2.3 矩阵乘法的性质

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times t$ 矩阵.

A 按行记作 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$，$B$ 按列记作 $B=(B_1,B_2,\cdots,B_t)$.

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_t \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_t \end{pmatrix}.$$

因为AB的第i行为$(A_iB_1, A_iB_2, \cdots, A_iB_t) = A_iB$,

所以 $AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B = AB.$$

因为AB的第 j 列为$\begin{pmatrix} A_1B_j \\ A_2B_j \\ \vdots \\ A_mB_j \end{pmatrix} = AB_j$，

所以 $AB = A(B_1, B_2, \cdots, B_t) = (AB_1, AB_2, \cdots, AB_t).$

$$(AB_1, AB_2, \cdots, AB_t) = A(B_1, B_2, \cdots, B_t) = AB.$$

如果 $A=0$ 或者 $B=0$, 则 $AB=0$.

命题1 如果 A 的第 i 行为零行, 则 AB 的第 i 行为零行; 如果 B 的第 j 列为零列, 则 AB 的第 j 列为零列. 因此

AB 的非零行的个数 $\leq A$ 的非零行的个数;

AB 的非零列的个数 $\leq B$ 的非零列的个数. ∎

例 3 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$$W=(w_1,w_2,\cdots,w_m), \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

证明 $(WA)X=W(AX)$.

证明 因为 $WA = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_{i1}, \ \sum_{i=1}^{m} w_i a_{i2}, \ \cdots, \ \sum_{i=1}^{m} w_i a_{in} \right)$,

所以 $$(WA)X = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} \right) x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} x_j .$$

因为 $AX=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\end{pmatrix}$，所以 $W(AX)=\sum_{i=1}^{m}w_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}w_ia_{ij}x_j.$$

由于$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}w_ia_{ij}x_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}w_ia_{ij}x_j$，故有 $(WA)X=W(AX)$. ∎

性质 2 设 A, B, C 是矩阵, k 是常数, 那么

(1) $(AB)C = A(BC)$;

(2) $A(B+C) = AB + AC$,

$(B+C)A = BA + CA$;

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

证明 设A的第i行为A_i, C的第j列为C_j.

因为AB的第i行为A_iB, 故$(AB)C$的(i,j)−元为$(A_iB)C_j$;

因为BC的第j列为BC_j,故$A(BC)$的(i,j)−元为$A_i(BC_j)$.

由例3可得$(A_iB)C_j = A_i(BC_j)$, 所以

$$(AB)C\text{ 的 }(i,j)-\text{元} = A(BC)\text{ 的 }(i,j)-\text{元}.$$

因此, $(AB)C = A(BC)$.

相同的方法可以证明另外3个等式. **证毕**

因为矩阵乘法满足结合律，所以3个矩阵 A, B, C 的乘积记作 ABC.

一般地，s 个矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 的乘积记作 $A_1 A_2 \cdots A_s$.

矩阵乘法不满足交换律

A 与 B 可乘, B 与 A 不一定可乘. 即使A 与 B 可乘, B 与 A 也可乘, 但是, AB 与 BA 也不一定相等.

例 4 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$,

则有 $AB=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 17\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 9 & 14\end{pmatrix}$.

AB 与 BA都是 2×2矩阵, 但是, $AB\neq BA$. ▮

矩阵乘法不满足消去律 $AB=AC$ 不一定能得出 $B=C$.

例5 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$,

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},$$

即 $AB=AC$, 但是 $B\neq C$. ▌

如果 $A=0$ 或 $B=0$,则 $AB=0$. 但是 $AB=0$ 不一定能得出 $A=0$ 或 $B=0$.

例 6 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A\neq 0$, $B\neq 0$,

但是 $AB=0$. ▮