Liczby zespolone

Korepetycje intro23wertyk Bartosz Pawliczak

2020

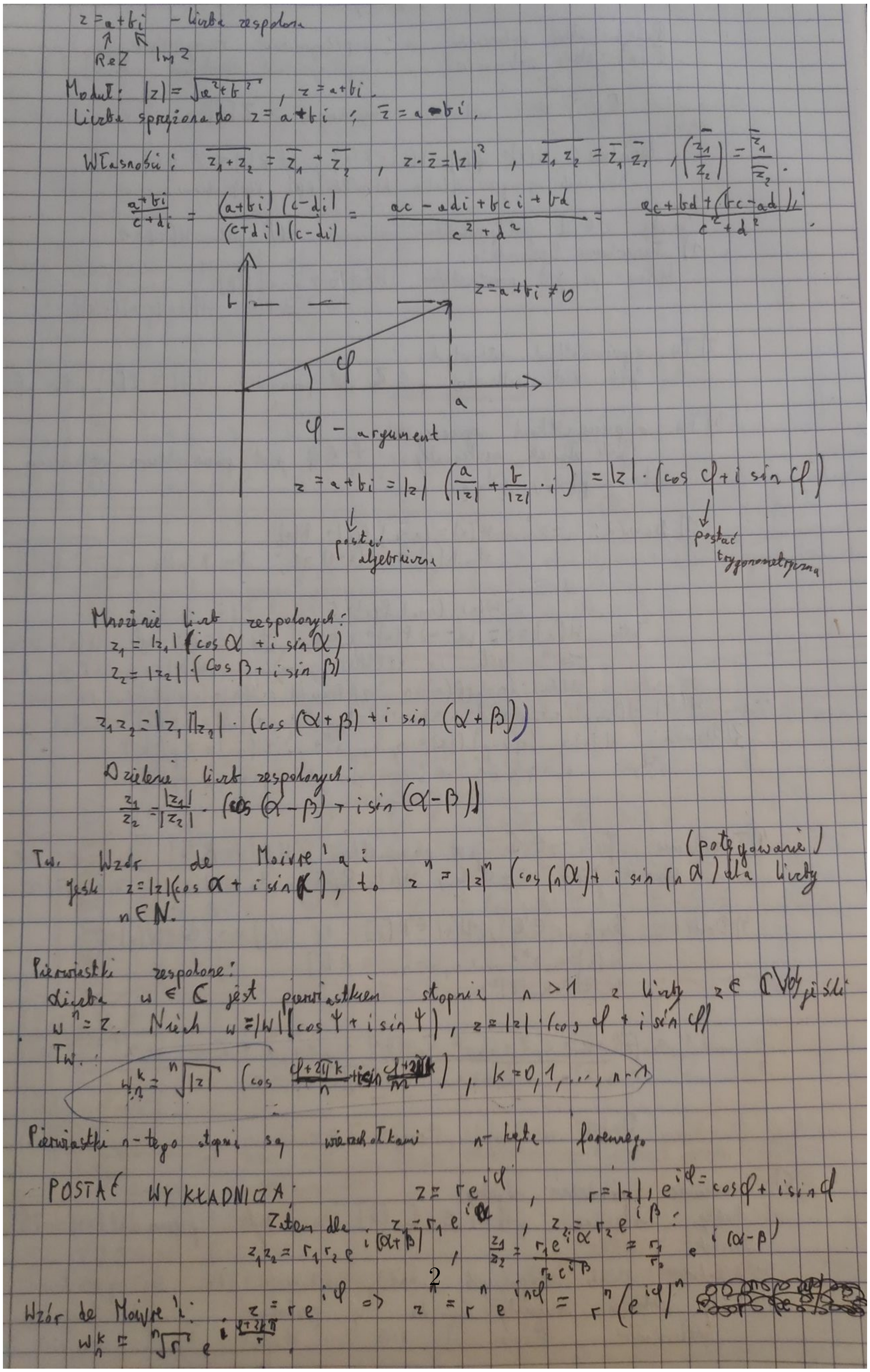
Więcej informacji i inspiracji:
https://www.facebook.com/intro23wertyk
Pełne zestawienie materiałów:
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

Streszczenie

Omówienie podstawowych definicji zwiazanych z liczbami zespolonymi.

1 Definicje, wzory

Na poniższym zdjęciu znajdują się wszelkie niezbędne wzory i definicje umożliwiające operowanie na liczbach zesolonych, wykonywanie zadań dotyczących tego zagadnienia. Liczby te nazywamy „zespolonymi", ponieważ zawierają parę (tak jak znane już liczby $\mathbb{R}^2$ na układzie współrzędnych). Wszystkie liczby rzeczywiste umiejscawiamy na osi rzeczywistej, czyli odpowiedniku „starej osi x". Dodatkowo pojawia się jednak słynne oznaczenie i , które oznacza jednostkę „urojoną", czyli odpowiednik jednostki na „starej osi y". Liczba i powiązana jest z liczbami rzeczywistymi warunkiem $i^2 = -1$. Warto jednocześnie dodać, że każda liczba rzeczywista, czyli np. 2, 5, 10, π, 7.2425, -1.5 jest także liczbą zespoloną, tylko wówczas drugi człon jest równy 0. Idąc tym tokiem rozumowania, możemy zapisać $2 = 2 + 0i$ itd. Skoro liczby zespolone przedstawiamy tak jak liczby $\mathbb{R}^2$, czy wektory, można na nich stosować analogiczne działania i korzystać z wielu intuicyjnych własności związanych z wektorami.



$z = a + bi$ – liczba zespolona

$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$

Moduł: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z = a + bi$.

Liczba sprzężona do $z = a + bi$: $\bar{z} = a - bi$.

Własności: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

$z = a + bi \neq 0$

b, a, φ

φ – argument

$$z = a + bi = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} \cdot i\right) = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

postać algebraiczna

postać trygonometryczna

Mnożenie liczb zespolonych:

$z_1 = |z_1| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$z_2 = |z_2| (\cos \beta + i \sin \beta)$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

Dzielenie liczb zespolonych:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$$

Tw. Wzór de Moivre'a: (potęgowanie)

Jeśli $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, to $z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$ dla liczby $n \in \mathbb{N}$.

Pierwiastki zespolone:

Liczba $w \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem stopnia $n > 1$ z liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, jeśli $w^n = z$. Niech $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$, $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Tw.:

$$w_n^k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Pierwiastki n-tego stopnia są wierzchołkami n-kąta foremnego.

POSTAĆ WYKŁADNICZA: $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Zatem dla $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2 e^{i\beta}$:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha + \beta)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{i\beta}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha - \beta)}$$

Wzór de Moivre'a: $z = re^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (e^{i\varphi})^n$

$$w_n^k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Rysunek 1: Podstawowe informacje - liczby zespolone

2 Przykłady, zadania

2.1 Zadania rozgrzewkowe

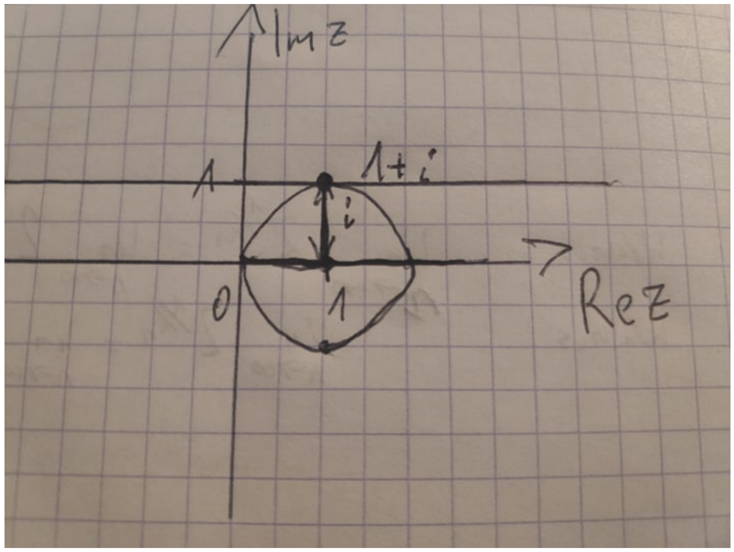
Oblicz wartość wyrażeń: $8.32+5i-4+\pi-2.5\pi+3i$, $(2+5i)(4+3i)$, $(5+2.5i)^3$.

2.2 Interpretacja geometryczna

Po przeliczeniu kilku podstawowych zadań, takich jak dodawanie/odejmowanie liczb zespolonych, warto zastanowić się nad interpretacją geometryczną i znaczeniem poszczególnych własności. Zadanie:

Znajdź liczbę zespoloną z taką, że $|z-1|=1$ *oraz* $arg(z-i)=0$

możemy rozwiązać na 2 sposoby. Po pierwsze geometrycznie, po drugie obliczeniowo. Czy masz jakiś pomysł jak można to zrobić? Zastanów się, następnie sprawdź kolejną stronę.



Rysunek 2: Interpretacja: przecięcie się okręgu o środku w 1 i promieniu 1 oraz prostej $z = i$ (dlaczego tak?)

Jeżeli z jakiegoś powodu nie chcemy narysować szkicu lub metoda jest z góry narzucona, możemy to zrobić w następujący sposób: z warunku

$$arg(z - i) = 0$$

wynika, że przy oznaczeniach

$$z = a + bi = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

mamy

$$z - i = a + bi - i = a + (b-1)i = |a + (b-1)i|(\cos(0) + i\sin(0)) = |a + (b-1)i| \cdot 1.$$

Po prawej stronie mamy wartość rzeczywistą (moduł), więc po $a + (b-1)i$ też musi być rzeczywiste. Stąd: $b - 1 = 0 \implies b = 1$. Wiemy już, że nasza liczba $z = a + 1 \cdot i$. Mamy jeszcze drugi warunek: $|z - 1| = 1$. Zatem:

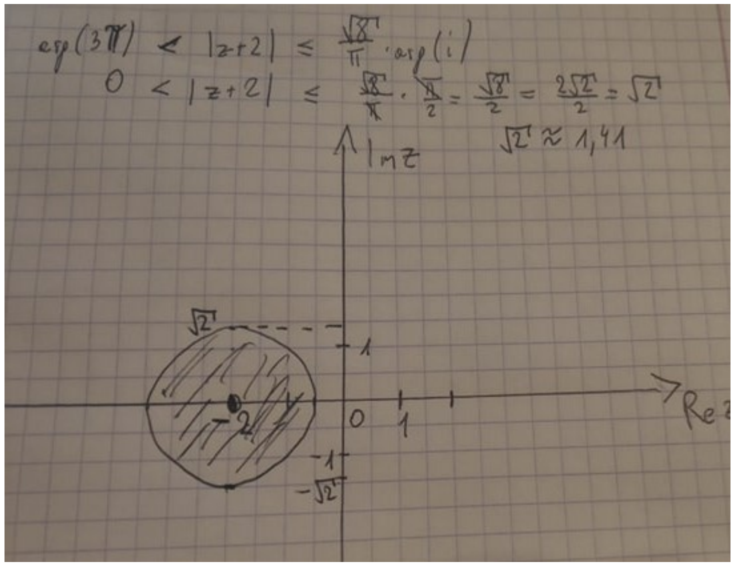
$$|z - 1| = |a + i - 1| = \sqrt{(a-1)^2 + 1^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 1} = 1,$$

czyli $(a-1)^2 = 0 \implies a = 1$.

Ostatecznie:

$$z = 1 + i.$$

Teraz skupmy się na samym przedstawianiu na płaszczyźnie.



Rysunek 3: Czasami wystarczy przekształcić i można już łatwo przedstawić na płaszczyźnie zespolonej dany zbiór

Ciąg dalszy w wersji dla kursantów...