# 概率、随机变量与随机过程

# 概率的意义

## 引言

## 定义

### 公理化

概率的公理化方法从下列三条假设出发：

任一事件A的概率是赋予此事件的一个非负实数：



必然事件的概率等于1：



如果两个事件A和B是互斥的，则：



### 相对频率的定义

一事件A的概率是极限：



### 古典定义

古典定义：一个事件A的概率可以不经实际实验而先验确定。



式中是可能结果的总数，而是属于事件A的结果数。但是与的意义总是不明确的。

上式中，如果所有结果是**等可能的**，一事件的概率等于属于它的结果数与总结果的比。

## 概率与归纳

## 因果性和随机性

# 概率的公理

## 2.1 集合论

集合是一类事物构成的整体，构成集合的事物称为集合的元素。

集合A的一个子集B是一个集合，它的元素都是A的元素。如果所有集合都某个集合S的子集，我们称S为空间。

如果一个集合由n个元素组成，则其子集的总数等于

在概率论中，赋予S的各个子集（事件）以概率，还定义了各种函数（随机变量），定义域由S的元素组成。

### 2.1.1 集合运算

## 2.2 概率空间

概率论中，经常用到集合论的术语。空间S或称为**必然事件**，它的元素称为**实验结果，**它的子集称为**事件**。空集称为不可能事件，由单个元素组成的事件为**基本事件**。

**公理**： 赋予每个事件A一个数P(A), 并称之为事件A的概率。这个数应该满足以下三个条件：

I 

II 

III 如果，则

**性质**：

I 

II 

III 对于任意的A和B，有：



IV 若有，则有：



**频率解释：**用于实际问题的概率必须同公理相容。利用概念的频率解释为：。

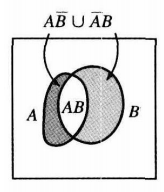
1. 很明显，因为和,所以
2. 因为每次实验S都发生，即，所以
3. 如果，则；这是因为若发生，则A或B发生，但两者又不会同时发生。所以



**事件的相等:** 两个事件A和B，如果它们有相同的元素组成，则称为相等。如果属于A或B但不属于AB的所有结果组成集合（见下图阴影）



的概率为零，则称A和B以概率1 相等。



故：可以得到，当且仅当

时，

事件A和B以概率1相等。

如果，称为A和B是**等概率**的。对AB的概率不能得出任何结论。事实上，A和B可能互斥，也可能相等。

由上式，可以得出，如果事件N以概率1等于不可能事件，则，但不意味着

### 2.2.1 事件的F类

事件是赋予概率的空间S的子集。但是，**并非所有**的所有子集都可以看成事件，可以被看成事件的只是空间S子集的**F**类。

类F不包含S的所有子集的主要原因是：在某些情况下，所涉及的集合由无穷多个结果构成，这时候给所有子集定义的概率难以满足**无穷可加性公理**的一般形式。

事件的类F一般不包括S的子集的任意组合。但是要求有域。

***域***：域F是一个非空集合类，满足：

I 如果,那么有

II 如果和，那么

上诉两个性质给出了F是一个域，则必须至少满足上诉一组条件。

域包含必然事件和不可能事件：

因为F非空，它至少包含一个元素A，因此，它也包含有，所以

凡是能用F中的，有限多个集合的并和交表示的所有集合都属于F，不过，对无限多集合的情况并不一定适用。

***波雷尔(Borel)域*** 假定是F里的无穷序列，如果这些集合的并和交也属于F，则F称为波雷尔域。

集合S的所有子集构成一个波雷尔域。设C是S的一个子集类但不构成域。加上S的其它一些子集，我们可以构造出一个以C为其子集的域。存在一个包含C的全部元素的最小波雷尔域。

事件：事件是S的某些子集，它们构成一个波雷尔域。

***无穷可加性公理*** ：IV,如果事件是互斥的，则有：



### 2.2.2 实验的公理化定义

在概率论中：一个实验由以下概念所规定：

1. 实验的所有结果的集合S；
2. S的所有事件的波雷尔域；
3. 这些事件的概率；

字母S不单单用于表示必然事件，而且表示整个实验。以下分别讨论有限多个/无穷多个元素的实验中概率的确定方法。

**可列空间**：如果空间S有N个结果组成，N是有限数，则所有事件的概率可以用基本事件的概率 来表示。

如果S由N个结果组成，且各基本事件的概率都相等，则



在该情况下，由r个元素组成的事件A的概率等于



上式在形式上等价于古典定义。但两者之间存在本质的区别：古典定义中，上式是作为逻辑的必然演绎出的，在概率的公理化体系中，上式仅仅是一个假设。

**实数直线**： 如果S由无限多不可列元素组成，它的概率不能用基本事件的概率来确定。

假定S是所有实数构成的集合。实数直线上的点集都是S的子集。而对S的所有子集定义概念并使其满足四条公理是不可能的。为了在实数轴上构造一个概率空间，把所有区间和它们的可列并和交作为事件。这些事件构成了一个域F，并且可以规定如下：

它是包含所有半直线 的最小波雷尔域，其中为任意数。为建立实数直线上的概率空间，只要对事件赋予概率就可以。然后，所有其它事件的概率通过概率论公理确定。

假设满足下列关系的函数：

使用积分



来定义的概率。这规定了S中所有事件的概率。

由区间里所有的点组成的事件的概率为：

。

事实上，事件和是互斥的，它们的并等于，所以有



## 2.3条件概率

在假定事件M发生的情况下，事件A发生的概率成为条件概率，记为，有：

，假设P(M)不为零

用频率来解释上式：



如果去掉事件M不发生的所有实验，只保留事件M发生的实验组成子序列，则等于该子实验序列中事件A发生的相对频率。

### 2.3.1 全概率和贝叶斯定理

**全概率定理**：如果是S的分割，B是任意事件，则



**贝叶斯定理**：



### 2.3.2 独立性

两个事件A和B，如果满足

 则称它们是独立的。

**三个事件独立**：事件，如果它们两两相互独立，即：

  且 

则称为它们是相互独立的。

**波雷尔-康特利（Borel-Cantelli）引理**：给定一个事件序列它们具有概率

1. 假定，即上式左边的无穷级数收敛。那么，仅有有限多个事件发生的概率等于1.
2. 假定也是相互独立的事件，并且，即上式左边的级数发散。那么无穷多个事件发生的概率等于1.

# 重复试验

## 联合实验

### 笛卡尔积

给定两个集合和，其元素分别为和。我们构造所有的**有序**对，其中，是的任意一个元素，是的任意一个元素。集合的笛卡尔积是一个集合，它的元素由所有这样的有序对构成，记作：



如果A是的子集，B是的子集，则集合



由所有的对组成，其中，是S的子集.

类似的，构造集合和，我们得到它们的交为集合



假设是轴，是轴，A和B是两个区间



在这种情况下，是一矩形，是一垂直条，是一水平条

可以把两个任意集合的笛卡尔积解释为一个广义矩形。

**两个实验的笛卡尔积**:两个实验和的笛卡尔积是一个新的实验，它的事件是所有形式为的笛卡尔积，以及它们的并和交，其中A是的事件，B是的事件。

**独立实验**：在许多应用中，对任意的事件A和B，联合实验S中的事件和是独立的。所以可得到，为联合实验S中事件的概率。

## 伯努利实验

从n个对象中取出k个对象的组合总数等于



### n次独立实验中事件A的成功或失败

给定实验S和事件A，且有;

，，

重复这一实验n次，并记所得乘积空间为。因此



可以得出事件A恰好发生k次的概率



下图为时的情况

