XIANXINGDAISHUJIQIYINGYONG

线性代数及其应用

王晓峰 主编

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

封面设计　宋　瑜

责任编辑　胡新蓉

ISBN 7-5331-3094-4

9 787533 130947 >

ISBN 7-5331-3094-4
O · 103　定价 15.00 元

目　录

第一章　线性方程组和矩阵

无论在工程技术、电子与计算机、信息处理、经济、管理、以及物理学等各个领域，甚至在数学的许多分支中，人们都会面临各种各样需要处理的线性问题．而线性问题的处理常常归结为对线性方程组的求解，矩阵则是处理线性问题过程中最重要的工具．

§1.1　n 元线性方程组

一、n 元线性方程

我们知道，一个关于变元 x 、 y 的二元一次方程

$$a_1x+a_2y=b, \qquad a_1,\ a_2,\ b \text{ 为实数}$$

在平面解析几何中代表 xoy 平面上的一条直线．因此也称其为二元线性方程．一般地，如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 均为数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个变元（亦称未知量），那么我们称形如

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{1}$$

的方程为 n **元线性方程**. $a_i x_i$ 称为此方程的第 i 项，而 a_i 为其系数；b 称为此方程的常数项. 方程（1）中数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 b 可以全是有理数，也可以全是实数或复数等，并且分别称之为有理系数，实系数和复系数 n 元线性方程. 如无特别声明，本书中的线性方程均是实系数线性方程.

一个 n 元有序实数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$（也常记为“列”的形式：$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$）如果满足

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n = b$$

则称其为方程（1）的**一个解**，有时也称 $x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$，$\cdots$，$x_n = c_n$ 是方程（1）的一个解. 方程（1）的全部解的集合称为（1）的**解集**. 两个 n 元线性方程的解集如果相同，则称这两个方程**同解**.

例 1 求二元线性方程

$$2x - 3y = 2 \tag{2}$$

的解集（全部解）.

解 将（2）变形为

$$x = 1 + \frac{3}{2} y \tag{3}$$

此时，给变元 y 赋任一值，便可求得 x 对应的值. 例如，令 $y = 0$，则 $x = 1$；令 $y = -2$，则 $x = -2$；等等. 即 $(1, 0)$ 和 $(-2, -2)$ 均是（2）的解（也称为（2）的两个特解）. 而（2）的全部解可记为

$$(1+\frac{3}{2}t,\ t)\,,\qquad t\text{ 为任意实数}$$

上述例题中，方程（2）的解集在 xoy 平面上构成点的集合

$$\left\{(1+\frac{3}{2}t,\ t)\,\middle|\ t\text{ 为任意实数}\right\}$$

它的几何意义为一条直线：其方程就是 $2x-3y=2$.

二、n 元线性方程组

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个变元．称由 m 个 n 元实系数线性方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{4}$$

为 n **元（实系数）线性方程组**．方程组中系数 a_{ij} 的双重脚标表示 a_{ij} 为方程组（4）的第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数.

一个 n 元有序实数组（$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$）如果是方程组（4）中每一个方程的解，则称为此**方程组的一个解**；此方程组的全部解的集合称为该方程组的**解集**.

例 2 解下列方程组，并在直角坐标系中作出其图形.

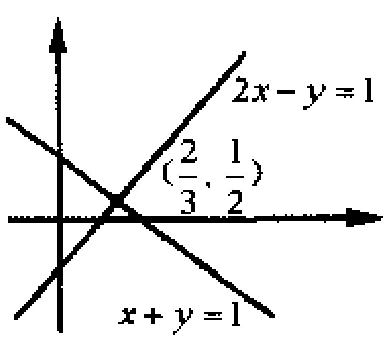
（a）$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=1, \end{cases}$ （b）$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2, \end{cases}$ （c）$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3. \end{cases}$

解 （a）此方程组有惟一的解：$(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$，即当 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$ 时方程组中两个等式均成立．此惟一解的几何意义为 xoy 平面

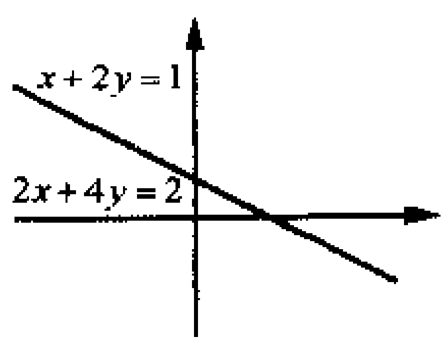
上两条相交直线的交点，其坐标就是$(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$.

（b） 此方程组中第二个方程刚好是第一个方程的 2 倍，从而两个方程的解集相同. 第一个方程变形为 $x=1-2y$，得全部解为$(1-2t,\ t)$，其中 t 为任意实数. 在平面直角坐标系中其图形为两条重合的直线，即该直线上所有点的坐标对应此方程组的全部解.

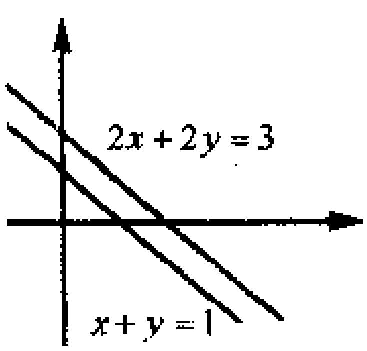
（c） 容易验证此方程组没有解（称为**矛盾方程组**），即两个方程的解集不含公共元素. 这两个方程的图形为两条平行（不重合）的直线.



（a）



（b）



（c）

思考 由三个三元线性方程构成的三元线性方程组解集的所有可能类型及对应的空间直角坐标系中的几何意义是什么？

例 2 给出了一线性方程组解集的三种可能：有惟一解；有无穷多解；或无解．我们将在本章 § 1.4 给出一般性的结论并在第四章对线性方程组且关于变元解的结构进行更深入的讨论．

§1.2　矩阵的定义

上一节中方程组（4）的未知量的系数构成了一个 m 行 n 列的数表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

一个如上的 m 行 n 列的矩形数表称为一个 $m\times n$ **级矩阵**，其横排称为**行**，纵排称为**列**．而表中每一数 a_{ij} 称为矩阵的**元素**，其双重脚标表示此元素位于该矩阵第 i 行和第 j 列．亦称 i 为 a_{ij} 的**行编号**，j 为 a_{ij} 的**列编号**，并简称 a_{ij} 为此矩阵（i, j）**位置上的**元素．常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示矩阵．为方便计，用记号

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

表示 A 是一个 m 行 n 列的矩阵，其（i，j）位置上的元素为 a_{ij}，

$$i=1,\ 2,\cdots,m;\qquad j=1,\ 2,\cdots,n.$$

如果一个矩阵的元素均为实数，则称其为实矩阵．我们约

定，除非特别申明，本书所讨论的矩阵均为实矩阵.

矩阵（5）称为线性方程组（4）的**系数矩阵**. 考虑到常数项，方程组（4）还给出另一个$m\times(n+1)$级矩阵

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

称为方程组（4）的**增广矩阵**. 矩阵中纵断续线右侧元素为方程组的常数项.

矩阵的例子：

一个1×1级矩阵

$$A=(a)=a$$

是一个数，其中，a是任一数.

如下是一个2×2级矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

如下是一个1×4级矩阵：

$$A=(1,\quad 0,\quad -2,\quad \frac{1}{2})$$

如下是一个4×1级矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

如下是一个2×3级矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -5 & 2 & -2\end{bmatrix}.$$

而给定一个四元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-2x_2 \qquad +x_4=2\\ \qquad -x_2+2x_3-x_4=0\\ x_1 \qquad -3x_3-3x_4=3\end{cases}$$

则其系数矩阵和增广矩阵分别为：

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -3 & -3\end{bmatrix} \quad 和 \quad \left[\begin{array}{cccc|c}2 & -2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -3 & -3 & 3\end{array}\right]$$

由一个线性方程组写出对应的矩阵时必须注意：一方程中某变元未出现，即其系数为 0，从而系数矩阵和增广矩阵中对应位置上的元素为 0.

给定一个 $m\times(n+1)$ 级矩阵 B，也可惟一地写出以 B 为增广矩阵，关于变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 且由 m 个方程构成的的线性方程组. 例如，给定矩阵

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c}3 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2\end{array}\right]$$

则以 B 为增广矩阵的线性方程组为：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2 \qquad -x_4=0\\ \qquad -3x_2 \qquad +2x_4=-1\\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4=2.\end{cases}$$

§1.3 高斯消元法与矩阵的初等行变换

一、高斯（Gauss）消元法

现在考虑如下的两个线性方程组：

$$
\text{(a)}\ \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ -x-3y+5z=3 \\ 2x+4y-5z=-1 \\ x+y=2 \end{cases}
\qquad
\text{(b)}\ \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ -y+2z=7 \\ z=-9 \\ 0=0. \end{cases}
$$

读者将会知道，方程组（a）可同解地化为（b）．明显地，方程组（b）更容易求解：从第三个方程得 $z=-9$，将其代入第二个方程得 $y=-25$，再将 $y=-25$，$z=-9$ 代入第一个方程得到 $x=27$．即此方程组有惟一的解：$(27,\ -25,\ -9)$．方程组（b）称为**阶梯形方程组**.

一般地，一个 n 元线性方程组如满足如下条件则称为阶梯形方程组.

（i） 如方程组中某一方程的各项系数全为零，则它下方的所有方程（如有）的各项系数全为零；

（ii） 如方程组中某一方程的各项系数不全为零，并且第一个不为零的项是第 i 项，则此方程下方的所有方程（如存在）的前 i 项的系数全为零.

例如，如下的方程组均是阶梯形的.

(c) $\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ z=-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 3z=-7 \\ 0=3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 5x_1-2x_2-3x_4=7 \\ 2x_3+5x_4=-2 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$　　(f) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=-1 \\ x_2+3x_4=2 \\ x_3-5x_4=0 \\ x_4=-5 \end{cases}$

解线性方程组的Gauss消元法就是要对给定的线性方程组施行三种所谓的初等变换，将其变换成一个同解的阶梯形方程组，从而达到求解的目的. 我们先考察如下的一个例子.

将方程组

$$\begin{cases} 2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-2x_2=-1 \\ 2x_1-2x_3=2 \\ 4x_1-2x_2-2x_3=1 \end{cases} \tag{6}$$

依次作如下的变形: 将（6）中前两个方程位置互换，得

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2=-1 \\ 2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-2x_3=2 \\ 4x_1-2x_2-2x_3=1 \end{cases} \tag{7}$$

将（7）中第一个方程的 -1 倍和 -2 倍分别加到（7）中第三个和第四个方程上，得

$$\begin{cases}2x_1-2x_2 & =-1\\ \quad 2x_2+2x_3=1\\ \quad 2x_2-2x_3=3\\ \quad 2x_2-2x_3=3\end{cases}\tag{8}$$

将（8）中第二个方程的-1倍分别加到第三个和第四个方程上，得

$$\begin{cases}2x_1-2x_2 & =-1\\ \quad 2x_2+2x_3=1\\ \quad -4x_3=2\\ \quad -4x_3=2\end{cases}\tag{9}$$

将（9）中第三个方程的-1倍加到第四个方程上，得

$$\begin{cases}2x_1-2x_2 & =-1\\ \quad 2x_2+2x_3=1\\ \quad -4x_3=2\\ \quad 0=0\end{cases}\tag{10}$$

将（10）中第三个方程乘以$-\dfrac{1}{4}$，得

$$\begin{cases}2x_1-2x_2 & =-1\\ \quad 2x_2+2x_3=1\\ \quad x_3=-\dfrac{1}{2}\\ \quad 0=0\end{cases}\tag{11}$$

方程组（11）是一个阶梯形方程组，容易得解：$(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$.

上述过程中我们采用了下述三种变换，称为线性方程组

的三种**初等变换**：

① 换某两个方程的相互位置；

② 一非零数乘以某一方程；

③ 某一方程乘以一数后加到另一方程上.

定理 1.3.1 一线性方程组经若干上述初等变换后得到的方程组与原方程组同解.

证* 只需证明任一方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_m \end{cases} \tag{12}$$

经过一初等变换作用后得到的方程组与（12）同解即可. 十分明显地，前两个初等变换的作用满足这一要求. 现在设（12）中第 i 个方程乘以一数 k 后加到第 j 个方程上得到方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{j1} + ka_{i1})x_1 + (a_{j2} + ka_{i2})x_2 + \cdots + (a_{jn} + ka_{in})x_n = b_j + kb_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{13}$$

现证（12）的解均是（13）的解. 因方程组（12）与（13）仅第 j 个方程不同，如果 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是（12）的任一解，只须验证它也是（13）中第 j 个方程的解即可. 因

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i \quad 和 \quad a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n = b_j;$$

故有

$$k(a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n)=kb_i+b_j$$

即 $$(a_{j1}+ka_{i1})c_1+\cdots+(a_{jn}+ka_{in})c_n=b_j+kb_i$$

从而 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 确为（13）中第 j 个方程的解.

因为方程组（12）也可由（13）的第 i 个方程乘以 $-k$ 后加到第 j 个方程得到，故由刚才的证明，（13)的任一解也是(12）的解，并完成了定理的证明.

由上面的定理，方程组（11）与（6）同解. 从而 $(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2})$ 也是方程组（6）的解.

二、 矩阵的初等行变换

从方程组（6）到方程组（11）的初等变换过程可用相应的矩阵初等变换的形式表示. 首先写出（6）的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

交换前两行得方程组（7）的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

将第一行的 -1 倍和 -2 倍分别加到第三、四行上得到方程组（8）

的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

将第二行得 -1 倍分别加到第三、四行上得方程组（9）的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

将第三行的 -1 倍加到第四行上得方程组（10）的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

再将第三行乘以 $-\dfrac{1}{4}$ 得到方程组（11）的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

总结上述矩阵的变换过程，定义矩阵的初等行变换如下.

定义 1.3.1　矩阵的**初等行变换**是指下述矩阵变换之一：

Ⅰ. 交换某两行的相互位置，并用记号 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表 i，j 行互换；

Ⅱ. 某一行乘以一非零数，并用记号 kr_i 表第 i 行乘以数 k；

III. 某一行乘以一数后加到另一行上，并用记号 kr_i+r_j 表第 i 行乘以数 k 后加到第 j 行上.

这样，对线性方程组施行的初等变换对应于对其增广矩阵进行相应的初等行变换. 从而，定理 1.3.1 可改述为:

定理 1.3.1 将一个线性方程组的增广矩阵施行一系列初等行变换后得到的矩阵作为增广矩阵的线性方程组与原方程组同解.

对应于阶梯形方程组，我们有如下的阶梯形矩阵的定义.

定义 1.3.2 满足下列条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**（本书中简称**阶梯形**）:

（i）如某一行元素全为零，则它下方的行（如存在）也全为零;

（ii）如某一行元素不全为零，并且第一个不为零的元素位于第 i 列，则它下方所有的行（如存在）的前 i 个元素全为零.

例如，下列矩阵均是阶梯形矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1&0\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-3&1&0&-2\\0&0&3&-7\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}5&-2&0&-3&7\\0&0&2&5&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}1&-2&-1&1&1\\0&1&0&3&2\\0&0&1&-5&0\\0&0&0&1&-5\end{bmatrix}$$

而下述矩阵则不是阶梯形矩阵

$$G=\begin{bmatrix}-1&0&2&3&0\\0&2&-1&0&4\\0&0&0&4&-2\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

定理 1.3.2　任一矩阵经若干初等行变换可化为阶梯形.

证*　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是任一 $m\times n$ 级矩阵.

如果 A 是零矩阵（元素全为零），则已是阶梯形矩阵.

如果 A 不是零矩阵，则从第一列起依次查找非零列，不妨设第一个非零列为第 l 列，并设此列中从上到下第一个非零元素为 a_{kl}．将 A 的第一行与第 k 行互换并把得到的矩阵记为 A_1．此时，A_1 的前 $l-1$ 列全为零列，第 l 列的第一个元素 $a_{kl}\neq 0$．如果 A_1 的第 l 列除 a_{kl} 外还有非零元素，例如 $a_{hl}\neq 0$．则将 A_1 的第一行的 $-\dfrac{a_{hl}}{a_{kl}}$ 倍加到 a_{hl} 所在的行使其为零．因而，经若干 III 型初等行变换可将 A_1 的第 l 列除 a_{kl} 外的元素全化为零，记得到的矩阵为 A_2．此时，A_2 的前 $l-1$ 列仍全为零列.

如果 A_2 仍不是阶梯形，那么 A_2 的后 $m-1$ 行不全为零，则对 A_2 的后 $m-1$ 行重复以上过程得到 A_3．如此重复至多 $m-1$ 次则将 A 化为阶梯形.

由此定理得

Gauss 消元法的矩阵表现形式：写出给定线性方程组的增广矩阵并施以一系列初等行变换将其化为阶梯形，写出以此阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组（阶梯形方程组）并求解即得到原方程的解.

§1.4 线性方程组解的讨论初步

本节将给出线性方程组解的三种不同情况.

给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=b_m \end{cases} \tag{14}$$

由定理 1.3.1 可设其增广矩阵经若干初等行变换化为如下的阶梯形矩阵（如果有必要可重新安排未知量的位置）：

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{21} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{15}$$

其中，$c_{ii}\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, r$. 由定理 1.3.1 知（15）对应的线性方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{16}$$

情形 1　（16）式中 $d_{r+1}\neq 0$. 从而，方程组（16）是一个矛盾方程组，无解. 因此线性方程组（14）也无解.

情形 2 （16）式中 $d_{r+1}=0$ 并且 $r=n$. 从而，方程组（16）以及方程组（14）与下述方程组同解

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r \end{cases} \tag{17}$$

由最后一个方程解得 x_r 惟一的值并经逐一回代求得其它各 x_i 惟一的值. 从而方程组（14）有**惟一的解**.

情形 3 （16）式中 $d_{r+1}=0$ 并且 $r<n$. 从而，方程组（16）以及方程组（14）与下述方程组同解.

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases} \tag{18}$$

此时，变元 x_{r+1}，x_{r+2}，$\cdots$，x_n 任意取一组值，例如，

$$k_{r+1},\ k_{r+2},\ \cdots,\ k_n,$$

此时应用情形2，可得变元 x_1，x_2，$\cdots$，x_r 确定的一组值 i，并且，$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r,k_{r+1},\ k_{r+2},\ \cdots,\ k_n)$ 为方程组（15）的一个解. 再由变元 x_{r+1}，x_{r+2}，$\cdots$，x_n 取值的任意性，方程组（15）有**无穷多个解.**

式子（18）中因变元 x_{r+1}，x_{r+2}，$\cdots$，x_n 可自由取值，故称为**自由变元**，而变元 x_1，x_2，$\cdots$，x_r 的值则依赖于 x_{r+1}，x_{r+2}，$\cdots$，x_n 的取值，又因它们的系数是阶梯形矩阵中不为零的行中第一个不为零的数，故称为**首项变元**.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=3 \\ -2x_1-2x_2-3x_3=-1 \\ x_1+x_2-x_3=-1 \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵依次做下列初等初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1\times(-2)+r_3]{r_1\times 2+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\times\frac{4}{5}+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{13}{5} \end{array}\right]$$

上面最后一个矩阵是情形 1 型阶梯形，故原方程组无解.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-2x_2=-1 \\ 2x_1-2x_3=2 \\ 4x_1-2x_2-2x_3=1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解 对其增广矩阵依次施以初等行变换如下:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1\times(-2)+r_5]{\substack{r_1\times(-1)+r_3 \\ r_1\times(-2)+r_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{2})+r_5]{\substack{r_2\times(-1)+r_3 \\ r_2\times(-1)+r_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})+r_5]{r_3\times(-1)+r_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{4})} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

最后一个矩阵为情形 2 型阶梯形，故原方程组有惟一的解，并且与方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad = -1 \\ \qquad 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

同解. 由最后一个方程得 $x_3 = -\frac{1}{2}$，代入第二个方程解得 $x_2 = 1$，再将 $x_2 = 1$ 代入第一个方程得 $x_1 = \frac{1}{2}$. 故原方程组惟一的解为 $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$.

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

解 将方程组的增广矩阵依次施以下述初等行变换

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1\times 1+r_3]{r_1\times(-1)+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times 1+r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

最后一个矩阵为情形 3 型阶梯形，故原方程组有无穷多解．而其对应的方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ \qquad\qquad 5x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

同解．此时 x_1 和 x_3 为首项变元， 而其余的变元 x_2 和 x_4 为自由变元．将自由变元的项移到方程的右端得

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 + 2x_2 - 2x_4 \\ \quad 5x_3 = -3 \qquad + 3x_4 \end{cases}$$

此时，分别给自由变元 x_2， x_4 赋任一组值： $x_2 = k_1$， $x_4 = k_2$，其中 k_1 和 k_2 为任意实数，便得

$$x_1=1+2k_1-2k_2+\frac{3}{5}(k_2-1)=\frac{2}{5}+2k_1-\frac{7}{5}k_2,$$

$$x_3=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}k_2=\frac{3}{5}(k_2-1)$$

即，原方程组的所有解（无穷多）为

$$(\frac{2}{5}+2k_1-\frac{7}{5}k_2,\ k_1,\ \frac{3}{5}(k_2-1),\ k_2)$$

其中 k_1，k_2 取任意实数. 例如，当取 $k_1=0$，$k_2=1$ 时，（-1, 0, 0, 1）是原方程组的一个解.

§1.5　行最简形矩阵

定义 1.5.1　一阶梯形矩阵称为**行最简形**，如果其元素不全为零的行的第一个非零元素均是 1 并且这些元素所在列的其它元素全为零.

容易证明，任一阶梯形矩阵可经若干初等行变换化为行最简形.

解线性方程组时，利用行最简形可以更直接地写出原方程组的解.

例如，在§1.4 例 2 中，对最后的一个阶梯形矩阵进一步施以做如下的初等行变换：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\times(-2)+r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times 1+r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}2&0&0&1\\0&2&0&2\\0&0&1&-\dfrac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1\times\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&\dfrac{1}{2}\\0&1&0&1\\0&0&1&-\dfrac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

由定义 1.5.1，最后一个矩阵是行最简形，并且原方程组与下述方程组同解

$$\begin{cases}x_1 & & &=\dfrac{1}{2}\\ & x_2 & &=1\\ & & x_3&=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

又如，在§1.4 例 3 中，对最后一个阶梯形矩阵进一步施以如下的初等变换.

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&-1&2&1\\0&0&5&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{5}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&-1&2&1\\0&0&1&-\dfrac{3}{5}&-\dfrac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times 1+r_1}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&0&\dfrac{3}{5}&\dfrac{2}{5}\\0&0&1&-\dfrac{3}{5}&-\dfrac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

由定义 1.5.1，最后一个矩阵是行最简形，原方程组与下述方程组同解.

$$\begin{cases} x_1 \qquad = 2x_2 - \dfrac{3}{5}x_4 + \dfrac{2}{5} \\ \qquad x_3 = \qquad \dfrac{3}{5}x_4 - \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

即首项变元 x_1 和 x_3 分别由自由变元 x_2 和 x_4 表示出来．令 $x_2 = k_1$，$x_4 = k_2$，则原方程组的所有解为：

$$(2k_1 - \frac{7}{5}k_2 + \frac{2}{5},\ k_1,\ \frac{3}{5}(k_2 - 1),\ k_2),$$

其中 t ，s 为任意实数.

§1.6　n 元齐次线性方程组

常数项全为零的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{19}$$

称为 **n 元齐次线性方程组**. 显然，$x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ 是(19)的一个解，称为**零解**．从而，齐次线性方程组解的类型只有两种：

情形 1　只有零解

情形 2　有无穷多个解（从而有非零解）．

注意到齐次线性方程组增广矩阵的最后一列元素全为零，并且施行初等行变换时保持不变，故在求解齐次线性方程组时只须对其系数矩阵施行初等行变换即可.

定理 1.6.1 如果 $m<n$，则齐次线性方程组（19）有非零解.

证 对方程组（19）的系数矩阵施行初等行变换化为阶梯形矩阵后，不全为零的行数 $r\le m<n$. 故其对应的阶梯形方程组有 $n-r$ 个自由变元，这 $n-r$ 个自由变元可任意取值，特别地可取 $n-r$ 个不全为零的数，代入阶梯形方程组得 r 个首项变元的值，从而得原方程组的一个非零解.

例 1 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=0 \\ -x_1+2x_2+2x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵依次施行下列初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)+r_4]{\substack{r_1\times(-2)+r_2 \\ r_1\times 1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{3}]{r_4\times\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\times(-1)+r_1]{r_4\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times 1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times 2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后一个矩阵为行最简形，以其为系数矩阵的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 0 \\ \quad x_2 \qquad = 0 \\ \qquad\quad x_3 = 0 \\ \qquad\quad\ 0 = 0 \end{cases}$$

解得: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 即最后一个矩阵（也为阶梯形）中不全为零的行数等于原方程组中未知量的个数, 从而原方程组只有惟一解: 零解.

例1　解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \qquad + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

解　对系数矩阵施行下列初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times(-5)+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{11})} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{11} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\times(-2)+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{11} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times 3+r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{7}{11}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{11}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{\ }\end{bmatrix}$$

最后一个矩阵为行最简形，以此为系数矩阵的齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1 \qquad\qquad -\frac{7}{11}x_4=0\\ \qquad x_2 \qquad -\frac{6}{11}x_4=0\\ \qquad\qquad x_3-\frac{8}{11}x_4=0\end{cases}$$

x_1,x_2,x_3 为首项变元，x_4 为自由变元. 令 $x_4=t$ 为任意实数，解得

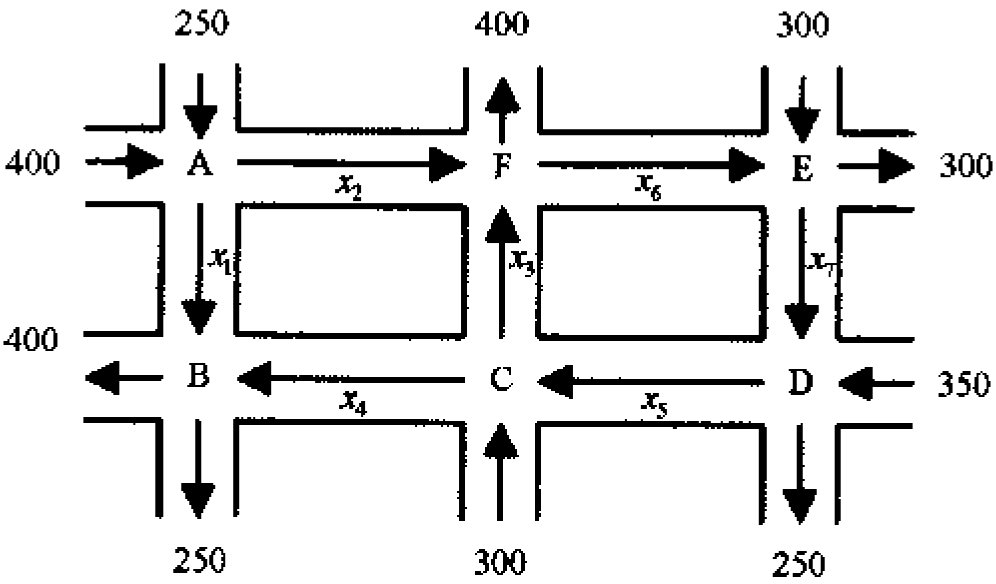
$$x_1=\frac{7}{11}t,\ x_2=\frac{6}{11}t\ ,\ \ x_3=\frac{8}{11}t,\ x_4=t$$

即，原齐次线性方程组的解为 $(\frac{7}{11}t,\ \frac{6}{11}t,\ \frac{8}{11}t,\ t)$，$t$ 为任意实数.（注：它的不全为零的行数小于原方程组中未知量的个数，从而原方程组有无穷多个解）。

§1.7 应 用

一、城市交通流量图

下面是某城市的局部交通图. 所示的街道为单向车道(箭头方向). 街道尽头处所示数据是其交通高峰期的平均车流量(辆/小时). 设计一个数学模型描述此交通网. 并考虑如某一天要在街道 B—C 间因故需要车流量控制在 150 辆/小时以内的可行性.



分析: 每一交叉口进入的车辆应等于驰出的车辆数. 因而可得关于 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 和 x_7 的线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2 = 650 & A \\ x_1+x_4 = 650 & B \\ x_3+x_4-x_5 = 300 & C \\ x_5-x_7 = 100 & D \\ x_6-x_7 = 0 & E \\ x_2+x_3-x_6 = 400 & F \end{cases}$$

对此方程的增广矩阵依次施行下列初等行变换:

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 650 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 650 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 400
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r_1\times(-1)+r_2}
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 650 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 400
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_2\times 1+r_1 \\ r_2\times 1+r_6}]{\substack{r_3\times(-1)+r_6 \\ r_4\times(-1)+r_6 \\ r_5\times 1+r_6}}
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 650 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{r_2\times(-1) \\ r_4\times 1+r_3}}
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 650 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

此阶梯形矩阵对应得线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_4 = 650 \\ x_2 \quad - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 \quad - x_7 = 400 \\ x_5 \quad - x_7 = 100 \\ x_6 - x_7 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

从而 x_4 和 x_7 是自由变元. 注意到在车流量为非负整数, 故令 $x_4 = s, x_7 = t$ 为任意非负整数, 得所需的数学模型:

$$x_1 = 650 - s,\quad x_2 = s,\quad x_3 = 400 + t - s,\quad x_4 = s,$$

$$x_5 = 100 + t,\quad x_6 = t,\quad x_7 = t$$

要控制街 B-C 区间的车流量不大于 150 辆/小时，即令 $x_4 = 150$，得

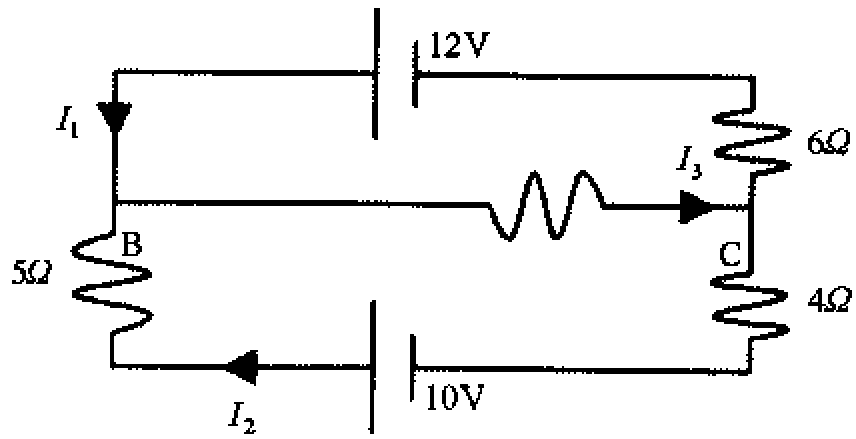
$$x_1 = 500,\quad x_2 = 150,\quad x_3 = 250 + t,\quad x_4 = 150,$$

$$x_5 = 100 + t,\quad x_6 = t,\quad x_7 = t$$

其中 t 为任意非负整数. （实际上，每条街道的车流量有个最大值，从而可得到 t 的一个上限）.

二、电路电流分析

电路如图所示, 求电流 I_1、I_2、I_3 的值.



利用基尔霍夫定律：每一结点处流入和流出的电流相等；沿每一闭合的回路的电压的代数和等于电压降的代数和，再由每一电阻产生的电压降由欧姆定律 $E=IR$ 给出（电流 I 的单位为安培一 A，电阻 R 的单位为欧姆一 Ω，电压 E 的单位为伏特一 V），可求得在结点 B 处有：$I_1+I_2-I_3=0$，在结点 C 处有：$-I_1-I_2+I_3=0$，在上半部的回路中有：$6I_1+2I_3=12$，而在下半部回路中有：$9I_2+2I_3=10$，从而得方程组

$$\begin{cases} I_1+I_2-I_3=0 \\ -I_1-I_2+I_3=0 \\ 6I_1+2I_3=12 \\ 9I_2+2I_3=10 \end{cases}$$

对此方程组的增广矩阵施行如下的初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 9 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-\frac{1}{6})+r_3]{r_1\times 1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 12 \\ 0 & 9 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{6})]{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\times(-9)+r_2]{r_3\times(-1)+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{14}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times\frac{4}{3}+r_3]{r_2\times(-\frac{1}{3})+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此行最简型矩阵对应的线性方程组为

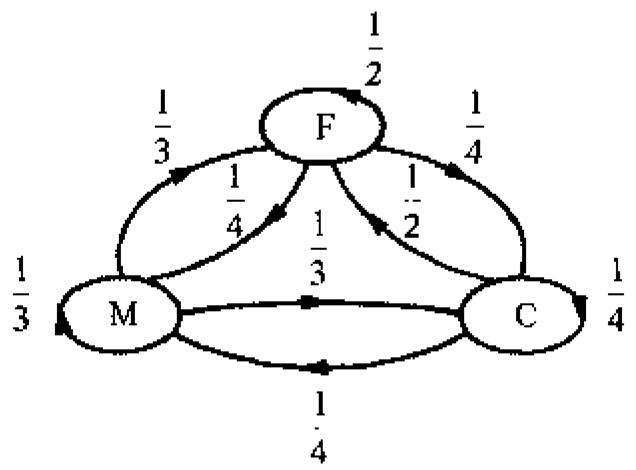
$$\begin{cases} I_1 \quad\quad\quad = \frac{4}{3} \\ \quad I_2 \quad\quad = \frac{2}{3} \\ \quad\quad I_3 \quad = 2 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

从而解得此电路图中电流分别为（惟一解）：

$$I_1 = \frac{4}{3}\ \text{（安培）},\quad I_2 = \frac{2}{3}\ \text{（安培）},\quad I_3 = 2\ \text{（安培）}$$

三、货物交换的经济模型

诺贝尔经济学奖获得者瓦希利·林梯夫（Wassily Leontief）曾考虑如下的一个经济学模型. 在一个原始部落根据分工，人们分别从事三种劳动：农田耕作（记以 F），农具及工具的制作（记以 M），以及织物的编织（记以 C）. 人们之间的贸易是实物交易. 下图给出这三组人之间的交易系统：



图中所示表明农夫们将每年的收获的一半留给自己，并分别拿出四分之一给工匠们和织布者们；而工匠们却平均分配他们制作的用具给每个组；织布者们则留下四分之一的衣物给自己，并拿出四分之一给工匠们，二分之一给农夫们. 此交易系统也可以用如下的表给出：

	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

随着社会的发展，实物交易形式变得十分不方便. 于是部落决定使用货币进行交易. 假设没有资本和负债，那么如何给每类产品定价使其公正地体现旧有的实物交易系统？

令 x_1 为农作物的价值，x_2 为农具及工具的价值，x_3 为织物的价值. 那么，从上表的第一行，农夫们生产的价值应等于他们交换到的产品（包括留给自己的）的价值，即有

$$x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

同理可得有关工匠们和纺织者们生产的价值的方程，从而得到有关 x_1,x_2,x_3 的齐次线性方程组：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3=0 \\ \frac{1}{4}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=0 \\ \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{3}{4}x_3=0 \end{cases}$$

此方程组的系数矩阵可经初等变换为如下的阶梯形（自己完成）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即 x_3 是自由未知量. 可令 $x_3=3$.得（5，3，3）为一个解. 而方程组的全部解（非负）则为这一特解的任意正倍数. 即，x_1,x_2,x_3 的赋值应满足比例式：

$$x_1:x_2:x_3=5:3:3$$

习 题 一

1. 解下列方程组，并在直角坐标系中作出图示.

1）$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2; \end{cases}$ 2）$\begin{cases} x+\ \ y=1 \\ 3x+3y=5; \end{cases}$ 3）$\begin{cases} x-\ \ y=1 \\ 2x-2y=2. \end{cases}$

2. 用 Gauss 消元法解下列线性方程组.

1）$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ 2x_1+x_2+x_3=13 \\ 3x_1+9x_2-36x_3=-33; \end{cases}$ 2）$\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-2; \end{cases}$

3） $\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad +3x_4 = 4 \\ \qquad 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad 3x_2 \qquad -2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad = 5; \end{cases}$ 4） $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3. 确定下列线性方程组中 k 的值满足所要求的解的个数.

1）无解:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 6 \\ 3x + 6y + 8z = 4; \end{cases}$$

2）有惟一解:

$$\begin{cases} kx + y = 14 \\ 2x - 3y = -12; \end{cases}$$

3） 有无穷多解:

$$\begin{cases} x+y+kz=4 \\ x+2y+z=5 \\ x-2y+z=1. \end{cases}$$

4. 证明: 如果对所有的实数 x 均有 $ax^2 + bx + c = 0$, 那么

$a = b = c = 0$ （提示: 取三个不同得 x 的值予以考虑）.

5. 讨论以下述阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组是否有解; 如有解区分是惟一解还是无穷多解.

1） $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ 2） $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

3）$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$　　4）$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

6. 对给定方程组的增广矩阵施行行初等变换求解线性方程组.

1）$\begin{cases} -3x+5y=-22 \\ 3x+4y=4 \\ x-8y=32 \end{cases}$

2）$\begin{cases} 4x+12y-7z-20w=22 \\ 3x+9y-5z-28w=30 \end{cases}$

3）$\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w=\frac{1}{2} \\ 4x+2y-2z+2w=2 \end{cases}$

7. 对给定齐次线性方程组的系数矩阵施行行初等变换求解下列方程组.

1）$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$　　2）$\begin{cases} x+2y+z+w=0 \\ x-2y+2w=0 \\ 2y-z+w=0 \end{cases}$

8. 设一线性方程组的增广矩阵为:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & \alpha & 3 \end{array}\right]$$

求 α 的值使得此方程组有惟一的解.

9. 设一线性方程组的增广矩阵为:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & \beta & 0 \end{array}\right]$$

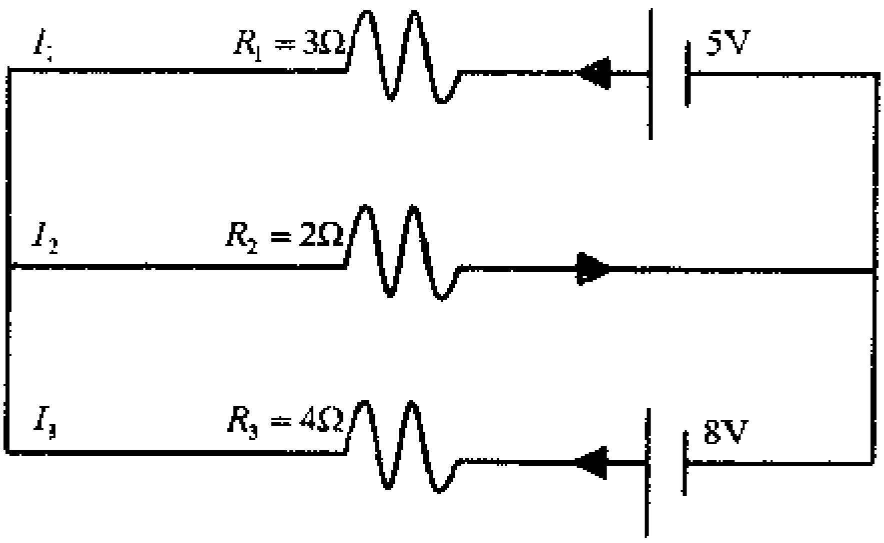
1）此方程组有可能无解吗？说明你的理由.

2）β 取何值时方程组有无穷多解?

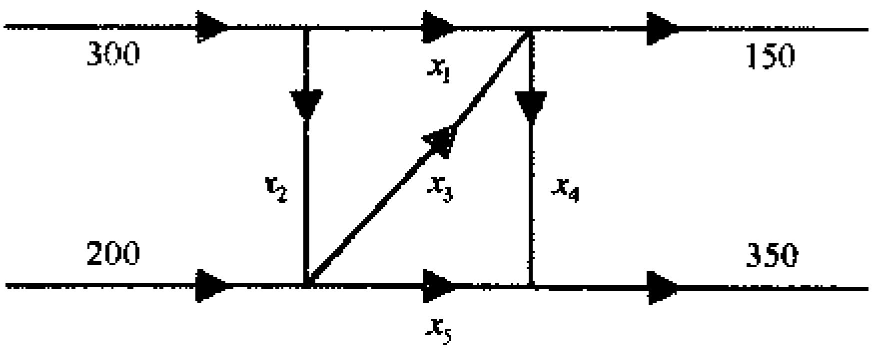
10. 求 λ 的值使得下述方程组有非零解.

$$\begin{cases} (\lambda-2)x - 9y = 0 \\ -x + (\lambda-2)y = 0 \end{cases}$$

11. 求出下列电路网络中电流 I_1，I_2，I_3 的值.



12. 一城市局部交通流如图所示.（单位：辆/小时）



1）建立其数学模型；

2）要控制 x_2 至多 200 辆/小时，并且 x_3 至多 50 辆/小时是可行的吗？

13. 在应用三的货物交换经济模型中，如果交易系统由下表给出. 试确定农作物的价值 x_1，农具及工具的价值 x_2，织物的价值 x_3 的比值.

	F	M	C
F	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

第二章　矩阵代数

第一章中我们已定义了矩阵的概念，并将矩阵作为工具应用于求解线性方程组. 实际上，矩阵是最重要的数学工具之一. 为此，我们必须掌握矩阵的各种运算及运算规律.

§ 2.1　一些特殊的矩阵

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

是一个 $m\times n$ 级的矩阵. 当 m 或 n 取某些特定的值，或当 A 的某些指定位置上的元素为特定的数时，便得到相应的特殊矩阵.

方阵　当 $m=n$ 时，即 A 的行数与列数相同时，则称 A 为 **n 阶方阵或 n 阶矩阵**.

当矩阵 A 为 n 阶方阵时，称元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为矩阵 A **主对角线**上的元素.

三角矩阵　设 A 为 n 阶方阵，并且 A 的主对角线以下的元素（不包括主对角线上的元素）全为零，则称 A 为**上三角矩阵**；

如果 A 的主对角线以上的元素（不包括主对角线上的元素）全为零，则称 A 为**下三角矩阵**. 例如，下述两个 4 阶方阵中，U 是上三角矩阵，而 V 是下三角矩阵：

$$U=\begin{bmatrix}5&2&-1&0\\0&0&2&3\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\qquad V=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\3&-1&0&0\\0&3&2&0\\4&0&0&3\end{bmatrix}$$

对角矩阵　设 A 为 n 阶方阵，且既是上三角矩阵又是下三角矩阵，则称 A 为**对角矩阵**. 例如，下述矩阵是一个 4 阶对角矩阵：

$$\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

数量矩阵和**单位矩阵**　设 A 为一个对角矩阵，并且对角线上元素全部相等，则称 A 为**数量矩阵**. 特别地，如一数量矩阵其对角线上的元素全为 1，则称为**单位矩阵**，用记号 I 表示，必要时用 I_n 表示其为 n 阶单位矩阵. 例如，下述矩阵中，B 是一个数量矩阵，I_4 是一个 4 阶单位矩阵.

$$B=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}\qquad I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

零矩阵　其元素全为零的 $m\times n$ 级矩阵称为 $m\times n$ 级**零矩阵**，记为 $O_{m\times n}$ 或简记为 O.

行向量与列向量 当 m=1 时，称 A 为 **n 维行向量**；当 n=1 时，称 A 为 **m 维列向量**. 我们常用 α, β, γ, … 表示行向量和列向量. 例如，下述矩阵中，α 是一个 4 维行向量，β 是一个 3 维列向量：

$$\alpha=(1,\ 0,\ -2,\ 3), \qquad \beta=\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$$

一般地，设 A 为任一 $m\times n$ 级矩阵. 则 A 有 m 个行向量和 n 个列向量. 即，如果 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，那么：

$$\alpha_i=\left(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}\right), \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

和

$$\beta_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}, \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

分别是 A 的 m 个行向量和 n 个列向量，并形式地记

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}=\left(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n\right)$$

§2.2 基本运算

一、矩阵相加与数乘矩阵

同型矩阵 两个行数和列数均分别相等的矩阵称为**同型矩**

阵.

矩阵的相等 如果两个矩阵是同型的，并且它们对应位置上的元素分别相等，就称这两个矩阵相等. 即，如果 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，那么 $A=B$ 当且仅当

$$a_{ij}=b_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots,n$$

矩阵的加法 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵. 则定义 A 与 B 的和为

$$A+B(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

即 A 与 B 的和仍是一个与 A 和 B 同型的矩阵，其 (i,j) 位置上的元素为 A 与 B 的 (i,j) 位置上元素之和.

例如：

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & -5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 9 & -5 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

数与矩阵相乘 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，k 是任一数，则可定义 k 与 A 之间的数乘为

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

即 kA 仍是一个与 A 同型的矩阵，其 (i,j) 位置上的元素为 k 与 A 的 (i,j) 位置上的元素的积.

例如，设

$$A=\begin{bmatrix}-6 & 4 & 2\\ 0 & -10 & -2\end{bmatrix}$$

则

$$\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

而且

$$3A=\begin{bmatrix}-18 & 12 & 6\\ 0 & -30 & -6\end{bmatrix}$$

显然，如果 A 和 O 均是一个 $m\times n$ 级矩阵，则

$$A+O=O+A=A,\quad 0A=O,\quad A+(-1)A=O$$

并且对任意的数 k 有

$$kO=O$$

习惯上，我们记

$$-A=(-1)A$$

并且，当 B 是另一个 $m\times n$ 级矩阵时，记

$$A-B=A+(-B)$$

并称其为 A 与 B 的差.

例如：

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -5\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 6 & -2\end{bmatrix}$$

二、矩阵的乘法

为了给出矩阵相乘的定义，先讨论线性方程组的矩阵表示.一个一元的线性方程具有形式

$$ax=b \tag{1}$$

这里，a 和 b 是数，x 是未知量. 我们也可将它们分别看作 1×1 级的矩阵. 现在设法将其形式推广到任意的 n 元线性方程组的情形.

设有一个 n 元的线性方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{2}$$

令

$$\alpha=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n),\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

并定义 α 与 X 的积为

$$\alpha X=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

那么（2）式就可以表示为

$$\alpha X=b \tag{3}$$

例如，设方程

$$3x_1+4x_2-x_3=-5 \tag{4}$$

令

$$\alpha=(3\quad 4\quad -1),\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

则（4）式可表示为

$$\alpha X=-5$$

更一般地，设如下的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{5}$$

我们希望将（5）表示成矩阵形式

$$AX=\beta \tag{6}$$

为此，令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

（注意：A 的列数与 X 的行数相同，A 的行数与 β 的行数相同），并定义 A 与 X 的积为

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

那么，由矩阵相等的定义，（6）与（5）等价并达到我们的目的.

需要指出，AX 是一个 $m\times 1$ 级矩阵，即是一个列向量. 它的第 i 个元素是 A 的第 i 行元素分别乘以 X 的对应位置上的元素（因此，X 的行数必须与 A 的列数匹配）后相加得到.

例 1 $$A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

则

$$AX=\begin{bmatrix}-3x_1 \quad +2x_3 \\ x_1+2x_2-3x_3\end{bmatrix}$$

例 2

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

$$AX=\begin{bmatrix}-5\ 1+0\cdot(-2)\\ 2\ 1+3\cdot(-2)\\ 1\cdot 1+(-2)\ (-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ -5\\ 5\end{bmatrix}$$

例 3 写出下列方程组的矩阵形式.

$$\begin{cases}3x_1-2x_2 \qquad\quad -x_4=-6\\ x_1-2x_2+5x_3+2x_4=0\\ \qquad 4x_2-x_3+5x_4=5\end{cases}$$

解 原方程组等价于

$$\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 5 & 2\\ 0 & 4 & -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$$

一般地，设 $A=(a_{ik})_{m\times s}$， $B=(b_{kj})_{s\times n}$ ，即 A 的列数等于 B 的行数. 令 β_1， $\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 B 的 n 个列向量，那么 A 与每一 β_j 可作乘积 $A\beta_j$， $j=1,2,\cdots,n$. 因而，我们可以进一步将 A 与 B 相乘，其积是一个 $m\times n$ 级矩阵（取 A 的行数和 B 的列数 n），它

的第 j 列恰好是 $A\beta_j$，即

$$AB = A(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n) = (A\beta_1,\ A\beta_2,\ \cdots,\ A\beta_n)$$

因每一 $A\beta_j$ 是一个 m 维列向量，故如上定义的积 AB 是一个 $m\times n$ 级矩阵. 并且，如写 $AB=(c_{ij})_{m\times n}$， 则 c_{ij} 是 $A\beta_j$ 的第 i 个元素，为 A 的第 i 行元素分别乘以 β_j 的对应位置上的元素后的和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\,,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \qquad (7)$$

从而有以下定义.

矩阵相乘　设 $A=(a_{ik})_{m\times s}$，$B=(b_{kj})_{s\times n}$（注：A 的列数必须与 B 的行数相同），那么 A 与 B 的积 $AB=C(c_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 级矩阵，并且 C 中元素 c_{ij} 由（7）式给出.

例 4　设

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

因 A 的列数与 B 的行数相同，B 的列数也与 A 的行数相同，所以 A 与 B 可相乘，B 与 A 也可相乘，并且

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\times3+1\times2+3\times1 & -2\times(-2)+1\times4+3\times(-3)\\ 4\times3+1\times2+6\times1 & 4\times(-2)+1\times4+6\times(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 20 & -22\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}3&-2\\2&4\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&3\\4&1&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times(-2)+(-2)\times4&3\times1+(-2)\times1&3\times3+(-2)\times6\\2\times(-2)+4\times4&2\times1+4\times1&2\times3+4\times6\\1\times(-2)+(-3)\times4&1\times1+(-3)\times1&1\times3+(-3)\times6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-14&1&-3\\12&6&30\\-14&-2&-15\end{bmatrix}$$

例5 设

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-2&2\\4&3\\1&6\end{bmatrix}$$

因 A 的列数与 B 的行数不相等，故 A 与 B 不能相乘. 但 B 的列数与 A 的行数相同，故 B 与 A 可相乘，并且

$$BA=\begin{bmatrix}-2&2\\4&3\\1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&4\\15&6\\9&12\end{bmatrix}$$

例6 设

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3&1\\-2&-4\end{bmatrix}$$

则显然 AB 和 BA 均存在，仍为 2×2 级矩阵. 而且

$$AB=\begin{bmatrix}4&-2\\-4&-8\end{bmatrix},\qquad BA=\begin{bmatrix}6&5\\-4&-10\end{bmatrix}$$

以上例子说明，对任意两个矩阵 A，B，乘积 AB 或 BA 可能没有定义（例 5）；即使有定义，也可能不同型（例 4）；即使同型，也可能不相等（例 6）.一般地，矩阵乘法**不满足交换律**.

因此，在矩阵乘积 AB 中称 A 左乘 B，并且称 B 右乘 A.

矩阵的转置　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 A 的转置 $A^T=(b_{ij})$ 是一个 $n\times m$ 级矩阵，并且

$$b_{ji}=a_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n,\quad i=1,2,\cdots,m$$

即 A^T 的第 j 个行向量恰好是 A 的第 j 个列向量，$j=1,2,\cdots,n$

例 7

1）如果

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\-5&4\end{bmatrix},\qquad \text{那么}\qquad A^T=\begin{bmatrix}1&0&-5\\2&3&4\end{bmatrix}$$

2）如果

$$A=\begin{bmatrix}-3&0&2\\1&3&-5\\-1&2&7\end{bmatrix},\qquad \text{那么}\qquad A^T=\begin{bmatrix}-3&1&-1\\0&3&2\\2&-5&7\end{bmatrix}$$

3）如果

$$A=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix},\qquad \text{那么}\qquad A^T=\begin{pmatrix}2&3&4&0\end{pmatrix}$$

§ 2.3　运算规律

定理 2.3.1　设 A, B, C 是同型的任意矩阵，k, l 是任意的数，那么以下运算规律成立.

1. $A+B=B+A$　　　　（**加法交换律**）

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ （**加法结合律**）

3. $k(lA)=(kl)A$

4. $(k+l)A=kA+lA$

5. $k(A+B)=kA+kB$

此定理中的五条运算规律十分容易验证，请读者自己完成.

与矩阵的相乘和矩阵的转置相关有如下的若干运算规律.

定理 2.3.2 设 A、B、C 是任意矩阵，k 为任意的数. 如果下述的运算均有定义，那么以下运算规律成立.

6. $(AB)C=A(BC)$ （**乘法结合律**）

7. $A(B+C)=AB+AC$ （**乘法对加法的左分配律**）

   $(A+B)C=AC+BC$ （**乘法对加法的右分配律**）

8. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

9. $(A^T)^T=A$

10. $(A+B)^T=A^T+B^T$

11. $(kA)^T=kA^T$

12. $(AB)^T=B^TA^T$

证 仅给出运算律 6 和运算律 12 的证明. 其它运算律的证明较容易，请读者自己完成.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{jk})_{n\times s}$，而且 $C=(c_{kl})_{s\times t}$. 令 $D=(d_{ik})_{m\times s}=AB$，$E=(e_{jl})_{n\times t}=BC$. 那么，我们需要证明 $DC=AE$. 由相乘的定义，

$$d_{ik}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pk}\ ,\qquad e_{jl}=\sum_{q=1}^{s}b_{jq}c_{ql}$$

现在，DC 的$(i,\ l)$位上的元素为

$$d_{i1}c_{1l}+\cdots+d_{is}c_{sl}=\sum_{q=1}^{s}\left(\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pq}\right)c_{ql}$$

而 AE 的$(i,\ l)$位上的元素为

$$a_{i1}e_{1l}+\cdots+a_{in}e_{nl}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}\left(\sum_{q=1}^{s}b_{pq}c_{ql}\right)$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{s}a_{ip}b_{pq}c_{ql}=\sum_{q=1}^{s}\left(\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pq}\right)c_{ql}$$

注意到 DC 和 AE 均是 $m\times t$ 级矩阵，故有 $DC=AE$. 从而证明了运算律 6.

又设 $A=(a_{ik})_{m\times s}$， $B=(b_{kj})_{s\times n}$， 并令 $C=(c_{ij})_{m\times n}=AB$. 那么

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

从而 C^T 的$(j,\ i)$位置的元素为 c_{ij}. 因 B^T 是 $n\times s$ 级矩阵， A^T 为 $s\times m$ 级矩阵，所以 B^TA^T 有定义. 而且，B^TA^T 的$(j,\ i)$位置上的元素为 B^T 的第 j 行元素分别与 A^T 的第 i 列元素相乘后的和，即，B 的第 j 列元素分别与 A 的第 i 行元素相乘后的和：

$$b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{sj}a_{is}=c_{ij}$$

注意到 B^TA^T 和 C^T 均是 $n\times m$ 级矩阵，故得 $(AB)^T=B^TA^T$，并完成了运算律 15 的证明.

众所周知，如果a, b, c是三个数，并且$a \neq 0$满足$ab = ac$，那么必有$b = c$. 称之为数的乘法满足消去律. 对于矩阵的乘法先考查下面的例子：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

经验算有$AB = AC = O$， 但显然有$B \neq C$. 从而，矩阵乘法**不满足消去律**.

注： 这个例子也说明矩阵相乘时，两个非零矩阵之积不一定是非零矩阵.

在若干矩阵相乘时（可相乘时），由于乘法满足结合律，括号可省略，例如：

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

特别地，如A是一个n阶方阵，则可定义A的正指数方幂

$$A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k}, \qquad k\text{ 为正整数}$$

亦即，

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}, \qquad \left(A^k\right)^l = A^{kl}, \qquad k,\ l\text{ 为正整数}$$

§2.4 逆 矩 阵

设I是n阶单位矩阵. 容易验证，对任意的矩阵$B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，$C = \left(c_{ij}\right)_{n\times s}$和$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$有

$$BI = B, \quad IC = C, \quad AI = IA = A$$

这也是将 I 称为单位矩阵的原因.

众所周知，如果 a 是一个非零数，则总存在一个数 b，使得 $ab=1$，且称 b 为 a 的**逆元**. 相应地，在矩阵代数中我们有如下的定义.

定义 2.4.1 一个 n 阶方阵 A 称为**可逆**的，或称为**非奇异**的，如果存在一个 n 阶方阵 B 使得

$$AB=BA=I$$

并称 B 是 A 的一个**逆矩阵**. **不可逆**的矩阵亦称为**奇异**矩阵.

例 1 证明下述矩阵不可逆.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

证 若不然，设有

$$B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

是 A 的逆矩阵，则有

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c & b+d\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

由矩阵相等的定义得到矛盾：0=1.

例 2 验证如下两个矩阵互为逆矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{2}\\ -2 & -1\end{bmatrix}.$$

解 因

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{2}\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

而且

$$BA=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

故 A, B 互为逆矩阵.

定理 2.4.1 一方阵可逆，则其逆矩阵惟一.

证 设 A 是一可逆方阵，B 和 C 均是 A 的逆矩阵. 则有：

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

可逆矩阵 A 的惟一的逆矩阵记为 A^{-1}.

明显地，如矩阵 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，并且

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

关于可逆矩阵，有如下的性质.

性质 2.4.2 如 n 阶方阵 A 可逆，则其转置矩阵 A^T 也可逆，并且

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

证 因为 $\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I$，并且 $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I$. 故由可逆矩阵的定义有 A^T 可逆，并且 $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

性质 2.4.3

（i）如矩阵 A 可逆，并且满足矩阵等式 $AB = O$ （或 $BA = O$），则 $B = O$；

（ii）如矩阵 A 可逆，并且满足矩阵等式 $AB = AC$ （或 $BA = CA$），则 $B = C$.

证 （i）等式 $AB = O$ 两端同时左乘（在另一情况下同理可

证：用右乘）A^{-1}得：

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}O=O$$

而$A^{-1}(AB)=(A^{-1}A)B=B$，故得$B=O$.

（ii）由$AB=AC$（在另一情况下同理可证）得

$$AB-AC=A(B-C)=O$$

因A可逆，由（i）得$B-C=O$，即$B=C$.

性质 2.4.4 如A与B均为n阶可逆矩阵，则AB也可逆，并且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证 因为

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$$

所以AB可逆并且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

此性质还可推广为：如$A_1,A_2,\cdots,A_k$均为可逆的同阶方阵，则乘积$A_1A_2\cdots A_k$也可逆，并且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$$

注：一般地，当A与B乘法不可换时（称A与B**乘法可换**，如果$AB=BA$）等式$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$不成立.

例 3 设

$$A=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

其中 $d_i \neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n$．验证 A 可逆，并求 A^{-1}．

解 明显地有

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}=I$$

故 A 可逆，并且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

§2.5 初等矩阵和矩阵可逆的充分必要条件

一、初等矩阵

初等变换是线性代数中最重要的工具之一，而初等矩阵是

初等变换的矩阵表现.

矩阵的初等变换除第一章§1.3 定义的三种初等行变换外还应包括下述三种**初等列变换**.

Ⅰ. 交换两列的位置；并用记号 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表 i，j 列互换；

Ⅱ. 某一列乘以一个非零数；并用记号 kc_i 表第 i 列乘以数 k；

Ⅲ. 某一列乘以一个数后加到另一列上. 并用记号 $kc_i + c_j$ 表第 i 列乘以数 k 后加到第 j 列上。

对应地，我们有如下的三类初等矩阵.

Ⅰ型初等矩阵 交换单位矩阵第 i 行与第 j 行相互位置得到的矩阵称为Ⅰ型初等矩阵. 记为 $P(i,j)$，即

$$P(i,j)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 & \cdots & 1 && \\ && \vdots & \ddots & \vdots && \\ && 1 & \cdots & 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

Ⅱ型初等矩阵 单位矩阵的第 i 行乘以一个非零数 k 得到的矩阵称为Ⅱ型初等矩阵，记为 $P(i(k))$，即

$$P(i(k))=\begin{bmatrix}1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && k && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

III型初等矩阵 单位矩阵的第 i 行（j 列）乘以数 k 后加到第 j 行（i 列）后得到的矩阵称为 III 型初等矩阵，记为 $P(i(k),j)$，即

$$P(i(k),j)=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&k&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}&&i&&j&&\end{array}\end{array}$$

性质 2.5.1

（i）用 $P(i,j)$ 左乘一矩阵，相当于对该矩阵施行初等行变换 $r_i \leftrightarrow r_j$；$P(i,j)$ 右乘一矩阵，用相当于对该矩阵施行初等列变换 $c_i \leftrightarrow c_j$．

（ii）用 $P(i(k))$ 左乘一矩阵，相当于对该矩阵施行初等行变换 kr_i；用 $P(i(k))$ 右乘一矩阵，相当于对该矩阵施行初等列变换 kc_i．

（iii）用 $P(i(k),j)$ 左乘一个矩阵，相当于对该矩阵施行初等行变换 kr_i+r_j；用 $P(i(k),j)$ 右乘一个矩阵，相当于对该矩阵施行初等列变换 kc_j+c_i．

证 （i）仅证明列变换的情形，行变换的情形同理可证．设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$P(i,j)$ 的阶数为 n．则

$$AP(i,j)=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \qquad i & \qquad\quad j \qquad\qquad \end{matrix}\end{array}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

（ii）其证明较容易，请读者自己完成.

（iii）仅证明列变换的情形，行变换的情形同理可证.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $P(i(k),j)$ 为一 $m\times m$ 级方阵，则

$$Ap(i(k),j)=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi}+ka_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad P(2,3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P(3(3))=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P(3(3),2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$A\,P(3(3))=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AP(3(3),2)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{32}+a_{33} \end{bmatrix}$$

性质 2.5.2 如 P 是一个初等矩阵，则 P 是可逆的，并且 P^{-1} 与 P 是同型的初等矩阵．具体地有

（i） $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$；

（ii） $P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1}))$；

（iii） $P(i(c),j)^{-1}=P(i(-c),j)$．

证 （i）与（ii）的证明留给读者．要证明（iii）只须验证 $P(i(c),j)\ P(i(-c),j)=P(i(-c),j)\ P(i(c),j)=I$ 即可．而

$$P(i(c),j)P(i(-c),j)=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&\ddots&&\\&&c&\cdots&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&-c&1&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}$$

由性质 2.5.1，$P(i(c),j)$ 左乘 $P(i(-c),j)$ 相当于将 $P(i(-c),j)$ 的第 i 行的 c 倍加到第 j 行，并且其余行保持不变．此时，$P(i(-c),j)$ 的第 j 行中的 $-c$ 变成零，从而乘积为 I．同理可证 $P(i(-c),j)P(i(c),j)=I$．故 $P(i(c),j)$ 可逆，并且 $P(i(c),j)^{-1}=P(i(-c),j)$．

二、矩阵可逆的充分必要条件

定义 2.5.1 设 A，B 均为 $m\times n$ 级矩阵．如存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 使得

$$B=P_kP_{k-1}\cdots P_1A$$

则称 A 行等价于 B．

换句话说，如果对 A 施行若干**初等行变换**得到 B，则 B 行等价于 A．

我们将引入利用初等行变换判定一方阵是否可逆并且在可逆时求其逆矩阵的重要方法．为此，先考察如下的一个事实：

一上三角矩阵对角线上元素如均不为零，则其行最简形为单位矩阵 I，即它行等价于单位矩阵 I．

例如，

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&-1&3\\0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-1)+r_2}\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-2)+r_1}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{3}]{r_1\times\frac{1}{2}\atop r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

定理 2.5.3 设 A 是一个 n 阶方阵．则下述条件等价：

（i） A 是可逆的；

（ii）齐次线性方程组 $AX=O$ 仅有零解；

（iii） A 行等价于单位矩阵 I；

（iv） A 可写成若干个初等矩阵之积．

证（i）$\Rightarrow$（ii）设 A 可逆．如果 X_0 是 $AX=O$ 的任一解，即 $AX_0=O$．两边左乘 A^{-1} 得：

$$X_0=X_0I=(A^{-1}A)\ X_0=A^{-1}(AX_0)=AO=O$$

即 $AX=O$ 只有零解．

（ii）$\Rightarrow$（iii）设 $AX=O$ 仅有零解．经若干初等行变换将 A 化为一阶梯形矩阵 B，则 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解．如 B 的对角线上有元素为 0，则 B 的最后一行元素全为零．由定理 1.6.1, $BX=O$ 有非零解，矛盾．故 B 的对角线上元素全不为 0．从而, B 行等价于 I，即 B 经若干初等行变换可化为 I．故 A 经若干初等行变换可化为 I，从而 A 行等价于单位矩阵 I．

（iii）$\Rightarrow$（iv）设 A 行等价于 I，即存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，使得

$$I = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$$

从而有

$$P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1} = I \quad P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1} \quad P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1} = A$$

（iv）$\Rightarrow$（i）由 $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1} \ I = IP_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1}$ 得

$$I = AP_k P_{k-1} \cdots P_1 = = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$$

由逆矩阵的定义知 A 可逆，并且 $A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1$. 证毕.

由定理 2.5.5，如 n 阶方阵 A 可逆，则存在若干初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 使得

$$I = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A \tag{8}$$

（8）式两端同时右乘 A^{-1} 得

$$A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 I \tag{9}$$

比较（8）、（9）两式得：对 A 和 I 同时施行相同的若干初等行变换，当这些初等行变换把 A 化为单位矩阵的同时，这些初等行变换也将单位矩阵化为 A^{-1}.

求逆矩阵的方法： 将一 n 阶可逆矩阵 A 和 n 阶单位矩阵 I 写成一个 $n \times 2n$ 级的矩阵

$$B = [A \mid I]$$

然后对 B 施行初等行变换，目的是把 A 化为单位矩阵. 当 A 化为单位矩阵 I 时，B 的右一半矩阵 I 则同时化为了 A^{-1}.

例 2 判断下述矩阵 A 是否可逆.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ -3 & -2 & 22 \end{bmatrix}$$

解 对 A 施行下列初等行变换:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ -3 & 2 & 5\\ -3 & -2 & 22\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times 3+r_3]{r_1\times 3+r_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & -4 & 17\\ 0 & -8 & 34\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\times(-2)+r_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & -4 & 17\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

明显的，最后一个阶梯形矩阵有一行全为零，不可能与单位矩阵行等价，故不可逆.

例 3 判断下述矩阵 A 是否可逆，如可逆求其逆矩阵 A^{-1}：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

解

$$B=[A\mid I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\times(-2)+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -8 & 0 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times 3+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times 1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\times 2+r_1]{r_2\times(-1)+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{2})}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

由最后一个矩阵知 B 的左一半矩阵 A 经行初等变换化为了单位

矩阵（即行等价于单位矩阵）故 A 可逆，并且由最后一个矩阵右一半得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

例 4 求解矩阵方程

$$AX-B=X$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

解 由原方程得 $AX-X=B$，即 $AX-IX=B$，从而有 $(A-I)X=B$，而

$$A-I=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

由例 2 知 $A-I$ 可逆，并且

$$(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

从而

$$X=(A-I)^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 10 & -10\\ -4 & \frac{9}{2}\end{bmatrix}$$

§2.6 分块矩阵

级数较大的矩阵可看成是由若干个级数较小的矩阵所构成．这种方法在进行相关的矩阵运算，矩阵性质的讨论以及对具体对象进行矩阵表示时往往可以起到简化问题的作用．具体地，对一个给定的矩阵 A，在行间作从左至右的若干水平线，并在列间作从上到下的若干垂直线，从而把 A 划分成若干级数较小的矩阵．每个小矩阵称为 A 的一个**子块**，而此分法则称为 A 的一个**分块**．以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**．例如下面的一个 4×5 级矩阵 A 被一条水平线和一条垂直线分成了 4 个块：

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

如记

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_{22}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

则对应的分块矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

我们也可以将 A 的行逐一进行分块（无垂直划分线）

$$A=\left[\begin{array}{ccccc}1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ \hdashline 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ \hdashline -2 & 1 & 2 & 0 & -2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4\end{bmatrix}$$

其中α_i是A的第i行的行向量（即1×5级矩阵），$i=1, 2, 3, 4$.

同理，又可将A的列逐一进行分块（无水平划分线）

$$A=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c}1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & -2\end{array}\right]=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$$

其中β_j是A的第j列的列向量（即4×1级矩阵），$j=1, 2, 3, 4, 5$.

下面我们讨论分块矩阵的运算。

两个行数和列数分别相同的矩阵A与B，如果用完全相同的方式进行分块得

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs}\end{bmatrix},$$

则显然有

$$A+B=\begin{bmatrix}A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs}\end{bmatrix}$$

如果k是任一数，则有

$$kA=\begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1s} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ kA_{r1} & kA_{r2} & \cdots & kA_{rs} \end{bmatrix}$$

为了给出分块矩阵的乘法，先看一个例子.

设

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B=\left[\begin{array}{cc:c:c} 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

计算AB时，可将A看成一个2×2的级矩阵，将B看成一个2×3级矩阵，即

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23} \end{bmatrix}$$

而

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\9\end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 10\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=5$$

$$A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}=7$$

从而

$$AB=\left[\begin{array}{cc:c:c}1 & -6 & -4 & -1\\-1 & 11 & 9 & -3\\ \hdashline 3 & 10 & 5 & 7\end{array}\right]$$

按矩阵的乘法可直接验证上述矩阵确为 A 与 B 的积.

一般地，如 A 为一 $m\times n$ 级矩阵，B 为一 $n\times s$ 级矩阵，将 A 和 B 分别进行分块. 为了进行分块矩阵的相乘，要求 A **的列的分法与** B **的行的分法一致**：

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k}\\A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rk}\end{bmatrix}\begin{matrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_r\end{matrix}\\ \begin{matrix}n_1 & n_2 & \cdots & n_k\end{matrix}\end{array}$$

$$B=\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kt} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 & \quad s_2 & \quad \cdots & \quad s_t \end{matrix} & \end{array}$$

其中每一 A_{ij} 是一个 $m_i \times n_j$ 级矩阵， B_{jl} 是一个 $n_j \times s_l$ 级矩阵. 那么

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix}$$

其中

$$C_{il}=A_{i1}B_{1l}+A_{i2}B_{2l}+\cdots+A_{ik}B_{kl},$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,r;\ \ l=1,\ 2,\ \cdots,\ t.$$

这个结果可利用矩阵乘积的定义直接验证.

例1 设

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

计算 AB.

解 令

$$A=\left[\begin{array}{cc:c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \qquad B=\left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -3 & -7 \end{array}\right]$$

（注意：A 的列的分法与 B 的行的分法一致） 则

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & O_{2\times1} \\ O_{2\times2} & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & O_{2\times2} \\ O_{1\times3} & B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1B_1 & O_{2\times2} \\ O_{2\times3} & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

而

$$A_1B_1=\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2B_2=\begin{bmatrix} -6 & -14 \\ -9 & -21 \end{bmatrix}$$

所以

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -21 \end{bmatrix}$$

上述例子中 A 和 B 分块后，除对角线上的块外均为零块（零矩阵）．一般地，若一矩阵分块后具有形式：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$$

（其它未写出的块均为零块），则称 A 为**对角分块阵或准对角矩阵．**

例如，下述矩阵是一对角分块阵：

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix}$$

其中，

$$A_1=\begin{bmatrix}-1&0&0\\2&-1&0\\3&0&-1\end{bmatrix},\qquad A_2=(2),\qquad A_3=(3\quad -5)$$

明显地，若有两个对角分块阵

$$A=\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_r\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_r\end{bmatrix}$$

其中，A_i 与 B_i 可相乘 $(i=1,2,\cdots,r)$，则 A 与 B 可相乘，并且

$$AB=\begin{bmatrix}A_1B_1&&&\\&A_2B_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_rB_r\end{bmatrix}$$

也是一个对角分块阵.

特别地，当 A 是一 n 阶方阵又是一对角分块阵

$$A=\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_r\end{bmatrix}$$

并且每一 A_i 均可逆，$i=1,2,\cdots,r$，则 A 是可逆的，并且容易验证

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&&&\\&A_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&A_r^{-1}\end{bmatrix}$$

§2.7 应 用

设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$； $y_1,y_2,\cdots,y_n$； $z_1,z_2,\cdots,z_s$ 是三组未知量，满足如下的关系式:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{cases} \tag{10}$$

以及

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1s}z_s \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2s}z_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{ns}z_s \end{cases} \tag{11}$$

现在，已知 $z_1,z_2,\cdots,z_s$ 的一组值，要计算对应的 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的值.

显然，利用（11）可计算出 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的值，然后代入（10）可计算出 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的值. 然而，利用矩阵的乘法可采取以下方式进行计算. 令矩阵

$$A=\left(a_{ik}\right)_{m\times n},\qquad B=\left(b_{kj}\right)_{n\times s}$$

则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_s \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_s \end{bmatrix}$$

利用上式，就可由 $z_1, z_2, \cdots, z_s$ 的值直接计算出 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 相应的值.

例 3 某股份公司生产四种产品，各产品在生产过程中的生产成本以及在各个季度的产量分别由表 1 和表 2 给出. 在年度股东大会上，公司准备用一个单一的表向股东们介绍所有产品在各个季度的各项生产成本，各个季度的总成本，以及全年各项的总成本. 此表应如何做法?

表 1

		（产品）			
		A	B	C	D
消耗	原材料	0.5	0.8	0.7	0.65
	劳动力	0.8	1.05	0.9	0.85
	经营管理	0.3	0.6	0.7	0.5

表 2

		（季度）			
		春	夏	秋	冬
产品	A	9000	10500	11000	8500
	B	6500	6000	5500	7000
	C	10500	9500	9500	10000
	D	8500	9500	9000	8500

解 将表 1 和表 2 分别写成如下的矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.65 \\ 0.8 & 1.05 & 0.9 & 0.85 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix} 900 & 10500 & 11000 & 8500 \\ 6500 & 6000 & 5500 & 7000 \\ 10500 & 9500 & 9500 & 10000 \\ 8500 & 9500 & 9000 & 8500 \end{bmatrix}$$

并计算

$$MN=\begin{bmatrix} 22575 & 22875 & 22400 & 22375 \\ 30700 & 31325 & 29575 & 60675 \\ 18200 & 18150 & 17750 & 17950 \end{bmatrix}$$

利用乘积 MN 可做如下的符合题意的表 3:

	春	夏	秋	冬	全年
原材料	22575	22875	22400	22375	90225
劳动力	30700	31325	29575	30375	121975
经营管理	18200	18150	17750	17950	72050
总成本	71475	72350	69725	70700	284240

例 2 某城镇有 100000 人具人法定的工作年龄. 目前有 80000 人找到了工作，其余 20000 人失业，每年，有工作的人中的 10%将失去工作而失业人口中的 60%将找到工作. 假定该镇的工作适龄人口在若干年内保持不变，问三年后该镇工作适龄人口中有多少人失业?

解 令 x_n, y_n 分别表示该镇 n 年后就业和失业人口数，从而得到如下的方程组

$$x_{n+1}=0.9x_n+0.6y_n$$
$$y_{n+1}=0.1x_n+0.4y_n$$

如令

$$X_n=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

则 $X_{n+1}=AX_n$，从而

$$X_3 = AX_2 = A(AX_1) = A^2X_1 = A^2(AX_0) = A^3X_0$$

但是

$$X_0 = \begin{bmatrix} 80000 \\ 20000 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0.861 & 0.834 \\ 0.139 & 0.166 \end{bmatrix}$$

故

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.861 & 0.834 \\ 0.139 & 0.166 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80000 \\ 20000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85560 \\ 14440 \end{bmatrix}$$

即，三年后失业人口为 14440.

习 题 二

1．写出下列方程组的矩阵形式：

1） $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1$；　　2） $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$；

3） $\begin{cases} 5x + y + 4z = 0 \\ \quad 2y + z = 0 \\ x \quad - z = 0 \end{cases}$

2．设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

求：1） $3A - 2B$；

2）若 X 满足 $A^T + X^T = B^T$，求 X.

3．计算下列矩阵的乘积：

1） $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$； 2） $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$；

3） $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\3 & 0 & -1\end{bmatrix}$； 4） $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & -1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

4．设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

求：1） $(A+B)(A-B)$；

2） A^2-B^2.

比较 1）与 2）的结果，可得出什么结论？

5．已知矩阵 A、B、C，求矩阵 X，Y 使其满足矩阵方程：

$$\begin{cases}2X-Y=C\\X+Y=(A+B)^T\end{cases}$$

6．如矩阵 A，B 满足 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换，试证：

1） 如果 B_1，B_2 都与 A 可交换，那么 B_1+B_2, B_1B_2，也与 A 可交换；

2） 如果 B 与 A 可交换，那么 B 的 k ($k>0$) 次幂 B^k 也与 A 可交换.

7. 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$．如矩阵 $A=A^T$， 即 $a_{ij}=a_{ji}$（$i,j=1,2,\cdots,n$），则称 A 为对称矩阵. 证明：如果 A、B 都是 n 阶对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

8. 一 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 如满足 $a_{ij}=-a_{ji}$， $i,j=1,2,\cdots,n$，则称为反对称矩阵. 证明：任意 n 阶方阵可写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

9. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

其中 $a_i \neq a_j$，当 $i \neq j\ (i,j=1,2,\cdots,n)$. 试证：与 A 可交换的矩阵一定是对角矩阵.

10. 检验以下两个矩阵是否互为可逆矩阵？

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. 设 A、B、C 为 n 阶方阵，且 C 非奇异，满足 $C^{-1}AC=B$， 求证 $B^m=C^{-1}A^mC$（m 为正整数）.

12. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A-4I=0$，试证 $A+I$ 可逆，并求 $(A+I)^{-1}$.

13. 设 A 为方阵，证明：如果 $A=AB$，但 B 不是单位矩阵，则 A 必为奇异矩阵.

14. 判别下列矩阵是初等矩阵？

1）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；　　2）$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;　　4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. 求 3 阶方阵 A 满足

$$A\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-5a_{31} & a_{12}-5a_{32} & a_{13}-5a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

16. 设 A、B、C 均为 n 阶可逆矩阵，且 $ABC=I$，证明 $BCA=I$.

17. 设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $A=\frac{1}{2}(B+I)$，证明：$A^2=A$ 的充分必要条件是 $B^2=I$.

18. 求下列矩阵的逆矩阵：

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$;　　2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$　$(a_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$

19. 解下列矩阵方程，求出未知矩阵 X.

1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$　　2) $X\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

20．求矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，其中

21．利用分块的方法，求下列矩阵的乘积：

1）$\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$；

2）$\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0\\0 & a & 0 & 0\\1 & 0 & b & 0\\0 & 1 & 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & c & 0\\0 & 1 & 0 & c\\0 & 0 & d & 0\\0 & 0 & 0 & d\end{bmatrix}$

22．利用分块的乘法证明，如果 A，B 分别为 $n\times m$，$m\times s$ 级矩阵，并且 $AB=O$，则 B 的列向量均是齐次线性方程组 $AX=O$ 的解.

23．设 $X=\begin{bmatrix}0 & A\\B & 0\end{bmatrix}$，其中 A 和 B 均为方阵且都是非奇异矩阵，求 X^{-1}.

24．设 A，B 分别为 $n\times m$，$m\times s$ 级矩阵. 构造分块矩阵

$$S=\begin{bmatrix}I & A\\O & I\end{bmatrix} \quad \text{和} \quad M=\begin{bmatrix}AB & O\\B & O\end{bmatrix}$$

求 S 的逆矩阵，并计算 $S^{-1}MS$.

25．已知 $z_1=0$，$z_2=3$，$z_3=-2$，由下述关系式求 x_1，x_2，x_3，x_4 的值.

$$\begin{cases}x_1=-2y_1 \qquad + y_3-2y_4\\x_2= \qquad\qquad y_2-3y_3+4y_4\\x_3=\ 2y_1+y_2\\x_4=-\ y_1+2y_2 \qquad + 3y_4\end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = 2z_1 + z_2 \\ y_3 = -3z_2 - 4z_3 \\ y_4 = -2z_1 + z_2 - z_3 \end{cases}$$

26. 某地已婚妇女的离婚率为10%，而单身妇女中每年有20%结婚. 目前该地已婚妇女人口为 8 000，单身妇女人口为2000. 如果妇女人口保持不变，求3年后已婚妇女和单身妇女各有多少?

第三章　行列式

方阵有一个重要的数值特征——行列式. 利用行列式可判定一方阵是否可逆; 导出求逆矩阵的又一种方法; 给出求解一类线性方程组的克莱姆（Gramer）法则; 以及定义某些重要的概念.

§ 3.1　矩阵的行列式

我们先定义二阶和三阶矩阵的行列式.

二阶矩阵的行列式

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

是一个二阶方阵. 我们定义二阶方阵 A 的行列式为

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

这里, det 是英文 determinant（行列式）的前三个字母, 并记

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

单独地也称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为一个二阶行列式，其值为$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

三阶矩阵的行列式

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

是一个三阶方阵．令

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$$

称上述A_{11}，A_{12}和A_{13}分别为a_{11}，a_{12}和a_{13}的代数余子式．我们定义三阶方阵A的行列式为

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

同样地，也单独地称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为一个三阶行列式，其值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

递归地，设已定义了$n-1$ （$n-1\geq 3$）阶方阵的行列式（$n-1$阶），要定义n阶方阵的行列式．为此，先引入方阵的代数余子式的概念．

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

是一个n阶方阵．将A中(i,j)位上的a_{ij}所在的第i行和第j列同时去掉，得到一个$n-1$阶矩阵

$$B_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

此方阵的行列式是一个$n-1$阶行列式，称为a_{ij}的**余子式**，记为M_{ij}，即

$$M_{ij}=\det(B_{ij})$$

将M_{ij}带上符号$(-1)^{i+j}$后，称为a_{ij}的**代数余子式**，记为A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=(-1)^{i+j}\det(B_{ij})$$

至此，可递归地给出n（>1）阶方阵的行列式的定义：

定义 3.1.1 设 A 是由(1)式给出的任一 n(>1)阶方阵. 则 A 的行列式 $\det(A)$ 递归地定义如下:

如 $n=2$，则

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

如 $n>2$，则

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

同样地，当 $n>2$ 时记 A 的行列式为（单独地也称为 **n 阶行列式**）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

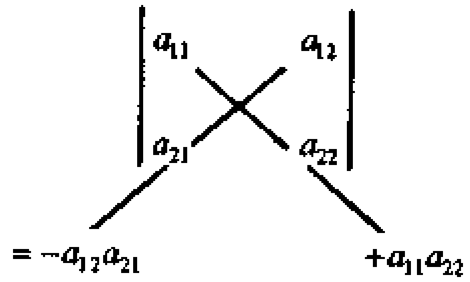
即

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

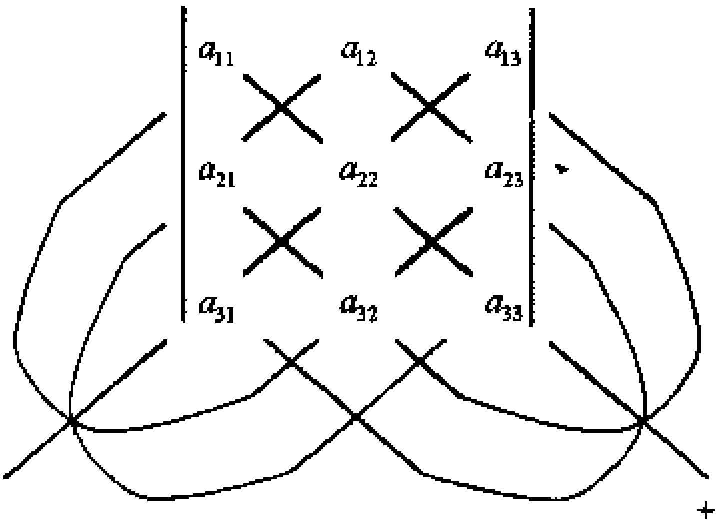
当 $n=1$ 时，特别定义任意一阶矩阵 $A=(a)$ 的行列式为 $\det(A)=a$.

注： $n(>1)$ 阶行列式与 n 阶方阵的区别.

为了帮助记忆，可参看如下的图示进行二阶和三阶行列式的计算.



而



$$\begin{matrix} -a_{11}a_{23}a_{32} \\ = -a_{12}a_{21}a_{33} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} +a_{11}a_{22}a_{33} \\ +a_{12}a_{23}a_{31} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} \end{matrix}$$

注　四阶以上的行列式没有类似的方法.

例 1　计算下列二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}$$

解　$D_1 = (-2)\times 4 - 3\times 7 = -8 - 21 = -29$

$$D_2 = 0\times 20 - (-3)\times 2 = 0 + 6 = 6$$

$$D_3 = 0\times 2 - 0\times(-7) = 0$$

例 2　计算下列三阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -7 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　根据图示法计算得

$$D_1=(-2)\times0\times4+3\times2\times8+(-1)\times(-1)\times(-7)-8\times0\times(-1)$$
$$-(-1)\times2\times(-2)-4\times3\times(-7)=121$$

$$D_2=(-2)\times(-5)\times2+3\times0\times0+(-4)\times1\times0+0\times(-5)\times(-4)-1\times0\times(-2)$$
$$-2\times3\times0=20$$

$$D_3=0\times(-3)\times0+0\times0\times2+(-7)\times0\times0-2\times(-3)\times(-7)$$
$$-0\times0\times0-0\times0\times0=-42$$

也可根据定义进行计算：

D_1中，$a_{11}=-2$，$a_{12}=-7$，$a_{13}=8$．而

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & -1\\2 & 4\end{vmatrix}=0\times4-(-1)\times2=2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\-1 & 4\end{vmatrix}=-[3\times4-(-1)\times(-1)]=-12+1=-11$$

D_1中，$a_{11}=-2$，$a_{12}=-7$，$a_{13}=8$．而

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & -1\\2 & 4\end{vmatrix}=0\times4-(-1)\times2=2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\-1 & 4\end{vmatrix}$$
$$=-[3\times4-(-1)\times(-1)]=-12+1=-11$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\-1 & 2\end{vmatrix}=3\times2-0\times(-1)=6$$

所以

$$D_1=(-2)\times2+(-7)\times(-11)+8\times6=121$$

D_2中，$a_{11}=-2$，$a_{12}=a_{13}=0$．从而$D_2=a_{11}A_{11}$．又因

$$A_{13}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & 1\\0 & 2\end{vmatrix}=-10,$$

所以 $D_2=-2\times(-10)=20$.

D_3 中，$a_{11}=a_{12}=0$，$D_3=a_{13}A_{13}$，而 $a_{13}=2$，

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & -3\\ -7 & 0\end{vmatrix}=-21,$$

故 $D_3=2\times(-21)=-42$.

定义 3.1.1 规定一 n（$n>1$）阶行列式的值为它的第一行元素分别与各自的代数余子式的乘积之和. 实际上，任一 n（$n>1$）阶行列式的值等于它的任一行元素分别与它们各自的代数余子式的乘积之和，也等于它的任一列元素与它们各自的代数余子式的乘积之和.

例如，考察例 2 中的行列式 D_1. D_1 中第二行元素为

$$a_{21}=3,\ a_{22}=0,\ a_{23}=1$$

它们的代数余子式分别为

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-7 & 8\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-(-7\times4-8\times2)=44$$

$$A_{22}=(-1)^{22}\begin{vmatrix}-2 & 8\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-2\times44-8\times(-1)=0$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-2 & -7\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-\left[-2\times2-(-7)\times(-1)\right]=11$$

因而有

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=3\times44+0\times0+(-1)\times11=121=D_1$$

又取 D_1 中第三列元素

$$a_{13}=8,\ a_{23}=-1,\ a_{33}=4$$

而它们对应的代数余子式分别为

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-2 & -7\\ -1 & 2\end{vmatrix}=11$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-2 & -7\\ 3 & 0\end{vmatrix}=21$$

因而也有

$$a_{13}A_{23}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=8\times 6+(-1)+4\times 21=121=D_1$$

一般地，有如下重要定理．证明略去．

定理 3.1.1 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，那么，

$$\det(A)=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (2)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (3)$$

其中，$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, n$.

称定理中（2）式为 $\det(A)$ 按第 i 行展开，而称（3）式为 $\det(A)$ 按第 j 列展开.

在计算高阶行列式时，如果发现某一行（或某一列）有较多的元素为零时，则可由定理将行列式按此行（或此列）展开，从而达到简化计算的目的.

例 3 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3 & 0 & -8\\ 21 & -7 & 0 & 5\\ 3 & 0 & -1 & 7\\ 15 & 2 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

解 D 中第三列仅有一个元素 $a_{33}=-1$ 不为零，故按第三

列展开计算较简单. 由（3）式， $D=a_{33}A_{33}$. 从而

$$D=a_{33}A_{33}=(-1)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&-3&-8\\21&-7&5\\15&2&4\end{vmatrix}$$

$$=-[2\times(-7)\times4+21\times2\times(-8)+15\times5\times(-3)$$
$$-(-8)\times(-7)\times15-5\times2\times2-4\times21\times(-3)]$$
$$=56+336+225+840+20-252$$
$$=1225$$

例4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均不为零. 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&0&a_1\\0&0&\cdots&0&a_2&0\\0&0&\cdots&a_3&0&0\\\cdots&\cdot&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&0&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

证明 对 n 用归纳法. 当$n=1$时， $D_1=\det(a_1)=a_1=(-1)^0a_1$. 假设 $n=k-1(\geq1)$ 时等式成立. 设 $n=k$. 因 D_k 中第一列仅 $a_k\neq0$, 按第一列展开得

$$D_k=a_kA_{k1}$$

但是

$$A_{k1}=(-1)^{k+1}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&0&a_1\\0&0&\cdots&0&a_2&0\\0&0&\cdots&a_3&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{k-1}&0&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{k+1}D_{k-1}$$

而由归纳假设，$D_{k-1}=(-1)^{\frac{(k-2)(k+3)}{2}}a_1a_2\cdots a_{k-1}$，所以

$$
\begin{aligned}
D_k &= (-1)^{k+1}(-1)^{\frac{(k-2)(k+3)}{2}}a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k \\
&= (-1)^{\frac{(k-1)(k+4)}{2}}a_1a_2\cdots a_k
\end{aligned}
$$

由归纳法原理，原式成立.

§3.2 行列式的性质

为了达到简化行列式计算的目的，有必要对行列式的性质进行讨论.

性质 3.2.1 如果 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\det(A^T)=\det(A)$$

证明* 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时，性质显然成立. 假设 $n=k-1(\geq 1)$ 时成立. 设 $n=k$. 将 $\det(A^T)$ 按第一行展开得

$$
\det(A^T)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}^T + a_{21}A_{21}^T + \cdots + a_{n1}A_{n1}^T
$$

由归纳假设，

$$A_{i1}^T = A_{i1}, \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

所以，

$$\det(A^T)=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

正好是 A 的行列式按第一列的展开式，故由定理 3.1.1 有 $\det(A^T)=\det(A)$. 由归纳法原理，性质成立.

性质 3.2.2 设 A 是一个 n 阶方阵.

（i） 如 A 中某一行或某一列元素全为零，则 $\det(A)=0$；

（ii） 当 $n\geq 2$ 时，如 A 中某两行或两列元素成比例则 $\det(A)=0$.

证明* （i）明显地，如 A 中有一行（或列）元素全为零，则将 $\det(A)$ 按此行（或此列）展开，即得 $\det(A)=0$.

（ii）对 n 用归纳法. 设 $n=2$，则由条件

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ha_{11} & ha_{12} \end{bmatrix} \quad 或 \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & la_{11} \\ a_{21} & la_{21} \end{bmatrix}$$

从而

$$\det(A)=h(a_{11}a_{12}-a_{11}a_{12})=0$$

或

$$\det(A)=l(a_{11}a_{21}-a_{11}a_{21})=0$$

假设 $n=k-1(\geq 2)$ 时命题成立. 设 $n=k$. 仅考虑有两行成比例的情形（两列成比例的情形的证明同理可得）. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ha_{i1} & ha_{i2} & ha_{i3} & \cdots & ha_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

因 $k\geq 3$, 可将 $\det(A)$ 按不同于第 i, j 行的行, 不妨设 $1\neq i$, j 并按第一行展开，得

$$\det(A)=a_{11}A_{21}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1k}A_{1k}$$

因此 $A_{1p}(p=1,2,\cdots,k)$ 均是 $k-1$ 阶行列式，并且它们的第 $i-1$ 和

第 $j-1$ 行成比例. 由归纳假设，这些 $A_{1p}=0$ $(p=1, 2, \cdots, k)$ 故 $\det(A)=0$. 由归纳法原理，(ii) 成立.

推论 3.2.3 一 $n(n\geq 2)$ 阶行列式中，如有两行或两列元素完全相同，则此行列式为零.

性质 3.2.4 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$(n\geq 2)$. 那么 A 的任一行（或任一列）元素分别与 B 的另一行（或另一列）相应元素的代数余子式的乘积之和为零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad i\neq j$$

$$a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}=0 \qquad s\neq t$$

证明 仅考虑列的情形. 设 $s\neq t$，构造另一 n 阶方阵

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad s \qquad\qquad t$$

即，将 A 中第 t 列换成它的第 s 列的元素得到 C. 由推论 3.2.3, $\det(C)=0$. 再将 C 按第 t 列展开，并注意到 C 中第 t 列元素的代数余子式与 B 中第 t 列元素的代数余子式完全一致，故

$$0=\det(C)=a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}$$

并完成了证明.

结合定理 3.1.1, 如设设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$(n\geq 2)$，则有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{1n}A_{jn}=\begin{cases}\det(A) & 如\ i=j \\ 0 & 如\ i\neq j\end{cases}$$

$$a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}=\begin{cases}\det(A) & 如\ s=t\\ 0 & 如\ s\neq t\end{cases}$$

其中，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，i，$j=1, 2, \cdots, n$.

性质 3.2.5　下述等式成立.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

（即，行列式某行或某列元素的公因子可提出行列式号外）.

此性质的证明留给读者，并注意数乘矩阵与数乘行列式的区别.

性质 3.2.6　下述两个等式成立.

（1）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & d_{1j}+e_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & d_{2j}+e_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & d_{nj}+e_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & d_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & d_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & d_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & e_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & e_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & e_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（即，如将一行列式某行或某列元素写成两个元素之和，则原行列式能写成两个行列式之和）.

仍将证明留给读者，并请注意与矩阵加法的不同之处.

以下性质是简化高阶行列式计算的一个重要法则.

性质 3.2.7 将行列式的某一行（或某一列）的任意倍加到另一行（或另一列上），行列式的值不变.

证 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

将 A 的第 i 行的 c 倍加到第 j 行，得矩阵

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1}+a_{j1} & ca_{i2}+a_{j2} & \cdots & ca_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

由性质 3.2.6 和性质 3.2.2 （ii）得

$$\det(B)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=0+\det(A)=\det(A)$$

列的情形同理可证.

性质 3.2.8　交换行列式某两行或某两列的相互位置，行列式的值反号.

证*　仅证明列的情形. 设

$$A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & (i) & & (j) & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & (i) & & (j) & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \end{array}$$

则由性质 3.2.7 得（将第 i 列加到第 j 列上）：

$$\det(B)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i}+a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i}+a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni}+a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ (i)\qquad\qquad\qquad (j)\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}$$

再将第 j 列的 -1 倍加到第 i 列上，得

$$\det(B)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1i}+a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & -a_{2i} & \cdots & a_{2i}+a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & a_{ni}+a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ (i)\qquad\qquad\qquad (j)\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}$$

再将第 i 列加到第 j 列，得

$$\det(B)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & -a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\det(A)\,.$$

性质 3.2.9　如 A, B 是两个同阶方阵，则

$$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$$

证明略.

§ 3.3 行列式的计算

高阶（阶数 $n \geqslant 4$）行列式如按定义 3.1.1 将其完全展开共有 $n!$ 项，计算量相当大. 在相当多的情形下，应充分利用行列式的性质，将行列式等值变换为一些易于计算的行列式.

容易证明，三角矩阵的行列式的值为其主对角线上元素之积，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

再注意到性质 3.2.8，性质 3.2.5，性质 3.2.7 正好对应于矩阵的三类初等变换. 从而，对元素全为数字的行列式，利用这三条性质，总可以化为三角形矩阵从而计算其值.

例 1 计算下列行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

解 在下面的计算过程中，我们继续采用矩阵初等变换的记号.

$$D=-\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\2&3&1&-2\\4&2&0&-5\\0&5&-2&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&7&13&-8\\0&10&24&-17\\0&5&-2&4\end{vmatrix}$$

$r_1\leftrightarrow r_4$　　　　$r_1\times 2+r_2$，$r_1\times 4+r_3$

$$=\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&5&-2&4\\0&10&24&-17\\0&7&13&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&5&-2&4\\0&0&28&-25\\0&2&15&-12\end{vmatrix}$$

$r_2\leftrightarrow r_4$　　　　$r_2\times(-2)+r_3$，$r_2\times(-1)+r_4$

$$=\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&1&-32&28\\0&0&28&-25\\0&2&15&-12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&1&-32&-20\\0&0&28&-25\\0&0&79&-68\end{vmatrix}$$

$r_4\times(-2)+r_2$　　　　$r_2\times(-2)+r_4$

$$=\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&1&-32&-20\\0&0&28&-25\\0&0&-5&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&1&-32&-20\\0&0&-2&17\\0&0&-5&7\end{vmatrix}$$

$r_3\times(-3)+r_4$　　　　$r_4\times 6+r_3$

$$=\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&1&-32&-20\\0&0&-2&17\\0&0&-1&-27\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&6&-3\\0&1&-32&-20\\0&0&-1&-27\\0&0&-2&17\end{vmatrix}$$

$r_3\times(-2)+r_4$　　　　$r_3\leftrightarrow r_4$

$$
\underset{r_3\times(-2)+r_4}{=}-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -32 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 71 \end{vmatrix} = -(-1)\times 1\times(-1)\times 71 = -71
$$

例 2 计算下列 n 阶行列式的值.

$$
D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

这里, D_n 是一个 n 阶行列式.

解 经观察, D_n 中每一行均有 $n-1$ 个 a 和一个 x, 即每一行的元素之和相等, 从而将第 2, 3, …, n 列的元素分别加到第一列, 得

$$
D_n = \begin{vmatrix} (n-1)a+x & a & a & \cdots & a \\ (n-1)a+x & x & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n-1)a+x & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

$$
=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

再将第一列的 $-a$ 倍分别加到第 2, 3, …, n 列上, 得

$$D_n=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x](x-a)^{n-1}$$

注 在求解例 1 过程中，为了避免分数运算，采用了逐次降低列中第一个非零数的绝对值的方法. 而在例 2 中求 D_n 的值时，观察其元素的排列规律起了关键的作用

例 3 求下述行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

解 依次将第 $i+1$ 行的 -1 倍加到第 i 行，$i=1,2,\cdots,n-1$ 得

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\\ 1 & x & x & x & \cdots & x & 1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\end{vmatrix}$$

又依次将上述行列式（$n-1$阶）的第 $i+1$ 行的 -1 倍加到第 i 行，$i=1,2,\cdots,n-2$ 得

$$D=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}$$

例 4 证明，如 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 均不为零，则

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1\,a_2\cdots a_n\,(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

证 对 n 用数学归纳法．当 $n=1$ 时，$D_1=1+a_1=a_1\,(1+\dfrac{1}{a_1})$，成立．假设 $n=k-1$，等式成立．设 $n=k$．利用性质 3.2.6，有

$$D_k=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1+0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_k \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a_k \end{vmatrix}$$

将上面第一个行列式的第 k 列的 -1 倍加到其它列上易得此行列式的值为 $a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$，而将第二个行列式按最后一列展开为 $a_k D_{k-1}$. 所以

$$
\begin{aligned}
D_k &= a_1 a_2 \cdots a_{k-1} + a_k D_{k-1} \\
&= a_1 a_2 \dots a_{k-1} + a_k \left[a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{a_i}\right) \right] \\
&= a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \left(\frac{1}{a_k} + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{a_i}\right) \\
&= a_1 a_2 \dots a_k \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}\right)
\end{aligned}
$$

由归纳法原理，等式成立.

总结 由于行列式的阶数是自然数，有关行列式的等式的证明经常用到对阶数 n 的归纳法. 而此时，从 D_n 中确定 D_{n-1} 并找到它们之间的关系式是关键的一步. 例如，上述例子中，D_{n-1} 被确定为 D_n 中左上角的 $n-1$ 阶子行列式（一 n 阶行列式某 $k(<n)$ 行和某 k 列交叉位置上的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式称为原行列式的 ***k* 阶子式**），并且 D_{n-1} 必须与 D_n 同型，归纳假设时才不致出错.

例 5* 计算著名的范德蒙（Vandermonde）行列式

$$
V_n = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

解 从第 n 行起，每行减去上一行的 x_n 倍，得

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝线性代数及其应用
作者＝
页数＝２３６
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝７１７６１９７５