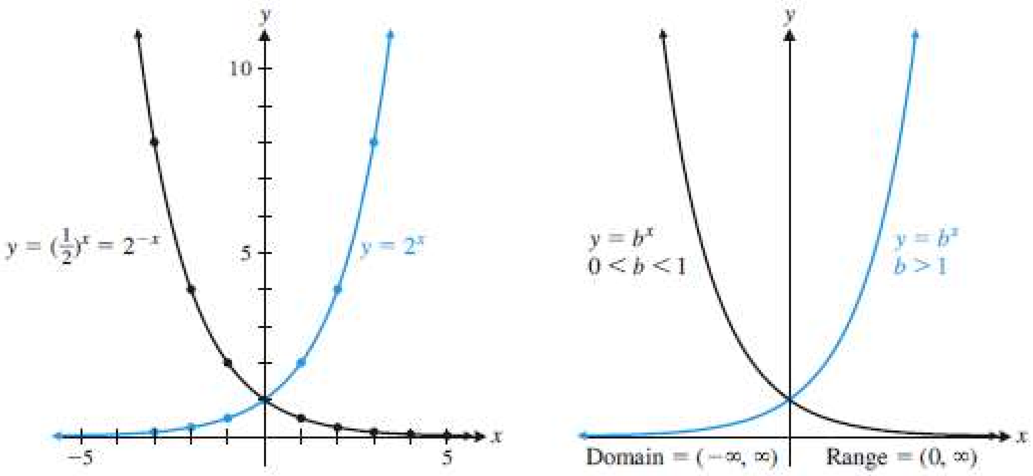
4. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

4.1 Üstel Fonksiyon

- **Tanım.** b reel sayısı $b > 0$ ve $b \neq 1$ şartlarını sağlamak üzere

$$f(x) = b^x$$

şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyon denir. Üstel fonksiyonların tanım kümeleri tüm reel sayılar kümesidir. Bir üstel fonksiyonun grafiği b nin durumuna göre temel olarak iki farklı şekildedir:

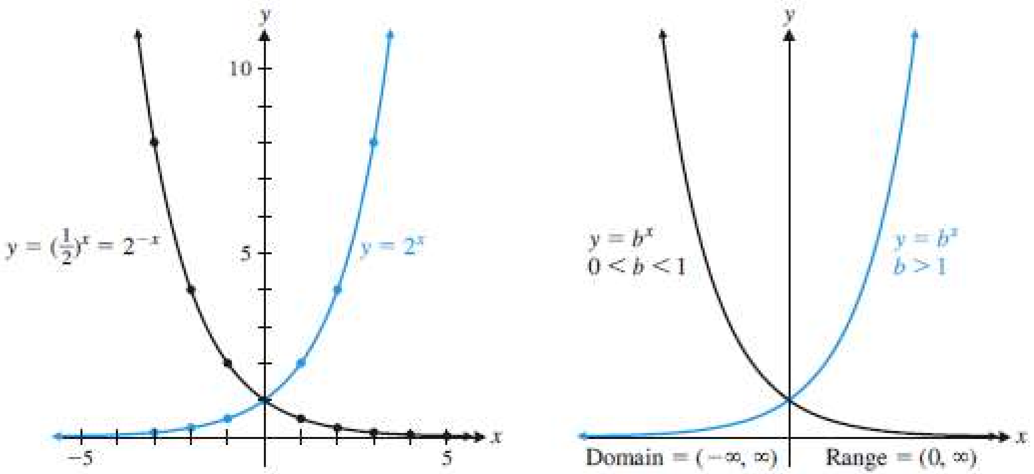


4.1 Üstel Fonksiyon

- **Tanım.** b reel sayısı $b > 0$ ve $b \neq 1$ şartlarını sağlamak üzere

$$f(x) = b^x$$

şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyon denir. Üstel fonksiyonların tanım kümeleri tüm reel sayılar kümesidir. Bir üstel fonksiyonun grafiği b nin durumuna göre temel olarak iki farklı şekildedir:



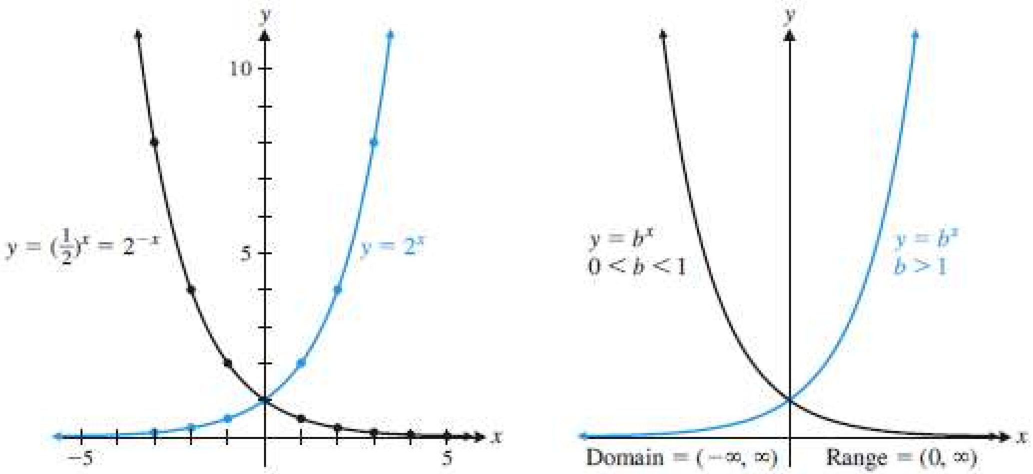
- Dikkat edilirse $b > 1$ olduğunda x artarken b^x artar, $0 < b < 1$ olduğunda ise x artarken b^x azalır.

4.1 Üstel Fonksiyon

- **Tanım.** b reel sayısı $b > 0$ ve $b \neq 1$ şartlarını sağlamak üzere

$$f(x) = b^x$$

şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyon denir. Üstel fonksiyonların tanım kümeleri tüm reel sayılar kümesidir. Bir üstel fonksiyonun grafiği b nin durumuna göre temel olarak iki farklı şekildedir:



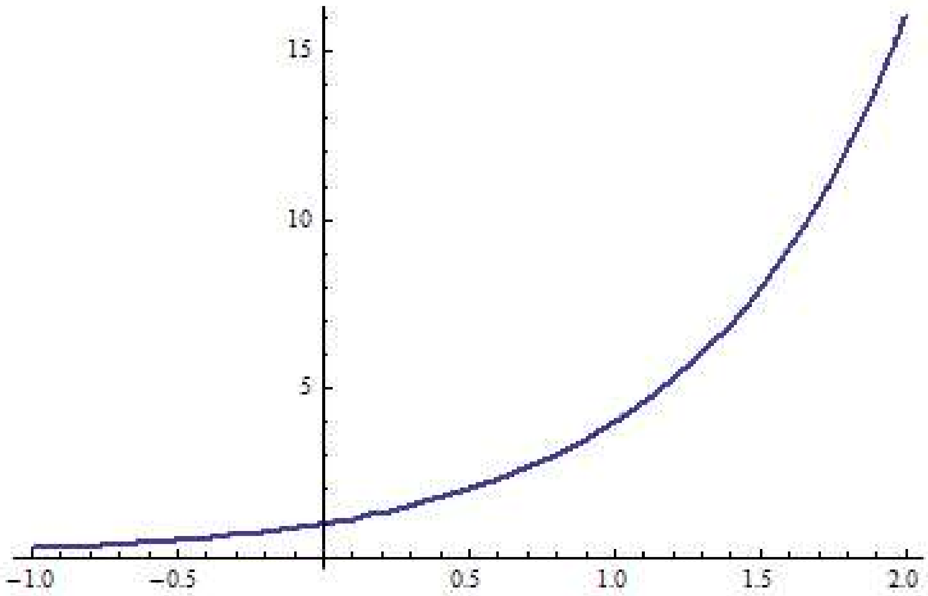
- Dikkat edilirse $b > 1$ olduğunda x artarken b^x artar, $0 < b < 1$ olduğunda ise x artarken b^x azalır.
- Her iki durumda da $y = 0$ doğrusu (yani x ekseni)yatay asimptottur. Bunun sonucu olarak daima $f(x) = b^x > 0$ olacaktır.

- Yukarıdaki grafiklerden de görülebileceği gibi x in tüm değerleri için $b^x > 0$ dır.

- Yukarıdaki grafiklerden de görülebileceği gibi x in tüm değerleri için $b^x > 0$ dır.
- Özel olarak b reel sayısı $e = 2.718281\cdots$ irrasyonel sayısına eşit olduğunda $f(x) = e^x$ olur. Bu fonksiyon çok önemli bir üstel fonksiyondur.

- Yukarıdaki grafiklerden de görülebileceği gibi x in tüm değerleri için $b^x > 0$ dır.
- Özel olarak b reel sayısı $e = 2.718281\cdots$ irrasyonel sayısına eşit olduğunda $f(x) = e^x$ olur. Bu fonksiyon çok önemli bir üstel fonksiyondur.
- **Örnek.** $f(x) = 4^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

- Yukarıdaki grafiklerden de görülebileceği gibi x in tüm değerleri için $b^x > 0$ dır.
- Özel olarak b reel sayısı $e = 2.718281\cdots$ irrasyonel sayısına eşit olduğunda $f(x) = e^x$ olur. Bu fonksiyon çok önemli bir üstel fonksiyondur.
- **Örnek.** $f(x) = 4^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- **Çözüm.** $b = 4 > 1$ olduğundan x ler arttığında y ler de artmalıdır. Bu durumda grafik aşağıdaki gibi olur:



- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
  - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
  - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
  - $5^3 = (x+2)^3$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
  - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
  - $5^3 = (x+2)^3$
  - $6^4 = (2x-3)^4$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
    - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
    - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
    - $5^3 = (x+2)^3$
    - $6^4 = (2x-3)^4$
- **Çözüm.**

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
    - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
    - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
    - $5^3 = (x+2)^3$
    - $6^4 = (2x-3)^4$
- **Çözüm.**
    - $a^x = a^y$ ise $x = y$ olacağından

$$2 - 3x = 5x - 6 \Longrightarrow x = 1$$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
  - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
  - $5^3 = (x+2)^3$
  - $6^4 = (2x-3)^4$
- **Çözüm.**
  - $a^x = a^y$ ise $x = y$ olacağından
$$2 - 3x = 5x - 6 \Longrightarrow x = 1$$
  - Eşitliğin sağlanabilmesi için
$$5x - x^2 = -6$$
olmalıdır. Bu ikinci dereceden denklem çözülürse $x_1 = 6$ ve $x_2 = -1$ bulunur.

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
  - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
  - $5^3 = (x+2)^3$
  - $6^4 = (2x-3)^4$
- **Çözüm.**
  - $a^x = a^y$ ise $x = y$ olacağından
$$2 - 3x = 5x - 6 \Longrightarrow x = 1$$
  - Eşitliğin sağlanabilmesi için
$$5x - x^2 = -6$$
olmalıdır. Bu ikinci dereceden denklem çözülürse $x_1 = 6$ ve $x_2 = -1$ bulunur.
  - $a^{2x-1} = b^{2x-1}$ için $a = b$ dir. Buna göre
$$5 = x + 2 \Longrightarrow x = 3$$
olur.

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
  - $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
  - $5^3 = (x+2)^3$
  - $6^4 = (2x-3)^4$
- **Çözüm.**
  - $a^x = a^y$ ise $x = y$ olacağından
  $$2 - 3x = 5x - 6 \Longrightarrow x = 1$$
  - Eşitliğin sağlanabilmesi için
  $$5x - x^2 = -6$$
  olmalıdır. Bu ikinci dereceden denklem çözülürse $x_1 = 6$ ve $x_2 = -1$ bulunur.
  - $a^{2x-1} = b^{2x-1}$ için $a = b$ dir. Buna göre
  $$5 = x + 2 \Longrightarrow x = 3$$
  olur.
  - $a^{2x} = b^{2x}$ için $a = b$ ve $a = -b$ dir. Buna göre
  $$\begin{aligned} 6 &= 2x - 3 \Longrightarrow x_1 = \frac{9}{2} \\ -6 &= 2x - 3 \Longrightarrow x_2 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $(x-3)\,e^{x}=0$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $(x-3)\,e^{x}=0$
  - $3xe^{-x}+x^{2}e^{-x}=0$

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
    - $(x-3)\,e^{x}=0$
    - $3xe^{-x}+x^{2}e^{-x}=0$
- **Çözüm.**

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $(x-3)\,e^{x}=0$
  - $3xe^{-x}+x^{2}e^{-x}=0$
- **Çözüm.**
  - $e^{x}=0$ olamayacağından

$$x-3=0\Longrightarrow x=3$$

olacaktır.

- **Örnek.** Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
  - $(x-3)\,e^{x}=0$
  - $3xe^{-x}+x^{2}e^{-x}=0$
- **Çözüm.**
  - $e^{x}=0$ olamayacağından

    $$x-3=0\Longrightarrow x=3$$

    olacaktır.
  - Denklem düzenlenirse

    $$3xe^{-x}+x^{2}e^{-x}=\left(3x+x^{2}\right)e^{-x}=0$$

    olur. $e^{-x}=0$ olamayacağından

    $$\begin{aligned} 3x+x^{2} &= 0 \\ x\,(3+x) &= 0\Longrightarrow x_1=0 \quad \text{ve} \quad x_2=-3 \end{aligned}$$

    olmalıdır.

4.2 Logaritmik Fonksiyon

- $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun tersi **logaritmik fonksiyon** olarak adlandırılır ve $f(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir. a sayısı taban olarak isimlendirilir.

4.2 Logaritmik Fonksiyon

- $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun tersi **logaritmik fonksiyon** olarak adlandırılır ve $f(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir. a sayısı taban olarak isimlendirilir.
- $a = 10$ ise bu logaritma **adi logaritma** olarak adlandırılır ve

$$f(x) = \log x$$

ile gösterilir.

4.2 Logaritmik Fonksiyon

- $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun tersi **logaritmik fonksiyon** olarak adlandırılır ve $f(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir. a sayısı taban olarak isimlendirilir.
- $a = 10$ ise bu logaritma **adi logaritma** olarak adlandırılır ve

$$f(x) = \log x$$

ile gösterilir.
- $a = e = 2.71...$ ise bu logaritma da **doğal logaritma** şeklinde adlandırılır ve

$$f(x) = \ln x$$

biçiminde gösterilir. Yani kısaca

$$\log_{10} x = \log x \quad \text{ve} \quad \log_e x = \ln x$$

şeklindedir.

- Logaritmik ve üstel fonksiyon arasındaki geçiş

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı yardımıyla olur.

- Logaritmik ve üstel fonksiyon arasındaki geçiş

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı yardımıyla olur.

- **Örnek.** $f(x) = 2^x$ üstel fonksiyonunun tersini bulunuz.

- Logaritmik ve üstel fonksiyon arasındaki geçiş

$$a = b^c \Longleftrightarrow c = \log_b a$$

bağıntısı yardımıyla olur.
- **Örnek.** $f(x) = 2^x$ üstel fonksiyonunun tersini bulunuz.
- **Çözüm.** $y = 2^x$ olduğuna göre $x = \log_2 y$ dir. $x \longleftrightarrow y$ dönüşümü yapılırsa $f^{-1}(x) = \log_2 x$ elde edilir.

- **Örnek.** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$ üstel fonksiyonunun tersini bulunuz.

- **Örnek.** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$ üstel fonksiyonunun tersini bulunuz.
- **Çözüm.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$ ise

$$\begin{aligned}
3x - 2 &= \log_{\frac{1}{2}} y \\
3x &= 2 + \log_{\frac{1}{2}} y \\
x &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} y \\
x &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log_2 y
\end{aligned}$$

olur. $x \longleftrightarrow y$ dönüşümü yapılırsa

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log_2 x$$

olarak bulunur.

- **Örnek.** $f(x) = 3 - \log_5(2x-1)$ logaritmik fonksiyonunun tersini bulunuz.

- **Örnek.** $f(x) = 3 - \log_5(2x-1)$ logaritmik fonksiyonunun tersini bulunuz.
- **Çözüm.** $y = 3 - \log_5(3x-1)$ ise

$$\begin{aligned} \log_5(2x-1) &= 3-y \\ 2x-1 &= 5^{3-y} \\ 2x &= 5^{3-y}+1 \\ x &= \frac{5^{3-y}}{2}+\frac{1}{2} \\ x &= \frac{125}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^y+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. $x \longleftrightarrow y$ dönüşümü yapılırsa fonksiyonun tersi

$$f^{-1}(x) = \frac{125}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

- $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ şeklindeki bir logaritmik fonksiyonun tanım kümesi aşağıdaki şartlarının hepsini aynı anda sağlayan reel sayılar kümesidir.

- $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ şeklindeki bir logaritmik fonksiyonun tanım kümesi aşağıdaki şartlarının hepsini aynı anda sağlayan reel sayılar kümesidir.
    1. $h(x) > 0$

- $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ şeklindeki bir logaritmik fonksiyonun tanım kümesi aşağıdaki şartlarının hepsini aynı anda sağlayan reel sayılar kümesidir.
    1. $h(x) > 0$
    2. $h(x) \neq 1$

- $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ şeklindeki bir logaritmik fonksiyonun tanım kümesi aşağıdaki şartlarının hepsini aynı anda sağlayan reel sayılar kümesidir.
  1. $h(x) > 0$
  2. $h(x) \neq 1$
  3. $g(x) > 0$

- $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ şeklindeki bir logaritmik fonksiyonun tanım kümesi aşağıdaki şartlarının hepsini aynı anda sağlayan reel sayılar kümesidir.
  1. $h(x) > 0$
  2. $h(x) \neq 1$
  3. $g(x) > 0$
- Buna göre logaritmik fonksiyonun tanım kümesi bulunurken yukarıdaki şartları sağlayan kümeler ayrı ayrı bulunur ve bu kümelerin kesişim kümesi alınır.

- **Örnek.** $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(4x - 20)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(4x - 20)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

- **Örnek.** $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(4x - 20)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

1. $\sqrt{2} > 0$

- **Örnek.** $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(4x - 20)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

1. $\sqrt{2} > 0$
2. $\sqrt{2} \neq 1$

- **Örnek.** $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(4x - 20)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

1. $\sqrt{2} > 0$
2. $\sqrt{2} \neq 1$
3. $4x - 20 > 0$ ise $4x > 20$ veya $x > 5$ olur. Demek ki fonksiyonunun tanım kümesi $(5, \infty)$ aralığıdır.

- **Örnek.** $f(x) = \log_{x-3}\left(x^2 - 81\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

- **Örnek.** $f(x) = \log_{x-3}\left(x^2 - 81\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

- **Örnek.** $f(x) = \log_{x-3}\left(x^2 - 81\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

1. $x - 3 > 0$ için $x > 3$

- **Örnek.** $f(x) = \log_{x-3}\left(x^2 - 81\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

1. $x - 3 > 0$ için $x > 3$
2. $x - 3 \neq 1$ için $x \neq 4$

- **Örnek.** $f(x) = \log_{x-3}\left(x^2 - 81\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

1. $x - 3 > 0$ için $x > 3$
2. $x - 3 \neq 1$ için $x \neq 4$
3. $x^2 - 81 > 0$ ise $x > 9$ veya $x < -9$ olur.

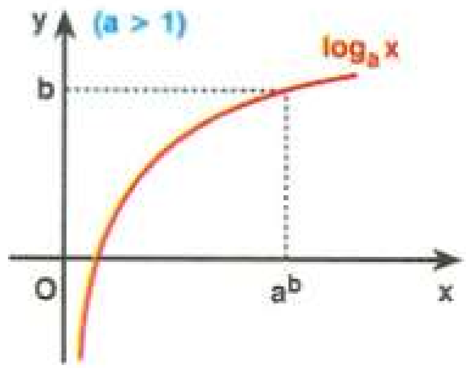
- **Örnek.** $f(x) = \log_{x-3}\left(x^2 - 81\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

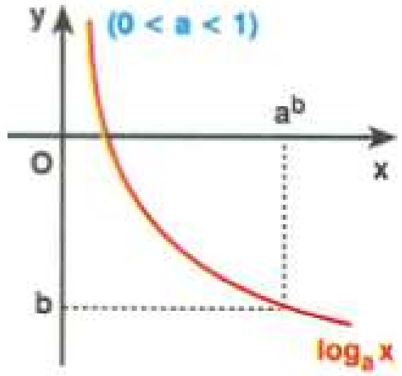
1. $x - 3 > 0$ için $x > 3$
2. $x - 3 \neq 1$ için $x \neq 4$
3. $x^2 - 81 > 0$ ise $x > 9$ veya $x < -9$ olur.

- Her üçünü $(9, \infty)$ aralığı sağlar. Bu yüzden fonksiyonunun tanım kümesi $(9, \infty)$ aralığıdır.

4.3 Logaritmik Fonksiyonun Grafiği

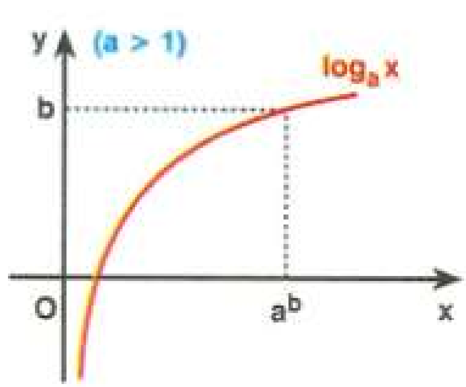
- Genel olarak $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği $a > 1$ ve $0 < a < 1$ için iki farklı şekilde olur. Soldaki grafikte $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ iken (artan fonksiyon) sağdaki grafikte $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ şeklindedir (azalan fonksiyon).

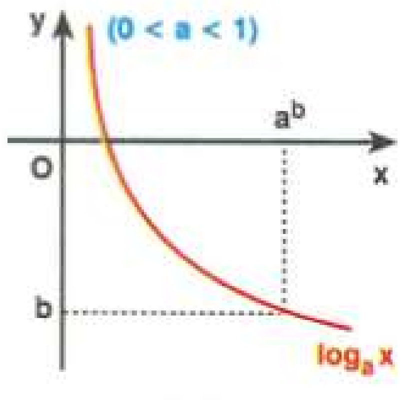




4.3 Logaritmik Fonksiyonun Grafiği

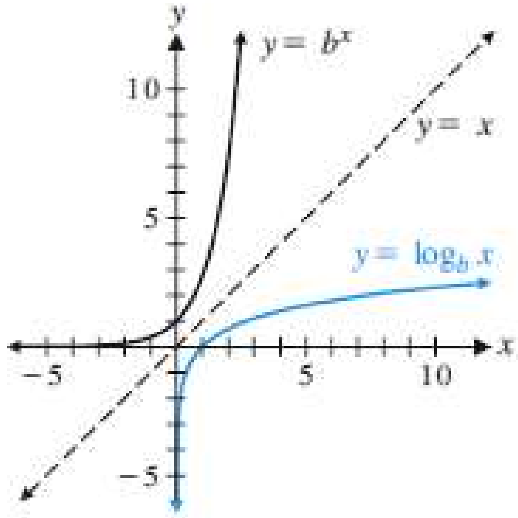
- Genel olarak $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği $a > 1$ ve $0 < a < 1$ için iki farklı şekilde olur. Soldaki grafikte $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ iken (artan fonksiyon) sağdaki grafikte $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ şeklindedir (azalan fonksiyon).





- Her iki grafikte de y ekseni düşey asimptottur.

- Üstel ve Logaritmik fonksiyonların grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.



- **Örnek.**

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

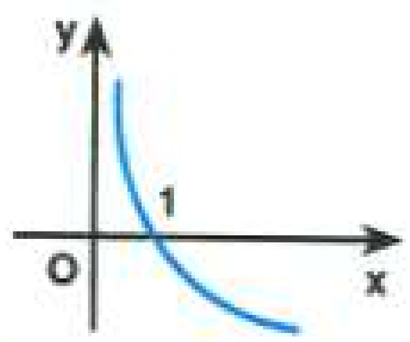
fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

- **Örnek.**

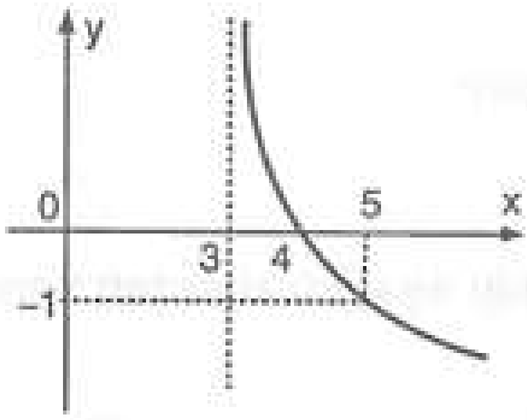
$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

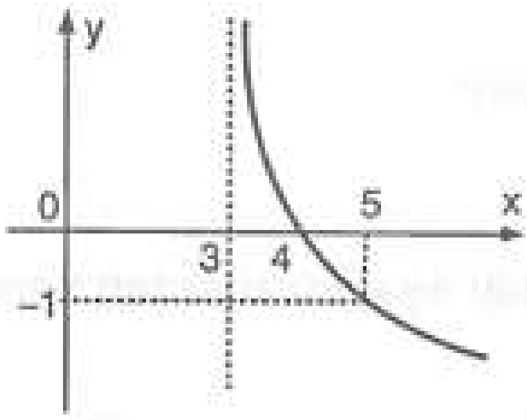
- **Çözüm.** $0 < \frac{1}{3} < 1$ olduğundan fonksiyon azalandır. Bundan dolayı grafik aşağıdaki gibi olacaktır:



- **Örnek.** $f(x) = \log_a(x+b)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. a ve b yi bulunuz.



- **Örnek.** $f(x) = \log_a(x+b)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. a ve b yi bulunuz.



- **Çözüm.** Verilen grafik azalan bir logaritmik fonksiyona ait olduğundan tabanı $(0,1)$ aralığındadır. Ayrıca $f(x) = \log_a(x+b)$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(4) &= 0 \Longrightarrow \log_a(4+b) = 0 \Longrightarrow 4+b = 1 \Longrightarrow b = -3 \\ f(5) &= -1 \Longrightarrow \log_a(5-3) = -1 \Longrightarrow 2 = \frac{1}{a} \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda fonksiyonun denklemi $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ olacaktır.

4.4 Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \Longleftrightarrow c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

4.4 Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$

4.4 Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$

4.4 Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \Longleftrightarrow c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$

4.4 Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$
4. $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$
4. $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
5. $\log_{b^x} a^y = \dfrac{y}{x} \log_b a$

4.4 Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$
4. $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
5. $\log_{b^x} a^y = \dfrac{y}{x} \log_b a$
6. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$
4. $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
5. $\log_{b^x} a^y = \dfrac{y}{x} \log_b a$
6. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$
7. $b^{\log_b x} = x$

4.4 Logaritma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

- Aşağıdaki özelliklerin her biri

$$a = b^c \iff c = \log_b a$$

bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir.

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$
4. $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
5. $\log_{b^x} a^y = \dfrac{y}{x} \log_b a$
6. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$
7. $b^{\log_b x} = x$
8. $\log_b M = \log_b N \iff M = N$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
    - $\log_3 9$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
    - $\log_3 9$
    - $\log_{16} 4$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
    - $\log_3 9$
    - $\log_{16} 4$
    - $\log 125 + \log 8$
    - $\log_4 80 - \log_4 20$
    - $3^{\log_3 6}$
    - $4^{\log_2 3}$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$
  - $4^{\log_2 3}$
- **Çözüm.**

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$
  - $4^{\log_2 3}$
- **Çözüm.**
  - $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$
  - $4^{\log_2 3}$
- **Çözüm.**
  - $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$
  - $\log_{16} 4 = \log_{4^2} 4 = \dfrac{1}{2}\log_4 4 = \dfrac{1}{2}$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$
  - $4^{\log_2 3}$
- **Çözüm.**
  - $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$
  - $\log_{16} 4 = \log_{4^2} 4 = \dfrac{1}{2}\log_4 4 = \dfrac{1}{2}$
  - $\log 125 + \log 8 = \log(125 \cdot 8) = \log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$
  - $4^{\log_2 3}$
- **Çözüm.**
  - $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$
  - $\log_{16} 4 = \log_{4^2} 4 = \dfrac{1}{2}\log_4 4 = \dfrac{1}{2}$
  - $\log 125 + \log 8 = \log(125 \cdot 8) = \log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$
  - $\log_4 80 - \log_4 20 = \log_4\left(\frac{80}{20}\right) = \log_4 4 = 1$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$
  - $4^{\log_2 3}$
- **Çözüm.**
  - $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$
  - $\log_{16} 4 = \log_{4^2} 4 = \dfrac{1}{2}\log_4 4 = \dfrac{1}{2}$
  - $\log 125 + \log 8 = \log(125 \cdot 8) = \log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$
  - $\log_4 80 - \log_4 20 = \log_4\left(\frac{80}{20}\right) = \log_4 4 = 1$
  - 6

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  - $\log_3 9$
  - $\log_{16} 4$
  - $\log 125 + \log 8$
  - $\log_4 80 - \log_4 20$
  - $3^{\log_3 6}$
  - $4^{\log_2 3}$
- **Çözüm.**
  - $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$
  - $\log_{16} 4 = \log_{4^2} 4 = \dfrac{1}{2}\log_4 4 = \dfrac{1}{2}$
  - $\log 125 + \log 8 = \log(125 \cdot 8) = \log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$
  - $\log_4 80 - \log_4 20 = \log_4\left(\frac{80}{20}\right) = \log_4 4 = 1$
  - 6
  - $4^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3^2} = 2^{\log_2 9} = 9$

- **Örnek.** $3\log_b 2 + \frac{1}{2}\log_b 25 - \log_b 20 = \log_b x$ denkleminden x i bulunuz.

- **Örnek.** $3\log_b 2 + \frac{1}{2}\log_b 25 - \log_b 20 = \log_b x$ denkleminden x i bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}
3\log_b 2 + \frac{1}{2}\log_b 25 - \log_b 20 &= \log_b x \\
\log_b 2^3 + \log_b \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}} - \log_b 20 &= \log_b x \\
\log_b 8 + \log_b 5 - \log_b 20 &= \log_b x \\
\log_b \left(\frac{8\cdot 5}{20}\right) &= \log_b x \\
\log_b 2 &= \log_b x \\
2 &= x
\end{aligned}$$

- **Örnek.** $\log_3 x + \log_3 (x-3) = \log_3 10$ denklemini çözünüz.

- **Örnek.** $\log_3 x + \log_3 (x-3) = \log_3 10$ denklemini çözünüz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}
\log_3 x + \log_3 (x-3) &= \log_3 10 \\
\log_3 [x(x-3)] &= \log_3 10 \\
x(x-3) &= 10 \\
x^2 - 3x - 10 &= 0 \\
(x+2)(x-5) &= 0
\end{aligned}$$

denkleminden $x_1 = -2$ ve $x_2 = 5$ bulunur. Ancak $x_1 = -2$ verilen denklemi sağlamadığından denklemin kökü olamaz. (Yalancı kök!) Verilen denklemin tek kökü $x = 5$ tir.

4.5 Logaritmik Eşitsizlikler

- $y = \log_a f(x)$ fonksiyonunun işareti incelenirken a nın durumuna göre inceleme yapılır.

4.5 Logaritmik Eşitsizlikler

- $y = \log_a f(x)$ fonksiyonunun işareti incelenirken a nın durumuna göre inceleme yapılır.
  - $a > 1$ için

$$\begin{aligned} \log_a f(x) &> \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) \\ \log_a f(x) &< \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) < g(x) \end{aligned}$$

olmalıdır.

4.5 Logaritmik Eşitsizlikler

- $y = \log_a f(x)$ fonksiyonunun işareti incelenirken a nın durumuna göre inceleme yapılır.
  - $a > 1$ için

$$\begin{aligned} \log_a f(x) &> \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) \\ \log_a f(x) &< \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) < g(x) \end{aligned}$$

    olmalıdır.
  - $0 < a < 1$ için

$$\begin{aligned} \log_a f(x) &> \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) < g(x) \\ \log_a f(x) &< \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) \end{aligned}$$

    olmalıdır.

4.5 Logaritmik Eşitsizlikler

- $y = \log_a f(x)$ fonksiyonunun işareti incelenirken a nın durumuna göre inceleme yapılır.
  - $a > 1$ için

$$\begin{aligned} \log_a f(x) &> \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) \\ \log_a f(x) &< \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) < g(x) \end{aligned}$$

    olmalıdır.
  - $0 < a < 1$ için

$$\begin{aligned} \log_a f(x) &> \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) < g(x) \\ \log_a f(x) &< \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) \end{aligned}$$

    olmalıdır.
- Logaritmik eşitsizlik çözümü yapılırken logratima fonksiyonun tanımı gereği

$$a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$$

olması gerektiği dikkate alınmalıdır.

- **Örnek.** Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan reel sayı aralıklarını bulunuz.

- **Örnek.** Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan reel sayı aralıklarını bulunuz.
    1. $\log(3x - 6) < 1$

- **Örnek.** Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan reel sayı aralıklarını bulunuz.
    1. $\log(3x-6) < 1$
    2. $\log_{\frac{1}{4}}(1-x^2) \geq 3$

- **Örnek.** Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan reel sayı aralıklarını bulunuz.
  1. $\log(3x-6) < 1$
  2. $\log_{\frac{1}{4}}\left(1-x^2\right) \geq 3$
- **Çözüm.**

- **Örnek.** Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan reel sayı aralıklarını bulunuz.
  1. $\log(3x-6) < 1$
  2. $\log_{\frac{1}{4}}\left(1-x^2\right) \geq 3$
- **Çözüm.**
  1. $3x-6>0 \Longrightarrow x>2$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \log(3x-6) &< \log 10 \Longleftrightarrow 3x-6<10 \\ x &< \frac{16}{3} \end{aligned}$$

olacağından eşitsizliğin çözümü $2<x<\frac{16}{3}$ olur.

- **Örnek.** Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan reel sayı aralıklarını bulunuz.
  1. $\log(3x-6) < 1$
  2. $\log_{\frac{1}{4}}(1-x^2) \geq 3$
- **Çözüm.**
  1. $3x - 6 > 0 \Longrightarrow x > 2$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \log(3x-6) &< \log 10 \Longleftrightarrow 3x-6<10 \\ x &< \frac{16}{3} \end{aligned}$$

olacağından eşitsizliğin çözümü $2 < x < \frac{16}{3}$ olur.

  2. $1 - x^2 > 0 \Longrightarrow -1 < x < 1$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}}(1-x^2) &\geq \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \Longleftrightarrow 1-x^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ x^2 &\geq \frac{63}{64} \Longleftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{63}}{8} \text{ veya } x \leq -\frac{\sqrt{63}}{8} \end{aligned}$$

olacağından eşitsizliğin çözümü $\left(-1, -\frac{\sqrt{63}}{8}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{63}}{8}, 1\right)$ olur.

- **Örnek.** Aşağıdaki sayıları sıralayınız.

$$\begin{aligned} x &= \log_2 3 \\ y &= \log_3 13 \\ z &= \log_5 3 \end{aligned}$$

- **Örnek.** Aşağıdaki sayıları sıralayınız.

$$\begin{aligned} x &= \log_2 3 \\ y &= \log_3 13 \\ z &= \log_5 3 \end{aligned}$$

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 2 &< 3 < 4 \Longrightarrow \underbrace{\log_2 2}_{=1} < \log_2 3 < \underbrace{\log_2 4}_{=2} \Longrightarrow 1 < x < 2 \\ 9 &< 13 < 27 \Longrightarrow \underbrace{\log_3 9}_{=2} < \log_3 13 < \underbrace{\log_3 27}_{=3} \Longrightarrow 2 < y < 3 \\ 1 &< 3 < 5 \Longrightarrow \underbrace{\log_5 1}_{=0} < \log_5 3 < \underbrace{\log_5 5}_{=1} \Longrightarrow 0 < z < 1 \end{aligned}$$

olduğundan $y > x > z$ olur.