ВЕКТОРИ И ПРЕСМЯТАНИЯ В ПЛАНИМЕТРИЯТА. КРАТЪК СПРАВОЧНИК

■ Означения

Вектори означаваме с получер шрифт. Главна буква, например $\mathbf{P}$, означава радиусвектора на точката с това име. Двойка главни букви задават разлика на радиусвектори, например $\mathbf{AB}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$ за кои да е точки A и B. Малка буква отговаря на кой да е вектор.

Двойка знаци $|$ за вектор означават дължината му, например $|\mathbf{u}|$. Вектор с дължина 1 означаваме с $\hat{\ }$ или $\widehat{\ }$, например $\hat{\mathbf{u}}$ има посоката на $\mathbf{u}$ и $|\hat{\mathbf{u}}|=1$. Нулевият вектор е $\mathbf{0}$.

В $\triangle ABC$ означаваме страните $a=BC$, $b=CA$ и $c=AB$ и като вектори $\mathbf{a}=\mathbf{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{CA}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{AB}$. M_a, M_b и M_c са средите на страните, S – удвоеното ориентирано лице, а $\circ ABC$ и $\circ abc$ – описаната и вписана окръжности на триъгълника.

Знакът $^\perp$ отговаря на операцията завъртане на вектор в положителна посока на прав ъгъл, а знаците $\times$ и $\cdot$ – съответно на лицево и скаларно произведения на вектори.

■ Свойства на операциите с равнинни вектори

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= \mathbf{v}+\mathbf{u} \\ (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\ \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}-\mathbf{v} &= \mathbf{u}+(-\mathbf{v}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (-1)\,\mathbf{u} &= -\mathbf{u} \\ k\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k\,\mathbf{u}+k\,\mathbf{v} \\ (k+k')\,\mathbf{u} &= k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{u} \\ k\,(k'\,\mathbf{u}) &= (k\,k')\,\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2 \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \\ (k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= k\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+k'(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\le |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\mathbf{u}^\perp)^\perp &= -\mathbf{u} \\ (k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{v})^\perp &= k\,\mathbf{u}^\perp+k'\,\mathbf{v}^\perp \\ \mathbf{u}^\perp\cdot\mathbf{v} &= -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^\perp) \\ \mathbf{u}^\perp\cdot\mathbf{v}^\perp &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= -(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) \\ (k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{v})\times\mathbf{w} &= k\,(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+k'(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) \\ \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ |\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &\le |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{u}^\perp\times\mathbf{v} &= -(\mathbf{u}\times\mathbf{v}^\perp) \\ \mathbf{u}^\perp\times\mathbf{v}^\perp &= \mathbf{u}\times\mathbf{v} \\ \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \mathbf{u}^\perp\cdot\mathbf{v} \\ (\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 &= \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

■ Някои тъждества за $\triangle ABC$

- $S = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A} =$ $\mathbf{A}\times\mathbf{b}+\mathbf{B}\times\mathbf{c}+\mathbf{C}\times\mathbf{a} = \mathbf{A}\times\mathbf{c}+\mathbf{B}\times\mathbf{a}+\mathbf{C}\times\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\times\mathbf{a}+\mathbf{B}\times\mathbf{b}+\mathbf{C}\times\mathbf{c})$;
- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{c} = 0$;
- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{a} = -(\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{b}) = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) =$ $\mathbf{a}^2-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}^2-\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2+\mathbf{C}^2-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}-\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$;
- $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}^2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = S^2$;
- $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = S^2$;
- $\mathbf{a}^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\mathbf{b}^2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})+\mathbf{c}^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = -2S^2$.

■ Лице на триъгълник, четириъгълник и многоъгълник

С $[P_1P_2\dots P_n]$ означаваме удвоеното ориентирано лице на многоъгълника $P_1P_2\dots P_n$ (възможно и непрост). В сила са следните равенства.

- За кои да е $n\ge 3$ точки P_1, P_2, …, P_n

$$[P_1P_2\dots P_n] = \mathbf{P_1}\times\mathbf{P_2}+\mathbf{P_2}\times\mathbf{P_3}+\dots+\mathbf{P_{n-1}}\times\mathbf{P_n}+\mathbf{P_n}\times\mathbf{P_1}$$

  и за всяка точка X: $[P_1P_2\dots P_n] = [XP_1P_2]+[XP_2P_3]+\dots+[XP_nP_1]$.
- За кои да е три точки A, B и C:

$$[ABC] = \mathbf{AB}\times\mathbf{BC} = [BCA] = [CAB] = -[ACB] = -[BAC] = -[CBA].$$

- За кои да е четири точки A, B, C и D: $[ABCD]=\mathbf{AC}\times\mathbf{BD}$.

■ Разлагане на вектор

Всеки вектор $\mathbf{p}$ се разлага по кои да е два други $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, за които $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq 0$:

$$\mathbf{p} \;=\; \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{u}+\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{p}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

В частност, за $\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\perp}$: $\mathbf{p}=(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{u}}+(\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{u}}^{\perp}$.

Пряко следствие от разлагането е тъждеството $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,\mathbf{w}+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\,\mathbf{u}+(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\,\mathbf{v}=\mathbf{0}$ за всеки три вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

■ Решаване на система от уравнения

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{p} &= s\\ \mathbf{v}\times\mathbf{p} &= t\end{aligned} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathbf{p} \;=\; \frac{-t\,\mathbf{u}+s\,\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}$$

Оттук чрез взаимна замяна на $\times$ и $\cdot$ следват

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{p} &= s\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{p} &= t\end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p} \;=\; \frac{t\,\mathbf{u}+s\,\mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} &= s\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{p} &= t\end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p} \;=\; \frac{(t\,\mathbf{u}-s\,\mathbf{v})^{\perp}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}.$$

■ Уравнения на прави (относно променлива точка P)

Успоредна на вектор $\mathbf{u}$ права през точка A: $\quad \mathbf{u}\times\mathbf{AP} \;=\; 0.$

Отвесна към вектор $\mathbf{u}$ права през точка A: $\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{AP} \;=\; 0.$

Права през A под ъгъл φ към посоката на вектор $\mathbf{u}$: $\quad (\cos\varphi\,\mathbf{u}+\sin\varphi\,\mathbf{u}^{\perp})\times\mathbf{AP} \;=\; 0.$

Вътрешна и външна ъглополовящи през A в $\triangle ABC$: $\quad (b\,\mathbf{c}-c\,\mathbf{b})\times\mathbf{AP} \;=\; 0,\quad (b\,\mathbf{c}-c\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{AP} \;=\; 0.$

НДУ векторът $\mathbf{p}$ да е успореден на *коя да е* от двете ъглополовящи през A в $\triangle ABC$ е

$$(\mathbf{p}\times\mathbf{b})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{c})+(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{p}\times\mathbf{c}) \;=\; 0.$$

■ Ориентирано разстояние и проекция

Ориентираното разстояние на точка P до права $(A,\mathbf{u})$ е $\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{AP}$ – положително, ако P е отляво на посоката на $\mathbf{u}$. Радиусвекторът на проекцията на P върху правата е $\mathbf{A}+(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{AP})\hat{\mathbf{u}}$.

■ Пресечница на прави и на отсечки

Пресечница на правите $(A,\mathbf{u})$ и $(B,\mathbf{v})$ е точката P, за която

$$\mathbf{P} \;=\; \frac{\mathbf{B}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{u}+\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{A}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{v} \;=\; \mathbf{A}+\frac{\mathbf{AB}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{u} \;=\; \mathbf{B}+\frac{\mathbf{AB}\times\mathbf{u}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

Ако измежду точките A_1, A_2, B_1 и B_2 никои три не са сълинейни, НДУ отсечките A_1A_2 и B_1B_2 да се пресичат е

$$[A_1A_2B_1][A_1A_2B_2]<0,\qquad [B_1B_2A_1][B_1B_2A_2]<0.$$

Ако пресечница съществува, тя има радиусвектор $\mathbf{A_1}+\dfrac{[B_1B_2A_1]}{[B_1B_2A_1]-[B_1B_2A_2]}\,\mathbf{A_1A_2}$ (където $[B_1B_2A_1]$ и $[B_1B_2A_2]$ са пресметнати по-горе.)

■ Забележителни точки на $\triangle ABC$

Медицентър: $$\mathbf{G} \;=\; \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}}{3}.$$

Ортоцентър: $$\mathbf{H} \;=\; -\frac{((\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{A}+(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{B}+(\mathbf{C}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{C})^{\perp}}{S}.$$

Център на $\circ ABC$: $$\mathbf{O} \;=\; -\frac{((\mathbf{M_a}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{A}+(\mathbf{M_b}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{B}+(\mathbf{M_c}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{C})^{\perp}}{S}.$$

Център на $\circ abc$: $$\mathbf{I} \;=\; \frac{a\,\mathbf{A}+b\,\mathbf{B}+c\,\mathbf{C}}{a+b+c}.$$

По-къси изрази за $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$ са например $\mathbf{H}=\mathbf{A}+\dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{S}\,\mathbf{a}^{\perp}$ и $\mathbf{O}=\mathbf{M_a}-\dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{2S}\,\mathbf{a}^{\perp}$.

■ Съобщност на три прави

Ако правите са $(P_i,\mathbf{u}_i)$, $i=1,2,3$, НДУ за наличие на обща точка или общо направление, включително съвпадане на две или и трите прави е всяко от

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u_1}\times\mathbf{u_2})(\mathbf{u_3}\times\mathbf{P_3})+\\&(\mathbf{u_2}\times\mathbf{u_3})(\mathbf{u_1}\times\mathbf{P_1})+\\&(\mathbf{u_3}\times\mathbf{u_1})(\mathbf{u_2}\times\mathbf{P_2})\;=\;0\end{aligned}\qquad\text{и}\qquad\begin{vmatrix}\mathbf{u_1}\times\mathbf{u_2} & \mathbf{u_2}\times\mathbf{P_1P_2}\\ \mathbf{u_1}\times\mathbf{u_3} & \mathbf{u_3}\times\mathbf{P_1P_3}\end{vmatrix}\;=\;0,$$

а ако правите са A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, НДУ е също $\begin{vmatrix}[A_1B_1B_2] & [A_2B_1B_2]\\ [A_1C_1C_2] & [A_2C_1C_2]\end{vmatrix}\;=\;0.$

■ Уравнения на окръжност и кръг

Уравнение относно точката P на кръга (O,r) с център O и радиус r е $OP^2\leq r^2$ или все едно $\mathbf{OP}^2\leq r^2$. Равенство има точно когато P е от окръжността.

Нека A и B са различни точки. Уравнение относно точката P на кръга с диаметър AB е $\mathbf{AP}\cdot\mathbf{BP}\leq 0$ и равенство има точно когато P е от окръжността.

Уравнение на $\circ ABC$ (или на правата през тези точки, ако $[ABC]=0$) е например

$$\begin{vmatrix}\mathbf{PA}\times\mathbf{PB} & \mathbf{PA}\cdot\mathbf{PB}\\ \mathbf{CA}\times\mathbf{CB} & \mathbf{CA}\cdot\mathbf{CB}\end{vmatrix}\;=\;0.$$

Уравнение на съответния кръг, когато съществува, е

$$\begin{vmatrix}\mathbf{PA}\times\mathbf{PB} & \mathbf{PA}\cdot\mathbf{PB}\\ \mathbf{CA}\times\mathbf{CB} & \mathbf{CA}\cdot\mathbf{CB}\end{vmatrix}\operatorname{sign}[ABC]\;\geq\;0.$$

■ Допирателни към окръжности

Ако A е точка, външна за окръжността (O,r), лявата L и дясната R допирни точки на допирателните през A към окръжността се дават с

$$\mathbf{L},\mathbf{R}\;=\;\mathbf{O}-\frac{r}{\mathbf{d}^2}\,(r\,\mathbf{d}+s\sqrt{\mathbf{d}^2-r^2}\,\mathbf{d}^{\perp})\;=\;\mathbf{A}+\frac{(\mathbf{d}^2-r^2)\,\mathbf{d}-s\,r\,\sqrt{\mathbf{d}^2-r^2}\,\mathbf{d}^{\perp}}{\mathbf{d}^2},$$

където $\mathbf{d}=\mathbf{AO}$ и при $s=-1$ получаваме $\mathbf{L}$, а при $s=1$ – $\mathbf{R}$.

За окръжности $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ допирните точки T_i (до осем на брой) на общите за k_1 и k_2 допирателни се дават с

$$\mathbf{T_i}\;=\;\mathbf{O_i}-\frac{s_i r_i}{\mathbf{d}^2}\,(r\,\mathbf{d}+\sqrt{\mathbf{d}^2-r^2}\,\mathbf{d}^{\perp}),$$

където
- — $i=1,2$ и T_i е допирна точка върху k_i,
- — s_i за $i=1,2$ е 1 или -1 според това, дали k_i е отляво или отдясно на допирателната,
- — $r=s_2r_2-s_1r_1$,
- — $\mathbf{d}=\mathbf{O_1O_2}$.

■ Пресечници на права с окръжност

Общите за права $(A,\hat{\mathbf{u}})$ и окръжност (O,r) точки P се задават с

$$\mathbf{P}\;=\;\mathbf{A}+s\,\hat{\mathbf{u}},\quad\text{където}\quad s\;=\;\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{AO}\pm\sqrt{r^2-(\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{AO})^2}.$$

При $r<|\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{AO}|$ общи точки няма, а при $r=|\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{AO}|$ има една – допирна.

Ако K е точка върху окръжността (O,r) и точката A е различна от нея, за другата (възможно съвпадаща с K) обща точка L на правата AK с окръжността е вярно

$$\mathbf{L}\;=\;\mathbf{A}+(\widehat{\mathbf{AK}}\cdot\mathbf{AK'})\,\widehat{\mathbf{AK}}\;=\;\mathbf{A}+\frac{OA^2-r^2}{AK^2}\,\mathbf{AK},$$

където K' е другият край на диаметъра през K. Формулата дава възможност по известни O, A и K, използвайки или $\mathbf{AK'}=\mathbf{AO}-\mathbf{OK}$, или $r^2=\mathbf{OK}^2$, да намерим другата обща точка на правата AK и окръжността през K с център O.

■ Еднаквости и подобности. Симетрия относно права

Еднопосочната и разнопосочна подобности, които пренасят точки A и B съответно в A' и B', пренасят коя да е точка P в P' – такава, че е вярно

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A}' + \frac{\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AP}}{AB^2}\,\mathbf{A'B'} \pm \frac{\mathbf{AB}\times\mathbf{AP}}{AB^2}\,\mathbf{A'B'}^{\perp}.$$

За **еднопосочна подобност** е налице също $\mathbf{P}' = \mathbf{A}' + k\,(\cos\varphi\,\mathbf{AP} + \sin\varphi\,\mathbf{AP}^{\perp})$, където $k = A'B'{:}AB$ и $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{AB},\mathbf{A'B'})$. При $k=1$ това е еднаквост – **въртене** при $\varphi\neq 0$ и **успоредно пренасяне** (транслация) при $\varphi=0$ (тогава е вярно $\mathbf{P}'=\mathbf{P}+\mathbf{AA}'$).

При $AB\neq A'B'$ (нееднаквост) еднопосочната подобност има неподвижна точка

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \frac{(\mathbf{AB}-\mathbf{A'B'})\cdot\mathbf{AA'}}{(\mathbf{AB}-\mathbf{A'B'})^2}\,\mathbf{AB} + \frac{(\mathbf{AB}-\mathbf{A'B'})\times\mathbf{AA'}}{(\mathbf{AB}-\mathbf{A'B'})^2}\,\mathbf{AB}^{\perp}$$

и е вярно $\mathbf{P}'=\mathbf{Z}+k\,(\cos\varphi\,\mathbf{ZP}+\sin\varphi\,\mathbf{ZP}^{\perp})$, наред с $ZP'=k\,ZP$ и $\sphericalangle(\mathbf{ZP},\mathbf{ZP}')=\varphi$. Ако $\varphi=0$, това преобразование е **хомотетия** с коефициент $k\neq 1$ и център Z. В общия случай е **хомотетично въртене**: композиция от хомотетия и въртене, също с център Z, на ъгъл φ.

Разнопосочната подобност има ос, чието направление е това на вектора

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \widehat{\mathbf{AB}}+\widehat{\mathbf{A'B'}}, & AB \not\parallel A'B' \\ \mathbf{AB}, & \mathbf{AB}\upuparrows\mathbf{A'B'} \\ \mathbf{AB}^{\perp}, & \mathbf{AB}\uparrow\downarrow\mathbf{A'B'}, \end{cases}$$

а всяка точка P се преобразува в P' посредством $\mathbf{P}'=\mathbf{A}'+k\,((\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{AP})\,\hat{\mathbf{u}}-(\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{AP})\,\hat{\mathbf{u}}^{\perp})$, където $k=A'B'{:}AB$ е коефициентът на подобност, както по-горе.

За $k=1$ (еднаквост) преобразованието е или **отвесна осева симетрия** относно оста $((\mathbf{A}+\mathbf{A}')/2,\mathbf{u})$, или **плъзгаща симетрия**: композиция от същата осева симетрия и пренасяне, успоредно на нейната ос. При $k\neq 1$ подобността има неподвижна точка (център)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \frac{(\mathbf{AB}+\mathbf{A'B'})\cdot\mathbf{AA'}}{AB^2-A'B'^2}\,\mathbf{AB} + \frac{(\mathbf{AB}-\mathbf{A'B'})\times\mathbf{AA'}}{AB^2-A'B'^2}\,\mathbf{AB}^{\perp}$$

и е **хомотетична симетрия**: композиция от отвесна симетрия относно правата $(Z,\mathbf{u})$ и хомотетия с център Z и коефициент k. В сила е $\mathbf{P}'=\mathbf{Z}+k\,((\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{ZP})\,\hat{\mathbf{u}}-(\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{ZP})\,\hat{\mathbf{u}}^{\perp})$.

За образа P' на точка P при **симетрия**, успоредна на $\mathbf{v}$ относно права $(A,\mathbf{u})$ е вярно

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{AP}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{u} + \frac{\mathbf{AP}\times\mathbf{u}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

При $\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\perp}$ симетрията е отвесна (и е еднаквост) и $\mathbf{P}'=\mathbf{A}+(\mathbf{AP}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,\hat{\mathbf{u}}+(\mathbf{AP}\times\hat{\mathbf{u}})\,\hat{\mathbf{u}}^{\perp}$.

Преобразуването на $\triangle ABC$ в $\triangle ACB$ също задава симетрия: успоредно на BC обръщане спрямо медианата на $\triangle ABC$ през A, за което $\mathbf{P}'=\mathbf{A}+\dfrac{[ABP]}{[ABC]}\,\mathbf{AB}+\dfrac{[CAP]}{[ABC]}\,\mathbf{AC}$.