1.5 矩阵的初等行变换

$m\times n$线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

线性方程组的三种初等变换	$\longleftrightarrow$	**增广矩阵的三种行变换**
互换第i个方程与第j个方程	$\longleftrightarrow$	互换第i行与第j行
第i个方程乘以非零常数h	$\longleftrightarrow$	第i行乘以非零常数h
第i个方程的k倍加到第j个方程上	$\longleftrightarrow$	第i行的k倍加到第j行上

例5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

互换第1,3两个方程 $\Big\downarrow$ 互换第1,3两行 $\Big\downarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

第 2 个方程乘以 $\left(\frac{1}{2}\right)$ $\Downarrow$ 第 2 行乘以 $\left(\frac{1}{2}\right)$ $\Downarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

第1个方程的(–2)倍加到第3个方程上 $\Big\downarrow$

第1行的(–2)倍加到第3行 $\Big\downarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 8 \\ \quad -5x_2 + 5x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & -6 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

定义 设A是$m \times n$矩阵.

$R_i \leftrightarrow R_j$ 互换 A 的第 i 行与第 j 行;

hR_i A 的第 i 行乘以非零常数 h;

$kR_i + R_j$ A 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上.

上述三种变换称为**矩阵A的初等行变换**.

如果A可以经有限次初等行变换化成为B, 那么称A与B是**行等价的**.

如何用增广矩阵研究线性方程组

线性方程组(L1) $\rightarrow$ 增广矩阵 B

对 B 作有限次初等行变换得矩阵C

矩阵C $\rightarrow$ 线性方程组(L2)

线性方程组(L1) 与(L2) 同解