全概率公式
贝叶斯公式

引例　某商店有100台相同型号的冰箱待售,其中60台

是甲厂生产的,25台是乙厂生产的,15台是丙厂生产的.已知这3个厂生产的冰箱质量不同,它们的不合格率分别为0.1,0.4,0.2.一位顾客从这批冰箱中随机抽取了一台.试求顾客取到不合格冰箱的概率?

解　令事件$A_1=\{$顾客取到的冰箱是甲厂生产的$\}$, $P(A_1)=0.6$,

事件 $A_2=\{$顾客取到的冰箱是乙厂生产的$\}$, $P(A_2)=0.25$,

事件 $A_3=\{$顾客取到的冰箱是丙厂生产的$\}$, $P(A_3)=0.15$,

事件 $B=\{$顾客取到的冰箱不合格$\}$.

已知条件概率

$$P(B\mid A_1)=0.1,\quad P(B\mid A_2)=0.4,\ P(B\mid A_3)=0.2,$$

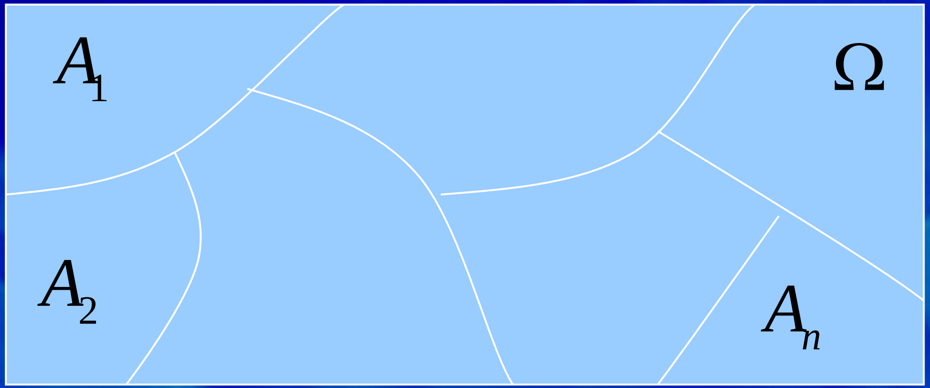
求　$P(B)=?$

定义1.1　设事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足下列两个条件:

(1)事件组中任意两个事件互不相容;（不重）

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$　（不漏）

则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成样本空间 Ω 的一个划分.



全概率公式　　设事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成样本空间 Ω 的的一个划分, 且 $P(A_i) > 0(\forall i = 1, \cdots, n)$. 则对任意事件 B 有

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)}$$

分析　$P(B) = P(B\Omega) = P(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i B))$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$$

回到引例

解　事件$A_1=${取到的冰箱来自甲厂},

事件$A_2=${取到的冰箱来自乙厂},

事件$A_3=${取到的冰箱来自丙厂},

事件$B=${取到的冰箱不合格}. 那么

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.19.$$

例1　有朋自远方来，他选择坐火车、轮船、汽车或飞机的概率分别为0.3，0.2，0.1和0.4．而如果坐火车则迟到的概率为0.25，坐轮船为0.3，坐汽车为 0.1，坐飞机则不会迟到．问：此人最终可能迟到的概率是多少?

解　以 A_1, A_2, A_3, A_4 表示事件“此人选择的交通工具分别是火车、轮船、汽车或飞机”，可知

$$P(A_1)=0.3, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.1, P(A_4)=0.4.$$

再以B表示事件“此人最终迟到”，则

$$P(B|A_1)=0.25, P(B|A_2)=0.3,$$

$$P(B|A_3)=0.1, P(B|A_4)=0,$$

由全概公式即得:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.145.$$

在例1中，若已知此人最终迟到了，进一步问：事件“他是乘坐轮船来的”概率是多少?

所求即为 $P(A_2 \mid B)$，同样由条件概率和乘法公式可知

$$P(A_2 \mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=0.4138$$

贝叶斯公式

如果随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$构成样本空间的一个划分，且都有正概率，则对任何一个事件$B\left(P(B) > 0\right)$，有

$$P\left(A_j \mid B\right) = \frac{P\left(A_j\right)P\left(B \mid A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)P\left(B \mid A_i\right)}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

例2　某厂生产的产品其不合格率为0.1%，但是却没有适当的仪器进行检验. 有人声称发明了一种仪器可以用来检验，误判的概率仅为5%，即正品被误判为次品或者次品被误判为正品的概率均为5%. 试问这个仪器是否靠谱？

解　以 B 表示事件“经检验该产品为次品”，以 A 表示事件“该产品实际上是正品”，由题意可知

$$P(A)=0.999, P(\bar{A})=0.001,$$

$$P(B\mid A)=0.05, P(B\mid \bar{A})=0.95,$$

由全概率公式可得事件 B 的概率:

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=0.999\times 0.05+0.001\times 0.95=0.0509$$

而由贝叶斯公式可知

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.999\times 0.05}{0.0509}$$

$$\approx 0.9813$$

由此可见该发明并不可靠！

例3　甲乙丙三人向同一架飞机射击，他们击中的概率分别为0.4、0.5和0.7. 若其中只有一人击中，则飞机坠毁的概率为0.2；若其中有二人击中，则飞机坠毁的概率是0.6；若三人都击中，则飞机必然坠毁. 求飞机坠毁的概率.

进一步问：若已知飞机坠毁了，则在坠毁前飞机是被命中一弹的概率.

解　以 A_0, A_1, A_2, A_3 分别表示事件“三人中分别有0、1、2、3个人命中敌机”，则由古典概率计算可得

$$P(A_0) = 0.6 \times 0.5 \times 0.3 = 0.09$$

$$P(A_1) = 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3$$

$$+0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36$$

$$P(A_2) = 0.6 \times 0.5 \times 0.7 + 0.4 \times 0.5 \times 0.7$$

$$+0.4 \times 0.5 \times 0.3 = 0.41$$

$$P(A_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14$$

再以B表示事件“飞机坠毁了”，则由题意

$$P(B \mid A_0) = 0, P(B \mid A_1) = 0.2,$$

$$P(B \mid A_2) = 0.6, P(B \mid A_3) = 1,$$

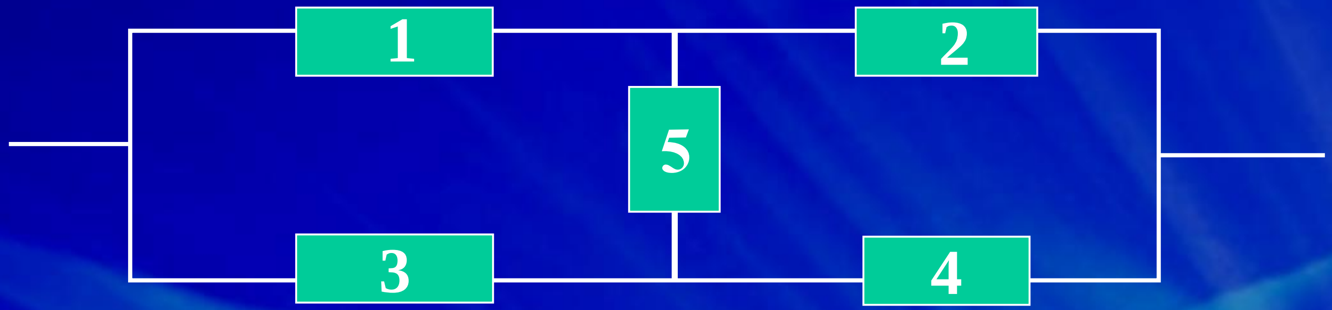
故由全概公式得:

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.458.$$

若飞机坠毁，则飞机在坠毁前被命中一弹的概率为

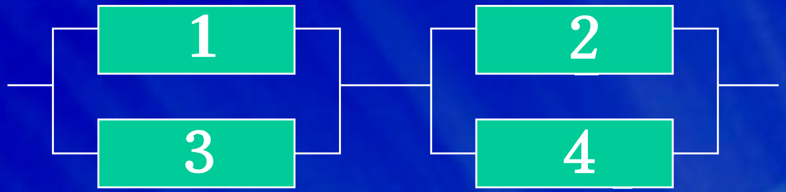
$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}\approx 0.157$$

例4　下列桥式系统由5个元件组成，连接方式如图所示. 设每个元件的可靠度、即能够正常工作的概率为 p，且每个元件能否正常工作是相互独立的，试求该系统的可靠度.



解　以事件A表示元件5正常工作，B表示系统正常工作，则A和$\bar{A}$构成样本空间的划分，$P(A)=p, P(\bar{A})=1-p.$

(1)当A发生时，整个系统可视为如下图形式，



则相应地可靠度为

$$P(B|A)=\left[1-(1-p)^2\right]^2=\left(2p-p^2\right)^2$$

(2)当 A 不发生时，系统可视为下图所示的混联系统：

而相应的概率为 $P\left(B\mid\bar{A}\right)=1-\left(1-p^{2}\right)^{2}=2p^{2}-p^{4}$.

因此，整个系统的可靠度由全概公式并整理可得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P\left(\bar{A}\right)P\left(B\mid\bar{A}\right)=2p^{2}+2p^{3}-5p^{4}+2p^{5}$$

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队