Analiza - całki

Korepetycje.intro23wertyk@gmail.com Bartosz Pawliczak

15.01.2021

Materiały ogólnodostępne przygotowane przeze mnie:
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk_public

Pełne zestawienie materiałów (tylko dla kursantów):
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

Więcej informacji i inspiracji:
https://www.facebook.com/intro23wertyk

Całka nieoznaczona

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $x \in I$.

Całka nieoznaczona

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $x \in I$.

Znając teorię dotyczącą różniczkowania (liczenia pochodnych), możemy w łatwy sposób liczyć całki z danych funkcji. Aby liczyć całki tak jak wymagane jest to na studiach, konieczna jest wiedza z zakresu pochodnych!

Całka nieoznaczona

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $x \in I$.

Znając teorię dotyczącą różniczkowania (liczenia pochodnych), możemy w łatwy sposób liczyć całki z danych funkcji. Aby liczyć całki tak jak wymagane jest to na studiach, konieczna jest wiedza z zakresu pochodnych! Przykładowe wzory:

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C,$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

Całka nieoznaczona

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $x \in I$.

Znając teorię dotyczącą różniczkowania (liczenia pochodnych), możemy w łatwy sposób liczyć całki z danych funkcji. Aby liczyć całki tak jak wymagane jest to na studiach, konieczna jest wiedza z zakresu pochodnych! Przykładowe wzory:

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C,$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

Przykładowo: obliczenie całki $\int 2x^3 \, dx = 2 \cdot \frac{1}{4} x^4 + C$, bo $(2 \cdot \frac{1}{4} x^4 + C)' = \frac{1}{2}(x^4)' + (C)' = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 + 0 = 2x^3$. Dopisujemy $+C$, ponieważ zarówno $\frac{1}{4}x^4 - 5$, jak i np. $\frac{1}{4}x^4 + 16$ będzie odpowiednią funkcją pierwotną.

Własność liniowości całki

Jeżeli f i g mają funkcję pierwotną na I, to

1. $\int (f \pm g)(x)\, dx = \int f(x) dx \pm \int g(x)\, dx$
2. $\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$, *gdzie* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Własność liniowości całki

Jeżeli f i g mają funkcję pierwotną na I, to

1. $\int (f \pm g)(x)\, dx = \int f(x) dx \pm \int g(x)\, dx$
2. $\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$, *gdzie* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Przykład ten sam, co ostatnio, ale policzony w oparciu o wzory: $\int 2x^3\, dx = 2\int x^3\, dx = 2(\frac{1}{4}x^4 + C) = \frac{1}{2}x^4 + 2C$, co dla $D = 2C$ jest równe: $\frac{1}{2}x^4 + D$. Jako, że C i D są dowolnymi stałymi, można zatem po prostu zawsze w wyniku całkowania pisać $+C$, nie potrzeba dopisywać współczynników przed C.

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to
$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to
$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$

Najczęściej całkowanie przez części przedstawia się za pomocą dodatkowych zmiennych, które występują pomiędzy równościami w formie komentarza. Jeżeli te zmienne oznaczylibyśmy jako v i u, to mnemotechnicznie wzór można zapisać jako $\int(v'u) = uv - \int(vu')$.

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to
$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$.

Najczęściej całkowanie przez części przedstawia się za pomocą dodatkowych zmiennych, które występują pomiędzy równościami w formie komentarza. Jeżeli te zmienne oznaczylibyśmy jako v i u, to mnemotechnicznie wzór można zapisać jako $\int(v'u) = uv - \int(vu')$. Przejdźmy od razu do przykładu:

$\int \arctan(x)\,dx =$

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to
$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$.

Najczęściej całkowanie przez części przedstawia się za pomocą dodatkowych zmiennych, które występują pomiędzy równościami w formie komentarza. Jeżeli te zmienne oznaczylibyśmy jako v i u, to mnemotechnicznie wzór można zapisać jako $\int(v'u) = uv - \int(vu')$.
Przejdźmy od razu do przykładu:

$$\int \arctan(x)\,dx = \int 1 \cdot \arctan(x)\,dx =$$

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$.

Najczęściej całkowanie przez części przedstawia się za pomocą dodatkowych zmiennych, które występują pomiędzy równościami w formie komentarza. Jeżeli te zmienne oznaczylibyśmy jako v i u, to mnemotechnicznie wzór można zapisać jako $\int (v'u) = uv - \int (vu')$.
Przejdźmy od razu do przykładu:

$$\int \arctan(x)\,dx = \int 1 \cdot \arctan(x)\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = \arctan(x) & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to
$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$

Najczęściej całkowanie przez części przedstawia się za pomocą dodatkowych zmiennych, które występują pomiędzy równościami w formie komentarza. Jeżeli te zmienne oznaczylibyśmy jako v i u, to mnemotechnicznie wzór można zapisać jako $\int(v'u) = uv - \int(vu')$.
Przejdźmy od razu do przykładu:

$$\int \arctan(x)\,dx = \int 1\cdot\arctan(x)\,dx = \left|\begin{array}{cc} u=\arctan(x) & u'=\frac{1}{1+x^2} \\ v'=1 & v=x \end{array}\right| =$$
$$\arctan(x)\cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$.

Najczęściej całkowanie przez części przedstawia się za pomocą dodatkowych zmiennych, które występują pomiędzy równościami w formie komentarza. Jeżeli te zmienne oznaczylibyśmy jako v i u, to mnemotechnicznie wzór można zapisać jako $\int(v'u) = uv - \int(vu')$.
Przejdźmy od razu do przykładu:

$$\int \arctan(x)\,dx = \int 1 \cdot \arctan(x)\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = \arctan(x) & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

$\arctan(x) \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$, gdzie ostatnią całkę możemy policzyć, zauważając, że licznik jest pochodną mianownika, tzn. $(1+x^2)' = 2x$, czyli $(\log(1+x^2))' = \frac{2x}{1+x^2}$.

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne na przedziale I, to
$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$

Najczęściej całkowanie przez części przedstawia się za pomocą dodatkowych zmiennych, które występują pomiędzy równościami w formie komentarza. Jeżeli te zmienne oznaczylibyśmy jako v i u, to mnemotechnicznie wzór można zapisać jako $\int(v'u) = uv - \int(vu')$.
Przejdźmy od razu do przykładu:

$$\int \arctan(x)\,dx = \int 1\cdot\arctan(x)\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arctan(x) & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| =$$

$\arctan(x)\cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$, gdzie ostatnią całkę możemy policzyć, zauważając, że licznik jest pochodną mianownika, tzn. $(1+x^2)' = 2x$, czyli $(\log(1+x^2))' = \frac{2x}{1+x^2}$.Ostatecznie:
$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$

Łatwe i proste?

Łatwe i proste? Jeżeli przerabiasz to pierwszy raz, to pewnie nie. Dlatego warto ćwiczyć! Internet jest pełen przykładów, zacznijmy jednak od czegoś prostego (krok po krok - czy widzisz dlaczego metoda całkowania przez części się tu sprawdzi, jakie u i v wybrać, jak otrzymać wynik końcowy):

$\int x^5 \log(x)\, dx =$

Łatwe i proste? Jeżeli przerabiasz to pierwszy raz, to pewnie nie. Dlatego warto ćwiczyć! Internet jest pełen przykładów, zacznijmy jednak od czegoś prostego (krok po krok - czy widzisz dlaczego metoda całkowania przez części się tu sprawdzi, jakie u i v wybrać, jak otrzymać wynik końcowy):

$$\int x^5 \log(x)\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = \log(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^5 & v = \frac{x^6}{6} \end{array} \right| =$$

Łatwe i proste? Jeżeli przerabiasz to pierwszy raz, to pewnie nie. Dlatego warto ćwiczyć! Internet jest pełen przykładów, zacznijmy jednak od czegoś prostego (krok po krok - czy widzisz dlaczego metoda całkowania przez części się tu sprawdzi, jakie u i v wybrać, jak otrzymać wynik końcowy):

$$\int x^5 \log(x)\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = \log(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^5 & v = \frac{x^6}{6} \end{array}\right| = \log(x) \cdot \frac{x^6}{6} - \int \frac{x^5}{6}\,dx = \frac{x^6 \log(x)}{6} - \frac{x^6}{36} + C$$

Łatwe i proste? Jeżeli przerabiasz to pierwszy raz, to pewnie nie. Dlatego warto ćwiczyć! Internet jest pełen przykładów, zacznijmy jednak od czegoś prostego (krok po krok - czy widzisz dlaczego metoda całkowania przez części się tu sprawdzi, jakie u i v wybrać, jak otrzymać wynik końcowy):

$$\int x^5 \log(x)\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = \log(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^5 & v = \frac{x^6}{6} \end{array} \right| = \log(x) \cdot \frac{x^6}{6} - \int \frac{x^5}{6} dx = \frac{x^6 \log(x)}{6} - \frac{x^6}{36} + C$$

A jak podeszlibyśmy do obliczenia całki: $\int xe^x dx = ?$

Całkowanie przez podstawienie

Niech f będzie ciągła na (a, b). Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną na (α, β) i g odwzorowuje (α, β) na (a, b). Wtedy
$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)\,dx$.

Całkowanie przez podstawienie

Niech f będzie ciągła na (a, b). Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną na (α, β) i g odwzorowuje (α, β) na (a, b). Wtedy $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)\, dx$.

Metodę tą wykorzystujemy, kiedy liczymy całki funkcji złożonych. Istotne jest wybranie takiego podstawienia, w którym całość wzoru zostanie zamieniona z jednej zmiennej na drugą. Samo podstawienie niekoniecznie musi być czymś, co występuje we wzorze. Często skupiamy się bardziej na tym, aby pochodna z podstawienia gdzieś we wzorze została sprytnie zastąpiona.

Całkowanie przez podstawienie

Niech f będzie ciągła na (a, b). Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną na (α, β) i g odwzorowuje (α, β) na (a, b). Wtedy $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)\,dx$.

Metodę tą wykorzystujemy, kiedy liczymy całki funkcji złożonych. Istotne jest wybranie takiego podstawienia, w którym całość wzoru zostanie zamieniona z jednej zmiennej na drugą. Samo podstawienie niekoniecznie musi być czymś, co występuje we wzorze. Często skupiamy się bardziej na tym, aby pochodna z podstawienia gdzieś we wzorze została sprytnie zastąpiona. Przykład: $\int cos^3(x)sin(x)\,dx$. Co tutaj podstawimy?

Całkowanie przez podstawienie

Niech f będzie ciągła na (a, b). Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną na (α, β) i g odwzorowuje (α, β) na (a, b). Wtedy $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)\, dx$.

Metodę tą wykorzystujemy, kiedy liczymy całki funkcji złożonych. Istotne jest wybranie takiego podstawienia, w którym całość wzoru zostanie zamieniona z jednej zmiennej na drugą. Samo podstawienie niekoniecznie musi być czymś, co występuje we wzorze. Często skupiamy się bardziej na tym, aby pochodna z podstawienia gdzieś we wzorze została sprytnie zastąpiona. Przykład: $\int cos^3(x)sin(x)\, dx$. Co tutaj podstawimy? $t = \cos(x)$, czyli $dt = -sin(x)dx$. Istotne jest to, że możemy podstawić całe dt, ponieważ w naszym wzorze występuje $sin(x)$.

Całkowanie przez podstawienie

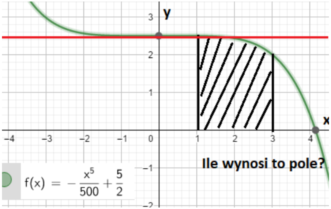
Niech f będzie ciągła na (a, b). Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną na (α, β) i g odwzorowuje (α, β) na (a, b). Wtedy $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)\, dx$.

Metodę tą wykorzystujemy, kiedy liczymy całki funkcji złożonych. Istotne jest wybranie takiego podstawienia, w którym całość wzoru zostanie zamieniona z jednej zmiennej na drugą. Samo podstawienie niekoniecznie musi być czymś, co występuje we wzorze. Często skupiamy się bardziej na tym, aby pochodna z podstawienia gdzieś we wzorze została sprytnie zastąpiona. Przykład: $\int cos^3(x) sin(x)\, dx$. Co tutaj podstawimy? $t = \cos(x)$, czyli $dt = -sin(x)dx$. Istotne jest to, że możemy podstawić całe dt, ponieważ w naszym wzorze występuje $sin(x)$. Zatem $\int cos^3(x) sin(x)\, dx = \int t^3\, (-dt) = -\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$

Całkowanie przez podstawienie

Niech f będzie ciągła na (a, b). Załóżmy, że g ma ciągłą pochodną na (α, β) i g odwzorowuje (α, β) na (a, b). Wtedy $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)\,dx$.

Metodę tą wykorzystujemy, kiedy liczymy całki funkcji złożonych. Istotne jest wybranie takiego podstawienia, w którym całość wzoru zostanie zamieniona z jednej zmiennej na drugą. Samo podstawienie niekoniecznie musi być czymś, co występuje we wzorze. Często skupiamy się bardziej na tym, aby pochodna z podstawienia gdzieś we wzorze została sprytnie zastąpiona. Przykład: $\int cos^3(x)sin(x)\,dx$. Co tutaj podstawimy? $t = \cos(x)$, czyli $dt = -sin(x)dx$. Istotne jest to, że możemy podstawić całe dt, ponieważ w naszym wzorze występuje $sin(x)$. Zatem
$\int cos^3(x)sin(x)\,dx = \int t^3\,(-dt) = -\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$
PAMIĘTAJMY, ABY WRÓCIĆ DO PIERWOTNEJ ZMIENNEJ!
$= \frac{-\cos^4(x)}{4} + C.$



Rysunek: Całki interpretujemy najczęściej jako pole. Istnieje wiele rodzajów całek, ale klasyczna całka oznaczona na przedziale (a, b) oznacza pole pomiędzy wykresem funkcji, a osią OX. Np. jeżeli chcielibyśmy wyznaczyć pole zaznaczonego na czarno fragmentu na powyższym rysunku, moglibyśmy go oszacować przez linię na wysokości $2,5 = \frac{5}{2}$, stąd wiemy, że pole wynosi mniej niż $(3-1) \cdot \frac{5}{2} = 5$. Czy da się obliczyć dokładną wartość pola?

Okazuje się, że jeżeli mamy daną konkretną funkcję, to wyliczenie wartości pola nie jest trudne...

Okazuje się, że jeżeli mamy daną konkretną funkcję, to wyliczenie wartości pola nie jest trudne... o ile potrafimy całkować. W naszym przypadku dana była funkcja $f(x) = -\frac{x^5}{500} + \frac{5}{2}$, więc pole zakreskowanego fragmentu to DOKŁADNIE $\int_1^3 -\frac{x^5}{500} + \frac{5}{2}\, dx$. Jak mamy rozumieć ten zapis? Całka od 1 do 3, czyli od wartości całki nieoznaczonej w punkcie 3 odejmujemy wartość całki nieoznaczonej w punkcie 1.