Algebra - zadania z wielomianów

Korepetycje intro23wertyk Bartosz Pawliczak

2020

Materiały ogólnodostępne przygotowane przeze mnie:
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk_public

Pełne zestawienie materiałów (tylko dla kursantów):
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

Więcej informacji i inspiracji:
https://www.facebook.com/intro23wertyk

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *jest pierwiastkiem wielomianu* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = W(x) \in \mathbb{Z}[x]$, *to* $p | a_0$, $q | a_n$.

Wyjaśnienie na przykładzie: jeżeli mamy wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistch, to może on mieć pierwiastki zarówno wymierne, jak i niewymierne. Jeżeli ma pierwiastki wymierne, to jesteśmy w stanie je odgadnąć. Dla przykładu: dla $W(x) = 2x^3 + 3x + 5$ patrzymy na ostatni i pierwszy wyraz ($a_0 = 5$, $a_3 = 2$). Następnie ustalamy dzielniki

- 5: $p \in \{-5, -1, 1, 5\}$;
- 2: $q \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

W ostatnim kroku dzielimy $\frac{p}{q} \in \{-5, \frac{-5}{2}, -1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 5\}$ (wszystkie kombinacje). Jeżeli istnieje pierwiastek wymierny, to właśnie go wypisaliśmy.

Zadanie 1 - wymierne pierwiastki wielomianu

Wypisać wszystkie możliwe pierwiastki całkowite/wymierne wielomianów:

1. $6x^4 + 17x^2 + 11x + 36;$
2. $2x^8 - \frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - x + 1;$
3. $3x^3 - x^6 + x^2 + 120;$
4. $x^3 - x^6 + x^2 + 0,6x.$

Rozwiązanie:

1. Warto przekształcić wielomian, aby „pierwszy" i „ostatni" współczynnik nie miały wspólnych dzielników, tzn. $6x^4 + 17x^2 + 11x + 36 = 6(x^4 + \frac{17}{6}x^2 + \frac{11}{6}x + 6)$ i rozważać tylko wielomian $x^4 + \frac{17}{6}x^2 + \frac{11}{6}x + 6$. Mamy $a_0 = 6, a_4 = 1$. Zatem: $p \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$,$q \in \{-1, 1\}$. Stąd mamy następujące możliwości: $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$;

Jak będzie wyglądało $p =?, q =?, \frac{p}{q} =?$ w kolejnych przykładach?

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian $W(x) \in \mathbb{C}[x]$ ma tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień.

Co to oznacza? Jeżeli mamy $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, to w zbiorze liczb zespolonych istnieją dokładnie 3 takie liczby x_1, x_2, x_3, że $W(x_1) = W(x_2) = W(x_3) = 0$. W jaki sposób możemy je znajdować? Zgadując jeden z pierwiastków i dzieląc wielomian, rozwiązując równanie kwadratowe lub wykonując pierwiastkowanie liczb zespolonych. Można też przekształcić wyrażenie i otrzymać pierwiastek bezpośrednio.

Zadanie 2 - znaleźć wszystkie pierwiastki

Znaleźć wszystkie (rzeczywiste i zespolone) pierwiastki wielomianów:

1. $x^4 - x^2 - 2$;
2. $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$;
3. $x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13$, *wiedząc że jednym z pierwiastków jest* $x_1 = i$;
4. $x^4 + 2$.

Rozwiązanie:

1. Warto podstawić $t = x^2$ i traktować to początkowo jak równanie kwadratowe...
2. Znajdujemy pierwiastek, np. $x_1 = -1$. To, że $W(-1) = 0$ oznacza, że możemy podzielić $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$ przez wielomian $x + 1$ i rozpatrywać wielomian niższego stopnia...
3. Jeżeli i jest pierwiastkiem, to $-i$ też, a to oznacza, że wyjściowy wielomian jest podzielny przez $(x - i)(x + i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1$...
4. Szukamy pierwiastków, czyli takich x, że $x^4 + 2 = 0$. Po przekształceniu $x^4 = -2$. Dalej pierwiastkowanie zespolone...