# 随机事件的
# 相互独立性

引例　口袋中有10个球，其中3只是红球，其余是白球. 用有放回抽样的方法，从口袋中随机摸两次. 设事件$A$表示“第一次摸到的球是红球”，事件$B$表示“第二次摸到的球是红球”.

$$P(A)=P(B)=0.3, \qquad P(AB)=\frac{3\times 3}{10\times 10}=0.09.$$

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}$$

**定义1.3**　称两个随机事件 $A, B$ 是相互独立的，如果有

$$P(AB) = P(A)P(B) \text{ 成立.}$$

思考：相互独立与互不相容有何区别？（$AB = \varnothing$）

与乘法公式进行对照：$P(AB) = P(A)P(B|A)$

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

对照乘法公式知定义即等价于$P(B|A)=P(B)$，当$P(A)>0$时；或者$P(A|B)=P(A)$，当$P(B)>0$时.因此 独立性的直观意义是一个事件的发生不影响另一个事件发生的概率. 而独立性往往蕴含在事物的内部！

**例1** 一副扑克牌共52张，现从中随机地抽取一张．记

$A=\{$抽到牌号$K\}$，$B=\{$抽到花式为红桃$\}$．

试验证：事件$A$与事件$B$是相互独立的．

**解** 由古典概率知 $P(A)=\dfrac{4}{52},P(B)=\dfrac{13}{52},P(AB)=\dfrac{1}{52},$

从而有 $P(AB)=P(A)P(B)$

即：事件$A$与事件$B$是相互独立的．

例2　甲乙二人同时向一架敌机射击，二人击中的概率分别为0.6和0.5. 试求敌机被击中的概率.

解　设 $A=\{\text{甲击中目标}\}$, $B=\{\text{乙击中目标}\}$, 显然事件 $A, B$ 相互独立. 故所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=0.6+0.5-0.6\times0.5=0.8$$

**定理1** 若下列四对事件：$A$与$B$、$A$与$\bar{B}$、$\bar{A}$与$B$、$\bar{A}$与$\bar{B}$中有一对相互独立，则另外三对也相互独立.

**由定理知，例2可用下面方法求解：**

$$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(\bar{A}\bar{B}\right)$$

$$= 1 - P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right) = 1 - 0.4 \times 0.5 = 0.8$$

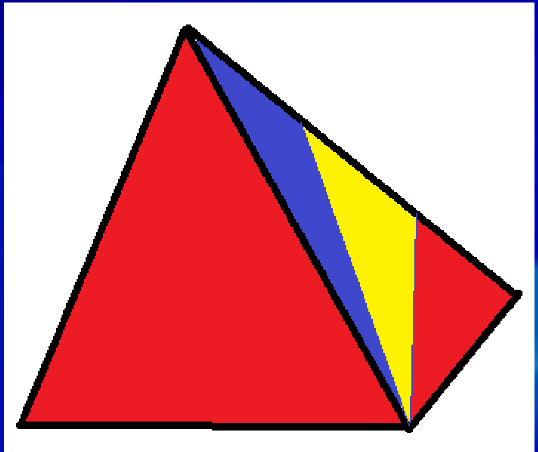
定义1.4　称事件组 $A, B, C$ 是相互独立的，如果有

$$
\text{两两独立}\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}
$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

这四个等式都成立.

例3　有一个正四面体, 现在给一面涂上红色, 一面涂上黄色, 一面涂上蓝色, 还有一面涂上红黄蓝三色. 现任取一面. 令 $A=\{$这面含红色$\}$, $B=\{$这面含黄色$\}$, $C=\{$这面含蓝色$\}$， 问 $A,B,C$ 是否两两独立或相互独立?



$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$$

相互独立的概念也可推广到$n$个随机事件上去.

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立时当且仅当对任意一个

$k=2,\cdots,n,$ 任意的 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,$ 有

$$P\left(A_{i_1} \cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right).$$

这里要求成立的等式总数为

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1.$$

例4 有某型号的高射炮，每门炮发射一枚炮弹击中敌机的概率为0.6. 现若干门炮同时发射，每门发射一枚炮弹，问：至少需要配置多少门高射炮，才能以不低于99%的把握击中敌机?

解 记 $A_i = \{\text{第}\, i\, \text{门炮击中敌机}\}, i = 1, 2, \cdots, n.$

$B = \{\text{敌机被击中}\}$，则

$$P(B)=P\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)$$
$$=1-P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}\right)=1-P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n\right)$$
$$=1-P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)\cdots P\left(\bar{A}_n\right)=1-0.4^n$$

由题意, $1-0.4^n\geq 0.99\Rightarrow n\geq 5.027$

因此, 至少需要配备6门炮, 才能以99%的把握命中敌机.

**例5** 设两两相互独立的事件$A, B, C$满足下列条件:

$$ABC = \varnothing, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2},$$

且已知$P(A \cup B \cup C) = \dfrac{9}{16}$，试计算概率$P(A)$.

**解** 记$P(A) = P(B) = P(C) = x < \dfrac{1}{2}$, 则由加法公式和

已知条件可得 $\dfrac{9}{16} = 3x - 3x^2$, 解此方程即得$P(A) = \dfrac{1}{4}$.

# 贝努利概型和二项概率公式

如果在一个试验中，我们只关心某个事件$A$发生与否，那么称这个试验为贝努利试验.

此时试验的结果可以看成只有两种：$A$发生、或者$A$不发生. 相应的数学模型称为贝努利概型.

如果把贝努利试验重复独立地做$n$次，则称这$n$次试验为$n$重贝努利试验.

问题：设在单次试验中，事件$A$发生的概率为$p$，将此试验重复独立地进行$n$次，则事件$A$恰好发生$k$次的概率是多少？通常记这个概率为$P_n(k), k=0,1,2,\cdots,n$ .

定理2　$n$重贝努利试验中，事件$A$恰好发生$k$次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$$

其中 $p=P(A)$ .

由于 $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=\left[p+(1-p)\right]^n=1,$

因此也称 $P_n(k)$ 为二项概率.

**例1** 一部机器在一天内发生故障的概率为0.2，若一周五个工作日里每天是否发生故障是相互独立的．试求在某一周内恰好发生了三次故障的概率.

**解** 这是 $n=5, p=0.2$ 的二项概率问题，故所求概率为

$$P_5(3)=C_5^3\times 0.2^3\times 0.8^2=0.0512$$

**例2　设每次射击命中目标的概率为0.001，如果射击5000次，试求其中至少两次命中目标的概率.**

**解**　这是 $n = 5000, p = 0.001$ 的二项概率问题. 计算可得

$$P_{5000}(k \geq 2) = 1 - P_{5000}(k < 2)$$

$$= 1 - P_{5000}(0) - P_{5000}(1) \approx 0.9596$$

# 谢　谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队