Динамические кратчайшие пути

Божнюк Александр
371 группа

Докажите следующие утверждения (определение однородного пути есть в лекции):

1 (a). Не более, чем n^3 путей в графе после увеличения веса ребра становятся однородными. В качестве доказательства придумайте такой худший случай.

Доказательство. Мы можем доказать это в общем виде.

Пусть мы увеличили вес ребра (u, v). Заметим, что если мы фиксируем ребро (u, v), и какую-то вершину z, то может быть не более одного однородного пути $u \to v \to ... \to z$, которые начинаются с (u, v). Это так, потому что в противном случае нарушалась бы уникальность кратчайшего пути из v в z (путь из v в z кратчайший, потому что путь из u в z однородный).

Если в графе m ребер и n вершин, то ребро (u, v) мы можем выбрать не более чем m способами, а вершину z не более чем n способами, а значит всего однородных путей в графе может быть не более, чем mn.

Вспоминая оценку $m <= n^2$, получаем, что однородных путей в графе всего может быть не более, чем n^3. А значит, что стать однородными может не более, чем n^3 путей.

$\square$

Теперь приведем пример случай, при котором порядка n^3 путей станут однородными.

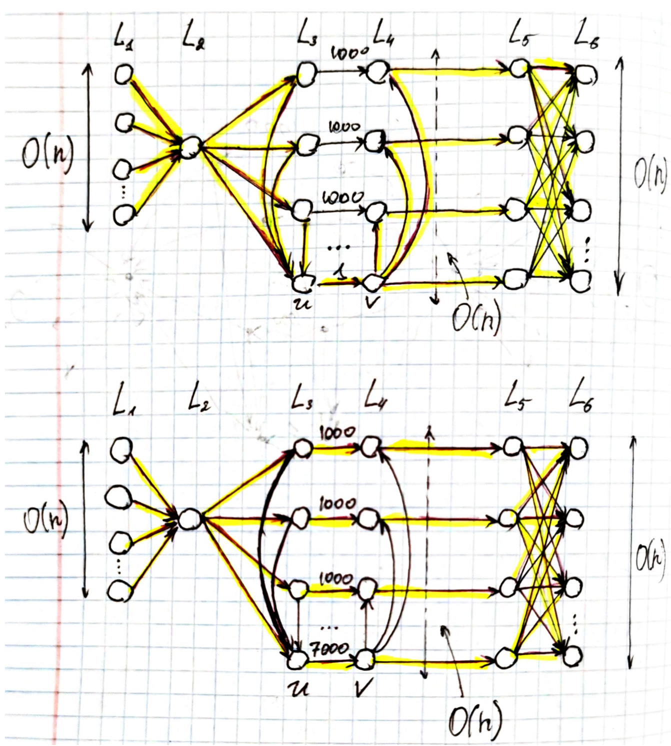

Рис. 1: Пример случая, в котором при увеличении веса ребра порядка n^3 путей станет однородными.

На рисунке 1 сверху изображен граф до увеличения ребра (u, v), а снизу после. Ребро (u, v) увеличило свой вес с 1 до 7000. Граф состоит из вертикальных слоев $L_1, ..., L_6$. В слоях L_1, L_3, L_4, L_5, L_6 находится порядка n вершин. Все ребра направлены слева направо. Если не указано иное, веса равны числу, близкому к нулю. Желтым цветом обозначены однородные пути.

После увеличения веса ребра (u, v) у нас образовались однородные пути проходящие через горизонтальные ребра из L_3 в L_4. Если посчитать все эти пути, то увидим следующее:

- На каждые n вершин из слоя L_1 приходится n вершин из слоя L_3. Отсюда получаем уже порядка n^2 однородных путей.

- На каждые n вершин из слоя L_5 приходится n вершин из слоя L_6. Отсюда получаем уже порядка n^3 однородных путей.

В конечном итоге видим, что в примере порядка n^3 путей стали однородными.

1 (b). Не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра перестают быть однородными.

Доказательство. Пусть мы увеличили вес ребра (u, v). Путь перестанет быть однородным $\Leftrightarrow$ его подпути перестанут быть кратчайшими (согласно определению однородного пути). В нашем случае, при увеличении веса, это возможно, если подпути содержат в себе ребро (u, v) (иначе они не перестанут быть кратчайшими). Теперь:

- Не более чем $O(n^2)$ однородных путей содержат внутри себя (не в начале и не в конце) ребро (u, v). Это можно получить комбинаторно: мы сначала выбираем стартовую вершину пути не более, чем из $O(n)$ вершин, а потом конечную вершину пути не более, чем из $O(n)$ вершин.

- Не более чем $O(n)$ однородных путей начинаются или заканчиваются в ребре (u, v). Докажем для путей, начинающихся с (u, v). Заметим, что если мы фиксируем наше ребро (u, v), и какую-то вершину z, то может быть не более одного однородного пути $u \to v \to ... \to z$, которые начинаются с (u, v). Это так, потому что в противном случае нарушалась бы уникальность кратчайшего пути из v в z (путь из v в z кратчайший, потому что путь из u в z однородный). Мы можем взять в качестве конца пути не более $O(n)$ вершин. Аналогичные рассуждения для путей, которые заканчиваются ребром (u, v) (фиксируем конечное ребро и выбираем начало пути не более чем из $O(n)$ вершин).

  В конечном итоге получаем, что не более, чем $O(n)$ путей начинаются или заканчиваются в ребре (u, v).

В итоге мы имеем, что однородных путей, подпути которых содержат в себе ребро (u, v), не более чем $O(n^2)$. Это и означает, что не более чем n^2 путей перестанут быть однородными. $\square$