Algebra - geometria analityczna (w $\mathbb{R}^3$)

Korepetycje intro23wertyk Bartosz Pawliczak

2020

Materiały ogólnodostępne przygotowane przeze mnie:
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk_public

Pełne zestawienie materiałów (tylko dla kursantów):
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

Więcej informacji i inspiracji:
https://www.facebook.com/intro23wertyk

Iloczyn skalarny

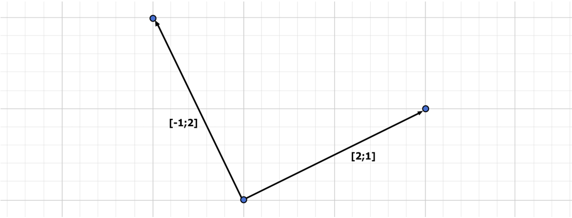
Jeżeli $\overline{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\overline{y} = [y_1, y_2, y_3]$, *to iloczynem skalarnym nazywamy* $< \overline{x}, \overline{y} >= \overline{x} \circ \overline{y} = [x_1, x_2, x_3] \circ [y_1, y_2, y_3] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.
Podstawowa własność: $\overline{x} \circ \overline{y} = ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}|| \cdot \cos\{\overline{x}, \overline{y}\}$.

Wyróżnia się jeszcze wiele innych własności iloczynu skalarnego, ale wskazana pozwala łatwo stwierdzić, że iloczyn skalarny jest zawsze nieujemny (dlaczego?), nie ma znaczenia kolejność wektorów, można wyciągać stałą przed iloczyn sklarany itp. Własności działają analogicznie dla wyższych wymiarów, nie tylko $\mathbb{R}^3$. Ponadto podstawowa własność iloczynu skalarnego w połączeniu z definicją pozwala na **wyliczenie kąta między wektorami**
(przyrównujemy: $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}|| \cdot \cos\{\overline{x}, \overline{y}\}$).

Wektory ortogonalne

$\overline{x} \perp \overline{y} \leftrightarrow \overline{x} \circ \overline{y} = 0$ *gdy* $\overline{x}, \overline{y} \neq \theta$ *(wektor zerowy)*

Z wykorzystaniem iloczynu skalarnego możemy też sprawdzać czy **wektory są prostopadłe**. Wystarczy sprawdzać warunek ortogonalności. Jeżeli chodzi o wektor zerowy, to jest on prostopadły do dowolnego innego.



Rysunek: Przykład wektorów prostopadłych w $\mathbb{R}^2$: $\overline{x} = [-1, 2], \overline{y} = [2, 1]$. Można też na ten przykład popatrzeć jak na wektory z $\mathbb{R}^3$: $\overline{x} = [-1, 2, 0]$, $\overline{y} = [2, 1, 0]$ (są one wówczas na „wysokości” 0.)

Iloczyn skalarny wykorzystujemy w zadaniach, w których mamy dane wektory i potrzebujemy policzyć kąt pomiędzy nimi. Co więcej, jeżeli w treści zadania podane są punkty, możemy na ich podstawie skonstruować wektory i również policzyć kąt pomiędzy nimi, np. zadania w stylu:

A, B, C to współrzędne trójkąta. Oblicz miarę $\angle ABC$.

Dany jest wektor $\overline{AB}$ i wektor $\overline{BC}$. Oblicz miarę $\angle\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym dwóch niezerowych wektorów $\overline{x}, \overline{y}$ nazywamy wektor $\overline{v} = \overline{x} \times \overline{y}$ taki, że:

- $||\overline{v}||$ - *pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overline{x}, \overline{y}$, tzn.* $||\overline{v}|| = ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}|| \cdot \sin \angle\{\overline{x}, \overline{y}\}$,
- $\overline{v} \perp \overline{x}$, $\overline{v} \perp \overline{y}$,
- *Orientacja wetorów $\overline{x}, \overline{y}, \overline{v}$ jest zgodna z orientacją przestrzeni. Ponadto jeżeli $\overline{x} = \theta$ lub $\overline{y} = \theta$, to $\overline{v} = \theta$.*

Iloczyn wektorowy pozwala zatem na wyprowadzanie wektora prostopadłego do dwóch wektorów/liczenie pola równoległoboku rozpiętego na dwóch wektorach. Jak liczyć?

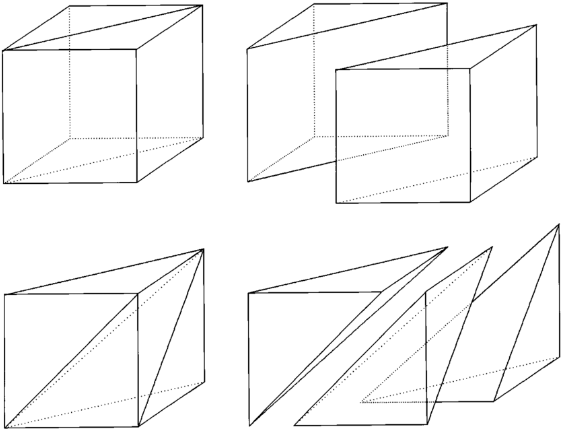
$\overline{x} \times \overline{y} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, czyli liczymy zwykły wyznacznik, podstawiając na końcu $\overline{i} = [1, 0, 0]$, $\overline{j} = [0, 1, 0]$, $\overline{k} = [0, 0, 1]$.

Iloczynu wektorowego używamy przy liczeniu pól równoległoboku, natomiast jeżeli mamy do policzenia **pole trójkąt - jest to połowa pola równoległoboku**. Stąd: mając dane wektory wychodzące z tego samego punktu, możemy obliczyć pole trójkąta rozpiętego na tych wektorach.

Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany trzech wektorów $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ w $\mathbb{R}^3$ (służący do liczenia objętości równoległościanu, sprawdzenia czy 4 punkty leżą na jednej płaszczyźnie, szukania odległości punktu od płaszczyzny) wyraża się wzorem: $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Warto zauważyć, że o ile iloczyn wektorowy dawał nam w wyniku wektor, o tyle iloczyn mieszany daje nam liczbę (wyznacznik macierzy). Zamiast naszych przykładowych wektorów x, y wziąłem wektory $\overline{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overline{b} = [b_1, b_2, b_3]$ oraz trzeci wektor - $\overline{c} = [c_1, c_2, c_3]$. Warto zauważyć, że mogąc obliczyć objętość, łatwo możemy wyznaczyć także wysokość czworościanu wyznaczonego przez dane punkty. Objętość czworościanu to $\frac{1}{6}$ objętości równoległościanu. Dlaczego?



Rysunek: Dlaczego równoległościan to 6 czworościanów?