数学分析

琉璃色岛屿 Dearee

2024 年 4 月 13 日

目录

第一部分

分析 I

第一章　数理逻辑与数学证明

本章主要介绍数理逻辑和数学证明. 我们会用一些符号来代替自然语言以达到严格清晰并且简洁的表达，但是只使用逻辑符号并不是一件好事，有时会带来阻碍. 使用数理逻辑可以进行严格的数学证明，可以帮助我们理解数学思维方式.

1.1　数学命题

任何一个数学论证都是通过一系列的**数学命题 (proposition)** 展开的，这些命题是关于各种各样的**数学对象 (数字、向量、函数等)** 以及它们的**关系 (加法、减法、积分等)** 的精确描述，这些数学对象既可以是**常量**也可以是**变量**. **命题要么为真 (true)，要么为假 (false).**

例 1.1.1 1+1=2 是真命题.1+1=3 是假命题.

但并不是谁便组合数学符号都是命题，比如

$$a + -123 = -4324$$

就不是命题. 因为它**定义不明确**或**不符合规则**.

每一个符合规则的命题要么为真要么为假，也就是有**排中律**，所以不可能出现同时为真或假的命题. 这就是**反证法 (opposite methods)** 的原理.

表达式和命题不同. 命题可以判断真假，而表达式不能. 但表达式由一系列数学符号组成，可以生成一个新的数学对象.

例 1.1.2

$$1 + 2$$

就是一个表达式，它可以生成一个新的数字.

注 1.1.1

1. 数学命题中可以用文字，但必须可以清晰表达意思.
2. **性质**也可以构成命题.
3. 关系符号有:=, $<$, $\in$ 等.

1.2　逻辑符号

先介绍最基本的**定义符号**

$$" := "$$

则

$$A := B$$

则是 A 被 B 定义.

1.2.1　且、或与复合命题

通过使用**逻辑连接词**，比如**和 (and)**、**或 (or)**、**非 (not)**、**如果 (if)**、**那么 (so)**、**当且仅当 (if and only if)......** 我们可以利用较简单的命题来构造复合命题.

定义 1.2.1 (合取 conjunctive) 设 X, Y 是两个命题，如果 X 和 Y 分别为真，则"X 和 Y" 为真. 这就是**合取 (conjunctive)**. 其中“和”用符号

$$\bigwedge$$

表示. 即

$$X \wedge Y.$$

注 1.2.1“和”与“且”是同一个意思，在英文里都为 and.

定义 1.2.2 (析取 disjunctive) 设 X, Y 是两个命题，如果 X 和 Y 中至少有一个为真，则“X 或 Y”为真. 这就是**析取 (disjunctive)**. 其中“或”用符号

$$\bigvee$$

表示. 即

$$X \vee Y.$$

注 1.2.2 注意这里的" 或" 指的是 X，Y 中只有一个为真，或者 X，Y 都为真的意思.

定义 1.2.3 (否定 negation)“命题 X 不是真的”被称为 X 的**否定 (negation)**. 同符号

$$\neg$$

表示. 即

$$\neg X$$

如果 X 是真的, 那么 $\neg(\neg X)$ 也是真的.

例 1.2.1　1.“x 是偶数且是非负数”的否定是“x 是奇数或负数”.

2. "$x \geqslant 1 \vee x \leqslant -1$" 的否定是"$x < 1 \wedge x > -1$".

不难发现，但对一个“且”的命题进行否定后，“且”就变成了“或”. 这是为什么呢？考虑两个命题 A，B 满足 $A \wedge B$ 为真. 则它们的否定是

$$\neg(A \wedge B).$$

这时，只要 A 或 B 中的至少一个不成立，这个否命题就会成立. 所以“且”就变成了“或”. 反过来也是一样.

1.2.2 蕴含关系

定义 1.2.4 (蕴含关系 implication) X,Y 是两个命题."若 X，则 Y"是从 X 到 Y 的**蕴含关系 (implication)**. 用符号表示为

$$A \Rightarrow B.$$

也可以称为 **X 推出 Y(X implies Y)**.

蕴含关系也可以写成"当 X 为真时，Y 为真"，或者"X 蕴含 Y"，或者"X 为真当且仅当 Y 为真". 更清晰的方式则给出真值表. 蕴含关系有真有假，那么它是一个命题.

X	Y	$X \Rightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	1

X 的真假决定了命题"若 X，则 Y"所表达的含义. 在 X 为真的前提下，Y 为真时，该命题就是真的. 当 Y 为假时，该命题就是假的. 但是如果 X 为假，不论 Y 是否为真，该命题都为真.

换言之，当 X 为真时，命题"若 X，则 Y"⇒Y 为真. 但 X 为假的时，命题"若 X，则 Y"无法判断 Y 的真假. 此时该命题总为真，但没什么用，因为无法传递任何信息.

注 1.2.3 可以将 $X \Rightarrow Y \coloneqq (\neg X) \vee Y$ 作为蕴含关系的定义.

例 1.2.2

1. 真命题蕴含真命题：" 如果 $2 = 2$，那么 $2^2 = 4$" 是真的.
2. 假命题蕴含假命题："如果 $3 = 2$，那么 $3^2 = 4$"是真的.
3. 假命题蕴含真命题: " 如果 $-2 = 2$，那么 $3^2 = 9$" 是真的.
4. 真命题不蕴含假命题:"如果 $2 + 2 = 4$, 那么 $4 + 4 = 2$"是假的.

再总结一下，当 X 为真时，"X 蕴含 Y 为真"为真必然推出 Y 为真. 但 X 为假时，"X 蕴含 Y"永远为真但无法推出 Y 是真的. 蕴含关系还具有传递性:$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$, 那么 $A \Rightarrow C$.

定义 1.2.5 (等价 equivalence) 设 X，Y 是两个命题，若

$$X \Rightarrow Y, Y \Rightarrow X$$

二者同时成立时，我们则称 A 与 B **等价 (equivalence)**.

注 1.2.4 英文:A is true **if and only if**B is true.

1.2.3 否命题、逆命题与逆否命题

定义 1.2.6 (逆命题 converse) 设 X，Y 是两个命题，"如果 X，那么 Y"的**逆命题**为"如果 Y，那么 X". 也就是 $Y \Rightarrow X$ 为 $X \Rightarrow Y$ 的逆命题.

定义 1.2.7 (否命题 inverse) 设 X，Y 是两个命题,“如果 X 为真，Y 为真”，那么它的**否命题**为“如果 X 为假，那么 Y 为假”.

$$X \Rightarrow Y \text{ 的否命题是 } (\neg X) \Rightarrow (\neg Y)$$

例 1.2.3 如果 $x = 2$，那么 $x^2 = 4$ 不能推出 $x \neq 2$，那么 $x^2 \neq 4$. 因为有-2 的存在.

可以看出，一个真蕴含关系的否命题不一定是一个真蕴含关系.

定义 1.2.8 (逆否命题 contrapositive) 设 X，Y 为两个命题，则“如果 X，那么 Y”的**逆否命题**为“如果 Y 为假，那么 X 为假”. 而且这两个命题有相同的真值.

$$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X).$$

也就是说，如果知道 X 蕴含着一个假的命题，那么 X 自身必定为假，这就是**反证法**或**归谬法**的原理. 如果想要证明 X 为假，那么假设它是真的，然后证明它蕴含一个假的命题.

1.3 变量、全称量词与存在量词

变量

如果我们一直说“2+2=4”,“我的手表是白色的”这样不含变量的命题会显得很无聊，很拘束. 所以要引入变量的概念. 说白了，变量就是符号 n,x 之类的. 它表示某种特定类型的数学对象，比如向量，矩阵等. 基本上所有的变量都会被明确一个数学对象的类型，单给出一个符号是没有意义的，也不符合规则. 比如在没有说明 x，y 是实数之前”x+y=y+x” 这个命题不一定成立.

如果在确定了变量类型之后，我们可以不指定一个变量的具体数学对象，这种变量被称为**自由变量**，比如 x 是一个自然数，命题“$x + 1 = 2$”中的 x 就是一个自由变量. 如果直接” 设 $x = 1$”，类似的做法出现，则变量 x 就被**声明**或确定下来了. 此时称变量 x 为**约束变量**.

1.3.1 全称量词

设 P(X) 是一个关于自由变量 x 的命题 (性质). 命题

“P(X) 对所有类型为 T 的 x 均为真”

说明给定一个类型为 T 的自由变量 x，无论 x 是什么命题 (性质)P(X) 都为真. 我们可以用符号”∀” 来表示“任意、对于所有”(for all). 那么上面的命题就可以写成:

∀ 类型为 T 的 x，P(X).

也就是说，如果找到一个 x，P(X) 为假，那么这个命题就是假的.

例 1.3.1 命题”$\forall 2 < x < 3$，$6 < 3x < 9$” 是真的.

1.3.2 存在量词

命题“P(X)”对某个类型为 T 的 x 为真“. 也就是说至少存在一个 x，使得 P(X) 为真. 这里的**“至少存在一个 (at least)”**或者**“存在 (exists)”**，就可以用符号”∃” 表示. 用符号表示为

$$\exists \text{类型为 T 的 x，P(X)}$$

如果对于所有的 x，P(X) 为假，那么这个命题才会是假的.

例 1.3.2 证明 $x^2+2x-8=0$ 对某个数 x 成立. 我们只需找到一个数 x 满足该关系即可，比如 x=-4.

1.3.3 嵌套量词构成的命题

我们可以把两个或者多个量词嵌套在一起. 考虑命题

“对于每个正数 x，存在一个正数 y，使得 $y^2=x$”.

这个命题表达了：对于所有的正数 x, 命题

“存在一个正数 y 使得 $y^2=x$.”

再换言之，对于任意的正数 x，我们总能找到 x 的一个正的平方根. 所以，该命题就是表明，每个正数都存在一个正的平方根.

显然，否定一个存在命题会产生一个全称命题，否定一个全称命题会产生一个存在命题.

然后特别要注意的是，一个命题中两个量词的位置一般不能交换. 比如

例 1.3.3

1. $\forall n, \exists m, m>n.$
2. $\exists m, \forall n, m>n.$

第一个则是，先给出一个 m 后，都能找到一个比 n 大的 m. 而后者却是给出一个 m 后，不论你 n 怎么取，m 都是大于 n 的. 二者意思完全不同. 但是如果“对于每一个整数 m 每一个整数 n，m 大于 n.”这样两个量词都是全称量词 (存在量词) 的就没有关系.

最后说明一下这些符号的优先级别，从高到底依次是:$\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

1.4 数学证明结构

本节会利用许多命题来说明证明的结构有哪些.

1.4.1 直接证明

直接证明就是通常假设一个前提，然后朝着结论的方向努力展开论证.

命题 1.4.1 A⇒B.

证明 设 A 为真，因为 A 为真，所以 C 为真，因为 C 为真所以 D 为真，因为 D 为真所以 B 为真. □

命题 1.4.2

$$x = \pi \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2.$$

证明 1. 方法一（逻辑倒序）：

因为 $x = \pi$，则 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$. 所以 $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1$. 则原式等号成立.

2. 方法二（逻辑正序）：

要证明 $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2$，只要证明 $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. 又因为 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1$. 所以只要证明 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$. 这从条件可直接得出. □

通过对比上述证明方法我们发现前者是从条件出发，后者从目标出发. 后者更符合我们的大脑思考问题的方式，所以我们可以在大脑中利用方法二的顺序想证明，最后写出来的时候再按照方法一来写，因为方法一的证明显然更为精炼.

1.4.2 顺逆结合证明

我们还是证明命题1.4.1. 为了证明 B, 只需证明 D 就足够了, 现在来证明 D. 由假设可得 A，从而得到 C，又因为 C 蕴含 D，所以 D 为真.

1.4.3 反证法

命题 1.4.3

$$\forall A, \exists B, \text{性质}\, P(X).$$

证明 利用反证法，假设性质 P(X) 为假，得到前面与前面条件矛盾的结果，由排中律得到 P(X) 一定为真. □

第二章　集合论

2.1　集合的基本概念

集合是数学中最基本的单位之一，此后所有的定义和定理都离不开集合。为此我们要先学集合的相关知识，以便我们后续再在集合论的基础上展开各种数学上的“操作”.

集合的概念在生活中是常用的. 我们常常会为某一类东西分类，比如我们会把水果放在一起，把有相同颜色的乒乓球放在一起. 这些分类的过程其实就是在定义集合的过程. 在数学上也是如此，比如我们以前学的自然数，就可以把它们放在一起，形成一个集合，叫做“自然数集”.

那我们总是需要给集合一个具有普适性的描述：

1. 集合可以用任意**不同的**事物组成.
2. 集合是可以被准确描述，也就是**唯一确定的**.
3. 任何一个可以被**准确描述的性质**都可以定义出一个符合该性质的集合.

以上三点描述是由 Cantor 给出的，可以被当作集合论的定义，但又不算一个特别严谨的定义. 按照上面的说法，一个集合必须满足以下条件:

1. 一个集合必须由**确定的**元素组成. 比如我说长得好看的人构成一个集合，那么这样无法定义出一个集合，因为"美"不是一个确定的标准.
2. 集合中的元素必须是不同的. 也就是一个集合中，不会出现两个相同的元素，如果有，留下一个就行.
3. 现在给出一个性质 P，那么就可以定义一个集合，里面的元素都满足性质 P.

现在说明集合的写法，我们一般用大写字母表示集合，比如集合 A. 用小写字母表示集合中的元素，比如元素 x. 可以用花括号来表示集合 A:

$$A = \{a, b, c\}.$$

也可以用元素满足的性质来表示:

$$B = \{x | x \text{ 是偶数 }\} \text{ 或者 } B = \{x : x \text{ 是偶数 }\}.$$

竖线或冒号前面表示的是集合的元素，而后面则是说明集合里面的元素会满足的性质.

2.1.1 基本关系

符号作为数学的语言，我们也需要用符号来描述几种集合间的关系.

首先，若一个元素 x 是集合 A 中的元素，那么就用 $x \in A$ 来记这种关系. 反之，不属于就记作 $x \notin A$. 这个是非常简单的.

然后是包含与被包含关系:

定义 2.1.1 $A \subseteq B \coloneqq \forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

这个定义的意思是，任意一个元素属于 A，那么它就属于 B. 也就是所有属于 A 的元素都属于 B. 也就是 A 包含于 B. 也可以说 A 是 B 的子集. 举个例子:

1. 所有黄色乒乓球都是乒乓球.

在这个例子中，我们把黄色的乒乓球看为一个集合，那么这个集合是**包含于**“乒乓球”这个集合的.

定义 2.1.2 (真子集 proper subset) $A \subsetneq B \coloneqq (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \land (\exists y \in B \Rightarrow y \notin B)$.

也就是说，可以找到一个 B 中的元素，它不属于 A. 这个也是我们判断一个集合是否为另一个子集的真子集的方法. 举个非常简单的例子:

1. 证明 $A = \{1, 2, 3\}$ 是 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的真子集.

证明 只需找到属于 B 但不属于 A 的元素，即 $\exists 4, 5 \in B \land 4, 5 \notin A$. □

再次说明，两个集合间 $\subseteq$ 和 $\subsetneq$ 关系分别被称为**包含 (inclusion)** 关系和**真包含 (proper subset)** 关系.

如果两个集合 A，B 中的所有元素都相同的话，就说集合 A 与 B 相等，记为 A=B. 常用的证明方法为

$$(A \subseteq B) \land (B \subseteq A) \Rightarrow A = B.$$

2.2 集合的基本运算

现在给定两个集合 A，B. 将 A 中的元素和 B 中的元素通通都拿出来，组成一个新的集合 C（当然要去掉重复的元素）. 那么 C 就是集合 A 和 B 的**并 (union)** 或**并集 (union set)**，并记作 $A \bigcup B$.

定义 2.2.1 (并集) $A \bigcup B \coloneqq \{x | x \in A \bigvee x \in B\}$

注 2.2.1 特别要说明这里“或”的含义：它表明 $A \bigcup B$ 是由所有属于 A 或者属于 B，或者既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合. 再举个例子:x 满足性质 P 或 Q 是指 x 满足 P 或 Q 其中一个性质，或者两个性质同时满足. 那么在数学中，想表达只满足其中一个的，必须加以特别说明.

集合的**交 (intersection)** 或**交集**就是取 A，B 的公共部分.

定义 2.2.2 (交集) $A \bigcap B \coloneqq \{x | x \in A \bigwedge x \in B\}$

这里会出现一种情况，如果 A 与 B 没有公共部分交集会变成什么？所以我们需要定义一个没有元素的集合，也就是**空集 (empty set)**. 记号为 $A\bigcap B=\varnothing$. 也表明 A 与 B **无交 (disjoint)**. 立即可以得出

$$
\begin{aligned}
A\cup\varnothing &= A\\
A\cap\varnothing &= \varnothing
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

集合 A，B 的**差 (difference)** 或**差集**，是由 A 中所有不属于 B 的元素组成，记作 A-B.

定义 2.2.3 (差集) $A-B\coloneqq\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$.

最后一种叫集合的**补 (complement)** 或**补集**.

定义 2.2.4 (补集) 设一个全集 U，其中 A 满足 $A\subseteq U$. 那么 A 的补集就是由 U 中不属于 A 的元素组成的，记为 $\overline{A}$.
$\overline{A}\coloneqq\{x|x\notin A\wedge x\in U\}$.

2.2.1 集合的两种实用运算定律

对于任意集合 A,B,C 有以下几个公式.

分配律

$$
\begin{aligned}
A\cap(B\cup C)&=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\
A\cup(B\cap C)&=(A\cup B)\cap(A\cup C)
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

证明 只证明第一个，第二个同理.

一方面: 设 $x\in A\cap(B\cup C)$. 那么 $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\cup C$. 这说明 x 一定属于 A，但也可能属于 B 或 C. 于是 x 属于 B 时，$x\in A\cap B$，x 属于 C 时，$x\in A\cap C$. x 同时属于 B 和 C 时，也就同时满足上述两种情况. 所以 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 即 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

DeMorgan 定律

设 A 为全集. 那么 $B,C\subseteq A$

$$
\begin{aligned}
A-(B\cup C)&=(A-B)\cap(A-C)\\
A-(B\cap C)&=(A-B)\cup(A-C)
\end{aligned}
\tag{2.2.3}
$$

证明 也是只证明第一个，第二个同理.

一方面: 设 $x\in A-(B\cup C)$. 所以 $x\in A-(B\cup C)\Rightarrow x\notin(B\cup C)\Rightarrow(x\in A-B)\wedge(x\in A-C)\Rightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$. 于是 $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cap(A-C)$.

另一方面：设 $x\in(A-B)\cap(A-C)$. 所以 $(A-B)\cap(A-C)\Rightarrow x\notin B\wedge x\notin C\Rightarrow x\notin(B\cup C)\Rightarrow x\in A-(B\cup C)$. 于是 $A-(B\cup C)\supseteq(A-B)\cap(A-C)$. □

2.3 集合的族

设 A 是一个集合，那么对于 $\{A\}$ 这样将集合作为元素的集合称为**族 (collection)**. 并用 $\mathcal{A}$ 这样的符号来表示. 我们也常将“某些集合的组”称为**集族 (collection of sets)**.

例 2.3.1 用扑克牌来举例，一张扑克牌为 a，一副扑克牌为 A，则 $\mathcal{A}$ 可以表示为世界上所有整副扑克牌的族.

2.4 集合的任意交与并

定义 2.4.1 1. 给定一个集族 $\mathcal{A}$. 其中元素的**并 (union)** 定义为:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x|\exists A \in \mathcal{A}(x \in A)\}.$$

2. $\mathcal{A}$ 中的**交 (intersection)** 定义为:

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x|\forall A \in \mathcal{A}(x \in A)\}.$$

当 $\mathcal{A}$ 中有一个元素为空集时，这些定义没有问题. 但如果 $\mathcal{A}$ 是空族时，任何元素 x 都不满足上面“并”的定义. 于是我们特别约定

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \varnothing. \tag{2.4.1}$$

如果任意 x 满足上面“交”的性质，那么这个 x 会在哪个集合中呢？于是我们就可以规定一个 X

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = X. \tag{2.4.2}$$

注 2.4.1 不是所有数学家的遵循这个约定. 为了避免麻烦我们不再定义空族的交.

2.5 笛卡尔积

定义 2.5.1 (序偶) 元素 x,y 组成 (x,y) 称为**序偶**或**对偶**或**有序偶对**.

注 2.5.1 这里的写法说明 (x,y) 中的 x，y 是有顺序的. 就好像坐标，顺序换了位置就变了.

定义 2.5.2 (Cartesian 积) 给定集合 A，B. 其**笛卡尔积 (Cartesian product)** 定义为

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}.$$

例 2.5.1 $A = \{1,2\}, B = \{a,b\}$. 则

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}.$$

也可以看出，Cartesian 积没有交换律.

2.6 集合的势

我们常常需要讨论集合中元素的个数. 对于有限集，我们去数出元素的个数也许并不困难，但如果这个集合有无限个元素呢？则需要我们采取新的方法.

定义 2.6.1 (有限集) 集合 X 可以与集合 $\{1,2,3,...,n\}, n \in \mathbb{N}^+$ 构成一个双射，那么集合 X 是**有限集 (finite set)**. 反之则是**无限集 (infinite set)**.

例 2.6.1 证明：自然数集 $\mathbb{N}$ 是无限集.

证明 利用反证法，设自然数集是有限集. 那么由于自然数集是非空的，于是存在一个双射

$$\varphi : \mathbb{N} \to \{1,2,3,\dots n\}, n \in \mathbb{N}^+. \tag{2.6.1}$$

然后取出 $\mathbb{N}$ 中 $\{1,2,3,\dots,n\}$ 的部分并定义

$$\phi \coloneqq \varphi|\{1,2,3,\dots,n\}. \tag{2.6.2}$$

于是，ϕ 就是一个到自身的双射. 但由于 $\varphi(n+1) \in 1,2,3,\dots,n$，则必有

$$\exists m \in \{1,2,3,\dots,n\}, \varphi(m) = \phi(m) = \varphi(n+1). \tag{2.6.3}$$

那么 ϕ 便不再是一个双射了，得到矛盾，证毕. □

定义 2.6.2 (集合的等势) 如果两个集合 X 和 Y 之间能够找到一个双射，则称两个集合是**等势 (equinumerous)** 的. 并用符号 $X \cong Y$ 表示.

注 2.6.1 对于集合 X，我们用 $card\,X$ 来表示它的元素的个数.

对于两个无限集，如果能在它们之间找到一个双射，就表明了两个集合中的元素是一样多的.

定义 2.6.3 (可数集) 集合 X 可以找到一个与自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个双射，那么 X 被称为**可数集 (countable set)**

2.7 公理化集合论

在此给出集合论公理，但在建立分析学的过程中不是必须的. 该部分内容有兴趣可以读一读，初学者可以跳过.

公理 2.7.1 (外延公理) 集合 A 与集合 B 相等，当且仅当它们所具有的各元素是相同的.

这说明我们只关心“集合”这一对象是否有给定元素，而不关系其它性质. 那么要证明两个集合 A,B 相等，只需要证明 $\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

公理 2.7.2 (分离公理) 如果 A 是一个集合，然后给出一个性质 P，那么

$$B = \{x \in A | P(x)\}$$

总存在.

换言之，对于任意一个集合 A，然后给定任意性质 P，都可以从 A 中找到符合性质 P 的元素，使之组成一个性质集合 B.

例 2.7.1 由分离公理可知，任何集合 X 都具有空子集 $\varnothing_X = \{x \in X | x \neq x\}$. 再由外延公理可知 $\varnothing_X = \varnothing_Y$ 对于任意集合 X，Y 总成立，因为它们的元素都一样. 也就是说，空集是唯一的，故可以用一个统一记号 $\varnothing$ 来表示.

公理 2.7.3 (并集公理) 对于任何集合族 M，存在一个集合 $\bigcup M$，它的元素恰好是族 M 中元素的元素.

因此，集合的并集是一个集合，并且

$$x \in \cup M \Leftrightarrow \exists X(X \in M \wedge x \in X).$$

有了并集公理和分离公理，我们能够把族 M 的交集定义为集合

$$\cap M \coloneqq \{x \in \cup M | \forall X(X \in M \Rightarrow x \in X)\}.$$

公理 2.7.4 (配对公理) 对于任何集合 X 和 Y，存在一个集族 Z，其元素为 X 和 Y.

集合 Z 可以记为 $\{X, Y\}$，并称它为集合 X 与 Y 的**无序偶**. 如果 $X = Y$，则集族只由一个元素组成.

我们可以将序偶定义为 $(X, Y) \coloneqq \{\{X, X\}, \{X, Y\}\}$. 其实就是给无序偶添加了一个代表“有序”的标志. 然后就可以由序偶引入集合的直积了.

公理 2.7.5 (幂集公理) 对于任意集合 X，其由它的所有子集构成的集合是存在的，并将这个集合称为**幂集 (power set)**. 并用符号 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 表示.

前五个公理会限制新集合形成的可能性. 比如由 Cantor 定理 $(card\, X < card\, \mathcal{P}(X))$ 可知“一切集合的集合”是不存在的，也就是 Russell 悖论的关键所在.

定义 2.7.1 (后继集) 任意集合 X，它的**后继集** $X^+ \coloneqq X \cup \{X\}$.

定义 2.7.2 (归纳集) 设集合 A，如果

$$(1)\ \varnothing \in A.$$
$$(2)\ \forall A \in X, A^+ \in X.$$

那么 A 就被称为**归纳集**.

公理 2.7.6 (无穷公理) 归纳集存在.

有了无穷公理后，我们可以根据前四个公理建立自然数集 $\mathbb{N}_0$ 的标准模型 (冯 · 诺伊曼方案): 把 $\mathbb{N}_0$ 定义为所有归纳集的交集，即最小归纳集. $\mathbb{N}_0$ 的元素是集合

$$\varnothing,\ \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\},\ \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \varnothing^+\},\ \cdots, \tag{2.7.1}$$

它们就是我们用符号 $1, 2, 3, \cdots$ 表示并称之为**自然数**的模型.

公理 2.7.7 (替换公理) 设 $F(x, y)$ 是以下命题：对于集合 X 中的任何元素 x_0，存在唯一的对象 y_0，使得 $F(x_0, y_0)$ 成立. 那么满足“存在 $x \in X$, 使得$F(x, y)$”的条件的 y 可以组成一个集合

$$\{y | \exists x \in X, F(x, y)\}.$$

建立分析学时不会用到这个公理.

前七个公理即著名的 E.F.F.Zermelo-A.Fraenkel 公理系统.

接下来补充选择公理，它独立于前七个公理，在分析中常用.

公理 2.7.8 (选择公理) 任意一个由非空集合组成的集合族 $\mathcal{X}$，存在集合 C，使得任意 $X \in \mathcal{X}$，集合 $X \cap C$ 只有一个元素.

换言之，恰好可以从每个集合中选出一个代表元组成集合 C.

选择公理即著名的 Zermelo 公理，曾引起数学家们的激烈讨论.

2.8 函数

定义 2.8.1 (指派法则) 设两个集合 C,D，其中 c,d 分别是两个集合的元素. 如果 $A \times B$ 的一个子集 r，满足

$$(c, d) \in r \wedge (c, d') \in r \Rightarrow (d = d').$$

那么这个子集 r 就是**指派法则 (rule of assignment)**.

定义 2.8.2

1. 由序偶的第一个元素组成的集合 A 称为 r 的**定义域 (domain)**，它是 C 的子集.

$$\text{r 的定义域} = \{c | \exists d \in D \text{ 使得 } (c, d) \in r\}.$$

2. 由序偶的第二个元素组成的集合称为 f 的**像集 (image set)** 或**像**. 它是 D 的子集.

$$\text{r 的像} = \{d | \exists c \in C \text{ 使得 } (c, d) \in r\}.$$

所以，一旦给定了指派法则，定义域和像完全确定.

定义 2.8.3 (函数) **函数 (function)**f 是由一个指派法则 r，连同一个包含 r 的像集 B. 法则 r 的定义域为 A，就是函数的定义域，r 的像集就是函数的像集 (可以写作 $im(f)$). 集合 B 为函数的**值域 (range)**. 函数的符号有以下几种写法

$$f : A \to B,$$
$$A \xrightarrow{f} B,$$
$$x \mapsto f(x).$$

注意：**映射 (maps)，对应，射**都是函数的同义语.

注 2.8.1 我们写函数用"$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$" 来表示定义域值域和指派法则. 若两个函数 f 和 g 相等则写作 f=g, 表明它们的定义域，值域和指派方式完全相同.

定义 2.8.4 (函数的收缩与扩张) 给定一个函数 $f : X \to Y$ 若有一个集合 $A \subset X$ 满足 $g : A \to Y$ 就称 g 为函数 f 的**收缩 (restriction)**. 写作

$$f|A : X \to Y.$$

那么 f 就是 g 的**扩张 (extension)**.

例 2.8.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得 $f(x) = x^2 + 1$. 也可以写成 $x \mapsto x^2 + 1$.

2.8.1　函数的分类

给定一个函数 $f: X \to Y$. 接下来我们分别定义单射，双射，满射.

定义 2.8.5 (单射) 若

$$\forall x_1, x_2 \in X. \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

则称 f 是**单射 (injective)**.

换言之，X 中不同的元素在 f 的像下不同.

定义 2.8.6 (满射)

$$im(f) = Y$$

则称函数 f 为**满射 (surjective)**. 也就是 Y 中所有的元素都能在 X 中找到至少一个元素与它对应.

定义 2.8.7 (双射) 函数 f 既是单射又是满射，则称 f 为**满射 (bijective)**. 也就是 X 中的元素和 Y 中的元素**一一对应 (one-to-one)**.

定义 2.8.8 (逆映射)

$$f^{-1}: Y \to X.$$

称为函数 f 的**逆映射 (inverse function)**

2.8.2　函数的合成

定义 2.8.9 函数 $f: X \to V, g: V \to Y$ 为两个函数. 则函数 $g(f(x))$ 为函数 g 和 f 的**合成 (Composition)**. 记作

$$g \circ f: X \to Y,$$
$$X \xrightarrow{g \circ f} Y.$$

都可.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \\
& V \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.8.1}$$

定义 2.8.10 (恒等映射) 函数 $id_X: X \to X, x \mapsto x$ 称为**恒等映射 (identity function)**.

定理 2.8.1 (结合律) 给定三个满足合成条件的函数 $f: A \to B, g: B \to C, h: B \to D$. 则

$$f(gh) = (fg)h.$$

证明 对于 $x \in A$

$$(f(gh))(x) = f((gh)(x)) = f(g(h(x))) = (fg)(h(x)) = ((fg)h)(x).$$

注 2.8.2 很容易验证，函数的合成没有交换律.

定理 2.8.2 设一个函数 $f:X\to Y$. 若说该函数是双射，等价于说可以找到一个函数 $g:Y\to X$, 满足 $g\circ f=id_X$ 且 $f\circ g=id_Y$. 并且函数 g 是唯一且由 f 决定的.

证明 1. 因为函数 f 是双射说明 f 既是单射又是满射，说明对于每一个 $x\in X$ 都有唯一的一个 $y\in Y$ 与之对应. 那么就可以定义一个 g，对于每一个 $y\in Y, g(y)$ 为原来的 x. 于是就得到了 $g\circ f=id_X$. 那么 $f\circ g=id_Y$ 也是显然的.

2. 另一方面，假设现在已经找到了 g 满足 $f\circ g=id_Y$. 立即可以得出函数 f 是一个满射. 再设 $x_1,x_2\in X$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$. 由
$$x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$$
可以得到 $x_1=x_2$. 说明 f 是一个单射. 于是我们就证明了 f 是一个双射.

3. 最后证明 g 由 f 决定. 设一个映射 $h:Y\to X$ 也满足 $h\circ f=id_X$ 以及 $f\circ h=id_Y$. 由
$$g=g\circ idY=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=idX\circ h=h.$$
可以得到函数 g 与 h 完全相同说明函数 g 是唯一且完全由 f 决定. □

2.8.3 反函数

从定理2.8.2中我们发现，函数 g 是从 $Y\to X$ 的一个函数. 于是我们可以给出如下定义.

定义 2.8.11 (反函数) 设 $f:X\to Y$ 是双射. 那么关于 f **反函数 (inverse function)** f^{-1} 是一个唯一的函数 $f^{-1}:Y\to X$. 并且满足
$$f\circ f^{-1}=id_Y\text{且}f^{-1}\circ f=id_X.$$

命题 2.8.1 设 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to V$ 是双射. 那么 $g\circ f:X\to V$ 是双射并且
$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

证明 因为
$$f^{-1}\circ g^{-1}\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ f)\circ f=f^{-1}\circ id_Y\circ f=f^{-1}\circ f=id_X.$$
这就说明了 $g\circ f$ 是 $f^{-1}\circ g^{-1}$ 的反函数. □

2.9 关系

为了描述一个集合中两个元素的关系，我们需要定义集合上的“关系”.

定义 2.9.1 (关系) 设一个集合 X. 若有 $R\subset X\times X$，那么就称 R 为 X 上的一个**关系 (relation)**. 我们通常将 $(x,y)\in R$ 写为 xRy.

如果一个 X 上的关系 R 对于所有的 x 都满足 xRx，也就是说，R 包含了一个 **diagonal**
$$\Delta_X:=\{(x,x)|x\in X\}.$$
那么就称关系 R 是**自反的 (reflexive)**.

如果满足

$$(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz).$$

那么 R 就是**传递的 (transitive)**.

如果满足

$$xRy \Rightarrow yRx.$$

那么 R 是**对称的 (symmetric)**.

2.9.1 等价关系与商集

定义 2.9.2 (等价关系) 如果 X 上的关系 R 满足自反, 传递, 对称. 那么就称 R 是 X 上的一个**等价关系 (equivalence relation)**. 并且用符号 $\backsim$ 来代替 R.

对于满足某种等价关系的元素，我们构造一个包含这些元素的集合，也就是等价类.

定义 2.9.3 (等价类) 给定一个集合 X，与元素 x 满足等价关系 的所有元素的集合

$$[X] = \{x' | x \backsim x'\}.$$

称为包含 x 的**等价类 (equivalence class)**. 任意选取该等价类的元素 $x_i \in [x]$ 都可以被称为等价类 $[x]$ 的**代表元 (representative)**.

有了等价类之后，我们可以继续构造包含等价类的集合.

定义 2.9.4 (划分) 如果有一个子集 $\mathcal{A} \subset P(X) \backslash \{\varnothing\}$ 满足:
对任意的 $x \in X$，只有一个唯一的 $A \in \mathcal{A}$ 满足 $x \in A$. 则称 $\mathcal{A}$ 是 X 上的一个 **划分 (partition)**.
也就是说 $\mathcal{A}$ 是 X 上的一个“不交并”，即所有“无交”的 X 的子集构成的一个集合，并且有

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X.$$

命题 2.9.1 由关系 $\backsim$ 确定的等价类的集合是 X 上的一个**划分 (partition)**，也就是 X 上的一个“不交并”.

证明 设 $x \in [X]$，于是有

$$X = \bigcup_{x \in X} [x].$$

利用反证法，设 $[x]_1 \cap [x]_2 \neq \varnothing$，且 $x \in [x]_1 \cap [x]_2$. 于是就有

$$x \backsim x_1 \wedge x \backsim x_2.$$

由传递性可知

$$x_1 \backsim x_2.$$

于是得到

$$[x_1] = [x_2].$$

这就意味着等价类互不相交. □

2.9.2 商集与商映射

定义 2.9.5 (商集) 给定集合 X，X 上由等价关系 确定的划分

$$X/\backsim = \{[x] | x \in X\}.$$

称为 X 上的**商集 (quotient set)**.

显然，商集是 X 的幂集 $P(X)$ 的一个子集.

定义 2.9.6 (商映射) 满射

$$p : X \to X/\backsim, \quad x \mapsto [x].$$

称为 X 到 $X/\backsim$ 上的**商映射 (quotient function)**.

设 X, Y 是两个集合且有映射 $f : X \to Y$. 现有等价关系 $\backsim$，满足

$$\forall X, x' \in X, x \backsim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

那么对应的等价类 $[x] = \{x' | f(x') = f(x)\}$ 就被称为 $f(x)$ 的**纤维**.

映射 $f : X \to Y$ 可以诱导出一个映射

$$\overline{f} : X/\backsim \to Y, \quad [x] \mapsto f(x). \tag{2.9.1}$$

由于

$$[x] = [x]' \Leftrightarrow f(x) = f(x'),$$

所以给定 f，$(\overline{f}p)(x) = f(x)$ 不依赖与代表元 x 的选取，这时我们说 $\overline{f}$ 是**良定义 (well defined)** 的.

然后，函数合成

$$f = \overline{f} \circ p$$

可以由以下交换图描述:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & X/\backsim \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.9.2}$$

2.9.3 序关系

定义 2.9.7 (偏序与偏序集) 1. 一个 X 上的关系 $\leqslant$ 被称为 X 上的**偏序关系 (partial order)**，如果它满足反身，传递和反对称

$$(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x) \Rightarrow x = y.$$

2. 如果 $\leqslant$ 是 X 上的偏序，那么可以用对偶符号 $(X, \leqslant)$ 来表示这个被称为**偏序集**的集合.

定义 2.9.8 (全序与全序集) 1. $\forall x, y \in X, (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$. 则称 $\leqslant$ 为一个 X 上的**全序关系 (total order)**. 并且用对偶符号 $(X, \leqslant)$ 来表示这个**全序集 (totally order set)**.

注 2.9.1 给出以下有用的等价关系:

1. $x \geqslant y \Leftrightarrow y \leqslant x$,

2. $x < y \Leftrightarrow (x \leqslant y) \wedge (x \neq y)$,

3. $x > y \Leftrightarrow y < x$.

如果 X 是一个全序集，那么，对于任意两个元素 $x, y \in X$ 都满足以下三个关系中的一个，

$$x < y, x = y, x > y.$$

那么如果 X 是一个偏序集，则存在两个元素 $x, y \in X$，它们之间无法用上述关系比较, 也就是 $x \leqslant y$或$x \geqslant y$ 都不成立.

例 2.9.1 1. 设一个偏序集 $(X, \leqslant)$. 并且有 Y 是 X 的子集. 那么我们在 Y 上找到同样的关系 $\leqslant$ 也是一个偏序关系.

2. $(\mathcal{P}(X), \subset)$ 是一个偏序集，并且序关系 $\subset$ 被称为 $\mathcal{P}(X)$ **包含序关系 (inclusion order)**. 总的来说集合 $(\mathcal{P}(X), \subset)$ 都不是全序集.

3. 给定一个集合 X 还给出 $(Y, \leqslant)$ 是一个偏序集. 然后

$$f \leqslant g := f(x) \leqslant g(x), \quad x \in X.$$

定义了 X 到 Y 上的映射的偏序. 这个由函数组成的集合一般不是全序集，即使 Y 是一个全序集.

定义 2.9.9 (上界与下界) 设 $(X, \leqslant)$ 是一个偏序集，并且 A 是 X 的一个非空子集. 一个元素 $s \in X$ 被称为 A 的**上界 (upper bound)**，如果

$$\forall a \in A, a \leqslant s.$$

同理，一个元素 $i \in X$ 被称为 A 的**下界 (lower bound)**，如果

$$\forall a \in A, a \geqslant s.$$

如果集合 A 有上界，则称 A 是**上有界集 (bounded above)** 同样的我们可以定义**下有界集 (bounded below)**. 最后，如果 A 既有上界又有下界，则称 A 为**有界集 (bounded)**.

一个元素 $m \in X$，如果 $m \in A$ 且 m 是 A 的上界，则称 m 为 A 的**最大值 (maximum)**，记为 $max(A)$. 同理我们也可以定义**最小值 (minimum)**,$min(A)$. 最后我们注意到，集合 A 最多只有一个最大值和最小值，可以用反证法证明.

定义 2.9.10 (上确界与下确界) A 是 X 的一个非空子集，且有上界与下界. 那么最小的上界被称为**上确界 (supremum)** 或**最小上界 (least upper bound)**，最大的下界被称为**下确界 (infimum)** 或**最大下界 (greatest lower bound)**. 用符号可定义为

$$\sup(A) := \min\{s \in X | \forall a \in A, a \leqslant s\},$$
$$\inf(A) := \max\{i \in X | \forall a \in A, a \geqslant i\}.$$

一般来说，上确界和下确界不会在集合 A 内. 如果上确界或者下确界在集合 A 中，那么这个集合的最大值和最小值分别与上确界和下确界相等. 或者我们可以这么定义.

定义 2.9.11

$$\sup(A) := s\text{满足}(\forall x \in A(x \leqslant s)) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in X(s - \varepsilon < x' \leqslant s)).$$

第三章　实数

3.1　实数公理

我们定义，满足以下实数公理的集合被称为**实数集 (real numbers set)**，并记为 $\mathbb{R}$.

公理 3.1.1 (加法公理) 定义加法运算

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

其中 $\mathbb{R}$ 中的任意两元素 x, y 的序偶 $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 对应与 $x + y$. 并称为“x加y”. 并且该运算满足以下公理:

1. 存**中性元素 (identify element)** $0 \in \mathbb{R}$，对于任意 $x \in \mathbb{R}$，

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2. 对于任意 $x \in \mathbb{R}$，**相反元素** $(-x)$ 存在，满足

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. 运算 $+$ 满足结合律，即对于任何 $\mathbb{R}$ 中的元素 x, y, z，满足

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

4. 运算 $+$ 满足交换律，即对于任何 $\mathbb{R}$ 中的元素 x, y，满足

$$x + y = y + x.$$

一般地，若一个集合 G 及其运算满足上述前 3 个条件，则称这个集合连同运算是一个**群 (group)**，并记为 $(G, +)$. 如果这个群还满足第四个条件，则称这个群为**交换群**或 **Abel 群**.

公理 3.1.2 (乘法公理) 定义乘法运算

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

其中 $\mathbb{R}$ 中的任意两元素 x, y 的序偶 $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 对应于 $x \cdot y$. 并称为“x 乘 y”. 并且该运算满足以下公理:

1. 存在**中性元素 (unity)**$1 \in \mathbb{R} \backslash 0$，对于任意的 $x \in R$，

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

2. 对于 $\mathbb{R}$ 中的任意元素 x，总存在一个**逆元素 (inverse)**x^{-1}，使得

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. 运算满足结合律，即 $\mathbb{R}$ 中的任意三个元素 x, y, z 满足

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

4. 运算满足交换律，即 $\mathbb{R}$ 中的任意两个元素 x, y 满足

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

加法与乘法相结合也有一个公理，即分配律.

公理 3.1.3 对于 $\mathbb{R}$ 中的任意三个元素 x, y, z，满足

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

定义完加法和乘法公理后，我们开始定义 $\mathbb{R}$ 上的序关系. 关系 $\leqslant$ 被称为“小于等于”. 并且 $x \leqslant y$ 与 $y \geqslant x$ 两种写法是等价的.

公理 3.1.4 (序公理) 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant x.$

2. 对于 $\mathbb{R}$ 中的任意三个元素 $x, y, z.$

$$(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z.$$

3. 对于 $\mathbb{R}$ 中的任意两个元素 $x, y.$

$$(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x) \Rightarrow x = y.$$

4. 对于 $\mathbb{R}$ 中任意两个大于等于 0 的元素 x, y，有

$$x \cdot y \geqslant 0.$$

5. 对于 $\mathbb{R}$ 中任意三个元素 x, y, z 有

$$x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z.$$

不难看出，实数集是一个全序集.

3.2　实数公理的推论

3.2.1　加法的推论

定理 3.2.1 实数集中的中性元素 0 是唯一的.

证明 设有 $\mathbb{R}$ 中有两个中性元素 $0_1, 0_2$. 利用中性元素的定义以及实数的结合论，我们有

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2. \tag{3.2.1}$$

于是我们就证明了中性元素 0 是唯一的. □

定理 3.2.2 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists!(-x) \in \mathbb{R}$.

证明 设 $\mathbb{R}$ 中元素 x_1, x_2 都为 $x \in \mathbb{R}$ 的相反元素.

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2. \tag{3.2.2}$$

于是我们就得到了 $x_1 = x_2$. □

接下来我们看一下加法解的唯一性. 不过在此之前，我们先声明等号公理.

公理 3.2.1 (等号公理) 1. 给定任何对象 $x, x = x$.

2. 给定同一类的两个对象 x, y. 有 $x = y \Leftrightarrow y = x$.

3. 给定三个同一类的对象 x, y, z 有 $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow x = z$.

4. 给定同一类的两个对象 x, y. 若 $x = y$，那么一切函数或运算 f，

$$f(x) = f(y).$$

并且对于性质 P，有

$$P(x) \Leftrightarrow P(y).$$

这就保证了我们可以在等号两边同时加上一个相同的元素.

定理 3.2.3 对于 $\mathbb{R}$ 中的元素 a, x, b. 方程 $a + x = b$ 有唯一解 $x = a + (-b)$.（我们把 $(a - b) \coloneqq (a + (-b))$.）

证明 两边同时加上一个 a 的相反元素 $-a$，得到

$$(a + x) + (-a) = b + (-a). \tag{3.2.3}$$

再利用加法的交换律和结合律

$$(a + x) + (-a) = (x + a) + (-a) = x + (a + (-a)) = x + 0 = x. \tag{3.2.4}$$

于是我们得到了

$$x = b + (-a). \tag{3.2.5}$$

又因为 $(-a)$ 是唯一的，于是 x 也是唯一的. □

3.2.2 乘法的推论

乘法的前几个定理与加法的类似，只罗列不证明.

定理 3.2.4 1. 有唯一的中性元素 $1 \in \mathbb{R}\backslash 0$.

2. 对于任意的元素 $x \in \mathbb{R}$ 有唯一的逆元素 x^{-1}.

3. 对于 $\mathbb{R}$ 中的元素 a, x, b 方程 $a \cdot x = b$ 有唯一解 $x = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$.

定理 3.2.5 $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$

证明 我们利用分配律.

$$x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0. \tag{3.2.6}$$

然后我们两边同时加上 $(-(x \cdot 0))$. 再利用结合律以及相反数的定义.

$$\begin{aligned} & x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)) \\ & \Leftrightarrow 0 = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)) \\ & \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-(x \cdot 0))) \\ & \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

又由于交换律 0 也等于 $0 \cdot x$. □

引理 3.2.1 对于 $\mathbb{R}$ 中的元素 x, y.

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

证明 x 与 y 都为 0 显然为 0. 若 $x \neq 0$.

$$xy = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x^{-1} = 0. \tag{3.2.8}$$

同理 $y \neq 0$ 也是如此. □

引理 3.2.2 若 $x \in \mathbb{R} \backslash 0$，则 $x^{-1} \neq 0$.

证明 如果 $x^{-1} = 0$. 那么

$$x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0. \tag{3.2.9}$$

与 $x \cdot x^{-1} = 1$ 的公理矛盾. □

定理 3.2.6 $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = (-x).$

证明 利用解的唯一性以及分配律.

$$\begin{aligned} & (-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1)+1) \cdot X = 0 \cdot x = 0 \\ & \Rightarrow (-1) \cdot x + x = 0 \qquad \Rightarrow (-1) \cdot x = (-x). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

由于解是唯一的，那么 $(-1) \cdot x$ 唯一等于 $-x$. □

定理 3.2.7 $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot (-x) = x.$

证明 同样利用解的唯一性以及分配律.

$$\begin{aligned} & (-1) \cdot (-x) + (-x) = (-1) \cdot (-x) + 1 \cdot (-x) = (1 + (-1)) \cdot (-x) = 0 \cdot (-x) = 0 \\ & \Rightarrow (-1) \cdot (-x) + (-x) = 0 \\ & \Rightarrow (-1) \cdot (-x) = x. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

由于解的唯一性，$(-1)(-x)$ 唯一等于 x. □

定理 3.2.8 对于任意 $\mathbb{R}$ 中的元素 x, y，有

$$(-x)(-y) = xy.$$

证明 由交换律和结合律

$$(-x)(-y) = ((-1)x)(-y) = (x(-1))(-y) = x((-1)(-y)) = xy. \tag{3.2.12}$$

3.2.3 序公理的推论

定义 3.2.1 (严格不等式) 关系 $x < y \coloneqq (x \leqslant y) \wedge (x \neq y)$. 并读作“x 小于 y”.

定理 3.2.9 实数集中的元素 x, y.

$$x < y, x = y, x > y$$

三者中恰好只有一个成立.

证明 若同时成立两个会得到矛盾. 比如我们设第一个和第三个同时成立.

$$x < y \Leftrightarrow x < y \wedge x \neq y \Rightarrow x \neq y. \tag{3.2.13}$$

与 $x = y$ 矛盾. □

定理 3.2.10 实数集中的 x, y, z 有

1. $(x < y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow x < z$.
2. $(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z$.

证明 只证明第一个，第二个同理.

$$\begin{aligned}
&(x < y) \wedge (y \leqslant z) \\
&\Leftrightarrow (x \leqslant y) \wedge (x \neq y) \wedge (y \leqslant z) \\
&\Rightarrow (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

如果 $x = z$. 则有

$$z < y \wedge y \leqslant z \Leftrightarrow (z \leqslant y) \wedge (z \neq y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow y = z. \tag{3.2.15}$$

与 $z \neq y$ 矛盾，故 $x < z$. □

再将加法乘法与序公理结合，我们可以得到以下结论.

定理 3.2.11 对于实数集中的任何数 x, y, z, w

1. $x < y \Rightarrow (x + z) < (y + z)$.
2. $(0 < x) \Rightarrow (-x < 0)$.
3. $(x \leqslant y) \wedge (z \leqslant w) \Rightarrow (x + z \leqslant y + w)$.
4. $(x \leqslant y) \wedge (z < w) \Rightarrow (x + z < y + w)$.

证明 1.

$$(x < y) \Rightarrow (x \leqslant y) \Rightarrow (x+z) \leqslant (y+z). \tag{3.2.16}$$

设 $(x+z) = (y+z)$. 于是有

$$x = (y+z) - z = y + (z-z) = y. \tag{3.2.17}$$

得到与 $x < y$ 的矛盾.
2.
假设 $(-x) > 0$.

$$x > 0 \wedge (-x) > 0 \Rightarrow x + (-x) = 0 > 0. \tag{3.2.18}$$

得到了矛盾.
3.

$$x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z. \tag{3.2.19}$$

同理

$$z \leqslant w \Rightarrow y + z \leqslant w + z. \tag{3.2.20}$$

最后由传递性可得结论.
4.
在 3 的基础上，只需证明 $x + z \neq y + w$. 如果 $x + z = y + w$. 当 $x = y$ 时，$z = w$ 与 $z \leqslant w$ 矛盾. □

定理 3.2.12 实数集中的数 x, y, z, 有

1. $0 < x \wedge 0 < y \Rightarrow 0 < xy$.
2. $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow 0 < xy$.
3. $x < 0 \wedge 0 < y \Rightarrow xy < 0$.
4. $x < y \wedge 0 < z \Rightarrow xz < yz$.
5. $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow yz < xz$.

注 3.2.1 上面左侧的严格不等号都改为非严格不等号后右边的严格不等号也要改为非严格不等号.

证明 1.

$$0 < x \wedge 0 < y \Rightarrow 0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant xy. \tag{3.2.21}$$

若 $xy = 0$. 那么 x 或 y 为 0. 与 $xy \leqslant 0$ 矛盾.
2.
将 $x < 0$ 变为 $-x > 0$ 然后与 1. 证法一样.
3.

$$\begin{aligned}
&x < 0 \wedge 0 < y \Rightarrow 0 < (-x) \wedge 0 < y \\
&\Rightarrow 0 < (-x)y \Rightarrow 0 < ((-1)x)y \Rightarrow 0 < (-1)(xy) \\
&\Rightarrow 0 < -xy \Rightarrow xy < 0.
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

4.

$$\begin{aligned}
&x < y \wedge 0 < z \Rightarrow 0 < y - x \wedge 0 < z \\
&\Rightarrow 0 < z(y - z) \\
&\Rightarrow 0 < zy - zx \\
&\Rightarrow zx < yz.
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

5.
将 $z < 0$ 转换为 $(-z) > 0$ 然后和第四个证法一样. □

定理 3.2.13 $0 < 1$.

证明 首先 $1 \in \mathbb{R}\backslash 0 \Rightarrow 1 \neq 0$. 若 $1 < 0$,

$$(1 < 0 \wedge 1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow 0 < 1. \tag{3.2.24}$$

得到矛盾. 并且 $1 \neq 0$ 故 $0 < 1$. □

定理 3.2.14 对于实数中的元素 x, y 有:

1. $0 < x \Rightarrow 0 < x^{-1}$.
2. $(0 < x \wedge x < y) \Rightarrow (0 < y^{-1} \wedge y^{-1} < x^{-1})$.

证明 1.
有前面的证明得 $x^{-1} \neq 0$. 假设 $x^{-1} < 0$.

$$(x^{-1} < 0 \wedge 0 < x) \Rightarrow x \cdot x^{-1} < 0 \Rightarrow 1 < 0. \tag{3.2.25}$$

得到矛盾.
2.
由于前面的证明可得 $x^{-1} > 0 \wedge y^{-1} > 0$ 再将 $x < y$ 的两边同乘 $x^{-1}y^{-1}$. 得到

$$\begin{aligned}
&x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) \\
&= (x \cdot x^{-1})y^{-1} < y(y^{-1}x^{-1}) = (y \cdot y^{-1})x^{-1} \\
&\Rightarrow 1 \cdot y^{-1} < 1 \cdot x^{-1} \\
&\Rightarrow y^{-1} < x^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

于是就得到了结论. □

3.3 实数集完备性的一些定理

定理 3.3.1 (上确界原理) 对于任意非空集合 $X \subset \mathbb{R}$，若 X 有上界，则 X 有唯一的上确界 $c \in \mathbb{R}$.

证明 $Y \coloneqq \{c \in \mathbb{R} | \forall x \in X (x \leqslant c)\}$. 于是 Y 就是 X 的上界的集合，由于 X 又上界，所以 Y 不可能是空集. 现证明集合 Y 的最小值 s 是唯一的. 若 Y 中有 s_1, s_2 都为 Y 的最小值. 那么因为 s_1 是最小值有

$$s_1 \leqslant s_2. \tag{3.3.1}$$

又因为 s_2 也是最小值，有

$$s_2 \leqslant s_1. \tag{3.3.2}$$

于是 $s_1 = s_2$. 说明数集的最小元素是唯一的. 再根据完备性公理，由于

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, x \leqslant y.$$

于是必然存在 $c \in \mathbb{R}$

$$x \leqslant c \leqslant y. \tag{3.3.3}$$

那么这个实数 c 是 x 的上确界，并且是唯一的. □

定理 3.3.2 (Archimedes 原理) 如果 h 是一个固定的正数, 对于任何实数 x, 可以找到唯一的整数 k, 使得 $(k-1)h \leqslant x < kh$.

证明 设集合 $E \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} | \frac{x}{h} < n\}$. 先证明该集合有最小值. 由下确界原理可知 E 有唯一的下确界 $i \in \mathbb{R}$. 再由下确界的定义可知可以找到 $n \in E, i \leqslant n < i + 1$. 其实这个 n 就是 E 中的最小元素，否则若存在 $e \in E, e < n$ 使得 $e \leqslant n - 1 < i$.

然后再设 k 为 E 的最小元素. 于是有 $\frac{x}{h} < k$. 并且有 $k-1 \leqslant \frac{x}{h}$，否则 E 的最小元素会变成 $k-1$. 于是得到 $k-1 \leqslant \frac{x}{h} < k$. 又因为 h 是正数，两边同乘 h 得到原不等式，并且由集合最小元素的唯一性得到 k 是唯一的. □

定义 3.3.1 (集套列) 形如

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$$

即

$$\forall n \in \mathbb{N} (K_n \supset K_{n+1})$$

的序列称为**集合套**.
特别地，若这些集合都是闭区间，则称为**闭区间套**.

定理 3.3.3 (Cauchy-Cantor 定理) 对于任意的闭区间套 I_i，总存在一个实数 c，它属于所有的闭区间. 特别地

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists I_k, |I_k| < \varepsilon) \Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R},$$

这个实数 c 属于所有的闭区间.

证明 先证明存在性.
设对于任意的自然数 n, m. 有 $n > m$. 与之对应闭区间套中的两个闭区间 $I_n = [a_n, b_n], I_m = [a_m, b_m]$. 总有

$$a_m \leqslant b_n. \tag{3.3.4}$$

否则若 $a_m > b_n$，则有

$$a_n \leqslant b_n < a_m \leqslant b_m. \tag{3.3.5}$$

则说明了

$$I_n \cap I_m = \varnothing.$$

与它们是闭区间套中的区间矛盾.
然后设集合

$$A \coloneqq \{a_i | i \in \mathbb{N}\}, \quad B \coloneqq \{b_i | i \in \mathbb{N}\}. \tag{3.3.6}$$

由完备性公理可知

$$\forall a_i, \forall b_i, \exists c \in \mathbb{R}, a_i \leqslant c \leqslant b_i. \tag{3.3.7}$$

也就是存在实数 c，它属于所有的闭区间.

证明特殊情况的唯一性. 若存在两个实数 c_1, c_2 属于所有的闭区间，设 $c_1 < c_2$ 成立. 则对于所有的闭区间 I_i 有

$$a_i \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant b_i. \tag{3.3.8}$$

于是闭区间的长度 $|I_i| \geqslant |c_2 - c_1| > 0$ 于是闭区间的长度不能取任意小，得矛盾. □

定义 3.3.2 一个集合族 $S = \{X_i\}$，满足 $Y \in \bigcup\limits_{x_i \in S X_i}$. 则称 S 是 Y 的一个**覆盖 (cover)**.

注 3.3.1 该定义其实等价于一个闭区间 $I = [a, b]$，$\forall p \in I, \exists X_k \in S, p \in X_k$.

定理 3.3.4 (Borel-Lebesgue 原理) 在覆盖一个闭区间的任意开区间族中都有覆盖该闭区间的有限子族.

注 3.3.2 该定理又称**有限覆盖定理**.

证明 设一个闭区间 $W = [a, b]$ 不能被有限个开区间覆盖，并且设集合族 $S = \{T_i\}$ 为覆盖这个闭区间的集合族. 那么将这个闭区间等分为两个子闭区间 $W_1 = [a, \frac{a+b}{2}], W_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$. 则其中至少有一个不能被有限覆盖，我们设 W_2 不能被有限覆盖.

再将 W_3 分为 W_4, W_5 则其中又至少有一个不能被有限覆盖，我们设 W_5 不能被有限覆盖. 重复充分多次后，子闭区间的长度可以任意小，并且 n 次操作后闭区间的长度为 $\frac{|b-a|}{2^n}$.
再由 Cauchy-Contor 定理的特殊情况可知，存在唯一的 $c \in R$ 属于这个闭区间套中所有的闭区间. 因为 $c \in I_1$ 所以 S 中总存在一个开区间 $T_k = (\alpha, \beta)$ 包含实数 c. 于是 $\alpha < c < \beta$. 然后设 $\varepsilon \min\{|c - \alpha|, |\beta - c|\}$. 由于序列中总能找到长度比 ε 小的闭区间 I_j. 但是 $I_j \subset T_k = (\alpha, \beta)$□ 被子族 $\{T_k\}$ 覆盖，得到矛盾. □

其实闭区间就是一个**紧集 (compact set)**, 它的“任意开区间族都能找到覆盖该闭区间的有限子族”这一性质则被称为集合的 □□$(compact)$.

定义 3.3.3 (邻域) 我们称一个包含点 $x \in \mathbb{R}$ 的开区间为**点 x 的邻域 (neighbourhood).** 特别的，称开区间 $(x - \delta, x + \delta)$ 为**点 x 的 δ 邻域**.

定义 3.3.4 (极限点) 若一个点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域都包含了集合 $X \subset \mathbb{R}$ 的一个无穷子集，即包含了该集合的“无穷个点”，则称 p 为集合 X 的**极限点**.

其实以上定于等价于：

若一个点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域都存在一个异于点 p 的点 $x \in X$，则称该点为实数集 X 的极限点.

显然第一个定义可以推出第二个定义，那么我们从第二个定义推出第一个定义. 先设点 p 的一个邻域为 (a_1, b_1)，那么这里存在一个异于点 p 的点 $x_1 \in \mathbb{R}$. 然后再取 (a_1, x_1) 作为 p 的第二个邻域. 再由定义可以找到的二个点 x_2，于是又可以取 (a_1, x_2) 作为 p 的第三个邻域. 将以上步骤重复无穷多次，并且初始的那个邻域是可以任意取得，于是它和第一个定义就等价了.

注 3.3.3 特别指出，一个实数集得极限点不一定要在该实数集内.

定理 3.3.5 (Bolzano-Weierstrass 定理) 任何实数集的有界子集都至少存在一个极限点.

证明 首先指出闭区间 $[a, b]$ 中的所有点都是开区间 (a, b) 的极限点. 那么不论是开区间还是闭区间，我们都只需证对应的闭区间有极限点即可.

设实数集 X 是满足定理条件的集合且闭区间 $I = [a, b] \supset X$. 假设闭区间 $I = [a, b]$ 没有极限点. 也就是里面所有的点根本不包含 X 中的点，或者只包含有限个 X 中的点. 然后集合 I 中所有的点的邻域可以组成一个集族 $S = U(x)$. 于是这个集合族就覆盖了闭区间 I，也同时覆盖了集合 X. 由有限覆盖定理可知，族 S 中可以找到有限个开区间 $U(x_1), U(x_2), \cdots, U(x_n)$ 将 I 覆盖住. 并且每个开区间中的点的个数都是有限的. 有限个开区间加上有限个开区间中的点说明了闭区间 I 中的点的个数是有限的，也就是 X 中的点的个数也是有限的. 得到了矛盾. □

第四章　极限论

4.1　数列极限的定义

定义 4.1.1 (序列) 函数 $f:\mathbb{N}\to Y$ 被称为**序列**. 并记 $f(n)$ 为 x_n. 特别地，函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 被称为**数列**. 我们可以用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 或 $\{x_n\}$ 来记一个数列.

序列极限的定义主要有两个，一个是 $\varepsilon-N$ 定义，还有一个就是几何定义.

定义 4.1.2 给定数列 $\{x_n\}$，A 是数列的极限，如果

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N(|x_n-A|)<\varepsilon.$$

也就是给定任意小的一个数 ε，都可以找到一个自然数 N，当指标 n 大于 N 时，x_n 到 A 的距离小于 ε.

并记 $\lim\limits_{n\to\infty}=A$，或者 $n\to\infty$ 时，$x_n\to A$. 然后可以给出符号定义:

$$(\lim_{n\to\infty}=A):=\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N(|x_n-A|)<\varepsilon. \tag{4.1.1}$$

这个定义非常重要，下面我们看几个例子.

例 4.1.1 证明数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 的极限是 0.

证明

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1,\forall n>N,|x_n-0|<\varepsilon. \tag{4.1.2}$$

注 4.1.1 $[x]$ 是取 x 的整数部分.

例 4.1.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

证明

$$\forall ve>0,\exists N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1,\forall n>N,|\frac{n+1}{n}-1|>\varepsilon. \tag{4.1.3}$$

例 4.1.3 证明如果 $|q|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}=0$.

证明 也就是对于任意的 $\varepsilon>0$，都要找到自然数 N，满足 $n>N,|\frac{1}{q^n}-0|<\varepsilon$. 只需解不等式

$$|\frac{1}{q^n}-0|<\varepsilon. \tag{4.1.4}$$

$$\begin{aligned}&|\frac{1}{q^n}-0|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|q|^n}<\varepsilon \Rightarrow |q|^n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n\ln|q|>\ln\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln|q|}\\ &\Rightarrow n>\log_{|q|}\frac{1}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

于是只需 $N=[\log_{|q|}\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 即可. □

由 $\varepsilon-N$ 定义可以看出，

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N(A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon). \tag{4.1.5}$$

这就引出了序列极限的几何定义.

定义 4.1.3 称数 A 为序列 $\{x_n\}$ 的极限，如果对于数 A 的任何邻域 $V(A)$，总能找到一个自然数 N，使得 $n>N$ 时的所有项 x_n 都在邻域 $V(A)$ 内.

于是我们可以说，如果一个序列有极限，则称该序列是**收敛的**，若该序列没有极限，则称该序列是**发散的**.

我们给出一个序列没有极限的命题.

命题 4.1.1 若一个序列 $\{x_n\}$ 没有极限. 则

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n>N(|x_n-A|\geqslant\varepsilon). \tag{4.1.6}$$

或者

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists V(A),\forall N\in\mathbb{N},\exists n>N(x_n\notin V(A)). \tag{4.1.7}$$

例 4.1.4 证明第 n 项为 $x_n=n^{(-1)^n}(n\in\mathbb{N})$ 的数列是发散的.

证明 先写几项，

$$1,2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},6,\frac{1}{7},8\cdots$$

不难发现，数列满足

$$x_n=\begin{cases}2k, & n=2k(k\in\mathbb{N})\\ \frac{1}{2k-1}, & n=2k-1(k\in\mathbb{N})\end{cases}. \tag{4.1.8}$$

从 $n=2k$ 的项来看.

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon=1,\forall N\in\mathbb{N},\exists n=2k>\max\{A+1,N\}. \tag{4.1.9}$$

这时

$$|2k-A|>|\max\{A+1,N\}-1|\geqslant 1. \tag{4.1.10}$$

我们还可以用几何定义来证明. 由于序列中的所有数都是正的，所以该序列的极限不可能是小于 0 的.

$A>0$ 时，当 $\varepsilon=\frac{A}{2}$ 时，考察 A 的 ε 邻域. 注意到 $n=2k-1$ 时 $x_n=\frac{1}{2k-1}$. 并且 A 的 ve 邻域 $V_\varepsilon(A)=(\frac{A}{2},\frac{3A}{2})$. 所以只需 $\frac{1}{2k-1}<\frac{A}{2}$ 时，所对应的项就都在邻域的外面了. 即只需 $n=2k-1>\max\{[\frac{2}{A}],N\}$ 时，$x_n\notin V_\varepsilon(A)$. □

例 4.1.5 证明第 n 项为 $x_n = (-1)^n (n \in \mathbb{N})$ 的数列是发散的.

证明 $\forall A \in \mathbb{R}$，只需让 $\varepsilon = |1 - |A|| > 0$，然后对于任意自然数 N，$n = 2k \geqslant N$ 时，总有 $|1 - A| \geqslant |1 - |A||$.

我们也还可以利用几何定义来证明: 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 于是 $V_\varepsilon(A) = (A + \frac{1}{2}, A - \frac{1}{2})$. 这时若 (-1) 在该邻域内则 $A + \frac{1}{2} - (-1) < 1$ 即 $A < -\frac{1}{2}$. 这时 $1 - (A + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - A > 1$. 即点 1 总不在邻域内. 同理，若 1 总在邻域内我们可以得到 (-1) 总不在邻域内. 于是该数列的确是发散的. □

从上面的例子可以看出，我们要证明一个序列是发散的，一般几何法会更加容易.

4.2 数列极限的性质

定义 4.2.1 若数列 $\{x_n\}$ 的每一项都为 $x_n = A$ 则称该数列为**常数列**. 如果一个数列 $\{y_n\}$ 满足存在一个数 $N \in \mathbb{N}$ 使得所有 $n > N$ 的项 $y_n = B$ 则称该薯类为**最终常数列**.

定义 4.2.2 一个数列 $\{x_n\}$，若存在一个数 M 对于所有的项 $|x_n| < M$ 则称该数列为**有界数列**.

定理 4.2.1 最终常数列收敛.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 最终等于 A. 则对于 A 的任意邻域 $V(A)$，都有一个自然数 N，当 $n > N$ 时 $x_n \in V(A)$. 故该数列收敛于 A. □

定理 4.2.2 一个收敛数列的极限的任意邻域之外只有该数列所有项中的有限项.

证明 直接得自定义. □

定理 4.2.3 一个收敛数列只有一个极限.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 同时收敛于 A_1, A_2. 取 $\delta = \frac{|A_1 - A_2|}{2}$. 则存在两个自然数 N', N'' 使得 $n > \max\{N', N''\}$ 时，$(x_n \in V_\delta(A_1) \wedge (x_n \in V_\delta(A_2))$. 然而 $V_\delta(A_1) \cap V_\delta(A_2) = \varnothing$. 故矛盾. □

定理 4.2.4 若该一个数列收敛，则这个数列一定是有界数列.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\varepsilon = 1$ 则有

$$|x_n| < |A| + 1. \tag{4.2.1}$$

又因为在邻域外只有有限项，则只需取 $M \geqslant \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_k|, |A| + 1\}$ 即可. □

定理 4.2.5 (极限的运算) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. 则有

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = A + B$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}, (B \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}(y_n \neq 0))$.

证明 1. 只需要证，$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n>N(|(x_n+y_n)-(A+B)|<\varepsilon)$. 这只需

$$|(x_n+y_n)-(A+B)|=|(x_n-A)+(y_n-B)| \leqslant |x_n-A|+|y_n-B|. \tag{4.2.2}$$

只需

$$\exists N', \exists N'', N=\max\{N', N''\}.$$

然后 $\forall n>N(|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}.|y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2})$ 即可.

2. 也是只需证

$$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n>N(|x_n y_n-AB|<\varepsilon). \tag{4.2.3}$$

然后我们引进一个记号 $\Delta(x_n) \coloneqq |x_n-A|$ 称为 x_n 的**误差 (difference)**.

由于

$$|x_n y_n-AB|=|y_n(x_n-A)+A(y_n-B)| \leqslant |y_n|\Delta(x_n)+|A|\Delta(y_n). \tag{4.2.4}$$

然后我们只要找到对于任意的 $\forall \varepsilon>0$ 分别有 N', N'' 使得 $n>\max\{N', N''\}$ 时分别有

$$|y_n|\Delta(x_n)<\frac{\varepsilon}{2}, |A|\Delta(y_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

只需

$$\forall \varepsilon>0, \exists N'' \in \mathbb{N}, \forall n>N''\left(\Delta(y_n)<\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(1+|A|)}\right\}\right).$$

这样子一方面 $|y_n|<1+|B|$ 成立，另一方面 $|y_n|<\frac{\varepsilon}{2(1+|A|)}$ 也成立. 于是只需

$$\forall \varepsilon>0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n>N\left(\Delta(x_n)<\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}\right).$$

这样就满足了 $\forall \varepsilon>0, \exists N=\max\{N', N''\}, \forall n>N\left(|x_n y_n-AB|=|y_n(x_n-A)+A(y_n-B)| \leqslant |y_n|\Delta(x_n)+|A|\Delta(y_n)<\varepsilon\right)$.

3. 同样还是要证明

$$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n>N\left(\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|<\varepsilon\right) \tag{4.2.5}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{(x_n-A)y_n-(y_n-B)x_n}{y_n B}\right|=\left|\frac{(x_n-A)y_n-(y_n-B)x_n}{y_n^2} \times \frac{y_n}{B}\right| \\
&\leqslant \frac{\Delta(x_n)|y_n|+\Delta(y_n)|x_n|}{y_n^2} \times\left|\frac{y_n}{B}\right|.
\end{aligned}$$

然后再引进一个计算数学上的记号**相对误差** $\delta(y_n) \coloneqq \frac{\Delta(y_n)}{|y_n|}$. 于是让

$$\left|\frac{y_n}{B}=\frac{y_n}{B-y_n+y_n}\right|=\left|\frac{1}{\frac{B-y_n}{y_n}+1}\right|=\frac{1}{\delta(y_n)+1}.$$

由 $\delta(y_n)+1>1-\delta(y_n)$ 可得

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right| \leqslant \frac{\Delta(x_n)|y_n|+\Delta(y_n)|x_n|}{y_n^2} \times \frac{1}{1-\delta(y_n)}.$$

然后只要想办法让

$$\frac{\Delta(x_n)|y_n|+\Delta(y_n)|x_n|}{y_n^2}<\frac{\varepsilon}{2}, 0<\frac{1}{1-\delta(y_n)}<2$$

就可以了. 只需

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0,\\
&\exists N',\forall n>N'\left(\Delta(x_n)<\min\left\{1,\frac{\varepsilon|B|}{8}\right\}\right),\\
&\exists N'',\forall n>N''\left(\Delta(y_n)<\min\left\{\frac{4}{|B|},\frac{\varepsilon B^2}{16(1+|A|)}\right\}\right).
\end{aligned}$$

于是当 $n>\max\{N',N''\}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&|x_n|<1+|A|,\\
&|B|-|y_n|<\frac{|B|}{4}\Rightarrow|y_n|>\frac{3|B|}{4}>\frac{|B|}{2},\\
&0<\delta(y_n)=\frac{\Delta(y_n)}{|y_n|}<\frac{\frac{|B|}{4}}{\frac{|B|}{2}}<\frac{1}{2}\Rightarrow 1<\frac{1}{1-\delta(y_n)}<2.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(x_n)|y_n|+\Delta(y_n)|x_n|}{y_n^2}&=\frac{\Delta(x_n)|y_n|}{y_n^2}+\frac{\Delta(y_n)|x_n|}{y_n^2}\\
&<(1+|A|)\frac{4}{B^2}\frac{\varepsilon B^2}{16(1+|A|)}+\frac{2}{|B|}\frac{\varepsilon|B|}{8}=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

最后再乘上 $\frac{1}{1-\delta(y_n)}<2$. 于是得到 $n>\max\{N',N''\}$ 时，

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|<\varepsilon.$$

□

关于极限的除法证明，也许上一个证明为了凑最后的 ε 可能并不容易接受，我们可以换一个证明.

证明 同样是先通分

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{x_nB-y_nA}{y_nB}\right|. \tag{4.2.6}$$

然后这里说一个技巧，也就是把 x_n 换成它的极限 A，然后将原来的分数减去它，即

$$(x_nB-y_nA)-(AB-y_nA)=B(x_n-A). \tag{4.2.7}$$

然后利用三角不等式得到

$$\left|\frac{x_nB-y_nA}{y_nB}\right|\leqslant\frac{|AB-y_nA|+|B(A-x_n)|}{|y_nB|}=\frac{|A(y_n-B)|+|B(x_n-A)|}{|y_nB|}.$$

然后当

$$\forall\varepsilon>0,\exists N'\in\mathbb{N},\forall n>N'(|x_n-A|<\varepsilon,|y_n-B|<\varepsilon).$$

于是

$$\frac{|A(y_n-B)|+|B(x_n-A)|}{|y_nB|}<\frac{\varepsilon(|A|+|B|)}{|y_nB|}.$$

最后我们处理一下分母. 只需

$$\forall\varepsilon>0,\exists N''\in\mathbb{N},\forall n>N''\left(|y_n-B|<\frac{|B|}{2}\right).$$

于是有 $n>N''$ 时

$$|y_n|>\frac{|B|}{2}. \tag{4.2.8}$$

故只需 $n>\max\{N',N''\}$ 便有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|<\frac{2\varepsilon(|A|+|B|)}{B^2}.$$

不过其实，我们完全可以把(4.2.6)调整为

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0\\&\exists N_1,\forall n>N_1\left(|x_n-A|<\frac{\varepsilon B^2}{4|A|}\right),\\&\exists N_2,\forall n>N_2\left(|y_n-B|<\frac{\varepsilon|B|}{4}\right).\end{aligned}$$

这样当 $n>\max\{N_1,N_2,N''\}$ 时，就有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|<\varepsilon$$

了. 对于前面的乘法也可以用类似的方法. □

4.3　极限过程与不等式

定理 4.3.1 给出两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$. 若有 $A>B$ 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 对于任意 $n>N$ 时，$x_n>y_n$，

证明 取 $C=\frac{A+B}{2}$. 令 $\delta=|A-C|=|B-C|$. 于是得到两个邻域 $V_\delta(A),V_\delta B$ 满足 $\forall x\in V_\delta(A),\forall y\in V_\delta(B)$有$y\leqslant x$. 由极限几何定义知，

$$\begin{aligned}&\exists N'\in\mathbb{N},\forall n>N'(x_n\in V_\delta(A))\\&\exists N''\in\mathbb{N},\forall n>N''(y_n\in V_\delta(B)).\end{aligned}$$

只要令 $N=\max\{N',N''\}$，则对于任意的 $n>N$，有

$$(x_n\in V_\delta(A))\wedge(y_n\in V_\delta(B)).$$

于是有 $x_n>y_n$. □

定理 4.3.2 (夹逼定理) 对于数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$，存在一个自然数 N_1，对于任意的 $n>N_1$ 有 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$.

证明 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = A$ 可知

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}\forall n > N_2(|x_n - A| < \varepsilon)$$
$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N}\forall n > N_3(|y_n - A| < \varepsilon).$$

由此推出 $n > \max\{N_2, N_3\}$ 时

$$(A - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant A + \varepsilon) \wedge (A - \varepsilon \leqslant y_n \leqslant A + \varepsilon).$$

当 $n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$ 时，分别取它们的左半部分右半部分得到

$$A - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \leqslant A + \varepsilon.$$

这说明

$$\forall\varepsilon > 0\exists N = \max\{N_1, N_2, N_3\}, \forall n > N(|z_n - A| < \varepsilon).$$

即这时 x_n 落在 A 的 ε 邻域内. □

4.4 数列极限的存在问题

定义 4.4.1 (Cauchy 数列) 若一个数列 $\{x_n\}$，满足 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 然后 $\forall n > N, \forall m > N$ 有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 则称该数列为 **Cauchy 数列**或**基本数列**.

证明 **定理 4.4.1** 一个数列有极限的充要条件是它是 Cauchy 数列.

"⇒": 设数列 $\{x_n\}$ 是极限为 A 的一个数列，则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2})$. 于是当 n, m 都大于 N 时，

$$|x_m - x_n| = |(x_m - A) - (x_n - A)| \leqslant |x_m - A| + |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4.4.1}$$

于是就说明了 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列.

"⇐": 设数列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列，则对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 对于任意大于 N 的 m, n 有 $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}$. 然后我们将 m 直接固定为 N. 然后得到

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_n < x_N + \frac{\varepsilon}{3}.$$

这说明数列 $\{x_n\}$ 是一个有界数列. 由上确界原理可知，该数列以及从该数列中任意拿出有限个数组成的新数列都有上确界和下确界. 于是对于 $k \in \mathbb{N}$

$$a_k \coloneqq \inf_{n\geqslant k} x_n, b_k \coloneqq \sup_{n\geqslant k} x_n.$$

这里可以看出，数列 $\{a_k\}$ 是递增的，而数列 $\{b_k\}$ 是递减的，即

$$\forall k \in \mathbb{N}(a_{k+1} \geqslant a_k, b_{k+1} \leqslant b_k).$$

这里又可以看出一个闭区间套

$$\forall k \in \mathbb{N}([a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]).$$

由闭区间套定理可得，存在一个点 A 属于所有的闭区间. 于是我们可以得到

$$\forall k \in \mathbb{N} \left(x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant a_k \leqslant A \leqslant b_k \leqslant x_N + \frac{\varepsilon}{3} \right). \tag{4.4.2}$$

并且对任意的 $n \geqslant N+1$ 也有

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant a_{N+1} \leqslant x_n \leqslant b_{N+1} \leqslant x_N + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.4.3}$$

从(4.4.2)和(4.4.3)可以得出当 $n > N$ 时，

$$|x_n - A| \leqslant |b_{N+1} - a_{N+1}| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \tag{4.4.4}$$

□

例 4.4.1 证明数列 $x_n = (-1)^n$ 没有极限.

证明 只需让 $\varepsilon = 1$ 然后存在自然数 $n, n-1$ 使得 $|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon = 1$，故 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 数列，故没有极限. □

例 4.4.2 证明数列 $\{x_n\}$，其中 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 没有极限.

证明 对于任意自然数 n，有 $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$. 故取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 即可，于是该数列不是 Cauchy 数列. □

例 4.4.3 证明以下定理：定义在闭区间上的函数 $f : [a,b] \to [a,b]$. 若存在实数 q，且 $0 < q < 1$，对于任意属于 $[a,b]$ 的 x, y 都有 $|f(x) - f(y)| \leqslant q|x-y|$，那么存在唯一的 $c \in [a,b]$，并且 $f(c) = c$.

注 4.4.1 以上定理被称为**压缩映像原理**或**不动点原理**，其中的 c 就被称为**不动点 (fixed point)**.

证明 设一个数列 $\{x_n\}$，其中 $x_0 \in [a,b]$ 且每一项 $x_n = f(x_{n-1})$. 于是有

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| &\leqslant q|x_n - x_{n-1}| \\ &\leqslant q^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\vdots \\ &\leqslant q^n |x_1 - x_0|. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

这里可以注意到 $|x_{n+1} - x_n|$ 是可以任意小的，但是并不是对于任意的脚标任意小. 那么我们设对于任意的脚标 n, p 有

$$\begin{aligned} &|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots (x_{n+1} - x_n)| \\ &\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leqslant q^{n+p-1}|x_1 - x_0| + q^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \cdots q^n |x_1 - x_0| \\ &= |x_1 - x_0|(q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \cdots q^n) \\ &= \frac{q^n(1+q^p)}{1-q}|x_1 - x_0|. \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

故对于任意 $\varepsilon > 0$ 找到了 $N = [\log_q \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|(1+q^p)}] + 1$ 时有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. 于是 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列. 于是设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

即 $|x_n - c|$ 可以任意小. 因为

$$0 \leqslant |f(x_n) - f(c)| \leqslant q|x_n - c|$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(c)) = 0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c).$$

而 $f(x_n) = x_{n+1}$，所以

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = c$$

于是我们得到了 $f(c) = c$. 若存在 c_1, c_2 同时满足 $f(c_1) = c_1, f(c_2) = c_2$ 那么

$$|c_1 - c_2| = |f(c_1) - f(c_2)| \leqslant q|c_1 - c_2|.$$

而 q 是满足 $0 < q < 1$ 的，这说明 c_1 只能等于 c_2 于是 c 就是唯一的. □

4.5 单调序列的极限存在问题

定义 4.5.1 给定一个数列 $\{x_n\}$

1. 如果

$$\forall n \in \mathbb{N}(x_n \leqslant x_{n+1})$$

则称 $\{x_n\}$ 为**不减数列**，特别地，若将 "$\leqslant$" 改为 "$<$" 则称该数列为**递增数列**.

2. 如果

$$\forall n \in \mathbb{N}(x_n \geqslant x_{n+1})$$

则称 $\{x_n\}$ 为**不增数列**，特别地，若将 "$\leqslant$" 改为 "$>$" 则称该数列为**递减数列**.

并且统称满足这两种情况之一的数列为**单调数列**

定理 4.5.1 (魏尔斯特拉斯定理) 不减数列有极限的充要条件是它上有界.

证明 我们前面已经证明了有极限的数列必定有界，故现在只需证明上有界的不减数列上有界.

设数列 $\{x_n\}$ 是一个不减数列，由上确界原理可得，该数列必定有上确界，设 $A \coloneqq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ 于是我们得到

$$(\forall x \in \{x_n\}(x \leqslant A)) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists x_N \in \{x_n\}(A - \varepsilon \leqslant x_N \leqslant A)). \tag{4.5.1}$$

又因为 $\{x_n\}$ 是单调递增数列，于是 $|x_{N+1} - A| \leqslant |x_N - A|$. 依次类推. 故我们找到了 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N$ 有 $|x_n - A| \leqslant \varepsilon$. 故 $A \in \mathbb{R}$ 就是该数列的极限. □

例 4.5.1 证明：当 $q > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 其中每一项 $x_n = \frac{n}{q^n}$. 由于 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{qn}$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{qn} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q} = \frac{1}{q}.$$

由于 $q > 1$ 故必定存在 $N \in \mathbb{N}$ 当 $n > N$ 时，x_n 是不增的. 又因为它每项都是正的，故有下界，于是它一定会有一个极限. 现在我们利用它的递推公式即

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{qn} x_n.$$

然后等号两边同时取极限

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{qn} x_n \right).$$

设 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 可以得到方程

$$A = \frac{1}{q} A$$

解出 $A = 0$. □

例 4.5.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明 证法一 利用上面的结论，我们知道

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0. \right) \tag{4.5.2}$$

即存在 $N \in \mathbb{N}$，对于任意的 $n > N$ 有 $|\frac{n}{(1-\varepsilon)^n} - 0| < 1$ 即有

$$1 \leqslant n < (1+\varepsilon)^n. \tag{4.5.3}$$

得到

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon. \tag{4.5.4}$$

于是 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.

证法二 首先该数列是有下界 1 的. 然后利用均值不等式有

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n-2\text{项}} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} \leqslant \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-2\text{项}} + 2\sqrt[n]{n}}{n} = \frac{n-2+2\sqrt[n]{n}}{n} < \frac{n+2\sqrt[n]{n}}{n} = 1 + 2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}. \tag{4.5.5}$$

得到 $1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + 2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} 1 + 2\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

再由夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt[n]{n} = 1$. □

例 4.5.3 证明:$a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

先看 $a \geqslant 1$ 的情况.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\varepsilon)^n} = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N (1 \leqslant a < (1+\varepsilon)^n). \tag{4.5.6}$$

得到

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon.$$

故 1 是原数列的极限.

当 $0 < a < 1$ 时，有 $\frac{1}{a} > 1$，故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = 1. \tag{4.5.7}$$

故 $a > 0$ 该数列的极限是 1.

例 4.5.4 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$. 其中 q 是任何实数.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 的每一项 $x_n = \frac{q^n}{n!}$. 由 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q}{n+1}$. 显然当 $q = 0$ 时该数列的极限为 0. 当 $q > 0$ 时，总能找到 $N = [q-1]$，当 $n > N$ 时，x_n 呈不增数列. 并且有下界 0. 故该数列在 $q > 0$ 时一定有极限. 设 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 得到方程

$$A = \frac{q}{n+1} A. \tag{4.5.8}$$

得到 $A = 0$. 同理 $q < 0$ 时，该数列可以找到 N'，当 $n > N'$ 时是一个不减数列，且有上界 0，然后得到极限仍然是 0. □

4.6 数 e

首先我们考察数列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4.6.1}$$

并试图求该数列的极限. 我们先要知道一个非常有用的不等式.

定理 4.6.1 (Bernoulli 不等式) 对于任意的 $\alpha > -1, n \in \mathbb{N}$ 有

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha. \tag{4.6.2}$$

证明 直接利用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时，$1 + \alpha \geqslant 1 + \alpha$ 显然是成立的. 再由归纳假设，设 $n = k - 1$ 该不等式成立. 则由

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^k &\geqslant (1 + (k-1)\alpha)(1+\alpha) \\ &= 1 + \alpha + (1+\alpha)k\alpha - (1+\alpha)\alpha \geqslant 1 + k\alpha. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

于是上述不等式对于任意的自然数 n 都成立，且 $\alpha \neq 0, n > 1$ 时，严格不等式成立. □

然后我们证明，$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是递减数列.

证明

$$\begin{aligned}\frac{y_{n-1}}{y_n}&=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^{2n}}{(n+1)^n(n-1)^n}\\&=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}=\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\geqslant\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)>\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.\end{aligned}\tag{4.6.4}$$

这说明 $\{y_n\}$ 是递减数列. 又因为该数列的每一项都是正的，所以该数列必有下界，故一定存在极限. □

接下来我们正式证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限存在.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.\end{aligned}\tag{4.6.5}$$

说明数列 $\{x_n\}$ 和数列 $\{y_n\}$ 的极限是一样的. □

注 4.6.1 这也启示我们，当一个单调数列的极限不好找时，我们可以构造一个新的单调性与它相反的数列，再证明新数列的下界存在，然后利用新数列的下界就是原数列的上界来说明原数列的上界（极限）存在.

于是 Euler 将上述极限定义为数 e.

定义 4.6.1

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

例 4.6.1 证明：数列 $z_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 存在极限.

证明 由前文可知 $y_n>e>x_n$ 然后对不等式分别取对数得

$$\ln y_n>1>\ln x_n\Leftrightarrow(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>1>n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.\tag{4.6.6}$$

再分别求和得到

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{1+n}<\sum_{n=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}.\tag{4.6.7}$$

然后由

$$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0\tag{4.6.8}$$

可知 $\{z_n\}$ 是递减数列. 于是我们可以去寻找它得下界. 由

$$\sum_{n=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\prod_{n=1}^{k}\frac{n+1}{n}=\ln(k+1)\tag{4.6.9}$$

以及(4.6.7)得到

$$z_n>\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0.\tag{4.6.10}$$

于是我们就找到了数列 $\{z_n\}$ 的下界，即该数列存在极限. 并且该极限被称为 **Euler 数**. □

例 4.6.2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

由

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

可得

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1} < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

可得

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1)$$

于是

$$\frac{n+1}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{e}\sqrt[n]{n+1}$$

最后

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)e > \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} > \left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right).$$

于是由夹逼定理可得原式极限为 e. □

4.7 子列与部分数列的极限

定义 4.7.1 (子数列) 给定一个数列 $\{x_n\}$. 则满足指标 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 的数列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k}$ 被称为数列 $\{x_n\}$ 的**子列**.

比如给定数列 $1, 2, 3, \cdots, n$ 是一个数列，则 $1, 3, 5, 7$ 就是原数列的子列，而数列 $3, 1, 5, 7$ 就不是原数列的子列.

我们引入正无穷和负无穷的定义.

定义 4.7.2

$$(x_n \to +\infty) \coloneqq \forall c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(x_n > c).$$
$$(x_n \to -\infty) \coloneqq \forall c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(x_n < c).$$
$$(x_n \to \infty) \coloneqq \forall c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(|x_n| > |c|).$$

注 4.7.1 当一个数列不趋于一个实数时，我们都认为该数列发散.

例 4.7.1 数列 $x_n = n$ 趋于正无穷，数列 $x_n = -n$ 趋于负无穷. 数列 $x_n = n^{(-1)^n}$ 趋于无穷，但它不趋于正无穷，也不趋于负无穷.

引理 4.7.1 (Bolzano-Weierstrass 引理) 任何有界数列都含有收敛子列.

证明 设数列 $\{x_n\}$，再设 E 是该数列的值组成的集合. 如果集合 E 是有限的，则存在子列 $x_{n_1} = x_{n_2} \cdots x_{n_k} = x$. 故该子列收敛.

如果 E 是无限集，因为 E 是有界的，则由3.3.5(Bolzano-Weierstrass 定理) 可知，它至少有一个极限点 $x \in \mathbb{R}$. 于是令 $\delta = 1$，考察 $V_\delta(A)$. 可以找到 $x_{n_1} \in E, |x_{n_1} - x| < 1$. 然后做归纳法，设已经找到 $x_{n_k} \in E, |x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$. 由极限点的定义可知，存在 $x_{n_{k+1}}, |x_{x_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$. 故对于任意的 $k \in \mathbb{N}$，有 $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$. 又因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$. 故 $x_{n_k} \to x$. □

引理 4.7.2 每一个数列都可以选出一个收敛或者趋于无穷的子列.

证明 如果该数列有界，那么已经证明肯定有一个收敛子列. 如果该数列无界，则对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 我们可以找到 $|x_{n_k}| > c$ 并且 $n_k < n_{n+1}$. □

定义 4.7.3 (上、下极限) 设 $\{x_k\}$ 是任意的一个数列，如果它下有界，由下确界原理可知存在唯一的下确界 $i = \inf x_k$. 然后我们定义 $i_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$. 不难看出数列 $\{i_n\}$ 是一个不减数列，那么它可能趋于一数 l 或者趋于正无穷. 则称 $\lim\limits_{n\to\infty} i_n$ 为数列 $\{x_k\}$ 的**下极限.** 并可以记为 $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k$ 或 $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k$.

如果原数列没有下界，则 $\inf\limits_{k \geqslant n} x_k = -\infty$. 于是 $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$. 最后给出符号定义:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geqslant n} x_k.$$

以及

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqslant n} x_k.$$

举一些例子.

例 4.7.2 $x_k = (-1)^k, k \in \mathbb{N}$.

显然有 $\inf\limits_{k \geqslant n} = x_k = -1$. 于是 $\varliminf\limits_{k\to\infty} = -1$. 同理可得 $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = 1$.

例 4.7.3 $x_k = k^{(-1)^k}, k \in \mathbb{N}$.

先写几项 $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \cdots, 2n, \frac{1}{2n-1}, \cdots$ 可以看出 $\inf\limits_{k \geqslant n} = 0$ 故 $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. 而 $\sup k \geqslant n x_k = +\infty$. 故 $\varlimsup\limits_{k\to\infty} = +\infty$.

例 4.7.4 $x_k = \frac{(-1)^k}{k}, k \in \mathbb{N}$.

原数列为 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2m}, -\frac{1}{2m+1}, \cdots$ 即

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{2m}, & k = 2m \\ -\frac{1}{2m+1}, & k = 2m+1 \end{cases}.$$

于是 $\inf\limits_{k \geqslant n} x_k = 0$. 故 $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. 由于 $\sup\limits_{k \geqslant n} \leqslant \frac{1}{2n}$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k \geqslant n} x_k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

定义 4.7.4 (部分极限) 一个数列包含趋于某数（可以是记号 $+\infty$ 或 $-\infty$）则称该数（改记号）是该数列的**部分极限**.

定理 4.7.1 一个有界数列的上、下极限分别是该数列部分极限中的最大者和最小者.

证明 我们设数列有上极限 M □

证明 **证法一**：设数列 $\{x_k\}$ 有上极限. 且设 $s = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k$. 我们先证上极限是该数列的部分极限. $s_n \coloneqq \sup\limits_{k \geqslant n} x_k$，有 $x_k \leqslant s_n$. 利用上确界的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在一个 x_n 满足 $s_n - \varepsilon < x_n \leqslant s_n < s_n + \varepsilon$ 即满足 $|x_n - s_n| < \varepsilon$.

于是对于 $s_{k_1} \coloneqq \sup\limits_{k \geqslant \max\{n, k_1+1\}} x_k$ 我们可以找到 x_{k_1} 满足 $|x_{k_1} - s_{k_1}| < 1$. 然后对于 $s_{k_2} \coloneqq \sup\limits_{k \geqslant \max\{n, k_2+1\}} x_k$ 可以找到 x_{k_2} 满足 $|x_{k_2} - s_{k_2}| < \frac{1}{2}$. 由归纳原理对于 $s_{k_n} = \sup\limits_{k \geqslant \max\{n, k_n+1\}} x_k$ 可以找到 $k_n \in \mathbb{N}$ 满足 $k_n < k_{n+1}$ 且 $s_{k_n} - \frac{1}{n} < x_{k_n} < s_{k_n} + \frac{1}{n}$. 由于 s_n 是不增数列，所以下确界为它的极限，又因为它的子列也是不增数列，故下确界 s 也是它的极限，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{k_n} = s$. 再由夹逼定理可得 x_{k_n} 趋于 s.

再证它是最大的部分极限. 当 $k > n$ 时，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 有 $x_k \leqslant \sup\limits_{x_k} = s_n$. 由于 s_n 趋于 s，故可以找到 $N \in \mathbb{N}$ 当 $k > N$ 时有 $x_k \leqslant s_n < s + \varepsilon$. 得到对于任意收敛子列有 $x_{n_k} < s + \varepsilon$. 由于 ε 可以取任意小，我们将 ε 看为一个趋于 0 的数

列 ε_l 得到 $x_{n_k} < s+\varepsilon_l$ 利用极限的保序性得到 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant s$. 于是任意收敛子列的极限大小不超过 s.

证法二： 设 $s = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k, s_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$. 接下来我们先看 s 的两个性质. 第一是对于任意的 $\varepsilon > 0$ 总存在 $N' \in \mathbb{N}$ 满足 $s_{N'} < s+\varepsilon$. 又因为 $k > N'$ 时，$x_k \leqslant s_{N'}$ 于是得到

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall k > N'(x_k < s+\varepsilon.) \tag{4.7.1}$$

第二是对于任意的 $\varepsilon > 0$ 有 $s_n \geqslant s > s-\varepsilon$. 又由上确界的定义，可以在数列 $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots$ 中至少找到一个 $x_{k'}$ 满足 $x_{k'} > s-\varepsilon$. 于是有

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \exists k' > N(x_{k'} > s-\varepsilon). \tag{4.7.2}$$

然后我们设全是正数且趋于 0 的数列 ε_l. 当 $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$ 时可以找到 $n_1 = 1$ 有 $s-\varepsilon_1 < x_{n_1} < s+\varepsilon_1$. 由归纳假设设

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_{i-1}(|x_{n_m} - s| < \varepsilon_m), (m = 1, 2, \cdots, i-1). \tag{4.7.3}$$

我们可以找到 $N = \max\{n_{i-1}, N'\}$ 时 $k' > N$ 的 $x_{k'}$ 满足上面两个性质，并 $x_{k_i} := x_{k'}$. 我们得到

$$s-\varepsilon < x_{k_i} < s+\varepsilon \tag{4.7.4}$$

对任意 $i \in \mathbb{N}$ 成立，再利用夹逼定理，取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_i} = s$.

再设任意子列 $\{x_{k_q}\}$ 趋于 a. 由(4.7.1)得，当 $k_q > N'$ 且充分大时有 $x_{k_q} < s+\varepsilon_l$. 再将两边取极限得到 $a < s$. 故 s 是所有部分极限中的最大者. □

由于我们前面引入的正负无穷两个记号，当数列上无界时，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$. 这时认为它仍然是部分极限中的最大者. 如果此时下有界，那么按照上面所证的，它是部分极限的最小者. 若该数列无下界，则 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$. 这时认为它还是部分极限中的最小者. 至于它的上极限，可能是正无穷大，也可能是有限的. 于是我们将上面的定理推广.

定理 4.7.2 * 任意数列的上极限是部分极限中的最大者，下极限是部分极限中的最小者.

引理 4.7.3 若一个数列收敛或趋于正无穷或趋于负无穷，则它的所有部分极限都等于原数列的极限.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 趋于 A. 即

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(|x_n - A| < \varepsilon.) \tag{4.7.5}$$

再任取一子列 $\{x_{n_k}\}$ 由于 $n_k \to \infty$ 故存在 $K \in \mathbb{N}$，使得 $k > K$ 时，有 $n_k > N$，然后有

$$|x_{k_n} - A| < \varepsilon. \tag{4.7.6}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$.

若数列 $\{x_n\}$ 趋于正无穷，则对于任意子列 x_{n_i} 有对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 存在 $M \in \mathbb{N}$ 可以找到 $m > M, x_{n_m} > c$ 故子列也趋于正无穷. 对于负无穷的情况也是同理. □

定理 4.7.3 一个数列收敛或趋于正无穷或趋于负无穷的充要条件是它的上极限和下极限相等.

证明 我们前面已经证明，一个数列收敛或趋于正负无穷时，它的任意子列收敛. 这就说明它的上极限和下极限相等.

当数列的上极限与下极限都为正无穷或负无穷时，由夹逼定理可得原数列也趋于正无穷或负无穷. 如果 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R}$ 时. 由于 $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \leqslant x_n \leqslant \sup\limits_{k\geqslant n} x_k = s_n$. 由夹逼定理得 $\lim\limits_{x_n} = A$. □

推论 4.7.1 一个数列收敛的充要条件是它的任意子列收敛.

证明 我们前面已经证明一个数列收敛则它的任意子列收敛于原数列的极限. 或者因为子列的上、下极限介于原数列的上下极限. 若原数列收敛，则原数列的上下极限相等，这时则子列的上下极限也相等，故子列也收敛，且和原数列的极限相等.

逆命题显然成立，因为可以取数列本身作为一个子列. □

定理 4.7.4 给定数列 $\{x_n\}$ 则，

1. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. $\varliminf\limits_{n\to\infty} (-x_n) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, \varlimsup\limits_{n\to\infty} (-x_n) = -\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.
3. 若 $x_n > 0$ 总成立. 则
$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n}, \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n}.$$

证明 1. 设 $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k, s_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$. 显然 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $i_n \leqslant s_n$. 由极限的保序性可知 $\lim\limits_{n\to\infty} i_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. 即 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. 由定义 $\varliminf\limits_{n\to\infty} (-x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} (-x_k)$. 设 $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} (-x_k)$. 即当 $k \geqslant n$ 时，

$$((-x_k) \geqslant i_n) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists (-x_k)', (i_n \leqslant (-x_k)' < (-x_k)' + \varepsilon)).$$

这表明 $k \geqslant n$ 时，

$$(x_k \leqslant -i_n) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists x_k', ((-i_n) \geqslant x_k' > x_k' - \varepsilon)).$$

这时我们发现 $(-i_n)$ 变成了当 $k \geqslant n$ 时，x_k 的上确界. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} (-i_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. 即

$$\varliminf_{n\to\infty} (-x_n) = \lim_{n\to\infty} (i_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

3. 设 $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$. 于是当 $k \geqslant n$ 时

$$(i_n \leqslant x_k) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists x_k' (i_n \leqslant x_k' < i_n + \varepsilon)).$$

于是有

$$\left(\frac{1}{i_n} \geqslant x_k\right) \wedge \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \frac{1}{x_k'} \left(\frac{1}{i_n} - \frac{\varepsilon}{i_n^2} < \frac{1}{x_k'} \leqslant \frac{1}{i_n}\right)\right).$$

这说明

$$\sup_{k\geqslant n} \frac{1}{x_k} = \frac{1}{\inf\limits_{k\geqslant n} x_k}.$$

即有

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n}.$$

命题 4.7.1 (1)$\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 都是有界数列，且当 n 充分大时有 $x_n \leqslant y_n$ 则

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.7}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.8}$$

(2) 对于任意有界数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.9}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.10}$$

(3) 对于每一项都大于 0 且有界的数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n\cdot y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.11}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (x_n\cdot y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.12}$$

(4) 数列 $\{x_n\}$ 存在极限且 $\{y_n\}$ 有界，则

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n, \tag{4.7.13}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.14}$$

(5) 若数列 $\{x_n\}$ 存在极限，且有界数列 $\{y_n\}$ 中的 $y_n > 0$，则

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n\cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n, \tag{4.7.15}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n\cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{4.7.16}$$

证明 (1) 我们证明(4.7.7). 由 n 充分大时，$x_n \leqslant y_n$ 得到，n 充分大时有

$$\inf_{k\geqslant n} x_k \leqslant \inf_{k\geqslant n} y_k.$$

我们令 $a_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k, b_n = \inf\limits_{k\geqslant n} y_k$. 显然 a_n, b_n 是不减列，且是原数列的子列，由于原数列都有界，故 $\{a_n\}.\{b_n\}$ 一定有极限. 由极限的保序性可知，$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$.

(2) 我们证明(4.7.9). 对于左半边，由于 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 是一个部分极限，所以我们可以找到一个子列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$ 满足

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{k_n} + \lim_{k\to\infty} y_{k_n}.$$

同时也有

$$\inf_{j\geqslant n_k} x_j + \inf_{j\geqslant n_k} y_j \leqslant x_{n_k} + y_{n_k}.$$

我们记

$$a_n = \inf_{w\geqslant n} x_w, b_n = \inf_{w\geqslant n} x_w, a_{n_k} \coloneqq \inf_{j\geqslant n_k} x_j, b_{n_k} \coloneqq \inf_{j\geqslant n_k} y_j.$$

于是 a_n, b_n 的子数列分别是 a_{n_k}, b_{n_k}. 再加上这两个数列都上有界，所以有

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim_{n\to\infty} a_{n_k} + \lim_{n\to\infty} b_{n_k}.$$

于是我们得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{n_k} + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_{n_k} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n).$$

对于右半边，我们设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. 再设 $\{y_n\}$ 的子列为 $\{y_{k_n}\}$. 于是有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \leqslant \lim_{k\to\infty}(x_{i_k}+y_{i_k}).$$

由 Bolzano-Weierstrass 引理可知，有界数列必有收敛的子列. 于是令 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{i_k} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$. 由于数列的上极限是最大的部分极限，故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \leqslant \lim_{k\to\infty}(x_{i_k}+y_{i_k}) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

(3) 证明(4.7.11). 先证左半部分. 由于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n\cdot y_n)$ 是部分极限，故我们可设子列 $\{x_{n_k}, y_{n_k}\}$ 满足

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n\cdot y_n) = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k}\cdot y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}\cdot \lim_{k\to\infty} y_{n_k}.$$

同时也有

$$\inf_{j\geqslant n_k} x_j \cdot \inf_{j\geqslant n_k} y_j \leqslant x_{n_k}\cdot y_{n_k}.$$

我们记

$$a_{n_k} = \inf_{j\geqslant n_k} x_j, b_{n_k} = \inf_{j\geqslant n_k} y_j, a_n = \inf_{w\geqslant n} x_w, b_n = \inf_{w\geqslant n} y_n.$$

由于 $\{a_{n_k}, b_{n_k}\}$ 分别是 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的子列. 故有

$$a_n\cdot b_n \leqslant a_{n_k}\cdot b_{n_k}.$$

由于原数列有界，且子列为不减数列，故一定有极限，再由保序性可知不等式的左半部分成立.

再设子列 $\{x_{i_k}\}$ 满足

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

由 Bolzano-Weierstrass 引理可知有界数列必定有收敛子列，于是我们找到收敛子列 $\{y_{i_k}\}$. 当该子列收敛至原数列的上极限时，由上极限是部分极限的最大极限可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\cdot \lim_{k\to\infty} y_{i_k} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

(4) 我们证明(4.7.13). 利用(4.7.9). 首先，由**定理** 4.7.3可知 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

再将 x_n, y_n 交换可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

将上述式子结合，然后原式得证.

(5) 证明直接利用(4.7.11)和(4.7.12)即可. □

4.8 级数

4.8.1 级数的定义

定义 4.8.1 (级数) 表达式 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 并被称为**级数**或者**无穷级数**.

定义 4.8.2 把数列 $\{a_n\}$ 的元素看作级数的元素，并称 a_n 为级数的第 n 项.

定义 4.8.3 和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}$ 称为级数的**部分和**或者称为级数的**第 n 部分和**.

定义 4.8.4 如果级数的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛，则称**级数收敛**. 如果部分和数列发散，则称**级数发散.**

定义 4.8.5 级数部分和数列若存在且极限为 s，则称 s 为**级数的和**. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s.$$

4.8.2 级数收敛的判断方法

定理 4.8.1 (级数收敛的 Cauchy 准则) 给定级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 收敛的充要条件是: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $m\geqslant n>N$ 时，有

$$|a_n+\cdots+a_m|<\varepsilon.$$

证明 $s_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, s_m:=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$. 由数列收敛的 Cauchy 准则可知部分和收敛充要条件是 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $m\geqslant n>N$ 时 $|s_m-s_n|<\varepsilon$. □

推论 4.8.1 如果在一个级数中只改变有限个级数的项，级数的收敛或者发散的性质不会改变.

证明 将上述 Cauchy 准则中的 N 大于被改变的最大的项的序号，再判断是否收敛即可. □

推论 4.8.2 级数 $\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

证明 在 Cauchy 准则中取 $m=n$ 即可. 或者由 $a_n=s_n-s_{n-1}$，再加上 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_{n-1}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=0$. □

例 4.8.1 级数 $1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots$ 通常称为几何级数或等比级数之和. 其当 $|q|<1$ 时，该级数收敛.

证明 利用等比数列求和公式可知，

$$s_n:=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}q^n}{1-q}$$

可知当 $|q|<1$ 时，部分和极限收敛. □

例 4.8.2 级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 被称为**调和级数**. 它从第二项开始，每一项都是相邻两项的平均值. 虽然级数的项趋于 0，但由**例**4.4.2 可知它的部分和极限发散. 于是调和级数发散.

例 4.8.3 级数 $1-1+1-\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$ 发散，因为其部分和序列 $1,0,1,0\cdots$ 发散. 此外，级数的项不趋于 0 也可得此结论.

如果添加符号并考虑新级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

括号内的和是新级数的项，则该级数的和变成了 0.

如果采取以下方式添加括号

$$1-(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

则该级数的和变成了 1.

如果把原级数为 -1 的一切项都向右移动两个位置，则得到

$$1+1-1+1-1+\cdots$$

即

$$(1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

其级数的和又变成了 2.

我们看到，同一个级数，利用有限项的运算法则，得到了不同的结果. 说明有限项的运算法则一般不能向级数推广. 不过以后将证明，还是有一类重要级数，其运算无异于有限个项求和. 这就是我们通常所说的绝对收敛级数，我们将来也恰恰主要讨论这种级数.

定义 4.8.6 (绝对收敛) 给带级数 $\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$，若 $\sum\limits_{n}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则称该级数**绝对收敛**.

若一个级数绝对收敛，则这个级数本身也一定收敛. 因为 $|a_1+a_2+\cdots a_n+\cdots| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots|a_n|+\cdots$ 而逆命题一般不成立. 这说明绝对收敛比收敛具有更强的要求，可以举例说明.

例 4.8.4 级数 $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$ 的部分和为 $\frac{1}{n}$ 或 0，故该级数收敛.

然后我们为级数的各项加上绝对值，得到新级数

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots \tag{4.8.1}$$

利用 Cauchy 准则，取 $\varepsilon=1$，当 $n=m=0$ 时，部分和 $1+1>1=\varepsilon$. 当 $m=n>1$ 时，对于任意的 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\left|1+1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{n+n}\right| &= 2+2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\ &\geqslant 2+2n\left(\frac{1}{2n}\right)=3\end{aligned}$$

故该级数的部分和发散，于是级数发散.

由于一个级数绝对收敛则该级数收敛，于是我们只需研究只有非负项级数的收敛性即可.

定理 4.8.2 (非负项级数收敛准则) 对于非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 则级数收敛的充要条件是该级数的部分和序列上有界.

证明 取部分和 $s_1, s_2, \cdots s_n$ 由于级数都是正项，所以 $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant \cdots$. 由单调数列数列的充要条件是该数列上有界得证. □

定理 4.8.3 (比较定理) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个非负项级数. 且存在 $N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时有 $a_n \leqslant b_n$. 那么若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证明 设 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$. 由于存在 $N \in \mathbb{N}$，那么也存在 $N' \geqslant N$，当 $n > N'$ 有 $0 \leqslant A_n \leqslant B_n$. 再由极限的比较定理可得 B_n 收敛时，不减数列 A_n 有上界，故 A_n 也收敛. 当 A_n 发散时，若 B_n 收敛，则 A_n 有上界，故 A_n 收敛，得到矛盾. □

例 4.8.5 由于 $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$$

可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 有相同的收敛性.

不过利用裂项可得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

是趋于 1 的. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的部分和序列下有界，故收敛. 后面我们会知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

推论 4.8.3 (级数绝对收敛的 Weierstrass 比较检验法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. 若存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n| < b_n$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

证明 存在自然数 $N' > N$，当 $n > N'$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

由比较定理，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. □

注 4.8.1 该推论也可以简述为一个级数的各项的绝对值分别小于另一个收敛级数的各项，则原级数收敛.

例 4.8.6 由于 $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛.

推论 4.8.4 (Cauchy 检验法) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 令 $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ 则

1. $\alpha < 1$ 时，级数绝对收敛.

2. $\alpha > 1$ 时，级数发散.

3. $\alpha = 1$ 时，级数有可能发散也有可能收敛.

证明 当 $\alpha < 1$ 时，可以找到 $q \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha < q < 1$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n}|a_k| < 1$. 故存在 $N \in \mathbb{N}$ 当 $n > N$ 时，$\sup\limits_{k\geqslant n}|a_k| < 1$. 这就说明所有脚标大于 N 的项满足

$$|a_n| < q^n < 1.$$

由比较定理

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \sum_{n=1}^{\infty}q^n$$

在 $|q| < 1$ 时不等式右边收敛. 故原级数绝对收敛.

当 $\alpha > 1$ 时，可以找到 $q \in \mathbb{R}$ 满足 $1 < q < \alpha$. 这时由上极限定义可以找到 $N \in \mathbb{N}$ 当 $n > N$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| > \sum_{n=1}^{\infty}q^n$$

再由比较定理，可得级数发散. 再或者，由于上极限是数列的部分极限故存在一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 的极限是大于 1 的. 由**推论**4.8.2可得级数发散.

最后当 $\alpha = 1$ 时. 给定两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

并且第一个级数发散，第二个级数收敛，得出 $\alpha = 1$ 时，级数的收敛性无法确定. □

例 4.8.7 说明当 $x \in \mathbb{R}$ 取哪些值时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^n x^n$ 收敛？

由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|(2+(-1)^n)^n x^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}|(2+(-1)^n)x| = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}|(2+(-1)^k)x| = |x|\overline{\lim_{n\to\infty}}|(2+(-1)^n)|$$

故只需 $3|x| < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{3}$ 即可. 也可以看出，当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时，n 为偶数时项等于 1，不满足级数收敛的必要条件，故发散. 于是 $|x| \geqslant \frac{1}{3}$ 时级数发散.

推论 4.8.5 (d'Alembert 检验法) 给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 令 $\alpha = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

1. 当 $\alpha < 1$ 时，级数绝对收敛
2. 当 $\alpha > 1$ 时，级数发散.
3. 当 $\alpha = 1$ 时，无法判断级数收敛还是发散.

证明 当 $\alpha < 1$ 时，可以找到 $q \in \mathbb{R}$，满足 $\alpha < q < 1$. 由极限的性质，我们可以找到 $N \in \mathbb{N}$，对于 $n > N$ 时满足 $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$. 然会我们固定 $m = N+1$，由

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_m}\right|$$

得到

$$|a_m|q^{n-m} > |a_{n+1}|.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}|<\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_m|q^{n-m}=|a_m|\frac{q^{1-m}}{1-q}$. 得到原数列绝对收敛.

当 $\alpha>1$ 时，存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$|\frac{a_{n+1}}{a_n}|>1$ 说明 $|a_n|$ 不趋于 0，不满足级数收敛的必要条件.

当 $\alpha=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. □

例 4.8.8 说明，当 $x\in\mathbb{R}$ 取哪些值时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 收敛？

$|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=|\frac{1}{n+1}x|$. 这里说明对于 x 取任意实数时，$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{1}{n+1}x|=0$，即级数永远收敛.

命题 4.8.1 (Cauchy 命题) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$ 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性与级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8\cdots$$

的敛散性相同.

证明 由于

$$\begin{gathered}
a_2\leqslant a_2\leqslant a_1,\\
2a_4\leqslant a_3+a_4\leqslant 2a_2,\\
4a_8\leqslant a_5+a_6+a_7+a_8\leqslant 4a_4,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2^n a_{2^{n+1}}\leqslant a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\cdots+a_{2^{n+1}}\leqslant 2^n a_{2^n}
\end{gathered}$$

求和得

$$\frac{1}{n}(S_{n+1}-a_1)\leqslant A_{2^{n+1}}-a_1\leqslant S_n,$$

其中 $S_n=a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}, A_k=\sum\limits_{n=1}^{k}=a_n$.

注意到不等式两边都有 S_n 故 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k$ 得敛散性与 S_n 相同. □

推论 4.8.6 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p<1$ 时收敛.

证明 如果 $g\geqslant 0$，利用上一个定理，此级数与 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k\frac{1}{(2^k)^p}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2^{1-p})^k$ 同时收敛或发散. 而后者收敛的充要条件是 $2^{1-p}<1$，即 $p>1$.

如果 $q<0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 显然发散，因为此时所有的项都大于 1. □

我们经常将级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 用于对比.

第五章　函数的极限

设 $E \in \mathbb{R}$，以及 a 是集合 E 的极限点，$f: E \to \mathbb{R}$ 是定义在 E 上的实值函数.

我们希望在 x 充分接近 a 时，$f(x)$ 可以充分接近 $A \in \mathbb{R}$. 这个值被称为函数 f 在 x 趋于 a 时的极限.

定义 5.0.1 对于函数 $f: E \to \mathbb{R}$，如果对于任意数 $\varepsilon > 0$，可以找到一个数 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $0 < |x-a| < \delta$ 的点 $x \in E$ 都能使 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 则称，**当 x 趋于 a 时，函数 f 趋于 A**，或者说 **A 是函数 f 在 x 趋于 a 时的极限**.

上述定义可以写为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E\ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

如果 A 是函数 $f(x)$ 在 x 沿着集合 E 趋于 a 时的极限，则记 $E \ni x \to a, f(x) \to A$. 或者 $\lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x) = A$. 其中第二种记发可以简记为 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$. 如果在不说明 E 的情况下不影响结果，第二种记法还可以继续简记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

例 5.0.1 设 $E = [0, +\infty)$，证明极限 $\lim\limits_{E \ni x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$.

证明 我们先进行分析，根据定义，我们只需证明对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$，当 $|x-1| < \delta$ 时有

$$\left| \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \right| < \varepsilon.$$

又因为，x 趋于 1，于是我们可以限定 $|x-1| < 1$. 此时 $0 < x < 2$ 所以 $(\sqrt{x}+1)^2 > 1$，所以

$$\left| \frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \right| < \frac{1}{2}|x-1|.$$

此时，对于任意 $\varepsilon > 0$，想要使上述不等式成立，只需取 $\delta = 2\varepsilon$.

如果要将上述分析写为证明，结果如下.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{1, \varepsilon\}$ 当 $|x-1| < \delta$ 时，有

$$\left| \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}|x-1| < \varepsilon.$$

由定义可知极限等式成立. □

定义 5.0.2 一个点的邻域去掉改点本身所形成的新邻域被称为该点的**去心邻域.**

其实不难发现，$0 < |x-a| < \delta$ 所能取到 x 的范围就是 a 关于 δ 的空心邻域.

如果 $U(a)$ 表示点 a 的一个邻域，我们用 $U^{\circ}(a)$ 表示该点的去心邻域. 并将 $U(a, \delta)$ 表示 a 的 δ 邻域. 同理，$U^{\circ}(a, \delta)$ 表示 a 的去心 δ 邻域.

再分别定义

$$U_E(a) \coloneqq E \cap U(a), U_E^\circ(a) \coloneqq E \cap U^\circ(a)$$

分别为点 a 在 E 中的邻域和去心邻域.

于是上述 $\varepsilon - \delta$ 定义可以写为

$$\forall V_{\mathbb{R}}(A,\varepsilon), \exists U_E^\circ(a,\delta)\ (f(U_E^\circ(a,\delta)) \subset V_{\mathbb{R}}(A,\varepsilon))).$$

考虑到数轴上一个点的任何一个邻域中存在一个邻域包含该点的 δ 邻域，于是我们把上述定义一般化，得到函数极限的几何定义.

定义 5.0.3

$$\left(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A\right) \coloneqq \forall V_{\mathbb{R}}(A), \exists U_{\mathbb{R}}^\circ(a)\ (f(U_{\mathbb{R}}^\circ(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A)).$$

第六章　连续函数

第七章　微分学

7.1　不定积分

定义 7.1.1 (原函数) 如果一个 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数 $F(x)$ 可导，且导函数为 $f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的**原函数 (primitive function)**.

现在导数做逆运算，就可以得到原函数，这个逆运算被称为**积分.**

先给一个后面会证明的定理.

定理 7.1.1 若 $F_1(x), F_2(x)$ 都为 $f(x)$ 的原函数，则 $F_1(x) - F_2(x) = C \in \mathbb{R}$.

以及后面会证明的一个基本结论，一个区间上的任何连续函数都有原函数.

定义 7.1.2 (不定积分) 设 $f(x)$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上存在原函数 $F(x)$，则称函数族 $\{F(x)+C|C \in \mathbb{R}\}$ 为 $f(x)$ 的**不定积分 (indefinite integration)**. 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + C|C \in \mathbb{R}\}.$$

其中，$f(x)$ 称为**被积函数 (integrand)**，$\int$ 被称为**积分号 (sign of integration)**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 被称为**被积表达式 (differential form)**.

我们把这样一族函数简记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

由于不定积分是导数的逆运算，我们可以直接给出以下不定积分公式.

$$
\begin{aligned}
&\int 0\,\mathrm{d}x = C, && \int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C,\\
&\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|+C, && \\
&\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c && \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x+C,\\
&\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x+C, && \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\\
&\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C, && \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, && \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C.\\
&\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C, && \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C.\\
&\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C, && \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})+C.
\end{aligned}
$$

注 7.1.1 上述第二行的那个式子注意是 $\ln|x|$，是加了绝对值的. 因为 $\ln x$ 的定义域范围是大于 0 的实数，并且当 $x<0$ 时，$\ln(-x)=\frac{1}{x}$. 于是

$$
\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + C, x>0,\\ \ln(-x)+C, x<0. \end{cases}
$$

合起来记为 $\ln|x|+C$.

最后两个式子积分后为反双曲函数.

务必熟练运用上述公式.

接下来给出一些不定积分的简单性质.

命题 7.1.1 设函数 $f(x)$，它在区间 I 上的一个原函数为 $F(x)$;$g(x)$ 在区间 I 上的原函数为 $G(x)$，则

$$
\begin{aligned}
&(1)\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x),\\
&(2)\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C,\\
&(3)\int [f(x)+g(x)] = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,\\
&(4)\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int f(x)\,\mathrm{d}x, \lambda\neq 0.
\end{aligned}
$$

证明 对于 (1)，由于

$$
\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x)+C|C\in\mathbb{R}\}.
$$

因为 $F(x)+C$ 在求导后只有 $F'(x)=f(x)$，所以原式等于 $f(x)$.

对于 (2) 由于 $F'(x)=f(x)$. 故

$$
\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C.
$$

对于 (3)，对等号两边同时微分即可. 或者采用以下证明，由于 $f(x)+g(x)$ 的一个原函数为 $F(x)+G(x)$，于是

$$\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = F(x)+G(x)+C = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于 (4)，也可以同时对等号两边微分进行证明，或者采用以下证明. 由于 $\lambda f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，于是

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda F(x) + C = \lambda \int F(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

注 7.1.2 注意最后一条的 $\lambda \neq 0$ 因为如果它等于 0，而 $\int 0\,\mathrm{d}x = C$，可以为任意实数，而等号右边只能为 0，故矛盾.

例 7.1.1 求不定积分

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 先将被积函数进行一个化简，使它变为和的形式.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.\end{aligned}$$

例 7.1.2 求不定积分

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x.$$

解 我们往上述可用的三角函数进行化简.

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x = \tan x - x + C.\end{aligned}$$

7.1.1 分部积分法

由于 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. 对等号两边同时求不定积分得

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) + \int u(x)\,\mathrm{d}v(x).$$

再整理得

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

上述公式就是**分部积分法 (integration by parts).** 下面给出一些例子.

例 7.1.3 计算不定积分

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x.$$

解 首先 $\int xe^x \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}e^x$. 于是由分部积分可得

$$\int x \,\mathrm{d}e^x = xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

例 7.1.4 计算不定积分

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x.$$

解

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \int x^2 \,\mathrm{d}e^x = x^2 e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x^2.$$

又因为

$$\int e^x \,\mathrm{d}x^2 = x^2 e^x - \int 2xe^x \,\mathrm{d}x$$

以及

$$\int 2xe^x \,\mathrm{d}x = 2xe^x - \int 2e^x \,\mathrm{d}x = 2xe^x - 2e^x + C.$$

带回得

$$\text{原式} = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

注意这里把 e^x 提出来的原因是想把超越函数的代数函数分开. □

例 7.1.5 计算不定积分

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x.$$

解

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \,\mathrm{d}\ln x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

例 7.1.6 计算不定积分

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

解 由于 $e^x, \cos x$ 都为超越函数，那么两种分部积分都试一试.

$$\begin{cases} \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cos x - \int \sin x \,\mathrm{d}e^x, \\ \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x + \int \sin x \,\mathrm{d}e^x. \end{cases}$$

上式子相加化简得

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + C.$$

注 7.1.3 类似的，可以算出 $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\cos x - \sin x)e^x + C.$

例 7.1.7 求出以下不定积分的递推式：

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x.$$

解 从 $\cos^n x$ 中拆一个 $\cos x$ 出来.

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^x \cos^{n-1} x \, \mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x \, \mathrm{d} \cos^{n-1} x \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + \int (n-1) \sin^2 x \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + \int (n-1)(1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (\cos^{n-2} x - \cos^n x) \, \mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x - (n-1) \int \cos^n x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

整理得到地推公式

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x, n = 2, 3, \cdots$$

如果 n 为奇数，反复使用上述公式得到

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C.$$

如果 n 为偶数，反复使用上述公式得到

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C.$$

7.1.2 不定积分换元法

由于复合函数的微分有链式法则以及一阶微分的形式不变性有

$$\mathrm{d}v(u(x)) = v'(u(x))u'(x) \, \mathrm{d}x = v'(u(x)) \, \mathrm{d}u(x).$$

对上述等号两边同时求不定积分可得

$$\int \mathrm{d}v(u(x)) = \int v'(u(x))u'(x) \, \mathrm{d}x = \int v'(u(x)) \, \mathrm{d}u(x)$$

即

$$u(v(x)) = \int v'(u(x))u'(x) \, \mathrm{d}x = \int v'(u(x)) \, \mathrm{d}u(x).$$

所以，当我们在遇到复合函数 $f(g(x))$ 的积分时，就可以凑成上述形式，再求以 $g(x)$ 为变量的积分，再将 $g(x)$ 带回. 接下来看几个例子.

例 7.1.8 计算不定积分

$$\int \sin^3 x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

解 由于

$$\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x=\int \sin^3 x\,\mathrm{d}\sin x.$$

于是令 $u=\sin x$，代入得

$$\int u^3\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C.$$

例 7.1.9 计算不定积分

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 我们直接把 $\mathrm{d}x$ 凑为 $\mathrm{d}x^2$，这时为保持原式子不变，则原式子前面还要乘以 $\frac{1}{2}$. 即得

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

为后面学习有理函数的原函数做铺垫，我们给出以下例子.

例 7.1.10 计算不定积分

$$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x, a\neq 0.$$

解 我们将 $\mathrm{d}x$ 凑为 $\mathrm{d}(ax+b)$. 这时原式子等于

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}(ax+b)=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

例 7.1.11 计算不定积分

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\\&=\int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

例 7.1.12 计算不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}, a\neq 0.$$

解 试图将分母中的 a^2 提出来，去凑 $\dfrac{1}{x^2+1}$ 的形式. 于是令 $x=au$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\int \frac{\mathrm{d}au}{a^2(1+u^2)}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{a}\tan u+C=\frac{1}{a}\tan\frac{x}{a}+C.$$

例 7.1.13 计算不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x},\quad ab\neq 0.$$

解 分子分母同除以 $b^2\cos^2 x$. 得到

$$\int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{b^2\cos^2 x}}{\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x+1} = \frac{1}{b^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\frac{a^2}{b^2}\tan^2 x+1} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2+1} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.$$

例 7.1.14 计算不定积分

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x, |x|\leqslant a.$$

解 令 $x=a\sin u, |u|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}(a\sin u) = \int a^2\cos^2 u\,\mathrm{d}u = a^2\left(\frac{1}{2}\sin u\cos u+\frac{1}{2}u\right)+C \\ = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

接下来再看一个利用双曲函数进行换元的例子.

例 7.1.15 计算不定积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad a>0.$$

解 注意到 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$. 于是令 $x=a\sinh u$. 代入得

$$\int\frac{a\cosh u\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 u}} = \int\frac{a\cosh u\mathrm{d}u}{a\cosh u} = \int\mathrm{d}u = u+C = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)+C = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$$

由于初等函数的原函数可能并不是初等函数的复合，甚至很难表示出来，我们定义几个常用的原函数. 下述函数的原函数都不是初等函数.

定义 7.1.3 **积分正弦**函数 $\mathrm{Si}\,x := \int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. 它当 $x\to 0$ 时趋于 0.

类似地定义**积分余弦**函数 $\mathrm{Ci}\,x := \int\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$. 它在 $x\to\infty$ 时趋于 0.

最后再定义**积分对数**函数 $\mathrm{li}\,x = \int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$. 当 $x\to 0^+$ 时它趋于 0.

7.1.3 有理函数的原函数

定义 7.1.4 (真分式) 设 $p(x), q(x)$ 都为关于 x 的一元多项式，若 $\deg p(x) < \deg q(x)$，则称 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 是一个**真分式 (proper fraction)**.

下面给出一个两个基本定理，证明请参考线性代数教材.

定理 7.1.2 任何分式都可以分解为一个多项式和一个真分式的和.

定理 7.1.3 (部分分式分解定理) 设真分式 $p(x)/q(x)$，其中 $p(x),q(x)$ 都是关于 x 的一元多项式. 若 $q(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 上的标准分解式为

$$q(x)=(x-x_1)^{r_1}\cdots(x-x_m)^{r_m}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{t_1}\cdots\left(x^2+b_nx+c_n\right)^{t_n}.$$

则 $p(x)/q(x)$ 可以唯一分解为**部分分式 (partial fraction)** 的和

$$\begin{aligned}&\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}+\frac{A_{r_1-1}}{(x-x_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A_1}{(x-x_1)}+\cdots+\frac{B_{r_1}}{(x-x_m)^{r_m}}\frac{B_{r_1-1}}{(x-x_m)^{r_m}}+\cdots+\frac{B_1}{(x-x_m)}\\&+\frac{K_{t_1}x+L_{t_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{t_1}}+\frac{K_{t_1}x+L_{t_1-1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{t_1}}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{(x^2+b_1x+c_1)}+\cdots+\frac{M_{t_n}x+N_{t_n}}{(x^2+b_nx+c_n)^{t_n}}+\frac{M_{t_n}x+N_{t_n-1}}{(x^2+b_nx+c_n)^{t_n}}\\&+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+b_nx+c_n)}.\end{aligned}$$

其中前面还有一个系数确保所有多项式都是首一的.

例 7.1.16 设真分式

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}$$

化为部分分式.

解 利用待定系数法.

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}.$$

于是

$$x+1=A(x-3)+B(x-1)=(A+B)x+(-3A-B).$$

令每一项分别相等得到

$$A=-1,B=2.$$

带回得答案. □

再看一个难度稍大一点的.

例 7.1.17 将真分式

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.$$

化为部分分式.

解 先对分母进行因式分解得到

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{x^3+1}{x(x^3-3x^2+3x-1)}=\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}.$$

由定理可知

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

得到

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2$$

我们先试着求出 A,B. 令 $x=1$，得到

$$2=B.$$

再令 $x=0$ 得到

$$-1=A$$

带回得

$$x^3+1=-(x-1)^3+2x+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2.$$

为了使得式子变得更简单，两边同时对 x 求导得

$$4x-3=C+2D(x-1).$$

再令 $x=1$ 得到 $C=1$. 最后比较系数可得 $D=2$. 带回即得答案. □

所以，关于有理函数的不定积分，本质上是要求形如

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}, \tag{7.1.1}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}, \tag{7.1.2}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x, \tag{7.1.3}$$

三种类型的不定积分. 第一种和第二种是容易求得的.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+C,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}=\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{(x-a)^k}=\frac{(x-a)^{1-k}}{k-1}+C, k=2,3,\cdots.$$

关于第三个，我们利用配方分离完全平方可以得到

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(-\frac{p^2-4q}{4}), p^2-4q<0, k\in\mathbb{N}^+.$$

于是令 $t=x+\dfrac{p}{2}, a^2=-\dfrac{p^2-4q}{4}$. 则

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x=\int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t=A\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}.$$

显然

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t^2=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C, k=1\\ \dfrac{1}{2(1-k)}(t^2+a^2)^{1-k}+C, k\neq 1.\end{cases}$$

而对于 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$，当 $k=1$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=\int \frac{\mathrm{d}t}{a^2\left(\dfrac{t^2}{a^2}+1\right)}=\frac{1}{a}\int \frac{d\dfrac{t}{a}}{\left(\dfrac{t}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C.$$

如果此时 $k \neq 1$ 那么利用分部积分法求递推公式. 设 $I_k = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$.

$$
\begin{aligned}
I_k &= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} - \int t\mathrm{d}\left(t^2+a^2\right)^{-k} = -\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int t^2\left(t^2+a^2\right)^{-k-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^k} - \frac{a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.
\end{aligned}
$$

于是得到了一个重要的递推公式

$$
I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k, \quad k=1,2,\cdots. \tag{7.1.4}
$$

上述讨论给出的方法已经可以在理论上解决所有的有理函数不定积分的计算.

例 7.1.18 计算不定积分

$$
\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x.
$$

解 由于得出部分分式后，分母都是一次项，所以比较简单.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x &= -\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + 2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\
&= -\ln|x| - (x-1)^{-2} - (x-1)^{-1} + \ln(x-1)^2 + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C.
\end{aligned}
$$

再看一个稍微难一点的.

例 7.1.19 计算不定积分

$$
\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}\mathrm{d}x.
$$

解 由于 $\Delta < 0$，故分母已经无法继续化简.

于是对分母进行配方 $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$，令 $t=x-1$. 换元得

$$
\int\frac{5(t+1)+3}{(t^2+4)^2}\mathrm{d}t = 5\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2} + 8\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2} = \frac{-5}{2}\int\frac{\mathrm{d}t^2}{(t^2+4)^2} + 8\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2}.
$$

将 $8\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2}$ 代入递推公式(7.1.4)可得

$$
8\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2} = \frac{t}{t^2+4} + I_1 = \frac{t}{t^2+4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C.
$$

再带回原式子，最终得答案

$$
\frac{2x-7}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C.
$$

7.1.4 可有理化积分得不定积分

如果有些函数能够在换元后有理化，我们可以在换元后再求有理函数的不定积分，在把它换回原式子，就可以得到答案，下面给出一些方法.

回想初中学过的三角函数**万能公式**

$$\sin x=\frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}},\quad \tan x=\frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}. \tag{7.1.5}$$

这个式子可以把不同名的三角函数通通转化为同名的三角函数，再令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，就可以把函数有理化. 于是

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

用记号 $R(x,y)$ 表示关于 x,y 的二元有理函数，即多项式之比 $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 是单项式 $x^my^n(m,n=0,1,2,\cdots)$ 的线性组合.

于是在计算原函数 $\displaystyle\int R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$ 时，我们可以换元得到

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}(\arctan t)=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

然后对于形如 $\displaystyle\int R(\cos^2 x,\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$ 以及 $\displaystyle\int R(\tan x)\,\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(x)$ 是有理函数，于是可以令 $t=\tan x$ 然后利用以下中学学过的公式

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x},\quad \sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}. \tag{7.1.6}$$

此时

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x},\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^2 x}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int R(\cos^2 x,\sin^2 x)\,\mathrm{d}x&=\int R\left(\frac{1}{1+t^2},\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\\ \int R(\tan x)\,\mathrm{d}x&=\int R(t)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

然后对于形如 $\displaystyle\int R(\cos x,\sin^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x,\int R(\cos^2 x,\sin x)\cos\mathrm{d}x$ 则可以把 $\sin x,\cos x$ 收进积分号里. 再代换 $t=\cos x,t=\sin x$ 得到

$$-\int R(t,1-t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \int R(1-t^2,t)\,\mathrm{d}t.$$

例 7.1.20 计算不定积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}.$$

解 代换可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}=\int\frac{1}{3+\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+3}.$$

于是我们得到了一个有理函数的不定积分.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3u}{2\sqrt{2}}+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{2}}+c\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}+c.
\end{aligned}
$$

例 7.1.21 计算不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 3x-3\cos^2 3x+1}.$$

解 一般这种带平方项三角函数的都是同除以 $\cos^2 x$ 然后得到同名函数.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 3x-3\cos^2 3x+1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x[2\tan^2 3x-3+(1+\tan^2 3x)]}\\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\tan 3x}{3\tan^2 3x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2-2}\\
&= \frac{1}{3\times 2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{3}{2}}t}{\frac{3}{2}t^2-1} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}\\
&= \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c = \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}t-1}{\sqrt{\frac{3}{2}}t+1}\right|+C\\
&= \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\tan 3x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\tan 3x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|+C.
\end{aligned}
$$

我们再来看一下形式如 $\int R(x,y(x))\,\mathrm{d}x$ 的不定积分.

显然如果令 $x=x(t)$，其中 $x(t)$ 也是有理函数，并且可以让 $y=y(x(t))$ 变成 t 的有理函数，显然 $x'(t)$ 也是有理函数并且

$$\int R(x,y(x))dx = \int R(x(t),y(x(t)))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

于是又归结为有理函数的积分. 其中比较典型的是 $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$. 直接令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. 于是 $t^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，得到 $x=\dfrac{dt^n-b}{-ct^n+a}$.

例 7.1.22 计算不定积分

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

解 令 $t=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$，换元可得

$$\begin{aligned}
\int\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{d}\left(\frac{t^3+1}{1-t^3}\right) = t\frac{t^3+1}{1-t^3}-\int\frac{t^3+1}{1-t^3}\,\mathrm{d}t\\
&= t\frac{t^3+1}{1-t^3}-\int\left(\frac{2}{1-t^3}-1\right)\mathrm{d}t\\
&= t\frac{t^3+1}{1-t^3}+t-2\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t+t^2)}\\
&= \frac{2t}{1-t^3}-2\int\left[\frac{1}{3(1-t)}+\frac{2+t}{3(1+t+t^2)}\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{2t}{1-t^3}+\frac{2}{3}\ln|1-t|-\frac{2}{3}\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2t}{1-t^3}+\frac{2}{3}\ln|1-t|-\frac{1}{3}\ln\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)+C,\quad \text{其中}t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}.
\end{aligned}$$

再讨论形如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ 的不定积分. 我们还是从 ax^2+bx+c 中分离出完全平方并完成相应的线性代换. 然后可以得到下列三种情形之一.

$$\int R(t,\sqrt{t^2+1})\,\mathrm{d}t,\quad \int R(t,\sqrt{t^2-1})\,\mathrm{d}t, \int R(t,\sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t. \tag{7.1.7}$$

为了把这些分数写成有理形式，我们利用由 Eurler 给出的的代换

$$\begin{aligned}
&\sqrt{t^2+1}=tu+1,\quad \text{或}\quad \sqrt{t^2+1}=tu-1,\quad \text{或}\quad \sqrt{t^2+1}=t-u;\\
&\sqrt{t^2-1}=u(t-1),\quad \text{或}\quad \sqrt{t^2-1}=u(t+1),\quad \text{或}\quad \sqrt{t^2-1}=t-u;\\
&\sqrt{1-t^2}=u(1-t),\quad \text{或}\quad \sqrt{1-t^2}=u(1+t),\quad \text{或}\quad \sqrt{1-t^2}=tu\pm 1.
\end{aligned}\tag{7.1.8}$$

我们接下来验证第一个. 如果 $\sqrt{t^2+1}=tu+1$，则 $t^2+1=t^2u^2+2tu+1$. 于是

$$t=\frac{2u}{1-u^2}$$

进而

$$\sqrt{t^2+1}=\frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

其实我们还可以让 $t=\sinh\varphi, t=\cosh\varphi, t\sin\varphi$ 或者 $t=\cos\varphi$，于是积分(7.1.7)分别化为三角形式

$$\int R(\sinh\varphi,\cosh\varphi)\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\quad \int R(\cosh\varphi,\sinh\varphi)\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

以及

$$\int R(\sin\varphi,\cos\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\quad \text{或}\quad -\int R(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

例 7.1.23

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{t^2+1}}.$$

我们取 $\sqrt{t^2+1} = u - t$，于是 $1 = u^2 - 2tu$，从而 $t = \dfrac{u^2-1}{2u}$. 于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{t^2+1}} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2(u-1)} \\
&= \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + \frac{1}{2u} + c.
\end{aligned}$$

再把 u 换回最初始的式子就可以了.

我们最后来看一类不定积分

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,\mathrm{d}x,$$

其中 $P(x)$ 是次数大于 2 的多项式.Abel 和 Liouville 已经证明这个积分一般不能表示为初等函数. 当次数为 3 和 4 时，该积分被称为**椭圆积分**，在次数大于 4 时被称为**超椭圆积分.**

可以证明，一般的椭圆积分在经过初等代换可以化为以下三个标准椭圆积分（可以只相差一个初等函数项）：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{7.1.9}$$

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{7.1.10}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{7.1.11}$$

其中 h, k 是参数，且 $k \in (0,1)$.

这些积分经过代换 $x = \sin\varphi$ 可以以下标准积分或者其线性组合：

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{7.1.12}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{7.1.13}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{7.1.14}$$

分别称为 **Legendre 形式**的**第一类，第二类，第三类椭圆积分.** 我们用 $F(k,\varphi)$ 表示满足条件 $F(k,0)=0$ 的第一类椭圆积分，用 $E(k,\varphi)$ 表示满足条件 $E(k,0)=0$ 的第二类椭圆积分.

函数 $F(k,\varphi), E(k,\varphi)$ 很常用，所以当 $k \in (0,1), \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时，为它们编制了非常详细的函数表.

如 Abel 所述，在复数域中可以自然地看出椭圆积分和通常所说的椭圆函数之间有着密不可分的联系. 函数 $\sin\varphi$ 和积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}} = \arcsin\varphi$ 就是一个例子.

7.2 微分学中值定理

前面我们知道函数的导数或者微分是研究函数的局部性质，在本节我们将看到，如果一个函数在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可导，则它有什么样的整体性质.

7.2.1 Rolle 微分中值定理

Rolle 微分中值定理这是比较特殊的一个微分中值定理.

定义 7.2.1 (极值与极值点) 设函数 f 在开区间 (a,b) 上有定义并且有 $x_0 \in (a,b)$.

1. 若存在邻域 $U(x_0) \subset (a,b)$，使得 $\forall x \in U(x_0)$，有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处取得**极大值 (local maximum)**，并称 x_0 为**极大值点 (local maximum point)**.
2. 若存在邻域 $U'(x_0) \subset (a,b)$，使得 $\forall x \in U'(x_0)$，有 $f(x) \geqslant f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处取得**极小值 (local minimum)**，并称 x_0 为**极小值点 (local minimum point)**.

不难看出，函数的极值是一个局部 (local) 的概念，而函数的最值是整个定义域上的一个概念.

为了大幅减小证明 Rolle 定理的难度，我们需要一个预先的引理

引理 7.2.1 (Fermat 引理) 如果一个函数 f 在区间 I 上有定义，若 f 在 $x_0 \in I$ 处可微且 x_0 是 f 的一个极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

需要注意的是，上述引理给出的是必要性，而不是充分必要性. 比如函数 $f(x) = x^3$，有 $f'(0) = 0$，但显然该函数在 0 处没有极值.

证明 不妨设 f 在 x_0 处可以取到极大值. 按照定义，存在一个右邻域 $U_+(x_0)$ 满足 $\forall x \in U_+(x_0)$ 有 $f(x) \leqslant f(x_0)$. 同时也存在一个左邻域 $U_-(x_o)$ 满足 $\forall x \in U_-(x_0)$ 也有 $f(x) \leqslant f(x_0)$.

于是我们可以同时得到以下两个不等式.

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &\geqslant 0, \quad x \in U_-(x_0), \\
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &\leqslant 0, \quad x \in U_+(x_0).
\end{aligned}
$$

上述两个不等式取极限，并由极限的保不等式性可得

$$
\begin{aligned}
f'_-(x) &= \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0, \\
f'_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，于是有

$$
0 \leqslant f'_-\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right) = f'_+\left(x_0\right) \leqslant 0.
$$

这就说明了 $f'(x) = 0$. 同理也可以取 x_0 为极小值点，再将上述不等号全部取反，也有 $f'(x_0) = 0$. □

例 7.2.1 指数函数和对数函数都没有极值点，因为导函数不可能为 0.

为了后续叙述方便，我们再给出一个定义.

定义 7.2.2 (驻点) 定义在区间 I 上的函数 f. 如果 $x_0 \in I$ 且有 $f'(x_0) = 0$. 则称 x_0 是 f 在 I 上的一个**驻点 (stationary point)** 或者**临界点 (critical point)**.

定理 7.2.1 (Rolle 微分中值定理) 设函数 $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 上可微. 若 $f(a) = f(b)$，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[a.b]$ 上连续. 由最值定理可得，f 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 以及最小值 m. 如果最大值和最小值在端点 a, b 上，则最大值和最小值相等，该函数在 (a, b) 上为常值函数，这时任取 $\xi \in (a, b)$ 都有 $f'(\xi) = 0$ 成立.

如果最大值和最小值至少有一个不在端点上，不妨设最大值不在端点上，那么立即有 $M > m$. 这时 M 就是 f 在 $[a, b]$ 上的一个极值. 又因为 f 在 $[a, b]$ 是连续函数，于是肯定存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = M$. 然后又有 Fermat 引理可得，存在 $f'(\xi) = 0$. □

接下来看一个方法比较经典的例子.

例 7.2.2 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导，且 $f(a + 0) = f(b - 0) = l \in \bar{\mathbb{R}}$(即可能 l 为 $+\infty$ 或 ∞). 则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 如果 $l \in \mathbb{R}$，那么我们把 $f(x)$ 的端点补全，于是有

$$F(x) = \begin{cases} l, & x = a \vee b \\ f(x), & x \in (a, b) \end{cases}.$$

这样 $F(x)$ 就在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导. 于是由 Rolle 中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

如果 $l \in \bar{R} \backslash \mathbb{R}$. 我们不妨先设 $l = +\infty$. 此时按照定义，对于一个数 $M \in \mathbb{R}$，存在两个开区间 $(a, a + \delta_1), (b, b - \delta_2)$,，使得任意分别属于这两个邻域的 x，都有 $f(x) > M$. 由于 f 在 (a, b) 上连续，于是 $f[(b, b - \delta_2)]$□$f[(a, a + \delta_1)]$ 都是区间. 再取

$$k = \max\{f(b - \delta_2), f(a + \delta_1)\}.$$

那么 $[k, +\infty)$ 同时包含于 $f[(b, b-\delta_2)]$□$f[(a, a+\delta_1)]$ 两个区间. 于是对于 $c \in [k, +\infty)$,一定存在 $x_1 \in (a, a+\delta_1), x_2 \in (b, b+\delta_2)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = c$. 这时再由 Rolle 中值定理可得存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. □

再看一个具体些的例子.

例 7.2.3 $\forall c \in \mathbb{R}$，方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在 $[0, 1]$ 上没有相异的根.

证明 为了利用 Rolle 中值定理，我们设 $f(x) = x^3 - 3x + c$. 显然该函数在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 上可导. 假设存在 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [0, 1]$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$. 由 Rolle 中值定理可知，存在 $\xi \in [0, 1]$ 使得 $f'(\xi) = 0$. 可解得 $\xi = \pm 1$. 而这个值不在 $(0, 1)$ 之间，出现矛盾. □

7.2.2 Lagrange 中值定理

我们接下来利用 Rolle 中值定理来证明 **Lagrange 中值定理**

定理 7.2.2 (Lagrange 中值定理) 设函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，并且在 (a, b) 上可微. 则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明 为了利用 Rolle 中值定理，我们需要构造辅助函数 $g(x)$ 使得 $g(a)=g(b)=0$. 于是设过点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 的直线 $l(x)$. 于是有

$$g(x)\coloneqq l(x)-f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)-f(x).$$

将 a,b 代入显然有 $g(a)=g(b)=0$. 由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续，在 (a,b) 上也可导，由 Rolle 中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g'(\xi)=0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi)\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

为了方便后面 Taylor 多项式的误差估计，我们利用 $\theta\in(0,1)$ 来描述在 (a,b) 中的 ξ. 于是就有

$$\xi=a+\theta(b-a),\theta\in(0,1). \tag{7.2.1}$$

此时 Lagrange 中值定理中得等式就可写为

$$f(a)-f(b)=f'(a+\theta(b-a))(b-a). \tag{7.2.2}$$

上述等式称为**有限增量公式 (finite increment formula)**. 所以 Lagrange 中值定理又称 **Lagrange 有限增量定理**.

等式(7.2.1)有一个好处就是可以不用考虑 a,b 谁大谁小，因为只要 ξ 介于 a,b 之间，总可以找到 $\theta\in(0,1)$ 使得这个等式成立. 当然，在后面误差的估计也可以带来方便. 不过需要注意的是，即便是这样，ξ 在 a,b 中的位置仍然不是我们关心的重点. 我们关心得仍然是存在性.

例 7.2.4 反三角函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 连续，从而一致连续.

证明 任取 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. 显然 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 上可导. 于是由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\Longrightarrow|\arctan x_1-\arctan x_2|=\frac{1}{1+\xi^2}|x_2-x_1|.$$

又因为

$$0<\frac{1}{1+\xi^2}\leqslant 1.$$

所以存在 $K=1$ 使得对于任意 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 都有

$$|\arctan x_2-\arctan x_1|\leqslant K|x_2-x_1|.$$

于是可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 连续，从而一致连续. □

上述例子告诉我们一个重要事实.

定理 7.2.3 若函数 f 在区间 I 上得导函数有界，则 f 在 I 上 Lipschitz 连续，从而一致连续.

接下来给出几个比较有用的 Lagrange 微分中值定理的几个推论.

推论 7.2.1 (函数单调性检验法) 设 $f:E\to\mathbb{R}$ 在开区间 (a,b) 上可导.

1. 如果任意 $x\in(a,b)$ 都有 $f'(x)\geqslant 0$，则 f 在 (a,b) 不减. 如果把 $\geqslant$ 改为 $>$ 则 f 在 (a,b) 上递增.

2. 如果任意 $x\in(a,b)$ 都有 $f'(x)\leqslant 0$，则 f 在 (a,b) 不增. 如果把 $\leqslant$ 改为 $<$ 则 f 在 (a,b) 上递减.

证明 只证明第一个. 对于任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，不妨设 $x_1 < x_2$ 那么由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$，有等式

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

由于 $x_2 - x_1 > 0$，而 $f'(\xi) \geqslant 0$ 或 > 0，那么 $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ 或 > 0. □

推论 7.2.2 (常函数检验法) 函数 $f : \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数的充要条件为 $\forall x \in (a,b)$ 有 $f'(x) = 0$.

证明 只需要证明充分性：对于任意 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [a,b]$，由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0.$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数. □

上述定理也告诉我们，如果 $F_1(x), F_2(x)$ 在某区间 I 上有 $\forall x \in I, F_1'(x) = F_2'(x)$，则在区间 I 上 $F_1(x) - F_2(x) = C \in \mathbb{R}$.

接下来由 Lagrange 中值定理再给出一个函数可导的必要条件.

定理 7.2.4 设函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，则导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可能有第一类间断点.

证明

第八章　Riemann 积分

8.1　Riemann 积分的概念

8.1.1　度量问题

我们把“长度”看为是 1 维实空间 $\mathbb{R}$ 的（实数轴）的一个子集族 X 到实数域 $\mathbb{R}$ 的一个映射 L. 首先给出定义

$$L([a,b]) \coloneqq b-a.$$

其中 $a \leqslant b$. 这说明对任何闭区间 $[a,b]$ 的长度都为 $b-a$. 并蕴含了数轴上任意一点的长度为 0. 然后给出以下几条公理

公理 8.1.1 对于任意 $A,B \in X$ 有

1. 非负性：$L(A) \geqslant 0$.
2. 单调性 $A \subset B \Rightarrow L(A) \leqslant L(B)$.
3. 可加性：$A \cap B = \varnothing \Rightarrow L(A \cup B) = L(A) + L(B)$.

集合 A 经过平面上的正交变换变成了集合 B，则称 A 和 B **全等或合同 (congruence)**. 于是我们定义，$L(A)=L(B)$ 当且仅当 A 全等 B.

同理，我们可以把面积看做是二维实数空间 $\mathbb{R}^2$ 到实数域 $\mathbb{R}$ 的一个映射. 不断下去可以把这些概念推广到 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中. 这就是**测度 (measure)**.

我们以前学过矩形，三角形等规则图形的面积，一个自然的想法是如何计算曲面的面积. 一个朴素的想法是把不规则图形分割为一个个矩形，然后计算矩阵的面积之和，再加回去.

考虑函数 $f(x)=x^2$. 现在我们希望计算它在 $[0,1]$ 上与 x 轴围成的面积. 按照上面的想法，我们用一些点 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 把 $[0,1]$ 分割为 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n$. 然后我们在每个小区间中取一个点 $\xi_i \in [x_i,x_{i-1}]$，并把 $f(\xi_1)$ 作为矩形的高. 于是可以得到小矩形的总面积

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

当然这只是一个近似于曲面的面积. 我们为了得到更加精确的值，我们让每个小区间的长度尽量的小. 于是我们令

$$\lambda = \max\{L([x_{i-1},x_i]), i=1,\cdots,n\}.$$

再让 λ 趋于 0，则所有的区间长度都会趋于 0，自然地，会有式子

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

出现.

8.1.2　Riemann 积分的定义

在定义 Riemann 积分之前，我们先做一些铺垫的工作.

定义 8.1.1 我们定义闭区间 $[a,b]$ 上满足 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的有限个点为区间 $[a,b]$ 上的**分割 P(partition P)**.

分割 P 的闭区间 $[x_{i-1},x_i],(i=1,2,\cdots,n)$ 被称为**分割区间 (interval of the partition)**.

分割 P 中长度最大的分割区间的长度记为 $\lambda(P)$，称为**分割参数 (mesh of the partition)**.

定义 8.1.2 如果在闭区间 $[a,b]$ 的一个分割 P 的每一个闭区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都选定一个标记点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],(i=1,2,\cdots,n)$，则说给出了 $[a,b]$ 的一个**标记分割 (partition with distinguished point)**，记为 (P,ξ).

其中用单一的 ξ 来表示所有标记点 $\xi_1,\cdots,\xi_n$.

命题 8.1.1 (分割集的基) 关于 $[a,b]$ 上所有标记分割组成的集合 $\mathcal{P}$，我们认为集合族 $\mathcal{B}=\{B_d\}$ 是 $\mathcal{P}$ 上的一个基，其中元素 $B_d,d>0$ 是包含了所有 $\lambda(P)<d$ 的标记分割的集合.

证明 首先由于 $d>0$ 所以 $B_d\neq\varnothing$. 并且对于任何 $d>0$，显然总存在参数 $\lambda(P)<d$ 的分割 P，所以满足 $\lambda(P)<d$ 的标记分割 (P,ξ) 也存在. 我们记基 $\mathcal{B}$ 为 $\lambda(P)\to 0$.

然后如果 $d_1>0,d_2>0$，取 $d=\min\{d_1,d_2\}$，于是 $B_{d_1}\cap B_{d_2}=B_d\in\mathcal{B}$. 因为 d 更大的集合按照定义总包含 d 更小的那个集合.

综上 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{P}$ 上的一个基. □

定义 8.1.3 (Riemann 和) 设函数 f 定义在闭区间 $[a,b]$ 上，并且 (P,ξ) 是 $[a,b]$ 上的一个标记分割，则称

$$\sigma(f;P,\xi):=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

为函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上由标记分割 (P,ξ) 给出的 **Riemann 和**，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

因此，当 f 固定下来后，Riemann 和 $\sigma(f;P,\xi)$ 是一个 $\mathcal{P}$ 上的函数 $\Phi(p)=\sigma(f;p)$，其中 $p=(P,\xi)$，f 是 $[a,b]$ 上的函数. 于是就可以提出函数 $\Phi(p)$ 在基 $\mathcal{B}$ 上极限的问题.

定义 8.1.4 (Riemann 积分) 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的一个函数. 如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对于任意满足 $\lambda(P)<\delta$ 的标记分割 (P,ξ) 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

则称 $I\in\mathbb{R}$ 是 f 在 $[a,b]$ 区间上的 **Riemann 积分 (Riemann integral)**，并且 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积 (Riemann integrable)**.

因为满足 $\lambda(P)<\delta$ 的所有标记分割可以组成一个集合 B_δ，即是基 $\mathcal{B}$ 上的一个元素，于是上述定义用基上的极限描述就是

$$I=\lim_{\mathcal{B}}\Phi(p).$$

从前面的描述可知基 $\mathcal{B}$ 可以表述成 $\lambda(P)\to 0$，于是积分的定义可以改写为

$$I=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\int$ 为积分号，a 为**积分下限 (lower limit of integration)**，b 为**积分上限 (upper limit of integration)**，f 为**被积函数 (integrand)**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为**被积表达式 (differential form)**.

由 Riemann 积分的定义立即可知以下性质.

命题 8.1.2 设函数 f,g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

1. 非负性（保号性）：若 f 在 $[a,b]$ 上非负，则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$
2. 单调性（保序性）：若 f,g 在 $[a,b]$ 上满足 $f(x)\geqslant g(x)$ 则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. 可加性：若 $c\in(a,b)$，且 f 在 $[a,c],[c,b]$ 上都可积，则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. 线性：
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 8.1.1 由后面的推论可知 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么它在 $[a,c],[c,b]$ 上都可积. 所以上述第 3 个性质的条件可以去掉. 并且我们可以规定
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

目前 Riemann 积分的定义是非常难用的，所以我们来看一些最简单的例子.

例 8.1.1 计算 Riemann 积分：
$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x,\quad c\in\mathbb{R}.$$

解 先计算 $\int_a^b \mathrm{d}x$. 做任意分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 再做任意的标记 $\xi_i, i=1,2,\cdots,n$. 于是我们得到了一个任意的标记分割 (P,ξ).

注意到 $f(\xi_i)=1, i=1,2,\cdots,n$. 所以
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) = x_1-x_0+x_2-x_1+\cdots+x_n-x_{n-1} = x_n-x_0 = b-a.$$
于是，$I=b-a$，因为对于任意 $\varepsilon>0$ 有
$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-(b-a)\right| = 0<\varepsilon.$$
又因为 Riemann 积分是线性的，所以
$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\int_a^b \mathrm{d}x = c(b-a).$$
□

例 8.1.2 计算 Riemann 积分：

$$\int_a^b cx\,\mathrm{d}x.$$

解 同样还是先计算 $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$. 对区间 $[a,b]$ 做任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 接下来我们先取一个特殊的标记点 $\eta_i, i = 1, 2, \cdots, n$，这时每一个 η_i 都是对应分割区间的中点. 即 $\eta_i = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{2}, i = 1, 2, \cdots, n$. 于是

$$\sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_i - x_{i=1}) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

又因为

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [\eta_i \Delta x_i + (\xi_i - \eta_i)\Delta x_i] = \sum_{i=1}^n \eta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)\Delta x_i = \frac{b^2 - a^2}{2} + \sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)\Delta x_i$$

且 $|\xi_i - \eta_i| \leqslant \lambda(P), i = 1, 2, \cdots, n$. 所以对于任意 $\varepsilon > 0$，只需取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{b - a}$，当标记分割 (P, ξ) 满足 $\lambda(P) < \delta$ 时就有

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi \Delta x_i - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| = \left|\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|\Delta x_i \leqslant \lambda(P)\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \lambda(P)(b - a) < \varepsilon.$$

于是

$$\int_a^b cx\,\mathrm{d}x = c\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{c(b^2 - a^2)}{2}.$$

□

8.1.3　Riemann 可积函数的性质

如果一个 Riemann 积分不为零，则可以给出以下条件

命题 8.1.3 (Riemann 积分的正定性) 设函数 $f: \mathbb{R} \supset E \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续且非负，并且 f 不恒等于 0. 此时若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

证明 由于 $f(x)$ 非负且不恒为零，故存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) > 0$. 由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，于是存在 $[a_1, b_1]$ 满足 $x_0 \in [a_1, b_1] \subset [a,b]$ 且对于 $\forall x \in [a_1, b_1]$ 有

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(x_0).$$

由于 $f(x)$Riemann 可积，由 Riemann 积分的单调性可知

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2}f(x_0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)(b_1 - a_1) > 0.$$

由 Riemann 积分的可加性和非负性可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_1}^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x > 0..$$

注 8.1.2 由下一节的定理可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则一定在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

上述逆否命题可以作为一个推论.

推论 8.1.1 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

则 $f(x) \equiv 0$.

例 8.1.3 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$\int_a^b f^2(x) = 0$$

则 $f(x) \equiv 0$ 在 $[a,b]$ 上成立.

命题 8.1.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 由于 $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$，所以由 Riemann 积分的单调性可知

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \iff \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

注 8.1.3 由下一节的定理可知，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积.

和大部分线性算子一样，Riemann 积分对于函数的加法和数乘也是“平凡”的，而对于函数的乘法是不好处理的，于是以下定理可以帮助我们转换函数的乘积的积分.

定理 8.1.1 (Riemann 积分的中值定理) 设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，且 g 不改变符号. 如果 fg 和 g 都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 $g(x) \equiv 0$ 时显然成立. 下设 $g(x) \neq 0$. 由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不改变符号，不妨设 $g(x) \geqslant 0$. 由 Riemann 积分的正定性可知

$$\int_a^b g(x) > 0.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以可以找到 f 在 (a,b) 上的最大值 M 和最小值 m. 于是当 $x \in [a,b]$ 时

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \Longleftarrow mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

再由 Riemann 积分的单调性可知

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \iff m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

如果 $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$ 不是最大值或最小值，那么对 $f(x)$ 用介值定理可知，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

于是

$$f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \int_b^a g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

显然，如果 $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$ 是最大值或最小值，ξ 也可以取到，以及 ξ 可能位于端点 a 或端点 b 处. 综上所述，存在 $\xi \in [a,b]$ 使得结论成立. □

注 8.1.4 事实上 ξ 一定可以在 (a,b) 找到.(详见：谢惠民等.《数学分析习题课讲义（上册）》. 高等教育出版社.308 页.)

令 $g(x) = 1$ 就可以得到以下推论

推论 8.1.2 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

8.2 Riemann 可积的条件

8.2.1 Riemann 可积的必要条件

类似定义了数列的极限后要先判断那些数列是存在极限的，Riemann 积分也是如此，要先判断哪些函数是可积的.

命题 8.2.1 (Riemann 可积的必要条件) 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个有界函数.

证明 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分为 I. 由 Riemann 积分的定义可知，取定 $\varepsilon = 1$，于是存在一分割 $P: a \leqslant x_0 < x_1 \leqslant < x_n = b$ 以及对于 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的任意一个标记点 $\xi_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1.$$

再由三角不等式可得

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| - |I| \leqslant \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1 \Longrightarrow \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I| + 1.$$

然后

$$\left|f(\xi_1)\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n}f(\xi)\Delta x_i\right|<|I|+1$$

于是

$$|f(\xi_1)|<\frac{1}{\Delta x_1}\left(\left|\sum_{i=2}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|+|I|+1\right).$$

我们固定 $\xi_2,\cdots,\xi_n$，而 ξ_1 仍然是任意 $[x_0,x_1]$ 上任意一点，所以 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 上是有界的.

同理对 $\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$ 也进行同样的操作，于是函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1],[x_1,x_2]\cdots,[x_{n-1},x_n]$ 上都是有界的，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是有界的. □

例 8.2.1 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

证明 对于 $\forall M>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{M^3}$，则 $x\in(0,\delta)$ 时有 $f(x)>M$. 这说明该函数在 $(0,1)$ 上无界故没有 Riemann 积分. □

注 8.2.1 我们从后面可以看到，该函数在适当放宽条件后就可以做“广义积分”.

8.2.2 上积分与下积分

由于 Riemann 积分的定义实在难以操作，于是我们需要找到刻画 Riemann 积分的其它方法. 分别找出分割 P 决定的所有 Riemann 和的上确界和下确界，这样我们就可以绕开 ξ_i 来讨论问题.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 然后我们给定一个分割 $P:a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，找到每个分割区间的的下确界和上确界并分别记为

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

于是就有

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i.$$

这样我们就找到了 Riemann 和的下确界和上确界.

定义 8.2.1 设 f 在区间 $[a,b]$ 上是有界的. 给定 $[a,b]$ 的一个分割

$$P:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

然后找出每个分割区间函数的上下确界并分别记为 $M_i,m_i,(i=1,2,\cdots,n)$. 于是我们定义

$$\overline{S}(f;P)\coloneqq\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad \underline{S}(f;P)\coloneqq\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

并把 $\overline{S}(f;P)$ 和 $\underline{S}(f;P)$ 称为函数 f 关于分割 P 的 **Darboux 上和 (upper Darboux sum)** 与 **Darboux 下和 (lower Darboux sum)**，简称**上和**与**下和**.

类似于数列的上极限和下极限，我们希望上面定义的上和随着分割的变细递减，且有下界；下和则随着分割的变细递增且有上界.

我们从最简单的情况开始，在分割 P 的基础上再任意增加一个分割点得到 P'. 于是得到了新的上和 $\overline{S}(f;P')$ 以及新的下和 $\underline{S}(f;P')$. 不妨设新增的分割点位于区间 $[x_{k-1},x_k]$ 内. 于是

$$\begin{aligned}\underline{S}(f;P')-\underline{S}(f;P)&=\sum_{i=1}^{k-1}m_i\Delta x_i+\inf f([x_{k-1},x'])(x'-x_{k-1})+\inf f([x',x_k])(x_k-x')+\sum_{i=k+1}^{n}m_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\\&=\inf f([x_{k-1},x'])(x'-x_{k-1})+\inf f([x',x_k])(x_k-x')-m_k\Delta x_k.\end{aligned}$$

显然

$$\inf f([x_{k-1},x'])\geqslant m_k,\quad \inf f([x',x_k])\geqslant m_k$$

所以

$$\underline{S}(f;P')-\underline{S}(f;P)\geqslant m_k(x'-x_{k-1})+m_k(x_k-x')-m_k\Delta x_k=0.$$

所以 $\underline{S}(f;P)$ 是不减的. 同理可得 $\overline{S}(f;P)$ 是不增的.

显然

$$\inf f([x_{k-1},x'])\leqslant M_k,\quad \inf f([x',x_k])\geqslant M_k$$

所以

$$\underline{S}(f;P')-\underline{S}(f;P)\leqslant M_k(x'-x_{k-1})+M_k(x_k-x')-m_k\Delta x_k=(M_k-m_k)\Delta x_k=\omega_k\Delta x_k\leqslant\omega\Delta x_k\leqslant\omega\lambda(P),$$

其中 ω_k 是 f 在 Δx_k 上个的振幅，ω 是 f 在 $[a,b]$ 上的振幅. 移项可得

$$\underline{S}(f;P)\leqslant\underline{S}(f;P')\leqslant\underline{S}(f;P)+\omega\lambda(P).$$

同理可得，

$$\overline{S}(f;P)\geqslant\overline{S}(f;P')\geqslant\overline{S}(f;P)-\omega\lambda(P).$$

如果，再在分割 P' 的基础上再任意增加一个点，得到 P''，我们马上也可以得到

$$\underline{S}(f;P)\leqslant\underline{S}(f;P')\leqslant\underline{S}(f;P'')\leqslant\overline{S}(f;P')+\omega\lambda(P)\leqslant[\overline{S}(f;P)+\omega\lambda(P)]+\omega\lambda(P)=\overline{S}(f;P)+2\omega\lambda(P)$$

依次递推的得到增加 n 个分割点的不等式. 于是得到以下命题,

命题 8.2.2 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数. 且给定分割 P，然后再在它的基础上加 n 个分割点，得到新的分割 P'. 此时若 f 在 $[a,b]$ 上的增幅为 ω，则

$$\underline{S}(f;P)\leqslant\underline{S}(f;P')\leqslant\underline{S}(f;P)+n\omega\lambda(P),\tag{8.2.1}$$

$$\overline{S}(f;P)\geqslant\overline{S}(f;P')\geqslant\overline{S}(f;P)-n\omega\lambda(P).\tag{8.2.2}$$

对于 $[a,b]$ 的任意两个分割 P_1,P_2，把所有的分割点都用在一起时记为 P_1+P_2. 再由上面的不等式可得

$$\underline{S}(f;P_1)\leqslant\underline{S}(f;P_1+P_2)\leqslant\overline{S}(f;P_1+P_2)\leqslant\overline{S}(f;P_2).$$

这表明，对于任意两个分割，一个分割的下和总是小于另一个分割的上和的. 于是一个函数中的所有上和组成的集合是有下界的，所有下和组成的集合是有上界的. 由确界原理可知，上和组成的集合有下确界，下和组成的集合有上确界. 现在我们可以正式给出“上积分”和“下积分”的定义.

定义 8.2.2 (Darboux 积分) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界. 对于任意一个在 $[a,b]$ 上的分割 P，我们定义 f 在 $[a,b]$ 上的所有 Darboux 上和组成的集合的下确界为 **Darboux 下积分 (under Darboux integral)**；f 在 $[a,b]$ 上的所有 Darboux 下和组成的集合的上确界为 **Darboux 上积分 (over Darboux integral)**

$$\overline{\int_a^b} := \inf\{\overline{S}(f;P)|P\text{是}[a,b]\text{上的分割}\} = \inf_P \underline{S}(f;P),$$
$$\underline{\int_a^b} := \sup\{\underline{S}(f;P)|P\text{是}[a,b]\text{上的分割}\} = \sup_P \overline{S}(f;P).$$

如果 Darboux 上积分和 Darboux 下积分相等时，设都等于 I，则称 I 为 **Darboux 积分 (Darboux integral)**，称函数 f 是 **Darboux 可积 (Darboux integrable)** 的.

例 8.2.2 求 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上的上积分和下积分.

解 对于 $[0,1]$ 的任意分割，任意小的分割区间内都一定含有有理点和无理点，所以任意分割区间内的上确界都是 1，下确界都是 0. 所以

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0.$$

则显然

$$\inf \overline{S}(f;P) = 1, \sup \underline{S}(f;P) = 0,$$

即

$$\overline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \underline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

所以 Dirichlet 函数在 $[0,1]$ 上 Darboux 不可积. □

注 8.2.2 对于类似这种函数，从 Riemann 积分上直观的看，它的面积没有定义了，也就是说，Riemann 积分“失效”了，但是我们还是想要定义它的积分，这时就需要用到我们后面在实分析中会学习的 Lebusgue 积分.

在定义新的东西时，我们应当保证原有的东西不会被改变，且新定义能使用的范围变大了. 比如 Lebusgue 积分，原来在 Riemann 积分下有定义的函数在做 Riemann 积分后的结果通通可以保持不变，且在 Riemann 积分定义失效的情况下的部分函数在 Lebusgue 积分下仍然有定义.

前面我们已经看到随着分割 P 的分割点不断增多，上和在不断递减且有下界，下和在不断递增且有上界，那么当 $\lambda(P) \to 0$ 时，上和与下和的极限一存在，我们证明这个极限分别就是上积分和下积分.

定理 8.2.1 (Darboux 定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上有界. 对于任意分割 P 有

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \overline{S}(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8.2.3}$$
$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \underline{S}(f;P) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.2.4}$$

证明 只证明上积分的情况. 把 f 在 $[a,b]$ 上的上积分记为 $\overline{I}$. 由上积分的定义可知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的一个分割 P_0 使得

$$\overline{S}(f;P_0) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 P_0 有 k 个分割点（不含 a,b）. 则对于 $[a,b]$ 上任意满足 $\lambda(P) < \frac{\varepsilon}{2k\omega+1}$ 的分割 P，利用 (8.2.2) 可知

$$\overline{S}(f;P) \leqslant \overline{S}(f;P+P_0) + k\omega\lambda(P) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} + k\omega\frac{\varepsilon}{2k\omega+1} < \overline{I} + \varepsilon.$$

由假设 ε 是任意小的，所以

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \overline{S}(f;P) = \overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

类似数列的上下极限, 上积分与下积分也有一些类似性质.

命题 8.2.3 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，则

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 8.2.4 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，如果对于任意 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\geqslant g(x)$，则

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 8.2.5 (Darboux 积分的可加性) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 若 $c\in(a,b)$，则

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 8.2.6 (Darboux 积分的超可加性与次可加性) 设函数 f,g 在 $[a,b]$ 上有界. 则

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x,$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

命题 8.2.7 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界. 对于任意实数 $c\geqslant 0$ 都有

$$\overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于任意实数 $c\leqslant 0$ 都有

$$\overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

接下来给出 Riemman 可积的充分必要条件.

定理 8.2.2 (Riemann 可积的充分必要条件) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界，则以下 4 个命题等价：

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

2. 对于任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，并设 ω_i 是 f 在分割区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，则

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

3. 对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $[a,b]$ 的一个分割 P，使得

$$\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) < \varepsilon.$$

4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积.

证明 采用轮转证法. 对于 1. ⇒ 2. 设 $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对于任意分割参数 $\lambda(P) < \delta$ 的标记分割 (P, ξ) 都有

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是有

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{S}(f;P) \leqslant \overline{S}(f;P) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

可得

$$0 \leqslant \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \Delta\omega_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

2. ⇒ 3. 不难看出，如果 2. 成立，则对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $[a,b]$ 上的分割 P 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) < \varepsilon.$$

3. ⇒ 4. 对于任意 $\varepsilon > 0$，都有

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_P \overline{S}(f;P) - \sup_P \underline{S}(f;P) \leqslant \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) < \varepsilon.$$

由于 ε 是任意小的，所以 Darboux 上积分等于 Darboux 下积分，故 Darboux 可积.

4. ⇒ 1. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可积，所以

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

又因为对于任意标记分割 (P, ξ) 有

$$\underline{S}(f;P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \overline{S}(f;P).$$

对上式取 $\lambda(P)$ 趋于 0，就有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(P\to 0}\underline{S}(f;P) \leqslant \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(f;P)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由夹逼定理可知，极限 $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，故 Riemann 可积. □

例 8.2.3 判断 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 Riemann 可积.

解 由于

$$1=\overline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x \neq \underline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x=0$$

故 Riemann 不可积. □

定理 8.2.3 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证明 如果 $f(a)=f(b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数，一定 Riemann 可积. 若 $f(a)\neq f(b)$ 不妨设 $f(a)<f(b)$. 于是对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ 使得对于任意 $\lambda(P)<\delta$ 的标记分割 (P,ξ) 都有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\lambda(P)=[f(b)-f(a)]\lambda(P)<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi)\Delta x_i=0.$$

由**定理8.2.2**可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的. □

8.2.3　Riemann 可积函数类

本小节会从理论上彻底给出所有 Riemann 可积的函数.

定理 8.2.4 (连续函数可积) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致连续的，所以对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=$ 使得对任意的 $s,t\in[a,b]$ 有

$$|s-t|<\delta\Longrightarrow|f(s)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

作任意分割 $P:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，再设 $f(s_i)=M_i,f(t_i)=m_i$ 其中 $0s_i,t_i\in[x_{i-1},x_i],(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 $|s_i-t_i|\leqslant|x_i-x_{i-1}|\leqslant\lambda(P)<\delta$. 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[f(s_i)-f(t_i)]\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot b-a=\varepsilon.$$

事实上，一个在 $[a,b]$ 上的的连续函数在 $[a,b]$ 中去掉至多可数个点后还是可积的，那么就要问，当去掉多少个点后会变得不可积呢？

我们引入实分析中零测集的概念.

定义 8.2.3 (零测集) 设集合 $E\subset\mathbb{R}$. 如果对于任何一个实数 $\varepsilon>0$，集合 E 可被至多可数个开区间组成的集合 $\{I_n,n=1,2,\cdots\}$，覆盖，且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leqslant\varepsilon,$$

则称 E 是 Lebesgue 意义下的**零测集 (null set)** 或者称 E 是**零测度的 (measure zero)**.

注 8.2.3 至多可数个开区间可改为至多可数个闭区间. 小于等于 ε 可以改为小于 ε 但使用起来会更麻烦. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|$ 绝对收敛，所以求和顺序对结果没有影响，所以上述定义是良定义的.

我们再来看关于零测集的几个性质.

命题 8.2.8 空集是零测集.

命题 8.2.9 设集合 B 是零测集，且 $B\subset A$，则 B 也是零测集.

命题 8.2.10 设集合 $A\subset\mathbb{R}$，若 A 是至多可数的，则 A 是零测集.

证明 不失一般性，设 A 为可数集. 于是设 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$. 对于任意的 $\varepsilon>0$，构造开区间族

$$\left\{I_n\,\middle|\,I_n=\left(a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},a_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)\right\}.$$

显然 $\{I_n\}$ 是 A 的一个开覆盖，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\varepsilon.$$

命题 8.2.11 至多可数个零测集的并集仍然是零测集.

证明 设 $A_1,A_2,\cdots$ 都为零测集. 对于每一个零测集 $A_n,n=1,2,\cdots$ 都存在一个开覆盖 $\{I_{n1},I_{n2},\cdots|I_{ni}\subset\mathbb{R}\}$. 于是对于任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_{ni}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

把所有的零测集并起来得到 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 把每一个零测集的开覆盖也并起来得到 $\{I_{ni}|n,i=1,2,\cdots\}$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|I_{ni}|\leqslant\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\varepsilon.$$

所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 仍然是零测集. □

定理 8.2.5 (Lebesgue-Vitali 定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的间断点组成的集合是零测集.

证明 1. 先证明必要性. 现在做任意分割 $P:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 设 $D(f)$ 为 f 在 $[a,b]$ 所有不连续点的组成的集合，再设 $D_\delta=\{x\in[a,b]|\omega(x)\geqslant\delta\}$，即为所有振幅不小于 δ 的点组成的集合. 注意到

$$D(f)=\bigcup_{m=1}^{\infty}D_{\frac{1}{m}}.$$

所以要证明 $D(f)$ 是零测集，只需要证明对于任意 $\delta>0$，D_δ 都是零测集.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，所以对于任意 $\varepsilon>0$，都存在一些分割 P 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2\delta}.$$

然后我们再设 $x \in D_\delta$. 如果 $x \neq x_i, (i=0,1,\cdots,n)$，则 x 必然属于某一区间 (x_{i-1},x_i)，则对于 $U(x) \subset (x_{i-1},x_i)$ 有

$$\omega_i \geqslant \omega[U(x)] \geqslant w(x) \geqslant \delta,$$

即函数在 (x_{i-1},x_i) 上的振幅不小于函数在 x 附近的振幅，不小于函数在点 x 处的振幅，不小于 δ.

为了构造 D_δ 的开覆盖，我们定义一个指标集

$$\Lambda = \{i \in \mathbb{N} | \exists x \in (x_{i-1},x_i), \omega(x) \geqslant \delta\}.$$

于是

$$D_\delta \subset \left(\bigcup_{i\in\Lambda}(x_{i-1},x_i)\right) \cup \{x_0,x_1,\cdots,x_n\}.$$

所以有

$$D_\delta \subset \left(\bigcup_{i\in\Lambda}(x_{i-1},x_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_i + \frac{\varepsilon}{4(n+1)}\right)\right).$$

对于 $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(x_{i-1},x_i)$，有

$$\sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i \leqslant \delta\sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i \leqslant \sum_{i\in\Lambda}\omega_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而对于 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_i + \frac{\varepsilon}{4(n+1)}\right)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_i + \frac{\varepsilon}{4(n+1)}\right)\right| = 2n\cdot\frac{\varepsilon}{4(n+1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

综上，

$$|D_\delta| \leqslant \sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_i + \frac{\varepsilon}{4(n+1)}\right)\right| < \varepsilon.$$

故对于任意的 $\delta > 0$，D_δ 是零测集，所以 $D(f)$ 是零测集.

2. 证明充分性. 我们的目的是要证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 可以任意小.

由于 $D(f)$ 为零测集，所以对于任意 $\varepsilon > 0$ 都可以找到一个开覆盖 $\{(\alpha_i,\beta_i)|i=1,2,\cdots\}$. 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{3\omega}.$$

我们再定义一个集合

$$W := [a,b] \left\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)\right. .$$

为了把 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 分为两部分，我们定义两个指标集

$$\Lambda_1 := \{i \in \mathbb{N} | W \cap (x_{i-1},x_i) \neq \varnothing, i=1,2,\cdots\}, \quad \Lambda_2 := \{i \in \mathbb{N} | W \cap (x_{i-1},x_i) = \varnothing, i=1,2,\cdots\}.$$

于是显然

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i\in\Lambda_1}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i\in\Lambda_2}\omega_i\Delta x_i.$$

对于第一部分 $\sum\limits_{i\in\Lambda_1}\omega_i\Delta x_i$. 注意到 W 是一个闭集，所以对于任意 $\varepsilon>0$，对于任意的 $x\in[a,b],y\in W$，存在 $\delta>0$ 使得

$$|x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{8(b-a)}.$$

于是我们就取分割 P 满足 $\lambda(P)<\delta$. 由于

$$\begin{aligned}\omega_i&=\sup_{z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i]}\{|f(z_2)-f(z_1)|\}=\sup_{z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i]}\{|f(z_2)-f(y_i)+f(y_i)-f(z_1)|:y_i\in W\cap(x_{i-1},x_i)\}\\&\leqslant\sup_{z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i]}\{|f(z_2)-f(y_i)|+|f(y_i)-f(z_1)|:y_i\in W\cap(x_{i-1},x_i)\}\leqslant\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i\in\Lambda_1}\omega_i\Delta x_i<(b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

关于第二部分 $\sum\limits_{i\in\Lambda_2}\omega_i\Delta x_i$. 由于 $W\cap(x_{i-1},x_i)=\varnothing$，所以

$$(x_{i-1},x_i)\subset(\alpha_i,\beta_i),i\in\Lambda_2.$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{3\omega},$$

再加上

$$\bigcup_{i\in\Lambda_2}(x_{i-1},x_i)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i),$$

所以

$$\sum_{i\in\Lambda_2}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i\in\Lambda_2}\omega_i(\beta_i-\alpha_i)\leqslant\sum_{i\in\Lambda_2}\omega(\beta_i-\alpha_i)\leqslant\omega\cdot\frac{\varepsilon}{3\omega}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

综上，可得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i\in\Lambda_1}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i\in\Lambda_2}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

最终定理得证. □

通过 Lebesgue 定理，我们还可以定义“几乎处处”这个概念.

定义 8.2.4 (几乎处处) 设零测集 $A_0\subset A$，性质 $P(x)$ 在是 A 上的一个关于 A 中元素的性质. 如果对于任一 $x\in A\backslash A_0$，都有 $P(x)$ 成立，则称 $P(x)$ 在 A 上**几乎处处 (almost every where)** 成立.

接下来给出一些在 Lebesgue 定理之下的简单推论.

推论 8.2.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 若 f 在 $[a,b]$ 上只有至多可数个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证明 由于至多可数集是零测集，由 Lebesgue 定理可知 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. □

推论 8.2.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证明 由 Lebesgue 定理，$D(f)$ 是一个零测集. 显然 $D(|f|)$ 也是一个零测集，所以也 Riemann 可积. □

推论 8.2.3 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则两个函数的乘积 $f(x)g(x)$ 也 Riemann 可积.

证明 由于 $D(fg) \subset D(f) \cup D(g)$. 所以 $D(fg)$ 也是一个零测集. □

推论 8.2.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 如果 $[c,d] \subset [a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上也 Riemann 可积.

证明 把 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点记为 $D(f,[a,b])$. 由于 $[c,d] \subset [a,b]$ 所以 $D(f,[c,d])$ 也是一个零测集，故 Riemann 可积.□

推论 8.2.5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都 Riemann 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上 Riemann 可积.

证明 由 Lebesgue 定理可知 $D(f,[a,b]), D(f,[b,c])$ 都是零测集. 由于 $D(f,[a,b]) = D(f,[a,b]) \cup D(f,[b,c])$，所以 $D(f,[a,c])$ 也是零测集. 由 Lebesgue 定理可知 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上也 Riemann 可积. □

推论 8.2.6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 如果 $1/f$ 在 $[a,b]$ 上定义且有界，则 $1/f$ 在 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积.

证明 由于 $D(f) = D(1/f)$，所以 $D(1/f)$ 也是一个零测集，故 $1/f$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. □

推论 8.2.7 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上去除有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之外与 $f(x)$ 相等，则 $g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 令 $h(x) = f(x) - g(x)$. 则 $h(x)$ 除去 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 之外都等于零. 因此 $D(h) \subset \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. 所以 $D(h)$ 也是一个零测集. 由 Lebesgue 定理可知 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，所以 $g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 显然

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

推论 8.2.8 单调函数的不连续点集一定是零测集.

证明 由 Darboux 定理，单调函数的不连续点只有至多可数个，而至多可数集一定是零测集. □

定理 8.2.6 (复合函数的 Riemann 可积性) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[c,d] \subset [a,b]$ 上 Riemann 可积，则它们的复合 $(f \circ g)(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

证明 由于 $D(f \circ g) \subset D(g)$，而 $D(g)$ 是一个零测集，所以 $D(f \circ g)$ 是一个零测集，由 Lebesgue 定理可知 $f \circ g$ 在 $[c,d]$ 上 Riemann 可积. □

注 8.2.4 上述定理中不可以把 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续改为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，下面看一个例子.

例 8.2.4 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad,\quad T(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \dfrac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}\quad.$$

显然 $f(x)$ 与 $T(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上任一有界子闭区间上 Riemann 可积，将它们复合得到

$$f(T(x))=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}\quad.$$

而这是 Dirichlet 函数，在 $\mathbb{R}$ 上任一有界子闭区间上都 Riemann 不可积.

8.3 Riemann 积分的计算

8.3.1 Newton-Leibniz 公式

从物理的角度看，位移 $\boldsymbol{s}$ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 关于时间 t 的 Riemann 积分. 这时如果有一个位移的函数 $\boldsymbol{s}(t)$ 则在时间间隔 $[t_1,t_2]$ 中可以得到

$$\boldsymbol{s}(t_2)-\boldsymbol{s}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t.$$

同时注意到 $\boldsymbol{s}(t)$ 是 $\boldsymbol{v}(t)$ 的一个原函数，这启发我们得到一个 Riemann 积分和原函数的关系.

定理 8.3.1 (Newton-Leibniz 公式) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且在 (a,b) 上存在原函数 $f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证明 已知 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，所以我们直接对 $[a,b]$ 作 n 等分 $a_0=x_1<x_1<\cdots<x_n=b$. 再由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，所以令上式的 $n\to\infty$ 得

$$F(b)-F(a)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 8.3.1 为了书写便利，令

$$F(x)\Big|_a^b:=F(b)-F(a).$$

于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b dF(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_a^b=F(x)\Big|_a^b.$$

例 8.3.1 求半径为 r 的圆的面积公式.

解 设函数 $y=\sqrt{r^2-x^2},(r>0,0<x<r)$. 不难从图像上看出，该函数与 x 轴围成的面积是半径为 r 的圆的面积的 $1/4$. 于是圆的面积可以定义为

$$S := 4\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x=r\sin t$. 于是

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int r^2\cos t\,\mathrm{d}\sin t=\int r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2r^2t+r^2\sin 2t=2r^2\arcsin\frac{x}{r}+2x\sqrt{r^2-x^2}+C.$$

由 Newton-Leibniz 公式可知

$$S=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=2r^2\arcsin\frac{x}{r}+2x\sqrt{r^2-x^2}\bigg|_0^r=2r^2\arcsin 1=\pi r^2.$$

例 8.3.2 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}.$$

解 令

$$a_n=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right],n=1,2,\cdots.$$

不难看出，令 $f(x)=\ln(1+x)$，a_n 就是把 $[0,1]$ 取 n 等分，然后取 ξ_i 在每个分割区间的右端点即第 i 个端点上，即 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，所以该数列也会收敛到该 Riemann 积分.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^1\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}e^{a_n}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$

8.3.2 微积分基本定理

微积分基本定理的核心思想是将微分和积分联系在一起.

定义 8.3.1 (变限积分) 若 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，$x\in[a,b]$，则称

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是一个**变上限积分**，或直接称为**变限积分**.

注 8.3.2 类似的我们还可以定义变下限积分

$$G(x):=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

以及上下限都在变的积分

$$H(x):=\int_x^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

不过平时使用的最多的还是定义中给出的那一种.

值得注意的是，变现积分是一个关于 x 的函数.

定理 8.3.2 如果 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则它的变限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上 Lipschitz 连续.

证明 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$，则

$$\begin{aligned}|F(x_2)-F(x_1)|&=\left|\int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上有界，所以设上界为 M. 这时如果 $x_1<x_2$ 则

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant M\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}t=M(x_2-x_1).$$

如果 $x_1>x_2$，则

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant M\int_{x_2}^{x_1}\mathrm{d}t=M(x_1-x_2).$$

综合上面两个式子，可得

$$|F(x_2)-F(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|.$$

注 8.3.3 一开始猜的时候其实是从物理的角度猜它连续，只不过证明的过程中发现其实可以得到更强的 Lipschitz 连续，于是又返回去修改了定理.

我们把上面定理的条件再弱化一点.

定理 8.3.3 如果 f 在 $[a,b]$ 上有界，则它的上积分的变限函数

$$F(x)=\overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上 Lipschitz 连续.

证明 我们只需证明

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\overline{\int_a^b}|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

按照定义，对于 $[a,b]$ 的任意任意分割 P，设 M_i 是函数 $f(x)$ 在第 i 个分割区间的上确界，$\mathcal{M}_i$ 是 $|f(x)|$ 在第 i 个分割区间的上确界. 于是有

$$\left|\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^n|M_i|\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^n\mathcal{M}_i\Delta x_i.$$

对于所有分割 P 可以组成集合

$$A=\{|\bar{S}(f;P)|\,|P\text{ 是 }[a,b]\text{ 上一个分割}\},\quad B=\{\bar{S}(|f|;P)\,|P\text{ 是 }[a,b]\text{ 上一个分割}\}.$$

于是有即得我们所要得结论. 后面得方法与**定理 8.3.3**完全一致. □

不难看出，一个性质“没那么好的函数”在“积分过程”后性质变好了一点.

定理 8.3.4 (变限积分的可导性) 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 令它的变限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

若 f 在 $x_0\in[a,b]$ 处连续，则有 F 在 x_0 处可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$.

证明 我们只证 f 在 x_0 处右可导，左可导的证明类似. 由于 f 在 $x_0\in[a,b]$ 处连续，故对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 当 $|t-x_0|<\delta$ 时，$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$. 于是当 $0<h<\delta$ 时有

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{h}f(x_0)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]\,\mathrm{d}t\right| \tag{8.3.1}$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t<\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\,\mathrm{d}t=\varepsilon. \tag{8.3.2}$$

于是我们就证明了 $F'_+(x_0)$ 存在，且等于 $f(x_0)$. □

对上述定理在 $[a,b]$ 上逐点使用，我们就可以得到以下定理.

定理 8.3.5 (微积分基本定理) 设 f 在 $[a,b]$ 连续，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

微积分基本定理 (fundamental theorem of calculus) 将微分和积分两个东西联系在了一起，解释了了把求原函数称为不定积分的原因. 而且我们还可以立即得到一个推论

推论 8.3.1 连续函数必有原函数.

定理 8.3.6 (Newton-Leibniz 公式) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续.$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证明 由于 $F(x)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，由微积分基本定理可知

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

当 $x=a$ 时

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t+C,$$

当 $x=b$ 时

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+C$$

于是有

$$\int_a^b \mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

□

注 8.3.4 上述定理可改写：设函数 F 在 $[a,b]$ 上连续可导，则对于任意 $x\in[a,b]$ 都有

$$\int_a^x F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)-F(a).$$

上述定理相对我们第一次证明的 Newton-Leibniz 公式，条件更强. 不过其实第二个条件可以削弱为，F 在 $[a,b]$ 上几乎处处满足 $F'=f$. 我们会在实分析中给出 Newton-Leibniz 公式公式的充要条件.

例 8.3.3 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

当且仅当存在不全为 0 的 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 使得对于任意的 $x\in[a,b]$ 有 $\lambda f(x)+\mu g(x)=0$ 成立时（即 $f(x),g(x)$ 线性相关），等号成立.

证明 移项后令

$$F(x)=\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t-\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

于是由微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}F'(x)&=f^2(x)\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t+g^2(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^x[f(x)g(t)-g(x)f(t)]^2\,\mathrm{d}t\geqslant 0.\end{aligned}$$

故不等式得证. 接下来证明等于号的存在条件.

充分性显然成立，只需代入即可. 接下来证明必要性. 当等号成立时，注意到有 $F(a)=F(b)=0$. 于是由 Rolle 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=\int_a^\xi[f(\xi)g(t)-g(\xi)f(t)]^2\,\mathrm{d}t=0.$$

故存在 $f(\xi),g(\xi)$ 使得对于任意 $t\in[a,b]$ 有 $f(\xi)g(t)-g(\xi)f(t)=0$ 成立. □

注 8.3.5 上述不等式全称 Cauchy-Буняковский-Schwarz 不等式，在学习代数和拓扑时还会再次使用不同的方法证明它. 该不等式还有离散的形式，即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2.$$

我们利用 Cauchy-Schwarz 不等式证明以下不等式.

例 8.3.4 f 在 $[a,b]$ 上连续可导且 $f(a)=0.$，则有

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

证明 由 Newton-Leibniz 公式，有

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x[1\cdot f'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$f^2(x) = \left[\int_a^x 1 \cdot f'(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_a^x \mathrm{d}t \int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t = (x-a)\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b (f'(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

最后再对最左边和最右边求 a 到 b 的 Riemann 积分，就有

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

□

我们再给一个同时变上下限积分计算的例子. 这种情况我们一般利用可加性把它拆为两个变上限积分，然后再用微积分基本定理.

例 8.3.5 求下列函数的导数

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

解 由 Riemann 积分的可加性

$$\int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

于是由微积分基本定理，令 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 则

$$H'(x) = (F(x^3))' - (F(x^2))' = 3x^2\sqrt{1+x^5} - 2x\sqrt{1+x^4}.$$

8.3.3 Riemann 积分的分部积分法

类似不定积分的分部积分，如果有

$$u(x)\,\mathrm{d}v(x) = \mathrm{d}(u(x)v(x)) - v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

对等式两边求从 a 到 b 的 Riemann 积分，就有

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = \int_a^b \mathrm{d}(u(x)v(x)) - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

上式等价于

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

不难发现，只不过是不定积分中的 $u(x)v(x)$ 变为 $u(x)v(x)\Big|_a^b$. 这可以便于我们的计算.

例 8.3.6 计算以下 Riemann 积分：

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

解

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}\sin x = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -2.$$

接下来给出两个重要的 Riemann 积分.

例 8.3.7 计算以下 Riemann 积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \,\mathrm{d}x.$$

解 由于 $\cos x$ 与 $\sin x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上关于 $\frac{\pi}{4}$ 对称，二者的 Riemann 积分值相等，故我们只计算 $\cos^m x$ 的 Riemann 积分.

令 $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \,\mathrm{d}x$, 利用分部积分法

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} \mathrm{d}\sin x = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{m-2} x \,\mathrm{d}x \\ &= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{m-2} x \,\mathrm{d}x = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} x \,\mathrm{d}x - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

即

$$I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m.$$

于是我们可以得到递推公式

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}, \quad m = 2, 3 \cdots.$$

于是当 m 为奇数时

$$I_m = \frac{m-1}{m}\frac{m-3}{m-2}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{(m-1)!!}{m!!}.$$

当 m 为偶数时，

$$I_m = \frac{m-1}{m}\frac{m-3}{m-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}.$$

不难看出，相较于我们前面推到过的关于不定积分的递推式，这个递推式显然简单很多. 接下来我们利用上述结论证明一个很有用的公式.

定理 8.3.7 (Wallis 公式)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}$$

证明 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时有 $0 < \sin x < 1$. 所以我们有如下不等式

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

对上述不等式的每一项分别从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 做 Riemann 积分. 由 Riemann 积分的正定性和保序性可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \,\mathrm{d}x.$$

利用前面推导的公式，有

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \Rightarrow \frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{\pi}{2}.$$

令 $n \to \infty$，由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}.$$

□

注 8.3.6 给出 Wallis 公式得另外两种形式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n+1)!!(2n-1)!!},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}.$$

定理 8.3.8 (带积分余项得 Taylor 公式) 设 f 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 阶连续可导（即 $n+1$ 阶导函数仍连续），对于任意 $x_0\in[a,b]$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

证明 记 $r_n(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-\cdots-\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. 不难看出，

$$r^{(k)}(x_0)=0,k=1,2,\cdots n;\quad r^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x).$$

逆用 Newton-Leibniz 公式，有

$$r(x)=r(x)-r(x_0)=\int_{x_0}^{x}r'(t)\,\mathrm{d}t.$$

对上式得最右边反复使用分部积分，就有

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}r'(t)\,\mathrm{d}t&=\int_{x_0}^{x}r'(t)\,\mathrm{d}(t-x)=r'(t)(t-x)\Big|_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}r''(t)(t-x)\,\mathrm{d}t\\&=-\int_{x_0}^{x}r''(t)(t-x)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}r'''(t)(t-x)^2\,\mathrm{d}t\\&=\cdots=\frac{(-1)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}r^{(n+1)}(t)(t-x)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}r^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

就得到了我们所需结论. □

8.3.4 换元积分法

类似不定积分得换元法，定积分也有换元法，但是定积分的上下限要带着改变.

定理 8.3.9 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，又存在 g 满足 $g(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上连续可导并且有 $g([a_1,b_1])\subset[a,b]$ 和 $g(a_1)=a,g(b_1)=b$. 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{b_1}f(g(x))\,\mathrm{d}(g(x)).$$

证明 设 F 是 f 的一个原函数，由 Newton-Leibniz 公式，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F\circ g(b_1)-F\circ g(a_1)=F\circ g(x)\Big|_{a_1}^{b_1}.$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F\circ g(x))=F'(g(x))g'(x).$$

所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{b_1}F'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{b_1}f(g(x))\,\mathrm{d}(g(x))$$

□

注 8.3.7 该定理条件较多，所以解释一下. 首先 f 连续保证了它可积. 其次 g 连续可导保证了它可积的同时，能够求导后放入被积表达式中. 然后 $g([a_1,b_1])\subset[a,b]$ 确保它的像在 f 的定义域中，否则复合没有意义. 最后 $g(a_1)=a, g(b_1)=b$ 确保上下限的替换.

该定理对于 g 的要求较宽松，没有要求它单调. 在重积分以及多元微积分中，对 g 的要求更为严苛，要求它是单调的，因为如果不单调则讨论起来会非常复杂，且很难得到严格的证明.

例 8.3.8 计算定积分：

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

解 令 $x=r\sin t$，注意到 $x=0$ 时，t 可以取 0，$x=r$ 时，t 可以取 $\dfrac{\pi}{2}$. 所以

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}\sin t=\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi r^2}{4}.$$

□

例 8.3.9 计算定积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}.$$

于是令 $t=\sin x$. 当 $x=0$ 时 $t=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 换元后可得

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t=\ln(\sqrt{2}+1).$$

□

接下来给出两个用换元法证明的命题.

命题 8.3.1 若 f 是周期为 T 的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 由 Riemann 积分的可加性，

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

再令 $t=x-t$，x 从 T 到 $a+T$，则 t 从 0 到 a. 然后

$$\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(a+T)\,\mathrm{d}(a+T)=-\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

代回上式得

$$\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

故命题得证. □

命题 8.3.2 若 $f \in C[a,b]$，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f\text{是奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f\text{是偶函数} \end{cases}.$$

证明 如果 f 是奇函数，则令 $t=-x$，x 从 $-a$ 到 a 时 t 从 a 到 $-a$. 所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{-a} f(t) d(-t) = \int_{a}^{-a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以

$$2\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

如果 f 是偶函数，还是令 $t=-x$，当 x 从 $-a$ 到 0 时，t 从 $-a$ 到 0. 再使用 Riemann 积分的可加性，就有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例 8.3.10 证明：对于任意 $m \in \mathbb{N}^+$，都有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^m\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\mathrm{d}x.$$

证明 利用诱导公式 $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，令 $t = x+\frac{\pi}{2}$，此时 x 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 π. 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^m\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^m t\,\mathrm{d}t,$$

由**命题8.3.1**可知

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^m t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\mathrm{d}x.$$

或者令 $x = \frac{\pi}{2} - t$. 这样，当 x 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^m t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\mathrm{d}x.$$

□

例 8.3.11 f 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

证明 令 $t = x+h$，故

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+h}^{b+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+h}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

代回原式得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

由积分第一中值定理，存在 $\xi\in(a,a+h),\eta\in(b,b+h)$ 使得

$$f(\xi)h=\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad f(\eta)h=\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是原式就变成了

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}(f(\xi)h-f(\eta)h)\right]=f(b)-f(a).$$

□

注 8.3.8 给出一个常见的错误证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

这说明积分号和极限符号并不是可以随意交换的.

第九章　多元函数及其极限与连续性

$$\left| \bar{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \bar{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$|\inf\{(\bar{S}(f, P))\}| \leqslant \inf\{\bar{S}(|f|; P)\}$$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} |\bar{S}(f; P)| \leqslant \lim_{\lambda(P)\to 0} \bar{S}(|f|; P).$$

第十章　多元函数微分学

就是所有分割 P 可以组成集合

$$A=\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\right|\right\},\quad B=\left\{\sum_{i=1}^{n}|M_i|\Delta x_i\right\}$$

在同一个分割 P 下，A 中的任意一个元素都是比 B 中的任意元素小. 于是在同一个分割的情况下显然有

$$\inf_P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\right|\right\}\leqslant\inf_P\left\{\sum_{i=1}^{n}|M_i|\Delta x_i\right\}$$

定理 10.0.1 Darboux 上和的保号性：对于两个 Darboux 上和，$\bar{S}(f;P),\bar{S}(g;P)$ 如果有

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\bar{S}(f;P)<\lim_{\lambda(P)\to0}\bar{S}(g;P),$$

则存在 $\delta>0$，对于任何满足 $\lambda(P)<\delta$ 的标记分割 (P,ξ) 都有

$$\bar{S}(f;P)<\bar{S}(g;P).$$

证明 设

$$A=\lim_{\lambda(P)\to0}\bar{S}(f;P),\quad B=\lim_{\lambda(P)\to0}\bar{S}(g;P),$$

再取 $C\in\mathbb{R}$ 满足 $A<C<B$. 于是存在 $\delta>0$ 使得对于任何满足 $\lambda(P)<\delta$ 的标记分割 (P,ξ) 有

$$|\bar{S}(f;P)-A|<C-A,\quad |\bar{S}(g;P)-B|<B-C.$$

于是就有

$$\bar{S}(f;P)<A+(C-A)=C<B-(B-C)<\bar{S}(g;P)$$

即

$$\bar{S}(f;P)<\bar{S}(g;P).$$

□

定理 10.0.2 Darboux 上和的保序性：对于两个 Darboux 上和，$\bar{S}(f;P),\bar{S}(g;P)$，若存在 $\delta>0$ 使得对于任意满足 $\lambda(P)<\delta$ 的标记分割 (P,ξ) 都有

$$\bar{S}(f;P)<\bar{S}(g;P),$$

则有

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\bar{S}(f;P)\leqslant\lim_{\lambda(P)\to0}\bar{S}(g;P).$$

证明 反证法. 如果

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \bar{S}(f;P) > \lim_{\lambda(P)\to 0} \bar{S}(g;P),$$

则存在 $\delta > 0$，对于任意满足 $\lambda(P) < \delta$ 的标记分割 (P, ξ) 都有

$$\bar{S}(f;P) > \bar{S}(g;P),$$

得到矛盾，故结论成立. □