1.6 阶梯形矩阵

阶梯形矩阵的定义

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果矩阵 T 满足下列条件:

(1) T 的零行集中在 T 的底部,

(2) T 的非零行的(从左边起) 第 1 个非零元为 1,

(3) 设 T 有 r 个非零行, T 的第 i 个非零行的第 1 个非零元位于第 j_i 列, $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 则 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$,

那么, 我们称 T 为**阶梯形矩阵**.

定义 阶梯形矩阵 T 的非零行的第 1 个非零元 1 称为 **T 的主元**.

说明

(1) 阶梯形矩阵的主元 的个数等于其非零行的个数.

(2) 零矩阵是阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 如果矩阵A与阶梯形矩阵T是行等价的，则称T为A的阶梯形.

定理 2 对任意矩阵A, 存在阶梯形矩阵T, 使得A与T是行等价的. (A可以经有限次初等行变换化为阶梯形.)

证明 如A为零矩阵, 则A已是阶梯形,故设A不为零矩阵.

(1) 确定A的第1个非零列,设为A的第j_1列.

(2) 如有必要,通过互换行使得A的第j_1列的第1个元非零.

(3) 将第1行乘以非零常数使得第1行的第1个非零元为1.

这个1是A的阶梯形的第1个主元.

(4) 将第1行乘以适当常数加到下面的行, 使得第 j_1 列的主元下方的元素都为零.

将A经以上4步变换得到的矩阵记作T_1.

(T_1的第1行就是A的阶梯形的第1行.)

(5) 对T_1的第$2,3,\cdots,m$行构成的部分矩阵重复上面的步骤(1)–(4), 得到A的阶梯形的第2行.

因为A的行数是有限的, 所以重复这个过程, 一定可以经有限次初等行变换将A化为阶梯形. 证毕

一般来说,矩阵的阶梯形不是唯一的.

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

那么,B与C都是A的阶梯形.

定理 3 矩阵的阶梯形的非零行的个数是唯一的. ■

定 义 矩阵A的阶梯形的非零行的个数称为A的**秩**, 记作$r(A)$.

如果A为零矩阵, 则$r(A)=0$.

命题 1 如果A是$m\times n$矩阵, 那么$r(A)\leq\min\{m,n\}$. ■

例6 求下列矩阵A的秩：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & -21 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

解　用初等行变换将A化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & -21 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -21 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -21 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -21 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -21 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-2)R_1+R_5]{(-3)R_1+R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4R_2+R_4]{(-2)R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-5)R_3+R_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -67/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -67/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{7}\right)R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -67/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -67/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{67}{2}R_4+R_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此, $r(A)=4$. ∎