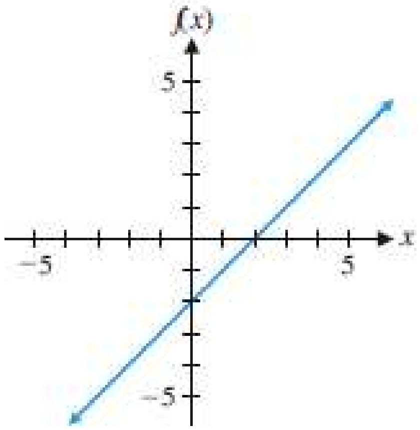
3. Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar

3.1 Polinom Fonksiyonlar

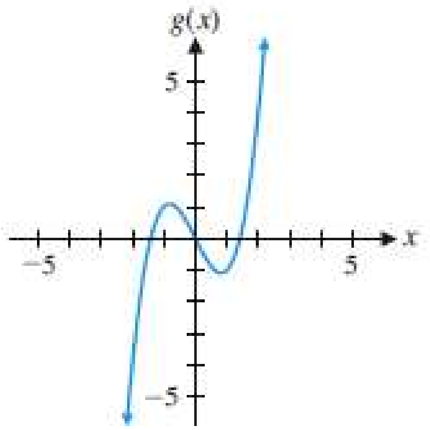
- $n, n-1, \ldots$ doğal sayı, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılar ve $a_n \neq 0$ olmak üzere
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
şeklindeki fonksiyonlara **polinom fonksiyon** ya da kısaca **polinom** denir.Burada $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayılar, a_n başkatsayı ve n polinomun derecesidir. $P(x)$ polinomunun derecesi der$[P(x)] = n$ şeklinde gösterilir. Polinom fonksiyonlar tüm reel sayılarda tanımlıdır. Polinomların x eksenini kestikleri noktalar polinomun sıfırları veya kökleridir. a_0 değeri ise sabit terimdir veya polinomun y eksenini kestiği noktadır.

3.1 Polinom Fonksiyonlar

- $n, n-1, \ldots$ doğal sayı, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılar ve $a_n \neq 0$ olmak üzere
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
şeklindeki fonksiyonlara **polinom fonksiyon** ya da kısaca **polinom** denir.Burada $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayılar, a_n başkatsayı ve n polinomun derecesidir. $P(x)$ polinomunun derecesi der$[P(x)] = n$ şeklinde gösterilir. Polinom fonksiyonlar tüm reel sayılarda tanımlıdır. Polinomların x eksenini kestikleri noktalar polinomun sıfırları veya kökleridir. a_0 değeri ise sabit terimdir veya polinomun y eksenini kestiği noktadır.
- **Örnek.** İlk polinom birinci, ikinci polinom ise üçüncü dereceden bir polinomdur.



(A) $f(x) = x - 2$



(B) $g(x) = x^3 - 2x$

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q(x) = \frac{1}{3}$

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P\left(x\right) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q\left(x\right) = \frac{1}{3}$
  - $R\left(x\right) = \sqrt{x} + 5$

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q(x) = \frac{1}{3}$
  - $R(x) = \sqrt{x} + 5$
  - $T(x) = x + \dfrac{2}{x}$

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q(x) = \frac{1}{3}$
  - $R(x) = \sqrt{x} + 5$
  - $T(x) = x + \dfrac{2}{x}$
- **Çözüm.**

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q(x) = \frac{1}{3}$
  - $R(x) = \sqrt{x} + 5$
  - $T(x) = x + \dfrac{2}{x}$
- **Çözüm.**
  - Polinom.

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q(x) = \frac{1}{3}$
  - $R(x) = \sqrt{x} + 5$
  - $T(x) = x + \dfrac{2}{x}$
- **Çözüm.**
  - Polinom.
  - Polinom.

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q(x) = \frac{1}{3}$
  - $R(x) = \sqrt{x} + 5$
  - $T(x) = x + \dfrac{2}{x}$
- **Çözüm.**
  - Polinom.
  - Polinom.
  - Polinom değil. Çünkü $R(x) = \sqrt{x} + 5 = x^{\frac{1}{2}} + 5$ ifadesinde $\frac{1}{2}$ doğal sayı değil.

- **Örnek.** Aşağıdakilerin polinom olup-olmadığını belirtiniz.
  - $P(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 2$
  - $Q(x) = \frac{1}{3}$
  - $R(x) = \sqrt{x} + 5$
  - $T(x) = x + \dfrac{2}{x}$
- **Çözüm.**
  - Polinom.
  - Polinom.
  - Polinom değil. Çünkü $R(x) = \sqrt{x} + 5 = x^{\frac{1}{2}} + 5$ ifadesinde $\frac{1}{2}$ doğal sayı değil.
  - Polinom değil. Çünkü $T(x) = x + \dfrac{2}{x} = x + 2x^{-1}$ ifadesinde -1 doğal sayı değil.

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.
  - $P(x) = 5x + 3$

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.
  - $P(x) = 5x + 3$
  - $Q(x) = x^2 - 9$

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.
    - $P(x) = 5x + 3$
    - $Q(x) = x^2 - 9$
    - $R(x) = (2x - 9)(3x + 4)$

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.
  - $P(x) = 5x + 3$
  - $Q(x) = x^2 - 9$
  - $R(x) = (2x - 9)(3x + 4)$
- **Çözüm.**

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.
  - $P(x) = 5x + 3$
  - $Q(x) = x^2 - 9$
  - $R(x) = (2x - 9)(3x + 4)$
- **Çözüm.**
  - $\text{der}[P(x)] = 1$, başkatsayısı 5, x kesmesi $-\frac{3}{5}$, y kesmesi 3

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.
  - $P(x) = 5x + 3$
  - $Q(x) = x^2 - 9$
  - $R(x) = (2x - 9)(3x + 4)$
- **Çözüm.**
  - $\text{der}[P(x)] = 1$, başkatsayısı 5, x kesmesi $-\frac{3}{5}$, y kesmesi 3
  - $\text{der}[Q(x)] = 2$, başkatsayısı 1, x kesmesi -3 ve 3, y kesmesi -9

- **Örnek.** Aşağıdaki polinomların derecelerini, başkatsayılarını, x kesmelerini ve y kesmelerini bulunuz.
  - $P(x) = 5x + 3$
  - $Q(x) = x^2 - 9$
  - $R(x) = (2x - 9)(3x + 4)$
- **Çözüm.**
  - $\text{der}[P(x)] = 1$, başkatsayısı $5, x$ kesmesi $-\frac{3}{5}$, y kesmesi 3
  - $\text{der}[Q(x)] = 2$, başkatsayısı $1, x$ kesmesi -3 ve 3, y kesmesi -9
  - Dağılma özelliği yardımıyla

$$\begin{aligned} R(x) &= (2x-9)(3x+4) \\ &= 6x^2 - 19x - 36 \end{aligned}$$

olur. Buna göre polinomun $\text{der}[R(x)] = 2$, başkatsayısı $6, x$ kesmesi $\frac{9}{2}$ ve $-\frac{4}{3}$, y kesmesi -36 dır.

- **Örnek.**

$$P(x) = x^{\frac{18}{m}} + 3x^{m-4} + \sqrt{2}$$

ifadesi bir polinom olduğuna göre m nin alabileceği değerleri bulunuz.

- **Örnek.**

$$P(x) = x^{\frac{18}{m}} + 3x^{m-4} + \sqrt{2}$$

ifadesi bir polinom olduğuna göre m nin alabileceği değerleri bulunuz.

- **Çözüm.** $P(x)$ in polinom olabilmesi için

$$\frac{18}{m} \in \mathbb{N}, (m-4) \in \mathbb{N}$$

olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{18}{m} &\in \mathbb{N} \text{ ise } m = 1, 2, 3, 6, 9, 18 \\ (m-4) &\in \mathbb{N} \text{ ise } m = 4, 5, 6, ... \end{aligned}$$

olmalıdır. Her ikisini de sağlayan m değerleri $6, 9, 18$ olarak bulunur.

- **Örnek.**

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$

polinomu veriliyor.

- **Örnek.**

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$

polinomu veriliyor.

  - $P(-2)$ değerini bulunuz.

- **Örnek.**

$$P\left(x\right)=2x^{3}-5x^{2}+1$$

polinomu veriliyor.

  - $P\left(-2\right)$ değerini bulunuz.
  - $P\left(x-1\right)$ polinomunu elde ediniz.

- **Örnek.**
$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$
polinomu veriliyor.
  - $P(-2)$ değerini bulunuz.
  - $P(x-1)$ polinomunu elde ediniz.
- **Çözüm.**

- **Örnek.**
$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$
polinomu veriliyor.
  - $P(-2)$ değerini bulunuz.
  - $P(x-1)$ polinomunu elde ediniz.
- **Çözüm.**
  - Polinomda x yerine -2 yazılırsa
$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 1 \\ &= -35 \end{aligned}$$
olur.

- **Örnek.**

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$

polinomu veriliyor.

  - $P(-2)$ değerini bulunuz.
  - $P(x-1)$ polinomunu elde ediniz.

- **Çözüm.**
  - Polinomda x yerine -2 yazılırsa

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 1 \\ &= -35 \end{aligned}$$

    olur.
  - Polinomda x yerine $x-1$ yazılır ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} P(x-1) &= 2(x-1)^3 - 5(x-1)^2 + 1 \\ &= 2x^3 - 11x^2 + 16x - 6 \end{aligned}$$

    elde edilir.

- **Örnek.** P ve Q birer polinomdur.

$$P(x+3) \cdot Q(x-3) = x^3 - 6x^2 + 4x - 3$$

eşitliği veriliyor. $Q(-2) = -2$ olduğuna göre, $P(4)$ değeri kaçtır?

- **Örnek.** P ve Q birer polinomdur.

$$P(x+3)\cdot Q(x-3) = x^3 - 6x^2 + 4x - 3$$

eşitliği veriliyor. $Q(-2) = -2$ olduğuna göre, $P(4)$ değeri kaçtır?

- **Çözüm.** Eşitlikte x yerine 1 yazılırsa

$$\begin{aligned} P(4)\cdot \underbrace{Q(-2)}_{-2} &= 1^3 - 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 - 3 = -4 \\ P(4) &= 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

- **Örnek.** Bir polinomun katsayılar toplamı x yerine 1 yazılarak bulunur.

$$P\left(P\left(x\right)\right) = 9x + 8$$

olduğuna göre $P\left(5x - 2\right)$ polinomunun katsayılar toplamının alabileceği değerleri bulunuz.

- **Örnek.** Bir polinomun katsayılar toplamı x yerine 1 yazılarak bulunur.

$$P(P(x)) = 9x + 8$$

olduğuna göre $P(5x - 2)$ polinomunun katsayılar toplamının alabileceği değerleri bulunuz.

- **Çözüm.** $P(5x - 2)$ polinomunda x yerine 1 yazılırsa polinomun katsayılar toplamı $P(3)$ olur. Soruda verilen eşitliği sağlayan polinom

$$P(x) = ax + b$$

şeklinde olmalıdır.

$$\begin{aligned} P(P(x)) &= a(ax+b) + b = 9x + 8 \\ a^2x + ab + b &= 9x + 8 \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\begin{aligned} a^2 &= 9 \Longrightarrow a = 3 \text{ veya } a = -3 \\ ab + b &= 8 \Longrightarrow b = 2 \text{ veya } b = -4 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x + 2 \text{ veya } P(x) = -3x - 4 \\ P(3) &= 11 \text{ veya } P(3) = -13 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.**

$$\left(3x^4 - 5x^3 + 2x - 1\right)\left(5x^3 + 7x^2 - 8x + 6\right)$$

çarpımı yapıldığında x^5 in katsayısı ne olur?

- **Örnek.**
$$\left(3x^4 - 5x^3 + 2x - 1\right)\left(5x^3 + 7x^2 - 8x + 6\right)$$
çarpımı yapıldığında x^5 in katsayısı ne olur?
- **Çözüm.** Dağılma özelliği kullanılarak çarpma yapıldığında
$$15x^7 + \cdots - 24x^5 - 35x^5 + \cdots - 6 = 15x^7 + \cdots - 59x^5 + \cdots - 6$$
olacağından x^5 in katsayısı -59 olur.

- **Örnek.** $P(x)$ bir polinom ve

$$x^3 + ax - 8 = (x - 2)\,P(x)$$

olduğuna göre, $P(2)$ değeri kaçtır?

- **Örnek.** $P(x)$ bir polinom ve

$$x^3 + ax - 8 = (x-2)\,P(x)$$

olduğuna göre, $P(2)$ değeri kaçtır?

- **Çözüm.** Eşitlikte $x = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} 2^3 + 2a - 8 &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

olur. Eşitlik tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= (x-2)\,P(x) \\ (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) &= (x-2)\,P(x) \\ P(x) &= x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$P(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

olarak bulunur.

3.2 Rasyonel Fonksiyonlar

- $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom olmak üzere,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

şeklindeki fonksiyonlara **rasyonel fonksiyon** denir. Rasyonel fonksiyonların tanım kümeleri $Q(x) \neq 0$ olacak şekildeki reel sayılardır.

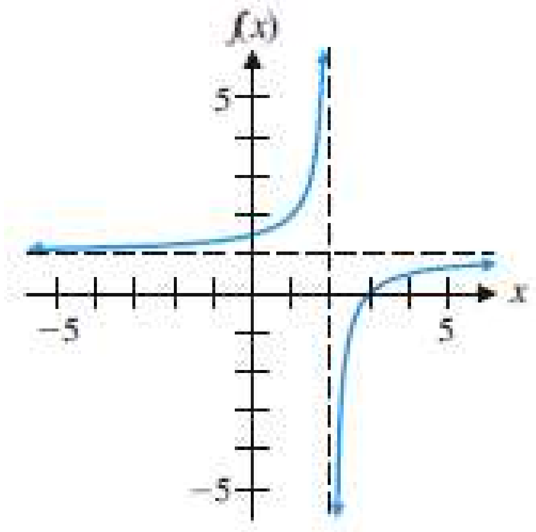
3.2 Rasyonel Fonksiyonlar

- $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom olmak üzere,

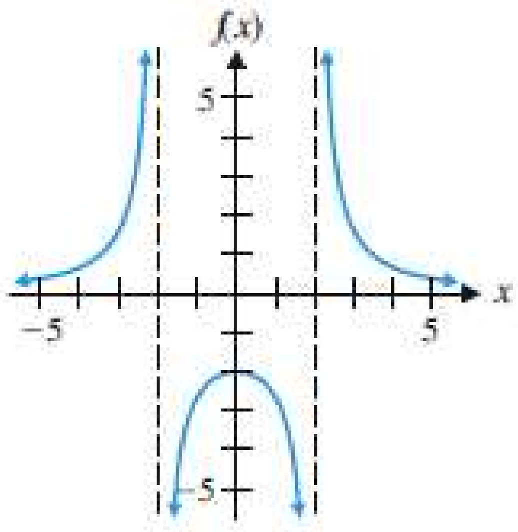
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

şeklindeki fonksiyonlara **rasyonel fonksiyon** denir. Rasyonel fonksiyonların tanım kümeleri $Q(x) \neq 0$ olacak şekildeki reel sayılardır.

- **Örnek.**



(A) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$



(B) $f(x) = \dfrac{8}{x^2-4}$

3.3 Asimptot Kavramı

- $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının ortak köke sahip olmadıklarını varsayalım. $Q(x) = 0$ denkleminin (varsa) köklerine $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir. Diğer taraftan

3.3 Asimptot Kavramı

- $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının ortak köke sahip olmadıklarını varsayalım. $Q(x) = 0$ denkleminin (varsa) köklerine $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir. Diğer taraftan
  - $\text{der}P(x) < \text{der}Q(x)$ ise $y = 0$ yatay asimptottur.

3.3 Asimptot Kavramı

- $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının ortak köke sahip olmadıklarını varsayalım. $Q(x) = 0$ denkleminin (varsa) köklerine $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir. Diğer taraftan
  - $\text{der}P(x) < \text{der}Q(x)$ ise $y = 0$ yatay asimptottur.
  - $\text{der}P(x) = \text{der}Q(x)$ ise $y = \frac{P(x) \text{ in başkatsayısı}}{Q(x) \text{ in başkatsayısı}}$ yatay asimptottur.

3.3 Asimptot Kavramı

- $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının ortak köke sahip olmadıklarını varsayalım. $Q(x) = 0$ denkleminin (varsa) köklerine $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir. Diğer taraftan
  - $\text{der}P(x) < \text{der}Q(x)$ ise $y = 0$ yatay asimptottur.
  - $\text{der}P(x) = \text{der}Q(x)$ ise $y = \frac{P(x) \text{ in başkatsayısı}}{Q(x) \text{ in başkatsayısı}}$ yatay asimptottur.
  - $\text{der}P(x) > \text{der}Q(x)$ ise yatay asimptot yoktur.

3.3 Asimptot Kavramı

- $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının ortak köke sahip olmadıklarını varsayalım. $Q(x) = 0$ denkleminin (varsa) köklerine $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir. Diğer taraftan
  - $\text{der}P(x) < \text{der}Q(x)$ ise $y = 0$ yatay asimptottur.
  - $\text{der}P(x) = \text{der}Q(x)$ ise $y = \frac{P(x) \text{ in başkatsayısı}}{Q(x) \text{ in başkatsayısı}}$ yatay asimptottur.
  - $\text{der}P(x) > \text{der}Q(x)$ ise yatay asimptot yoktur.
- Asimptotlar $x \to \pm\infty$ ve $y \to \pm\infty$ için fonksiyona klavuzluk ederler. Bir fonksiyon, düşey asimptotu hiçbir zaman kesemez ancak yatay asimptotu kesebilir.

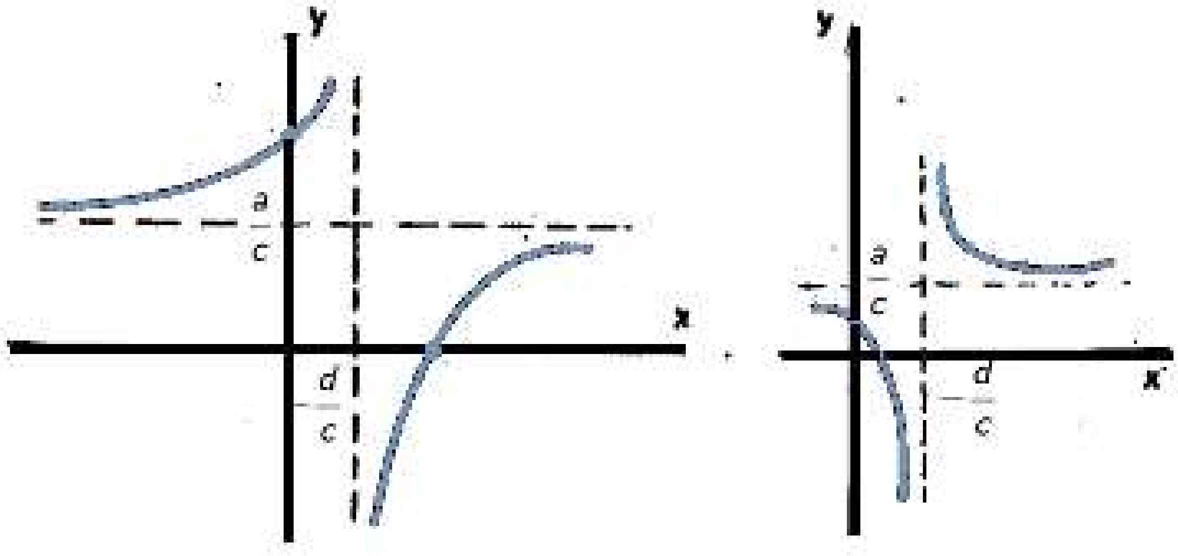
3.3 Asimptot Kavramı

- $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının ortak köke sahip olmadıklarını varsayalım. $Q(x) = 0$ denkleminin (varsa) köklerine $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir. Diğer taraftan
  - $\text{der}P(x) < \text{der}Q(x)$ ise $y = 0$ yatay asimptottur.
  - $\text{der}P(x) = \text{der}Q(x)$ ise $y = \frac{P(x) \text{ in başkatsayısı}}{Q(x) \text{ in başkatsayısı}}$ yatay asimptottur.
  - $\text{der}P(x) > \text{der}Q(x)$ ise yatay asimptot yoktur.
- Asimptotlar $x \to \pm\infty$ ve $y \to \pm\infty$ için fonksiyona klavuzluk ederler. Bir fonksiyon, düşey asimptotu hiçbir zaman kesemez ancak yatay asimptotu kesebilir.
- Özel olarak;

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad c \neq 0$$

şeklindeki bir fonksiyonun düşey asimptotu $x = -\frac{d}{c}$ doğrusu, yatay asimptotu $y = \frac{a}{c}$ doğrusudur. Bu tarz fonksiyonların grafiklerine hiperbol denir ve bir hiperbolün grafiği aşağıdaki grafiklerden biri gibi olur.

•



Her iki hiperbolde de $x = -\dfrac{d}{c}$ doğrusu düşey asimptot, $y = \dfrac{a}{c}$ yatay asimptottur. Eğer $f(x) = \dfrac{b}{cx+d}$ şeklinde ise x ekseni yatay asimptottur. Diğer taraftan $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx}$ şeklinde ise y ekseni düşey asimptottur.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
    - Tanım kümesini bulunuz.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
  - Tanım kümesini bulunuz.
  - x ve y kesmelerini bulunuz.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
  - Tanım kümesini bulunuz.
  - x ve y kesmelerini bulunuz.
  - Tüm düşey asimptotların denklemlerini bulunuz.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
  - Tanım kümesini bulunuz.
  - x ve y kesmelerini bulunuz.
  - Tüm düşey asimptotların denklemlerini bulunuz.
  - Varsa yatay asimptotu bulunuz.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
  - Tanım kümesini bulunuz.
  - x ve y kesmelerini bulunuz.
  - Tüm düşey asimptotların denklemlerini bulunuz.
  - Varsa yatay asimptotu bulunuz.
- **Çözüm.**

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
  - Tanım kümesini bulunuz.
  - x ve y kesmelerini bulunuz.
  - Tüm düşey asimptotların denklemlerini bulunuz.
  - Varsa yatay asimptotu bulunuz.
- **Çözüm.**
  - Rasyonel fonksiyonun tanım kümesi paydasını 0 yapmayan tüm reel sayılar sayılardır.

$$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ ve } x = -3$$

olduğundan payda -3 ve 3 değerlerinde 0 olur. Bu durumda tanım kümesi $R - \{-3, 3\}$ tür.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
  - Tanım kümesini bulunuz.
  - x ve y kesmelerini bulunuz.
  - Tüm düşey asimptotların denklemlerini bulunuz.
  - Varsa yatay asimptotu bulunuz.
- **Çözüm.**
  - Rasyonel fonksiyonun tanım kümesi paydasını 0 yapmayan tüm reel sayılar sayılardır.
  $$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ ve } x = -3$$
  olduğundan payda -3 ve 3 değerlerinde 0 olur. Bu durumda tanım kümesi $R - \{-3, 3\}$ tür.
  - $x = 0$ ise $g(0) = \frac{3 \cdot 0 + 3}{0^2 - 9} = -\frac{1}{3}$ tür. Diğer taraftan $\frac{3x+3}{x^2-9} = 0$ ise $3x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ olur. Buna göre, fonksiyon y eksenini $-\frac{1}{3}$ te x eksenini -1 de keser

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
  - Tanım kümesini bulunuz.
  - x ve y kesmelerini bulunuz.
  - Tüm düşey asimptotların denklemlerini bulunuz.
  - Varsa yatay asimptotu bulunuz.
- **Çözüm.**
  - Rasyonel fonksiyonun tanım kümesi paydasını 0 yapmayan tüm reel sayılar sayılardır.
  $$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ ve } x = -3$$
  olduğundan payda -3 ve 3 değerlerinde 0 olur. Bu durumda tanım kümesi $R - \{-3, 3\}$ tür.
  - $x = 0$ ise $g(0) = \frac{3 \cdot 0 + 3}{0^2 - 9} = -\frac{1}{3}$ tür. Diğer taraftan $\frac{3x+3}{x^2-9} = 0$ ise $3x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ olur. Buna göre, fonksiyon y eksenini $-\frac{1}{3}$ te x eksenini -1 de keser
  - Düşey asimptotlar $x = -3$ ve $x = 3$ doğrularıdır.

- **Örnek.** g rasyonel fonksiyonu $g(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-9}$ kuralı ile verilsin.
    - Tanım kümesini bulunuz.
    - x ve y kesmelerini bulunuz.
    - Tüm düşey asimptotların denklemlerini bulunuz.
    - Varsa yatay asimptotu bulunuz.
- **Çözüm.**
    - Rasyonel fonksiyonun tanım kümesi paydasını 0 yapmayan tüm reel sayılar sayılardır.
    $$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ ve } x = -3$$
    olduğundan payda -3 ve 3 değerlerinde 0 olur. Bu durumda tanım kümesi $R - \{-3, 3\}$ tür.
    - $x = 0$ ise $g(0) = \frac{3 \cdot 0 + 3}{0^2 - 9} = -\frac{1}{3}$ tür. Diğer taraftan $\frac{3x+3}{x^2-9} = 0$ ise $3x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ olur. Buna göre, fonksiyon y eksenini $-\frac{1}{3}$ te x eksenini -1 de keser
    - Düşey asimptotlar $x = -3$ ve $x = 3$ doğrularıdır.
    - Fonksiyonda paydanın derecesi payın derecesinden büyük olduğundan $y = 0$ doğrusu yatay asimptottur.

- **Örnek.** Bilgisayar üreten bir firma bir işçinin t gün eğitimden geçtikten sonra bir günde birleştirebileceği $N(t)$ tane parça sayısının

$$N(t) = \frac{50t}{t+4}, \quad t \geq 0$$

biçiminde verilebileceğini belirlemiştir.

- **Örnek.** Bilgisayar üreten bir firma bir işçinin t gün eğitimden geçtikten sonra bir günde birleştirebileceği $N(t)$ tane parça sayısının

$$N(t) = \frac{50t}{t+4}, \quad t \geq 0$$

biçiminde verilebileceğini belirlemiştir.

  - $0 \leq t \leq 100$ için fonksiyonun grafiğini çiziniz?

- **Örnek.** Bilgisayar üreten bir firma bir işçinin t gün eğitimden geçtikten sonra bir günde birleştirebileceği $N(t)$ tane parça sayısının

$$N(t) = \frac{50t}{t+4}, \quad t \geq 0$$

biçiminde verilebileceğini belirlemiştir.
  - $0 \leq t \leq 100$ için fonksiyonun grafiğini çiziniz?
  - Bir günde 45 parça takabilmesi için kaç gün eğitim almalıdır?

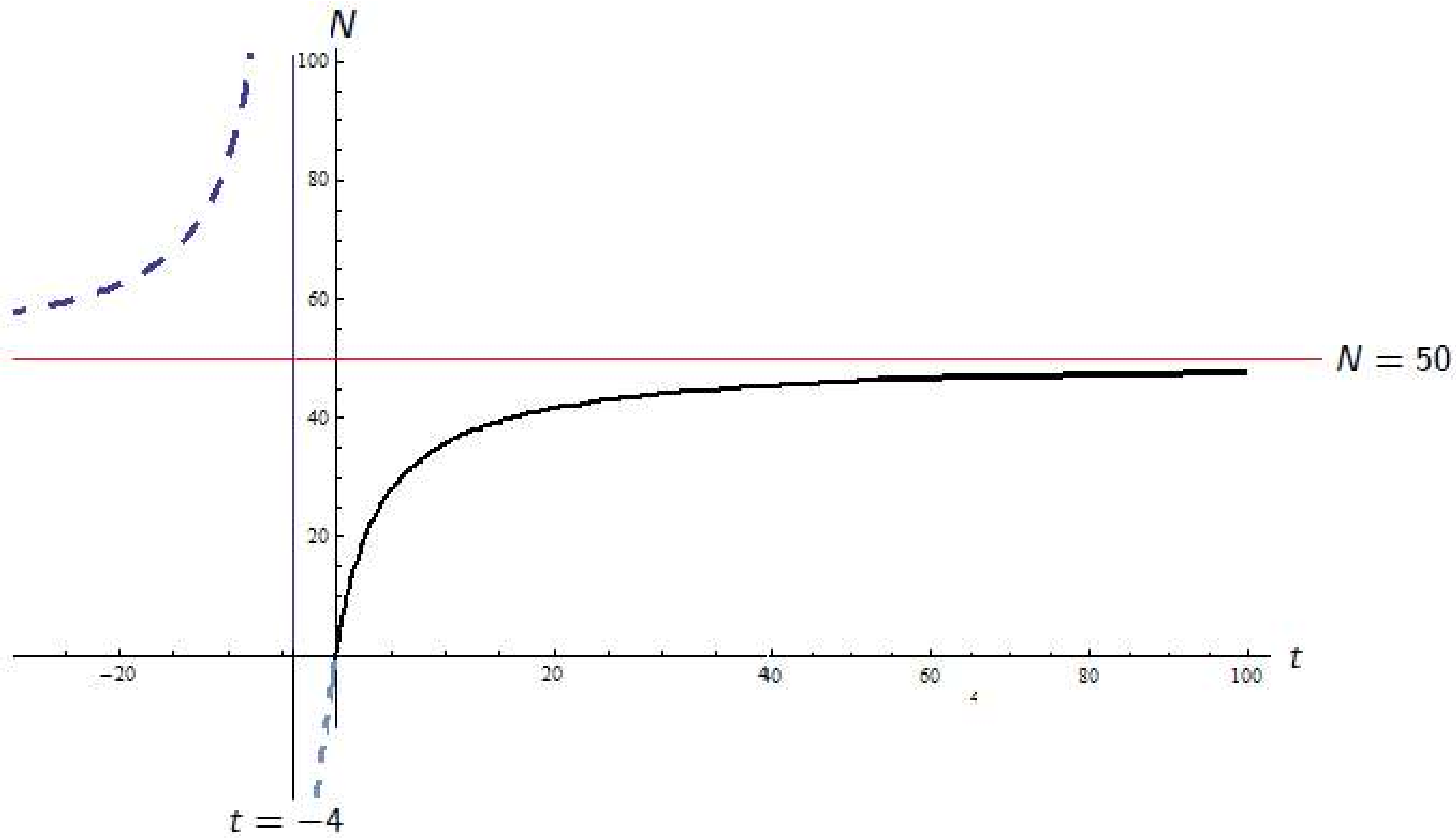
- **Örnek.** Bilgisayar üreten bir firma bir işçinin t gün eğitimden geçtikten sonra bir günde birleştirebileceği $N(t)$ tane parça sayısının

$$N(t) = \frac{50t}{t+4}, \quad t \geq 0$$

biçiminde verilebileceğini belirlemiştir.

  - $0 \leq t \leq 100$ için fonksiyonun grafiğini çiziniz?
  - Bir günde 45 parça takabilmesi için kaç gün eğitim almalıdır?
  - Bir işçi bir günde en fazla kaç tane parça birleştirebilir?

- **Çözüm.**

- **Çözüm.**
  - 

- .

- .
  - $N = 45$ olduğunda t değeri isteniyor.

$$\begin{aligned}\frac{50t}{t+4} &= 45\\ 50t &= 45t + 180\\ 5t &= 180 \Longrightarrow t = 36\end{aligned}$$

olur. 36 gün eğitim aldıktan sonra bir günde 45 parça takabilecek seviyeye gelir.

- .
  - $N = 45$ olduğunda t değeri isteniyor.

$$\begin{aligned} \frac{50t}{t+4} &= 45 \\ 50t &= 45t + 180 \\ 5t &= 180 \Longrightarrow t = 36 \end{aligned}$$

    olur. 36 gün eğitim aldıktan sonra bir günde 45 parça takabilecek seviyeye gelir.
  - Yatay asimptot olan $N = 50$ doğrusu üst sınırı vermektedir. Ancak bu üst sınıra hiçbir zaman ulaşılamaz çünkü bu $t \longrightarrow \infty$ için N değerlerinin limit durumudur. Bu durumda işçi bir günde en fazla $50 - 1 = 49$ parça takabilir.