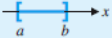
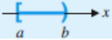
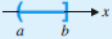
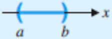
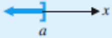
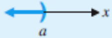
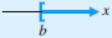
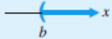
13. Eşitsizlikler

13.1 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- a ve b reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ ifadelerinden her birine **doğrusal (lineer) eşitsizlik** veya **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Bu eşitsizliklerin çözüm kümeleri genelde aşağıdaki gibi bir aralık şeklindedir.

13.1 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- a ve b reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ ifadelerinden her birine **doğrusal (lineer) eşitsizlik** veya **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Bu eşitsizliklerin çözüm kümeleri genelde aşağıdaki gibi bir aralık şeklindedir.
-

$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a, b)$	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	$a < x \leq b$	
(a, b)	$a < x < b$	
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	
$(-\infty, a)$	$x < a$	
$[b, \infty)$	$x \geq b$	
(b, ∞)	$x > b$	

- Bu tür eşitsizlikler üç aşamada çözülür.

- Bu tür eşitsizlikler üç aşamada çözülür.

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax + b = 0$ denkleminden $x = -\dfrac{b}{a}$ bulunur.

- Bu tür eşitsizlikler üç aşamada çözülür.

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax + b = 0$ denkleminden $x = -\dfrac{b}{a}$ bulunur.
2.

$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
a nın işaretinin tersi		a nın işareti

şeklinde tablo yapılır

- Bu tür eşitsizlikler üç aşamada çözülür.

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax + b = 0$ denkleminden $x = -\dfrac{b}{a}$ bulunur.
2.

$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
a nın işaretinin tersi		a nın işareti

   şeklinde tablo yapılır

3. Eşitsizlik < 0 şeklinde ise tablodaki $-$ olan bölge, > 0 şeklinde ise tablodaki $+$ olan bölge çözüm kümesidir. Eğer eşitsizlik ≤ 0 veya ≥ 0 şeklinde ise çözüm kümesine kökler de katılır. Ancak çözüm kümesine $-\infty$ ve ∞ un olduğu uçlar hiçbir zaman dahil edilmez.

- $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$ biçimindeki eşitsizlikler alternatif olarak şöyle de çözülebilir: Örneğin $ax + b < 0$ eşitsizliğini ele alalım. Önce b eşitsizliğin diğer tarafına atılır. Sonra da eşitsizliğin her iki tarafı a sayısına bölünür. Ancak burada a nın işaretine dikkat edilmelidir. a nın işareti negatif ise eşitsizlik yön değiştirecektir.

$$\begin{aligned} a \text{ pozitif olduğunda} \quad &: \quad ax < -b \Longrightarrow x < -\frac{b}{a} \\ a \text{ negatif olduğunda} \quad &: \quad ax < -b \Longrightarrow x > -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

- **Örnek.** $3\left(x-1\right) \leq 5\left(x+2\right)-5$ eşitsizliğini çözünüz.

- **Örnek.** $3(x-1) \leq 5(x+2) - 5$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** İkinci yolla çözelim.

$$\begin{aligned} 3(x-1) &\leq 5(x+2) - 5 \\ 3x - 3 &\leq 5x + 10 - 5 \\ 3x - 5x &\leq 5 + 3 \\ -2x &\leq 8 \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Demek ki eşitsizliğin çözüm kümesi $[-4, \infty)$ aralığıdır.

- **Örnek.** $-8 \leq 3x - 5 < 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $-8 \leq 3x - 5 < 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Yine ikinci yolu kullanalım.

$$\begin{aligned} -8 &\leq 3x - 5 < 7 \\ -8 + 5 &\leq 3x < 7 + 5 \\ -3 &\leq 3x < 12 \\ -1 &\leq x < 4 \end{aligned}$$

olur. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $[-1, 4)$ tür.

- **Örnek.** $-3 \leq \frac{-2x+4}{4} < 7$ eşitsizliğini sağlayan tamsayıları bulunuz.

- **Örnek.** $-3 \leq \frac{-2x+4}{4} < 7$ eşitsizliğini sağlayan tamsayıları bulunuz.
- **Çözüm.** İkinci yolu kullanalım.

$$\begin{aligned} -12 &\leq -2x+4 < 28 \\ -16 &\leq -2x < 24 \\ -12 &< x \leq 8 \end{aligned}$$

olur. Buna göre eşitsizliği sağlayan tam sayılar $-11, -10, -9, ..., 7, 8$ dir.

- **Örnek.** Bir şirket DVD üretmektedir. x tane DVD üretilip satıldığında toplam maliyet $C(x) = 2x + 36000$ ve toplam gelir $R(x) = 4x$ ile bulunmaktadır. Şirketin kâr edebilmesi için en az kaç DVD üretip satması gerekir?

- **Örnek.** Bir şirket DVD üretmektedir. x tane DVD üretilip satıldığında toplam maliyet $C(x) = 2x + 36000$ ve toplam gelir $R(x) = 4x$ ile bulunmaktadır. Şirketin kâr edebilmesi için en az kaç DVD üretip satması gerekir?
- **Çözüm.** Şirketin kâr edebilmesi için $R(x) > C(x)$ olmalıdır. Bu eşitsizliği çözersek

$$\begin{aligned} 4x &> 2x + 36000 \\ 4x - 2x &> 36000 \\ 2x &> 36000 \\ x &> \frac{36000}{2} = 18000 \end{aligned}$$

olur. Demek ki kâr için en az 18001 adet DVD üretilip satılmalıdır.

- **Örnek.** 1984 yılında Dünya'nın en derin sondajını yapan Rus bilim insanları yerin x kilometre altındaki T sıcaklığını Celcius türünden $3 \leq x \leq 20$ için

$$T = 30 + 25\,(x - 3)$$

olduğunu buldular. Buna göre hangi derinliklerde sıcaklık 300° ile 400° arasındadır?

- **Örnek.** 1984 yılında Dünya'nın en derin sondajını yapan Rus bilim insanları yerin x kilometre altındaki T sıcaklığını Celcius türünden $3 \leq x \leq 20$ için

$$T = 30 + 25\left(x - 3\right)$$

olduğunu buldular. Buna göre hangi derinliklerde sıcaklık 300° ile 400° arasındadır?

- **Çözüm.** Sıcaklık 300° ile 400° arasında ise

$$300 \leq 30 + 25\left(x - 3\right) \leq 400$$

olmalıdır. Bu eşitsizlik çözülürse

$$\begin{aligned} 270 &\leq 25\left(x-3\right) \leq 370 \\ \frac{270}{25} &\leq x - 3 \leq \frac{370}{25} \\ \frac{54}{5} + 3 &\leq x \leq \frac{74}{5} + 3 \\ \frac{69}{5} &\leq x \leq \frac{89}{5} \end{aligned}$$

olur. Demek ki 300° ile 400° arasında ise derinlik $\frac{69}{5}$ km ile $\frac{89}{5}$ km arasındadır.

13.2 İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- $ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0$ biçimindeki eşitsizlikler ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerdir. Bu tür eşitsizlikler de doğrusal eşitsizliklere benzer olarak üç aşamada çözülür:

13.2 İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

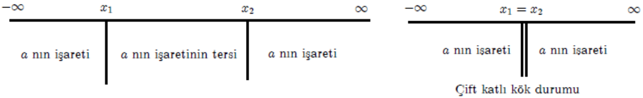
- $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ biçimindeki eşitsizlikler ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerdir. Bu tür eşitsizlikler de doğrusal eşitsizliklere benzer olarak üç aşamada çözülür:

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin varsa reel kökleri bulunur.

13.2 İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ biçimindeki eşitsizlikler ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerdir. Bu tür eşitsizlikler de doğrusal eşitsizliklere benzer olarak üç aşamada çözülür:

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin varsa reel kökleri bulunur.
2. Farklı iki kök ve eşit iki kök olma durumuna göre

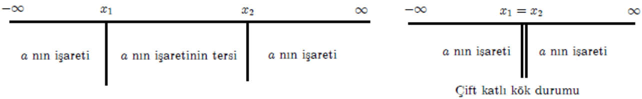


şeklinde tablo yapılır. Reel kökün olmadığı durumlarda her yer a nın işareti ile doldurulur.

13.2 İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ biçimindeki eşitsizlikler ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerdir. Bu tür eşitsizlikler de doğrusal eşitsizliklere benzer olarak üç aşamada çözülür:

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin varsa reel kökleri bulunur.
2. Farklı iki kök ve eşit iki kök olma durumuna göre



   şeklinde tablo yapılır. Reel kökün olmadığı durumlarda her yer a nın işareti ile doldurulur.

3. Eşitsizlik < 0 şeklinde ise tablodaki $-$ olan bölge(ler), > 0 şeklinde ise tablodaki $+$ olan bölge(ler) çözüm kümesidir. Eğer eşitsizlik ≤ 0 veya ≥ 0 şeklinde ise çözüm kümesine kökler de katılır. Ancak çözüm kümesine $-\infty$ ve ∞ un olduğu uçlar hiçbir zaman dahil edilmez.

- **Örnek.** $-3x^2 + 4x - 1 > 0$ eşitsizliğini çözünüz.

- **Örnek.** $-3x^2 + 4x - 1 > 0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** Önce eşitsizliği dikkate almadan $-3x^2 + 4x - 1 = 0$ denklemini çözmeliyiz. $-3x^2 + 4x - 1 = (-3x + 1)(x - 1)$ olduğundan bu denklemin kökleri 1 ve $\frac{1}{3}$ tür. Tablo

$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$	

şeklinde oluşacaktır. Bu tabloyu oluştururken işaretlemeye tablonun sağından başlarız ve $a = -3$ yani negatif olduğundan $-$ yazarız. Eşitsizlik > 0 şeklinde olduğundan tablodaki $+$ olan bölge aradığımız çözüm kümesidir. Ayrıca eşitszlik ≥ 0 şeklinde olmadığından çözüm kümesine sınırları dahil etmeyiz. Sonuç olarak eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ dir.

- **Örnek.** $x^2 + x + \frac{1}{4} > 0$ eşitsizliğini çözünüz.

- **Örnek.** $x^2 + x + \frac{1}{4} > 0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** Eşitsizliği dikkate almadan $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ denklemini çözmeliyiz. $x^2 + x + \frac{1}{4} = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$ olduğundan bu denklemin kökleri $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ dir. Yani kökler çift katlıdır. Bu durumda tablo

$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$+$	$\Vert$	$+$

şeklinde oluşacaktır. Tabloyu oluştururken işaretlemeye tablonun sağından başlarız ve $a = 4$ yani pozitif olduğundan $+$ yazarız. Çift katlı köklerde işaret değişmeyeceğinden yine $+$ şeklinde devam ederiz. Eşitsizlik > 0 şeklinde olduğundan tablodaki $+$ olan bölgeler aradığımız çözüm kümesidir. Ayrıca eşitszlik ≥ 0 şeklinde olmadığından çözüm kümesine sınırları dahil etmeyiz. Sonuç olarak eşitsizliğin çözüm kümesi $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ dir. Yani eşitsizliği bütün reel sayılardan sadece $-\frac{1}{2}$ sağlamaz.

- **Örnek.** $x^2 - 2x \leq -2$ eşitsizliğini çözünüz.

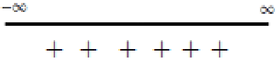
- **Örnek.** $x^2 - 2x \leq -2$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** $x^2 - 2x \leq -2$ ile $x^2 - 2x + 2 \leq 0$ aynı olduğundan

$$x^2 - 2x + 2 \leq 0$$

eşitsizliğini çözmek yeterlidir.

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

denkleminin reel kökü olmadığından yapacağımız tabloya kök işaretleyemeyiz. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:



Tabloda $-$ olan bir bölge olmadığından eşitsizliğin çözüm kümesi $\emptyset$ (boş küme) dir.

- **Örnek.** Bir reel sayının karesi, kendisinin 12 fazlasından küçük olduğuna göre bu koşula uyan kaç tamsayı vardır?

- **Örnek.** Bir reel sayının karesi, kendisinin 12 fazlasından küçük olduğuna göre bu koşula uyan kaç tamsayı vardır?
- **Çözüm.** Bu reel sayı x olsun. Buna göre

$$x^2 < x + 12$$

olmalıdır.

$$x^2 - x - 12 < 0$$

şeklinde düzenleyip çözmeliyiz.

$$x^2 - x - 12 = 0 \Longrightarrow x = -3 \text{ ve } x = 4$$

olur. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:

$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$+$	$-$	$+$	

Çözüm kümesi $(-3, 4)$ olduğundan bu aralıktaki $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ tamsayıları çözümdür.

- **Örnek.** Karesi kendisinden küçük olan bütün reel sayıları bulunuz.

- **Örnek.** Karesi kendisinden küçük olan bütün reel sayıları bulunuz.
- **Çözüm.** Bu reel sayılar x ile gösterilsin. Buna göre

$$x^2 < x$$

olmalıdır.

$$x^2 - x < 0$$

şeklinde düzenleyip çözmeliyiz.

$$x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ve } x = 1$$

olur. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:

$-\infty$	0	1	$+\infty$
$+$	$-$	$+$	

Çözüm kümesi $(0, 1)$ olduğundan bu aralıktaki reel sayılar istenen özelliktedir.

13.3 Çarpım Şeklindeki Eşitsizlikler

- Çarpım şeklinde verilen bir eşitsizliğin çözüm kümesi bulunurken

13.3 Çarpım Şeklindeki Eşitsizlikler

- Çarpım şeklinde verilen bir eşitsizliğin çözüm kümesi bulunurken

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın ifade sıfıra eşitlenerek varsa tüm reel kökler bulunur.

13.3 Çarpım Şeklindeki Eşitsizlikler

- Çarpım şeklinde verilen bir eşitsizliğin çözüm kümesi bulunurken

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın ifade sıfıra eşitlenerek varsa tüm reel kökler bulunur.
2. Bulunan tüm kökler sayı doğrusuna eşitlenir. Çift katlı kökler belirlenir.

13.3 Çarpım Şeklindeki Eşitsizlikler

- Çarpım şeklinde verilen bir eşitsizliğin çözüm kümesi bulunurken

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın ifade sıfıra eşitlenerek varsa tüm reel kökler bulunur.
2. Bulunan tüm kökler sayı doğrusuna eşitlenir. Çift katlı kökler belirlenir.
3. Her çarpanın işareti alınıp çarpılır. Tablonun en sağından başlanarak işaretleme yapılır. Çift katlı köklerde işaret değiştirilmez. Örneğin tüm kökler x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 olsun ve x_3, x_4 çift katlı kökler olsunlar. İfadenin işareti de $(-)$ olsun. Tablo aşağıdaki gibi oluşturulacaktır.

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	

- **Örnek.**

$$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-1\right)(x+9)=0$$

denkleminin tüm köklerini bulunuz. Çift katlı kökleri belirtiniz.

- **Örnek.**
$$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-1\right)(x+9)=0$$
denkleminin tüm köklerini bulunuz. Çift katlı kökleri belirtiniz.
- **Çözüm.**
$$\begin{aligned} x^2-5x+4 &= 0 \Longrightarrow x=1, x=4 \\ x^2-1 &= 0 \Longrightarrow x=1, x=-1 \\ x+9 &= 0 \Longrightarrow x=-9 \end{aligned}$$
olduğundan denklemin tüm kökleri $-9, -1, 1, 4$ tür. $x=1$ iki tane (çift sayıda) olduğundan çift katlı köktür.

- **Örnek.** $(x-7)^2\,(x+3)^3 \leq 0$ eşitsizliğini çözünüz.

- **Örnek.** $(x-7)^2(x+3)^3 \leq 0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.**

$$(x-7)^2(x+3)^3 = 0$$

denkleminin kökleri $x_1 = 7$ ve $x_2 = -3$ tür. Ayrıca $x_1 = 7$ çift katlı köktür. Tablo aşağıdaki gibi oluşturulmalıdır:

	$-\infty$	-3	7	$+\infty$
$(x-7)^2(x+3)^3$	$-$	$+$	$+$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -3] \cup \{7\}$ şeklinde olmalıdır.

- **Örnek.** $(x-5)^4 (x+3)^5 > 0$ eşitsizliğini çözünüz.

- **Örnek.** $(x-5)^4(x+3)^5 > 0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.**

$$(x-5)^4(x+3)^5 = 0$$

denkleminin kökleri $x_1 = 5$ ve $x_2 = -3$ tür. Ayrıca $x_1 = 5$ çift katlı köktür. Tablo aşağıdaki gibi oluşturulmalıdır:

	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$(x-5)^4(x+3)^5$	$-$	$+$	$+$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-3,5) \cup (5,\infty)$ şeklinde olmalıdır. Bu küme $(-3,\infty) - \{5\}$ şeklinde de gösterilebilir.

13.4 Bölüm Şeklindeki Eşitsizlikler

- Bölüm şeklindeki eşitsizlikler çarpım şeklindeki eşitsizlikler gibi çözülür. Ancak paydanın kökleri hiç bir zaman çözüm kümesine alınmaz.

13.4 Bölüm Şeklindeki Eşitsizlikler

- Bölüm şeklindeki eşitsizlikler çarpım şeklindeki eşitsizlikler gibi çözülür. Ancak paydanın kökleri hiç bir zaman çözüm kümesine alınmaz.
- **Örnek.** $\dfrac{x+6}{5-x} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

13.4 Bölüm Şeklindeki Eşitsizlikler

- Bölüm şeklindeki eşitsizlikler çarpım şeklindeki eşitsizlikler gibi çözülür. Ancak paydanın kökleri hiç bir zaman çözüm kümesine alınmaz.
- **Örnek.** $\dfrac{x+6}{5-x} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Bu eşitsizlik yerine

$$(x+6)(5-x) > 0$$

eşitsizliğini çözebiliriz.

$$(x+6)(5-x) = 0$$

denkleminin kökleri $x_1 = -6$ ve $x_2 = 5$ tir. Tablo yapılırsa

	$-\infty$	-6	5	$+\infty$
$\dfrac{x+6}{5-x}$	$-$	$+$	$-$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-6, 5)$ şeklinde olur.

- **Örnek.** $\dfrac{\left(x^2-x-6\right)\left(x-1\right)^3}{x^2\left(1-x^2\right)^5} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $\dfrac{\left(x^2-x-6\right)(x-1)^3}{x^2\left(1-x^2\right)^5} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Bu eşitsizlik yerine

$$\left(x^2-x-6\right)(x-1)^3 x^2 \left(1-x^2\right)^5 \geq 0$$

eşitsizliğini çözebiliriz.

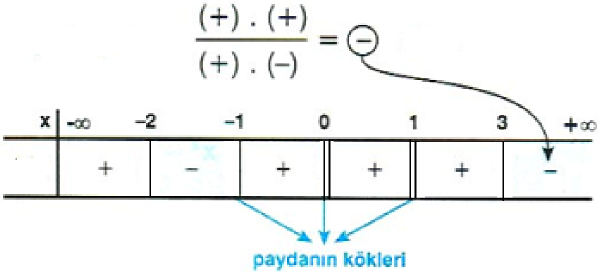
$$\left(x^2-x-6\right)(x-1)^3 x^2 \left(1-x^2\right)^5 = 0$$

denkleminin tüm köklerini bulalım.

$$\begin{aligned} x^2-x-6 &= 0 \Longrightarrow x=-2, x=3 \\ (x-1)^3 &= 0 \Longrightarrow x=1 \ \ (3 \text{ tane}) \\ x^2 &= 0 \Longrightarrow x=0 \ \ (2 \text{ tane}) \\ \left(1-x^2\right)^5 &= 0 \Longrightarrow x=1 \ \ (5 \text{ tane}), x=-1 \ \ (5 \text{ tane}) \end{aligned}$$

Köklerden 0 ve 1 çift katlıdır.

- Tablo yapılırsa



Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 3]$ şeklinde olur.

- **Örnek.** $\dfrac{|3-x|\,(x+5)^4}{(2-x)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $\dfrac{|3-x|\,(x+5)^4}{(2-x)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Mutlak değerli ifadelerin kökleri çift katlı kök olarak alınır. Ayrıca

$$\begin{aligned} (x+5)^4 &= 0 \Longrightarrow x=-5 \ \ (4 \text{ tane}) \\ 2-x &= 0 \Longrightarrow x=2 \end{aligned}$$

olur. Tablo

$-\infty$	-5	2	3	$+\infty$
$+$	$\Vert$ $+$	$\vert$ $-$	$\Vert$ $-$	

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(2,\infty)\cup\{-5\}$ aralığıdır.

- **Örnek.** $\dfrac{x-2}{x} \leq \dfrac{x}{x-2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $\dfrac{x-2}{x} \leq \dfrac{x}{x-2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitsizlik çözümü yapılırken içler-dışlar çarpımı yapılmaz. Çözümde aşağıdaki adımlar takip edilir.

$$
\begin{aligned}
\frac{x-2}{x} - \frac{x}{x-2} &\leq 0 \\
\frac{(x-2)^2 - x^2}{x(x-2)} &\leq 0 \\
\frac{-4x+4}{x(x-2)} &\leq 0 \\
-4x+4 &= 0 \Longrightarrow x = 1 \\
x(x-2) &= 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ve } x = 2
\end{aligned}
$$

olur. Tablo

$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$	

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(0,1] \cup (2,\infty)$ aralığıdır.

13.5 Eşitsizlik Sistemleri

- Birden fazla eşitsizlikten oluşan sisteme eşitsizlik sistemi denir. Bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi demek, sistemi oluşturan tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan reel sayı aralığı demektir. Bundan dolayı eşitsizlik sistemleri çözülürken sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimi alınır.

13.5 Eşitsizlik Sistemleri

- Birden fazla eşitsizlikten oluşan sisteme eşitsizlik sistemi denir. Bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi demek, sistemi oluşturan tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan reel sayı aralığı demektir. Bundan dolayı eşitsizlik sistemleri çözülürken sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimi alınır.
- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad \frac{x^2+x-4}{x} < 1$$

$$\text{(II)} \quad x^2 < 64$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

13.5 Eşitsizlik Sistemleri

- Birden fazla eşitsizlikten oluşan sisteme eşitsizlik sistemi denir. Bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi demek, sistemi oluşturan tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan reel sayı aralığı demektir. Bundan dolayı eşitsizlik sistemleri çözülürken sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimi alınır.
- **Örnek.**

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2+x-4}{x} < 1$$

$$\text{(II)} \qquad x^2 < 64$$

  eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.

13.5 Eşitsizlik Sistemleri

- Birden fazla eşitsizlikten oluşan sisteme eşitsizlik sistemi denir. Bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi demek, sistemi oluşturan tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan reel sayı aralığı demektir. Bundan dolayı eşitsizlik sistemleri çözülürken sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimi alınır.
- **Örnek.**

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2+x-4}{x} < 1$$

$$\text{(II)} \qquad x^2 < 64$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $\dfrac{x^2+x-4}{x} < 1$ ise $\dfrac{x^2-4}{x} < 0$ ve $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

13.5 Eşitsizlik Sistemleri

- Birden fazla eşitsizlikten oluşan sisteme eşitsizlik sistemi denir. Bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi demek, sistemi oluşturan tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan reel sayı aralığı demektir. Bundan dolayı eşitsizlik sistemleri çözülürken sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimi alınır.
- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad \frac{x^2+x-4}{x} < 1$$

$$\text{(II)} \quad x^2 < 64$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $\frac{x^2+x-4}{x} < 1$ ise $\frac{x^2-4}{x} < 0$ ve $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$
  - $x^2 < 64$ ise $x^2 - 64 < 0$ ve $x_4 = -8, x_5 = 8$

-

x	$-\infty$		-8		-2		0		2		8		$+\infty$
(I)		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
(II)		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
sistem				$-$				$-$					
				çözüm				çözüm					

x	$-\infty$		-8		-2		0		2		8		$+\infty$
(I)		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
(II)		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
sistem				$-$				$-$					
				çözüm				çözüm					

- Tabloda ilk eşitsizliğin $-$, ikinci eşitsizliğin $-$ olduğu bölgeler alınması gereken bölgelerdir. Buna göre soruda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi

$$(-8,-2)\cup(0,2)$$

olacaktır.

- **Örnek.**

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & 2x-1 \geq 0 \\ \text{(II)} & x+2>0 \\ \text{(III)} & 2x-1<(x+2)^2 \end{array}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.**

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & 2x-1 \geq 0 \\ \text{(II)} & x+2 > 0 \\ \text{(III)} & 2x-1 < (x+2)^2 \end{array}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözüp tek tablo yapacağız. Bunun için tüm reel kökleri elde edelim.

- **Örnek.**

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & 2x-1 \geq 0 \\ \text{(II)} & x+2>0 \\ \text{(III)} & 2x-1<(x+2)^2 \end{array}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözüp tek tablo yapacağız. Bunun için tüm reel kökleri elde edelim.
    - $2x-1=0$ ise $x_1=\frac{1}{2}$

- **Örnek.**

$$\begin{array}{cc} (\mathrm{I}) & 2x-1 \geq 0 \\ (\mathrm{II}) & x+2>0 \\ (\mathrm{III}) & 2x-1<(x+2)^2 \end{array}$$

  eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözüp tek tablo yapacağız. Bunun için tüm reel kökleri elde edelim.
  - $2x-1=0$ ise $x_1=\frac{1}{2}$
  - $x+2=0$ ise $x_2=-2$

- **Örnek.**

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & 2x-1 \geq 0 \\ \text{(II)} & x+2>0 \\ \text{(III)} & 2x-1<(x+2)^2 \end{array}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözüp tek tablo yapacağız. Bunun için tüm reel kökleri elde edelim.
  - $2x-1=0$ ise $x_1=\frac{1}{2}$
  - $x+2=0$ ise $x_2=-2$
  - $2x-1<(x+2)^2$ ve $2x-1-(x+2)^2<0$ için $x^2+2x+5>0$ ve $x^2+2x+5=0$ için reel kök yok.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
(I)		$-$		$-$	0	$+$	
(II)		$-$	0	$+$		$+$	
(III)		$+$		$+$		$+$	
sistem							

çözüm

-

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
(I)		$-$		$-$	0	$+$	
(II)		$-$	0	$+$		$+$	
(III)		$+$		$+$		$+$	
sistem							

çözüm

- Tabloda üç eşitsizliğin de $+$ olduğu bölge alınması gereken bölgedir. Buna göre soruda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi

$$\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

olacaktır.

13.4 Karışık Örnekler

- **Örnek.** $-2 < \frac{3x-1}{-5} \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

13.4 Karışık Örnekler

- **Örnek.** $-2 < \frac{3x-1}{-5} \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 10 &> 3x - 1 \geq -20 \\ 11 &> 3x \geq -19 \\ \frac{11}{3} &> x \geq \frac{-19}{3} \end{aligned}$$

olur. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $\left[\frac{-19}{3}, \frac{11}{3}\right)$ olacaktır.

- **Örnek.** Su, deniz seviyesinde $^{\circ}0$ (sıfır santigrat derece) ile $^{\circ}100$ (yüz santigrat derece) arasında sıvı haldedir. Başka bir sıcaklık ölçüsü de Fahrenheit derecesidir ve aralarında

$$C = \frac{^{\circ}F - 32}{1.8}$$

bağıntısı vardır. Buna göre su hangi Fahrenheit dereceler arasında sıvı haldedir?

- **Örnek.** Su, deniz seviyesinde $^\circ 0$ (sıfır santigrat derece) ile $^\circ 100$ (yüz santigrat derece) arasında sıvı haldedir. Başka bir sıcaklık ölçüsü de Fahrenheit derecesidir ve aralarında

$$C = \frac{^\circ F - 32}{1.8}$$

bağıntısı vardır. Buna göre su hangi Fahrenheit dereceler arasında sıvı haldedir?

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{^\circ F - 32}{1.8} \leq 100 \\ 0 &\leq {^\circ F} - 32 \leq 180 \\ 32 &\leq {^\circ F} \leq 212 \end{aligned}$$

olmalıdır. Demek ki su 32 ve 212 Fahrenheit dereceler arasında sıvı haldedir.

- **Örnek.** Bir reel sayının karesi, kendisinin 20 fazlasından büyük olduğuna göre bu koşula uyan en büyük negatif tamsayı kaçtır?

- **Örnek.** Bir reel sayının karesi, kendisinin 20 fazlasından büyük olduğuna göre bu koşula uyan en büyük negatif tamsayı kaçtır?
- **Çözüm.** Bu reel sayı x olsun. Buna göre

$$x^2 > x + 20$$

olmalıdır.

$$x^2 - x - 20 > 0$$

şeklinde düzenleyip çözmeliyiz.

$$x^2 - x - 20 = 0 \Longrightarrow x = -4 \text{ ve } x = 5$$

olur. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:

$-\infty$	-4	5	$+\infty$
$+$	$-$	$+$	

Çözüm kümesi $(-\infty, -4) \cup (5, \infty)$ olduğundan bu aralıktaki en büyük negatif tamsayı -5 tir.

- **Örnek.**

$$\left(x^2-1\right)^7\left(x^2+x\right)^6=0$$

denkleminin tüm köklerini bulunuz. Çift katlı kökleri belirtiniz.

- **Örnek.**
$$\left(x^2-1\right)^7\left(x^2+x\right)^6=0$$
denkleminin tüm köklerini bulunuz. Çift katlı kökleri belirtiniz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\left(x^2-1\right)^7 &= 0 \Longrightarrow x=1 \text{ (7 tane)}, x=-1 \text{ (7 tane)}\\ \left(x^2+x\right)^6 &= 0 \Longrightarrow x=0 \text{ (6 tane)}, x=-1 \ \text{ (6 tane)}\end{aligned}$$

olduğundan denklemin tüm kökleri $0,-1,1$ dir. $x=0$ altı tane (çift sayıda) olduğundan çift katlı köktür.

- **Örnek.** $\dfrac{|2+x|\left(x^2-6x+5\right)}{(1-x)} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $\dfrac{|2+x|\left(x^2-6x+5\right)}{(1-x)} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Mutlak değerli ifadelerin köleri çift katlı kök olarak alınır. Ayrıca

$$\begin{aligned} x^2-6x+5 &= 0 \Longrightarrow x=1 \text{ ve } x=5 \\ 1-x &= 0 \Longrightarrow x=1 \end{aligned}$$

olur. Tablo

$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$-$	

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty,5)-\{-2,1\}$ aralığıdır.

- **Örnek.** $\dfrac{x-3}{x} > \dfrac{x}{x-3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $\dfrac{x-3}{x} > \dfrac{x}{x-3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitsizlik çözümü yapılırken içler-dışlar çarpımı yapılmaz. Çözümde aşağıdaki adımlar takip edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x} - \frac{x}{x-3} &> 0 \\
\frac{-6x+9}{x(x-3)} &> 0 \\
-6x+9 &= 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2} \\
x(x-3) &= 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ve } x = 3
\end{aligned}$$

olur. Tablo

$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$+$	$-$	$+$	$-$	

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ aralığıdır.

- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.

- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $(x-1)(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ve $x = 2$

- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $(x-1)(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ve $x = 2$
  - $x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3$ ve $x = -3$

- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $(x-1)(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ve $x = 2$
  - $x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3$ ve $x = -3$
  - $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

- **Örnek.**

$$(\mathrm{I}) \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $(x-1)(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ve $x = 2$
  - $x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3$ ve $x = -3$
  - $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$
  - Bu değerler tabloya taşınırsa

	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$(x-1)(2-x) < 0$		$-$		$-$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$		$-$	
$\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$		$-$		$-$	ϕ	$+$	

- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$\text{(II)} \quad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $(x-1)(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ve $x = 2$
  - $x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3$ ve $x = -3$
  - $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$
  - Bu değerler tabloya taşınırsa

	$-\infty$	-3		-1		1		2		3	$+\infty$
$(x-1)(2-x) < 0$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
$\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$

  - Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $[-3,-1) \cup [3,\infty)$ aralığıdır.