交换代数 (Commutative Algebra through Exercises) 随笔

叶博宇

2025 年 8 月 4 日

目录

第一章　环$\boldsymbol{K[x_1,\ldots,x_n]}$

1.1　Monomial Ideal

对于域 K，类似一元多项式，我们把指数推广为一个向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^n$，再将单项式 $X^{\boldsymbol{a}}=(x_1,\cdots,x_n)^{\boldsymbol{a}}$ 做线性组合，就得到

$$f=\sum c_{\boldsymbol{a}}X^{\boldsymbol{a}}\in K[x_1,\cdots,x_n]$$

类似单项式我们定义

$$X^{\boldsymbol{a}}X^{\boldsymbol{b}}=X^{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$$

所以事实上我们只需要重点关注其指数部分，于是就定义了 $\mathcal{E}$ 集合

定义 1.1.1 ($\mathcal{E}$-子集) 设 $E\subset\mathbb{N}^n$，如果对于任意的 $\boldsymbol{a}\in E$ 可以得到对于任意的 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^n$ 有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in E$ 则称 E 为 $\mathbb{N}^n$ 的 $\mathcal{E}$-子集.

实际上一个 $\mathcal{E}$-子集对应了一个 monomial ideal I，我们设 I 由元素 $X^{\boldsymbol{a}},a\in E$ 组成，那么对于任意的 $X^{\boldsymbol{b}}\in K[x_1,\cdots,x_n]$ 有

$$X^{\boldsymbol{a}}X^{\boldsymbol{b}}\in I$$

本质上就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in E$.

可以找到 E 的 boundary $F\neq\emptyset$，对于任意的 $\boldsymbol{a}\in E$，存在 $\boldsymbol{b}\in F,\boldsymbol{c}\in\mathbb{N}^n$ 使得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

自然要问这个 boundary 最小能到多小，首先就是 Dickson 引理指出每个 E 都有一个有限的 boundary，对应到 monomial ideal 上就是对应着有限生成.

引理 1.1.1 (Dickson 引理) 任意一个 $\mathcal{E}$-子集都有一个有限 boundary，即任意一个 monomial ideal 都是有限生成的.

再把 boundary F 中每个能被集合中元素表示的元素拿掉，就可以得到 minimal boundary. 即如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 其中 $\boldsymbol{b}\in F,\boldsymbol{c}\in\mathbb{N}^n$，则把 $\boldsymbol{a}$ 拿掉，不断重复该步骤，则得到 F' 就是 minimal boundary. 此外，如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in F'$ 且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 则只能是 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

得到这样的 minimal boundary 后，可以证明它是唯一的.

定理 1.1.1 设 E 是 $\mathbb{N}^n$ 的 $\mathcal{E}$-子集，则 E 的 minimal boundary 是有限的，且是唯一的. 即任意一个 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 的 monomial ideal I 都可以找到一个最小的有限生成子集，我们用 $G(I)$ 来表示.

接下来给出几个 monomial ideal 的运算规律

定理 1.1.2 Let $I.J\subset K[x_1,\cdots,x_n]$be two monomial ideals.

1. **Decomposition** Let$m, u \in A$ be relatively prime monomials. Then,

$$(I, mu) = (I, m) \cap (I, u).$$

2. **Intersection** The ideal $I \cap J$ is generated by the monomials $\operatorname{lcm}(m_i, n_j)$, for $i = 1, \dots, s$ and $j = 1, \dots, t$.

3. **Quotient** Let$m$ be a monomial of A. Then, the ideal $I : (m)$ is generated by the monomials $\frac{m_i}{\gcd(m_i, m)}$, for $i = 1, \dots, s$.

4. **Radical** For any monomial$m$, let $\sqrt{m} = \prod_{x_h \mid m} x_h$ denote its squarefree part. Then, the ideal $\sqrt{I}$ is generated by the monomials $\sqrt{m_i}$, for $i = 1, \dots, s$.

注 1.1.1 最后一个 $\sqrt{m}$ 本质上就是把 m 中所有存在的 variablesx_i 拿出来乘在一起得到一个 monomial.

我们可以用 $G(I)$ 对 monomial ideal I 做一些判断

定理 1.1.3 Let I be a monomial ideal of $K[x_1, \cdots, x_n]$.

1. **Primality Test.** I is prime if and only if for every $m \in G(I)$ there exists $j \in \{1, \dots, n\}$ such that $m = x_j$, *i.e.*, if and only if $G(I)$ is a set of variables.

2. **Radical Test.** I is radical if and only if $m = \sqrt{m}$ for every $m \in G(I)$, *i.e.*, if and only if each element of $G(I)$ is squarefree.

3. **Irreducibility Test.** I is irreducible if and only if for every $m \in G(I)$ there exist $j \in \{1, \dots, n\}$ and $b > 0$ such that $m = x$ only if $G(I)$ is a set of pure powers of variables.

4. **Primary Test.** I is primary if and only if for every $m = X^{\mathbf{a}} \in G(I)$, with $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, it holds: if $a_j \neq 0$, then there exists $b > 0$ such that $x_j^b \in G(I)$, *i.e.*, if and only if every variable appearing in an element of $G(I)$ has some pure power in $G(I)$.

1.2 Monomial Orderings

由于 $X = x_1 x_2 \cdots x_n$ 在做一些运算时需要考虑先对这里面的哪一个 variable 做运算以及为了定义 f 的 degree，于是就需要有一个序关系.

定义 1.2.1 (Monomial Orderings) 设 $>$ 是 $\mathbb{N}^n$ 上的一个序关系，或者等价的说是 $\operatorname{Mon} A$ 上的一个序关系. 它满足以下条件

1. $>$ 是 total order 的即任意两个 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}^n$ 都可以互相比大小.

2. $>$ 是 well order 的即任意一个非空集合 $E \subset \mathbb{N}^n$ 在这个序下都有最小元素. 或者等价的说，任意由 $>$ 构成的 descending chain 是 stationary 的.

3. 有可加性. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ 则有 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

我们称 $>$ 是一个 monomial ordering.

下面给出 3 个常用的 monomial ordering.

定义 1.2.2 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{N}^n$.

1. **lexicographic order.** 如果 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 中的第一个非零分量为正，则记为 $\boldsymbol{a}>_{\text{lex}}\boldsymbol{b}$.
2. **degree lexicographic order.** 记 $|\boldsymbol{a}|$ 为 $\boldsymbol{a}$ 中的每一个分量相加. 如果 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 或者 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}>_{\text{lex}}\boldsymbol{b}$ 则记为 $\boldsymbol{a}>_{\text{deglex}}\boldsymbol{b}$.
3. **degree reverse lexicographic order.** 如果 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 或者 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的最后一个非零分量是负的，则记为 $\boldsymbol{a}>_{\text{degrevlex}}\boldsymbol{b}$.

接下来用这些序关系我们可以定义多项式的 degree，类似的，它们的 leading term, leading coefficient.

定义 1.2.3 设 $f\in K[x_1,\cdots,x_n]$，则

1. $\operatorname{Deg}(f)=\max_>\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^n|c_{\boldsymbol{a}}\neq 0\}$. 称为 f 的 muiltidegree.
2. $\operatorname{lc}(f)=c_{\operatorname{Deg}(f)}$ 称为 f 的 leading coefficient.
3. $\operatorname{lm}(f)=X^{\operatorname{Deg}(f)}$ 称为 f 的 leading monomial.
4. $\operatorname{lt}(f)=\operatorname{lc}(f)\operatorname{lm}(f)$ 称为 f 的 leading term.

和单元多项式一样有

$$\begin{aligned}&\operatorname{Deg}(fg)=\operatorname{Deg}(f)+\operatorname{Deg}(g),\\&\operatorname{Deg}(f+g)\leqslant\max_>\{\operatorname{Deg}(f),\operatorname{Deg}(g)\}.\end{aligned}$$

接下来介绍对于多元多项式环非常重要的 Grobner 基，它可以帮助我们计算一个多项式环及其子环的生成元所构成的集合，以及做一些关于理想的判断.

定义 1.2.4 (Grobner 基) 设 $>$ 是一个 monomial order, 设 I 是一个 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 的一个非空理想. 如果 $G=\{g_1,\cdots,g_t\}$ 满足

$$Lt(G)=(g_1,\cdots,g_t)=Lt(I)$$

则称 G 是 I 的一个 Grobner 基.

1.3 $\boldsymbol{K[x_1,\dots,x_n]}$ 上的除法

我们先固定一个 monomial order>.

定义 1.3.1 设 $f\in K[x_1,\cdots,x_n]$，如果存在 $g\in K[x_1,\cdots,x_n]$ 以及 f 中的一项 $t_{\boldsymbol{b}}=c_{\boldsymbol{b}}X^{\boldsymbol{b}}$ 使得 $\operatorname{lt}(g)|t_{\boldsymbol{b}}$ 且

$$h=f-\frac{t_{\boldsymbol{b}}}{\operatorname{lt}(g)}g$$

则称 f reduces to a polynomial $h\in K[x_1,\cdots,x_n]$ modulo g. 这个运算可直接记为 $f\xrightarrow{g}h$.

定义 1.3.2 设 $f,f_1,\cdots,f_n\in K[x_1,\cdots x_n]$ 再设 $F=\{f_1,\cdots,f_n\}$ 如果有

$$f\xrightarrow{f_{i_1}}h_1\xrightarrow{f_{i_2}}h_2\xrightarrow{f_{i_3}}\cdots\xrightarrow{f_{i_{k-1}}}h_{k-1}\xrightarrow{f_{i_k}}r,\quad f_{i_1},\cdots,f_{i_k}\in F,\quad h_1,\cdots,h_k\in Kx_1,\cdots,x_n.$$

则称 f reduces to a polynomial $r\in K[x_1,\cdots,x_n]$ modulo F.

进一步地，如果上述的 r 不能继续通过 F 中的元素 reduce，则称 r is a remainder of f with respect to F. 记为 $f \xrightarrow{F}_* r$.

接下来给出多项式的除法运算.

定义 1.3.3 (除法运算) **Input** $f, f_1, \ldots, f_s \in A \setminus \{0\}; >$monomial ordering.

Output $u_1, \ldots, u_s, r \in A$ such that:

$$f = \sum_{i=1}^{s} u_i f_i + r;$$

r is reduced with respect to $\{f_1, \ldots, f_s\}$;

if $u_i f_i \neq 0$, then $\mathrm{Deg}(u_i f_i) \leqslant \mathrm{Deg}(f)$.

Initialization $p := f; u_1 := 0; u_2 := 0; \ldots; u_s := 0; r := 0;$

while $p \neq 0$ **repeat**

if there exists j such that $\mathrm{lt}(f_j)\ |\mathrm{lt}(p)$ **then**

$i := \min\{j : \mathrm{lt}(f_j)\ |\mathrm{lt}(p)\}$

$u_i := u_i + \frac{\mathrm{lt}(p)}{\mathrm{lt}(f_i)}$

$p := p - \frac{\mathrm{lt}(p)}{\mathrm{lt}(f_i)} f_i$

else

$$r := r + \mathrm{lt}(p)$$

$$p := p - \mathrm{lt}(p)$$

endif

endwhile

return$\{u_1, \cdots, u_s, r\}$

这样子对于每个 f 和 F，f 可以由 F 中的元素按照带余除法的形式表示，并且 $\mathrm{Deg}(f)$ 要么出现在 $u_i f_i$ 中，要么出现在 r 中. 但是通过这个算法得到 r 可能不唯一，它取决于 f 先 reduce 到哪个多项式，但是如果 F 是一个 Grobner 基，则 r 就是唯一的.

对于一个理想 I，它的 Grobner 基是它的生成元的集合，故 f 属于 I 当且仅当 $f \xrightarrow{G}_* 0$, 即 $f = \sum u_i g_i$.

由 Hiilbert 基定理指出，任意一个 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 的理想都是有限生成的. 那么由于 I 可由 G 生成，所以由 Buchberger 算法，对于任意的理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 我们都可以找到它的 Grobner 基 G.

1.4 Minimal and Reduced Grobner 基

对于一个理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$，我们可以通过 Buchberger 算法找到它的 Grobner 基 G. 我们把 G 中所有元素的系数都变成 1，然后再交上 $\mathrm{Deg}\, I$ 的 staircase，就得到了 minimal Grobner 基. 再此基础上，如果对于 $g_i \in G$，将 $g_i \xrightarrow{G-\{g_i\}}_* g_i'$，再把 g_i 换成 g_i' 则得到了 reduced Grobner 基.

定理 1.4.1 对于一个理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$，它的 Reduced Grobner 基是唯一的.

1.5 Grobner 基的一些应用

定理 1.5.1 (Membership Test) 设 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个理想，$f \in I$ 当且仅当对于某个 monomial order $>$ I 的一个 Grobner 基 G 有

$$\overline{f}^G = 0$$

定理 1.5.2 (Equality Test) 设 $I, J \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 是两个理想，它们关于 monomial ideal $>$ 的 reduced Grobner 基分别是 G, G' 则

$$I = J \iff G = G'.$$

定理 1.5.3 (等价类的表示) 对于理想 $I \subset A = K[x_1, \cdots, x_n]$ 以及 I 的一个 Grobner 基. 定义映射 $\tau : K[x_1, \cdots, x_n] \to K[x_1, \cdots, x_n], \quad f \mapsto \overline{f}^G$，则对于 A/I，

$$[f] = [g] \iff \tau(f) = \tau(g).$$

这里是不是可以猜测，我选出不同的 Grobner 基，就可以让 f 变成不同等价类的代表元. 即不同的 Grobner 基为的 A/I 不同的“表示”?

定理 1.5.4 (A/I 的 K-basis) 设 $I \subset A$ 为一个理想，$G = \{g_1, \cdots, g_s\}$ 为 I 关于序 $>$ 的 Grobner 基.

1. 设集合 $\mathcal{B} = \{X^{\boldsymbol{a}} \in A | \operatorname{lm}(g) \nmid X^{\boldsymbol{a}}, g \in G\}$ 则
$$\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{m} | m \in \mathcal{B}\}$$
为 A/I 的一个基集.

2. 设 $f \in A$ 满足
$$\overline{f}^G = \sum_{X^{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{B}} c_{\boldsymbol{a}} X^{\boldsymbol{a}}$$
则 $\overline{f}$ 可由 $\overline{\mathcal{B}}$ 中的元素线性组合得到，并且每一项的系数恰好就是 $c_{\boldsymbol{a}}$.

1.6 Lexicographic Orderings and Elimination

定理 1.6.1 (Variable Elimination Theorem) 对于 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个理想，有关于 $>$ 的 Grobner 基 G. 设

$$G_k = G \cap K[x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n], \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

则 G_k 就是 $I_k = I \cap K[x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n]$ 的关于 $>$ 的 Grobner 基.

例 1.6.1 设 $I = (x^2 + 2y^2 - 3, x^2 + xy + y^2 - 3) \subset \mathbb{C}[x, y]$，计算 $I \cap \mathbb{C}[y]$.

解 计算 I 的 Grobner 基为 $\{x^2+2y^2-3, x^2+xy+y^2-3, -xy+y^2, -y^3+y\}$. 由于 $x^2+xy+y^2-3 = x^2+2y^2-3-(-xy+y^2)$ 故最后得到 reduced Grobner 基为

$$G = \{x^2 + 2y^2 - 3, -xy + y^2, -y^3 + y\}$$

$G \cap \mathbb{C}[y] = \{-y^3 + y\}$ 于是 $I \cap \mathbb{C}[y] = (-y^3 + y)$. □

第二章　Affine Algebraic Varieties

2.1 Definitions and First Properties

本小节我们以 A 来记 $K[x_1, \cdots, x_n]$.

定义 2.1.1 设 I 是 A 一个理想，则称集合

$$\mathbb{V}(I) = \{\alpha \in K^n | \forall f \in I, f(\alpha) = 0\}$$

为 I 的 affine algebraic variety, 或者简称 affine variety, variety.

从这个定义可以看出来，variety 是用于考察 f 的根的一个工具.

对于一个 affine variety V，我们可以考虑以下集合

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in A | \forall \alpha \in V, f(\alpha) = 0\}$$

可以证明它是一个理想，故称为 ideal associated with V.

定理 2.1.1 (variety 的运算规律) 设 $I, J \subset A$ 是两个理想，V, W 是两个 varieties.

1. $I \subset J \Rightarrow \mathbb{V}(I) \supset \mathbb{V}(J)$.
2. $V \subset W \Rightarrow \mathbb{I}(V) \supset \mathbb{I}(W)$
3. $I \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$.
4. $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{V}(I))) = \mathbb{V}(I)$. 这个更多用的一种形式是 $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = V$, 这里 V 是一个 variety.
5. $\mathbb{V}(I + J) = \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J)$.
6. $\mathbb{V}(IJ) = \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)$.
7. $\mathbb{V}(I \cap J) = \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)$. 这个会用到有限多个理想的交的形式.
8. $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\sqrt{I})$.

定义 2.1.2 (subvaraiety) 如果 V, W 是两个 varieties 且有 $V \subset W$ 则称 V 是 W 的 subvairety.

引理 2.1.1 任意一条关于 affine variety 的 descending chain 都是 staionary 的.

affine variety 也有 irreducible 的定义，不过和理想的 irreducible 是有区别的.

定义 2.1.3 (irreducible) 对于 affine variety V 如果对于任意两个 varieties V_1, V_2 都有

$$V = V_1 \cup V_2 \Rightarrow V = V_1 \text{或} V = V_2$$

则称 V 是 irreducible 的.

注 2.1.1 理想的 irreducible 则是把上面的交改成并.

定理 2.1.2 (irreducible 的判定) 一个 affine variety V 是 irreducible 的当且仅当对应的理想 $\mathbb{I}(V)$ 是素理想.

注 2.1.2 需要注意的是，对于一个素理想 I，它的 aasociated variety $\mathbb{V}(I)$ 并不一定是 irreducible 的，比如 $I = (x+y) \subset K[x,y]$ 是一个素理想，但是 $\mathbb{V}(I) = \{(0,0),(1,1)\} = \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$.

下面的定理指出了 vairety 的可分解性.

定理 2.1.3 (Decomposition into Irreducible Varieties) 设 V 是一个 variety，则它可以分解为有限多个 irreducible varieties 的并，即

$$V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i,$$

其中 V_i 是 irreducible 的.

如果分解后的 V_i 都是 minimal 的，即不存在 $V_i \subset V_j$，则这样的分解是关于置换唯一的，即如果你得到两个分解，它们唯一的不同的并的顺序不同.

注 2.1.3 上述定理在实践中常把一个 V 直接分解成最小的 varieties 的并. 即如果有 $V_i \subset V_j$ 则直接把 V_i 拿掉，只剩下 V_j.

最后考虑单点集，即单个的 $\alpha \in K^n$.

定理 2.1.4 设 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$，则 $\{\alpha\}$ 是一个 variety，而且它的 associated ideal

$$\mathbb{I}(\{\alpha\}) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n)$$

是一个 maximal ideal，记为 $\mathfrak{m}_\alpha$.

2.2 The Resultant

本小节主要介绍 Resultant，并用该小节的定理去证明扩张定理.

定义 2.2.1 (Sylvester 矩阵) 设 A 是一个整环，设 $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i \in A[x] \backslash \{0\}$. 则称矩阵

$$\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix}
a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\
b_\ell & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & b_\ell & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & b_\ell & \cdots & b_1 & b_0
\end{pmatrix}$$

为 Sylvester 矩阵.

定义 2.2.2 (Resultant) Sylvester 矩阵的行列式

$$\det \mathrm{Syl}(f,g)$$

称为 f,g 的 resultant，记为 $\mathrm{Res}(f,g)$ 特别地，如果 f,g 为 A 中的非零常值，则规定 $\mathrm{Res}(f,g)=1$.

注 2.2.1 如果 $m=0,l>0$ 则 $\mathrm{Res}(f,g)=a_0^l$, 如果 $m>0,l=0$ 则 $\mathrm{Res}(f,g)=b_0^m$.

由行列式的计算法则，可以直接得到以下结论.

定理 2.2.1 设 A 为一个整环，$f=\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i, g=\sum\limits_{i=0}^{l} b_i x^i \in A[x]\backslash\{0\}$.

1. $\mathrm{Res}(f,g)\in A$,
2. $\mathrm{Res}(f,g)=(-1)^{ml}\,\mathrm{Res}(g,f)$,
3. 对于任意的 $a,b\in A$
$$\mathrm{Res}(af,g)=a^l\,\mathrm{Res}(f,g),\quad \mathrm{Res}(f,bg)=b^m\,\mathrm{Res}(f,g).$$

下面这个定理则可以表明 resultant 可以展开为关于 f,g 的形式.

定理 2.2.2 设 A,f,g 与上一个定理相同，则存在多项式 $h_1,h_2\in A[x]$，满足 $\deg h_1<\deg f, \deg h_2<\deg g$ 使得

$$\mathrm{Res}(f,g)=h_1f+h_2g.$$

特别地，$\mathrm{Res}(f,g)\in (f,g)\cap A$.

以下定理进一步的将 resultant 表示了出来

定理 2.2.3 Let K be a field, and let

$$f=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad \text{and} \quad g=\sum_{i=0}^{\ell} b_i x^i$$

be polynomials in $K[x]$ such that $a_m, b_\ell \neq 0$.

Let also $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ and $\beta_1,\ldots,\beta_\ell$ be the roots of f and g in $\overline{K}$, respectively. Then:

1. $\mathrm{Res}(f,g)=a_m^\ell \prod_{i=1}^m g(\alpha_i)=(-1)^{m\ell} b_\ell^m \prod_{j=1}^\ell f(\beta_j)$;
2. $\mathrm{Res}(f,g)=a_m^\ell b_\ell^m \prod_{j=1}^\ell \prod_{i=1}^m (\alpha_i-\beta_j)$;
3. $\mathrm{Res}(f,g)=0$ if and only if f and g have a common root in $\overline{K}$;
4. $\mathrm{Res}(f,g)=0$ if and only if f and g have a common factor of positive degree in $K[x]$.

Resultant 的最后一个定理在证明扩张定理时起到了作用.

定理 2.2.4 Lef f and g be polynomials in $K[x_1,\ldots,x_n]$ written as

$$f=\sum_{i=0}^{m} c_i(x_2,\ldots,x_n)x_1^i,\quad g=\sum_{i=0}^{\ell} d_i(x_2,\ldots,x_n)x_1^i$$

of degree m and ℓ in x_1, respectively. Moreover, let $\beta\in K^n-1$. If $f(x_1,\beta)$ has degree m in $x_1, g(x_1,\beta)$ is non-zero and has degree $\ell-r$ in x_1 for some integer $0\leqslant r\leqslant \ell$, then

$$\mathrm{Res}_{x_1}(f,g)(\beta)=c_m(\beta)^r\,\mathrm{Res}_{x_1}(f(x_1,\beta),g(x_1,\beta)).$$

2.3 Extension Theorem

在介绍扩张定理之前，我们先回顾一些代数闭域的基本知识.

引理 2.3.1 设 K 是一个无穷域，$f \in K[x_1, \cdots, x_n]$，则 f 非零当且仅当存在 $\alpha \in K^n$ 使得 $f(\alpha) = 0$.

任意一个代数闭域 $K = \overline{K}$ 都是一个无穷域. 事实上，如果 $K = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 是一个有限域，则 K 上多项式 $\prod_{i=1}^n (x_i - a_i) + 1$ 没有根，矛盾，故 K 只能是无穷的.

定理 2.3.1 (Extension Theorem) 设 $K = \overline{K}$ 是一个代数闭域，再设 $I = (f_1, \cdots, f_n) \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个理想. 再设 $I_1 = I \cap K[x_2, \cdots, x_n]$. 对于每一个 $i = 1, 2, \cdots, n$，有多项式

$$f_i = c_i(x_2, \cdots, x_n)x_1^{N_i} + f_i'$$

满足 $\deg_{x_1} f_i' < N, c_i \in K[x_2, \cdots, x_n] \backslash \{0\}$.

设 $\beta = (a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{V}(I_1)$，如果 $\beta \notin \mathbb{V}(c_1, \cdots, c_n)$ 则存在 $a_2 \in K$ 使得 $(a_1, \beta) \in \mathbb{V}(I)$.

我们称 (a_1, β) 是 β 的一个扩展 (extend).

证明 利用定理2.2.4以及 K 是代数闭域来证明该定理. □

2.4 Hilbert 零点定理

定理 2.4.1 (Hilbert 弱零点定理) 设 $K = \overline{K}$ 是一个代数闭域，$I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个理想，则

$$\mathbb{V}(I) = \emptyset \iff I = (1).$$

定理 2.4.2 (Hilbert 强零点定理) 设 $K = \overline{K}$ 是一个代数闭域，$I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个理想，则

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

类似定理2.1.4，有以下定理

定理 2.4.3 设 $K = \overline{K}$ 是代数闭域，则 $\mathfrak{m} \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 是极大理想当且仅当存在 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ 使得

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\alpha = (x - a_1, \cdots, x - a_n).$$

最后这个定理揭示了 radical 理想和素理想的关系.

定理 2.4.4 设 $K = \overline{K}$ 是一个代数闭域. 则对于任意的理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$，由包含 I 的 minimal prime ideal 构成的集合 $\min A$ 是有限的.

特别地，$\sqrt{I}$ 可以表示为有限个 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 的素理想的交.

2.5 Systems of Polynomial Equations

本小节主要是对零点定理的应用. 考虑一个有限 system of polynomial equations $\Sigma = \{f_i = 0, i = 1, \cdots, s\}$，设 $I = (f_1, \cdots, f_s)$ 并给出 I 关于某个固定的 monomial order 的 Grobner 基. 由 Hilbert 弱零点定理马上可以得到，如果 $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$ 当且仅当 $I \neq (1)$，即 I 中的多项式存在零点当且仅当 $I \subsetneq K[x_1, \cdots, x_n]$. 我们通过计算 Grobner 基来判定 I 是否等于 (1). 于是就得到了以下定理.

定理 2.5.1 (可解性判断) 一个 polynomial system Σ 在代数闭域 $\overline{K}^n$ 上有解当且仅当 $I \neq (1)$, 即 $1 \notin G, G$ 为 I 的 Grobner 基.

定理 2.5.2 设 $K = \overline{K}$ 是代数闭域，设 $I = (G) \subset K[x_1, \cdots, x_n]$，其中 G 是 I 关于一个固定 monomial ordering 的 Grobner 基，以下叙述等价.

1. $\mathbb{V}(I)$ 是有限的.
2. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 存在 $c_i \in \mathbb{N}$ 以及 $g_{l_i} \in G$ 使得 $\mathrm{lm}(g_{l_i}) = x_i^{c_i}$.
3. $K-$ 向量空间 A/I 是有限维的.

我们将用上述定理来探讨零点的个数，即 $\mathbb{V}(I)$ 的势.

定理 2.5.3 设 $K = \overline{K}$ 是代数闭域，再设 $I = \sqrt{I}$ 是 radical ideal 使得 $\mathbb{V}(I)$ 是有限的，即 I 是 0 维理想，则 $|\mathbb{V}(I)| = \dim_K A/I$. 并且 A/I 可以表示为有限数域的直和.

证明 利用中国剩余定理. □

如果 I 不一定是一个 radical ideal，我们还有以下定理.

定理 2.5.4 设 $K = \overline{K}$ 是代数闭域，并且 $\mathbb{V}(I)$ 是有限的，则

$$|V(I)| = |\mathbb{V}(\sqrt{I})| = \dim_K A/\sqrt{I} \leqslant \dim_K A/I < \infty.$$

例 2.5.1 参数 $a \in \mathbb{C}$，判断以下方程组

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 = a^5. \end{cases}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 上是否有解. 并计算解

解 我们用 Hilbert 弱零点定理来解决该问题. 考虑理想

$$I = (x + y - a, x^2 + y^2 - a^2, x^3 + y^3 - a^5)$$

计算它的 reduced Grobner 基为

$$G = (x + y - a, y^2 - ya, a^5 - a^3)$$

显然 $G \neq (1)$ 所有由 Hilbert 弱零点猜想，方程组是有解的. 由**定理**2.5.2，G 中的每一个多项式的首项都是单变元的，所以它的 affine variety $\mathbb{V}(I)$ 是有限多的. 由 $x + y - a = y^2 - ya = a^5 - a^3 = 0$ 可知.

1. $a = 0$, 方程的解为 $x = y = 0$.
2. $a = -1$, 方程的解为 $(-1, 0), (0, -1)$
3. $a = 1$, 方程的解为 $(1, 0), (0, 1)$. □

定理 2.5.5 设 $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 使得 $\gcd(\mathrm{lt}(f), \mathrm{lt}(g)) = 1$. 则对于任意包含 f, g 的 G 有 $\overline{S(f,g)}^G = 0$ 特别地，如果 $G = g_1, \cdots, g_t \subset A \backslash \{0\}$ 并且对于任意的 $i \neq j, \gcd(\mathrm{lt}(gi), \mathrm{lt}(gj)) = 1$ 则 G 就是 (G) 的 Grobner 基.

于是上述例子中的 Grobner 基的算法可以是先把 I 化为最小的，然后观察到 $I = (x + y - a, y^2 - ya, a^5 - a^3)$ 中的每一个多项式的 leading term 都是互素的，于是这个这三个多项式就是 G 中的元素.

2.6 Zariski 拓扑

没咋看懂，先不写.

第三章　模

本章将会学习环 A 的模以及模同态. 重点掌握模与 Abel 群、线性空间之间的区别. 我们会用 $A=\mathbb{Z}, A=K$ 其中 K 是一个域，来作为例子. 此外，我们会考察 exact sequence 以及交换图. 用构造的方法证明 PID 上有限生成模的 Structure Theorem.

3.1　模与子模

定义 3.1.1 (模) 设 A 为一个环，M 是一个 Abel 群. 称 M 为 A **模**，如果存在映射

$$A\times M\to M,\quad (a,m)\mapsto a\cdot m$$

满足

1. $a,b\in A, m\in M,\quad (a+b)\cdot m=a\cdot m+\cdot m.$
2. $a\cdot(m+n)=a\cdot m+b\cdot m.$
3. $(ab)\cdot m=a(b\cdot m).$
4. $1_A\cdot m=m.$

注 3.1.1 交换群 M 是谁的模本质上是看哪个环作为系数作用在 M 的元素上.

例 3.1.1 A 环本身就是一个 A 模，其 $A\times A\to A$ 就是 $(a,b)\mapsto a\cdot b$，即乘法就是环本身的乘法. 如果 $A=K$ 是一个域，则 A 模是一个 K 上的向量空间，因为模本身是一个加法交换群，再加上模的几个运算法则，刚好就是一个向量空间.

定义 3.1.2 (子模) 设 M 是一个 A 模，如果 $N\subset M$ 满足 $(N,+)<(M,+)$ 以及 $\forall a\in A, n\in N, an\in N$ 则称 N 是 M 的一个**子模**.

对于 M 的子模 N，商群 M/N 是一个 A 模，它关于运算 $a\overline{m}=\overline{am}, a\in A, m\in M$ 是良定义的.

类似理想的乘积，设 I 为 A 的理想，定义模的乘积为

$$IM=\left\{\sum_{i=1}^{s}a_im_i : a_i\in I, m_i\in M, s\in\mathbb{N}\right\}.$$

对于 A 模 M，以及 A 的理想 I，商 M/IM 是一个 A/I 模，它关于运算 $\overline{a}\,\overline{m}=\overline{am}, a\in A, m\in IM$ 是良定义的.

定义 3.1.3 (Restriction of Scalars) 设 $f: A \to B$ 是一个环同态，B 模 M 关于 outer product

$$A \times M \to M, \quad (a, m) \mapsto a \cdot m = f(a)m$$

称为 M obtained by restiction of scalar via f. 它将 A 模的结构赋予了 M.

注 3.1.2 我认为 restrction 一词的来源是：f 至多是个满射，所以 f 像是把 A 收缩到了 B 上.

定义 3.1.4 (子模的运算) 设 $\{M_h\}h \in H$ 是一族 A 模的子模.

1. 集合
$$\bigcap_{h \in H} M_h = \{m \in M : \forall h \in H, m \in M_h\}$$
称为子模的**交**，它仍然是一个 A 模.

2. 集合
$$\sum_{h \in H} M_h = \left\{\sum_{h \in H} a_h m_h : a_h \in A, m_h \in M_H\right\}$$
称为子模的**和**，它仍然是一个 A 模. 它是最小的包含 $\bigcup_{h \in H} M_h$ 的 A 子模. 一般来说子模的并不在是一个模.

3. 对于 A 模 M 的两个子模 N, P，如果 $N \cap P = 0$，则称
$$N \oplus P = \{n + p : n \in N, p \in P\}$$
为 N 与 P 的**直和**.

注 3.1.3 注意最后一条子模的直和与模的直和做区分. 模的直和不要求它们相交为空集.

定义 3.1.5 设 M 是一个 A 模，N, P 是它的两个子模，我们定义

$$N : P = \{a \in A : aP \subset N\}.$$

特别地，如果 $N = 0$ 则称 $0 : P$ 为 P 的 annihilator，记为 $\operatorname{Ann} P$.

注 3.1.4 可以验证 $N : P$ 以及 $\operatorname{Ann} P$ 都是 A 的理想.

如果 $I \subset A$ 是一个理想，而且 $I \subset \operatorname{Ann} M$，则我们可以赋予 M 额外的 A/I 模结构.

定理 3.1.1 设 M 是一个 A 模，$A \subset I$ 是一个理想并且 $I \subset \operatorname{Ann} M$，则 M 是关于运算 $\overline{a}m = am, a \in A/I$ 的 A/I 模.

上述定理常用于 I 是极大理想，此时 A/I 是一个域，于是 M 就变成了 A/I 上的线性空间.

3.2 模同态

定义 3.2.1 (模同态) 设 M, N 是两个 A 模，如果 $f : M \to N$ 满足对于任意的 $m, n \in M, \quad a, b, \in A$ 有

$$f(am + bn) = af(m) + bf(n)$$

则称 f 是 M 到 N 的**模同态**.

注 3.2.1 模同态本质上是群同态.

定理 3.2.1 设 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 是所有 M 到 N 上的同态所构成的集合. 设 $m\in M, a\in A$，定义 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 上的运算为

$$(f+g)(m)=f(m)+g(m)\quad (af)(m)=a(f(m)).$$

则 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 是一个 A 模. 特别地，$\mathrm{Hom}_A(A,N)\cong N$.

证明 只说一下最后那个同构映射是

$$f:N\to \mathrm{Hom}_A(A,N),\quad f(a)\mapsto \varphi_a, \text{使得} \varphi_a(n)=an.$$

模同态的 kernel,cokernel 与群同态一致.

例 3.2.1 M 是一个 A 模同态，$a\in A$，考虑同态 $\varphi: M\to M, m\mapsto am$，则

$$\begin{aligned}&\ker\varphi=\{m\in M: am=0\},\\ &\operatorname{coker}\varphi=M/aM.\end{aligned}$$

目前我验证出来对于一个 A 模同态 $f:N\to M$，$\ker f,\operatorname{im} f$ 分别是 N,M 的子模.

定理 3.2.2 (模同态基本定理) 设 M,N,P 是三个 A 模.

1. 对于同态 $\varphi:M\to N$ 有同构
$$M/\ker f\cong \operatorname{im}(f).$$
2. 设 N,P 为 M 的子模并且 $P\subset N$，则 N/P 是 M/P 的子模，并且有同构
$$(M/P)/(N/P)\cong (M/N).$$
3. 设 N,P 为 M 的子模，则
$$(N+P)/P\cong N/(N\cap P).$$

3.3 自由模

自由模 (free module) 的定义是从线性空间推广而来，但是它不具备线性空间的所有性质.

定义 3.3.1 (Generators) 设 M 是一个 A 模，设 $S\subset M$，则定义集合

$$\langle S\rangle=\langle S\rangle_A=\left\{\sum_{i=1}^k a_is_i : a_i\in A, s_i\in S, k\in\mathbb{N}\right\}$$

是由 S 中的元素以 A 中元素作为系数任意线性组合得到的. 它是 M 的一个子模，称为**由 S 生成的子模**. 特别地，如果 $M=\langle S\rangle_A$，则称 S 为 M 的**生成集 (generating set)**. 即对于任意的 $m\in M$ 存在线性组合使得 $m=\sum_{i=1}^k a_is_i, a_i\in A, s_i\in S$.

定义 3.3.2 (free set) 同前一个定义，有 $<S>=M$ 如果对于 S 中的所有元素 $s_i\in S$，线性组合 $\sum_{i=1}^k a_is_i=0,,a_i\in A, s_i\in S$ 当且仅当 $a_i=0, i=1,2,\cdots,k$ 则称 S 是一个 free set，其 S 中的元素称为 A 模 M 的**基**. 并称带有基的 A 模 M 为**自由模 (free module)**.

但是线性空间的性质并不总是在自由模中出现.

例 3.3.1 We say that a generating set of an A-module M is minimal if none of its proper subsets is still a generating set of M.Moreover, we say that a free generating set is maximal if any set properlycontaining it is no longer free.

Prove: 1. finite minimal generating sets of a module may not have the same number of elements;

2. a minimal generating set of a module may not be a basis;

3. a maximal free subset of a module may not be a basis;

4. a submodule of a finitely generated module may not be finitely generated;

5. not all modules have a basis;

6. a submodule of a free module may not be free.

下面这个引理保证了自由模的秩 (rank) 是良定义的.

引理 3.3.1 设 M 是一个 A 模，由 S 生成，则 M 是关于 S 的自由模 (S 是 M 的基集) 当且仅当 M 中的任意一个元素都可以被唯一的写成 S 中元素的线性组合.

定义 3.3.3 设 M 是一个关于自由 A 模，则 M 的所有基集都是等势的，我们称这个势为 M 的**秩 (rank)**，记为 $\operatorname{rank} M$.

证明 设 $\mathcal{B} = \{m_h\}_{h\in H}$ 是 M 的基，则对于任意的极大理想 $\mathfrak{m} \subset A$，$M/\mathfrak{m}M$ 是 A/I 上的线性空间，然后利用**引理3.3.1**中的唯一性来证明 $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{m_h}\}_{h\in H}$ 是 free set. 由于 $M/\mathfrak{m}M$ 是 A/I 上的线性空间，所以由线性空间上基的性质得到模上的基的数量都是一样多的. □

注 3.3.1 这个证明我感觉不太好，因为 $\overline{m_h}$ 是有可能等于 $\overline{0}$，可能无法和 m_h 建立起一一对应关系.

3.4 模的直和与直积

定义 3.4.1 (直和) 设 $\{M_h\}_{h\in H}$ 是一族 A 模，定义**直和**为

$$\bigoplus_{h\in H} M_h = \{(m_h)_{h\in H} : m_h \in M_h, \text{只有有限个分量 } m_h \text{ 不为 } 0\}$$

它仍然可以是一个 A 模.

定义 3.4.2 (直积) 设 $\{M_h\}_{h\in H}$ 是一族 A 模，定义**直积**为

$$\prod_{h\in H} M_h = \{(m_h)_{h\in H} : h \in H\}.$$

它仍然可以是一个 A 模.

二者在 $|H|$ 是有限的情况下定义是完全一致的. 在无穷的情况下有 $\bigoplus_{h\in H} M_h$ 是 $\prod_{h\in H} M_h$ 的子模.

例 3.4.1 自由模

$$A^S = \bigoplus_{s\in S} A$$

是 A 的直和，它有一个标准基 $\{e_s : s \in S\}$.

接下来介绍直和与直积的泛性质 (universal property). 所谓泛性质就是指通过一些条件能够得到一个唯一存在的同态或者同构的性质.

定理 3.4.1 (Universal Property of Direct Sum and Direct Product) 设 $\{M_h\}_{h\in H}$ 是一族 A 模，再设 N 也是一个 A 模.

1. 对于任意的 $h \in H$，存在嵌入 $i_h : M_h \hookrightarrow \bigoplus_{h\in H} M_h$，并且对于任意的 $h \in H$ 存在同态 $\varphi_h : M_h \to N$. 则存在唯一的同态 $\varphi : \bigoplus_{h\in H} M_h \to N$. 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
M_h \arrow[r, "\varphi_h"] \arrow[d, hook, "i_h"'] & N \\
\bigoplus\limits_{h\in H} M_h \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

2. 对于任意的 $h \in H$，存在同态 $\pi_h : \prod_{h\in H} M_h \to M_h, (m_h)_{h\in H} \mapsto m_h$,(即把有序数组中属于 M_h 的那个分量映到 M_h 中)，以及对于任意的 $h \in H$，存在同态 $\psi_h : N \to M_h$. 则存在唯一的同态 $\psi : N \to \prod_{h\in H} M_h$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{h\in H} M_h \arrow[d, "\pi_h"] \\
N \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\psi_h"'] & M_h
\end{tikzcd}$$

证明 只给出 φ, ψ 的定义. 定义 φ 为

$$\varphi : \bigoplus_{h\in H} M_h \to N, \quad m_h \mapsto \sum_{h\in H} \varphi_h(m_h).$$

定义 ψ 为

$$\psi : N \to \prod_{h\in H} M_h, \quad n \mapsto (\psi_h(n))_{h\in H}.$$

证明两个映射都为同态后，可得到图标的交换性，再利用交换性去证明唯一性. $\square$

例 3.4.2 设 A 是一个环，x 是一个 vairable. 对于任意的 $i \in \mathbb{N}$，考虑循环模 $M_i = \langle x^i \rangle = Ax^i$. 显然 $A[x]$ 是 A 模. 定义映射

$$\varphi_i : M_i \to A[x], \quad a_i x^i \mapsto a_i x^i \in A[x].$$

由于

$$\varphi(ta_i x^i + qb_i x^i) = ta_i x^i + qb_i x^i = t\varphi(a_i x_i) + q\varphi(b_i x_i), \quad t, q, a_i, b_i \in A$$

所以 φ 是一个同态. 同时定义嵌入 $l_i : M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i, m_i \mapsto (0, \cdots, 0, m_i, 0, \cdots, 0)$. 由泛性质可得存在唯一的同态 φ，设这个同态具体作用在元素上为

$$\varphi : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i \to A[x], \quad (a_i x^i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i x^i.$$

可以验证它是同态且为双射，于是

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i \cong A[x].$$

类似的有

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \cong A[[x]].$$

注 3.4.1 我感觉这个例子并没有体现出泛性质的用处. 我感觉直接构造映射然后证明是同构可能更快.

下面给出两个可以用于自由模判断的定理.

定理 3.4.2 一个 A 模 $\langle S\rangle$ 是自由模当且仅当对于任意的 A 模 N，以及任意的映射 $f: S\to N$，存在唯一的 A 模同态 $\tilde f: M\to N$ 满足 $\tilde f|_S = f$.

证明 这个证明用到引理3.3.1，但其实用不到泛性质. □

定理 3.4.3 A 模 M 是自由的当且仅当存在 A 模族 $\{M_h\}_{h\in H}$ 使得 $\bigoplus_{h\in H} M_h\cong M$，其中 $\forall h\in H, M_h\cong A$.

证明 用定理3.4.2. □

定理 3.4.4 任意一个 A 模都是某个自由 A 模的商. 特别地，如果 M 由 n 个元素生成，则 M 同构于 A^n 的某个商.

证明 直接设 $\{m_h\}_{h\in H}$ 为 M 的生成集. 考虑自由模 A^H 以及同态 $f(e_h)=m_h$, 其中 $\{e_h\}_{h\in H}$ 为 A^H 的标准基.f 显然是一个满射，因此 $M\cong A^H/\ker f$. □

3.5 中山引理

本小节主要探讨有限生成模的性质. 为了证明中山引理，首先给出 Cayley-Hamilton 定理.

定理 3.5.1 (Cayley-Hamilton 定理) 设由 n 个生成元有限生成 A 模 M. 设 $I\subset A$ 是理想，以及 $\varphi\in \mathrm{End}_A M$ 使得 $\varphi(M)\subset IM$. 则存在 $a_0,\cdots,a_{n-1}\in I$ 使得

$$\varphi^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\varphi^i = 0_{\mathrm{End}_A M}.$$

注 3.5.1 这里的 φ^n 指的是 φ 复合 n 次.

证明 直接设 $M=\langle m_1,\cdots,m_n\rangle$，由于 $\varphi(m_i)\in IM$，所以对于每个 $i,\varphi(m_i)=\sum_m^{j=1} c_{ij}m_j, c_{ij}\in I$. 我们重写这个线性组合得到

$$\varphi(m_i)-\sum_m^{j=1}c_{ij}m_j=\sum_{j=1}^n(\delta_{ij}\varphi-c_{ij})m_j=0,$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号.

我们把每个 $i=1,2,\cdots,n$ 都写下来就得到了 n 个方程构成的方程组

$$T_\varphi\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi-c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n}\\ -c_{21} & \varphi-c_{22} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ -c_{n1} & \cdots & & \varphi-c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

最后取

$$\det T_\varphi=\varphi^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\varphi^i\in A[\varphi],\ \text{with } a_i\in I \text{ for all } i,$$

再左乘一个 T_φ 的伴随矩阵 $T_\varphi *$ 得到

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=T_\varphi^*\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=T_\varphi^*T_\varphi\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\det T_\varphi & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \det T_\varphi & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \det T_\varphi & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_n\end{pmatrix},$$

这说明 $\det T_\varphi(m_i)=0, i=1,2,\cdots,n$，即可得到结论. □

引理 3.5.1 (中山引理) 设 M 是一个有限生成 A 模.

1. 设 $I\subset A$ 是理想，且满足 $M=IM$. 则存在 $a\in A$ 使得 $a\equiv 1 \mod I$ 以及 $aM=0$.
2. 设 $\mathcal{J}(A)$ 是一个 A 的 Jacobson radical，再设 $I\subset\mathcal{J}(A)$ 是理想，且满足 $IM=M$，则 $M=0$.
3. 考虑 $N\subset M$ 是子模，设 $I\subset\mathcal{J}(A)$ 是理想，且满足 $M=IM+N$. 则 $M=N$.

证明 1. 使用 Cayley-Hamilton 定理，将**定理3.5.1**中的 φ 换成 id_M，则存在 $a_i\in I$ 使得

$$\mathrm{id}_M+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\mathrm{id}_M=0.$$

将它作用在 $1\cdot m,1\in A,m\in M$ 上得到 $(1+\sum_{i=0}^{n-1})m=0$，移项后可得 $a:=1+\sum_{i=0}^{n-1}a_i$. 这里所定义的 $a\in A$ 满足 $aM=0$ 以及 $a\equiv 1 \mod I$.

2. 由第一部分，我们直接可得存在 $a\in A$ 使得 $aM=0$ 以及 $a\equiv 1 \mod I$. 由于 $1-a\in I\subset\mathcal{J}(A)$ 于是 $a\in A*$. 这里的原因见 Jacobson radical 中元素的等价条件. 于是 $aM=0$ 得到 $M=0$.

3. 这个没太看明白，它从第二部分得到 $M/N=I(M/N)$ 然后用等式

$$I(M/N)=(IM+N)/N=M/N$$

结束证明. □

需要注意的是，“模为有限生成的”这一条件必不可少. 看一个反例.

例 3.5.1 考虑 $\mathbb{Q}$ 作为一个 $\mathbb{Z}$ 模. 显然 $\mathbb{Q}$ 不是有限生成的. 并且对于一个素数 p 有 $p\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ 但是不存在 $n\in\mathbb{Z}$ 满足 $\overline{n}=\overline{1}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 且使得 $n\mathbb{Q}=0$.

设 local ring $(A,\mathfrak{m},K)$，这里 $K=A/\mathfrak{m}$. 我们将用中山引理得到 A 模 M 的最小生成集的势与 K 上向量空间 $M/\mathfrak{m}M$ 维数的一些关系.

定理 3.5.2 考虑 local ring $(A,\mathfrak{m},K)$ 以及有限生成 A 模. 设 $\overline{m_1},\cdots,\overline{m_k}$ 是 K 上向量空间 $M/\mathfrak{m}M$ 的一组基，以及 $\pi:M\to M/\mathfrak{m}M$ 是一个典范映射.

如果 $n_1,\cdots,n_k\in M$ 使得 $\pi(n_i)=\overline{m_i}$，则 $M=\langle n_1,\cdots,n_k\rangle$.

证明 设 $N=\langle n_1,\cdots,n_k\rangle\subset M$，考虑同态

$$N\overset{i}{\hookrightarrow}M\overset{\pi}{\to}M/\mathfrak{m}M,$$

可以得到 $M=N+\mathfrak{m}M$ 以及 $\mathfrak{m}=\mathcal{J}(A)$ 然后用中山引理第三条得到 $M=N$. □

定理 3.5.3 考虑 local ring $(A,\mathfrak{m},K)$ 以及有限生成 A 模. 则所有 M 的最小生成集都是等势的，记这个势为 $\mu(M)$ 它满足 $\mu(M)=\dim_K M/\mathfrak{m}M$.

证明 设一个 M 的最小生成集 F 并设它的势为 k，然后它肯定大于等于 $\dim_K M/\mathfrak{m}M$. 假设它是大于的，则由上一个定理得到存在比 F 更小的生成集，得到矛盾，故只能取等号. □

我们知道对于一个线性空间，线性映射的单射等价于满射，但是这点在模上不成立，比如模自同态 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(1)=2$，它是单射但不是满射. 不过对于有限生成模，满同态可以推出单同态.

定理 3.5.4 设 M 是一个有限生成 A 模，$f\in\operatorname{End}_A M$ 是一个满自同态，则它是一个单同态.

证明 直接设 x 是一个 vairable. 于是定义 $A[x]$ 模结构在 M 上，它满足乘法

$$p(x)m=\sum_i a_i f^i(m)$$

然后证明 $\ker f=0$ 即可. □

由该定理可以得到以下关于自由模的定理.

定理 3.5.5 设 M 是一个自由 A 模，且 $\operatorname{rank} M=r$. 对于任意一个 M 的生成集，如果里面恰好有 r 个元素，则它就是 M 的一个基集.

证明 设 S 是 M 的基集，再设 S' 为 M 的生成集，它恰好有 $|S|$ 个元素，于是可以用**定理3.5.4**证明存在 $f:S\to S'$ 的同构. □

结合**定义3.3.3**，我们知道对于一个自由模 M，它存在基，且每组基的个数相同；反之，如果存在元素个数和 $\operatorname{rank} M$ 相同的生成集，则它就是一个基集. 这点和线性空间上的基是一样的.

3.6 范畴与函子

这本教材对这个的介绍感觉不是很好，先不写. 后面直接会使用一点点范畴的语言.

3.7 正合列

定义 3.7.1 设 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一族 A 模，同态列

$$\cdots\longrightarrow M_{i-1}\xrightarrow{f_i}M_i\xrightarrow{f_{i+1}}M_{i+1}\longrightarrow\cdots$$

满足 $\operatorname{im} f_i=\ker f_{i+1}$ 则称该同态列为**正合列 (exact sequence)**.

我们常用**短正合列 (short exact sequence)**

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}P\longrightarrow 0$$

由定义可以直接得到 f 是单的，g 是满的.

短正合列可以帮助我们从 M 的性质得到 N,P 的性质或者从 N,P 的性质得到 M 的性质，比如**定理6.1.1**.

例 3.7.1

3.7.1　函子 $\mathrm{Hom}_A(*, N)$ 与 $\mathrm{Hom}_A(M, *)$

本小节会得到同态模构成的列于模本身构成的列的关系. 考虑 A 模 M, M_1, N, N_1 以及同态 $f: M_1 \to M, g: N \to N_1$. 定义以下同态

$$f^*: \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, N), \quad f^*(\varphi) = \varphi \circ f,$$
$$g_*: \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N_1), \quad g_*(\varphi) = g \circ \varphi.$$

由定义可知上述同态满足以下交换图:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g_*(\varphi)"] & \\ N \arrow[r, "g"'] & N_1. \end{tikzcd}$$

上述映射满足以下性质:

1.1. 如果 $f = \mathrm{id}_M$，则对于任意的 N 有 $f^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(M,N)}$.

1.2. 如果 $g = \mathrm{id}_M$，则对于任意的 M 有 $g_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(M,N)}$.

2.1. 对于任意的 A 模 M_2 以及任意的同态 $f': M_2 \to M_1$，有

$$(f \circ f')^* = f'^* \circ f^*.$$

2.2. 对于任意的 A 模 N_2 以及任意的同态 $g': N_1 \to N_2$，有

$$(g' \circ g)_* = g'_* \circ g_*.$$

我们定义 A 模范畴上的函子 $\mathrm{Hom}_A(*, N)$，它将 A 模 M 映到 A 模 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$，并将 A 模上的态射 $f: M_1 \to M$ 映到 $\mathrm{Hom}_A(f, N) := f^*$. 由于

$$\mathrm{Hom}(f \circ f', N) = \mathrm{Hom}_A(f', N) \circ \mathrm{Hom}_A(f, N)$$

故该函子是良定义的.

定理 3.7.1 (Left Exactness of $\mathrm{Hom}_A(*, N)$)　1. 设列 $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ 是正合的当且仅当列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

是正合的.

2. 设列 $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N_2$ 是正合的当且仅当列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$$

是正合的.

证明 先证明两条结论的必要性.

1. 先证明 g^* 是单射，直接令 $\varphi \circ g = 0$ 然后得到 φ 只能等于 0. 再证明 $\mathrm{im}\, g^* = \ker f^*$. 容易证明 $\mathrm{im}\, g^* \subset \ker f^*$. 对于反方向的包含，设 $\psi \in \ker f^*$，对于任意 $m_2 \in M_2$ 由 g 为满射定义 $\varphi(m_2) = \psi(m)$，证明它属于 $\mathrm{im}\, g^*$.

2. 先证明 f_* 是单射，和第一条的方式一样. 再证明 $\mathrm{im}\, g_* = \ker f_*$. 容易证明 $\mathrm{im}\, f_* \subset \ker g_*$. 对于反方向的包含，这次定义 $\varphi(m) = f^{-1}(\psi(m))$ 即可.

两条结论的充分性直接用定义. □

3.7.2 Split Sequence

两个 A 模 M,N 的直和可以得到一个正合列

$$0 \to M \xrightarrow{i_M} M \oplus N \xrightarrow{\pi_N} \to 0,$$

其中 $i_M(m) = (m,0), \pi_(m,n) = n$.

定理 3.7.2 设 $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ 是一个关于 A 模的正和列，则以下三个命题互相等价.

1. 存在同构 $\varphi : N \to M \oplus P$ 使得以下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] & M \oplus P \arrow[r, "\pi_P"] & P \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

2. 存在同态 $r : N \to M$ 使得 $r \circ f = \mathrm{id}_M$.

3. 存在同态 $s : P \to N$ 使得 $g \circ s = \mathrm{id}_P$.

定义 3.7.2 对于一个正合列 $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$. 上述定理中的任意一个条件成立，则称该列是 split sequence，并称 r 是 f 的 retraction，s 是 g 的 section.

例 3.7.2 短正合列

$$0 \to M \xrightarrow{i_M} M \oplus P \xrightarrow{\pi_P} P \to 0$$

由于 $\pi_M \circ i_M = \mathrm{id}_M$，所以 π_M 是 i_M 的 retraction; 同理，$\pi_P \circ i_P = \mathrm{id}_P$ 故 i_P 是 π_P 的 section.

接下来给出**定理3.7.2**的证明.

证明 考虑图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & N \arrow[r, "g"'] \arrow[l, dotted, bend right, "r"'] \arrow[d, dotted, bend right, "\varphi"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] \arrow[l, dotted, bend right, "s"'] \arrow[dl, "i_P"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"'] & M \oplus P \arrow[r, "\pi_P"'] \arrow[ul, "\pi_M"] \arrow[u, dotted, bend right, "\varphi^{-1}"'] & P \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

$1 \Rightarrow 2$. 定义 $r(n) = (\pi_M \circ \varphi)(n)$，然后验证它满足 2. 中要求.

$1 \Rightarrow 3$. 定义 $s(p) = (\varphi^{-1} \circ i_P)(p)$，然后验证它满足 3. 中要求.

$2 \Rightarrow 1$. 任意 $n \in N$ 可以表示为 $n = f(r(n)) + (n - f(r(n)))$. 然后证明 $N = \operatorname{im} f + \ker r$，并且这里是直和. 由于 f 是单射，g 是满射，得到

$$N = \operatorname{im} f \oplus \ker f \cong \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} g \cong M \oplus P.$$

定义 φ 满足

$$\varphi(n) = (r(n), g(n)).$$

φ 的同构以及图的交换性可以直接验证.

$3 \Rightarrow 1$. 和前一个类似，需要证明

$$N = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} s \cong M \oplus P.$$

然后定义

$$\varphi(n) = (f^{-1}(n - s(g(n))), g(n)).$$

最后证明它是良定义的且是同构. □

推论 3.7.1 如果列 $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ 是 split 的，则它的反列

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{r} N \xleftarrow{s} P \leftarrow 0$$

也是 split 的.

证明 只需把上**定理3.7.2**的证明中的字母做一个替换就可以得到该推论. □

3.7.3 Snake 引理

引理 3.7.1 (Snake 引理) 给定一个交换图，其中两行都是正合列.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' &
\end{tikzcd}$$

则存在正合列

$$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{coker}\gamma.$$

进一步地，如果 f 是单的，则 $\tilde f$ 也是单的；如果 g' 是满的，则 $\overline{g'}$ 也是满的.

注 3.7.1 书上称 δ 为 connecting homomorphism.

证明 考虑诱导图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, dotted] & \ker\alpha \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, hook] & \ker\beta \arrow[r, "\tilde g"] \arrow[d, hook] & \ker\gamma \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r, dotted] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[d, "\gamma"'] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & P' \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r, "\overline{f'}"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r, "\overline{g'}"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

其中，中间两行是交换的，由假设直接得到；每一列关于嵌入和典范映射都是正合的.

现在我们定义 $\tilde{f},\tilde{g},\overline{f'},\overline{g'}$ 四个同态. 定义

$$\tilde{f}=f|_{\ker f},\quad \tilde{g}=g|_{\ker g}.$$

验证它是良定义的. 设 $m\in\ker\alpha$. 由图的交换性可以得到

$$\beta(f(m))=f'(\alpha(m))=0,$$

故 $f(m)\in\ker\beta$，故是良定义的. 类似的可以验证 $\tilde{g}$ 也是良定义的.

定义同态

$$\overline{f'}(\overline{m})=\overline{f'(m)},\quad \overline{g'}(\overline{n})=\overline{g'(n)}.$$

同样验证它是良定义的，假设 $\overline{m}=\overline{m'}\in\operatorname{coker}\alpha$，则 $m-m'\in\operatorname{im}\alpha$，故存在 $u\in M,\alpha(u)=m-m'$. 于是

$$f'(m-m')=f'(\alpha(u)=\beta(f(u)))\in\operatorname{im}\beta$$

即 $\overline{f'(m)}=\overline{f'(m')}\in\operatorname{im}\beta$. 故 $\overline{f'}$ 是良定义的. 类似的可以验证 $\overline{g'}$ 也是良定义的.

我们用 diagram chasing 的方法来定义 connecting homomorphism δ. 即对于一个 $p\in\ker\gamma$，由于 g 是满射，故存在 $n\in N$ 使得 $g(n)=p$. 由交换性可得

$$0=\gamma(p)=\gamma(g(n))=g'(\beta(n)),$$

故 $\beta(n)\in\ker g'$，又因为 $\operatorname{im}f'=\ker g'$ 以及 f' 是单射故存在唯一的 $m\in M'$ 使得 $f'(m)=\beta(n)$，我们定义 $\delta(p)=\overline{m}$. 然后验证它是良定义的，即假设还存在 $n'\in N$ 使得 $g(n')=p$，这样按照上述 chasing 方式可以得到一个 $m'\in M$ 使得 $f'(m')=\beta(n')$ 我们需要证明 $\overline{m}=\overline{m'}\in\operatorname{coker}\alpha$. 即 $m-m'\in\operatorname{im}\alpha$.

我们有 $n-n'\in\ker g=\operatorname{im}f$ 因此存在 $u\in M$ 使得 $f(u)=n-n'$. 故有

$$f'(m'-m)=\beta(n-n')=\beta(f(u))=f'(\alpha(u)).$$

由于 f' 是单射，故 $m-m'=\alpha(u)$，故 δ 不会因为 p 的原像的选取改变而改变，是良定义的.

按照上述定义得到的 $\tilde{f},\tilde{g},\overline{f'},\overline{g'}$ 可以直接按照正合列的定义验证

$$\ker\alpha\xrightarrow{\tilde{f}}\ker\beta\xrightarrow{\tilde{g}}\ker\gamma\xrightarrow{\delta}\operatorname{coker}\alpha\xrightarrow{\overline{f'}}\operatorname{coker}\beta\xrightarrow{\overline{g'}}\operatorname{coker}\gamma$$

是正合的.

如果 f 是单射，则诱导图中的第三行加上 0 会变成一个正合列，由于 $\tilde{f}$ 是 f 在 M 上的一个限制，所以显然也是单的. 如果 g' 是满的，则第四行加上 0 也会形成一个正合列，于是对于任意的 $\overline{p}\in\operatorname{coker}\gamma$，存在 $n'\in N'$ 使得 $g'(n')=p$，故 $\overline{p}=\overline{g'}(\overline{n'})$ 即 $\overline{g'}$ 是满射. □

推论 3.7.2 对于 A 模交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其每一行都是正合的，则 α,β,γ 中的任意两个是同构，则第三个也一定是同态.

证明 假设 α,β 是同构，则 $\ker\alpha=\ker\beta=\operatorname{coker}\alpha=\operatorname{coker}\beta=0$，由 Snake 定理，可以得到正合列

$$0\to0\to\ker\gamma\to0\to0\to\operatorname{coker}\gamma$$

故 $\ker\gamma=\operatorname{coker}\gamma=0$ 即 γ 是同构. □

3.8 Projective Modules

在**定理**3.7.1中我们知道，对于任意的短正合列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0,$$

下列两条列也是正合的 (left-exact).

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N),$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M, N_2).$$

但是一般来说，它不是 right-exact 的，即以下的列不是正合的.

$$\mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \longrightarrow 0,$$
$$\mathrm{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M, N_2) \longrightarrow 0.$$

换句话说，为了使这个列正合，我们需要 f^*, g_* 为满射.

于是我们定义 projective module，如下.

定义 3.8.1 我们称 A 模 P 为 projective module，如果对于任意的 A 模 M, N，满足

$$M \xrightarrow{g} N \to 0$$

是正合的，并且存在同态 $f : P \to N$，则有同态 $\tilde{f}$ 满足 $f = \tilde{f} \circ g$. 即使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

引理 3.8.1 所有的 free module 都是 projective 的.

证明 设 $\mathcal{B}$ 是 free module P 的一个基，考虑图

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中 g 为满射. 于是对于任意的 $b \in \mathcal{B} \subset P$，存在 $m_b \in M$ 满足 $g(m_b) = f(b)$，然后定义 $\hat{f}$ 满足 $\hat{f}(b) = m_b$. 由**定理**3.4.2，可以诱导出一个 $\tilde{f}$ 满足 $\tilde{f}|_{\mathcal{B}} = \hat{f}$. 这个 $\tilde{f}$ 就是所求的满足图的交换性的同态. □

定理 3.8.1 设 P 是一个 A 模. 则下列命题等价.

1. P 是一个 projective module.
2. 对于任意的 A 模短正合列
$$0 \to N_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N_2 \to 0,$$
列
$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(P, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P, N_2), \to 0$$
是正合的.

3. 任意正合列
$$0 \to M \to N \to P \to 0$$
是 split 的.

4. 对于任意的 A 模 M 满足存在满射 $\pi : M \to P$，则对于某个模 $N, N \oplus P = M$.

5. 存在模 N 使得 $N \oplus P$ 是 free module.

证明 $1 \Leftrightarrow 2$. 直接由定义验证.

$1 \Rightarrow 3$. 设正合列 $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \to 0$. 当 P 是一个 projective module 时，存在同态 s 使得以下图交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, dotted, "s"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由**定理3.7.2**可知，该列是 split 的.

$3 \Rightarrow 4$. 设满射 $\pi M \to P$ 然后有正合列
$$0 \hookrightarrow \ker \pi \xrightarrow{\pi} P \to 0$$
由 split 假设以及**定理3.7.2**可得
$$M \cong \ker \pi \oplus P.$$

$4 \Rightarrow 5$. 据说是因为任意 A 模是自由模的商，不过我没想明白.

$4 \Rightarrow 1$. 设 $f : P \to N, g : M \to N$ 是两个同态，其中 g 是满的. 然后我们需要证明 projective module 定义中的那个 $\tilde{f}$ 存在. 由假设，设 A 模 Q, F，其中 F 是 free 的，并且有 $F = Q \oplus P$. 设 $i_P : P \hookrightarrow F$ 是一个嵌入. 然后为了使用直和的泛性质3.4.1，我们再设零同态 $f' : Q \to N$，于是存在唯一的同态 $\varphi : Q \oplus P \to N$ 使得以下图交换

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_P"'] & N \\
Q \oplus P, \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i_Q"'] & N \\
Q \oplus P, \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

由于 F 是 free 的，由**引理3.8.1**可得 F 是 projective 的，于是存在 $\tilde{\varphi} : F \to M$ 使得 $\varphi = g \circ \tilde{\varphi}$. 于是我们得到了以下交换图.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & P \arrow[l, "i_P"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

然后我们定义 $\tilde{f} = \tilde{\varphi} \circ i_P$. 即可说明 P 是 projective 的. $\square$

定义 3.8.2 (Injective Modules) A 模 E 是 injective 的如果对于一个正合列 $0 \to M \xrightarrow{f} N$ 以及同态 $g : M \to E$，存在 $\tilde{g}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dotted, "\tilde{g}"] \\
 & E. &
\end{tikzcd}$$

3.9 PID 上的模

由**例3.3.1**可知，free module 和有限生成模的子模不一定是 free 的以及有限生成的. 不过在本节我们会看到，PID 上的模的子模是具备这两个性质的.

定理 3.9.1 设 A 是一个 PID，再设 M 是 A 模以及 $N \subset M$ 是 M 的子模.

1. 如果 M 是 free 的，则 N 也是 free 的，并且 $\operatorname{rank} N \leqslant \operatorname{rank} M$.

2. 如果 M 是有限生成的，则 N 也是有限生成的.

证明 这里的证明只能假设 M 是有限生成的，对秩使用归纳法. 至于有无穷多个生成元的 free module，一般的证明暂时未给出. □

定理 3.9.2 设 A 是 PID，再设 M 是 A 模，则 M 是 projective 的当且仅当 M 是 free 的.

证明 设出 A^n 的标准基，再设 M 的由 r 个生成元 $\langle m_1, \cdots, m_r\rangle$ 生成，构造映射 $f: A^r \to M, f(e_i^{(r)}) = m_i$，则有正合列

$$0 \to \ker f \to A^r \xrightarrow{f} M \to 0.$$

再定义 $\varphi: A^s \to A^r, \varphi(e_i^{(s)}) = w_i$, 这里 w_i 是 $\ker f$ 的基. 最后证明

$$M \cong A^r / \ker f \cong \operatorname{coker} \varphi$$

于是 projective 模是 free 的. 反过来直接由**引理3.8.1**得到. □

3.10 Smith Normal Form

本小节的 Smith Normal Form 主要是用于证明下一节用的.

定义 3.10.1 (对角矩阵) 矩阵 $D \subset M_{rs}(A)$ 是对角矩阵，如果只有当 $i = j$ 时 $d_{ij} =\neq 0$.

注 3.10.1 这里定义的对角矩阵可以不是方阵.

定义 3.10.2 给出一个 A 上矩阵 X，定义理想

$$\Delta_i(X) = (\det X_i : X_i \text{是 } X \text{ 的子式}) \subset A.$$

定理 3.10.1 X 和 Y equivalent 当且仅当 $\forall i, \Delta_i(X) = \Delta_i(Y)$.

定理 3.10.2 对于 PID A，任意的矩阵都 equivalent 一个对角阵.

定义 3.10.3 (Smith Normal Form) 设 A 是一个 PID. 矩阵 $D = (d_{ij}) \in M_{rs}(A)$ 是 Smith (formal)form 如果

1. D 是对角的.

2. $d_{11} | d_{22} | \cdots | d_{tt}, t = \min r, s$.

定理 3.10.3 PID 上的任意一个矩阵 M 都和某个 Smith foraml form equivalent. 进一步地，如果矩阵 M 和 Smith form D equivalent，则

1. $\Delta_1(X) = (d_{11})$.

2. $\Delta_i(X) = (d_{ii})\Delta_{i-1}(X), i > 1$.

3.11 Structure Theorem for Finitely Generated Modules

我们直接给出两个结构定理，先不给出证明.

定理 3.11.1 (Structure Theorem 1) 设 $M = \langle m_1, \cdots, m_r \rangle$ 是一个有限生成 A 模，则存在理想链 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_r$ 使得

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} A/I_i.$$

下面这个定理说明了该结构是“唯一的”.

定理 3.11.2 设 A 是一个环，再设两个理想链

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_r, \quad J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_{r'}, \quad r \leqslant r'.$$

假设

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{r} A/I_i \cong \bigoplus_{i=1}^{r'} A/J_i$$

则

1. $J_1 = J_2 = \cdots J_{r'-r} = A$.
2. $J_{r'-r+i} = I_i, i = 1, 2, \cdots, r$.

定义 3.11.1 (Torsion Submodule) 设 A 是整环，再设 M 是 A 模，则 torsion submodule 是集合

$$T(M) = \{m \in M : \exists a \in A \backslash \{0\}, am = 0\}.$$

并称 $T(M)$ 中的元素为 torsion elements. 如果 $M = T(M)$ 则称 M 是 torsion 的，如果 $T(M) = 0$ 则称 M 是 torsion-free 的.

下面两个定理揭示了 PID 上有限生成模的结构.

定理 3.11.3 设 A 是 PID，并设 M 是有限生成 A 模，则

1. $T(M)$ 是有限生成的.
2. $M \cong T(M) \oplus A^k, k \geqslant 0$. 即 M 总是 torsion submodule 和 free module 的直和.
3. $\operatorname{Ann} T(M) \neq 0$.

定理 3.11.4 设 A 是 PID.

1. 设 $p \in A$ 是素元，再设 $M = M_{[p]} \coloneqq \{m \in M : \exists k \in \mathbb{N}, p^k m = 0\}$. 则 M 可以被表示为
$$M \cong A/(p^{k_1}) \oplus A/(p^{k_2}) \oplus \cdots \oplus A/(p^{k_s}), \quad k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_s.$$
2. 设 M 是有限生成 A 模. 则 M 可以被表示为 A 商掉 primary ideals $(q_i \subset A)$ 与 free module 的直和.
$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{h} A/(q_i) \oplus A^k, \quad (q_i) \subset A, \quad i, h, k \geqslant 0.$$

第四章　张量积

本章会先定义两个模上的一种积，即张量积. 再会给出张量积的一些基本性质，并将张量积看作模上的函子. 最后，我们以张量积的应用:extension of scalars 结束本章.

4.1　张量积的泛性质

定义 4.1.1 设 A 是一个环，M,N,P 为 A 模. 映射 $b: M\times N\to P$ 被称为 A-bilinear 映射，如果对于任意的 $m\in M, n\in N, b(m,n)$ 关于 m,n 都是线性的. 我记 $\mathrm{Bil}(M,N;P)$ 为所有 $M\times N$ 到 P 上 A-bilinear 映射所构成的集合. 我们定义集合上的运算有：

$$
\begin{aligned}
&(b+b')(m,n) = b(m,n)+b'(m,n),\\
&(\alpha b)(m,b) = \alpha b(m,n),\quad \alpha\in A.
\end{aligned}
$$

注 4.1.1 直接用定义可以证明 $\mathrm{Bil}(M,N;P)$ 关于上述运算是一个 A 模.

定理 4.1.1 设 A 是一个环，再设 M,N,P 为 A 模，则

$$\mathrm{Bil}(M,N;P)\cong \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P)).$$

证明 对于 $m\in M, n\in N$ 定义映射

$$\Phi: \mathrm{Bil}(M,N;P)\to \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P)),\quad b\mapsto \varphi_b,$$

其中 $\varphi_b(m)(n) = b(m,n)$. 再定义映射

$$\Psi: \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P))\to \mathrm{Bil}(M,N;P),\quad \varphi\to b_\varphi,$$

其中 $b_\varphi(m,n)=\varphi(m)(n)$.

最后去证明 Φ,Ψ 是良定义的，即不会出现把一个元素映射到多个元素的情况；再证明它是模同态；最后证明 Φ,Ψ 互为逆映射. $\square$

定义 4.1.2 (张量积) 设 A 是环，M,N 为 A 模. 定义 M,N 的**张量积**为一个 A 模 T 以及 A-bilinear 映射 $\tau: M\times N\to T$ 满足以下模的泛性质：对于任意 $f\in \mathrm{Bil}(M,N;P)$ 存在唯一的同态 $\tilde{f}: T\to P$ 使得下图交换.

$$
\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & P \\
T. \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

我们记 T 为 $M\otimes_A N$，在没有歧义的情况下直接写为 $M\otimes N$.

定理 4.1.2 设 A 是环，M,N 为 A 模. 则 M,N 的张量积在同构的意义下是唯一的，即如果存在 T_1,T_2 同时为 M,N 的张量积，则 $T_1 \cong T_2$.

证明 这个证明需要证明两件事，一是 $\tilde{f}$ 的存在性，二是 T 的唯一性. 我们先证明存在性.

设 $F = A^{M\times N}$ 是自由模，它有标准基 $\mathcal{B} = \{e_{(m,n)} \in M\times N\}$ 以及映射 $i : M\times N \to F, (m,n) \to e_{(m,n)}$. 然后构造 F 的子模

$$\begin{aligned} D = \langle & i(m_1+m_2,n) - i(m_1,n) - i(m_2,n), i(am,n) - ai(m,n), \\ & i(m,n_1+n_2) - i(m,n_1) - i(m,n_2), i(m,an) - ai(m,n) : \\ & m,m_1,m_2 \in M; n,n_1,n_2 \in N, a \in A\rangle. \end{aligned}$$

然后定义映射 $\tau : \pi\circ i : M\times N \to F \to F/D$ 其中 $\pi : F \to F/D$ 是典范映射.

注意到 τ 是 A-bilinear 映射，因为 D 给出的所有关系要求 τ 必须是 A-bilinear 的.

接下来，我们证明 $(T = F/D, \tau)$ 是 M 的 N 的张量积. 设 P 是 A 模，对于任意的 $f \in \mathrm{Bil}(M,N;P)$ 考虑图

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & P & \\ F \arrow[r, "\pi"'] \arrow[ur, dotted, "\psi"] & F/D = T \arrow[u, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

证明存在唯一的 $\tilde{f}$ 使得

$$\tilde{f}\circ\tau = \tilde{f}\circ\pi\circ i = f.$$

由于 F 是自由模，故存在唯一的同态 ψ 使得图左上三角是交换的，即 $f = \psi\circ i$. 然后定义 $\tilde{f}$ 满足 $\tilde{f}\circ i = \psi$. 于是

$$\tilde{f}\circ\tau = \tilde{f}\circ\pi\circ i = \phi\circ i = f.$$

我们设

$$\tilde{f} : F/D \to P, \quad \overline{x} \mapsto \psi(x), x \in F$$

可以由 D 的构造验证出 $\tilde{f}$ 是良定义的. 并且得到上图是交换的. 最后证明 $\tilde{f}$ 是唯一的. 假设存在 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2$ 是满足 $\tilde{f}_1\circ\pi\circ i = \tilde{f}_2\circ\pi\circ i$. 由于 F 的自由性可以得到 $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

接下来证明张量积的唯一性. 假设 $(T_1,\tau_1),(T_2,\tau_2)$ 都是 M,N 的张量积. 先后设 $P = T_1,T_2$，由泛性质可以得到图

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[rr, "\tau_1"] \arrow[dr, "\tau_2"] \arrow[dd, "\tau_1"'] & & T_1 \\ & T_2 \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\tau_1}"'] & \\ T_1, \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\tau_2}"'] & & \end{tikzcd}$$

其中 $\widetilde{\tau_1},\widetilde{\tau_2}$ 是由泛性质给出的，它们是唯一的. 于是有 $\tau_2 = \widetilde{\tau_2}\circ\tau_1, \tau_1 = \widetilde{\tau_1}\circ\tau_2$.

复合 $\widetilde{\tau_1}\circ\widetilde{\tau_2}$ 是 T_1 上的自同态，满足 $(\widetilde{\tau_1}\circ\widetilde{\tau_2})\tau_1 = \tau_1$. 由于 $\mathrm{id}_{T_1}\circ\tau_1 = \tau_1$, 从泛性质诱导映射的唯一性可得

$$\widetilde{\tau_1}\circ\widetilde{\tau_2} = \mathrm{id}_{T_1}.$$

类似地，得到 $\widetilde{\tau_2}\circ\widetilde{\tau_1} = \mathrm{id}_{T_2}$. 故 $T_1 \cong T_2$. □

定义 4.1.3 我们记**定义**4.1.2中的 $\tau(m,n)$ 为 $m\otimes n$, 并称为 simple tensor 或者 elementary tensor. 任意张量积 $M\times N$ 中的元素称为 tensor.

定理 4.1.3 设 $m,m_1,m_2\in M; n,n_1,n_2\in N$ 则可以通过 A-bilinear 映射的定义得到以下运算法则:

1. $(m_1+m_2)\oplus n = m_1\oplus n + m_2\oplus n$;

2. $m\otimes(n_1+n_2) = m\otimes n_1 + m\otimes n_2$;

3. $a(m\otimes n) = am\otimes n = m\otimes an$.

定理 4.1.4 设 A 是环，再设 M,N 为 A 模.

1. 对于任意的 $m\in M, n\in N, m\otimes 0 = 0\otimes n = 0$.

2. 设 $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ 分别是 M,N 的生成集，则

$$\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2 = \{m\otimes n : m\in\mathcal{G}_1, n\in\mathcal{G}_2\}$$

是 $M\otimes N$ 的生成集.

3. simple tensor 构成的集合 $\{m\otimes n : m\in M, n\in N\}$ 是 $M\otimes N$ 的生成集.

4. 如果 M,N 是有限生成的，则 $M\otimes N$ 也是有限生成的.

上面这个定理指出，在考察张量积时，着重考虑 simple tensor. 因为所有张量积中的元素都可由 simple tensor 线性组合得到.

证明 1. 注意到 $0\otimes n = (0+0)\otimes n = 0\otimes n + 0\otimes n$.

2. 如果说有 L 生成 $M\times N$，那么相当于在说 $M\otimes N/\langle L\rangle$ 是等于 0 的. 我们接下来就是证明这个.

设 $L=\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2$，考虑图

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\tau"] & M\otimes N/\langle L\rangle \\
M\otimes N. \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 0 为零映射，显然使得该图交换.

再设 $(m,n)\in M\times N$. 由生成性可知 $m=\sum_i a_i m_i, m_i\in\mathcal{G}_1, a_i\in A$ 以及 $n=\sum_j b_j n_j, n_j\in\mathcal{G}_2, b_j\in A$. 设 π 是投影 $M\otimes N\to M\otimes N/\langle L\rangle$. 我们有

$$\pi(\tau(m,n)) = \pi(m\otimes n) = \pi\left(\sum_i a_i m_i\otimes\sum_j b_j n_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j \pi(m\otimes n) = 0.$$

故令 $\varphi = pi$ 使得图交换，由泛性质，我们得到唯一的 $\varphi=0$，即 $M\otimes N = \langle L\rangle$.

3. 由 2. 可以直接得出，因为 M,N 本身分别是 M,N 的生成集.

4. 由 2. 可以直接得出，即 $m\in M, n\in N$ 都是可以被有限个生成元线性组合得到. □

例 4.1.1 考虑是单项式环 $A[x], A[y]$. 它们的生成集分别是 $\{x^i : i \in \mathbb{N}\}, \{y^j, j \in \mathbb{N}\}$. 则张量积 $A[x] \otimes_A A[y]$ 由 $\{x^i \otimes y^j : (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$ 生成. 考虑图

$$\begin{tikzcd} A[x] \times A[y] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & A[x,y] \\ A[x] \otimes_A A[y]. \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

其中 f 是 $(x^i, y_j) \mapsto x^i y^j$ 的，像的乘法即为 $A[x,y]$ 上的乘法，它是 A-bilinear 的. 由交换性可以得到同态 φ 满足

$$\varphi\left(\sum_{i,j} a_{ij}(x^i \otimes y^j)\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j.$$

由于任意的 $p = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in A[x,y]$，有 $\varphi(\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j) = p$ 故 φ 为满射.

如果

$$\varphi\left(\sum_{i,j} a_{ij}(x^i \otimes y^j)\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = 0$$

则对于任意的 $(i,j) \in \mathbb{N}^2, a_{ij} = 0$ 故 φ 为单射. 综上，φ 为同构. 这说明多元多项式环可以表示为单元多项式环的张量积.

定理 4.1.5 (Properties of Tensor Product) 设 A 为环，M, N, P 为 A 模.

1. $A \times M \cong M$. 这个在等式的证明里常起到替换作用.
2. $M \otimes N \cong N \otimes M$.
3. $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$.
4. $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$.
5. 设 I 是 A 的理想，则 $M \otimes (A/I) \cong M/IM$.
6. 设 M, N 是自由的，且秩分别为 m, n 则 $M \otimes N$ 也是自由的，秩为 mn.

证明 1. 考虑图

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & M \\ A \otimes M. \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 f 满足 $f(a.m) = am$ 是 A-bilinear 的. 然后去证明 $\tilde{f}(a \times m) = am$ 是同构.

2. 考虑图

$$\begin{tikzcd} N \times M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & M \otimes N \\ N \otimes M \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $f(n,m) = m \otimes n, \tilde{f}(n \times m) = m \otimes n$，可以证明 $\tilde{f}$ 是同构.

3. 固定 $m \in M$，考虑映射

$$f_m : N \times P \to (M \otimes N) \otimes P$$
$$f_m(n,p) = (m \otimes n) \otimes p$$

是 A-bilinear 的. 然后由定义，它诱导出同态 $\widetilde{f_m}: N\otimes P\to (M\otimes N)\otimes P$. 再定义

$$g: M\times (N\otimes P)\to (M\otimes N)\otimes P$$
$$g\left(m, n\otimes p\right)=\widetilde{f_m}\left(n\otimes p\right)=\left(m\otimes n\right)\otimes p.$$

由于 g 是 A-bilinear 的，则它诱导出同态

$$\widetilde{g}: M\otimes (N\otimes P)\to (M\otimes N)\otimes P$$
$$\widetilde{g}\left(m\otimes \left(n\otimes p\right)\right)=\left(m\otimes n\right)\otimes p.$$

最后构造

$$\widetilde{h}: (M\otimes N)\otimes P\to M\otimes (N\otimes P)$$
$$\widetilde{h}\left(\left(m\otimes n\right)\otimes p\right)=m\otimes \left(n\otimes p\right),$$

是 $\tilde{g}$ 的逆.

4. 利用泛性质**3.4.1**得到图

$$\begin{tikzcd} M\otimes P \arrow[r] \arrow[d, hook] & (M\oplus P)\otimes P \\ (M\otimes P)\oplus(N\otimes P), \arrow[ur, dotted, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N\otimes P \arrow[r] \arrow[d, hook] & (M\oplus P)\otimes P \\ (M\otimes P)\oplus(N\otimes P). \arrow[ur, dotted, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

中的 $\tilde{g}$ 然后它是去证明图

$$\begin{tikzcd} (M\otimes N)\times P \arrow[r] \arrow[d] & (M\otimes P)\oplus(N\otimes P) \\ (M\oplus N)\otimes P \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

中的 $\tilde{f}$ 的逆.

5. 考虑映射 $f: A/I\times M\to M/IM, (\overline{a}, m)\mapsto \overline{am}$，证明它是良定义且诱导映射 $\tilde{f}(a\otimes m)=\overline{am}$ 是同构.

6. 对 m 做归纳法去证明 $A^m\otimes A^n\cong A^{mn}, n\in\mathbb{N}$. 事实上，当 $m=1$ 时，由第一条得到 $A\otimes A^n\cong A^n$. 当 $m\neq 1$ 时，由 M, N 的自由性，设 $M\cong A^m, N\cong A^n$，利用第四条，则有

$$M\otimes N=A^m\otimes A^n=(A^{m-1}\otimes A^n)\oplus(A\otimes A^n).$$

由归纳假设有 $A^{m-1}\otimes A^n\cong A^{n(m-1)}$, 再利用第一条则有

$$(A^{m-1}\otimes A^n)\oplus(A\otimes A^n)\cong(A^{m-1}\otimes A^n)\oplus A^n\cong A^{(m-1)n}\oplus A^n\cong A^{mn}.$$

□

例 4.1.2 直积与张量积不可交换，即

$$\left(\prod_i M_i\right)\otimes P\ncong\prod_i (M_i\otimes P).$$

比如 $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0, n \in \mathbb{N}^+$，于是

$$\prod_{n\in\mathbb{N}^+} (\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = 0.$$

但是

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^+} \mathbb{Z}_n\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} =\neq 0.$$

事实上，考虑由 $m = (\overline{1}_{\mathbb{Z}_n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ 生成循环子模. 我们有嵌入

$$0 \hookrightarrow \langle m\rangle_{\mathbb{Z}} \to \prod_{n\in\mathbb{N}^+} \mathbb{Z}_n.$$

再将其与 $\mathbb{Q}$ 做张量积，可以得到嵌入

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, hook] & \langle m\rangle_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}^+} \mathbb{Z}_n\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0. & \end{tikzcd}$$

定理 4.1.6 设 A 是环，M, N, P 为 A 模. 则有同构

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Bil}(M, N; P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)).$$

证明 第二个同构已在**定理4.1.1**中证明.

对于第一个同构，注意到对于任意的 $f \in \mathrm{Bil}(M, N; P)$，存在唯一的同态 $\tilde{f}$ 使得 $\tilde{f}(m \otimes n) = f(m, n)$. 于是定义

$$\Phi : \mathrm{Bil}(M, N; P) \to \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P), \quad \Phi(f) = \tilde{f}.$$

然后证明它是同构. □

我们称 $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ 与 $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$ 之间的同构为 adjunction formula Hom-$\otimes$.

4.2 作为函子的张量积

定义 4.2.1 (同态的张量积) 设 $f : M \to M', g : N \to N'$ 为 A 模同态，则定义

$$f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N', \quad (f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$$

是一个 A 模同态.

我们对它的良定义，即它是 A 模同态作一个证明:

证明 考虑图

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & M' \otimes N' \\ M \otimes N \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $\varphi(m, n) = f(m) \otimes g(n)$ 是 A-bilinear 的. 由泛性质，存在唯一的 $\tilde{\varphi}$，令 $\tilde{\varphi} = f \otimes g$ 即要求的同态的张量积. □

定理 4.2.1 设 A 为环，再设 $f: M \to M', f': M' \to M'', g: N \to N', g': N' \to N''$ 为 A 模同态. 则

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

证明 对于任意的 $m \otimes n \in M \otimes N$，有

$$\begin{aligned}
((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(m \otimes n) &= (f' \circ f)(m) \otimes (g' \circ g)(n) \\
&= f'(f(m)) \otimes g'(g(n)) \\
&= (f' \otimes g')(f(m) \otimes g(m)) \\
&= (f' \otimes g')((f \otimes g)(m \otimes n)) \\
&= ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(m \otimes n).
\end{aligned}$$

推论 4.2.1 设 A 为环. 如果 f, g 都是 A 模同构，则 $f \otimes g$ 也是 A 模同构. 特别地，如果 $M \cong M'$ 则 $M \otimes N \cong M' \otimes N$.

定义 4.2.2 (范畴视角下的张量积) 设 A 是环 N 为 A 模，$* \otimes_A N$ 为 A 模上的函子，它将 A 模 M 映到 $M \otimes_A N$. 将 A 模上的同态 $f: M \to M'$，映到 $f \otimes_A \mathrm{id}_A : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N$.

注 4.2.1 类似的可以定义函子 $N \otimes_A *$. 由**定理4.1.5**中的交换性质可以得两个函子是等价 (存在函子间同构) 的.

定理 4.2.2 (Right Exactness of $* \otimes N$) 设 A 模 M_1, M, M_2. 则 $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ 正合当且仅当对于任意的 A 模 N

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes id_N} M_2 \otimes N \longrightarrow 0$$

是正合的.

证明 先证明必要性. 我们引入任意的 A 模 Q, 由**定理3.7.1**，可得正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(M_2, \mathrm{Hom}(N, Q)) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, Q)) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(M_1 . \mathrm{Hom}(N, Q)).$$

由**定理4.1.6**中的同构，我们可以得到交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, Q)) \arrow[r, "f^*", "\varphi \mapsto \varphi \circ f"'] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(M_1, \mathrm{Hom}(N, Q)) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Bil}(M, N; Q) \arrow[r, "b_\varphi \mapsto b_{\varphi \circ f}"'] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Bil}(M_1, N; Q) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathrm{Hom}(M \otimes N, Q) \arrow[r, "\widetilde{b_\varphi} \mapsto \widetilde{b_{\varphi \circ f}}"'] & \mathrm{Hom}(M_1 \otimes N, Q)
\end{tikzcd}$$

其中 $b_\varphi(m, n) = \varphi(m)(n)$. 然后去证明最后一行的同态的作用效果合 $(f \otimes \mathrm{id}_N)^*$ 是一致的. 类似的，到 $\mathrm{Hom}(M_2 \otimes N, Q)$ 的同态与 $(g \otimes \mathrm{id}_N)^*$ 是一致的. 我们可以得到对于任意的 A 模 Q 有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2 \otimes N, Q) \xrightarrow{(g \otimes \mathrm{id}_N)^*} \mathrm{Hom}(M \otimes N, Q) \xrightarrow{(f \otimes \mathrm{id}_N)^*} \mathrm{Hom}(M_1 \otimes N, Q).$$

再使用一次**定理3.7.1**可得列

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes id_N} M_2 \otimes N \longrightarrow 0$$

是正合的.

充分性则是将**定理4.1.5**中第一条的 N 换成 A 即可得到. □

不禁要问，能不能像定义 projective module 那样给出一个定义使得上述正合列也变成一个短正合列呢？答案是存在的.

定义 4.2.3 我们称 A 模 Q 是 flat 的，如果对于任意的 A 模单同态 $f: M_1 \to M$，导出同态 $f \otimes \mathrm{id}_Q : M_1 \otimes Q \to M \otimes Q$ 也为单同态.

此时由这个定义可以得到，如果列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

正合当且仅当

$$0 \to M_1 \otimes Q \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_Q} M \otimes Q \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_Q} M_2 \otimes Q \to 0$$

是正合的.(这个我还没证明哈，猜应该是这样的)

例 4.2.1 还是要指出，不是所有的模都是 flat 的. 比如短正合列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

与 $\mathbb{Z}_2$ 作张量积得到列

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2.$$

它就不是正合的因为 $2 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$ 是零同态. 又因为 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \neq 0$，故同态 $2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$ 不是单的.

4.3 Extension of Scalars

回忆定义3.1.3，我们通过 restrction of scalars 的方式在 B 模 M 上赋予 A 模的结构. 类似的，我们可以通过 extension scalar 的方式来达到类似的效果.

定义 4.3.1 ((A, B)-bimodule) 设 A, B 为环，交换群 M 同时是 A 模和 B 模，它们关于运算

$$(ax)b = a(xb), \quad a \in A, x \in M, b \in B$$

成立. 则称 M 为 (A, B)-bimodule.

设 B 是环，自然它是一个 B 模，再设 $f: A \to B$ 是环同态，于是我们 restriction of scalars via f 在 B 上面，这样 B 就有了 A 模结构，即 B 为 (A, B)-bimodule.

定义 4.3.2 设 A, B 是环 M 是 A 模，由上一个定义，模 B 有 A 模结构，于是张量积 $M_B = B \otimes_A M$ 是一个 A 模. 此外，它关于运算 $b(b' \otimes x) = (bb' \otimes x), b, b' \in B; x \in M$ 为 B 模. 此时称 M_B 为通过在 M 上 extension of scalars 所得到的.

定理 4.3.1 如果 M 是有限生成的 A 模，则 M_B 是有限生成的 B 模.

证明 设 $M = \langle m_1, \cdots, m_n \rangle$，则 $M_B = \langle 1 \otimes m_1, \cdots 1 \otimes m_n \rangle$. □

显然我们得到的 M_B 也是一个 (A, B)-bimodule. 下面给出一个有用的定理.

定理 4.3.2 设 A, B 是环.M 为 A 模，N 为 (A, B)-bimodule, P 为 B 模，则 $M \otimes_A N$ 有 B 模结构；$N \otimes_B P$ 有 A 模结构. 并且有 (A, B)-bimodules 之间的同构

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

第五章 Localization

在本章中，我们讨论 rings of fractions 的构造，这是一种从整数 $\mathbb{Z}$ 推广到有理数 $\mathbb{Q}$ 构造的操作，或者更一般地说，是 field of fraction 的构造。我们将使用环的子集中的元素作为分母来定义分数. 我们将看到，当我们选择素理想补集中的分母时，这种构造会产生一个 local ring，其最大理想是该素理想关于某个同态的 extension.

5.1 Rings of Fractions

定义 5.1.1 设 A 是一个环，$S \subset A$ 被称为 multiplicative 或者 multiplicatively closed，如果 $1 \in S$ 并且对于任意的 $s,t \in S, st \in S$.

我们从我们常用的分数来看，如果分数 $\dfrac{a}{s} = \dfrac{b}{t}$，则它们交叉相乘再相减是等于 0 的. 受此启发，我们可以定义如下的关系：设 $S \subset A$ 是 multiplicative 的，定义 $A \times S$ 上的关系

$$(a,s) \backsim (b,t) \iff \exists u \in S, u(at-bs)=0, \quad a,b \in A; s,t \in S.$$

不难验证这是一个等价关系. 我们记 $S^{-1}A$ 为 $A \times S/\backsim$，并记 (a,s) 为代表元的等价类为 $\dfrac{a}{s}$.

定理 5.1.1 设 A 是环，$S \subset A$ 是 A 的 multiplicative 子集，则 $S^{-1}A$ 关于运算

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}, \quad \frac{0}{1}=0, \quad \frac{1}{1}=1$$

构成一个交换环. 我们称 $S^{-1}A$ 为 A 的 localization 或者 fraction.

证明 直接按照环的定义去验证. □

容易证明映射

$$\sigma : A \to S^{-1}A, \quad \sigma(a)=\frac{a}{1}$$

是典范环同态，我们称其为 localization 同态.

下面这个引理给出了如何判断 σ 为单同态以及 $S^{-1}A$ 是否为 0 的方法.

引理 5.1.1 设 A 为环，$S \subset A$ 为 multiplicative 子集，$\sigma : A \to S^{-1}A$ 为 localization 同态.

1. σ 为单同态当且仅当 $S \cap \mathcal{D}(A) = \emptyset$.
2. $S^{-1}A = 0$ 当且仅当 $S \cap \mathcal{N}(A) \neq \emptyset$.

证明 1. 对于任意的 $a \in A \backslash \{0\}$，$\sigma(a)=0$ 等价于 $\frac{a}{1}=0$，这等价于存在 $u \in S, ua=0$，即 $a \in S \cap \mathcal{D}(A)$.

2.$S^{-1}A=0$ 当且仅当 $\dfrac{1}{1}=\dfrac{0}{1}$，相当于 $1=0$ 即 $0 \in S$，那么至少 1 是 nilpotent 的，故 $S \cup \mathcal{N}(A) \neq \emptyset$. □

定理 5.1.2 (Universal Property of Ring of Fractions) 设 $g : A \to B$ 为环同态，并且有 $g(S) \subset B^*$. 则存在唯一的同态 $\tilde{g} : S^{-1}A \to B$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"'] & B \\ S^{-1}A. \arrow[ur, dotted, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

证明 对于任意的 $a \in A, s \in S$

$$\tilde{g}\left(\frac{a}{1}\right) = \tilde{g}(\sigma(a)), \quad \tilde{g}\left(\frac{1}{s}\right) = \tilde{g}\left(\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = \tilde{g}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = g(s)^{-1}.$$

因此定义 $\tilde{g}$ 满足 $\tilde{g}(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$. 故 $\tilde{g}$ 由 g 唯一决定. 然后去证明 $\tilde{g}$ 是良定义的，即如果 $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ 则 $\tilde{g}(\frac{a}{s}) = \tilde{g}(\frac{b}{t})$. 这个可由 g 的良定义性得到. □

下面这个定理给出了 $\tilde{g}$ 为同构的充分条件.

定理 5.1.3 与上一个定理的记号一致. 如果

1. $g(a) = 0$，则存在 $s \in S, as = 0$;
2. 对于任意的 $b \in B$，存在 $a \in A, s \in S$ 使得 $b = g(a)g(s)^{-1}$.

则 $\tilde{g} : S^{-1}A \to B$ 是同构.

证明 由于 $\tilde{g}(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$，使用条件 2 得到 $\tilde{g}$ 是满射. 又因为对于任意的 $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$，如果 $\tilde{g}\frac{a}{s} = 0$，则 $g(a) = 0$，由条件 1，存在 $t \in S, ta = 0$ 于是 $\frac{a}{s} = 0 \in S^{-1}A$. □

下面给出 localization 中的两个常用记号.

例 5.1.1

1. **Localization at the powers of an element.** 设 $S = S_f = \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为由 f 的幂次所构成的集合. 我们记 $S^{-1}A$ 为 A_f. 可以证明 $A_f \neq 0$ 当且仅当 $f \notin \mathcal{N}(A)$.
2. **Localization at the complement of a prime ideal.** 设 $S = A\backslash\mathfrak{p}$ 为素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ 的补. 我们记 $S^{-1}A$ 为 $A_{\mathfrak{p}}$.

定理 5.1.4 环 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 local ring，其 maximal ideal 为

$$\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \left\{\frac{a}{s} : a \in \mathfrak{p}, s \in S\right\}.$$

证明 先证明 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 的理想. 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，以及任意的 $\frac{\alpha}{\beta} \in A_{\mathfrak{p}}$. 我们有

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} = \frac{at - bs}{st} \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, \quad \frac{\alpha a}{\beta s} \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}.$$

故 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 是理想.

此外 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 是真理想，否则如果 $\frac{a}{s} = \frac{1}{1} \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，则存在 $u \in A\backslash\mathfrak{p}$ 使得 $ua = us \in A\backslash\mathfrak{p}$. 于是 ua 在 $\mathfrak{p}$ 中而 us 不在 $\mathfrak{p}$ 中，矛盾.

最后利用定理 T1.16，假设 $\frac{a}{s} \notin \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，则 $a \in S, \frac{s}{a} \in A_{\mathfrak{p}}$，即 $\frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}}^*$，故 $A_{\mathfrak{p}}$ 关于 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 是 local ring. □

定理 5.1.5 (Extension and Contraction of Ideals with Respect to σ_s) 设 A 是环, 再设 $S \subset A$ 为 multiplicative 子集, 以及 $\sigma = \sigma_S$ 为 localization 同态. 1. 设 $I \subset A$ 为理想, 再设 $I^e = (\sigma(I))$ 是 $S^{-1}A$ 的 extension. 则:

a. $I^e = \left\{\frac{a}{s} : a \in I, s \in S\right\} = S^{-1}I$;

b. $S^{-1}I = S^{-1}A$ 当且仅当 $I \cap S \neq \varnothing$;

c. $I^{ec} = \{a \in A : as \in I \text{ for some } s \in S\} = \bigcup\limits_{s \in S} I : (s)$.

2. 设 $J \subset S^{-1}A$ 是理想, 再设 $J^c = \sigma^{-1}(J)$ 是 A 的 constraction. 则, $J = J^{ce}$, 即 $S^{-1}A$ 的每一个理想都是 A 中某个理想的 extension.

证明 1a. 显然 $S^{-1}I \subset I^e$. 现在我们证明 $I^e \subset S^{-1}I$. 假设 $i \in I^e$，则 i 可以写为 $\frac{i_h}{1}$ 的线性组合

$$i = \sum_{h=1}^{k} \frac{a_h}{s_h}\frac{i_h}{1}, \quad \frac{a_1}{s_1}, \cdots, \frac{a_k}{s_k} \in S^{-1}A; i_1, \cdots, i+k \in I.$$

由 localization 的计算法则，上式可写为

$$i = \frac{\sum\limits_{h=1}^{k} b_h i_h}{s_1 \cdots s_k}, \quad b_1, \cdots, b_k \in A.$$

于是 $i \in S^{-1}I$ 因为分子在 I 中且分母在 S 中.

1b. 先证明充分性. 假设 $s \in I \cap S$，则 $1 = \frac{s}{s} \in S^{-1}I$，因此 $S^{-1}A = S^{-1}I$. 反之，如果 $I^e = S^{-1}A = S^{-1}I$，则 $\frac{1}{1} \in I^e$ 且存在 $a \in I$ 以及 $s \in S$ 使得 $\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. 故存在 $t \in S$ 使得 $ta = ts \in I \cap S$.

1c. 先证明 $\bigcup\limits_{s \in S} I : (s) \subset I^{ec}$. 假设 $a \in \bigcup_{s \in S} I : (s)$，则存在 $s \in S$ 使得 $as \in I$. 由于 $\frac{a}{1} = \frac{as}{s}$，则 $\frac{a}{1} \in S^{-1}I = I^e$ 因此 $a \in I^{ec}$. 接下来证明 $\bigcup\limits_{s \in S} I : (s) \supset I^{ec}$. 假设 $b \in I^{ec}$ 则存在 $a \in I, s \in S$ 使得 $\frac{b}{1} = \frac{a}{s} \in S^{-1}I = I^e$. 因此存在 $t \in S$ 使得 $tsb = ta \in I$，故 $b \in I : (ts)$, 其中 $ts \in S$.

2. 由于 $J^{ce} \subset J$ 总成立，故我们只证明 $J \subset J^{ce}$. 设 $\frac{a}{s} \in J$，则 $\frac{a}{1} \in J$. 这说明 $a \in J^c$. 因此 $\frac{a}{s} = \frac{1}{s}\frac{a}{1} \in J^{ce}$. $\square$

定理 5.1.6 设 A 是环，再设 $S \subset A$ 为 multiplicative 子集. 如果 $\mathfrak{p} \subset A$ 为素理想，且满足 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$，则 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$. 进一步地，$\mathfrak{p}^e$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想.

特别地，存在 $S^{-1}A$ 的素理想与 A 中与 S 无交的理想之间的一一对应，即

$$\operatorname{Spec} S^{-1}A \longleftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

证明 先证明 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$. 由于 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^{ec}$ 总成立. 故只需证明 $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^{ec}$. 假设 $a \in \mathfrak{p}^{ec}$. 设 $a \in \mathfrak{p}^{ec}$. 由**定理**5.1.51c，存在 $s \in S$ 使得 $a \in \mathfrak{p} : (s)$. 由于 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ 我们有 $a \in \mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}^{ec} \subset \mathfrak{p}$.

再证明 $\mathfrak{p}^{ec}$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想. 由于**定理**5.1.51b，$\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ 故 $\mathfrak{p}^e \subsetneq S^{-1}A$.

设 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}A$ 满足 $\frac{a}{s}\frac{b}{t} \in \mathfrak{p}^e$. 由**定理**5.1.51a，存在 $p \in \mathfrak{p}, u \in S$ 使得 $\frac{ab}{st} = \frac{p}{u}$. 故存在 $v \in S$ 使得 $vuab = vatp \in \mathfrak{p}$. 由于 $vu \in S$ 且 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$，由假设，我们有 $ab \in \mathfrak{p}$. 即 $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p}^e$ 或 $\frac{b}{t} \in \mathfrak{p}^e$. $\square$

由定义可以证明

$$S = A \setminus \bigcap_{h \in H} \mathfrak{p}_{\mathfrak{h}}$$

是集合 $\{\mathfrak{p}_h \in \operatorname{Spec} A : h \in H\}$ 的 multiplicative 子集. 进一步地，如果 H 是有限的，则有 Prime Avoidance 引理可以得到 $S^{-1}A$ 只有有限多个极大理想，即是 semilocal 的.

下面给出 localization 的常用运算法则.

定理 5.1.7 (Localization and Operations on Ideals) 设 $I, J \in A$ 为理想.

1. $S^{-1}(I+J) = S^{-1}I + S^{-1}J$.
2. $S^{-1}(IJ) = S^{-1}I \cdot S^{-1}J$.
3. $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$.
4. $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$. 特别地，$S^{-1}\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(S^{-1}A)$.

证明 先不写，嘻嘻. □

值得注意的是，对于一个 localization，其每个元素都有逆，但是这个逆不一定会在 localization 中. 比如考虑整数环 $\mathbb{Z}$ 的子集 $S = \{6^n\}_{z\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$，其 $S^{-1}\mathbb{Z}$ 的元素 $\frac{3}{6}$ 的逆可以是 $\frac{1}{2}$，但是 $\frac{1}{2} \notin S^{-1}\mathbb{Z}$.

5.2 Modules of Fractions

本节将会定义模上的 localization. 即给出 A 模 M，我们可以将其 localize 关于某个 multiplicative 子集 S. 并记为 $S^{-1}M$. 精确的定义如下.

定义 5.2.1 设 A 为环，$S \subset A$ 是 multiplicative 子集. 定义 $M \times S$ 上的等价关系

$$(m,s) \backsim (n,t) \iff \exists u \in S, u(tm - sn) = 0, \quad m,n \in M; s,t \in S.$$

我们记 $M \times S/\backsim$ 为 $S^{-1}M$，并记 $\frac{m}{s}$ 为 (m,s) 为代表元的等价类.

定义 5.2.2 (Module of Fractions) 设 M 为 A 模，再设 $S \subset A$ 为 multiplicative 子集. 集合 $S^{-1}M$ 关于运算

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm+sn}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st}, \quad m,n \in M; s,t \in S; a \in A$$

构成 $S^{-1}A$ 模. 我们称模 $S^{-1}M$ 是 localization of M at S 或者 module of fractions of M with respect to S.

注 5.2.1 值得注意的是，和**定理5.1.1**不同的是，这里的乘法是模的乘法，不能交换相乘顺序.

引理 5.2.1 如果 $\operatorname{Ann} M \cap S \neq \emptyset$，则 $S^{-1}M = 0$.

证明 设 $s \in \operatorname{Ann} M \cap S$，则对于任意的 $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$，我们有 $sm = 0$，因此 $\frac{m}{t} = \frac{0}{1}$. □

类似**例5.1.1**，给出如下例子.

例 5.2.1 当 $S = \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 时，我们记 $S^{-1}M$ 为 M_f. 当 $S = A\backslash\mathfrak{p}$ 时，我们记 $S^{-1}M$ 为 $M_\mathfrak{p}$. 特别地，记 $I_\mathfrak{p} = IA_\mathfrak{p}$

设 $\sigma : A \to S^{-1}$ 为 localization 同态. 我们通过 σ restiction scalars，则 $S^{-1}A$ 模可以被赋予 A 模结构，其乘法 $am = \frac{a}{1}ma, a \in A, m \in M$.

为防止符号滥用，我们默许符号 $\sigma : M \to S^{-1}M$ 为 $\sigma(m) = \frac{m}{1}$. 为 A 模同态.

为了像**定理5.1.2**一样建立泛性质，我们必须考虑 $M, S^{-1}M$ 是两个不同环上的模的情况. 因此，如果 A 模同态 $f : M \to N$ 能诱导出一个 $\tilde{f} : S^{-1}M \to N$，则 N 必须同时有 A 模和 $S^{-1}A$ 模两个结构. 此外，这两个结构必须是兼容的，即对于任意的 $a \in A, n \in N$ 有 $an = \frac{a}{1}n$. 下述定理给出了泛性质成立的必要条件.

定理 5.2.1 设 A 是环，$S \subset A$ 为 multiplicative 子集，N 为 A 模. 我们能够在 N 上定义 $S^{-1}A$ 模结构当且仅当对于任意的 $s \in S$，乘法映射

$$\mu_s : N \to N, \quad n \mapsto sn$$

为同构. 因此 $S^{-1}A$ 的模结构在 N 上唯一的.

证明 必要性. 如果 N 上两个模结构都能被同时满足，则对于任意 $s \in S$ 则有 $\mu_s = \mu_{\frac{s}{1}}$，然后去证明 μ_s 是双射.

充分性. 如果 μ_s 是同构. 我们定义 $S^{-1}A$ 在 N 上的乘法满足

$$\frac{a}{1}n = an, \quad \frac{1}{s}n = \left(\frac{s}{1}\right)^{-1} n.$$

然后用 μ_s 同构性证明如果 $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ 则 $\frac{a}{s}n = \frac{b}{t}n$ 以及它关于这个乘法的确是 $S^{-1}A$ 模. □

定理 5.2.2 (Universal Property of Module of Fractions) 设 $S \subset A$ 为 multiplicative 子集，再设 M, N 为 A 模，使得 μ_s 关于所有的 $s \in S$ 是 N 上的同构. 则对于任意 A 模同态 $f : MN$，存在唯一的 $S^{-1}A$ 模同态

$$\tilde{f} : S^{-1}M \to N, \quad \tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{s}f(m)$$

使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & N \\
S^{-1}M \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

证明 证明方式与**定理5.1.2**类似. □

注 5.2.2 这里 N 是一个 $(A, S^{-1}A)$-bimodule.$\tilde{f}$ 通过 restrictions of scalars 也是一个 A 模映射.

5.3 函子 S^{-1}

从范畴的角度看，我们把 localization 看成一个函子作用在模上.

定义 5.3.1 定义 S^{-1} 为 A 模范畴到 $S^{-1}A$ 模范畴上的函子，其作用效果为：

1. 对于 A 模范畴中的 object M，$M \xrightarrow{S^{-1}} S^{-1}M$.
2. 对于 A 模范畴上的态射 $f : M \to N, S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ 满足 $S^{-1}f(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}f(m)$.

可以验证对于 A 模上的态射 $f : M \to N, g : N \to P$，有

$$S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ S^{-1}f.$$

即 S^{-1} 是 covariant 函子.

定理 5.3.1 (Exactness of S^{-1}) 函子 S^{-1} 是正合的. 即对于任意正合列

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P,$$

其列

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P$$

也是正合的.

进一步地，如果 f 是单同态，则 $S^{-1}f$ 也是单同态，如果 g 是满同态，则 $S^{-1}g$ 也是满同态.

证明 用正合列的定义证明. □

接下来给出模的 localization 的运算.

定理 5.3.2 (Localization and Operations on Modules) 设 $S \subset A$ 是 multiplicative 子集. 再设 M, N, P 为 A 模.

1. 如果 M, N 是 P 的子模，则 $S^{-1}(M+N) = S^{-1}M + S^{-1}N$.
2. 如果 M, N 是 P 的子模，则 $S^{-1}(M \cap N) = S^{-1}M \cap S^{-1}N$.
3. 如果 N 是 P 的子模，则 $S^{-1}N \subset S^{-1}P$ 并且
$$S^{-1}(P/N) \cong S^{-1}P/S^{-1}N.$$
4. 如果 M 是有限生成的，则 $S^{-1}\operatorname{Ann}_A M = \operatorname{Ann}_{S^{-1}A} S^{-1}M$.
5. 如果 M, N 是 P 的子模，而且 N 是有限生成的，则
$$S^{-1}(M : N) = S^{-1}M : S^{-1}N.$$

证明 不想写 0v0. □

最后以 localization 的张量积结束本小节.

定理 5.3.3 设 S 是环 A 的 multiplicative 子集，再设 M 是 A 模，则有以下同构:

1. $S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$.
2. $S^{-1}(M \otimes_A N) \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$.

证明 1. 设 $f : S^{-1}A \times M \to S^{-1}M, f(\frac{a}{s}, m) = \frac{am}{s}$. 然后用**定理5.2.2**证明它的诱导映射
$$\tilde{f} : S^{-1}A \otimes M \to S^{-1}M, \quad \tilde{f}\left(\frac{a}{s} \otimes_A m\right) = \frac{am}{s}.$$
是满同态，且是唯一的.

2. 由 1. 以及张量积的运算法则去证明即可. □

5.4 Local Properties

本节介绍 local 性质，即从一般的角度对“性质”本身做一个定义.

定义 5.4.1 设 A 是环，$\mathcal{P}$ 是关于 A 的一个性质，我们称该性质是 local 的如果
$$\mathcal{P}\text{关于}A\text{为真} \iff \mathcal{P}\text{关于任意的 } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, A_{\mathfrak{p}} \text{ 为真}.$$

类似地，称性质 $\mathcal{P}$ 关于 A 模 M 为 local 性质，如果
$$\mathcal{P}\text{关于}M\text{为真} \iff \mathcal{P}\text{关于任意的 } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, A_{\mathfrak{p}} \text{ 模 } M_{\mathfrak{p}} \text{ 为真}.$$

定理 5.4.1 设 M 是 A 模，下列叙述等价.

1. $M=0$.
2. $\forall \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A, M_{\mathfrak{p}}=0$.
3. $\forall \mathfrak{m}\in \max A, M_{\mathfrak{m}}=0$.

上述定理可以看出，$M=0$ 是模 M 的 local 性质.

定理 5.4.2 设 $f: M\to N$ 是 A 模同态，则

1. f 是单同态当且仅当 $\forall \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A$, 同态 $f_{\mathfrak{p}}=S^{-1}f: M_{\mathfrak{p}}\to N_{\mathfrak{p}}$ 是单的；或者当且仅当 $\forall \mathfrak{m}\in \max A$ 同态 $f_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}}\to N_{\mathfrak{m}}$ 是单的.
2. f 是满同态当且仅当 $\forall \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A$, 同态 $f_{\mathfrak{p}}=S^{-1}f: M_{\mathfrak{p}}\to N_{\mathfrak{p}}$ 是满的；或者当且仅当 $\forall \mathfrak{m}\in \max A$ 同态 $f_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}}\to N_{\mathfrak{m}}$ 是满的.

该定理可以看出，f 是单同态、满同态这两个性质都是 local 性质.

定理 5.4.3 设 A 是环，M 为 A 模. 则

1. A 是 reduced 的;
2. M 是 flat 的.

是关于 A 和 M 的 local 性质.

第六章　Noetherian 与 Artinian 环. Primary 分解

本章通过理想上的链来介绍 Noetherian 环与 Artinian 环. 我们将会证明 Noetherian 环的任意理想都是有限生成的，并且可以分解为有限个 primary 理想的交. 此外我们会证明环 A 是 Noetherian 的当且仅当 $A[x_1, \cdots, x_n]$ 是 Noetherian 的. 以及任意环 A 是 Artinian 的当且仅当它是有限个 local Artinian 环的直和，且唯一决定于同构.

6.1　Noetherian 和 Artinian 模

设 $(\Sigma, \leqslant)$ 是 poset，即一个非空集合 Σ 具有偏序 $\leqslant$. 我们回忆 Σ 上的链为 Σ 的全序子集.

引理 6.1.1 以下两个条件等价.

1. 任意 Σ 的链 $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 stationary 的或 stabilizes 的，即存在 $\alpha_0 \in \Lambda$ 对于所有的 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 都有 $s_\alpha = s_{\alpha_0}$.

2. 任意 Σ 的非空子集关于序 $\leqslant$ 都有最大元.

注 6.1.1 应该是默认指标集 Λ 是一个全序集.

证明 $1 \Rightarrow 2$. 用反证法，假设 Σ 有子集没有最大元，则它的链不可能是 staionary 的.$2 \Rightarrow 1$. 直接满足定义. □

在本章，我们主要考虑 Σ 是环 A 的所有理想所构成的集合，其序关系为 $\subset$ 或者 $\supset$. 如果 Σ 上的序关系是 $\subset$，且满足**引理**6.1.1的条件 1. 则称 $(\Sigma, \subset)$ 满足 ascending chain condition，简写为 a.c.c.. 如果 Σ 上的序关系满足 $\supset$，且满足**引理**6.1.1的条件 1，则称 $(\Sigma, \supset)$ 满足 descending chain condition，简写为 d.c.c.

类似的在模上也是这么定义，只是把理想的包含关系换成子模的包含关系.

定义 6.1.1 如果环 (模) 的所有理想 (子模) 所构成的集合满足 a.c.c，我们就称该环 (模) 是 Noetherian 的，如果满足的是 d.c.c. 则称该环 (模) 是 Artinian 的.

下面给出 Noetherian 模的第一性质，即用于判断该模是否是 Noetherian 的.

定理 6.1.1 设 I 是 A 的理想，M, N, P 为 A 模.

1. M 是 Noetherian 的当且仅当 M 的任意子模都是有限生成的.

2. 设 $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M \to P$ 是正合列. 则 M 是 Noetherian 的当且仅当 N, P 都是 Noetherian 的.

3. 设 $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. 则 M 是 Noetherian 的当且仅当 $M_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 都是 Noetherian 的.

4. 现在假设 A 是 Noetherian 的.

(a) A/I 作为 A 模以及 A/I 模都是 Noetherian 的.

(b) M 是 Noetherian 的当且仅当 M 是有限生成的.(这个条件对 M 的要求比 1. 更弱)

5. 设 $I \subset \operatorname{Ann} M$. 则 M 作为 A 模是 Noetherian 的当且仅当它作为 A/I 模是 Noetherian 的.

6. 设 M 是 Noetherian 的，再设 $S \subset A$ 是 multiplicative 子集. 则 $S^{-1}M$ 作为 $S^{-1}A$ 模是 Noetherian 的.

证明 1. 必要性用定义，充分性用反证法然后用定义.

2. 用正合列的定义，然后需要用**推论3.7.2**.

3. 必要性考虑列

$$0 \to M_1 \to M \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to 0.$$

证明它是正合的，再对 n 进行归纳. 充分性则直接用 Noetherian 的定义.

4. 考虑正合列

$$0 \to I \hookrightarrow A \to A/I \to 0.$$

由 2. 去证明 A/I 作为 A 模是 Noetherian 的. 再由 A/I 的 A/I 子模和 A 中包含 I 的 A/I 子模的一一对应性得到 A/I 作为 A/I 模也是 Notherian 的.

5. 利用正合列

$$0 \to \ker \varphi \to A^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0.$$

6. 结合**定理3.1.1**.

7. 由于 $S^{-1}M$ 的任意子模都是 $S^{-1}N$ 的形式, 其中 N 为 M 的子模，故 $S^{-1}M$ 的任意子模都是有限生成的. □

推论 6.1.1 设 $0 \to N \to M \to P \to 0$ 是短 A 模正合列. 则 M 是 Artinian 的当且仅当 N, P 是 Artinian 的.

6.2 Noetherian 环与 Primary 分解

类似 Hilbert 基定理，任意 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 的理想都是有限生成的，我们在此给出 Noteherian 环上的 Hilber 基定理.

定理 6.2.1 (Hilbert 基定理) 设环 A 是 Noetherian 环，则 $A[x_1, \cdots, x_n]$ 也是 Noetherian 环.

域、PID、Noetherian 环上的多项式环，以及它们的直和、商、localizations 都是 Noetherian 环的例子.

定理 6.2.2 (有限化定理 1) 设 A 是 Noetherian 环，再设 I 是 A 的理想，则存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\sqrt{I}^k \subset I$.

证明 由**定理6.1.1**1. 去证明. □

例 6.2.1 回忆算术基本定理，对于任意整数，它都能被分解为素数幂的乘积. 从理想的视角看：任意 $\mathbb{Z}$ 的真理想可以被分解 primary 理想的乘积. 更一般的，可以得到对于任意一个 PID A，其真理想可以被分解为有限多个 primary 理想的交.

由上面这个例子，我们引出以下定义.

定义 6.2.1 环 A 的理想 I 是 decomposable 的，如果它能被分解为有限多个 A 的 primary 理想的交. 称这个分解为 primary decomposition of I. 称 decomposition 中的 primary 理想为 parimary component of I.

下面这个定理保证了 Noetherian 环的所有理想都是 docomposable(可分解) 的.

定理 6.2.3 设 A 是 Noetherian 环，再设 $I \subsetneq A$ 是真理想.

1. 如果 I 是 irreducible 的，则 I 是 primary 的.

2. I 是有限多个 irreducible 理想的交.

3. I 是 decomposable 的.

理想 I 的分解可能有很多种，故下面给出 minimal decomposition 的定义. 上述理想 I 可以被进一步分解为 minimal decomposition，并且在某种程度上这个分解是唯一的.

定义 6.2.2 (Minimal Primary Decomposition) 称 primary decomposition $I = \bigcap_{i=1}^{t} \mathfrak{q}_i$ 是 minimal 如果它满足:

1. $\forall i \neq j, \sqrt{q_i} \neq \sqrt{q_j}$.

2. $\forall i, \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_j \nsubseteq q_i$.

事实上，第一个条件保证了第二个条件可以被满足. 如果没有第一个条件，则当 $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ 时，且有 $\mathfrak{q}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ 时，则 2. 可能会变成包含于.

为了方便叙述，我们给出以下定义.

定义 6.2.3 设 A 是环,$I \subset A$ 为 primary 理想，它的 radical 为 $\mathfrak{p}$，由于 radical 都是 prime 的，于是我们称 I 为 $\mathfrak{p}$-primary 的.

定理 6.2.4 设 $a \in A, \mathfrak{q}$ 是 A 的 $\mathfrak{p}$-primary 理想.

1. 如果 $a \in \mathfrak{q}$，则 $\mathfrak{q} : (a) = A$.

2. 如果 $a \notin \mathfrak{q}$，则 $\mathfrak{q} : (a)$ 是 $\mathfrak{p}$-primary 的. 即 $\mathfrak{q} : (a)$ 的 radical 和 $\mathfrak{q}$ 是一样的，都为 $\sqrt{\mathfrak{q}}$.

3. 如果 $a \notin \mathfrak{p}$，则 $\mathfrak{q} : (a) = \mathfrak{q}$.

上述定理可以证明以下唯一性定理.

定理 6.2.5 (唯一性定理 1) 设 $I = \bigcap_{i=t}^{t} \mathfrak{q}_i$ 是理想 $I \subset A$ 的 minimal primary decomposition. 则

$$\{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}\} = \left\{\sqrt{I : (a)} : a \in A\right\} \cap \operatorname{Spec} A.$$

证明 嘻嘻. □

进一步地，如果 A 是 Noetherian 的则有以下定理.

定理 6.2.6 如果 A 是 Noetherian 的，则

$$\{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}\} = \{I : (a) : a \in A\} \cap \operatorname{Spec} A.$$

定义 6.2.4 我们称上述定理中的 $\mathfrak{p}_i$ 为 associated primes of I，并且记集合 $\{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}\}$ 为 $\operatorname{Ass} I$. 其 $\operatorname{Ass} I$ 中的最小元素称为 minimal primes of I. 不是最小的元素则称为 embedded primes of I.

这些术语起源于几何. 对于理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$，其中 $K = \overline{K}$ 为代数闭域，I 的 primary decomposition 诱导出了 $\mathbb{V}(I)$ 的分解，即 $\mathbb{V}(I)$ 为 irreducible varieties 的并，见**定理**2.1.3.I 的 minimal prime 对应了 $\mathbb{V}(I)$ minimal decomposition 中的 subvarieties. 其 embedded prime 则对应了 $\mathbb{V}(I)$ 中的某个分解中的 subvariety，这个 subvariety 包含于某个 minimal decomposition 中的 subvariety 中.

事实上，如果 $\mathfrak{q}_i$ 满足 $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} I$，并且 $\mathfrak{p}_i$ 不是 I 的 minimal prime. 则存在 minimal prime $\mathfrak{p}_j$ 使得 $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ 以及

$$\mathbb{V}(\mathfrak{q}_i) = \mathbb{V}(p_i) \subset \mathbb{V}(\mathfrak{p}_j) = \mathbb{V}(\mathfrak{q}_j).$$

定理 6.2.7 1. 设 I 是 decomposable 的. 则由 minimal primes 构成的集合就是 $\min I$，即每个 minimal prime 就是包含 I 的最小理想.

2. **(有限化定理 2)** Noetherian 环的 minimal primes 是有限多个的.

3. 设 $(0) = \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{q}_i$ 为 minimal primary decomposition，且满足 $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ 则

$$\mathcal{N}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \in \min(0)}, \quad \mathcal{D} = \bigcup_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}(0)} \mathfrak{p}_i.$$

下面这个定理通过考察 $\mathfrak{p} \cap S$ 表述了 localization 与 $\mathfrak{p}$-primary 的关系.

定理 6.2.8 设 S 是环 A 的 multiplicative 子集，再设 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$-primary 理想.

1. $S^{-1}A$ 的理想 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 是 $S^{-1}\mathfrak{p}$-primary 的. 并且如果 $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ 则 $(S^{-1}\mathfrak{q})^c = \mathfrak{q}$. 如果 $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$ 则 $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$.

2. 设 $I = \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{q}_i$ 是 I 的 minimal primary decomposition，且 $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$. 再设 $k \leqslant t$ 时，$\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset$, 且 $k \geqslant t$ 时 $\mathfrak{p}_i \cap S \neq \emptyset$. 则
$$(S^{-1}I)^c = \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{q}_i.$$

3. 设 $S = A \backslash \bigcup_{\mathfrak{p} \in \min I} \mathfrak{p}$. 则
$$(S^{-1}I)^c = \bigcap_{\sqrt{q} \in \min I} \mathfrak{q}.$$

由**定理**6.2.7，对于一个 decomposable 理想 I，设它的 minimal primary decomposition $I = \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{q}_i$. 则存在 $k \leqslant t$ 使得

$$\operatorname{Ass} I = \{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p}_i = \sqrt{q_i}\}, \quad \min I = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_k\}.$$

定理 6.2.9 (唯一性定理 2) 设 $I = \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{q}_i$ 是理想 $I \subset A$ 的 minimal primary decomposition. 则 primary ideal $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_k$ 中 radical 是 minimal prime 的那些，是被唯一确定的. 特别地，对于所有 $i = 1, \cdots, k$

$$\mathfrak{q}_i = (IA_{\mathfrak{p}_i})^c.$$

6.3 Artinian 环

回忆一下，Artinian 环其实就是满足 d.c.c. 条件的环. 即它的任意一条 descending chain 都存在一个指标，使得该指标后的指标不再继续下降.

命题 6.3.1 设 A 是 Artinian 环. 则:

1. $\operatorname{Spec} A = \max A$，即所有素理想都是极大理想.
2. A 只有有限多个极大理想.
3. $\mathcal{N}(A)$ 是 nilpotent 的. 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{N}(A)^k = 0$.

上面的性质可用于证明以下关于 local ring 的定理.

定理 6.3.1 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是 Artinian local ring. 则该环的元素要么是 nilpotent 的，要么是可逆的.

定理 6.3.2 设 $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_t$ 是环 A 的极大理想 (允许指标不同但是理想是同一个). 则

$$A/\prod_{i=1}^{t} \mathfrak{m}_i \quad \text{是 Artinian 的当且仅当它是 Noetherian 的.}$$

特别地，如果 $\prod_{i=1}^{t} = 0$，则 A 是 Artinian 的当且仅当 A 是 Noetherian 的.

这个定理告诉我们，考察一个环 A 是否为 Artinian 的可以连着该环的极大理想一起考虑.

证明 利用短正合列

$$0 \to N \to A/\prod_{i=1}^{t} \mathfrak{m}_i \to A/\prod_{i=1}^{t-1} \to 0.$$

下面这个定理直接揭示了 Artinian 环和 Noetherian 环的关系.

定理 6.3.3 (Characterization of Artinian Rings) 一个环 A 是 Artinian 的当且仅当它是 Noetherian 的且维数是 0.

注 6.3.1 这里的维数是 Krull 维数，即最长的素理想链的长度. 由于性质6.3.1，素理想都是极大理想，所以 Artinian 环的维数自然是 0.

正所谓 Noetherian 环的理想都是 decomposable 的，是对 Noetherian 环结构的一个展示，Artinian 环也有类似的结构定理. 我认为 Artinian 的结构比 Noetherian 的结构体现地更直接.

定理 6.3.4 (Structure Theorem of Artinian Rings) 环 A 是 Artinian 的当且仅当它同构一个有限直和

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i,$$

其中 A_i 是 Artinian local ring.

证明 利用中国剩余定理可以得到

$$A \cong A/(0) \cong A/\prod_{i=1}^{s} \mathfrak{m}_i^k \cong \prod_{i=1}^{s} A/\mathfrak{m}_i^k,$$

这里 $(0) = \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{m}_i^k$. $\square$