概率的公理化定义及性质

在前面的叙述中我们可以看到，古典概率具有下列三条基本性质：

(1)非负性　　对任意一个事件A，$P(A) \geq 0$;

(2)规范性　　$P(\Omega) = 1$;

(3)可加性　　当事件A, B互不相容时，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

从这三条性质我们引申出概率的公理化定义如下：

定义1.1 给定一个随机试验，Ω为相应的样本空间，对于任意一个事件A，规定一个实数并记作$P(A)$. 如果$P(A)$满足下列三条公理：

公理1 非负性 $P(A) \geq 0$;

公理2 规范性 $P(\Omega) = 1$;

公理3 可列可加性　当可列无限个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,$
两两互不相容时，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

那么就称$P(A)$为事件A的概率.

由以上三条公理可以推导出概率的一些常用性质:

性质1　$P(\varnothing)=0.$

性质2　有限可加性

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容事件组，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质3 对任一事件A, 有

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right).$$

性质4 若$A\subset B$, 则

$$P\left(B-A\right)=P\left(B\right)-P\left(A\right),P\left(A\right)\leq P\left(B\right).$$

性质5 设A为任意一事件, 则$P\left(A\right)\leq 1.$

性质6　设 A, B 为任意两个事件，则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

性质7　加法公式：设 A, B 为任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

加法公式可以推广到多个随机事件上，如三个事件的加法公式为:

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B\cup C) \\
&=P(A)+P(B)+P(C) \\
&\quad -P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).
\end{aligned}
$$

例1　已知$P(A)=0.4, P(B)=0.6$且有包含关系$B\supset A$，试求解下列各事件的概率:

$$P(\bar{A}), P(A\cap B), P(A\cup B), P(\bar{B}A), P(\bar{A}B), P(\bar{A}\bar{B}).$$

解　由事件之间的相互关系及已知条件可得:

$$P(\bar{A})=1-P(A)=0.6 \quad P(A\cap B)=P(A)=0.4$$

$$P(A\cup B)=P(B)=0.6,$$

$$P(\bar{B}A)=P(A-B)=0,$$

$$P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=0.2$$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.4.$$

例2　已知随机事件 A, B 满足:

$$P(A)=0.7, P(A\bar{B})=0.3$$

试求概率: $P(AB), P(\bar{A}\cup\bar{B})$

解

$$0.3=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$$

$$\Rightarrow P(AB)=0.4$$

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$$

例3 已知随机事件A, B, C满足:

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\ P(AB)=P(BC)=0,$$

$$P(AC)=\frac{1}{8},$$ 试计算概率 $P(A\cup B\cup C)$.

解　由 $0 \le P(ABC) \le P(AB) = 0 \Rightarrow P(ABC) = 0$

因此，再由三个事件的加法公式即得

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = 0.625$$

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队