

古典概型

随机事件发生的可能性大小常用区间 $[0,1]$ 中的数值加以刻划. 这个数值就称为**概率**, 事件 A 发生的概率记为 $P(A)$.

自然地规定:

$$P(\Omega) = 1;$$

$$P(\emptyset) = 0;$$

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

在现实问题中，有很大一类随机现象具有一些共同的特征，可以直接计算出事件的概率. 比如

(1)100只灯泡，任取一个检查其质量，则100个灯泡被取到的机会相同；

(2)抛一枚均匀的硬币，出现正面和反面的机会相同.

这两个试验的共同特点是：

- ①每次试验只有有限种可能的试验结果，即样本点总数有限；
- ②每次试验中各样本点出现的可能性是相同的。

在概率论中，把具有上述两个特点的试验叫做**古典型试验**，它的数学模型称为**古典概型**。

在古典概型中，记 n 为样本点总数， n_A 为事件 A 包含的样本点个数，则规定事件发生的概率

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

用这种方法定义的概率称为**古典概率**。

计算古典概率时经常用到的两个基本计数方法如下：

1.从 n 个不同的元素中任取 k 个,则共有

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

种不同的取法.

2.一件事情分几个步骤完成,则互相之间用乘法来计数,
一件事情有若干种方法完成,则互相之间用加法来计数.

例1 两封信随机地向四个邮筒投递, 求第二个邮筒恰好被投入一封信的概率.

解 两封信随机地向四个邮筒投递, 共有 $4 \times 4 = 16$ 种不同的结果, 而第二个邮筒恰好有一封信的情形有 $2 \times 3 = 6$ 种, 因此所求概率为

$$P = \frac{6}{16} = 0.375.$$

例2 在电话簿中任取一个电话号码, 求后面四个数都不相同的概率. (假设后四位数中的每一个都等可能地取自 0, 1, 2, ..., 9) .

解 后四位数各种不同的取法共有 $10 \times 10 \times 10 \times 10$ 种, 而后四位数都不相同的取法有 $10 \times 9 \times 8 \times 7$ 种, 故所求即为

$$P = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} = 0.504$$

例3(抽奖券问题) 某超市有奖销售, 投放了 n 张奖券, 其中只有一张有奖, 每位顾客可抽取一张. 求第 k 位顾客中奖的概率 ($1 \leq k \leq n$).

解 第 k 个顾客恰好抽到有奖奖券的各种不同取法数为 $(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \times 1$ 种, 而总的试验结果共有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ 种, 因此所求概率即为

$$P = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \times 1}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{n}$$

这个结果和次序 k 无关, 可见抽签是公平的.

在古典概型中，显然有下列等式成立：

$$P(\bar{A}) = \frac{n - n_A}{n} = 1 - P(A).$$

例4(生日问题) 假设一年有365 天,问随机聚集的 $n(\leq 365)$ 个人中至少有2人生日在同一天概率.

解: 令事件 $A = \{n \text{ 个人中没有 2 个人生日相同}\}$

则事件A发生的概率为:

$$P(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

对于A的对立事件 $\bar{A} = \{n \text{个人中至少有2个人生日相同}\}$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{(365)^n}.$$

下表给出了当 n 取不同值时的概率分布情况:

n	20	30	40	50	64	100
Pr	0.441	0.706	0.891	0.970	0.997	0.99999

思考题

(女士品茶问题): 一位常喝奶茶的女士声称她能辨别出冲好的奶茶是先放茶还是先放奶, 并且她在**10**次试验中都正确地辨别了出来. 问该女士的说法是否可信?

“实际推断原理”:

一个小概率事件在一次试验中几乎是不会发生的.



谢 谢

同济大学数学科学学院概率统计教学团队