & & & & j_r\le n & & & & \\
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & d_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

T的主元所在列的标号为 $j_1, j_2, \cdots, j_r$. $\delta = 1$ 或 0.

将以 (T,γ) 为增广矩阵的线性方程组记作(L2).

在(L2)中, 因为 T 的主元所在列的标号为 $j_1, j_2, \cdots, j_r$,

所以 T 的主元所在列对应的未知数为 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$.

我们将 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 称为主元未知数, 其余未知数

$x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \cdots, x_{j_n}$ 称为自由未知数.

在(L2)中, 主元未知数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 的系数都为1, 每个主元未知数只在一个方程里出现, 并且每个方程等式左边出现的第一个非零项是含主元未知数的项.

因此,方程组(L2)的形状如下

$$\begin{cases} x_{j_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = d_1 \\ \quad x_{j_2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{j_r} + \cdots = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \delta \end{cases} \tag{L2}$$

下面根据$\delta = 1$或者$\delta = 0$分两种情况讨论方程组(L2)的性质.

情况1. $\delta = 1$. 这等价于 $r(A) < r(A, \beta)$.

在这种情况下,方程组(L2)中的第 $r+1$ 个方程为 $0 = 1$. 显然,这是一个无解方程,所以方程组(L2)无解,因此,方程组(L1)无解.

情况2. $\delta = 0$. 这等价于$r(A) = r(A, \beta)$.

设$r(A) = r(A, \beta) = n$. 这时候, 方程组(L 2)为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

它就是方程组(L 1)的唯一解.

下面设$r(A)=r(A,\beta)<n$.

这时方程组(L2)中的自由未知数的个数$n-r(A)>0$.

将(L2)中的含自由未知数的项都移到等式右边得

$$\begin{cases} x_{j_1}=d_1-t_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-t_{1j_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-t_{1j_n}x_{j_n} \\ x_{j_2}=d_2-t_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-t_{2j_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-t_{2j_n}x_{j_n} \\ \qquad\vdots \\ x_{j_r}=d_r-t_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}}-t_{rj_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-t_{rj_n}x_{j_n} \end{cases} \qquad (L3)$$

方程组(L1)与(L3)同解

将自由未知数$x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \cdots, x_{j_n}$的任意赋值 $\begin{cases} x_{j_{r+1}} = c_1 \\ x_{j_{r+2}} = c_2 \\ \quad\vdots \\ x_{j_n} = c_{n-r} \end{cases}$

代入(L3)得 $\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - t_{1j_{r+1}}c_1 - t_{1j_{r+2}}c_2 - \cdots - t_{1j_n}c_{n-r} \\ x_{j_2} = d_2 - t_{2j_{r+1}}c_1 - t_{2j_{r+2}}c_2 - \cdots - t_{2j_n}c_{n-r} \\ \quad\vdots \\ x_{j_r} = d_r - t_{rj_{r+1}}c_1 - t_{rj_{r+2}}c_2 - \cdots - t_{rj_n}c_{n-r} \end{cases}$

方程组 (L1) 的通解为

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - t_{1j_{r+1}}c_1 - t_{1j_{r+2}}c_2 - \cdots - t_{1j_n}c_{n-r} \\ x_{j_2} = d_2 - t_{2j_{r+1}}c_1 - t_{2j_{r+2}}c_2 - \cdots - t_{2j_n}c_{n-r} \\ \quad\vdots \\ x_{j_r} = d_r - t_{rj_{r+1}}c_1 - t_{rj_{r+2}}c_2 - \cdots - t_{rj_n}c_{n-r} \\ x_{j_{r+1}} = c_1 \\ x_{j_{r+2}} = c_2 \\ \quad\vdots \\ x_{j_n} = c_{n-r} \end{cases}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数.

这时, 方程组 (L1) 有无穷多个解.

定理5 设(L1)是$m\times n$线性方程组, A是(L1)的系数矩阵, (A,β)是(L1)的增广矩阵. 我们有如下结论:

(1) 方程组(L1)有解的充分必要条件是

$$r(A)=r(A,\beta);$$

(2) 方程组(L1)有解并且解唯一的充分必要条件是

$$r(A)=r(A,\beta)=n.$$

进一步地, 当(L1)的解不唯一时, (L1)有无穷多个解. ▮

例7 下列矩阵是线性方程组对应的增广矩阵:

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中符号*表示任意常数.讨论方程组的解的情况.

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

因为系数矩阵与增广矩阵的秩相等, 并且等于未知数的个数, 故方程组有解并且解唯一.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$

因为系数矩阵与增广矩阵的秩相等, 并且小于未知数的个数, 故方程组有解并且解不唯一.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

因为系数矩阵与增广矩阵的秩不相等,所以方程组无解.

$$(4)\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为系数矩阵与增广矩阵的秩相等, 并且小于未知数的个数, 故方程组有解并且解不唯一.