条件概率

引例　52张扑克中任取一张, 在已知抽到梅花的条件下, 求抽到的是梅花5的概率?

解　记 $A=\{$抽到梅花5$\}$, $B=\{$抽到梅花$\}$.

已知事件B发生的条件下事件A发生的概率,记为$P(A|B)$.

$$P(A|B)=\frac{1}{13},$$

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.}$$

定义1.1 给定一个随机试验，Ω是它的样本空间，对于任意两个事件 A, B，其中 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为已知事件B发生的条件下事件A发生的**条件概率**.

条件概率也是概率，因此满足概率的三条公理，由此可以推出相应的性质．即当 $P(C)>0$ 时，有

(1) $P(\varnothing|C)=0$；

(2) 有限可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件组，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|C)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i|C)$$

(3)对任一事件 A，有 $P\left(\bar{A}|C\right)=1-P\left(A|C\right)$ ；

(4)若 $A\subset B$，则

$$P\left(B-A|C\right)=P\left(B|C\right)-P\left(A|C\right),P\left(A|C\right)\leq P\left(B|C\right)$$

(5)设 A 为任意事件，则 $P\left(A|C\right)\leq 1$;

(6)对任意 A,B 有 $P\left(B-A|C\right)=P\left(B|C\right)-P\left(AB|C\right)$

(7)设 A,B 为任意两个事件，则

$$P\left(A\cup B|C\right)=P\left(A|C\right)+P\left(B|C\right)-P\left(AB|C\right)$$

例1 有5个乒乓球，其中3个新的两个旧的．每次取一个，无放回地取两次．记

$$A=\{第一次取到新球\}, B=\{第二次取到新球\}$$

试求概率 $P(A), P(AB), P(B|A)$.

解 $P(A)=\dfrac{3}{5}, P(AB)=\dfrac{3\times 2}{5\times 4}=\dfrac{3}{10},$

$$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}.$$

例2　某建筑物按设计要求使用寿命超过50年的概率为0.8, 超过60年的概率为0.6. 问该建筑物在经历了50年之后, 它在未来10年内倒塌的概率有多大?

解　用B表示该建筑物的寿命在5 0年以上, A表示建筑物寿命在60年以上, 则所求概率为

$$P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)=1-\frac{P(AB)}{P(B)}=1-\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1}{4}$$

例3　设A, B, C是三个随机事件，其中A与C互不相容，且$P(AB)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{3}$，试求条件概率$P(AB|\bar{C})$.

解　由$ABC \subset AC$知$P(ABC) \leq P(AC)=0$，故

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB-C)}{1-P(C)}$$

$$=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{3}{4}$$

定义1.2　由条件概率公式，当$P(A)>0$或$P(B)>0$时，

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 或 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，等价变形得到

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

以上两个等式就称为乘法公式.

乘法公式可推广到多个随机事件上，如三个事件的乘法公式为

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$$

例4 在10个考题中有4个难的6个容易的．三人参加抽题考试，甲先乙次丙最后．记事件 A,B,C 分别表示三人各抽到难题．试求概率 $P(A),P(AB),P(ABC)$.

解 这是无放回抽样方式，由古典概率和乘法公式可得

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5} \qquad P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=\frac{2}{15}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$$

谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队