Pochodna funkcji

Korepetycje intro23wertyk Bartosz Pawliczak

2020

Materiały ogólnodostępne przygotowane przeze mnie:
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk_public

Pełne zestawienie materiałów (tylko dla kursantów):
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

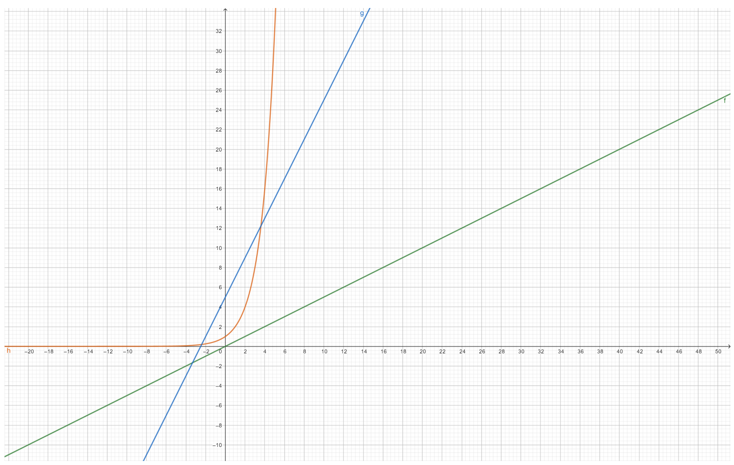
Więcej informacji i inspiracji:
https://www.facebook.com/intro23wertyk

Streszczenie

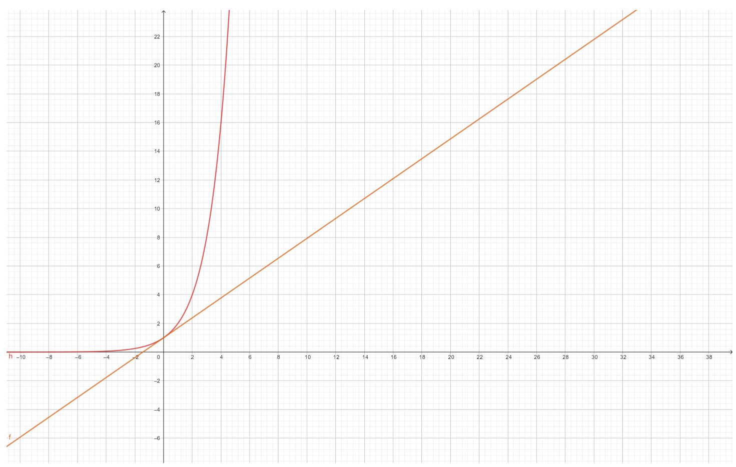
Omówienie podstawowych definicji zwiazanych z pochodną (funkcji jednej zmiennej). Aby dobrze rozumieć ten materiał, rekomendowane jest przerobienie zagdnienia: *granica funkcji*.

1 Wstęp, interpretacja

Pochodna funkcji to coś, co informuje nas jak szybko zmienia się wartość funkcji. Może być tak, że jedna funkcja rośnie cały czas szybciej od drugiej. Może też być tak, że w jednym punkcie funkcja rośnie szybciej, a w innym wolniej od drugiej. Spójrzmy na wykresy i zastanówmy się, co oznacza, że jedna funkcja rośnie szybciej od innej.



Rysunek 1: Mamy tutaj wykresy trzech funkcji: $h(x) = 2^x$, $g(x) = 2x + 5$, $f(x) = \frac{1}{2}x$. Funkcja $g(x)$ w dowolnym miejscu rośnie szybciej niż funkcja $f(x)$ (jest bardziej „stroma”). Wynika to z faktu, że $g(x)$ ma współczynnik kierunkowy 2, czyli przesuwając się o 1 w prawo, wartość funkcji rośnie o 2. Analogicznie funkcja $f(x)$ rośnie o pół jednostki, gdy my przesuwamy się o jedną jednostkę. Pochodna funkcji $g(x)$ w dowolnym punkcie jest równa 2, pochodna funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie jest równa $\frac{1}{2}$. Co z funkcją $h(x) = 2^x$? Raz rośnie szybciej, raz wolniej, więc pochodna będzie się zmieniała w zależności od tego jaki punkt na funkcji będziemy sprawdzać.



Rysunek 2: Teraz skupimy się na funkcji $h(x) = 2^x$. Zanim odpowiemy jak wygląda pochodna w ogólności, rozważmy jeden punkt, np. $x = 0$, $y = 2^0 = 1$. Przez punkt $(0, 1)$ można poprowadzić styczną $f(x) = \ln(2)x+1$ do funkcji $h(x) = 2^x$. Jak łatwo się domyślić, pochodna funkcji $h(x)$ w punkcie $x = 0$ jest równa $\ln(2)$. Ile wynosi pochodna funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie? Pochodną oznaczamy przez apostrof i możemy zapisać $h'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$. Dlaczego akurat tak? Wyjaśnimy to w dalszej części tych materiałów.

2 Definicja pochodnej, jak ją rozumieć

2.1 Formalna definicja

Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $(x_0 - a, x_0 + a)$, $a > 0$. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy liczbę określoną wzorem:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

jeśli granica ta istnieje. Możemy też stosować analogiczną granicę:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2.2 Jak to rozumieć?

Jeżeli znasz już interpretację granicy, to wiesz, że pochodna jest po prostu przyrostem względnym (różnicą pomiędzy wartościami dzieloną przez różnicę między argumentami) dla dowolnie małej różnicy pomiędzy argumentami. Sam przyrost względny nazywa się **ilorazem różnicowym**:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Czyli pochodna to iloraz różnicowy dla $\Delta x \to 0$.

2.3 Obliczanie pochodnej z definicji

Obliczanie pochodnej z definicji to tak naprawdę liczenie granicy funkcji. Co prawda, gdy już nabierzemy wprawy, stosuje się szybsze metody (i do nich już nie potrzeba liczenia granic), ale warto wiedzieć skąd te szybsze metody się biorą.

Najpierw obliczymy pochodną ze stałej, czyli np. $f'(x)$ dla $f(x) = 5$. W ogólności: $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Obliczenia: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{c - c}{x - x_0} = 0$. Zatem pochodna z dowolnej stałej w dowolnym punkcie jest równa 0.

Teraz rozważmy $g(x) = x^n$. Obliczamy pochodną: $g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + x^{n-3} x_0 + \ldots + x^0 x_0^{n-1})}{x - x_0} = n x_0^{n-1}$.

Po pierwsze skorzystaliśmy tutaj ze wzoru na różnicę n-tych potęg, po drugie zastosowaliśmy wiedzę z arytmetyki granic. Wyliczanie tego typu przypadków nie jest niezbędne w wyliczaniu samych pochodnych ze wzorów, choć stanowi ważny element teorii.

Wzór na pochodną $(x^n)' = nx^{n-1}$ jest bardzo istotny, ale warto od razu połączyć ten wzór z podstawowymi własnościami arytematyki pochodnych. Mianowicie:

1. Suma funkcji: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2. Wyciąganie stałej c przed pochodną: $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
3. Iloczyn funkcji: $(f \cdot g)'(x) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
4. Iloraz funkcji $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Dzięki połączeniu powyższej teorii, bez problemu wyliczamy już pochodną funkcji liniowej, np. $(2x+5)' = (2x)' + (5)' = 2 \cdot (x)' + (5)' = 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0 = 2$. Jest to funkcja liniowa z początkowego przykładu. Jeżeli ktoś jest bardziej dociekliwy, to zachęcam sprawdzić jaki jest wzór na styczną do funkcji (pochodna stanowi współczynnik kierunkowy tej stycznej). Co więcej, możemy wyliczyć pochodną dowolnego wieomianu: $(3x^5 + 3x^2 + 5x + 8)' = 5 \cdot 3x^4 + 3 \cdot 2x + 5 + 0$. Wyliczanie pochodnej iloczynu/ilorazu jest nieco bardziej skomplikowane i wrócimy do tych wzorów przy wyliczaniu kolejnych przykładów.

Na ten moment nie ma potrzeby, aby wyliczać więcej pochodnych z definicji (jeżeli jednak jest taka potrzeba, to możemy indywidualnie omówić więcej przykładów). W ramach ćwiczeń warto jednak, abyś obliczył/obliczyła np. pochodną z funkcji $h(x) = a^x$ (licząc granicę). Powinno wyjść $h'(x) = a^x \ln(a)$. Przy obliczaniu należy skorzystać z własności $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

3 Oznaczenia, własności i inne sformułowania, które mogą się pojawiać

Po pierwsze: nie zawsze stosuje się zapis z apostrofem. Jeżeli liczymy pochodną funkcji $f'(x_0)$, to możemy to też zapisać $\frac{df}{dx}(x_0)$ i w tym kontekście oznacza dokładnie to samo.

Czasami w treści zadań pojawia się pytanie czy funkcja jest różniczkowalna, tzn. czy istnieje pochodna funkcji w dowolnym punkcie, gdzie ta funkcja jest określona. Tutaj warto znać jedną z podstawowych własności:*Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna, to f jest ciągła w* x_0. Warto podkreślić, że nie działa to w drugą stronę,tzn. np. funkcja $|x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x = 0$. Z naszej własności możemy wywnioskować natomiast, że gdy funkcja jest nieciągła, to nie jest różniczkowalna.

4 Wzory i ćwiczenia

Jeżeli wiemy już jak działają pochodne, warto przeskoczyć krok dalej i po prostu skorzystać z gotowych wzorów. Tak jak wyliczyliśmy wcześniej $(x^n)' = nx^{n-1}$, można wyliczyć pochodne innych funkcji. Otrzymujemy tabelkę z podstawowymi wzorami, która widoczna jest poniżej. Aby mieć pełny wachlarz możliwości, potrzebne są nam jeszcze wzory na arytmetykę (wymienione poprzednio: wyciąganie stałej przed pochodną, pochodna sumy, iloczynu, ilorazu) oraz liczenie pochodnej funkcji złożonej (przy bardziej skomplikowanych przypadkach stosuje się jeszcze wzór na pochodną funkcji odwrotnej, ale nie będziemy go tutaj omawiać).
Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej: Niech funkcja f będzie różniczkowalna w x_0 *i niech g będzie różniczkowalna w* $y_0 = f(x_0)$. *Wtedy funkcja* $f \circ g$ *jest różniczkowalna w* x_0 *oraz* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

1. $(C)' = 0$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(x)' = 1$

4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $(a^x)' = a^x \ln a$

7. $(e^x)' = e^x$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

10. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $(arctgx)' = \frac{1}{x^2+1}$

17. $(arcctgx)'^{7} = -\frac{1}{x^2+1}$

Rysunek 3: Wzory najczęściej wykorzystywane przy obliczaniu pochodnych

Przejdźmy teraz do zadań (najpierw przelicz samemu, a w razie wątpliwości prześledź krok po kroku):

1. $(\arctan(\frac{1}{x}))' = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (\frac{1}{x})' = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$

2. $(\cos^3(2x - \frac{\pi}{6}))' = 3\left(\cos^2(2x - \frac{\pi}{6})\right) \cdot \left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right)'$
$= 3 \cdot \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(-\sin(2x - \frac{\pi}{6})\right) \cdot 2$
$= -6\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\left(\sin(2x - \frac{\pi}{6})\right)$

3. $(x^3\cos(\pi x))' = 3x^2\cos(\pi x) + x^3(\cos^2(\pi x))' = \ldots$

4. $(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x\ln x})' = \ldots$

I jeżeli chodzi o wstęp, to tyle... Warto teraz ćwiczyć i rozwijać się dalej, możliwości jest bardzo wiele. Powodzenia