Algebra - geometria analityczna (w $\mathbb{R}^3$)

Korepetycje intro23wertyk Bartosz Pawliczak

2021-02-07

Materiały ogólnodostępne przygotowane przeze mnie:
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk_public

Pełne zestawienie materiałów (tylko dla kursantów):
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

Więcej informacji i inspiracji:
https://www.facebook.com/intro23wertyk

Iloczyn skalarny

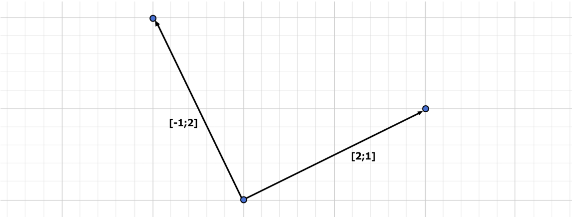
Jeżeli $\overline{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\overline{y} = [y_1, y_2, y_3]$, *to iloczynem skalarnym nazywamy* $< \overline{x}, \overline{y} >= \overline{x} \circ \overline{y} = [x_1, x_2, x_3] \circ [y_1, y_2, y_3] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.
Podstawowa własność: $\overline{x} \circ \overline{y} = ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}|| \cdot \cos\{\overline{x}, \overline{y}\}$.

Wyróżnia się jeszcze wiele innych własności iloczynu skalarnego, ale wskazana pozwala łatwo stwierdzić, że iloczyn skalarny jest zawsze nieujemny (dlaczego?), nie ma znaczenia kolejność wektorów, można wyciągać stałą przed iloczyn sklarany itp. Własności działają analogicznie dla wyższych wymiarów, nie tylko $\mathbb{R}^3$. Ponadto podstawowa własność iloczynu skalarnego w połączeniu z definicją pozwala na **wyliczenie kąta między wektorami**
(przyrównujemy: $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}|| \cdot \cos\{\overline{x}, \overline{y}\}$).

Wektory ortogonalne

$\overline{x} \perp \overline{y} \leftrightarrow \overline{x} \circ \overline{y} = 0$ *gdy* $\overline{x}, \overline{y} \neq \theta$ *(wektor zerowy)*

Z wykorzystaniem iloczynu skalarnego możemy też sprawdzać czy **wektory są prostopadłe**. Wystarczy sprawdzać warunek ortogonalności. Jeżeli chodzi o wektor zerowy, to jest on prostopadły do dowolnego innego.



Rysunek: Przykład wektorów prostopadłych w $\mathbb{R}^2$: $\overline{x} = [-1, 2], \overline{y} = [2, 1]$. Można też na ten przykład popatrzeć jak na wektory z $\mathbb{R}^3$: $\overline{x} = [-1, 2, 0]$, $\overline{y} = [2, 1, 0]$ (są one wówczas na „wysokości” 0.)

Iloczyn skalarny wykorzystujemy w zadaniach, w których mamy dane wektory i potrzebujemy policzyć kąt pomiędzy nimi. Co więcej, jeżeli w treści zadania podane są punkty, możemy na ich podstawie skonstruować wektory i również policzyć kąt pomiędzy nimi, np. zadania w stylu:
A, B, C to współrzędne trójkąta. Oblicz miarę $\angle ABC$.
Dany jest wektor $\overline{AB}$ i wektor $\overline{BC}$. Oblicz miarę $\angle\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym dwóch niezerowych wektorów $\overline{x}, \overline{y}$ nazywamy wektor $\overline{v} = \overline{x} \times \overline{y}$ taki, że:

- $||\overline{v}||$ - *pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overline{x}, \overline{y}$, tzn.* $||\overline{v}|| = ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}|| \cdot \sin \angle\{\overline{x}, \overline{y}\}$,
- $\overline{v} \perp \overline{x}$, $\overline{v} \perp \overline{y}$,
- *Orientacja wetorów $\overline{x}, \overline{y}, \overline{v}$ jest zgodna z orientacją przestrzeni. Ponadto jeżeli $\overline{x} = \theta$ lub $\overline{y} = \theta$, to $\overline{v} = \theta$.*

Iloczyn wektorowy pozwala zatem na wyprowadzanie wektora prostopadłego do dwóch wektorów/liczenie pola równoległoboku rozpiętego na dwóch wektorach. Jak liczyć?

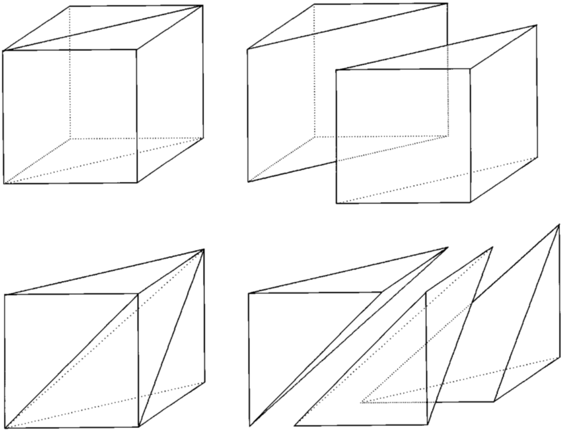
$\overline{x} \times \overline{y} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, czyli liczymy zwykły wyznacznik, podstawiając na końcu $\overline{i} = [1, 0, 0]$, $\overline{j} = [0, 1, 0]$, $\overline{k} = [0, 0, 1]$.

Iloczynu wektorowego używamy przy liczeniu pól równoległoboku, natomiast jeżeli mamy do policzenia **pole trójkąt - jest to połowa pola równoległoboku**. Stąd: mając dane wektory wychodzące z tego samego punktu, możemy obliczyć pole trójkąta rozpiętego na tych wektorach.

Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany trzech wektorów $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ w $\mathbb{R}^3$ (służący do liczenia objętości równoległościanu, sprawdzenia czy 4 punkty leżą na jednej płaszczyźnie, szukania odległości punktu od płaszczyzny) wyraża się wzorem: $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Warto zauważyć, że o ile iloczyn wektorowy dawał nam w wyniku wektor, o tyle iloczyn mieszany daje nam liczbę (wyznacznik macierzy). Zamiast naszych przykładowych wektorów x, y wziąłem wektory $\overline{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overline{b} = [b_1, b_2, b_3]$ oraz trzeci wektor - $\overline{c} = [c_1, c_2, c_3]$. Warto zauważyć, że mogąc obliczyć objętość, łatwo możemy wyznaczyć także wysokość czworościanu wyznaczonego przez dane punkty. Objętość czworościanu to $\frac{1}{6}$ objętości równoległościanu. Dlaczego?



Rysunek: Dlaczego równoległościan to 6 czworościanów?

Iloczynu mieszanego możemy użyć do liczenia objętości czworościanu, ale też sprawdzenia, czy wektory są współpłaszczyznowe. Jeżeli wyjdzie nam 0, tzn., że są.

Iloczynu mieszanego możemy użyć do liczenia objętości czworościanu, ale też sprawdzenia, czy wektory są współpłaszczyznowe. Jeżeli wyjdzie nam 0, tzn., że są. Przykład: sprawdź czy wektory $[-1, 3, 5]$,$[3, 2, 1]$,$[5, 1, 0]$ są współpłaszczyznowe. Jak to zrobić?

Iloczynu mieszanego możemy użyć do liczenia objętości czworościanu, ale też sprawdzenia, czy wektory są współpłaszczyznowe. Jeżeli wyjdzie nam 0, tzn., że są. Przykład: sprawdź czy wektory $[-1, 3, 5]$,$[3, 2, 1]$,$[5, 1, 0]$ są współpłaszczyznowe. Jak to zrobić?

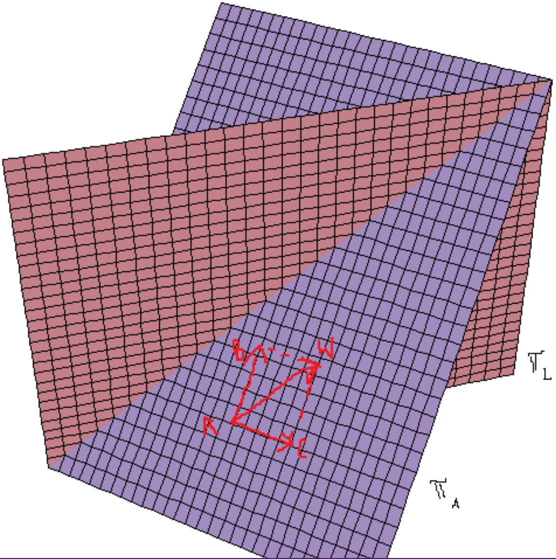
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Iloczynu mieszanego możemy użyć do liczenia objętości czworościanu, ale też sprawdzenia, czy wektory są współpłaszczyznowe. Jeżeli wyjdzie nam 0, tzn., że są. Przykład: sprawdź czy wektory $[-1,3,5]$,$[3,2,1]$,$[5,1,0]$ są współpłaszczyznowe. Jak to zrobić?

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+3\cdot1\cdot5+5\cdot3\cdot1-(5\cdot2\cdot5+1\cdot1\cdot(-1)+0) = 30-49 \neq 0$$

Płaszczyzna może być zdefiniowana jako kombincja liniowa wektorów.

Płaszczyzna może być zdefiniowana jako kombincja liniowa wektorów.



Płaszczyzna jako kombinacja liniowa wektorów/równanie wektorowe

Równanie wektorowe: $\overline{AW} = \alpha \cdot \overline{AB} + \beta \cdot \overline{AC}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Płaszczyzna jako kombinacja liniowa wektorów/równanie wektorowe

Równanie wektorowe: $\overline{AW} = \alpha \cdot \overline{AB} + \beta \cdot \overline{AC}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Rozpisując wektory wspórzędna po współrzędnej, tzn. $\overline{AB} = [a_1, b_1, c_1], \overline{AC} = [a_2, b_2, c_2]$ możemy zapisać **równanie parametyczne**: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y = y_0 + \alpha b_1 + \beta b_2 \\ z = z_0 + \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases}$

Płaszczyzna jako kombinacja liniowa wektorów/równanie wektorowe

Równanie wektorowe: $\overline{AW} = \alpha \cdot \overline{AB} + \beta \cdot \overline{AC}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Rozpisując wektory wspórzędna po współrzędnej, tzn. $\overline{AB} = [a_1, b_1, c_1], \overline{AC} = [a_2, b_2, c_2]$ możemy zapisać **równanie parametyczne**: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y = y_0 + \alpha b_1 + \beta b_2 \\ z = z_0 + \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases}$

Jeżeli obliczymy teraz iloczyn wektorowy $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$,to otrzymamy $\overline{n} = [A, B, C]$ - wektor normalny płaszczyny.

Równanie ogólne płaszczyzny

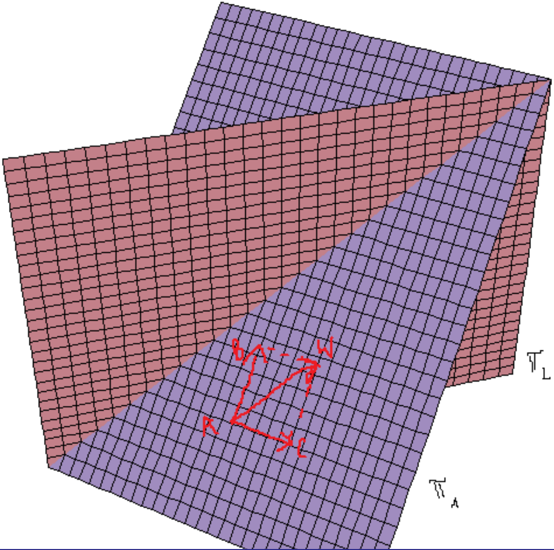
Równanie normalne płaszczyzny: $Ax + By + Cz + D = 0$

D jest tak dobrane, aby równanie ogólne było tożsame z równaniem normalnym: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Zobaczmy teraz na przykładach. Płaszczyzna przechodząca przez:

- punkty $A = (0, 2, 1), B = (1, 0, 3), C = (2, 1, -2)$ - w postaci parametrycznej wystarczy wziąć $A = [x_0, y_0, z_0]$, $\overline{AB} = [a_1, b_1, c_1], \overline{AC} = [a_2, b_2, c_2]$. W celu obliczenia postaci ogólnej, należy wyliczyć $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$.
- punkt $P = (1, 0, -1)$ której wektor normalny to $\overline{n} = [1, -1, 3]$. Tutaj mamy prawie od razu postać ogólną (z postaci wektorowej). A co z postacią parametryczną? Wiemy, że $\overline{AB} \circ \overline{n} = 0$ i $\overline{AC} \circ \overline{n} = 0$. Trzeba wybrać 2 dowolne wektory, które spełniają te warunki.

Kąt między płaszczyznami $\cos\alpha = \frac{\overline{n_1} \circ \overline{n_2}}{||\overline{n_1}||\,||\overline{n_2}||}$



Równanie kierunkowe prostej $l : \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$ opisuje prostą l przechodzącą przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległą do wektora $[v_x, v_y, v_z]$.

Równanie kierunkowe prostej $l : \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$ opisuje prostą l przechodzącą przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległą do wektora $[v_x, v_y, v_z]$.

Równanie parametryczne prostej: $l : \begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Równanie kierunkowe prostej $l: \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$ opisuje prostą l przechodzącą przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległą do wektora $[v_x, v_y, v_z]$.

Równanie parametryczne prostej: $l: \begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Przykład: dane są punkty $A = (0, 2, 2)$, $B = (1, 0, -2)$; jak będzie wyglądało równanie ogólne i parametryczne?

Podstawowa teoria: znając wektory normalne płaszczyzn oraz wektory kierunkowe prostych, szukane miary kątów pomiędzy dwiema płaszczyznami, dwiema prostymi lub pomiędzy prostą i płaszczyzną można łatwo wyliczyć wykorzystując podane wcześniej własności.

Podstawowa teoria: znając wektory normalne płaszczyzn oraz wektory kierunkowe prostych, szukane miary kątów pomiędzy dwiema płaszczyznami, dwiema prostymi lub pomiędzy prostą i płaszczyzną można łatwo wyliczyć wykorzystując podane wcześniej własności.

Odległość punktu od płaszczyzny

Odległość punktu (x_0, y_0, z_0) *od płaszczyzny* $Ax + By + Cz + D = 0$ *wyraża się wzorem:*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu P od prostej przechodzącej przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\overline{v}$ wyraża się wzorem $\frac{||\overline{PP_0}\times\overline{v}||}{||\overline{v}||}$.

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu P od prostej przechodzącej przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\overline{v}$ wyraża się wzorem $\frac{||\overline{PP_0} \times \overline{v}||}{||\overline{v}||}$.

Własność ta wynika z faktu, że jeżeli punkt nie leży na prostej, to możemy zbudować równoległobok, którego wysokość jest poszukiwaną odległością. Uwaga! Jeżeli 2 proste mają ten sam wektor kierunkowy, to można tego wzoru używać do liczenia odległości pomiędzy prostymi.

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu P od prostej przechodzącej przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\overline{v}$ wyraża się wzorem $\frac{||\overline{PP_0} \times \overline{v}||}{||\overline{v}||}$.

Własność ta wynika z faktu, że jeżeli punkt nie leży na prostej, to możemy zbudować równoległobok, którego wysokość jest poszukiwaną odległością. Uwaga! Jeżeli 2 proste mają ten sam wektor kierunkowy, to można tego wzoru używać do liczenia odległości pomiędzy prostymi.

Odległość dwóch płaszczyzn

Odległość między płaszczyznami $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ *i* $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ *jest równa* $\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu P od prostej przechodzącej przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\overline{v}$ wyraża się wzorem $\frac{||\overline{PP_0} \times \overline{v}||}{||\overline{v}||}$.

Własność ta wynika z faktu, że jeżeli punkt nie leży na prostej, to możemy zbudować równoległobok, którego wysokość jest poszukiwaną odległością. Uwaga! Jeżeli 2 proste mają ten sam wektor kierunkowy, to można tego wzoru używać do liczenia odległości pomiędzy prostymi.

Odległość dwóch płaszczyzn

Odległość między płaszczyznami $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ *i* $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ *jest równa* $\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Dlaczego rozważamy płaszczyzny o tym samym wektorze normalnym?

Oblicz odległość punktu $P = (1, -1, -2)$ od prostej $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Oblicz odległość punktu $P = (1, -1, -2)$ od prostej $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.
Rozwiązanie: z treści zadania wynika, że $P = (1, -1, 2)$,

$P_0 = (-3, -2, 8)$, $\overline{v} = [3, 2, -2]$, a my potrzebujemy obliczyć

Oblicz odległość punktu $P = (1, -1, -2)$ od prostej $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.
Rozwiązanie: z treści zadania wynika, że $P = (1, -1, 2)$,
$P_0 = (-3, -2, 8)$, $\overline{v} = [3, 2, -2]$, a my potrzebujemy obliczyć $\frac{||\overline{PP_0} \times \overline{v}||}{||\overline{v}||}$.
Zatem: $\overline{PP_0} = [-4, -1, 10]$,czyli

$$[-4, -1, 10] \times [3, 2, -2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \dots$$

Rzut wektora na prostą

Rzut wektora $\overline{u}$ na prostą o wektorze kierunkowym $\overline{v}$ możemy wyliczyć w następujący sposób: $\frac{\overline{u} \circ \overline{v}}{\overline{v} \circ \overline{v}} \cdot \overline{v}$.

Rzut wektora na prostą

Rzut wektora $\overline{u}$ na prostą o wektorze kierunkowym $\overline{v}$ możemy wyliczyć w następujący sposób: $\frac{\overline{u} \circ \overline{v}}{\overline{v} \circ \overline{v}} \cdot \overline{v}$.

Przykład: Znajdź rzut wektora $\overline{a} = [1, 2, 3]$ na oś wektora $\overline{b} = [3, 2, 1]$.

Rzut wektora na prostą

Rzut wektora $\overline{u}$ na prostą o wektorze kierunkowym $\overline{v}$ możemy wyliczyć w następujący sposób: $\frac{\overline{u} \circ \overline{v}}{\overline{v} \circ \overline{v}} \cdot \overline{v}$.

Przykład: Znajdź rzut wektora $\overline{a} = [1, 2, 3]$ na oś wektora $\overline{b} = [3, 2, 1]$.
Rozwiązanie: $\frac{[1,2,3] \circ [3,2,1]}{[3,2,1] \circ [3,2,1]} \cdot [3, 2, 1] =$

Rzut wektora na prostą

Rzut wektora $\overline{u}$ na prostą o wektorze kierunkowym $\overline{v}$ możemy wyliczyć w następujący sposób: $\frac{\overline{u} \circ \overline{v}}{\overline{v} \circ \overline{v}} \cdot \overline{v}$.

Przykład: Znajdź rzut wektora $\overline{a} = [1, 2, 3]$ na oś wektora $\overline{b} = [3, 2, 1]$.
Rozwiązanie: $\frac{[1,2,3] \circ [3,2,1]}{[3,2,1] \circ [3,2,1]} \cdot [3, 2, 1] = \frac{3+4+3}{9+4+1} \cdot [3, 2, 1] =$

Rzut wektora na prostą

Rzut wektora $\overline{u}$ na prostą o wektorze kierunkowym $\overline{v}$ możemy wyliczyć w następujący sposób: $\frac{\overline{u}\circ\overline{v}}{\overline{v}\circ\overline{v}} \cdot \overline{v}$.

Przykład: Znajdź rzut wektora $\overline{a} = [1, 2, 3]$ na oś wektora $\overline{b} = [3, 2, 1]$.
Rozwiązanie: $\frac{[1,2,3]\circ[3,2,1]}{[3,2,1]\circ[3,2,1]} \cdot [3, 2, 1] = \frac{3+4+3}{9+4+1} \cdot [3, 2, 1] = \frac{10}{14} \cdot [3, 2, 1] = \frac{5}{7} \cdot [3, 2, 1] = [\frac{15}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7}]$.

Znaleźć rzut punktu $A = (4, -3, 1)$ na płaszczyznę $x + 2y - z - 3 = 0$.

Znaleźć rzut punktu $A = (4, -3, 1)$ na płaszczyznę $x + 2y - z - 3 = 0$. Okazuje się, żę mamy wszystkie potrzebne narzędzia do rozwiązania takiego zadania. Po pierwsze wektor normalny płaszczyzny $[1, 2, -1]$ jest równoległy do prostej, która będzie rzutem z punktu A. Jaka jest postać tej prostej?

Znaleźć rzut punktu $A = (4, -3, 1)$ na płaszczyznę $x + 2y - z - 3 = 0$. Okazuje się, żę mamy wszystkie potrzebne narzędzia do rozwiązania takiego zadania. Po pierwsze wektor normalny płaszczyzny $[1, 2, -1]$ jest równoległy do prostej, która będzie rzutem z punktu A. Jaka jest postać tej prostej?
Postać parametryczna to $[t + 4, 2t - 3, -t + 1]$. Co dalej?

Znaleźć rzut punktu $A = (4, -3, 1)$ na płaszczyznę $x + 2y - z - 3 = 0$. Okazuje się, żę mamy wszystkie potrzebne narzędzia do rozwiązania takiego zadania. Po pierwsze wektor normalny płaszczyzny $[1, 2, -1]$ jest równoległy do prostej, która będzie rzutem z punktu A. Jaka jest postać tej prostej?

Postać parametryczna to $[t + 4, 2t - 3, -t + 1]$. Co dalej?

Należy wyznaczyć przecięcie prostej z płaszczyzną, tzn. podstawić $x = t + 4$, $y = 2t - 3$, $z = -t + 1$ do równania płaszczyzny. Po wyliczeniu t można podstawić go do równania prostej.

Jak obliczyć rzut prostej na płaszczyznę?

Jak obliczyć rzut prostej na płaszczyznę?
Najpierw liczymy punkt przecięcia prostej z płaszczyzną, a następnie rzut punktu z prostej na płasczyznę. Mając te dwa punkty można już obliczyć równanie prostej.

Jak sprawdzić, czy punkty leżą po tej samej stronie płaszczyzny?

Jak sprawdzić, czy punkty leżą po tej samej stronie płaszczyzny?
Punkty (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) leżą po tej samej stronie płaszczyzny, gdy $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ i $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ są tego samego znaku.