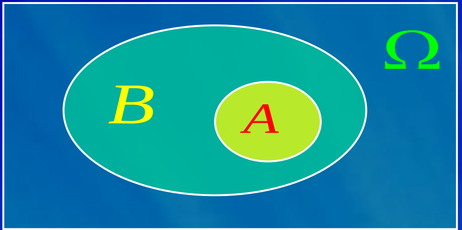
随机事件之间的关系与运算

(1)事件的包含

若事件A的发生必然导致事件B的发生，则称事件A包含在事件B中，记作$A \subset B$.

事件A表示“灯泡寿命不超过200小时”

事件B表示“灯泡寿命不超过300小时”



(2)事件的相等

若事件A包含事件B，而事件B也包含事件A，那么就称事件A与事件B相等，记作 $A=B$．

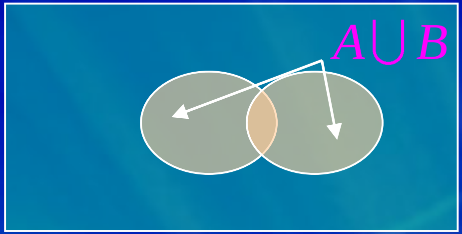
(3)事件的并（和）

当且仅当事件A或B至少有一个发生时，称事件A与事件B的并事件发生，记该事件为$A \cup B$.

在某建筑工地上,事件A表示“缺少水泥”

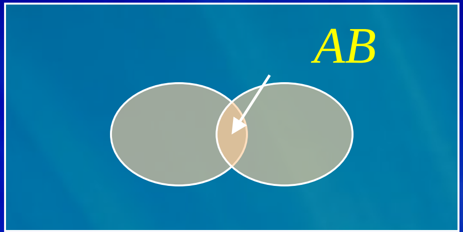
事件B表示“缺少黄砂”

事件$A \cup B$表示“缺少水泥或黄砂”



(4)事件的交（积）

当且仅当事件 A 及事件 B 同时发生时，称事件 A 与事件 B 的交事件发生，记该事件为 $A\cap B$.



事件A表示“灯泡寿命超过200小时”

事件B表示“灯泡寿命不超过300小时”

事件 $A\cap B$表示“灯泡寿命大于200小时而小于等于300小时”

随机事件的并或交的概念可推广至有限个或者可列无限个随机事件的并或交.

用事件$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$表示 n个事件$A_1, \cdots, A_n$的并事件;

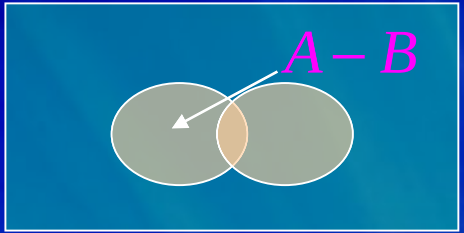
用事件$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示可列无限个事件$A_1, A_2, \cdots$的并事件;

用事件$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$表示 n个事件$A_1, \cdots, A_n$的交事件;

用事件$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$表示可列无限个事件 $A_1, A_2, \cdots$的交事件.

(5)事件的差

当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生，称事件 A 与事件 B 的差事件发生，记该事件为 $A-B$.



事件A表示“灯泡寿命超过200小时”

事件B表示“灯泡寿命超过300小时”

事件$A-B$ 表示“灯泡寿命超过200小时而小于300小时”

(6)互不相容事件

如果$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B是互不相容事件，或称事件A与事件B互斥.

事件A表示“灯泡寿命不超过200小时”

事件B表示“灯泡寿命至少300小时”

如果一组事件中的任意两个事件都互不相容，那么称该事件组是两两互不相容事件组.

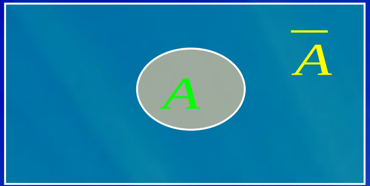
只含有一个样本点的事件称为基本事件，那么任意一个基本事件组总是两两互不相容事件组.

(7)对立事件

事件$\Omega - A$称为事件A的对立事件，或逆事件、余事件；记为$\overline{A}$.

事件A表示“灯泡寿命不超过200小时”

事件$\overline{A}$表示“灯泡寿命大于200小时”



由定义容易得到下列关系:

若A, B是互斥事件，则有$A \cap B = \varnothing$;

若A, B是对立事件，则有$A \cap B = \varnothing$，且$A \cup B = \Omega$.

若A, B是任意事件，则有$A - B = A\bar{B}$.

(8)事件的运算法则

①交换律 $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A;$

②结合律 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$

③分配律 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

④对偶律

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

性质①②④可推广到任意 n 个事件的情形.

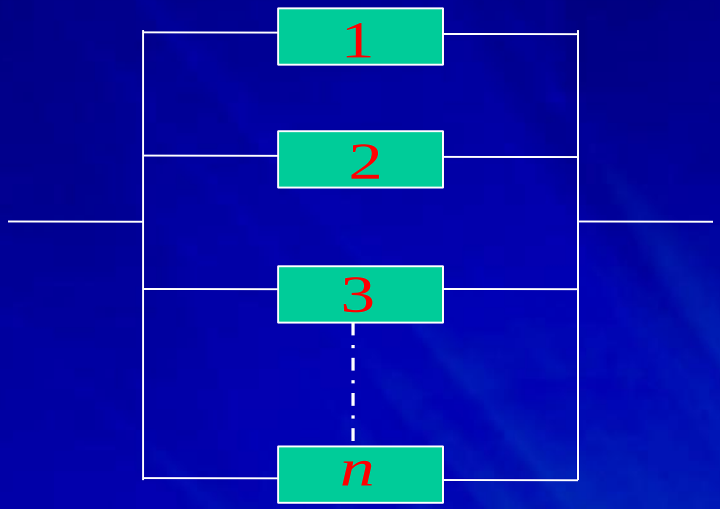
例1　设 $A_i=\{$第i个元件正常工作$\}$，$i=1,2,\cdots,n.$

试用事件之间的关系表示由n个电子元件串联或并联所构成的系统能正常工作的事件.

解　串联系统:

则　$\{$系统能正常工作$\}=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$

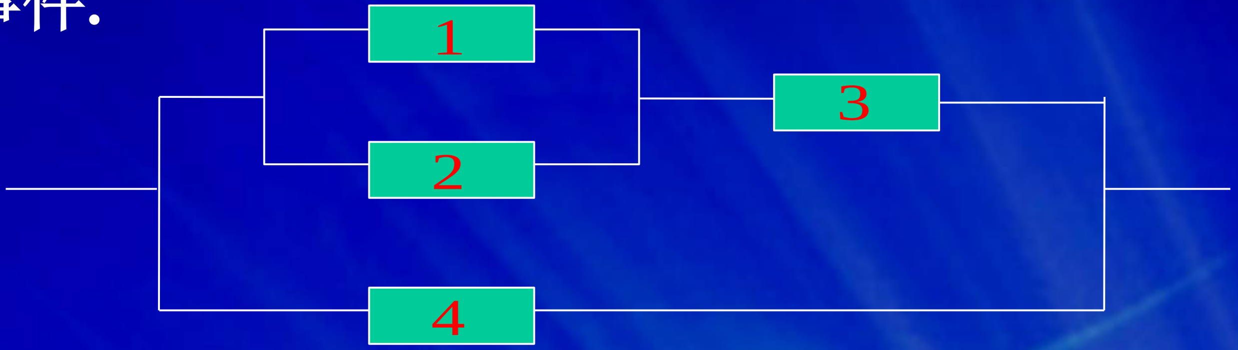
并联系统:



则{系统能正常工作} $= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

例2　设 $A_i =$ { 第 i 个元件正常工作 }，$i = 1, 2, 3, 4.$

试用事件之间的相互关系表示下图所描述的元件系统能正常工作这一事件.



解: {系统能正常工作} $= \big((A_1 \cup A_2) \cap A_3\big) \cup A_4.$

例3　设A,B,C为任意三个事件，用事件的相互关系表示下列各个事件:

(1)事件A发生，而事件B和C不发生;

$$A\bar{B}\bar{C};$$

(2)事件A,B,C中至少有一个事件发生;

$$A\cup B\cup C;$$

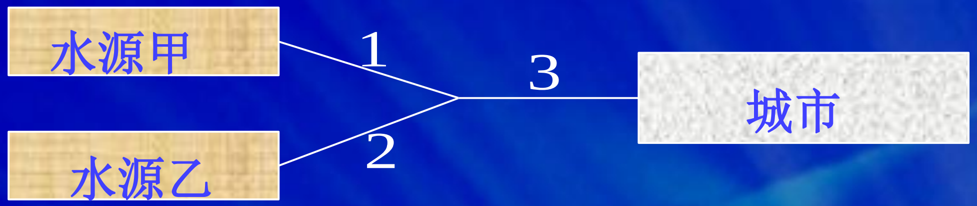
(3)事件A, B, C中不多于一个事件发生;

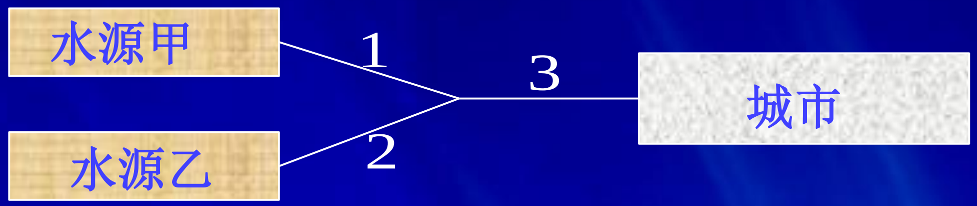
$$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C};$$

(4)事件A, B, C中至少有两个事件发生.

$$AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC\,.$$

例4 某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道1,2,3组成，每个水源都足够该城市的用水. 用$A_i\ (i=1,2,3)$表示第i号管道工作正常这一事件. 试用事件A_i之间的关系来表示“城市正常供水”和“城市断水”这两个事件.





解　供水正常:

$$\left(A_1 \cup A_2\right) A_3$$

城市断水:

$$\overline{\left(A_1 \cup A_2\right) A_3} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$$

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队