

Динамическая связность

Божнюк Александр
371 группа

1 (a). Придумайте рекурсивную процедуру $fall(v)$, которая для вершины v , такой, что $N_1(v) = \emptyset$, "роняет" v на правильный уровень BFS-дерева, корректно обновляет уровни соседей v и "роняет" те вершины, чей уровень изменился при падении v .

Решение. Будем предполагать, что перед вызовом $fall(v)$ будет пройдена проверка на непустоту $N_2(v)$, иначе у нас образуется новая компонента связности.

Algorithm 1

```
1: function FALL( $v$ )
2:    $l(v) \leftarrow l(v) + 1$ 
3:   for  $u \in N_2(v)$  do
4:      $N_2(u) \leftarrow N_2(u) \setminus \{v\}$ 
5:      $N_3(u) \leftarrow N_3(u) \cup \{v\}$ 
6:   for  $u \in N_3(v)$  do
7:      $N_1(u) \leftarrow N_1(u) \setminus \{v\}$ 
8:      $N_2(u) \leftarrow N_2(u) \cup \{v\}$ 
9:    $N_1(v) \leftarrow N_2(v)$ 
10:   $N_2(v) \leftarrow N_3(v)$ 
11:   $N_3(v)_{old} \leftarrow N_3(v)$ 
12:   $N_3(v) \leftarrow \emptyset$  ▷ Будет заполняться при вызове  $fall$  от детей
13:  for  $u \in \{w \mid w \in N_3(v)_{old} \text{ and } N_1(w) = \emptyset\}$  do
14:     $fall(u)$ 
```

1 (b). Докажите, что если в графе n вершин и m рёбер изначально, на все обновления суммарно при удалении m рёбер уйдет время $O(mn)$.

Доказательство. Обозначим за $deg(v)$ степень вершины v . Тогда на обработку одной вершины внутри данной функции уходит $O(deg(v))$ времени. Если BFS-дерево почти вырождается в список, то его высота сравнима с n , а значит максимальное количество вызовов функции $fall$, инициированных вершиной v , сравнимо с n . Следовательно, работа функции $fall$ для вершины v занимает $O(n deg(v))$ времени. При этом, удаление ребра занимает $O(1)$. В итоге имеем следующее:

$$O(m + \sum_{v \in V} n deg(v)) = O(m + n \sum_{v \in V} deg(v)) = O(m + nm) = O(mn) \quad \square$$

1 (c). Пусть вместо всего BFS-дерева нам разрешено хранить только BFS-дерево с d уровнями, т.е. структура будет поддерживать только расстояния до вершин v , такие, что $d(s, v) \leq d$. Докажите, что суммарное время на все апдейты в этом случае равно $O(md)$.

Доказательство. Обозначим за $deg(v)$ степень вершины v . На обработку одной вершины функцией $fall(v)$ уходит $O(deg(v))$ времени. В случае, когда BFS-дерево почти вырождается в список, его высота сравнима с d , а значит максимальное количество вызовов функции $fall$, инициированных вершиной v , сравнимо с d . Следовательно, работа функции $fall$ для вершины v занимает $O(d deg(v))$ времени. При этом, удаление ребра занимает $O(1)$. В итоге имеем следующее:

$$O(m + \sum_{v \in V} d deg(v)) = O(m + d \sum_{v \in V} deg(v)) = O(m + dm) = O(md) \quad \square$$