常见偏微分方程及其解法

叶博宇

2025 年 6 月 25 日

目录

第一章　输运方程

形如

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

的方程为**输运方程 (transprot equaiton)**，它是最简单的偏微分方程，我们采用特征线法求解.

先考虑，a,b 为常数的情况，即解方程

$$au_x + bu_y = 0,$$

a,b 不同时为 0.

解 该方程的有通解

$$u(x,y) = f(bx - ay).$$

其中 f 是一个单变量函数，在给出定解条件后就可以解得具体解. □

例 1.0.1 解输运方程 $4u_x - 3u_y = 0, u(0,y) = y^3$.

解 由特征线法，通解为

$$u(x,y) = f(bx - ay) = f(-3x - 4y).$$

由定解条件，$x = 0$ 时有

$$u(0,y) = f(-4y) = y^3.$$

变量替换得到

$$f(y) = -\left(\frac{y}{4}\right)^3.$$

于是 $u(x,y) = f(-3x-4y) = \left(\frac{3x+4y}{4}\right)^3$. □

再考虑系数不是常数的情况，即解方程 $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$.

解 考虑特征曲线

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \Rightarrow a(x,y)\,\mathrm{d}y = b(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

两边同时积分

$$\int a(x,y)\,\mathrm{d}y = \int b(x,y)\,\mathrm{d}x$$

可以得到

$$a(x) = b(y) + C$$

于是 $C = a(x) - b(y)$，通解形式为 $u(x,y) = f(a(x) - b(y))$. 由定解条件可以给出具体的解. □

例 1.0.2 求解方程 $(1+x^2)u_x+u_y=0, u(0,y)=y^2$.

解 考虑特征曲线

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

两边同时积分

$$\int \mathrm{d}y=\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\Rightarrow y=\arctan x+C.$$

可得通解

$$u(x,y)=f(y-\arctan x).$$

由定解条件

$$u(0,y)=f(y)=y^2$$

带回得解 $u(x,y)=(y-\arctan x)^2$. □

第二章　波动方程

2.1　无边界定解问题

波动方程主要研究弦的振动方程. 先从最简单的入手，考虑以下初值问题 (Cauchy 问题).

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

注 2.1.1 注意该问题只有初值条件，没有边界条件，弦为无限长. 后面弦一端固定，两端固定的解法是不同的.

由叠加原理，我们将该问题分解为问题 (I) 和问题 (II)，问题 (I) 是将方程齐次化，而初值条件不变；问题 (II) 则是方程不变，将初值条件其次化.

先考虑

$$\text{(I)} \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

该问题可以直接套用 D'Alembert 公式解，即通解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

定理 2.1.1 问题 (I) 中的方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

的通解形式为 $u(x,t) = F(x-at) + G(x+at)$, 其中 F, G 都是二阶可求偏导的.$F(x-at)$ 称为**右行波**，$G(x+at)$ 称为**左行波**，所以上述问题的波实际上是由左行波和右行波叠加而成.

定理 2.1.2 设 $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}), \psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$，则初值问题 (I) 存在唯一解 $u(x,t)$，该解由 D'Alembert 公式给出.

上述定理保证了在初值条件满足一定条件下方程可解. 逻辑上解方程前应当验证.

例 2.1.1 求解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \cos x, \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

解 显然 $\phi(x)=0$2 阶可导连续，$\psi(x)=\cos x$ 一阶可导连续. 于是套 D'Alembert 公式可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(0+0)+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\cos s\,\mathrm{d}s=\frac{1}{4}(\sin(x+2t)-\sin(x-2t))=\frac{1}{2}\cos x\sin(2t).$$

□

接下来考虑问题 (II).

$$\text{(II)}\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & \\ u(x,0)=0, & t>0,x\in\mathbb{R}. \\ u_t(x,0)=0, & \end{cases}$$

核心思想是把该方程转化为齐次方程. 使用 Duhamel 原理. 引入新时间参数 τ，将位置函数 $u(x,t)$ 转化为 $W(x,t,\tau)$. 得到新问题

$$\begin{cases} W_{tt}-a^2W_{xx}=0, & \\ W(x,\tau,\tau)=0, & t>\tau,x\in\mathbb{R}. \\ W_t(x,\tau,\tau)=f(x,\tau). & \end{cases}$$

为了使用 D'Alembert 公式，我们令 $t'=t-\tau$. 上述问题转化为

$$\begin{cases} W_{t't'}-a^2W_{xx}=0, & \\ W(x,\tau,\tau)=0, & t'>0,x\in\mathbb{R}. \\ W_{t'}(x,\tau,\tau)=f(x,\tau). & \end{cases}$$

其中下面两个为 $t'=0$ 时候的初值条件. 用 D'Alembert 公式可以解得

$$W(x,t,\tau)=\frac{1}{2}(0+0)+\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

由 Duhamel 原理，问题 (II) 的解为

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.$$

例 2.1.2 *求解以下波动方程*

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\sin x, \\ u(x,0)=0, \\ u_t(x,0)=0, \end{cases}$$

解 使用 Duhamel 原理，引入新参数 τ，以及函数 $W(x,t,\tau)$. 于是原问题转化为

$$\begin{cases} W_{t't'}-u_{xx}=0, \\ W(x,\tau,\tau)=0, W_{t'}(x,\tau,\tau)=\tau\sin x, \end{cases} \quad t'>0,x\in\mathbb{R}$$

用 D'Alembert 公式

$$W(x,t,\tau)=\frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\sin s\,\mathrm{d}s=\tau\sin(t-\tau)\sin x.$$

于是解

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\tau\sin(t-\tau)\sin x\,\mathrm{d}\tau=(t-\sin t)\sin x.$$

□

至此，我们彻底解决了无边界的 Cauchy 初值问题，由叠加原理，问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & \\ u(x,0) = \varphi(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}. \\ u_t(x,0) = \psi(x), & \end{cases}$$

的通解形式为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(s,\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.$$

2.1.1 半无界弦的 Cauchy 问题

上述问题 (I) 有一个特殊情况，即把弦在原点处固定，于是增加一个条件 $u(0,t) = 0$，即考虑以下问题 (III)

$$\text{(III)} \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, x > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \geqslant 0. \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

思想是将初值条件进行奇延拓，然后使用无边界弦的 D’Alembert 公式，再限制到 $x \geqslant 0$ 的部分即可. 于是有以下通解公式，以 $x = at$ 作为分割点.

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s, & x \geqslant at, \\ \dfrac{1}{2}(\varphi(x+at) - \varphi(at-x)) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s, & 0 \leqslant x < at. \end{cases}$$

2.1.2 依赖区间、决定区域、影响区域

从 D’Alembert 公式可以看出，问题 (I) 的解在平面上的点 (x,t) 处的值 $u(x,t)$ 由 $\varphi(x), \psi(x)$ 的在 x 轴上的区间 $[x-at, x+at]$ 唯一确定，所以称该区间为 (x,t) 的**依赖区间**. 令 $x - at = x_1, x + at = x_2$，得到 $x = x_1 + at, x = x_2 - at$ 两条直线，它们围成的区域称为区间 $[x_1, x_2]$ 的**决定区域**，该区域决定了初值问题的解的值完全由 $[x_1, x_2]$ 的初始条件决定.

如果在 $[x_1, x_2]$ 之间一点 x_0 或者整个区间上做一个扰动，则 $x = x_0 - at, x = x_0 + at$ 或者 $x = x_1 - at, x = x_2 + at$ 所围成的半开放区域内的所有点都会受到影响，所以称该区域为点 x_0 或者区间 $[x_1, x_2]$ 的**影响区域**.

2.2 初边值问题的分离变量法

2.2.1 分离变量法

在 Cauchy 初值问题中加上边界条件 $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ 即在 $x = 0, x = l$ 处固定弦，就得到了以下初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases}$$

同样的思路，利用叠加原理，将上述问题分解为方程齐次，初值条件不齐次的问题 (I)；方程非齐次，初值条件齐次的问题 (II).

先考虑问题 (I)

$$
\text{(I)}\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), \\ u(0,t)=u(l,t)=0. \end{cases}
$$

由分离变量法可得通解

$$
u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)+B_k\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).
$$

为确定 A_k, B_k 我们对 $u(x,t)$ 关于 t 逐项求导

$$
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-A_k\sin\frac{k\pi a}{l}t+B_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.
$$

故当 $t=0$ 时，我们可以得到两个方程

$$
u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)=\psi(x).
$$

这两个方程一般就可以通过系数对应确定 A_k, B_k. 如果还不行，由于 $A_k, \frac{B_k k\pi a}{l}$ 分别是 $\varphi(x), \psi(x)$ 在 $[0,l]$ 区间中正弦展开的 Fourier 级数的系数，于是有

$$
A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\left(\frac{k\pi}{l}s\right)\mathrm{d}s,\quad B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(s)\sin\left(\frac{k\pi}{l}s\right)\mathrm{d}s.
$$

注 2.2.1 众所周知这种积分都是给计算机算的，所以不到万不得已不去算积分求系数.

以下定理保证了问题 (I) 存在解

定理 2.2.1 若函数 $\varphi(x)\in C^3, \psi(x)\in C^2$ 并且

$$
\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0
$$

则问题 (I) 的解存在，由上述级数确定解.

逻辑上求解问题 (I) 之前需用定理验证存在解.

例 2.2.1 用分离变量法解以下问题

$$
\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad t>0, 0<x<l, \\ u(x,0)=\sin\left(\frac{3}{2l}\pi x\right), u_t(x,0)=\sin\left(\frac{5}{2l}\pi x\right), \\ u(0,t)=u_x(l,t)=0. \end{cases}
$$

解 首先注意到边值条件中给出的是 $u_x(l,t)=0$ 而不是 $u(l,t)=0$. 为解该方程，我们对位置函数 u 关于 $x=l$ 进行偶延拓得到 $v(x,t)$，此时得到新问题

$$
\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \quad t>0, 0<x<2l, \\ v(x,0)=\sin\left(\frac{3}{2l}\pi x\right), v_t(x,0)=\sin\left(\frac{5}{2l}\pi x\right), \quad 0<x<l, \\ v(0,t)=v(2l,t)=0. \end{cases}
$$

注意到该问题满足 $v_x(l,t)=0$，故我们把该问题求解后的结果限制到 $0<x<l$ 即可. 所以我们第二行只需写出 $0<x<l$ 时候的初值条件，不需要写出 $l\leqslant x\leqslant 2l$ 时候的初值条件. 由分离变量法，我们有新问题的通解

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{2l}t+B_k\cos\frac{k\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{k\pi}{2l}x,\quad 0\leqslant x\leqslant 2l.$$

我们将该解限制到 $0<x<l$ 上，就可以用上述初值条件确定 A_k,B_k 即

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{2l}=\sin\left(\frac{3}{2l}\pi x\right),\quad \sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{2l}\sin\frac{k\pi}{2l}x=\sin\left(\frac{5}{2l}\pi x\right).$$

比较系数，可以得到 $A_3=1$，而 $A_k=0,k\neq 3;B_5=\frac{2l}{5\pi a}$ 而 $B_k=0,k\neq 5$. 带回得到

$$u(x,t)=\cos\frac{3\pi a}{2l}t\sin\frac{3\pi}{2l}x+\frac{2l}{5\pi a}\cos\frac{5\pi a}{2l}t\sin\frac{5\pi}{2l}x$$

即为所求解. □

接下来考虑问题 (II)

$$(\mathrm{II})\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0.\end{cases}$$

我们同样还是尝试利用 Duhamel 齐次化原理，引入新参数 τ，得到新函数 $W(x,t,\tau)$. 可考虑新问题

$$\begin{cases}W_{tt}-a^2W_{xx}=0,t>\tau\\ W(x,\tau,\tau)=0,W_t(x,\tau,\tau)=f(x,\tau),\\ W(0,t,\tau)=W(l,t,\tau)=0.\end{cases}$$

为了使用问题 (I) 中的分离变量法，我们令 $t'=t-\tau$ 于是得到问题

$$\begin{cases}W_{t't'}-a^2W_{xx}=0,t'>0\\ W(x,\tau,\tau)=0,W_t(x,\tau,\tau)=f(x,\tau),\\ W(0,t'+\tau,\tau)=W(l,t'+\tau,\tau)=0.\end{cases}$$

这里第二行的条件就是 $t'=0$ 时候的条件. 使用分离变量法，得到

$$W(x,t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k(\tau)\cos\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)+B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

由于

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(\tau)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)=\varphi(x)=0.$$

最后得到

$$W(x,t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

于是得到

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}\tau.$$

最终我们由叠加定理，得到初边值问题的解

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)+B_k\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}\tau.$$

2.2.2 非齐次边界条件的情形

最后讨论最复杂的情况，即弦的两端不固定在 0，而是按照某种方式波动. 这种情况不要求求解，但是要掌握转化为初边值问题的方法.

考虑问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

为保证方程有解，我们要求 μ_1, μ_2 有连续的二阶偏导，而且

$$\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_1'(0) = \mu_2'(0) = \mu_1''(0) = \mu_2''(0) = 0.$$

对于每一个 t，引入关于 x 的直线

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

不难看出 $U(0,t) = \mu_1(t), U(l,t) = \mu_2(t)$，满足原问题的边值条件. 再引入函数

$$V(x,t) \coloneqq u(x,t) - U(x,t) = u(x,t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

这个新定义的函数 $V(x,t)$ 代入波动方程可以得到

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = u_{tt} - a^2 u_{xx} - \mu_1(t) - \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = f(x,t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

而且

$$V(x,0) = u(x,0) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)),$$
$$V_t(x,0) = u_t(x,0) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}(\mu_2'(0) - \mu_1'(0)),$$

同时有

$$V(0,t) = V(l,t) = 0.$$

故我们得到了满足相容性条件的新问题

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} = f(x,t) - \mu_1(t) - \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \\ V(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)), \\ V_t(x,0) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}(\mu_2'(0) - \mu_1'(0)), \\ V(0,t) = V(l,t) = 0. \end{cases}$$

新问题可解，得到解 $V(x,t)$ 后立即可得原问题的解

$$u(x,t) = V(x,t) + U(x,t) = V(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

第三章　热传导方程

定义 3.0.1 形如

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

的方程称为**热传导方程**，其中 u 称为**温度函数**. 该方程也可写为

$$u_t = a^2 \Delta u,$$

其中 Δ 为 Laplace 算子.

热传导方程类似波动方程，也有三类定解条件. 第一类边界条件 (Dirichlet 边界条件)，已知边界曲面 $\Gamma 0$ 的情况已知.

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, \\ u(x,y,z,t)|_{(x,y,z)\in\Gamma} = g(x,y,z,t) \end{cases}$$

第二类边界条件 (Neumann 边界条件) 则是已知边界 Γ 上单位外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数. 即

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{(x,y,z)\in\Gamma} = g(x,y,z,t). \end{cases}$$

第三类边值条件则是在方向导数的基础上加上未知函数 u 的项.

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\big|_{(x,y,z)\in\Gamma} = g(x,y,z,t). \end{cases}$$

其中 σ 为已知正数.

类似波动方程我们还能给出有初始条件的 Cauchy 问题，即

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

三维的热传导方程求解较为困难，我们先从简单的入手. 温度函数 u 只与坐标 x 和时间 t 相关的函数称为**一维热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

在平面上的热传导方程称为**二维热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

3.1 初边值问题的分离变量法

我们用分离变量法求解下列问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \end{cases}$$

其中 h 为常数.

用分离变量法，令

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

把它带回到方程中可得

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}.$$

该等式两边均等于常数时才成立，故令 0

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

于是我们得到两个常微分方程

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$T' + \lambda a^2 T = 0.$$

先讨论第第一个方程，它是二阶线性常系数常微分方程，其特征方程为

$$t^2 + \lambda = 0$$

当 $\lambda > 0$ 时得到两个特征根 $\sqrt{\lambda}i, -\sqrt{\lambda}i$.(事实上 $\lambda \leqslant 0$ 方程只有平凡解). 故该方程的通解为

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}ix} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}ix},$$

由 Euler 公式替换成三角形式得到

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

这里 A, B 为复常数. 由边值条件 $u(0,t) = 0$ 得到 $X(0) = 0$. 故 $A = 0$ 又由边值条件 $u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$ 可得 $X'(l) + hX(l) = 0$，故

$$B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}) = 0$$

为使得 $X(x)$ 为非平凡解，故

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda} = 0.$$

由该式子可以解得无穷多个 λ 的值 $\lambda_k, k = 1, 2, \cdots$. 马上就可以得到其对应的 $X(x)$ 的解

$$X_k(x) = B_k \sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

接下来我们求解 $T' + \lambda a^2 T = 0$，我们把 $\lambda = \lambda_k$ 带回得到

$$T'(t) + \lambda_k a^2 T(t) = 0.$$

该方程有通解

$$T(t) = C_k e^{-\lambda_k a^2 t}.$$

于是我们得到一系列分离变量的特解

$$u_k(x,t) = A_k e^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x, \quad k = 1, 2\cdots,$$

这里 $A_k = B_k C_k$. 再由叠加原理可得原问题的通解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

接下来我们确定系数 A_k. 由初始条件 $u(x,0) = \varphi(x)$ 可得

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\sqrt{\lambda_k}x = \varphi(x). \tag{3.1.1}$$

可以证明函数系 $\{X_k\} = \{\sin\sqrt{\lambda_k}x\}$ 在 $[0,l]$ 上是正交的，即

$$\int_0^l \sin\sqrt{\lambda_m}x\sin\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n.$$

当 $m = n = k$ 时，我们有

$$M_k = \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{1-\cos 2\sqrt{\lambda_k}x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_k)}.$$

然后在(3.1.1)两边乘上 $\sin\sqrt{\lambda_k}x$ 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\sqrt{\lambda_i}x\sin\sqrt{\lambda_k}x = \varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

两边在同时进行积分，由函数系的正交性可得

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\sqrt{\lambda_i}\xi\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\,\mathrm{d}\xi = A_k\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x = A_k M_k = \int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\,\mathrm{d}\xi$$

最后得到

$$A_k = \frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\,\mathrm{d}\xi.$$

将得到的结果带回即可得原问题得通解

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\,\mathrm{d}\xi\cdot e^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

注 3.1.1 上述推导过程中，$k=1$ 开始是因为当 $k=0$ 会导致 $\lambda_k = 0$ 使得 $X(x)$ 为平凡解，但是有时候 $k=0$ 的时候 $\lambda > 0$ 仍然成立，这时 k 就应该从 0 开始取. 换句话说，k 的选取应该覆盖所有不会导致 $X(x)$ 为平凡解的 $\lambda_k \geqslant 0$.

例 3.1.1 用分离变量法求解以下问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

解 由边值条件可得 $h=0$，于是 $M_k=\frac{\pi}{2}$，以及得到方程

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi=0.$$

可以解得

$$\sqrt{\lambda}=\frac{1}{2}+k$$

这时可以发现 k 即使从 0 开始取 $\lambda>0$ 仍然成立，即 $X(x)$ 仍然为非平凡解，k 从 -1 开始取会导致 $\sqrt{\lambda}<0$，矛盾. 故

$$\lambda_k=\frac{(2k+1)^2}{4},\quad k=0,1,\cdots$$

代入通解可得

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)\sin\frac{(2k+1)\xi}{2}\,\mathrm{d}\xi\cdot\exp\left(-a^2\frac{(2k+1)^2}{4}t\right)\sin\frac{(2k+1)x}{2}.$$

□

例 3.1.2 如果有一长度为 l 得均匀细棒，其周围以及两端 $x=0,x=l$ 均为绝热，初始温度分布为 $u(x,0)=f(x)$，问以后时刻的温度分布如何？且证明当 $f(x)$ 等于常数 u_0 时，恒有 $u(x,t)=u_0$.

解 设 t 时刻的温度为 $u(x,t)$，于是得到以下问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\\ u(x,0)=f(x).\end{cases}$$

注意到这里已经出现了与前文不同的边值条件，故需要重头开始使用分离变量法. 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，可得常微分方程

$$\begin{aligned}X''+\lambda X&=0,\\ T'+a^2\lambda T&=0.\end{aligned}$$

先考虑第一个常微分方程.$\lambda<0$ 时，通解为

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

由边值条件 $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$ 得 $X'(0)T(t)=X'(l)T(t)=0$. 为了使 $T(t)$ 非平凡，只能是 $X'(0)=X'(l)=0$. 对上述式子求导可得

$$X'(x)=c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x}-c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

将 $x=0,x=l$ 代入可得

$$\begin{cases}c_1\sqrt{-\lambda}-c_2\sqrt{-\lambda}=0,\\ c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0.\end{cases}$$

将 c_1,c_2 看作未知变量，可得为满足上述方程组只能是 $c_1=c_2=0$. 即 $X(x)$ 为平凡解，故 λ 不可以小于 0.

当 $\lambda=0$ 时，有

$$X''=0$$

积分两次可获得解

$$X(x)=c_1x+c_2$$

此时 $X'(x)=c_1$ 为常数，由边值条件可得 $c_1=0$，则 $X(x)=c_2$ 为一常数，可以使得 $u(x,t)$ 非平凡. 再将 $\lambda=0$ 代入 $T'+a^2\lambda T=0$ 得到 $T'(t)=0$ 可得 $T(t)=c$ 为一个常数. 故我们获得了第一个特解 $u_0(x,t)=C$ 为一个常数. 但至此我们无法确定 C 究竟是多少. 接下来我们利用 $X''+\lambda X=0$ 的通解来确定 $\lambda\geqslant 0$ 的时候的解的情况.

当 $\lambda>0$ 的时候，$X''+\lambda X=0$ 有通解

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

求一阶导可得

$$X'(x)=-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}x+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x.$$

由 $X'(0)$ 可得 $B=0$，于是

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x.$$

再利用 $X'(l)=0$，则

$$-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

这里 $A\neq 0$ 否则 $X(x)$ 为平凡解，所以有方程 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$，解得

$$\lambda=\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\quad k=1,2,\cdots$$

于是有

$$X_k(x)=A_k\cos\frac{k\pi x}{l},\quad k=1,2,\cdots$$

我们将 $\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2$ 带回到 $T'+a^2\lambda T=0$ 可得

$$T_k(t)=C_k\exp\left(-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t\right),\quad k=1,2,\cdots.$$

由叠加原理可得解

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k\exp\left(-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t\right)\cos\frac{k\pi x}{l},$$

其中 W_k 为常数. 由刚才的讨论，$\lambda=0$ 时，特解 $u_0(x,t)$ 为常数，而上述式子的相加项令 $k=0$ 正好为常数 W_0，于是我们将常数项直接并入得到最终通解的形式

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}W_k\exp\left(-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t\right)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

接下来利用初始条件确定系数 $W_k,k=0,1,\cdots$. 由 $u(x,0)=f(x)$ 可得

$$u(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}W_k\cos\frac{k\pi x}{l}=f(x).$$

不难验证 $\{\cos\frac{k\pi x}{l}\}_{k=0}^{\infty}$ 是正交函数系，于是在上述等式左右两边同乘 $\cos\dfrac{k\pi x}{l}$ 并同时积分可得

$$\int_0^l\left(\sum_{i=0}^{\infty}W_i\cos\frac{i\pi x}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=W_k\int_0^l\cos^2\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

于是，当 $k=0$ 时，

$$W_k \int_0^l \mathrm{d}x = \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x$$

得到 $W_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x$. 当 $k \neq 0$ 时则有

$$W_k = \frac{\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad k=1,2\cdots.$$

为了防止和通解中的 x 混淆，我们把上面积分中的变量 x 在通解中换为 ξ. 现在我们将得到的结果代回 W_k 得到得到通解

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi\cdot\exp\left(-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

□

相对于上述最一般的热传导方程，我们再考虑一种更特殊的情况，即没有第三类定解条件. 即问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

利用分离变量法可以得到通解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k \exp\left(-\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

其中 A_k 由 $\varphi(x)$ 的 Fourier 展开式决定

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

3.2 Cauchy 问题

尝试用 Fourier 级数来求出热传导方程 Cauchy 问题的解. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，它在 $[-l,l]$ 上有一阶连续导数，则在 $(-l,l)$ 中 $f(x)$ 可以展开为 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi l}{x}\right)$$

由正交性可以的得到

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

称上式等号右边为 $f(x)$ 的 **Fourier 积分**. 由此我们定义 Fourier 变换.

定义 3.2.1 (Fourier 变换) $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，它在 $[-l,l]$ 上有一阶连续导数，则称

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**，记为 $F[f]$. 同时称

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$$

为 $g(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换，记为 $F^{-1}[g]$. 当 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导且绝对可积的时候，它的 Fourier 变换存在，其逆等于 $f(x)$.

接下来给出 Fourier 变换的一些性质.

性质 3.2.1 Fourier 变换为线性变换，即对任意常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 以及函数 $f_1, f_2 \in C^2$ 有

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2].$$

定义 3.2.2 (卷积) 对给定的 $f_1(x), f_2(x)$，当 $x \in (-\infty, \infty)$ 时，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

存在，则称 $f(x)$ 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的**卷积**，记为 $f_1 * f_2$. 可以验证当 f_1, f_2 都绝对可积的时候有 $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

性质 3.2.2 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积的 Fourier 变换等于 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的 Fourier 变换的乘积，即

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2].$$

证明 由定义

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

对其做 Fourier 变换可以得到

$$F[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_2(t)\,\mathrm{d}t\right)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

由于 f_1, f_2 是绝对可积的，故可以改变积分次序，先对 x 做积分可得

$$F[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

令 $\xi = x - t$，由于 x 是从负无穷到正无穷的，故 ξ 也是从负无穷到正无穷，代入可得

$$F[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)e^{-i\lambda(\xi+t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)e^{i\lambda\xi}e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi$$

整理可得

$$F[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)e^{i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi = F[f_1]\cdot F[f_2].$$

□

性质 3.2.3 $f_1(x), f_2(x)$ 乘积的 Fourier 变换等于 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的 Fourier 变换的卷积乘以 $\frac{1}{2\pi}$. 即

$$F[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi}F[f_1] * F[f_2].$$

性质 3.2.4 如果 $f(x), f'(x)$ 都是可以进行 Fourier 变换的，而且当 $|x| \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$，则有

$$F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)].$$

证明 由定义以及分部积分法可得

$$\begin{aligned} F[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}f(x) = f(x)e^{i\lambda x}\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}e^{i\lambda x}. \end{aligned}$$

由于 $|x| \to \infty, f(x) \to 0$ 所以 $f(x)e^{i\lambda x}\big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$，故

$$f(x)e^{i\lambda x}\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}e^{i\lambda x} = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}e^{i\lambda x} = i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = i\lambda F[f(x)].$$

即 $F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)]$. □

性质 3.2.5 如果 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 都可以进行 Fourier 变换的，则

$$F[-ixf(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F[f(x)].$$

证明 由定义

$$F[-ixf(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F[f(x)].$$

□

接下来我们用 Fourier 变换来解传导方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

类似波动方程问题的求解，我们先考虑方程为齐次，但是初始条件非齐次的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

将 t 看作参数，对 $u(x,t)$ 关于 x 进行 Fourier 变换得到

$$\begin{aligned} F[u(x,t)] &= \tilde{u}(\lambda,t), \\ F[\varphi(u)] &= \tilde{\varphi}(\lambda). \end{aligned}$$

对 Cauchy 问题中的两个等式对 x 分别进行 Fourier 变换，利用**性质3.2.4**将 λ 视作参数，可以得到新的常微分方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t} = -a^2\lambda^2\tilde{u}, \\ \tilde{u}(\lambda_0) = \tilde{\lambda}. \end{cases}$$

它的解为

$$\tilde{u}(\lambda,t)=\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

函数 $e^{-a^2\lambda^2 t}$ 的 Fourier 逆变换为

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-a^2t\left(\lambda-\frac{ix}{2a^2t}\right)\right)\mathrm{d}\lambda\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

最后利用**性质3.2.2**可得齐次方程的 Cauchy 问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\mathrm{d}\xi$$

接下来利用 Duhamel 原理解决方程不齐次，初始条件齐次的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\\ u(x,0)=0.\end{cases}$$

由 Duhamel 原理，引入参量新时间参量 τ，引入新函数 $w=w(x,t;\tau)$，考虑齐次方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t>\tau,\\ w(x,\tau;\tau)=f(x,\tau).\end{cases}$$

为了使用齐次问题的解，我们也是令 $t'=t-\tau$，则 $t'\geqslant 0$，可以得到上述问题的解 $w=w(x,t;\tau)$. 则

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.$$

最后由叠加原理最终得到原 Cauchy 问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\mathrm{d}\xi$$

3.3 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

我们可以利用极值原理来证明解的唯一性与稳定性.

定理 3.3.1 (弱极值原理) 设 $u(x,t)$ 在矩形 $R_T=\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta, 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上连续，并且在矩阵内部满足热传导方程 $u_t=a^2\Delta u$，则它在矩形的两个侧边和底边上取到最大值和最小值.

定理 3.3.2 (强极值原理) 在上一个定理的条件下，如果矩形中存在一点能使得 $u(x,t)$ 达到最大值，则 $u(x,t)$ 为常值函数.

例 3.3.1 验证 $u(x,t)=1-x^2-2a^2t$ 是方程 $u_t=a^2u_{xx}$ 在区域 $[0,L]\times[0,T]$ 内的解，并找到 $u(x,t)$ 在此区域 (包含边界) 的最大值.

解 由于

$$u_t=-2a^2,$$
$$u_x=-2x\Rightarrow u_{xx}=-2$$

等式的左边恒等于右边，故 $u(x,t)$ 是方程在 $x \in [0,L], t \in [0,T]$ 上的解.

由弱极值原理，方程的最大值只可能出现在边界上，于是我们分别求出 $u(x,t)$ 在三条边界上的值. 当 $x=0, 0 \leqslant t \leqslant T$ 时，$u(0,t) = 1 - 2a^2t$ 当 $t=0$ 时取到该边上的最大值 1. 当 $x=L, 0 \leqslant t \leqslant T$ 时，$u(L,t) = 1 - L^2 - 2a^2t$，当 $t=0$ 时候该边最大值为 $1-L^2$. 当 $t=0, 0 \leqslant x \leqslant L$ 时 $u(x,0) = 1-x^2$，取到该边最大值为 1.

综上所述，$u(x,t)$ 的最大值在 $(0,0)$ 处取得为 1. □

接下来我们用极值原理证明热传导方程处边值问题的稳定性.

定理 3.3.3 (唯一性) *热传导方程的初边值问题*

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{tt} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(\alpha,t) = \mu_1(t), \quad u(\beta,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

在矩形 R_T 上的解是唯一的，而且连续的依赖边界上给出的初始条件和边界条件.

证明 假设 u_1, u_2 是上述方程的两个解，则差 $u = u_1 - u_2$ 在区域 R_T 内满足问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{tt} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u(\alpha,t) = 0, \quad u(\beta,t) = 0. \end{cases}$$

即该问题在矩形 R_T 的边界上只能为零值，由极值原理，$u \equiv 0$，即 $u_1 = u_2$. □

定理 3.3.4 (稳定性) *热传导方程的初边值问题*

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{tt} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(\alpha,t) = \mu_1(t), \quad u(\beta,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

在矩形 R_T 上的解是稳定的.

证明 不妨给初始条件增加一个扰动，即得到问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{tt} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x) + \varepsilon, \\ u(\alpha,t) = \mu_1(t), \quad u(\beta,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

设 u_1, u_2 分别是原问题和新问题的解，考虑其差 $u = u_1 - u_2$ 是问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{tt} = f(x,t), \\ u(x,0) = \varepsilon, \\ u(\alpha,t) = 0, \quad u(\beta,t) = 0. \end{cases}$$

的解，由极值原理，上述问题的解 u 的最大值只能出现在矩形 R_T 的边界上，即最大值为 ε，这说明了

$$|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$$

即解的扰动不会超过 ε，是稳定的. □

第四章　调和方程

4.1　方程与定解条件

定义 4.1.1 满足形式

$$\Delta u = 0$$

的方程称为**调和方程 (Laplace 方程)**. 如果是非齐次的

$$\Delta u = f(x, y, z)$$

则称为 Poisson 方程.

二维调和方程的极坐标形式为

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0.$$

如果去掉角动量算子，n 维的调和方程为

$$\Delta_n u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r = 0$$

其通解为

$$u(r) = C_1 \frac{1}{(2-n) r^{n-2}} + C_2.$$

同样给出三类定解条件. 第一类边值问题 (Dirichlet 问题)，为在空间 $\mathbb{R}^3$ 中的某一区域 Ω 的边界上给定了一个连续函数 g，调和方程的 $u(x, y, z)$ 满足在 Ω 内是调和函数，且在 $\overline{\Omega}$ 上连续，并在边界 Γ 上有

$$u|_{\Gamma} = g.$$

如果把上述条件改为：Ω 取为 Ω 的外部区域 Ω^c，函数 u 在 Γ 的外部区域调和 (不包括无穷远点)，且 $(x, y, z) \to \infty$ 时，$u \to 0$，并且它在 $\Omega^c \cup \Gamma$ 上连续，则称为 Dirichlet 外问题.

第二类边值问题 (Neumann 问题)，为边界法向量的方向导数的取值，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Gamma} = g.$$

注 4.1.1 变分原理暂时先不写

4.2 Green 公式及应用

Grenn 公式如下：对于一个在带有边界 Γ 的区域 Ω 上的向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 满足在 Ω 内连续可求偏导，在 Γ 上连续，则有

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\Omega=\iint_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

由上式可以得到第一 Green 公式

$$\iiint_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}\Omega+\iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\Omega=\iint_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为边界 Γ 上的法向量.

进一步如果 u,v 在 Ω 内是二阶连续可求偏导的，在 Γ 上是一阶连续可求偏导的，则将第一 Green 公式中的 u,v 位置交换，再相减便可得到第二 Green 公式

$$\iiint_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)=\iint_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

由上述三个 Green 公式，我们可以得到调和函数 u(即在 Ω 内有 $\Delta u=0$) 在有界区域 Ω 内一点 M_0 的积分表达式

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma\left(u(M)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S_M$$

其中 r_{M_0M} 为点 M 到 M_0 的距离. 其二维形式为

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left(u(M)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S_M$$

注 4.2.1 其实就是把第三 Green 公式中的 v 换成 $\dfrac{1}{r_{M_0M}}$ 前面再乘个球面参数 $-\dfrac{1}{4\pi}$. 该积分表达式利用边界表示出来区域内部的情况.

如果在区域 Ω 内，$\Delta u=F$，则上述积分表达式需要增加一项体积分得到

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma\left(u(M)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S_M-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Gamma\frac{F(M)}{r_{M_0M}}\,\mathrm{d}\Omega.$$

由第二 Green 公式可以得到如下定理

定理 4.2.1 设函数 u 在以区域 $\Omega\cup\Gamma$ 上有连续一阶偏导，在 Ω 内调和，则有

$$\iint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=0.$$

证明 取 $v\equiv 1$，于是 $\Delta v=0,\dfrac{\partial v}{\partial n}=0$ 代入第二 Green 公式得到

$$\iiint_\Omega(-\Delta u)\,\mathrm{d}\Omega=\iint_\Gamma\left(-\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=0.$$

□

同时注意到 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Gamma}=f$ 为 Neumann 问题的定解条件，故由上述定理，

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Gamma}=f\end{cases}$$

有解的必要条件是

$$\iint_{\Gamma} f\,\mathrm{d}S=0.$$

由调和函数的积分表达式，我们可以得到以下平均值定理.

定理 4.2.2 (平均值定理) 设函数 $u(M)$ 在区域 Ω 内调和，M_0 是 Ω 中任取一点，则对以 M_0 为球心 r 为半径完全落在 Ω 内的球面 Γ_r 有

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\Gamma_r} u\,\mathrm{d}S.$$

接下来给出调和函数的极值原理.

定理 4.2.3 (极值原理) 对不恒等于常数的调和函数 $u(x,y,z)$，在有界区域 Ω 内部的任意一点都不会达到它在 $\overline{\Omega}$ 的上界与下界. 它只会在其边界 Γ 上取到最大值与最小值.

调和方程的 Dirichlet 内问题与外问题的解也具有唯一性和稳定性.

第五章　二阶线性偏微分方程的分类

5.1　二阶线性方程的分类

用 (x, y) 记自变量，则一般的二阶线性方程可以表达为如下形式：

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = F,$$

其中 a, b, c, d, e, f 为常数，F 为自由量.

我们可以给出以下特征方程 (积分曲线)

$$a\,\mathrm{d}y^2 - 2b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}x^2 = 0.$$

可以分解为两个方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

我们令 $\Delta = b^2 - ac$ 则可以将上述二阶线性偏微分方程分为四类：

1. 如果 $\Delta > 0$，则称方程为**双曲型方程 (波动方程)**.
2. 如果 $\Delta = 0$，则称方程为**抛物型方程 (热传导方程)**.
3. 如果 $\Delta < 0$，则称方程为**椭圆型方程**.
4. 如果 Δ 与 0 相比会根据方程中的自变量的改变而改变，则称该方程为**混合型方程**.

例 5.1.1 弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad a \neq 0$$

其对应的的

$$\Delta = b^2 - ac = 0 - (-a^2) = a^2 > 0$$

所以为双曲型方程.

例 5.1.2 Tricomi 方程

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

其

$$\Delta = b^2 - ac = 0 - y = -y$$

当 $y < 0$ 时为双曲型方程，当 $y > 0$ 时为椭圆型方程，故为一个混合型方程.