2.7 初等矩阵的应用

在这一节，我们设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，

并且将 A 按行记作 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$，

按列记作 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

引理1 如果互换 A 的第 i, j 两行得矩阵 B, 那么

$$B = E_m(i \leftrightarrow j)A.$$

证明 根据命题3, 我们有 $A_s = \varepsilon_s^{\mathrm{T}} A, s = 1, \cdots, m$, 所以

$$B=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_i \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{\mathrm{T}}A \\ \vdots \\ \varepsilon_{i-1}^{\mathrm{T}}A \\ \varepsilon_j^{\mathrm{T}}A \\ \varepsilon_{i+1}^{\mathrm{T}}A \\ \vdots \\ \varepsilon_{j-1}^{\mathrm{T}}A \\ \varepsilon_i^{\mathrm{T}}A \\ \varepsilon_{j+1}^{\mathrm{T}}A \\ \vdots \\ \varepsilon_m^{\mathrm{T}}A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{i-1}^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_j^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_{i+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{j-1}^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_i^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon_{j+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varepsilon_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}A=E_m(i\leftrightarrow j)A.$$

证毕

引理 2 如果互换 A 的第 i, j 两列得矩阵 C, 那么

$$C = AE_n(i \leftrightarrow j).$$

证明 根据命题 2, 我们有 $\alpha_t = A\varepsilon_t,\ t = 1, 2, \cdots, n$, 所以

$$C = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_j, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n)$$

$$= (A\varepsilon_1, \cdots, A\varepsilon_{i-1}, A\varepsilon_j, A\varepsilon_{i+1}, \cdots, A\varepsilon_{j-1}, A\varepsilon_i, A\varepsilon_{j+1}, \cdots, A\varepsilon_n)$$

$$= A(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_j, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{j+1}, \cdots, \varepsilon_n)$$

$$= AE_n(i \leftrightarrow j).$$ **证毕**

引理3 如果 A 的第 i 行乘以非零常数 h 得矩阵 B，那么 $B = E_m(i(h))A$. ∎

引理4 如果 A 的第 i 列乘以非零常数 h 得矩阵 C，那么 $C = AE_n(i(h))$. ∎

引理5 如果 A 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行得矩阵 B，

那么 $B = E_m(i(k) \to j)A$. ▮

引理6 如果 A 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列得矩阵 C，

那么 $C = AE_n(j(k) \to i)$. ▮

定理1 设A是$m\times n$矩阵.如果对A作一次初等行变换得矩阵B, 相同的初等行变换作用到m阶单位矩阵得初等矩阵P, 则$B=PA$; 如果对A作一次初等列变换得矩阵C,相同的初等列变换作用到n阶单位矩阵得初等矩阵Q,则$C=AQ$.

反过来, 如果存在初等矩阵P, 使得$PA = B$, 那么对A作一次适当的初等行变换可得B; 如果存在初等矩阵Q, 使得$AQ = C$, 那么对A作一次适当的初等列变换可得C. ▮

推论 设A与B都是$m\times n$矩阵.

矩阵A与B行等价的充分必要条件是存在初等矩阵$P_1,\cdots,P_s$，使得$P_s\cdots P_1A=B$;

矩阵A与B列等价的充分必要条件是存在初等矩阵$Q_1,\cdots,Q_t$，使得$AQ_1\cdots Q_t=B$;

矩阵A与B等价的充分必要条件是存在初等矩阵$P_1,\cdots,P_s$，以及$Q_1,\cdots,Q_t$，使得$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=B$. ∎

例 12 设 A 为 3×4 矩阵.

(1) 将 A 的第 2,3 两行互换得 B, 求初等矩阵 P, 使得 $PA=B$.

(2) 将 A 的第 1 列的 k 倍加到第 4 列得 C, 求初等矩阵 Q, 使得 $AQ=C$.

解

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}1&0&0&k\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\quad \blacksquare$$

$$E_n(i \leftrightarrow j) \cdot E_n(i \leftrightarrow j) = I,$$

$$E_n(i(h)) \cdot E_n(i(1/h)) = E_n(i(1/h)) \cdot E_n(i(h)) = I,$$

$$E_n(i(k) \to j) \cdot E_n(i(-k) \to j) = E_n(i(-k) \to j) \cdot E_n(i(k) \to j) = I.$$

命题 5 如果 P 是初等矩阵, 那么存在同阶初等矩阵 Q, 使得 $PQ = QP = I$. ∎

推论 1 n阶初等矩阵 P 与单位矩阵 I_n 是行等价的,

故有 $r(P)=n$. ■

推论 2 如果矩阵 A 与 B 是行等价的,则B 与A 也是

行等价的. ■

命题 6 如果矩阵 A 与 B 是行等价的,则 AC 与 BC 也是

行等价的. ■

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = B \quad \Rightarrow \quad P_s \cdots P_2 P_1 (AC) = BC$$