Ćwiczenia z granic ciągów od jednej z osób, która się do mnie zgłosiła. Chciał(a)byś w podobny, a być może bardziej szczegółowy sposób omówić omówić Twoje przykłady? Pisz na: korepetycje.intro23wertyk@gmail.com

1 Zadanie 1

(i) Aby dokładniej zobrazować rozważania, można zapisywać: $\lim_{n\to\infty}\frac{12n-1}{3n+7} = \lim_{n\to\infty}(\frac{12n+28}{3n+7}+\frac{-29}{3n+7}) = \lim_{n\to\infty}(4+\frac{-29}{3n+7}) = 4+0 = 4$. Zwykle stosujemy jednak taki zapis:
$\lim_{n\to\infty}\frac{12n-1}{3n+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}} = \frac{12}{3} = 4.$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{2} = 0$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+2n-7}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{7}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = +\infty$

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+10}{n+2} = \lim\frac{-n+\frac{10}{n}}{1+\frac{2}{n}} = -\infty$

(v) W tym przypadku można skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Jako, że dla dowolnego y zachodzi: $-1 < \sin(y) < 1$, ponadto $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^2+1} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0$ więc $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\log n)}{n^2+1} = 0$

(vi) W tym przypadku ponownie można skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Jako, że dla dowolnego y zachodzi: $\frac{-\pi}{2} < \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$, ponadto $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\pi}{2}}{2^n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{2^n} = 0$ więc $\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(n!)}{2^n} = 0$

(vii) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{\sqrt{9n^4+3n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-n^2+2n+1}}{\sqrt{9n^4+3n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4-n^2+2n+1}{9n^4+3n^3-1}}$
$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{9+3\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

(viii) W tym przypadku skorzystamy z przekształconej postaci wzoru skróconego mnożenia (nie możemy liczyć „wprost”, bez przekształenia, ponieważ mamy symbol nieoznaczony $\infty - \infty$):
$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$
Zatem: $\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+2n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2+2n)}{n+\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+\sqrt{n^2+2n}} = \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \frac{-2}{1+1} = -1$

(ix) Skorzystamy z przekształconego wzoru skróconego mnożenia: $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$.

$\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + n}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n^3+2n^2-n}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2+n}+\sqrt[3]{(n^3+2n^2+n)^2}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$

(x) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+2}{2}n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$

(xi) $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{2n+1}-7}{6\cdot 4^{n-1}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4\cdot 2^{2n-1}-7}{3\cdot 2^{2n-1}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{7}{3\cdot 2^{2n-1}}}{1+\frac{1}{3\cdot 2^{2n-1}}} = \frac{4}{1} = 4$

(xii) $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1}+3^{n-1}}{2^n-3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 1+3\frac{2^{n-1}}{3^n}}{(-1)\frac{3^n}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3+0}{-1+0} = -3$

(xiii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i-1}) =$ $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$

(xiv) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ $= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$

(xv) Mamy: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^4+3} = 0$. Jako, że $\exists n_0 : 2^n > n^4$ dla $n > n_0$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{2^n+3} = 0.$$

(xvi) $\lim_{n\to\infty}\frac{7^{\frac{n}{2}}-n^2}{2^n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{7}^n}{\sqrt{4}^n+1}-\frac{n^2}{2^n+1}\right) = \infty$
(w pierwszym ułamku dzielimy licznik i mianownik przez licznik; w drugim robimy jak w przypadku (xv))

(xvii) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-n!+2n!}{(n+2)!-n!} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2n!}{(n+2)!-n!})$ $= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2n!}{(n^2+3n+1)n!}) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2+3n+1}) = 1$

(xviii) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}})$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{e}$,

gdzie w ostatnim przejściu skorzystaliśmy ze wzoru $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

2 Zadanie 2

(a) Jako, że $0 < \frac{3^n}{n^n} < (\frac{3}{4})^n$ dla $n > 4$ i $\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{4})^n = 0$, więc $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^n} = 0$.

(b) Skorzystamy tutaj ze wzoru Stirlinga: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$. Mamy zatm: $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n n^n\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}{e^n n^n} = \infty$,
bo $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n n^n\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}{3^n n^n} = \infty$.

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n!}{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+n}) = 0$.