# 无穷级数

## 常数项级数的概念和性质

#### 一 常数项级数的概念

1. 如果给定一个数列



则由这数列构成的表达式

 （1）

叫做（常数项）无穷级数，简称（常数项）级数，记为，即



其中，第项叫做级数的一般项.

1. 级数（1）的前项的和

 （2）

称为级数（1）的部分和。

1. 如果级数的部分和数列有极限，



则称无穷级数收敛，这时极限叫做这个级数的和。如果没有极限，则称无穷级数发散。

#### 二 收敛级数的基本性质

1. 如果级数收敛于和，则级数也收敛，并且其和为.
2. 两个收敛级数可以逐项相加与逐项相减
3. 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性

## 第三节 幂级数

#### 一 函数项级数

1. 如果给定一个定义在区间 *I* 上的函数列：



则由这个函数列构成的表达式

 （1）

称为定义在区间 *I* 上的（函数项）无穷级数，简称（函数项）级数。

1. 对于每一个确定的值 ，函数项级数（1）成为常数项级数

 （2）

这个级数（2）可能收敛也可能发散。如果级数（2）收敛，则称点 是函数项级数（1）的收敛点；如果级数（2）发散，就称点是函数项级数（1）的发散点。函数项级数（1）的收敛点的全体称为它的收敛域，发散点的全体称为它的发散域。

1. 对应于收敛域内的任意一个数,函数项级数成为一收敛的常数项级数，因而有一确定的和。在收敛域上，函数项级数的和是的函数，通常称为函数项级数的和函数，这函数的定义域就是级数的收敛域，并写成：



把函数项级数（1）的前项的部分和记作，则在收敛域上有



记，则叫做函数项级数的余项，并有



#### 二 幂级数及收敛性

1. 幂级数：各项都是幂函数的函数项级数，形式为：

 （3）

其中常数，叫做幂级数的系数.

1. 阿贝尔(Abel)定理. 如果级数，当时收敛，则适合不等式的一切使这幂级数绝对收敛。反之，如果级数当时发散，则适合不等式的一切使这幂级数发散。
2. 如果幂级数不是仅在一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个确定的正数存在，使得
3. 当时，幂级数绝对收敛；
4. 当时，幂级数发散；
5. 当或时，幂级数可能收敛也可能发散.

其中，正数叫做幂级数（3）的收敛半径. 开区间叫做幂级数（3）的收敛区间.再由幂级数在处的收敛性就可以决定他的收敛域。

1. 如果有,其中是幂级数的相邻两项的系数，则这幂级数的收敛半径



#### 三 幂级数的运算

1. 幂级数的和函数有如下重要性质：
2. 幂级数的和函数在其收敛域上连续
3. 幂级数的和函数在其收敛域上可积，并有逐项积分公式:

 (5)

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

1. 幂级数的和函数在其收敛区间内可导，且有逐项求导公式

 （6）

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

## 函数展开成幂级数

#### 一 展开成幂级数.

1. 找到一个幂级数，它在某区间内收敛，其和恰好就是给定的函数. 如果能找到这样的幂级数，就可以认为函数在该区间内能展开成幂级数，而这个幂级数在该区间内就表达了函数.

假设函数在点的某邻域内能展开成幂级数，即有：

 (1)

那么，根据和函数的性质，可知在内应具有任意阶导数，



由此可见

,于是

 (2)

那么如果函数有幂级数展开式（1），那么该幂级数的系数由公式（2）确定为该幂级数为

 (3)

则展开式为

 (4)

所以，幂级数（3）叫做函数在点处的泰勒级数.展开式（4）叫做函数在点处的泰勒展开式.

1. 泰勒展开式（4）的成立条件。

设函数在点的某一邻域内具有各阶导数，则在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是该邻域内的泰勒公式中的余项当时的极限为零，即:



其中：，叫做函数的次泰勒多项式,而



指的为余项。

1. 当的情形，对于（3），取，可以得到

 （5）

级数（5）称为函数的麦克劳林级数.如果能在内展开成的幂级数，则

 ,其中 （6）

式子（6）被称为的麦克劳林展开式.

1. 把展开成的幂级数，其步骤如下:
2. 求出的各阶导数如果在处某阶导数不存在，则停止继续，它不能展开为的幂级数;
3. 求出函数及其各阶导数在处的值：



1. 写出幂级数



并且求出收敛半径

1. 利用余项的表达式 ,考察当在区间内时余项的极限是否为零.如果为零，则函数在区间内的幂级数展开式为



1. 常见展开
2. 

该函数有，其中.于是，有级数

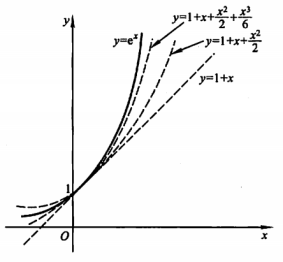
收敛半径

对于任何有限的数（在0与之间），余项的绝对值为



因有限，而是收敛级数的一般项，所以当时，,即当时，有于是可以得到展开式





1. 



1. 



1. 



1. 



1. 



1. 



1. 



## 函数的幂级数展开式的应用

#### 一 近似计算

#### 二 微分方程的幂级数解法

1. 一阶微分方程

 (1)

满足初始条件的特解，如果其中函数是的多项式



那么，可以设所求特解可以展开为的幂级数:



带入原方程并且比较系数，可以得出常数

1. 二阶齐次线性微分方程

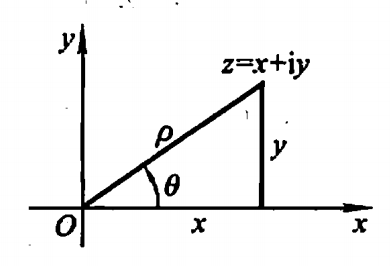


定理：如果上述方程中的系数与可在内展开为的幂级数，那么在内方程（3）必有形如的解

#### 三 欧拉公式

或





## 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

## 傅里叶级数

1. 描述简谐振动的函数，就是一个以为周期的正弦函数。其中表示动点的位置，表示时间，为振幅，为角频率，为初相。
2. 研究非正弦的周期函数，可以将周期为的周期函数用一系列的为周期的正弦函数组成的级函数来表示，记为：



其中都是常数。

1. 将正弦函数按照三角公式变形，得



并且令(即)，则



上式被称为三角级数，令,上式成为

