# Algebra - zadania z wielomianów

## Korepetycje intro23wertyk Bartosz Pawliczak

#### 2020

Materiały ogólnodostępne przygotowane przeze mnie: https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk\_public

Pełne zestawienie materiałów (tylko dla kursantów): https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

Więcej informacji i inspiracji: https://www.facebook.com/intro23wertyk





# Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli ułamek nieskracalny  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = W(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , to  $p|a_0, q|a_n$ .

Wyjaśnienie na przykładzie: jeżeli mamy wielomian W(x) o współczynnikach rzeczywistch, to może on mieć pierwiastki zarówno wymierne, jak i niewymierne. Jeżeli ma pierwiastki wymierne, to jesteśmy w stanie je odgadnąć. Dla przykładu: dla  $W(x)=2x^3+3x+5$  patrzymy na ostatni i pierwszy wyraz ( $a_0=5$ ,  $a_3=2$ ). Następnie ustalamy dzielniki

- 5:  $p \in \{-5, -1, 1, 5\}$ ;

W ostatnim kroku dzielimy  $\frac{p}{q} \in \{-5, \frac{-5}{2}, -1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 5\}$  (wszystkie kombinacje). Jeżeli istnieje pierwiastek wymierny, to właśnie go wypisaliśmy.



## Zadanie 1 - wymierne pierwiastki wielomianu

Wypisać wszystkie możliwe pierwiastki całkowite/wymierne wielomianów:

$$1 6x^4 + 17x^2 + 11x + 36;$$

$$2x^8 - \frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - x + 1;$$

$$3x^3 - x^6 + x^2 + 120;$$

$$4 x^3 - x^6 + x^2 + 0,6x$$

#### Rozwiązanie:

Warto przekształcić wielomian, aby  $a_4=1$ , tzn.  $6x^4+17x^2+11x+36=6(x^4+\frac{17}{6}x^2+\frac{11}{6}x+6)$  i rozważać tylko wielomian  $x^4+\frac{17}{6}x^2+\frac{11}{6}x+6$ . Mamy  $a_0=6$ ,  $a_4=1$ . Zatem:  $p\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}, q\in-1,1$ . Stąd mamy następujące możliwości:  $\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\};$ 

Jak będzie wyglądało  $p=?, q=?, \frac{p}{q}=?$  w kolejnych przykładach?



#### Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian  $W(x) \in \mathbb{C}[x]$  ma tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień.

Co to oznacza? Jeżeli mamy  $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ , to w zbiorze liczb zespolonych istnieją dokładnie 3 takie liczby  $x_1,x_2,x_3$ , że  $W(x_1)=W(x_2)=W(x_3)=0$ . W jaki sposób możemy je znajdować? Zgadując jeden z pierwiastków i dzieląc wielomian, rozwiązując równanie kwadratowe lub wykonując pierwiastkowanie liczb zespolonych. Można też przekształcić wyrażenie i otrzymać pierwiastek bezpośrednio.

#### Zadanie 2 - znaleźć wszystkie pierwiastki

Znaleźć wszystkie (rzeczywiste i zespolone) pierwiastki wielomianów:

- 1  $x^4 x^2 2$ ;
- $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$ ;
- $x^4 4x^3 + 14x^2 4x + 13$ , wiedząc że jednym z pierwiastków jest  $x_1 = i$ ;
- $4 x^4 + 2$ .

#### Rozwiązanie:

- **II** Warto podstawić  $t=x^2$  i traktować to początkowo jak równanie kwadratowe...
- **2** Znajdujemy pierwiastek, np.  $x_1 = -1$ . To, że W(-1) = 0 oznacza, że możemy podzielić  $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$  przez wielomian x 1 i rozpatrywać wielomian niższego stopnia...
- Jeżeli *i* jest pierwiastkiem, to -i też, a to oznacza, że wyjściowy wielomian jest podzielny przez  $(x i)(x + i) = x^2 i^2 = x^2 + 1...$
- Szukamy pierwiastków, czyli takich x, że  $x^4 + 2 = 0$ . Po przekształceniu  $x^4 = -2$ . Dalej pierwiastkowanie zespolone.