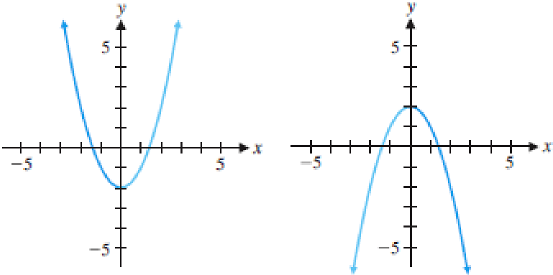
2. İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Parabol

2.1 İkinci Dereceden (Karesel) Fonksiyonlar

- **Tanım.** $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyonlara ikinci dereceden fonksiyon veya karesel fonksiyon, bu fonksiyonların grafiklerine de **parabol** denir. Parabol genel olarak kolları yukarı ve aşağı olacak şekilde iki türlüdür:



(A) $y = x^2 - 2$ (B) $y = 2 - x^2$

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:
    - $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:
  - $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ ile parabolün (varsa) x eksenini kestiği nokta(lar) bulunur.

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:
  - $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ ile parabolün (varsa) x eksenini kestiği nokta(lar) bulunur.
    - Eğer $\Delta > 0$ parabol x eksenini iki farklı noktada keser.

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:
    - $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.
    - $ax^2 + bx + c = 0$ ile parabolün (varsa) x eksenini kestiği nokta(lar) bulunur.
        - Eğer $\Delta > 0$ parabol x eksenini iki farklı noktada keser.
        - Eğer $\Delta = 0$ parabol x eksenine tepe noktasından teğettir.

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

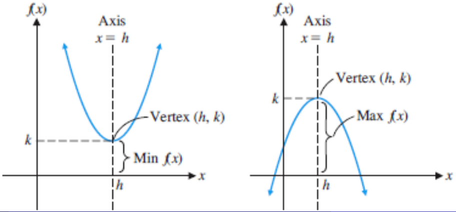
- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:
  - $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ ile parabolün (varsa) x eksenini kestiği nokta(lar) bulunur.
    - Eğer $\Delta > 0$ parabol x eksenini iki farklı noktada keser.
    - Eğer $\Delta = 0$ parabol x eksenine tepe noktasından teğettir.
    - Eğer $\Delta < 0$ parabol x eksenini kesmez.

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:
  - $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ ile parabolün (varsa) x eksenini kestiği nokta(lar) bulunur.
    - Eğer $\Delta > 0$ parabol x eksenini iki farklı noktada keser.
    - Eğer $\Delta = 0$ parabol x eksenine tepe noktasından teğettir.
    - Eğer $\Delta < 0$ parabol x eksenini kesmez.
  - $T(h, k) = T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ parabolün tepe noktasıdır. Tepe noktasının ordinatı olan $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ değeri $a > 0$ ise $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun en küçük değeri , $a > 0$ ise en küçük değeridir.

2.2 Parabolün Çizimi ve Özellikleri

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir:
  - $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ ile parabolün (varsa) x eksenini kestiği nokta(lar) bulunur.
    - Eğer $\Delta > 0$ parabol x eksenini iki farklı noktada keser.
    - Eğer $\Delta = 0$ parabol x eksenine tepe noktasından teğettir.
    - Eğer $\Delta < 0$ parabol x eksenini kesmez.
  - $T(h,k) = T\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ parabolün tepe noktasıdır. Tepe noktasının ordinatı olan $k = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ değeri $a > 0$ ise $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun en küçük değeri , $a > 0$ ise en küçük değeridir.
  - Parabol x eksenini kesmek zorunda değildir ancak y eksenini mutlaka keser. Bu nokta $(0, c)$ noktasıdır.



- **Örnek.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

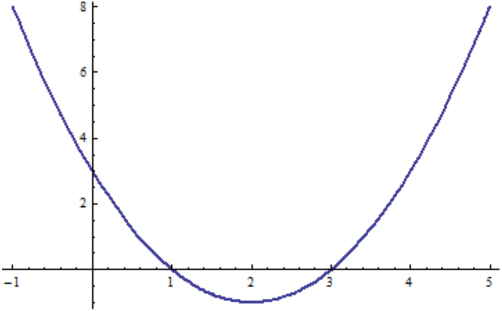
- **Örnek.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
    - $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
  - $x^2 - 4x + 3 = 0$ ise $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ parabolün x eksenini kestiği noktalardır.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
    - $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
    - $x^2 - 4x + 3 = 0$ ise $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ parabolün x eksenini kestiği noktalardır.
    - Tepe noktasının apsisi $h = -\frac{b}{2a} = 2$ dir. Ordinatı ise $k = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ dir. Bu durumda tepe noktası $(2, -1)$ olacaktır.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
  - $x^2 - 4x + 3 = 0$ ise $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ parabolün x eksenini kestiği noktalardır.
  - Tepe noktasının apsisi $h = -\frac{b}{2a} = 2$ dir. Ordinatı ise $k = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ dir. Bu durumda tepe noktası $(2, -1)$ olacaktır.
  - Parabol y eksenini $(0, 3)$ noktasında keser. Bu bilgiler yardımıyla parabol aşağıdaki gibi çizilir:



- **Örnek.** $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

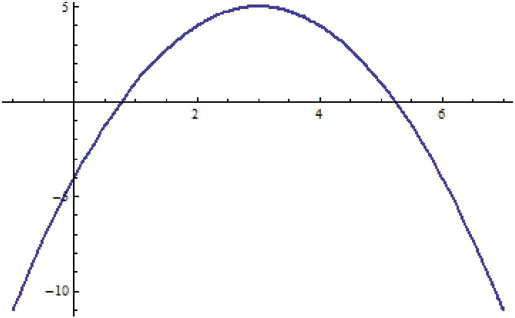
- **Örnek.** $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**

- **Örnek.** $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.

- **Örnek.** $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
  - $-x^2 + 6x - 4 = 0$ ise $x_1 = 3 - \sqrt{5}$ ve $x_2 = 3 + \sqrt{5}$ parabolün x eksenini kestiği noktalardır.

- **Örnek.** $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
  - $-x^2 + 6x - 4 = 0$ ise $x_1 = 3 - \sqrt{5}$ ve $x_2 = 3 + \sqrt{5}$ parabolün x eksenini kestiği noktalardır.
  - Tepe noktasının apsisi $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3$ tür. Ordinatı ise $k = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 5$ tir. Bu durumda tepe noktası $(3, 5)$ olacaktır.

- **Örnek.** $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
  - $-x^2 + 6x - 4 = 0$ ise $x_1 = 3 - \sqrt{5}$ ve $x_2 = 3 + \sqrt{5}$ parabolün x eksenini kestiği noktalardır.
  - Tepe noktasının apsisi $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3$ tür. Ordinatı ise $k = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 5$ tir. Bu durumda tepe noktası $(3, 5)$ olacaktır.
  - Parabol y eksenini $(0, -4)$ noktasında keser. Bu bilgiler yardımıyla parabol aşağıdaki gibi çizilir:



- **Örnek.** $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

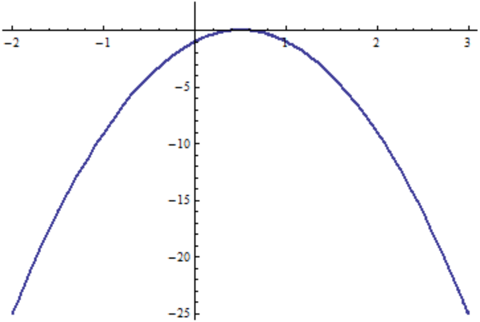
- **Örnek.** $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**

- **Örnek.** $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -4 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.

- **Örnek.** $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -4 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
  - $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ ise $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ olur. Demek ki parabolün x eksenine bu noktada teğet.

- **Örnek.** $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -4 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
  - $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ ise $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ olur. Demek ki parabolün x eksenine bu noktada teğet.
  - Tepe noktasının apsisi $h = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ ve ordinatı ise $k = 0$ dır. Bu durumda tepe noktası $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ olacaktır.

- **Örnek.** $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.**
  - $a = -4 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
  - $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ ise $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ olur. Demek ki parabolün x eksenine bu noktada teğet.
  - Tepe noktasının apsisi $h = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ ve ordinatı ise $k = 0$ dır. Bu durumda tepe noktası $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ olacaktır.
  - Parabol y eksenini $(0, -1)$ noktasında keser. Bu bilgiler yardımıyla parabol aşağıdaki gibi çizilir:



- **Örnek.** $f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun en küçük değerini bulunuz.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun en küçük değerini bulunuz.
- **Çözüm.** Parabolün kolları yukarı doğru olduğundan tepe noktasının ordinatı fonksiyonun aldığı en küçük değerdir. Tepe noktası $T(h, k)$ olsun.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

ve $k = f(h) = f(-1)$ olduğundan fonksiyonunun en küçük değeri

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun en küçük değerini bulunuz.
- **Çözüm.** Parabolün kolları yukarı doğru olduğundan tepe noktasının ordinatı fonksiyonun aldığı en küçük değerdir. Tepe noktası $T(h,k)$ olsun.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

ve $k = f(h) = f(-1)$ olduğundan fonksiyonunun en küçük değeri

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$$

olarak elde edilir.
- **Örnek.** $f(x) = -(x-3)^2 + 4$ fonksiyonunun en büyük değerini bulunuz.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun en küçük değerini bulunuz.
- **Çözüm.** Parabolün kolları yukarı doğru olduğundan tepe noktasının ordinatı fonksiyonun aldığı en küçük değerdir. Tepe noktası $T(h, k)$ olsun.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

ve $k = f(h) = f(-1)$ olduğundan fonksiyonunun en küçük değeri

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** $f(x) = -(x-3)^2 + 4$ fonksiyonunun en büyük değerini bulunuz.
- **Çözüm.** $-(x-3)^2 + 4 = -x^2 + 6x - 5$ olduğundan $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ olarak yazılabilir. Parabolün kolları aşağı doğru olduğundan tepe noktasının ordinatı fonksiyonun aldığı en büyük değerdir. Tepe noktası $T(h, k)$ olsun.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3$$

ve $k = f(h) = f(3)$ olduğundan fonksiyonunun en küçük değeri

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol
    - x eksenini kesmez?

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol
    - x eksenini kesmez?
    - x eksenine teğet olur?

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol
  - x eksenini kesmez?
  - x eksenine teğet olur?
  - x eksenini iki farklı noktada keser?

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol
  - x eksenini kesmez?
  - x eksenine teğet olur?
  - x eksenini iki farklı noktada keser?
- **Çözüm.**

$$\Delta = [-(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 + 4m - 12$$

olduğunun göre,

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol
    - x eksenini kesmez?
    - x eksenine teğet olur?
    - x eksenini iki farklı noktada keser?
- **Çözüm.**

$$\Delta = [-(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 + 4m - 12$$

olduğunun göre,

- x eksenini kesmiyorsa $m^2 + 4m - 12 < 0$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılırsa $-6 < m < 2$ bulunur.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol
    - x eksenini kesmez?
    - x eksenine teğet olur?
    - x eksenini iki farklı noktada keser?
- **Çözüm.**

$$\Delta = [-(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 + 4m - 12$$

olduğunun göre,

- x eksenini kesmiyorsa $m^2 + 4m - 12 < 0$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılırsa $-6 < m < 2$ bulunur.
- x eksenine teğet ise $m^2 + 4m - 12 = 0$ olmalıdır.

$$m^2 + 4m - 12 = (m+6)(m-2) \Longrightarrow m = 2 \text{ veya } m = -6$$

bulunur.

- **Örnek.** $f(x) = x^2 - (m+2)x + 4$ fonksiyonunda m nin hangi değerleri için parabol
  - x eksenini kesmez?
  - x eksenine teğet olur?
  - x eksenini iki farklı noktada keser?
- **Çözüm.**

$$\Delta = [-(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 + 4m - 12$$

olduğunun göre,

  - x eksenini kesmiyorsa $m^2 + 4m - 12 < 0$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılırsa $-6 < m < 2$ bulunur.
  - x eksenine teğet ise $m^2 + 4m - 12 = 0$ olmalıdır.

$$m^2 + 4m - 12 = (m+6)(m-2) \Longrightarrow m = 2 \text{ veya } m = -6$$

bulunur.

  - x eksenini iki farklı noktada kesiyorsa $m^2 + 4m - 12 > 0$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılırsa $2 < m < \infty$ veya $-\infty < m < -6$ bulunur.

2.3 Parabolün Denkleminin Elde Edilmesi

- Düzlemde verilen üç noktadan $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde bir ve yalnız bir parabol geçer.

2.3 Parabolün Denkleminin Elde Edilmesi

- Düzlemde verilen üç noktadan $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde bir ve yalnız bir parabol geçer.
- Düzlemde bulunan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ noktalarından geçen parabolün denklemini elde etmek için bu noktalar $f(x) = ax^2 + bx + c$ denkleminde yazılırsa aşağıdaki denklem istemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\
ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\
ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3
\end{aligned}
$$

Elde edilen denklem sisteminin çözülmesi ile a, b, c değerleri elde edilir ve böylece parabolün denklemi elde edilmiş olur.

- **Örnek.** Düzlemde $(1,-1)$, $(-1,5)$, $(0,1)$ noktalarından geçen parabolün denklemini bulunuz.

- **Örnek.** Düzlemde $(1,-1)$, $(-1,5)$, $(0,1)$ noktalarından geçen parabolün denklemini bulunuz.
- **Çözüm.** Parabolün denklemi $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde olsun. Verilen noktaları denklemde yazalım:

$$\begin{aligned} a+b+c &= -1 \quad (1) \\ a-b+c &= 5 \quad (2) \\ c &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. (1) ve (2) de $c = 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} a+b &= -2 \\ a-b &= 4 \end{aligned}$$

olur. Bu denklemler taraf tarafa toplanırsa ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \Longrightarrow a = 1 \\ 2b &= -6 \Longrightarrow b = -3 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$ olduğundan aradığımız parabolün denklemi

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

şeklindedir.

- x eksenini kestiği noktalar veya tepe noktası bilinen bir parabolün geçtiği herhangi bir nokta daha verilirse denklemi aşağıdaki bağıntılar yardımıyla elde edilebilir.

- x eksenini kestiği noktalar veya tepe noktası bilinen bir parabolün geçtiği herhangi bir nokta daha verilirse denklemi aşağıdaki bağıntılar yardımıyla elde edilebilir.
- x eksenini x_1 ve x_2 noktalarında kesen bir parabolün denklemi $a \neq 0$ için

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

şeklindedir.

- x eksenini kestiği noktalar veya tepe noktası bilinen bir parabolün geçtiği herhangi bir nokta daha verilirse denklemi aşağıdaki bağıntılar yardımıyla elde edilebilir.
- x eksenini x_1 ve x_2 noktalarında kesen bir parabolün denklemi $a \neq 0$ için

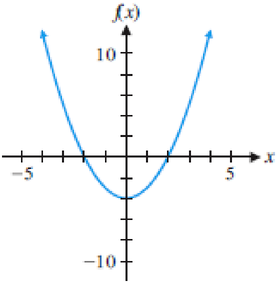
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

şeklindedir.
- Tepe noktası $T(h, k)$ olan bir parabolün denklemi $a \neq 0$ için

$$y = a(x - h)^2 + k$$

şeklindedir.

- **Örnek.** Grafiği aşağıdaki gibi verilen bir parabol x eksenini -2 ve 2 de ayrıca y eksenini -4 de kesmiştir. Bu parabolün denklemini bulunuz.



- **Çözüm.** Parabolün x eksenini kestiği noktalar $x_1 = -2$ ve $x_2 = 2$ olarak verilmiştir.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x+2)(x-2) = a\left(x^2 - 4\right)$$

olur. Ayrıca parabol y eksenini $(0, -4)$ noktasında kestiğine göre yukarıdaki denklemde $x = 0$ için $y = -4$ olmalı. Buna göre

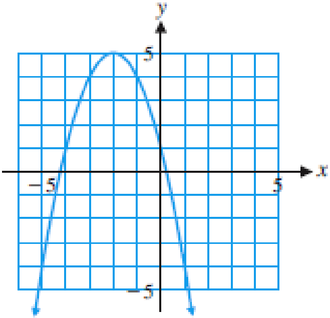
$$a\left(0^2 - 4\right) = -4 \Longrightarrow a = 1$$

olacaktır. Böylece parabolün denklemi

$$\begin{aligned} y &= 1 \cdot \left(x^2 - 4\right) \\ &= x^2 - 4 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

- **Örnek.** Aşağıdaki parabolün tepe noktası $(-2, 5)$ tir. Ayrıca parabol $(0, 1)$ noktasından da geçtiğine göre denklemini elde ediniz.



- **Çözüm.** Grafikte parabolün tepe noktası $T(h,k) = (-2,5)$ olarak verilmiş. Bu durumda parabolün denklemi

$$y = a(x-h)^2 + k = y = a(x+2)^2 + 5$$

şeklindedir. Diğer taraftan parabol $(0,1)$ noktasından da geçtiğine göre yukarıdaki denklemde $x = 0$ için $y = 1$ olmalı. Buna göre

$$a(0+2)^2 + 5 = 1 \Longrightarrow a = -1$$

olur. Böylece parabolün denklemi

$$\begin{aligned} y &= -(x+2)^2 + 5 \\ &= -x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.4 Örnek Problemler

- **Örnek.** Bir alış-veriş merkezi telefonlar için hafıza kartı satmaktadır ve x adet hafıza kartı satıldığında elde edilen gelir TL olarak aşağıdaki gibidir:

$$R(x) = x(80 - 2x)$$

Burada x satılan hafıza kartı sayını, $R(x)$ ise TL olarak geliri göstermektedir. Fonksiyon $0 \leq x \leq 40$ tanım kümesine sahiptir.

2.4 Örnek Problemler

- **Örnek.** Bir alış-veriş merkezi telefonlar için hafıza kartı satmaktadır ve x adet hafıza kartı satıldığında elde edilen gelir TL olarak aşağıdaki gibidir:

$$R(x) = x(80 - 2x)$$

  Burada x satılan hafıza kartı sayını, $R(x)$ ise TL olarak geliri göstermektedir. Fonksiyon $0 \leq x \leq 40$ tanım kümesine sahiptir.

  - Gelir fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

2.4 Örnek Problemler

- **Örnek.** Bir alış-veriş merkezi telefonlar için hafıza kartı satmaktadır ve x adet hafıza kartı satıldığında elde edilen gelir TL olarak aşağıdaki gibidir:

  $$R(x) = x(80 - 2x)$$

  Burada x satılan hafıza kartı sayını, $R(x)$ ise TL olarak geliri göstermektedir. Fonksiyon $0 \leq x \leq 40$ tanım kümesine sahiptir.

  - Gelir fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
  - Maksimum geliri bulunuz.

- **Örnek.** Bir alış-veriş merkezi telefonlar için hafıza kartı satmaktadır ve x adet hafıza kartı satıldığında elde edilen gelir TL olarak aşağıdaki gibidir:

$$R(x) = x(80 - 2x)$$

Burada x satılan hafıza kartı sayını, $R(x)$ ise TL olarak geliri göstermektedir. Fonksiyon $0 \leq x \leq 40$ tanım kümesine sahiptir.

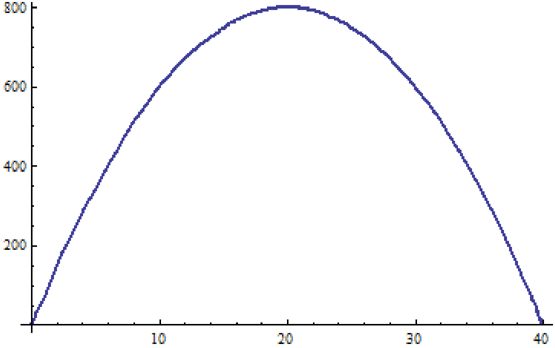
  - Gelir fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
  - Maksimum geliri bulunuz.
  - Maksimum geliri üretecek x değerini bulunuz.

- **Çözüm.**

Gelir denklemi olarak verilen

$$R(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$$

denkleminin grafiği kolları aşağı doğru bir paraboldür. Daha önce uygulanan adımlar aynı şekilde uygulanırsa parabolün grafiği aşağıdaki gibi elde edilir:



- .

- .
    - Maksimum gelir parabolün tepe noktasının ordinatıdır. Yukarıdaki parabolün tepe noktasının ordinatı

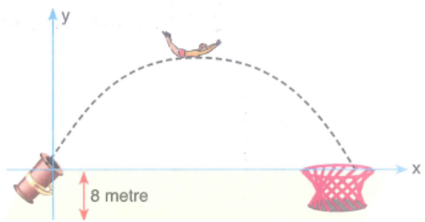
      $$k = R(20) = 20(80 - 2 \cdot 20) = 800$$

      olur ve bu değer maksimum gelirdir.

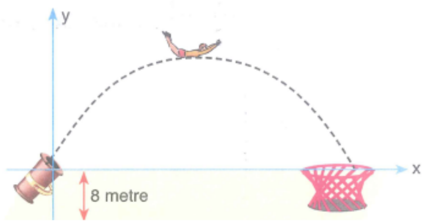
- .
  - Maksimum gelir parabolün tepe noktasının ordinatıdır. Yukarıdaki parabolün tepe noktasının ordinatı

    $$k = R\left(20\right) = 20\left(80 - 2 \cdot 20\right) = 800$$

    olur ve bu değer maksimum gelirdir.
  - Maksimum gelir tepe noktasının apsis değeri olan $h = 20$ değerinde gerçekleşir. Sonuç olarak 20 adet hafıza kartı satıldığında maksimum gelir elde edilecektir.



- **Örnek.** Bir top tarafından fırlatılan sirk cambazının yörüngesi $f(x) = -\frac{x^2}{36} + x$ fonksiyonunun grafiğidir. Top ve gerilmiş ağın her ikisi de yerden 8 metre yüksektedir. Buna göre cambaz yerden en fazla kaç metre yükseğe çıkabilir?



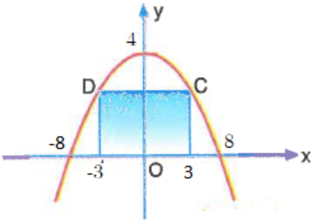
- **Örnek.** Bir top tarafından fırlatılan sirk cambazının yörüngesi $f(x) = -\frac{x^2}{36} + x$ fonksiyonunun grafiğidir. Top ve gerilmiş ağın her ikisi de yerden 8 metre yüksektedir. Buna göre cambaz yerden en fazla kaç metre yükseğe çıkabilir?
- **Çözüm.** Tepe noktasını $T(h, k)$ ise

$$h = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{36}\right)} = 18 \text{ ve } k = f(18) = 9$$

olduğundan cambazın yerden yüksekliği en fazla $9 + 8 = 17$ metre olabilir.

- **Örnek.** Ters parabol şeklindeki bir tünelin taban genişliği 16 metre ve yüksekliği 4 metredir. Tünelden geçecek olan ve arkadan görünüşü dikdörtgen şeklinde olan bir trenin genişliği ise 6 metredir. Buna göre, bu tünelden geçecek olan trenin yüksekliği en fazla kaç metre olabilir?

- **Örnek.** Ters parabol şeklindeki bir tünelin taban genişliği 16 metre ve yüksekliği 4 metredir. Tünelden geçecek olan ve arkadan görünüşü dikdörtgen şeklinde olan bir trenin genişliği ise 6 metredir. Buna göre, bu tünelden geçecek olan trenin yüksekliği en fazla kaç metre olabilir?
- **Çözüm.** Tren ve tünel aşağıdaki gibi düşünülebilir.

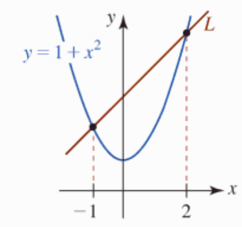


Parabol

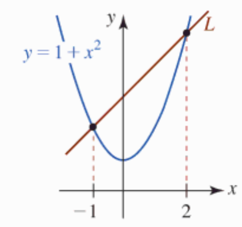
$$f(x) = a(x-8)(x+8) = a\left(x^2-64\right)$$

şeklindedir. Ayrıca $f(0) = 4$ olduğundan $a\left(0^2-64\right) = 4 \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$ olmalıdır. Demek ki parabolün denklemi $f(x) = -\frac{1}{16}\left(x^2-64\right)$ şeklindedir. Bu durumda trenin yüksekliği en fazla $f(3) = -\frac{1}{16}\left(3^2-64\right) = \frac{55}{16}$ metre olabilir.

- **Örnek.** Aşağıdaki şekilde $f(x) = 1 + x^2$ parabolü ile L doğrusunun grafiği verilmiştir. L doğrusunun denklemini bulunuz.



- **Örnek.** Aşağıdaki şekilde $f(x) = 1 + x^2$ parabolü ile L doğrusunun grafiği verilmiştir. L doğrusunun denklemini bulunuz.



- **Çözüm.** $f(-1) = 1 + (-1)^2 = 2$ ve $f(2) = 1 + 2^2 = 5$ olduğundan doğru ve parabolün kesim noktaları $(-1, 2)$ ve $(2, 5)$ tir. Diğer taraftan L doğrusu bu iki noktadan geçtiğinden iki noktası bilinen doğrunun denkleminden L doğrusunun denklemi

$$\frac{y-2}{2-5} = \frac{x-(-1)}{-1-2} \Longrightarrow y = x + 3$$

olarak bulunur.

- **Örnek.** Düzlemde $(2, -3)$, $(0, 5)$, $(7, 12)$ noktalarından geçen parabolünün tepe noktasından geçen ve x eksenine dik ve paralel olan doğruların denklemini bulunuz.

- **Örnek.** Düzlemde $(2,-3), (0,5), (7,12)$ noktalarından geçen parabolünün tepe noktasından geçen ve x eksenine dik ve paralel olan doğruların denklemini bulunuz.
- **Çözüm.** Parabolün denklemi $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde olsun. Verilen noktaları denklemde yazalım:

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= -3 \\ c &= 5 \\ 49a + 7b + c &= 12 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Birinci ve üçüncü denklemde $c = 5$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= -8 \\ 49a + 7b &= 7 \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden $a = 1, b = -6$ olur. Demek ki parabolün denklemi $f(x) = x^2 - 6x + 5$ olmalıdır. $T(h,k)$ tepe noktasının apsisi ve ordinatı

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2} = 3 \text{ ve } k = f(3) = -4$$

olduğundan parabolünün tepe noktasından geçen ve x eksenine dik ve paralel olan doğruların denklemi sırasıyla $x = 3, y = -4$ olarak elde edilir.