

Transformée de Kravchuk réalignée, implémentation efficace et illustration sur signaux élémentaires et réels

GRETSI'25 : XXX^{ème} Colloque français de Traitement du Signal et des Images

Strasbourg, 25 au 29 août 2025

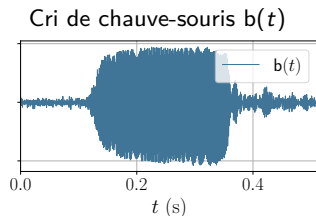
Barbara Pascal[†], Julien Flamant[‡] et Rémi Bardenet[Ⓜ]

[†] Nantes Université, École Centrale Nantes, CNRS, LS2N, UMR 6004, F-44000 Nantes, France

[‡] Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy France

[Ⓜ] Université de Lille, CNRS, Centrale Lille UMR 9189 - CRIStAL, F-59000 Lille, France

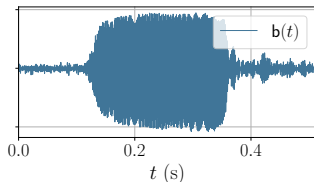
Soutenu par l'ERC **Blackjack** (ERC-2019-STG-851866) et la chaire IA **Baccarat** (ANR-20-CHIA-0002)



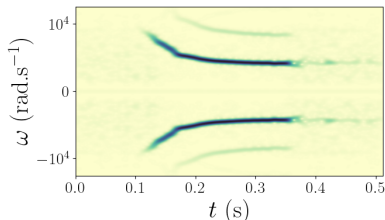
Source : *Animals : the bat call*, tftb.nongnu.org

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

Cri de chauve-souris $b(t)$



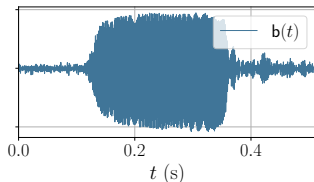
Source : *Animals : the bat call*, tftb.nongnu.org



$$|\mathcal{V}_g b(t, \omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} b(u) \overline{g(u-t)} \exp(-i\omega u) du \right|^2, \quad g(t) \propto \exp(-t^2/2)$$

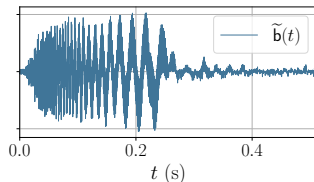
Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

Cri de chauve-souris $b(t)$

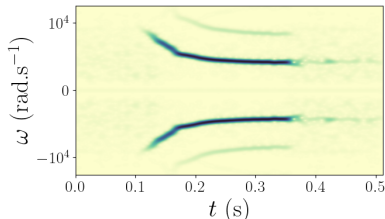


Translation et modulation

$$\tilde{b}(t) = e^{-i\omega_0 t} b(t - t_0)$$



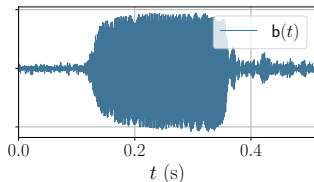
Source : *Animals : the bat call*, tftb.nongnu.org



$$|\mathcal{V}_g b(t, \omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} b(u) \overline{g(u - t)} \exp(-i\omega u) du \right|^2, \quad g(t) \propto \exp(-t^2/2)$$

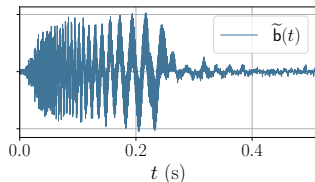
Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

Cri de chauve-souris $b(t)$

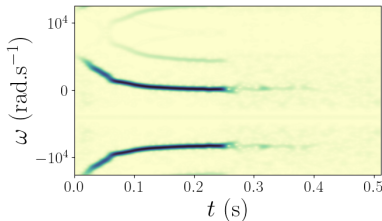
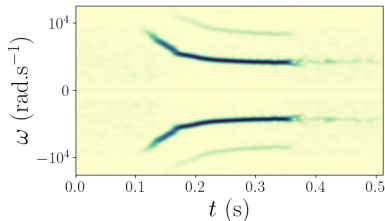


Translation et modulation

$$\tilde{b}(t) = e^{-i\omega_0 t} b(t - t_0)$$



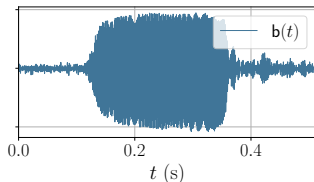
Source : *Animals : the bat call*, tftb.nongnu.org



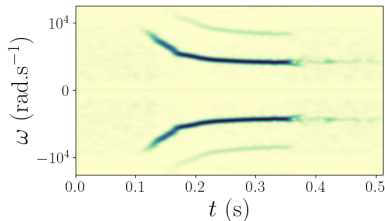
$$\left| \mathcal{V}_g \tilde{b}(t, \omega) \right|^2 = \left| \mathcal{V}_g b(t - t_0, \omega - \omega_0) \right|^2$$

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

Cri de chauve-souris $b(t)$



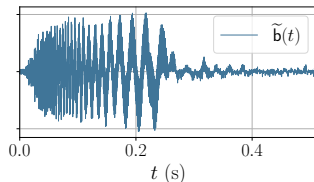
Source : *Animals : the bat call*, tftb.nongnu.org



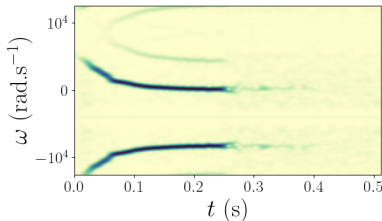
$$\left| \mathcal{V}_g \tilde{b}(t, \omega) \right|^2 = \left| \mathcal{V}_g b(t - t_0, \omega - \omega_0) \right|^2$$

Translation et modulation

$$\tilde{b}(t) = e^{-i\omega_0 t} b(t - t_0)$$



groupe de **Weyl-Heisenberg**



covariance

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

- \mathcal{H} : espace des signaux, $L^2(\mathbb{R})$ pour signaux continus d'énergie finie
- Ψ : espace des phases, \mathbb{R}^2 pour le plan euclidien
- $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Psi)$: transformée, \mathcal{V}_g Transformée de Fourier à court terme
- $|\mathcal{T}\cdot|^2$: représentation, spectrogramme gaussien
- \mathbf{G} : groupe agissant sur \mathcal{H} et sur Ψ , Weyl-Heisenberg

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

- \mathcal{H} : espace des signaux, $L^2(\mathbb{R})$ pour signaux continus d'énergie finie
- Ψ : espace des phases, \mathbb{R}^2 pour le plan euclidien
- $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Psi)$: transformée, \mathcal{V}_g Transformée de Fourier à court terme
- $|\mathcal{T}\cdot|^2$: représentation, spectrogramme gaussien
- \mathbf{G} : groupe agissant sur \mathcal{H} et sur Ψ , Weyl-Heisenberg

Propriété de covariance : $\forall \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \quad |\mathcal{T}[\mathbf{g} * \mathbf{y}](\psi)|^2 = |\mathcal{T}\mathbf{y}(\mathbf{g} \cdot \psi)|^2$

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

- \mathcal{H} : espace des signaux, $L^2(\mathbb{R})$ pour signaux continus d'énergie finie
- Ψ : espace des phases, \mathbb{R}^2 pour le plan euclidien
- $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Psi)$: transformée, \mathcal{V}_g Transformée de Fourier à court terme
- $|\mathcal{T}\cdot|^2$: représentation, spectrogramme gaussien
- \mathbf{G} : groupe agissant sur \mathcal{H} et sur Ψ , Weyl-Heisenberg

Propriété de covariance : $\forall \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \quad |\mathcal{T}[\mathbf{g} * \mathbf{y}](\psi)|^2 = |\mathcal{T}\mathbf{y}(\mathbf{g} \cdot \psi)|^2$

signaux \mathcal{H}	espace des phases Ψ	représentation $ \mathcal{T}\cdot ^2$	groupe \mathbf{G}
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan euclidien \mathbb{R}^2	spectrogramme	Weyl-Heisenberg

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

- \mathcal{H} : espace des signaux, $L^2(\mathbb{R})$ pour signaux continus d'énergie finie
- Ψ : espace des phases, \mathbb{R}^2 pour le plan euclidien
- $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Psi)$: transformée, \mathcal{V}_g Transformée de Fourier à court terme
- $|\mathcal{T}\cdot|^2$: représentation, spectrogramme gaussien
- \mathbf{G} : groupe agissant sur \mathcal{H} et sur Ψ , Weyl-Heisenberg

Propriété de covariance : $\forall \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \quad |\mathcal{T}[\mathbf{g} * \mathbf{y}](\psi)|^2 = |\mathcal{T}\mathbf{y}(\mathbf{g} \cdot \psi)|^2$

signaux \mathcal{H}	espace des phases Ψ	représentation $ \mathcal{T}\cdot ^2$	groupe \mathbf{G}
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan euclidien \mathbb{R}^2	spectrogramme	Weyl-Heisenberg
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan hyperbolique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$	scalogramme	Affine

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

- \mathcal{H} : espace des signaux, $L^2(\mathbb{R})$ pour signaux continus d'énergie finie
- Ψ : espace des phases, \mathbb{R}^2 pour le plan euclidien
- $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Psi)$: transformée, \mathcal{V}_g Transformée de Fourier à court terme
- $|\mathcal{T}\cdot|^2$: représentation, spectrogramme gaussien
- \mathbf{G} : groupe agissant sur \mathcal{H} et sur Ψ , Weyl-Heisenberg

Propriété de covariance : $\forall \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \quad |\mathcal{T}[\mathbf{g} * \mathbf{y}](\psi)|^2 = |\mathcal{T}\mathbf{y}(\mathbf{g} \cdot \psi)|^2$

signaux \mathcal{H}	espace des phases Ψ	représentation $ \mathcal{T}\cdot ^2$	groupe \mathbf{G}
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan euclidien \mathbb{R}^2	spectrogramme	Weyl-Heisenberg
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan hyperbolique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$	scalogramme	Affine
discrets \mathbb{C}^{N+1} , $N \in \mathbb{N}$			

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

- \mathcal{H} : espace des signaux, $L^2(\mathbb{R})$ pour signaux continus d'énergie finie
- Ψ : espace des phases, \mathbb{R}^2 pour le plan euclidien
- $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Psi)$: transformée, \mathcal{V}_g Transformée de Fourier à court terme
- $|\mathcal{T} \cdot|^2$: représentation, spectrogramme gaussien
- \mathbf{G} : groupe agissant sur \mathcal{H} et sur Ψ , Weyl-Heisenberg

Propriété de covariance : $\forall \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \quad |\mathcal{T}[\mathbf{g} * \mathbf{y}](\psi)|^2 = |\mathcal{T}\mathbf{y}(\mathbf{g} \cdot \psi)|^2$

signaux \mathcal{H}	espace des phases Ψ	représentation $ \mathcal{T} \cdot ^2$	groupe \mathbf{G}
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan euclidien \mathbb{R}^2	spectrogramme	Weyl-Heisenberg
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan hyperbolique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$	scalogramme	Affine
discrets $\mathbb{C}^{N+1}, N \in \mathbb{N}$	sphère \mathbb{S}^2		Rotations $\text{SO}(3)$

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.* ; Pascal et coll. 2022, *GRETSI'22*)

Représentations temps–fréquence covariantes sous l'action d'un groupe

- \mathcal{H} : espace des signaux, $L^2(\mathbb{R})$ pour signaux continus d'énergie finie
- Ψ : espace des phases, \mathbb{R}^2 pour le plan euclidien
- $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Psi)$: transformée, \mathcal{V}_g Transformée de Fourier à court terme
- $|\mathcal{T}\cdot|^2$: représentation, spectrogramme gaussien
- \mathbf{G} : groupe agissant sur \mathcal{H} et sur Ψ , Weyl-Heisenberg

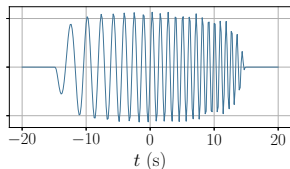
Propriété de covariance : $\forall \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \quad |\mathcal{T}[\mathbf{g} * \mathbf{y}](\psi)|^2 = |\mathcal{T}\mathbf{y}(\mathbf{g} \cdot \psi)|^2$

signaux \mathcal{H}	espace des phases Ψ	représentation $ \mathcal{T}\cdot ^2$	groupe \mathbf{G}
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan euclidien \mathbb{R}^2	spectrogramme	Weyl-Heisenberg
continus $L^2(\mathbb{R})$	plan hyperbolique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$	scalogramme	Affine
discrets \mathbb{C}^{N+1} , $N \in \mathbb{N}$	sphère \mathbb{S}^2	p -Kravchuk	Rotations $\text{SO}(3)$

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.* ; Pascal et coll. 2022, *GRETSI'22*)

La famille des p -transformées de Kravchuk

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



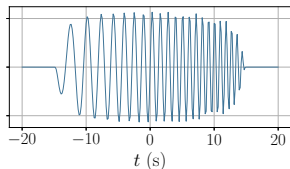
de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.

La famille des p -transformées de Kravchuk

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.

Définition. Pour $p \in (0, 1)$, la p -transformée de Kravchuk de \mathbf{y} est définie par :

$$T^{(p)}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n} c_{\vartheta}^n s_{\vartheta}^{N-n} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n], \text{ pour } (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \cong \mathbb{S}^2$$

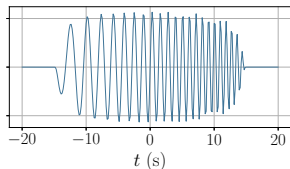
où \mathcal{B}_N^n : coefficient binomial, $c_{\vartheta} = \cos(\vartheta/2)$, $s_{\vartheta} = \sin(\vartheta/2)$ et

$$(\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n] = \langle \mathbf{q}_n^{(p)}, \mathbf{y} \rangle$$

$n^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{y} dans la base orthonormée des p -fonctions de Kravchuk.

La famille des p -transformées de Kravchuk

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.

Définition. Pour $p \in (0, 1)$, la p -transformée de Kravchuk de \mathbf{y} est définie par :

$$T^{(p)}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n} c_{\vartheta}^n s_{\vartheta}^{N-n} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n], \text{ pour } (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \cong \mathbb{S}^2$$

où \mathcal{B}_N^n : coefficient binomial, $c_{\vartheta} = \cos(\vartheta/2)$, $s_{\vartheta} = \sin(\vartheta/2)$ et

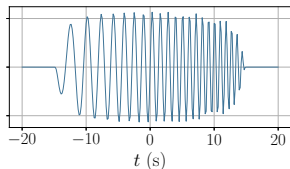
$$(\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n] = \langle \mathbf{q}_n^{(p)}, \mathbf{y} \rangle$$

$n^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{y} dans la base orthonormée des p -fonctions de Kravchuk.

Propriété de covariance : $\forall \mathbf{r} \in \text{SO}(3), \quad |T^{(p)}[\mathbf{r} * \mathbf{y}](\vartheta, \varphi)|^2 = |T^{(p)}\mathbf{y}(\mathbf{r} \cdot \vartheta)|^2$

La famille des p -transformées de Kravchuk

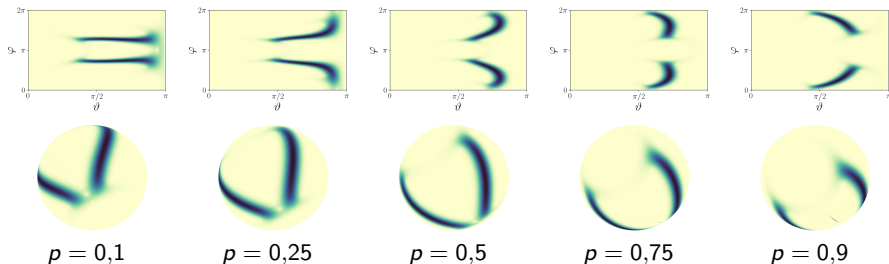
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

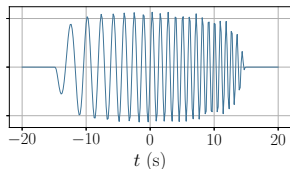
$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.



La famille des p -transformées de Kravchuk

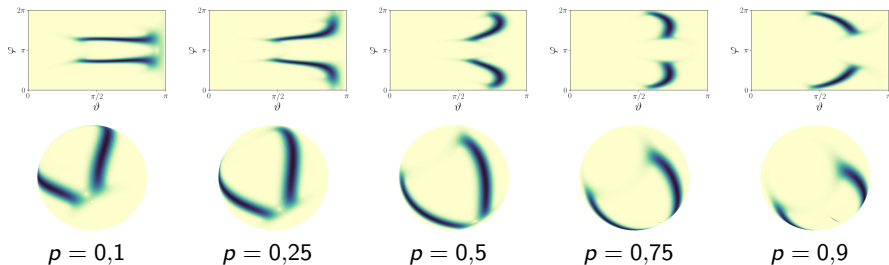
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.

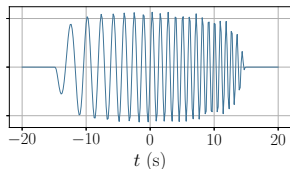


$\forall p \in (0, 1), \exists \mathbf{r}^{(p)} \in \text{SO}(3)$ telle que $T^{(p)} \mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = T^{(1/2)} \mathbf{y}(\mathbf{r}^{(p)} \cdot (\vartheta, \varphi)), \forall (\vartheta, \varphi) \in \mathbb{S}^2$

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.* ; Pascal et coll. 2022, *GRETSI'22*)

La famille des p -transformées de Kravchuk

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

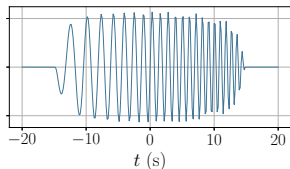
échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.

Limitations à une utilisation pratique :

$$T^{(p)} \mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n c_{\vartheta}^n s_{\vartheta}^{N-n}} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{y})[n], \quad (\mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{y})[n] = \langle \mathbf{q}_n^{(p)}, \mathbf{y} \rangle$$

La famille des p -transformées de Kravchuk

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.

Limitations à une utilisation pratique :

$$T^{(p)} \mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n c_{\vartheta}^n s_{\vartheta}^{N-n}} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{y})[n], \quad (\mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{y})[n] = \langle \mathbf{q}_n^{(p)}, \mathbf{y} \rangle$$

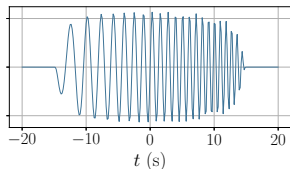
- p -fonctions de Kravchuk : calcul instable des polynômes $Q_n(\cdot; N, p)$

$$q_n(\kappa; N, p) = \sqrt{\mathcal{B}_N^n \mathcal{B}_N^{\kappa}} \frac{\eta^{n+\kappa} Q_n(\kappa; N, p)}{(1 + \eta^2)^{N/2}}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N, \quad \eta = \sqrt{p/(1-p)}$$

formulation alternative via une fonction génératrice \Rightarrow **coût de calcul prohibitif**

La famille des p -transformées de Kravchuk

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un signal *discret*, par exemple un *chirp* de durée $|\Omega| = 30$ s :



de $\nu_1 = 0,5$ Hz à $t_1 = -15$ s à $\nu_2 = 1$ Hz à $t_2 = 15$ s

$$x(t) = A_{\Omega}(t) \sin \left(2\pi \left(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \frac{(t - t_1)}{|\Omega|} \right) t \right)$$

échantillonné sur 40 s à $F_e = 6,4$ Hz, $N+1 = 257$ points.

Limitations à une utilisation pratique :

$$T^{(p)} \mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n c_{\vartheta}^n s_{\vartheta}^{N-n}} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{y})[n], \quad (\mathbf{Q}^{(p)} \mathbf{y})[n] = \langle \mathbf{q}_n^{(p)}, \mathbf{y} \rangle$$

- p -fonctions de Kravchuk : calcul instable des polynômes $Q_n(\cdot; N, p)$

$$q_n(\kappa; N, p) = \sqrt{\mathcal{B}_N^n \mathcal{B}_N^{\kappa}} \frac{\eta^{n+\kappa} Q_n(\kappa; N, p)}{(1 + \eta^2)^{N/2}}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N, \quad \eta = \sqrt{p/(1-p)}$$

formulation alternative via une fonction génératrice \implies **coût de calcul prohibitif**

- rotation sur \mathbb{S}^2 via p : **quelle d'interprétation temps–fréquence** de (ϑ, φ) ?

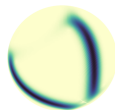
(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.* ; Pascal et coll. 2022, *GRETSI'22*)

Conservation de l'énergie : pour tout $p \in (0, 1)$

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad \int_{\mathbb{S}^2} |T^{(p)}(\vartheta, \varphi)|^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{N+1} \|\mathbf{y}\|^2$$

$\implies (\vartheta, \varphi) \mapsto T^{(p)}(\vartheta, \varphi)$ de **carré intégrable** sur la sphère

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*)

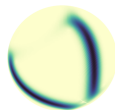


Conservation de l'énergie : pour tout $p \in (0, 1)$

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad \int_{\mathbb{S}^2} \left| T^{(p)}(\vartheta, \varphi) \right|^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{N+1} \|\mathbf{y}\|^2$$

$\implies (\vartheta, \varphi) \mapsto T^{(p)}(\vartheta, \varphi)$ de **carré intégrable** sur la sphère

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*)



Toute fonction de $L^2(\mathbb{S}^2)$ se décompose sur la base des harmoniques sphériques de spin

$$\left\{ {}_s Y_m^\ell : s, m \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N} \text{ tels que } |s| \leq \ell, |m| \leq \ell \right\}$$

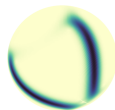
(Newman et coll. 1966, *J. Math. Phys.* ; McEwen et coll. 2011, *IEEE Trans. Sig. Process.*)

Conservation de l'énergie : pour tout $p \in (0, 1)$

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad \int_{\mathbb{S}^2} |T^{(p)}(\vartheta, \varphi)|^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{N+1} \|\mathbf{y}\|^2$$

$\implies (\vartheta, \varphi) \mapsto T^{(p)}(\vartheta, \varphi)$ de **carré intégrable** sur la sphère

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*)



Toute fonction de $L^2(\mathbb{S}^2)$ se décompose sur la base des harmoniques sphériques de spin

$$\{ {}_s Y_m^\ell : s, m \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N} \text{ tels que } |s| \leq \ell, |m| \leq \ell \}$$

(Newman et coll. 1966, *J. Math. Phys.* ; McEwen et coll. 2011, *IEEE Trans. Sig. Process.*)

Théorème. Soit $p \in (0, 1)$, $\beta = 2 \arcsin(\sqrt{p})$ et $N \in \mathbb{N}$ pair.

Pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$, soit $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{r}_\beta * \mathbf{y}$, \mathbf{r}_β rotation d'angles d'Euler $(0, \beta, 0)$

$$T^{(p)} \mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \mathcal{C}_N e^{i \frac{N\varphi}{2}} \sum_{n=0}^N \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\pi - \vartheta, \varphi) \overline{\tilde{\mathbf{y}}[n]}, \quad \forall (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

où \mathcal{C}_N : facteur de normalisation, explicite.

$T^{(p)} \mathbf{y}$ se décompose intégralement sur les harmoniques sphériques de spin $N/2$.

Preuve. (Pascal, Flamant, Bardenet 2025, *En préparation.*)

Transformée de Kravchuk réalignée : soit $N \in \mathbb{N}$ pair et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$

$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{y[n]}.$$

Transformée de Kravchuk réalignée : soit $N \in \mathbb{N}$ pair et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$

$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{y[n]}.$$

- algorithmes rapides et stables pour calculer $Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)$: **pyssht**

Transformée de Kravchuk réalignée : soit $N \in \mathbb{N}$ pair et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$

$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{y[n]}.$$

- algorithmes rapides et stables pour calculer $Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)$: **pyssht**
- directement exprimée en fonction de \mathbf{y} : pas de rotation \mathbf{r}_β nécessaire

Interprétation temps–fréquence des coordonnées sphériques

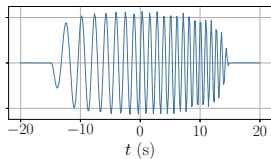
Transformée de Kravchuk réalignée : soit $N \in \mathbb{N}$ pair et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$

$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{y[n]}.$$

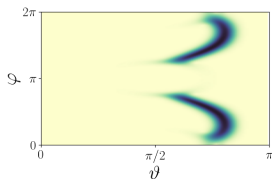
- algorithmes rapides et stables pour calculer $\frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)$: **pyssht**
- directement exprimée en fonction de \mathbf{y} : pas de rotation \mathbf{r}_β nécessaire
- variables (ϑ, φ) alignées avec les axes temps–fréquence

ϑ : variable de temps

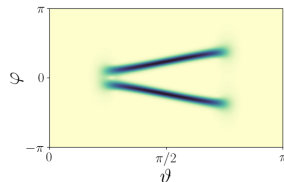
φ : variable de fréquence



signal \mathbf{y}

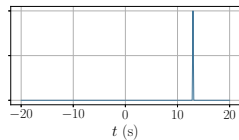


1/2-transformée $|T^{(1/2)}\mathbf{y}|^2$



transformée réalignée $|\tilde{T}\mathbf{y}|^2$

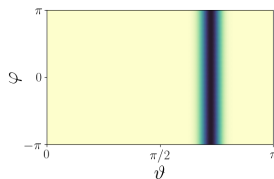
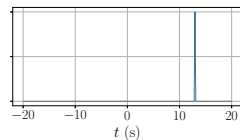
Dirac : $\mathbf{y} = \delta_{n_0} \in \mathbb{C}^{N+1}$



$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \frac{N}{2} Y_{n_0 - \frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)$$

Interprétation temps–fréquence des coordonnées sphériques

Dirac : $\mathbf{y} = \delta_{n_0} \in \mathbb{C}^{N+1}$



$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n_0} Y_{n_0 - \frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)$$

Interprétation temps–fréquence des coordonnées sphériques

Lemme. Soit $N \in \mathbb{N}$ pair et $n \in \{0, \dots, N\}$. La fonction

$$\begin{cases} [0, \pi] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vartheta & \mapsto & \left| \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \right| \end{cases}$$

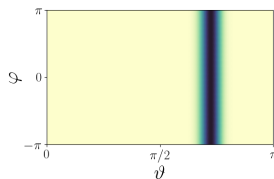
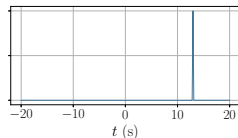
atteint son maximum en un *unique* point :

$$\vartheta_n^* = 2 \arctan \sqrt{\frac{n}{N-n}}, \quad \text{pour } n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

où par convention $N/0 = +\infty$ et $\arctan(+\infty) = \pi$.

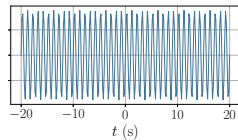
Colatitude ϑ : liée à la variable de **temps** t

Dirac : $\mathbf{y} = \delta_{n_0} \in \mathbb{C}^{N+1}$



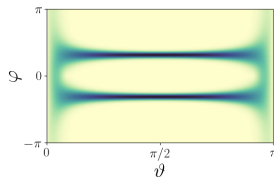
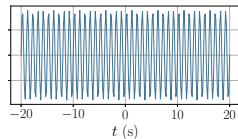
$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \frac{N}{2} Y_{n_0-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)$$

Sinus : $s(t) = \sin(\omega t)$



Interprétation temps–fréquence des coordonnées sphériques

Sinus : $s(t) = \sin(\omega t)$



Lemme. Soit $N \in \mathbb{N}$ pair, $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et

$$y[n] = s(t_n), \quad t_n = t_{\min} + nT_e, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

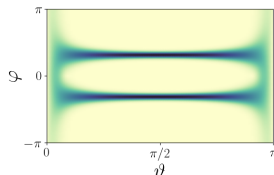
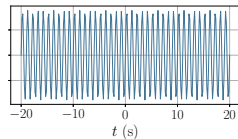
avec $T_e = (t_{\max} - t_{\min})/N$.

Modulation en fréquence $g(t) = e^{i\omega_0 t} s(t)$, $v[n] = g(t_n)$

$$\tilde{T}v(\vartheta, \varphi) = e^{-i\omega_0 \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2}} \tilde{T}y(\vartheta, \varphi - \omega_0 T_e)$$

Longitude φ : liée à la variable de **fréquence** ω

Sinus : $s(t) = \sin(\omega t)$



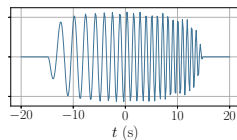
Interprétation temps–fréquence des coordonnées sphériques

Signal continu sur $[t_{\min}, t_{\max}]$ échantillonné en

$$t_n = t_{\min} + nT_e, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

avec un pas $T_e = (t_{\max} - t_{\min})/N$

Chirp linéaire



Interprétation temps–fréquence des coordonnées sphériques

Signal continu sur $[t_{\min}, t_{\max}]$ échantillonné en

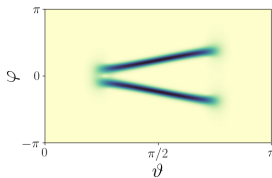
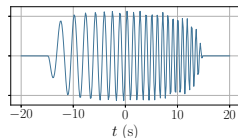
$$t_n = t_{\min} + nT_e, n = 0, 1, \dots, N$$

avec un pas $T_e = (t_{\max} - t_{\min})/N$

- **colatitude** en fonction du **temps** :

$$\vartheta^*(t) = 2 \arctan \sqrt{\frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t}}$$

Chirp linéaire



Interprétation temps–fréquence des coordonnées sphériques

Signal continu sur $[t_{\min}, t_{\max}]$ échantillonné en

$$t_n = t_{\min} + nT_e, n = 0, 1, \dots, N$$

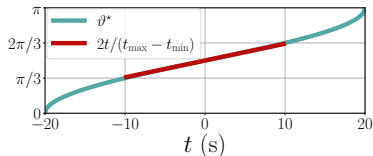
avec un pas $T_e = (t_{\max} - t_{\min})/N$

- **colatitude** en fonction du **temps** :

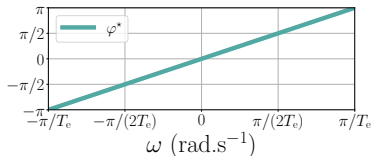
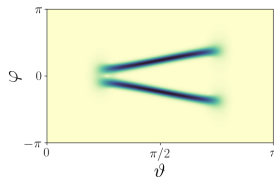
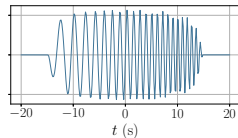
$$\vartheta^*(t) = 2 \arctan \sqrt{\frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t}}$$

- **longitude** en fonction de la **pulsation** :

$$\varphi(\omega) = \omega T_e$$



Chirp linéaire



États cohérents : énergie maximale concentrée dans l'espace des phases

États cohérents : énergie maximale concentrée dans l'espace des phases

Transformée de Fourier à court terme de fenêtre gaussienne : atomes de Gabor

(Chapitre 4 2018, *Cambridge University Press*)

États cohérents : énergie maximale concentrée dans l'espace des phases

Transformée de Fourier à court terme de fenêtre gaussienne : atomes de Gabor

(Chapitre 4 2018, *Cambridge University Press*)

États cohérents de spin : famille covariante

$$\{\Psi_{\vartheta, \varphi}, (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi]\}$$

action du *groupe* $SO(3)$ sur une *ondelette mère*

$$\forall \mathbf{r}_{(\vartheta, \varphi)} \in SO(3), \quad \Psi_{\vartheta, \varphi} = \mathbf{r}_{(\vartheta, \varphi)} * \Psi_{0,0}$$

(Gazeau 2009, *WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA*; Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*; Pascal et coll. 2022, *GRETSI'22*)

États cohérents : énergie maximale concentrée dans l'espace des phases

Transformée de Fourier à court terme de fenêtre gaussienne : atomes de Gabor

(Chapitre 4 2018, Cambridge University Press)

États cohérents de spin : famille covariante

$$\{\Psi_{\vartheta, \varphi}, (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi]\}$$

action du groupe $SO(3)$ sur une *ondelette mère*

$$\forall \mathbf{r}_{(\vartheta, \varphi)} \in SO(3), \quad \Psi_{\vartheta, \varphi} = \mathbf{r}_{(\vartheta, \varphi)} * \Psi_{0,0}$$

Pour la transformée de **Kravchuk réalignée** : forme close

$$\Psi_{\vartheta, \varphi}[n] = \mathcal{B}_N^n c_{\vartheta}^{N-n} s_{\vartheta}^n e^{-in\varphi}, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

\mathcal{B}_N^n : coefficient binomial, $c_{\vartheta} = \cos(\vartheta/2)$, $s_{\vartheta} = \sin(\vartheta/2)$

(Gazeau 2009, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA; Pascal et coll. 2022, IEEE Trans. Sig. Process.; Pascal et coll. 2022, GRETSI'22)

Transformée de Kravchuk réalignée

États cohérents : énergie maximale concentrée dans l'espace des phases

Transformée de Fourier à court terme de fenêtre gaussienne : atomes de Gabor

(Chapitre 4 2018, Cambridge University Press)

États cohérents de spin : famille covariante

$$\{\Psi_{\vartheta, \varphi}, (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi]\}$$

action du groupe $SO(3)$ sur une *ondelette mère*

$$\forall \mathbf{r}_{(\vartheta, \varphi)} \in SO(3), \quad \Psi_{\vartheta, \varphi} = \mathbf{r}_{(\vartheta, \varphi)} * \Psi_{0,0}$$

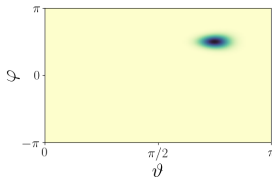
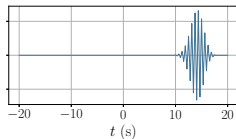
Pour la transformée de **Kravchuk réalignée** : forme close

$$\Psi_{\vartheta, \varphi}[n] = \mathcal{B}_N^n c_{\vartheta}^{N-n} s_{\vartheta}^n e^{-in\varphi}, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

$$\mathcal{B}_N^n : \text{coefficient binomial}, \quad c_{\vartheta} = \cos(\vartheta/2), \quad s_{\vartheta} = \sin(\vartheta/2)$$

(Gazeau 2009, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA; Pascal et coll. 2022, IEEE Trans. Sig. Process.; Pascal et coll. 2022, GRETSI'22)

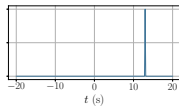
État cohérent $\Psi_{\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}}$



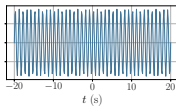
$$\tilde{\vartheta} = 3\pi/4, \quad \tilde{\varphi} = \pi/2$$

Transformée de Kravchuk réalignée : exemples

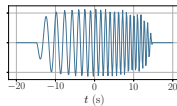
Pic de Dirac



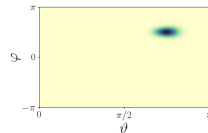
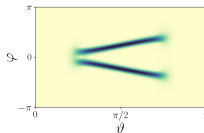
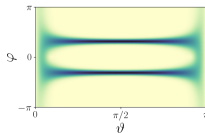
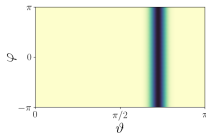
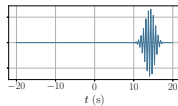
Sinusoïde



Chirp linéaire

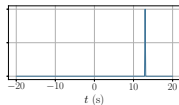


État cohérent

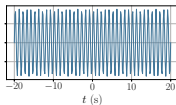


Transformée de Kravchuk réalignée : exemples

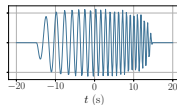
Pic de Dirac



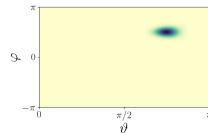
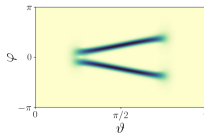
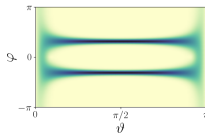
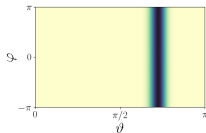
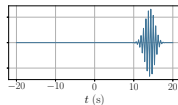
Sinusoïde



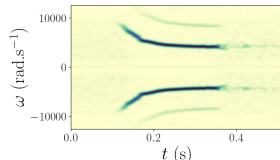
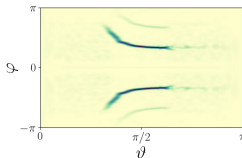
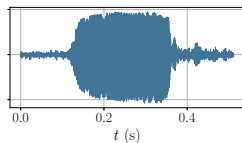
Chirp linéaire



État cohérent



Cri d'écholocation de chauve souris, *Animals : the bat call*, tftb.nongnu.org



Cri \mathbf{b}

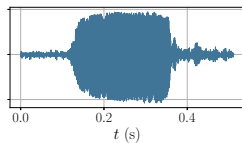
$$|\tilde{T}\mathbf{b}|^2$$

$$|\mathcal{V}_g\mathbf{b}|^2$$

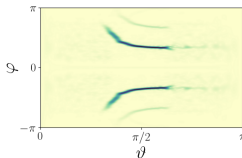
(Flandrin 2018, Cambridge University Press)

Représentations de Fourier vs. de Kravchuk d'un cri de chauve-souris

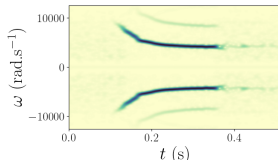
Cri d'écholocation de chauve souris, *Animals : the bat call*, tftb.nongnu.org



Cri \mathbf{b}



$|\tilde{T}\mathbf{b}|^2$



$|\mathcal{V}_g\mathbf{b}|^2$

$|\mathcal{V}_g\mathbf{b}|^2$: spectrogram **gaussien** et implémentation **sans adaptation** via **SciPy**

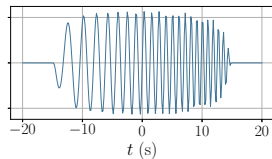
(Flandrin 2018, *Cambridge University Press*)

- grande **similitude** entre le spectrogramme de Fourier et de Kravchuk réaligné : *chirp* non linéaire décroissant, fréquences positives et négatives, interférences
- excellente **localisation** sans aucun paramètre à régler

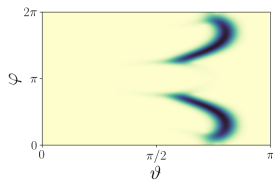
$$\tilde{T}\mathbf{b}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N Y_{\frac{N}{2}, n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{b[n]}$$

\implies transformée de Kravchuk réalignée : pertinente pour représenter des signaux **réels**

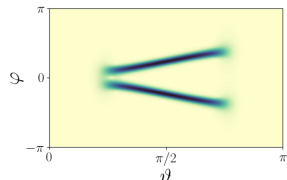
Calcul rapide de la transformée de Kravchuk réalignée



signal y

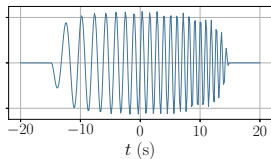


1/2-transformée $|T^{(1/2)}y|^2$

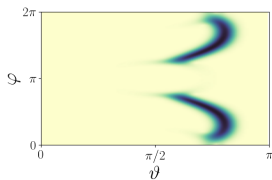


transformée réalignée $|\tilde{T}y|^2$

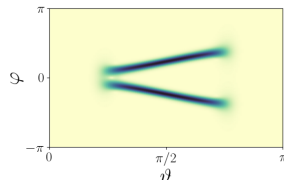
Calcul rapide de la transformée de Kravchuk réalignée



signal \mathbf{y}



1/2-transformée $|T^{(1/2)}\mathbf{y}|^2$



transformée réalignée $|\tilde{T}\mathbf{y}|^2$

Transformée originelle : $p = 1/2$

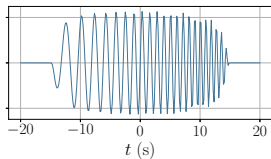
$$T\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n} c_{\vartheta}^n s_{\vartheta}^{N-n} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}\mathbf{y})[n]$$

enjeu : si $N \sim 10^2$ calcul de $\mathbf{Q}\mathbf{y}$ instable

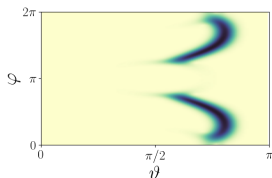
\Rightarrow réécriture via fonction génératrice

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*)

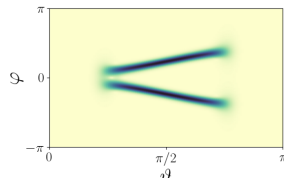
Calcul rapide de la transformée de Kravchuk réalignée



signal \mathbf{y}



1/2-transformée $|T^{(1/2)}\mathbf{y}|^2$



transformée réalignée $|\tilde{T}\mathbf{y}|^2$

Transformée originelle : $p = 1/2$

$$T\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\mathcal{B}_N^n} c_{\vartheta}^n s_{\vartheta}^{N-n} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}\mathbf{y})[n]$$

enjeu : si $N \sim 10^2$ calcul de $\mathbf{Q}\mathbf{y}$ instable
 \Rightarrow réécriture via fonction génératrice

Transformée réalignée :

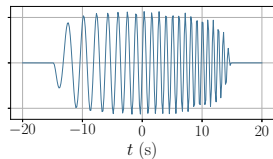
$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{y[n]}$$

enjeu : calcul rapide de $\frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}$ pour $N \sim 10^3$

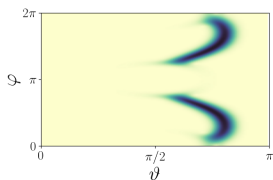
(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*)

pypi.org/project/pysstht

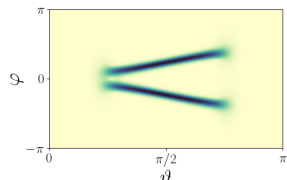
Calcul rapide de la transformée de Kravchuk réalignée



signal y



1/2-transformée $|T^{(1/2)}y|^2$



transformée réalignée $|\tilde{T}y|^2$

Transformée originelle : $p = 1/2$

$$T\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sqrt{B_N^n c_\vartheta^n s_\vartheta^{N-n}} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}\mathbf{y})[n]$$

enjeu : si $N \sim 10^2$ calcul de $\mathbf{Q}\mathbf{y}$ instable
 \Rightarrow réécriture via fonction génératrice

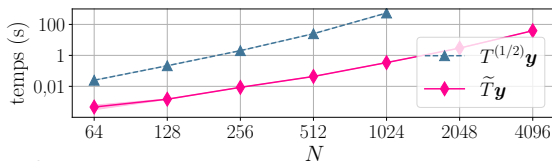
Transformée réalignée :

$$\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \overline{y[n]}$$

enjeu : calcul rapide de $\frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}$ pour $N \sim 10^3$

(Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*)

pypi.org/project/pysst/



Transformée de Kravchuk réalignée inverse :

$$y[n] = \left\langle \overline{\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi)}, \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) \overline{\frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi$$

\Rightarrow décomposition sur la base des harmoniques sphériques de spin $N/2$

Transformée de Kravchuk réalignée inverse :

$$y[n] = \left\langle \overline{\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi)}, \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^2} \overline{\tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi)} \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi$$

⇒ décomposition sur la base des harmoniques sphériques de spin $N/2$

Algorithmes **rapides** et **robustes** de type Transformée de Fourier rapide : **pyssht**

Transformée de Kravchuk réalignée inverse :

$$y[n] = \overline{\left\langle \tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi), \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \right\rangle} = \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{T}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) \overline{\frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi$$

⇒ décomposition sur la base des harmoniques sphériques de spin $N/2$

Algorithmes **rapides** et **robustes** de type Transformée de Fourier rapide : **pyssht**

Évaluation de la stabilité numérique de l'inversion : précision de reconstruction

$$\mathcal{P} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}^r - \mathbf{y}\|}, \quad \text{pour} \quad \mathbf{y}^r = \tilde{T}^{-1} \tilde{T} \mathbf{y}$$

Inversion numériquement stable de la transformée de Kravchuk

Transformée de Kravchuk réalignée inverse :

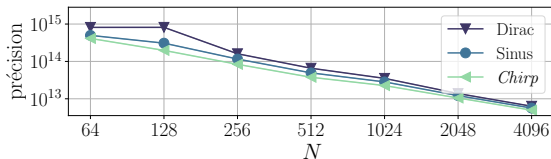
$$y[n] = \overline{\left\langle \tilde{T} \mathbf{y}(\vartheta, \varphi), \frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi) \right\rangle} = \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{T} \mathbf{y}(\vartheta, \varphi) \overline{\frac{N}{2} Y_{n-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi$$

⇒ décomposition sur la base des harmoniques sphériques de spin $N/2$

Algorithmes **rapides** et **robustes** de type Transformée de Fourier rapide : **pysht**

Évaluation de la stabilité numérique de l'inversion : précision de reconstruction

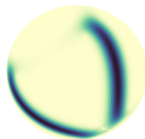
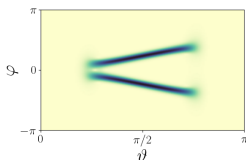
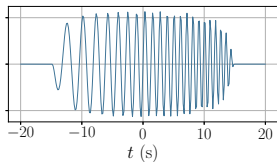
$$\mathcal{P} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}^r - \mathbf{y}\|}, \quad \text{pour } \mathbf{y}^r = \tilde{T}^{-1} \tilde{T} \mathbf{y}$$



⇒ excellente **précision numérique** du calcul de \tilde{T}^{-1} **indépendamment** du signal

Contributions principales :

- p -transformée de Kravchuk réécrite en **harmoniques sphériques de spin**
- construction d'une transformée de Kravchuk **réalignée**
- **interprétation** des angles (ϑ, φ) de l'espace des phases en temps et fréquence
- transformée **inverse** comme décomposition en harmoniques sphériques de spin
- implémentation **rapide et robuste** tirant parti de **pyssht**



Travaux en cours et futurs :

- **problèmes réels** de traitement du signal $N \geq 10^3$ à 10^4
détection de signaux à partir des zéros de la transformée de Kravchuk
(Bardenet et coll. 2020, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* ; Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Sig. Process.*)
- surveillance de **population d'oiseaux** et suivi de migration
base de $70 \cdot 10^3$ données annotées cri ou non **BirdVox** (Lostanlen et coll. 2018)
- **asymptotique** pour la transformée de Kravchuk réalignée : à grand $N \gg 1$
discrétisation **covariante** de la transformée de Fourier à court terme



github.com/bpascal-fr/from-kravchuk-to-ssht



hal.science/hal-05013793

