

Indépendance.

- 1.** a. Déterminer à quelle condition un événement est indépendant de lui-même.
b. Déterminer à quelle condition une variable aléatoire réelle est indépendante d'elle-même. On pourra étudier sa fonction de répartition.

Solution de l'exercice 1. a. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement. Par définition, A est indépendant de lui-même si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$. Ceci a lieu si et seulement si $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.

b. Soit X une variable aléatoire indépendante d'elle-même. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \leq x, X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(X \leq x)$, donc $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)^2$, donc la fonction de répartition de X ne prend que les valeurs 0 ou 1. Posons

$$a = \sup\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) = 0\}.$$

Pour tout $x < a$, il existe t tel que $x < t \leq a$ et $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$ (sinon, x serait un majorant strictement plus petit que a de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) = 0\}$). Donc $\mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq t) = 0$. Par ailleurs, pour tout $x > a$, on a $\mathbb{P}(X \leq x) > 0$ (sinon a ne serait pas un majorant de $\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) = 0\}$), donc $\mathbb{P}(X \leq x) = 1$. Par continuité à droite de la fonction de répartition de X , on a donc

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(x).$$

C'est la fonction de répartition de la loi constante égale à a , donc X est une variable aléatoire constante.

Réciproquement, soit X une variable aléatoire constante égale à c . Soient A et B deux boréliens de \mathbb{R} . Les deux nombres $\mathbb{P}(X \in A, X \in B)$ et $\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)$ valent 1 si et seulement si $c \in A \cap B$, et 0 sinon. Dans tous les cas, ils sont égaux, donc X est indépendante d'elle-même.

Finalement, une variable aléatoire est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est constante presque sûrement.

- 2.** a) Donner un exemple d'un espace de probabilités et de trois événements A, B, C sur cet espace de probabilités tels que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ mais tels que A, B, C ne soient pas indépendants.

b) Donner un exemple d'un espace de probabilités et de trois événements A, B, C sur cet espace de probabilités tels que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ mais tels que A, B, C ne soient pas indépendants.

Solution de l'exercice 2.

3. Soit $n \geq 1$ un entier. Soit Ω l'ensemble $\{0,1\}^n$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité \mathbb{P} . Pour tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $X_k(\omega) = \omega_k$.

- Déterminer la loi des variables aléatoires X_1, \dots, X_n et montrer qu'elles sont indépendantes.
- Soit $p \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique mesure de probabilités \mathbb{Q} sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que, vues sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{Q})$, les variables aléatoires X_1, \dots, X_n soient indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p .

Solution de l'exercice 3.

4. Soient $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $F = \{y_1, y_2, y_3\}$ deux parties finies de \mathbb{R} . Pour chacune des matrices $P = (P_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ci-dessous, on considère un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $E \times F$ tel que pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on ait $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = P_{ij}$. Déterminer si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{17} & \frac{12}{17} & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{32} & \frac{3}{96} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{17} & \frac{20}{160} & \frac{1}{480} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{32} & \frac{3}{96} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{17} & \frac{20}{160} & \frac{1}{480} \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 4. Dans chaque cas, on commence par calculer la loi de X et la loi de Y , en utilisant les relations

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_1) + \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_2) + \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_3) = P_{i1} + P_{i2} + P_{i3},$$

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_j) + \mathbb{P}(X = x_2, Y = y_j) + \mathbb{P}(X = x_3, Y = y_j) = P_{1j} + P_{2j} + P_{3j}.$$

On examine ensuite si pour tous i, j on a $P_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$. C'est le cas pour les trois premières matrices mais pas pour la quatrième.

5. Calculer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, l'une de loi de binomiale de paramètres n et p , l'autre de paramètres m et p , où $p \in [0, 1]$ et m, n sont deux entiers.

Solution de l'exercice 5. On peut procéder de plusieurs façons.

1. On sait que la loi binomiale de paramètres n et p est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p .

Soient X_1, \dots, X_{n+m} des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p . Posons $Y = X_1 + \dots + X_n$ et $Z = X_{n+1} + \dots + X_{n+m}$. Alors Y et Z sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Leur somme, qui est $Y + Z = X_1 + \dots + X_{n+m}$, suit la loi $\mathcal{B}(n + m, p)$.

2. Soient Y et Z indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Les fonctions génératrices de Y et Z sont $G_Y(s) = (1 - p + sp)^n$ et $G_Z(s) = (1 - p + sp)^m$. Puisqu'elles sont indépendantes, la fonction génératrice de leur somme est

$$G_{Y+Z}(s) = \mathbb{E}[s^{Y+Z}] = \mathbb{E}[s^Y] \mathbb{E}[s^Z] = (1 - p + sp)^{n+m}.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi binomiale de paramètres $n + m$ et p .

6. Soient N_1, \dots, N_p des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Déterminer la loi de $N_1 + \dots + N_p$.

Solution de l'exercice 6.

7. Montrer que si la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes a la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, alors l'une des deux variables aléatoires est constante.

Solution de l'exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes non constantes. Puisque X n'est pas constante, il existe x_1 et x_2 distincts tels que $\mathbb{P}(X = x_1) > 0$ et $\mathbb{P}(X = x_2) > 0$. De même, il existe y_1 et y_2 distincts tels que $\mathbb{P}(Y = y_1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = y_2) > 0$. On peut supposer $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$. On a alors $x_1 + y_1 < x_1 + y_2 < x_2 + y_2$. Posons $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_1 + y_2$ et $z_3 = x_2 + y_2$. Alors $\mathbb{P}(X + Y = z_1) \geq \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_1)$ et, puisque X et Y sont indépendantes, $\mathbb{P}(X + Y = z_1) \geq \mathbb{P}(X = x_1) \mathbb{P}(Y = y_1) > 0$. De même, $\mathbb{P}(X + Y = z_2) > 0$ et $\mathbb{P}(X + Y = z_3) > 0$. Ainsi, il existe au moins trois valeurs distinctes que $X + Y$ peut prendre avec une probabilité strictement positive. Il s'ensuit que la loi de $X + Y$ n'est pas une loi de Bernoulli.

8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

a) On définit, pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$S_n(\omega) = \text{le nombre d'entiers } k \in \{1, \dots, n\} \text{ tels que } X_k(\omega) = 1.$$

Déterminer la loi de S_n . Les variables $(S_n)_{n \geq 1}$ sont-elles indépendantes ?

b) On définit, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$T_1(\omega) = \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) = 1\},$$

avec la convention $\min \emptyset = +\infty$. Calculer $\mathbb{P}(T_1 = +\infty)$ puis déterminer la loi de T_1 .

c) On définit maintenant, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$T_2(\omega) = \min\{n > T_1(\omega) : X_n(\omega) = 1\}.$$

Déterminer les lois de T_2 et de $T_2 - T_1$. Les variables T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il des variables T_1 et $T_2 - T_1$?

Solution de l'exercice 8.

9. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Soient a , b et c des réels. Déterminer la loi de $aX + bY + c$.

Solution de l'exercice 9.

10. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $N, X_1, X_2, \dots : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{N}$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que X_1, X_2, \dots suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On pose $R = X_1 + \dots + X_N$, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$R(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

Déterminer la loi de R .

Solution de l'exercice 10.