Построяване на най-малкия кръг, съдържащ множество от точки

Нека точките са $P_1,P_2,\ldots,P_n$, като $n > 1$. Окръжността на най-малкия кръг, който ги съдържа, трябва да минава през поне две от тях – иначе кръгът не би бил най-малкият. Затова можем да образуваме всички окръжности през две от дадените точки като диаметър и тези през три точки и измежду тях да изберем най-малката, която съдържа всички точки. Това изисква време $\sim n^4$ и е твърде бавно дори за не много големи n.

Вместо това използваме (без доказателство) следния факт. Ако най-малката за точково множество S окръжност не съдържа точката $P \notin S$, най-малката за $S \cup \{P\}$ окръжност минава през P. Дадeният по-долу алгоритъм се основава именно на това, използвайки го на три места. Той изразходва *усреднено линейно време* благодарение на това, че в самото начало точките се подреждат по случаен начин, така че да се избегне възможна неблагоприятна подредба – например последователно върху или почти върху права.

По-висока от линейна скорост е невъзможна по принцип, защото трябва да разгледаме всяка точка. Затова алгоритъмът е оптимален.

```
Разбъркваме по случаен начин точките $P_1,P_2,\ldots,P_n$.
Построяваме окръжност C по диаметър $P_1P_2$.
За $i = 3,\ldots,n$:
──────────────────
Нека C е най-малката окръжност за точките $P_1,P_2,\ldots,P_{i-1}$.
Ако $P_i$ не принадлежи на кръга C:    // търсим нова окръжност $C \ni P_i$
    Построяваме окръжност D по диаметър $P_1P_i$.
    За $j = 2,\ldots,i-1$:
    ────────────────────
    Нека D е най-малката окръжност за точките $P_1,P_2,\ldots,P_{j-1}$ и $P_i$ $(j < i)$.
    Ако $P_j$ не принадлежи на кръга D:    // търсим нова окръжност $D \ni P_i,P_j$
        Построяваме окръжност E по диаметър $P_iP_j$.
        За $k = 1,\ldots,j-1$:
        ────────────────────
        Нека E е най-малката окръжност за точките $P_1,P_2,\ldots,P_{k-1}$, $P_i$ и $P_j$ $(k < j)$.
        Ако $P_k$ не принадлежи на кръга E:
            Построяваме окръжност E през $P_i$, $P_j$ и $P_k$.
        D ← E.          // D е най-малката за $P_1,P_2,\ldots,P_j$
    C ← D.              // C е най-малката за $P_1,P_2,\ldots,P_i$
```

Б. Банчев
12.2025