几何概型

引例：向直径为20厘米的靶子射击,观察弹着点的位置.这个试验所有可能的结果为无限个,考虑求解弹着点离靶心距离不超过2厘米的概率.

①每次试验所有可能的结果允许为无限个.

②每次试验中各样本点出现的可能性是相同的.

在概率论中，把具有上述两个特点的数学模型称为**几何概型**.

例:某十字路口自动交通信号灯的红绿灯周期为60秒,其中由南至北方向红灯时间为15秒.则随机到达该路口的一辆汽车恰遇红灯的概率应该为 $\frac{15}{60}=0.25$.

例:一片面积为S的树林中有一块面积为S_0的空地，一架飞机随机地向这片树林空投一只包裹.假定包裹不会投出这片树林之外.那么包裹落在空地上的概率应该为$\frac{S_0}{S}$.

例:已知在10毫升自来水中有一个大肠杆菌,从中随机抽取2毫升自来水在显微镜下观察,发现大肠杆菌的概率应该为 $\frac{2}{10}=0.2.$

以等可能性为基础，借助于几何上的度量来合理地规定的概率，称为几何概率.

一般地，设样本空间是某个区域 Ω（直线、平面或空间，每个样本点等可能地出现），规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

这里 $m(\cdot)$ 分别表示长度、面积或体积.

例1 某公共汽车站从上午7时起,每隔15分钟来一趟车,一乘客在7:00到7:30之间随机到达该车站,求该乘客等候不到5分钟乘上车的概率.

解 设T为乘客的到达时刻,

则样本空间 $\Omega = \{7:00 < T < 7:30\}$.

令事件A={该乘客等候不超过5分钟才乘上车}.

$A=\{\,7:10<T<7:15$或$7:25<T<7:30\}$

如果将 T的单位化为分钟，则有

$$m(A)=10,\ m(\Omega)=30.$$

因此 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}.$

例2 甲、乙两船都要在某个泊位停靠6小时.假定它们在一昼夜的时间段中随机到达. 试求这两艘船中至少有一艘在停靠泊位时必须等待的概率.

解　设甲船到达时间为 x, 乙船到达时间为 y,

则 $x, y \in [0, 24)$. 样本空间为

$$\Omega = \{(x, y): 0 \le x < 24, 0 \le y < 24\}.$$

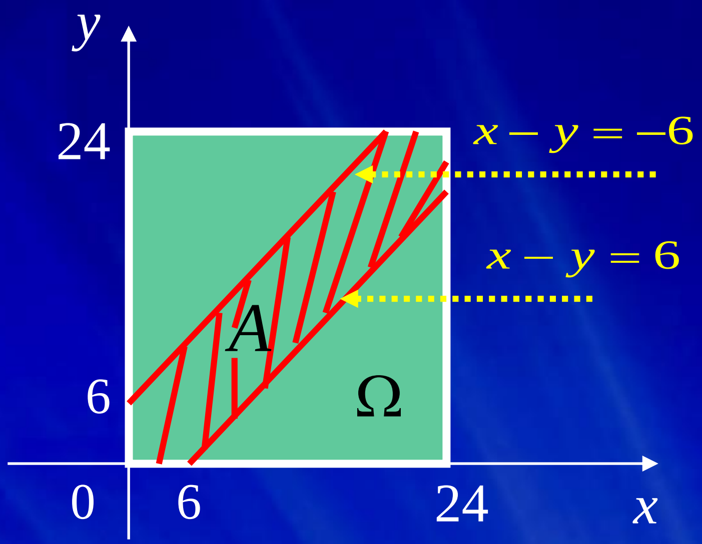
令事件 $A = \{(x, y): |x - y| \le 6, (x, y) \in \Omega\}$.

事件A所对应的区域为右图中的阴影区域，相应的面积为方形面积减去两个三角形面积:

$$m(A)=24^2-18^2$$

所求概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{24^2-18^2}{24^2}=\frac{7}{16}.$$

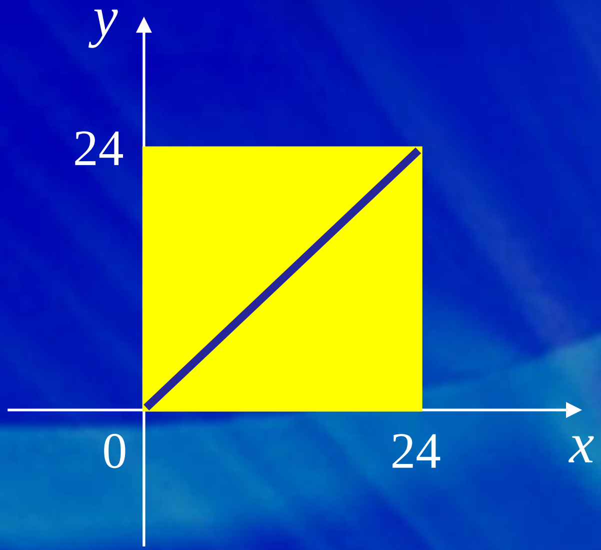


例2(续)

若令事件 B={两艘船同时到达该泊位}

$$=\{(x,y): x=y,(x,y)\in\Omega\}$$

$$P(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}=0.$$



思考题

概率为0的事件是否一定为不可能事件？

概率为1的事件是否一定为必然事件？

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队