Най-къс път в многоъгълник. Алгоритъм на фунията

Под път между два върха в многоъгълник разбираме непрекъсната линия от точки, принадлежащи на вътрешността и контура на многоъгълника. Най-къс такъв път (НКП) наричаме този, чиято дължина е най-малка. Лесно е да се съобрази, че той е начупена линия, чиито върхове са измежду тези на многоъгълника.

Един начин да се намери НКП е да построим граф с възли върховете на многоъгълника и ребро за всяка двойка възли, отсечката между които е от вътрешни за многоъгълника точки. НКП е най-къс път в този граф. Самото построяване на графа обаче, заради проверките кои отсечки са ребра, има времева сложност $\sim N^3$, където N е броят на върховете на многоъгълника.

До по-бърз алгоритъм стигаме, като най-напред намерим триангулация на многоъгълника – коя да е от възможните. Това може да стане за време ~N.log N (в друга тема ще покажем как именно). Полученото множество от триъгълници може да се разглежда като граф – в него възли са върховете на многоъгълника, а ребра – страните на триъгълниците. Този граф наричаме триангулачен.

Ако двата върха, между които търсим НКП, са X и Y, нека триангулацията е такава, че не съдържа диагонали на многоъгълника с краища X и Y. Двойствен на триангулачния граф е графът с по един възел за всеки триъгълник и ребра точно там, където два триъгълника имат обща страна (диагонал на многоъгълника). Интересуват ни пътищата в двойствение граф (ДГ). Понеже път в граф е редица от върхове, в която всеки два съседни са свързани с ребро, път в ДГ е редица от триъгълници, в която всеки два съседни имат обща страна.

Двойственият граф е дърво, защото е свързан и не съдържа цикли (допускането на обратното води до противоречие). Следователно между кои да е два върха на ДГ има единствен път. Това значи, че всеки два триъгълника от триангулацията са свързани с единствена верига от последователно съседни триъгълници. В частност, съществува единствена такава верига между триъгълниците, в които вър хове са X и Y. Именно тази верига съдържа търсения НКП в многоъгълника.

Веригата може да бъде намерена с обхождане в ширина на ДГ, започвайки от върха-триъгълник с X и завършвайки с този в Y. Времевата сложност на това действие е пропорционална на броя на ребрата на ДГ. На всяко такова ребро отговаря диагонал от триангулацията, а броят на диагоналите е N-3 – значи веригата се построява за време ~N. Оттук нататък намирането на НКП се състои в последователно обхождане на веригата от триъгълници и избиране на някои от техните върхове като върхове на начупената, която е НКП.

За целта построяваме и на всяка стъпка обновяваме структура, която наричаме **фуния**.

Фунията се състои от две начупени линии с общо начало. Начупените наричаме ляв и десен клон, а общото им начало – гърло на фунията. Всеки клон може да съдържа само гърлото или него и още произволен брой върхове. Ориентацията на ъглите при върховете във всеки клон, когато има три или повече върха в него, е една и съща – положителна за левия и отрицателна за десния клон, като ги обхождаме от гърлото към края.

Гърлото на фунията е последният намерен до момента връх от НКП. Фунията е построена така, че нейната вътрешност – областта между двата клона – съдържа част от НКП, която, започвайки от гърлото, излиза от фунията през отвора ѝ – отсечката между краищата на двата клона. Тази отсечка е страната на текущо посещавания триъгълник, която е обща за него и следващия го по веригата.

За намирането на НКП с помощта на фунията е нужно, достигайки до поредния триъгълник, да преправяме фунията, променяйки отвора ѝ съответно на триъгълника. Тъй като старият и новият отвори са страни на този триъгълник, те имат обща точка – така при промяната този край на отвора се запазва, а заменяме само другия. При това, ако неподвижният край е краят на левия клон, добавяме новия край на отвора като краен връх на десния клон на фунията, и обратно – ако неподвижният край е краят на десния клон, добавяме нов връх към левия клон на фунията.

Добавянето на нов връх към клон на фунията може да наруши фòрмата ѝ, както я описахме. Например, ако трябва да добавим към десния клон, но отсечката между добавяния връх и гърлото на фунията пресича десния клон, преди добавянето трябва да отстраним част от клона откъм края му – иначе бихме нарушили ориентацията на ъглите между звената на начупената. В други случаи трябва да отстраним целия десен клон или дори и част от левия откъм гърлото. Подобно е, ако добавяме нов връх към левия клон: може да е нужно да премахнем част от него, или целия него, или дори част от десния клон откъм гърлото. Така фунията има поведението на deq (double-ended queue, симетрична опашка.)

Когато премахването на върхове от фунията включва и гърлото ѝ, то се заменя със следващия връх от съответния клон. Това може да става повече от веднъж, докато стане възможно оставащите върхове да образуват правилна фуния. Всеки път върхът, който става гърло на фунията, се записва като пореден възел на търсения НКП – именно така се построява той.

В началото гърлото на фунията е X, а двата клона съдържат по още един връх – онези, които с X са върхове на един триъгълник.

По-долу даваме подробно и точно действията, необходими за добавяне на нов връх **P** към десния клон на фунията. Използваме следните означения. **E** е гърлото на фунията, а **L** и **R** са краищата на левия и десния клон. С индекси −1, −2 и т.н. също към буквите **L** и **R** бележим върховете от края на клон (без самия край) по посока към гърлото, а с индекси 1, 2 и т.н. – върховете на клон от гърлото навън Под ∞ разбираме коя да е различна от индексите стойност.

Добавянето на връх към левия клон на фунията е аналогично.

0. $i := \infty$.

1. Ако $\mathbf{L} \neq \mathbf{E}$ & $[\mathbf{E}\mathbf{L}_1\mathbf{P}] \geq 0$

(левият клон е непразен и част от него или целият трябва да се премахне):

1.1. $i := \max([\mathbf{L}_i\mathbf{L}_{i+1}\mathbf{P}] \geq 0)$

(при $\mathbf{L}_{i+1} = \mathbf{L}$ премахваме целия клон освен **L**, а **L** става **E**);

1.2. добавяме $\mathbf{L}_1,\ldots,\mathbf{L}_{i+1}$ в образувания път;

1.3. $\mathbf{E}$:= бившето $\mathbf{L}_{i+1}$.

Иначе, ако $\mathbf{R} \neq \mathbf{E}$ & $[\mathbf{R}_{-1}\mathbf{R}\mathbf{P}] \geq 0$

(десният клон е непразен и част от него или целият трябва да се премахне):

1.4. $i := \min([\mathbf{R}_i\mathbf{R}_{i+1}\mathbf{P}] \geq 0)$

(при $i = 0$, т.е. $\mathbf{R}_i = \mathbf{E}$ премахваме целия клон).

2. Ако $i \neq \infty$:

2.1. премахваме от фунията върховете от i надясно до **R**

(от десния клон или от левия и десния, включително гърлото).

3. Добавяме **P** отдясно като ново **R**.

Б. Банчев
12.2025