

Contexte et contributions

Transformée de Kravchuk : transformée temps-fréquence *discrète* ; d'espace des phases la sphère \mathbb{S}^2 ; *covariante* sous les rotations.

→ Construite à partir des *polynômes de Kravchuk* associés à $\text{Binomial}(N, p)$, avec $p \in]0, 1[$;

→ Distribution des zéros du spectrogramme de Kravchuk du bruit blanc gaussien coïncide avec celle des *zéros de la GAF sphérique* ;

→ *Détection de signal* s'appuyant sur les *statistiques spatiales* des zéros du spectrogramme de Kravchuk.

(Pascal. et col, 2022, *Trans Sig Process*)

Extension à $p \in]0, 1[$: *(i)* p correspond à la variance de la fenêtre, discrète, d'analyse ;
(ii) p -spectrogramme relié au spectrogramme de Kravchuk par une *rotation* de \mathbb{S}^2 ; } \Rightarrow adaptation *automatique* au signal.

Famille de transformées

p -Transformée de Kravchuk

Signal *discret* $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$

$$\forall (\vartheta, \varphi) \in \mathbb{S}^2, \quad T^{(p)}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\Psi}_{\vartheta, \varphi}^{(p)} \rangle$$

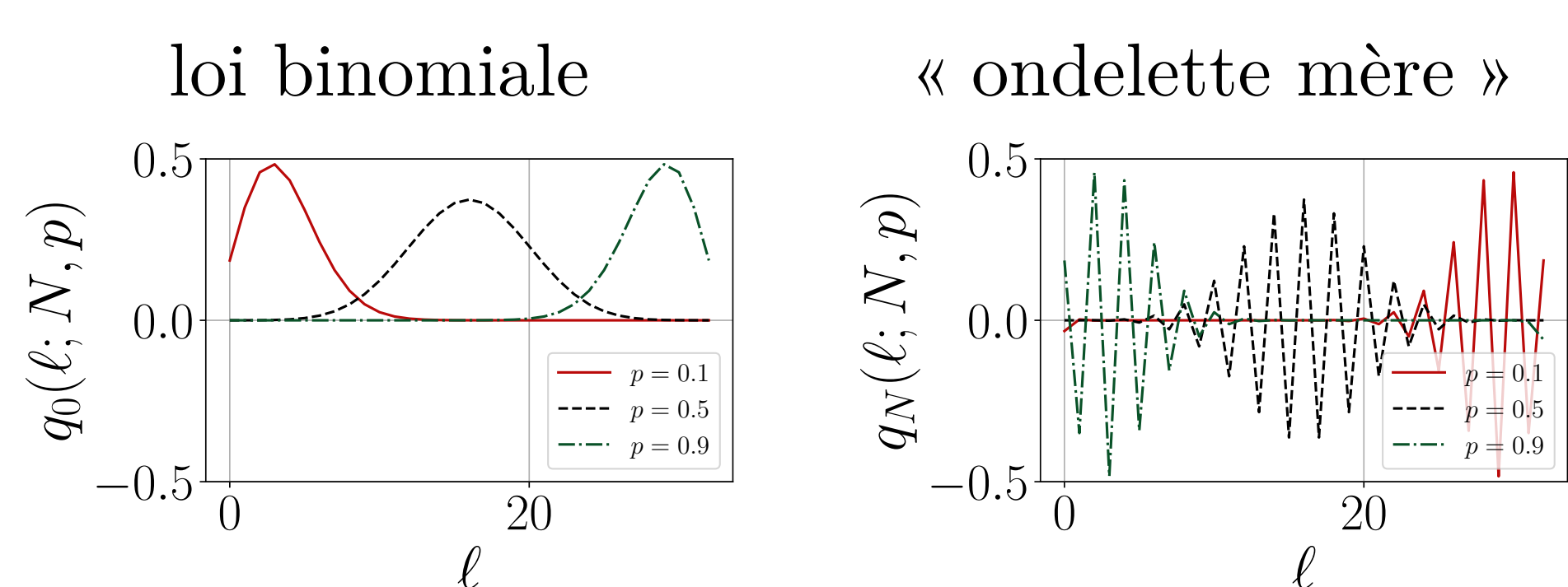
États cohérents de $\text{SO}(3)$ généralisés :

$$\boldsymbol{\Psi}_{\vartheta, \varphi}^{(p)} = \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n} \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^n \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{N-n}} e^{in\varphi} \mathbf{q}_n^{(p)},$$

$\{\mathbf{q}_n^{(p)}, n = 0, 1, \dots, N\}$, fonctions de Kravchuk,

– forment une famille orthonormée ;

– basée sur les *polynômes de Kravchuk*, orthogonaux pour $\text{Binomial}(N, p)$.



Reparamétrisation : $z = \cot(\vartheta/2)e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$T^{(p)}\mathbf{y}(z) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n} \frac{z^n}{\sqrt{(1+|z|^2)^N}}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{q}_n^{(p)} \rangle$$

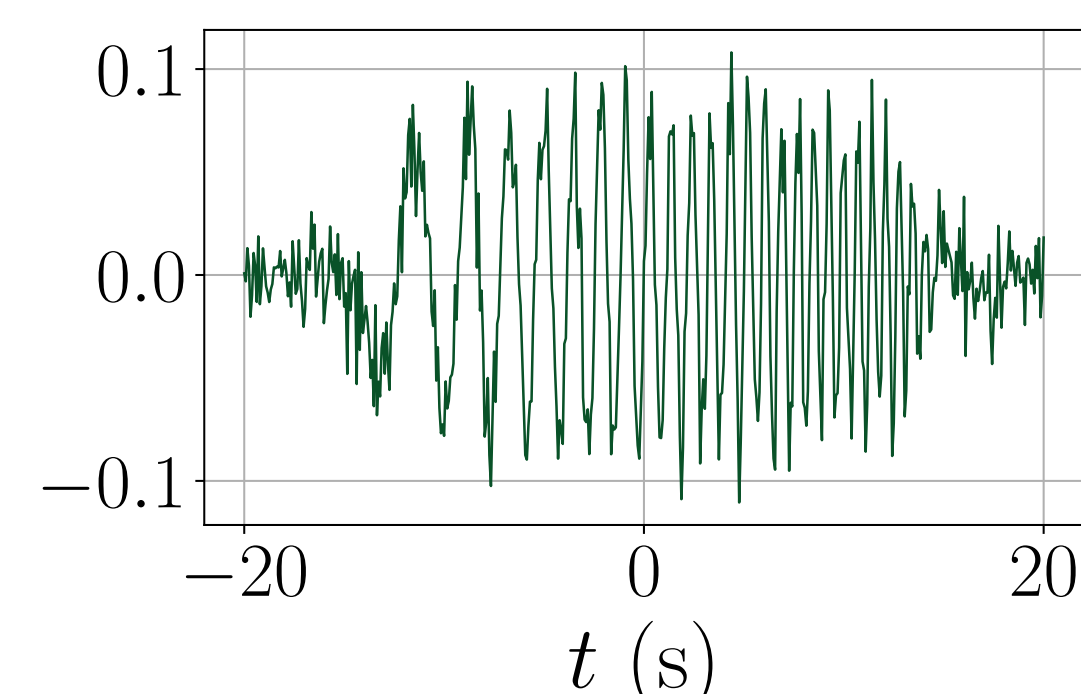
→ polynôme complexe de degré N

p -Spectrogrammes de Kravchuk

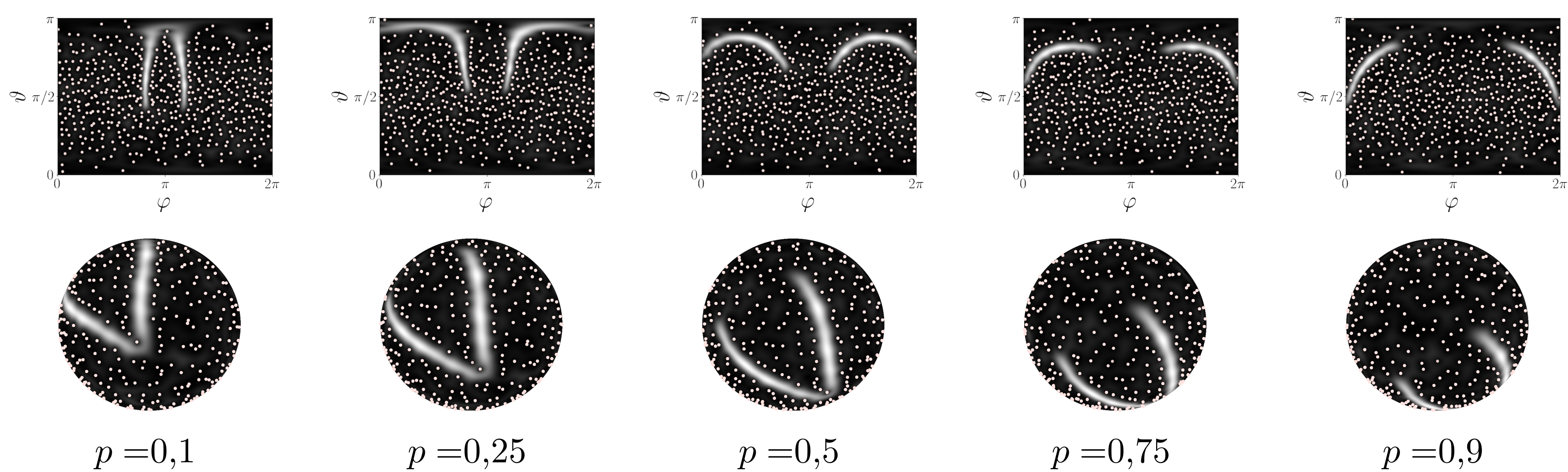
Exemple d'un *chirp* linéaire bruité : signal sous-jacent de la forme

$$x(t) = A_\nu(t) \times \sin \left(2\pi \left(f_1 + (f_2 - f_1) \frac{(t + \nu)}{2\nu} \right) t \right)$$

échantillonné en $N + 1$ points uniformément répartis dans $[-T, T]$.



p -spectrogrammes de Kravchuk et leurs zéros



Lien entre les p -spectrogrammes de Kravchuk

Proposition : Soit $p \in]0, 1[$, $\eta = \sqrt{p/(1-p)}$ et $z = \cot(\vartheta/2)e^{i\varphi}$, avec (ϑ, φ) des coordonnées sphériques

$$\left| T^{(p)}\mathbf{y}(h_\eta(z)) \right|^2 = \left| T^{(0.5)}\mathbf{y}(z) \right|^2 \quad \text{où } h_\eta(z) := \frac{(1+\eta)z - (1-\eta)}{(1-\eta)z + 1 + \eta} \text{ est une isométrie.}$$

Le p -spectrogramme de Kravchuk est équivalent, à une *rotation* près, au spectrogramme de Kravchuk.

Corollaire : La p -transformée de Kravchuk : *(i)* possède une résolution de l'identité ; *(ii)* préserve l'énergie ; *(iii)* est covariante sous l'action de $\text{SO}(3)$ sur \mathbb{C}^{N+1} . (Pascal. et col, 2022, *Trans Sig Process*)

Détection de signal

But : rejeter avec un niveau de confiance $1 - \alpha$

$\mathbf{H}_0 : \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}$ bruit blanc gaussien seul

en étudiant les **zéros du p -spectrogramme**.

(Bardenet et col, 2020, *Appl Comput Harmon Anal* ;
Pascal. et col, 2022, *Trans Sig Process*)

Test de Monte Carlo

Niveau de confiance souhaité : $\alpha \in]0, 1[$,

Choisir $k \leq m$, $k, m \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha = \frac{k}{m+1}$.

(i) Calculer $s(\mathbf{y})$, *statistique résumante* ;

(ii) Générer m bruits indépendants

$$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_m, \quad \boldsymbol{\xi}_j \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \mathbf{I}) ;$$

(iii) Calculer $s_j = s(\boldsymbol{\xi}_j)$, $1 \leq j \leq m$,
ordonner $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$;

(iv) Si $s(\mathbf{y}) \geq s_k$, rejeter \mathbf{H}_0 .

Statistiques spatiales sur la sphère :

Fonct. d'espace vide $F(r) = \mathbb{P}(\mathbf{b}(0, r) \cap Z)$

– Z : zéros du p -spectrogramme de Kravchuk,

– $\mathbf{b}(0, r)$ boule centrée au pôle nord, de rayon r

Statistique résumante \hat{F} estimateur de F

$$s(\mathbf{y}) = \sqrt{\int_0^\pi |\hat{F}_{\mathbf{y}}(r) - F_0(r)|^2 dr}, \quad F_0 \text{ sous } \mathbf{H}_0$$

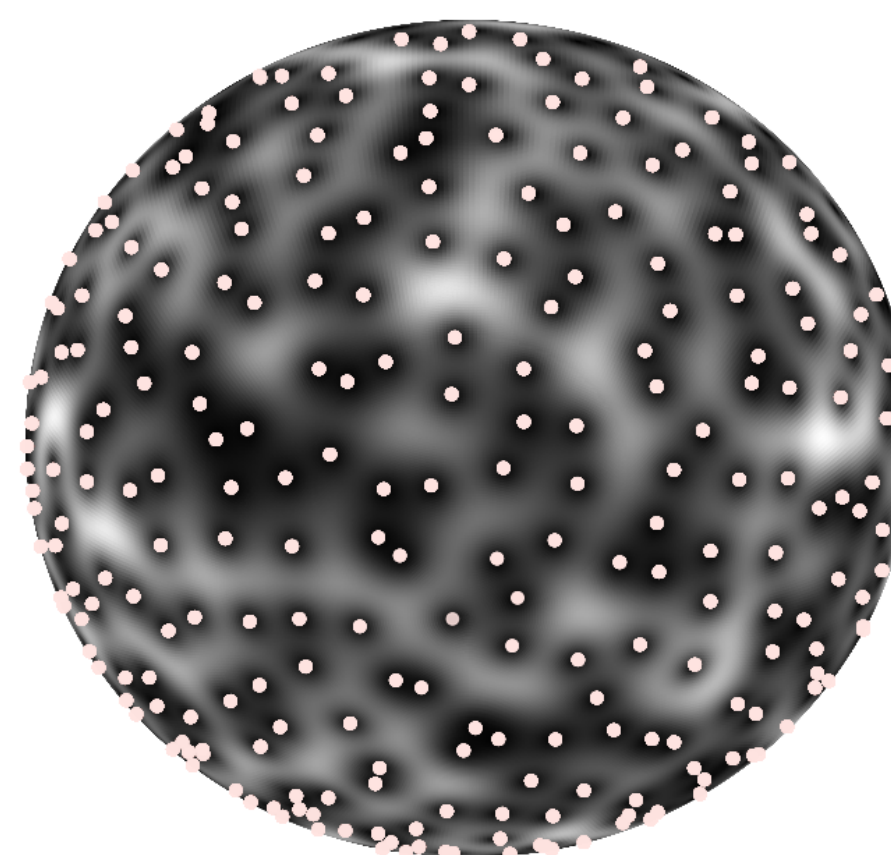
Zéros du p -spectrogramme de Kravchuk

Soit $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^{N+1}$ un *bruit blanc gaussien*, $\sqrt{(1+|z|^2)^N} T^{(p)}(z) \stackrel{(\text{loi})}{=} \text{GAF}_{\mathbb{S}}(z)$,

$$\text{GAF sphérique} \quad \text{GAF}_{\mathbb{S}}(z) = \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} z^n \boldsymbol{\xi}'[n], \quad \boldsymbol{\xi}'[n] \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1).$$

\Rightarrow Distribution **uniforme** des zéros du p -spectrogramme de Kravchuk de $\boldsymbol{\xi}$.

(Bardenet et col, 2021, *Appl Comput Harmon Anal* ; Pascal. et col, 2022, *Trans Sig Process*)



Puissance du test de détection

Données : $\mathbf{y} = \text{snr} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^{N+1}$

– *chirps* linéaires bruités ;

– $\text{snr} \in \{1; 2; 5\}$;

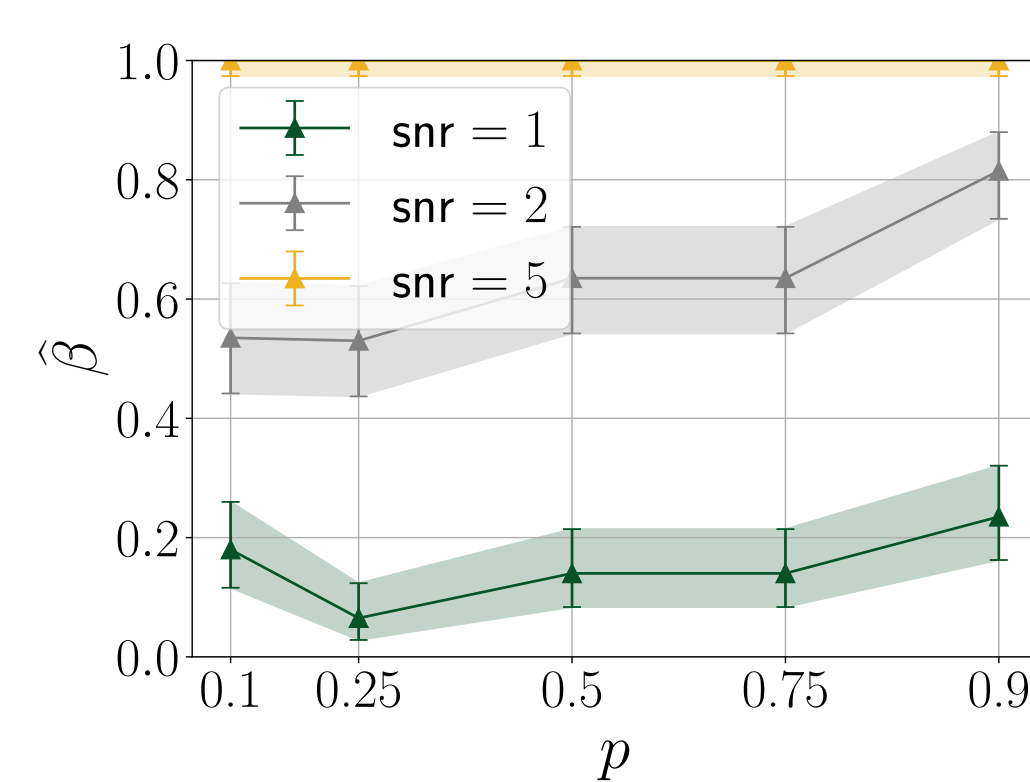
– 200 tirages de $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \mathbf{I})$ chacun ;

– $p \in \{0,1 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 0,9\}$.

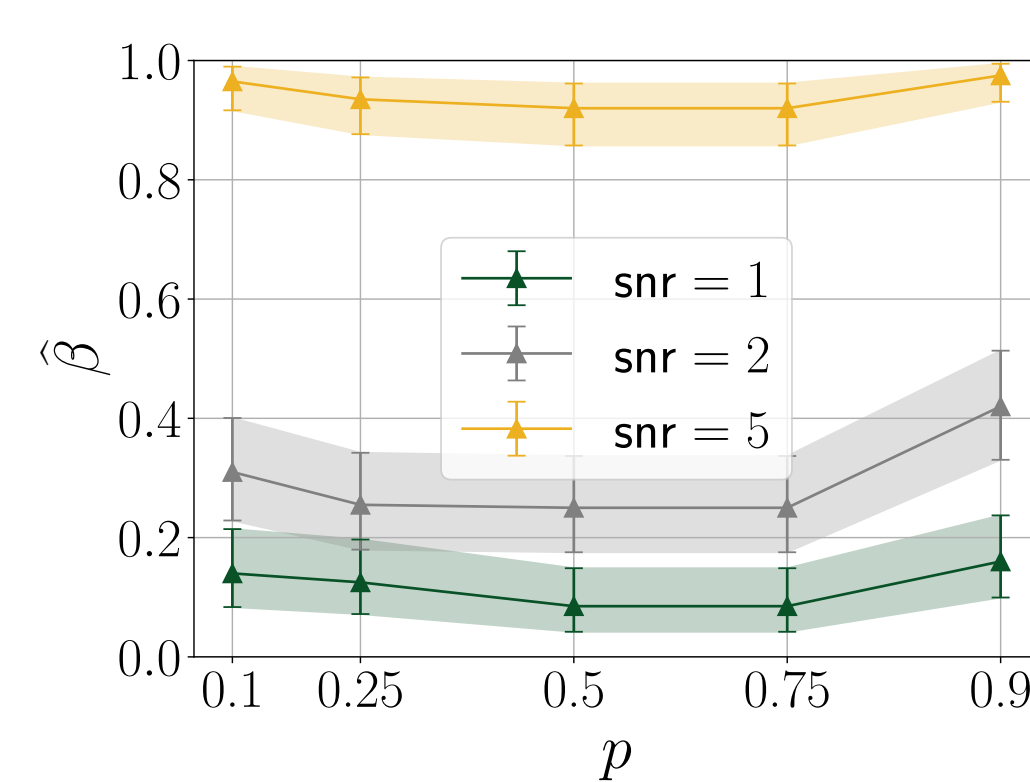
Observations :

(1) Signal *court*, $\nu = 10$ s, p a peu d'influence ;

(2) Signal *long*, $\nu = 20$ s, β augmente avec p .



$\nu = 15$ s



$\nu = 10$ s

Interprétation : *implémentation* \Rightarrow *résolution élevée aux pôles* : une *rotation* améliore la détection.

Conclusion

Bilan – Famille de transformées *discrètes* covariantes, paramétrée par $p \in]0, 1[$;

– Choix de $p \equiv$ *rotation* : pas d'échelle caractéristique, ajustement *automatique* au signal ;

– Détection de signal à partir de la distribution des zéros du p -spectrogramme de Kravchuk.

Perspectives

– Schéma numérique robuste pour l'inverse de la p -transformée de Kravchuk ;

– Application à des problèmes de débruitage et de démixage.