Варіант № 5

1. $xy^2y' = 2 + \log_2 x$

$$\frac{xy^2dy}{dx} = 2 + \log_2 x \Rightarrow y^2dy = \frac{1}{x}(2 + \log_2 x)dx$$

$$\int y^2dy = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{\log_2 x}{x}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3} = 2\ln x + \frac{t^2}{2}\ln 2 + C$$

$$\int \frac{\log_2 x}{x}dx = \left[\begin{matrix} t = \log_2 x \\ dt = \frac{dx}{x\ln 2} \end{matrix}\right] =$$

$$= \ln_2 \cdot \int t\,dt = \frac{t^2}{2}\ln 2 + C$$

$$\frac{y^3}{3} = 2\ln x + \frac{\log_2^2 x}{2}\cdot\ln 2 + C$$

2. y

y

4y

$\frac{1}{4}$ l

Загал

$\Rightarrow$

$C =$

$y' =$

Пер

4xe

$dy = \frac{1}{x}(2+\log_2 x)dx$

$+C$

2. $y' - 4xy = x$ $\qquad y(0) = 0,75$

$$y' = x(4y+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(4y+1)$$

$$\frac{dy}{4y+1} = x\,dx \Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{d(4y+1)}{4y+1} = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{4}\ln(4y+1) = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{2x^2} - \frac{1}{4}$$

Задача Коші: $0,75 = Ce^0 - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = C$$

$$C = 1 \Rightarrow y = e^{2x^2} - \frac{1}{4}$$

$$y' = 4xe^{2x^2}$$

Перевірка

$$4xe^{2x^2} - 4x\left(e^{2x^2} - \frac{1}{4}\right) = x \Rightarrow x = x \text{ — вірно}$$

Батал...

3. $y'' + 4y = 4x^2 + 3 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$

$y = y_1 + y_2$

$y'' + 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \pm 2i$

$y_1 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$y_2 = A + Bx + Cx^2 \Rightarrow y_2' = B + 2Cx \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2'' = 2C$

$2C + 4(A + Bx + Cx^2) = 4x^2 + 3$

$4A + 2C + 4Bx + 4Cx^2 = 3 + 4x^2$

$$\begin{cases} 4A + 2C = 3 \\ 4B = 0 \\ 4C = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow y_2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

$y = x^2 + \frac{1}{4} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Задачі Коші $0 = 0 + \frac{1}{4} + C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$

$y_1 = 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

$3 = 0 - 2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} = C_1 \\ 3 = 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{4} \\ C_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$y = x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x$

4. $$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}(y' - y) \Rightarrow x' = \frac{1}{2}(y'' - y')$$

$$\frac{1}{2}(y'' - y') = \frac{3}{2}(y' - y) + 4y$$

$$y'' - y' = 3y' - 3y + 8y \Rightarrow y'' - 4y' - 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

За теоремою Вієта

$\lambda_1 = 5$

$\lambda_2 = -1$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$$

$$y' = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t}$$

$$x = \frac{1}{2}(-C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t} - C_2 e^{5t})$$

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} \\ y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$x' = C_1 e^{-t} + 10 C_2 e^{5t}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{-t} + 10C_2 e^{5t} = 3(2C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t}) + 4(C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}) \\ 5C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t} = 2(2C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t}) + C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$$

Перевірка

$$\begin{cases} C_1 e^{-t} + 10C_2 e^{5t} = C_1 e^{-t} + 10C_2 e^{5t} \\ 5C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t} = 5C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t} \end{cases}$$ - вірно

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n^2+3}{n^2+n}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n^2+3}{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2+3/\infty}{1+1/\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2+0}{1+0}\right) =$$

$= \ln 2 \neq 0$ ряд розбіжний

~~б)~~ $\cancel{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n^3+3}{n^2+n}\right)} =$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^6+4n+7}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^6+4n+11}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^6+4n+7} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^6+4n+11}{n^6+4n+7} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^6}{n^6} + \frac{4}{n^5} + \frac{11}{n^6}}{1+\frac{4}{n^5}+\frac{7}{n^6}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

Ряд збіжний за ознакою Д'Аламбера

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi n}{4n+1}\right)^{-2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi n}{4n+1}\right)^{\frac{-2n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi n}{4n+1}\right)^{-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{4+\frac{1}{n}}\right)^{-2} = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{4+1/\infty}\right)^{-2} =$$

$$= \sin^{-2}\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = 2 > 1$$

Ряд розбіжний за граничною формою радикальної ознаки Коші

Бойко В

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n^3+2n^2+5}}$

$$\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n^3+2n^2+5}} \sim \frac{n^{1/3}}{n^{3/3}} \sim \frac{1}{n^{7/6}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p = \frac{1}{6} > 1$

Ряд збіжний за ознакою порівняння

$\frac{1}{n^{7/6}} \Rightarrow$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+2)(2n-1)}$!

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)(2n-1)}{(3n+5)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2/n}{3+5/n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{2+1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+0}{3+0} \times \lim_{n\to\infty} \frac{2-0}{2+0} = 1\cdot 1 = 1$$

$R = 1$ – радіус збіжності $\Rightarrow |x| < 1$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

Межі $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(2n-1)}$

$$\frac{1}{(3n+2)(2n-1)} \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow p = 2 > 1$$

Ряд збіжний за ознак порівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)(2n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(3n+2)(2n-1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n+2)(2n-1)} =$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

Знакозмінний ряд збіжний за ознакою Лейбніца

Отже інтервал збіжності $x \in [-1, 1]$