Logika - porządki, łańcuchy

Korepetycje.intro23wertyk@gmail.com Bartosz Pawliczak

2021-02-13

Materiały ogólnodostępne przygotowane przeze mnie:
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk_public

Pełne zestawienie materiałów (tylko dla kursantów):
https://github.com/bpawliczak/intro23wertyk

Więcej informacji i inspiracji:
https://www.facebook.com/intro23wertyk

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X,

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X, $\forall(x \in X)(x \leq x)$

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X, $\forall(x \in X)(x \leq x)$
- *słaboantysymetryczna,*

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja

- *zwrotna na X,* $\forall(x \in X)(x \leq x)$
- *słaboantysymetryczna,* $(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X, $\forall (x \in X)(x \leq x)$
- *słaboantysymetryczna,* $(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
- *przechodnia,*

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja

- *zwrotna na X, $\forall(x \in X)(x \leq x)$*
- *słaboantysymetryczna, $(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$*
- *przechodnia, $(\forall x, y, z)(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.*

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X, $\forall(x \in X)(x \leq x)$
- *słaboantysymetryczna*, $(\forall x, y)(x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y)$
- *przechodnia*, $(\forall x, y, z)(x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

W ten sposób możemy porządkować elementy zbioru, ale czy wszystkie są porównywalne?

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X, $\forall(x \in X)(x \leq x)$
- *słaboantysymetryczna*, $(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
- *przechodnia*, $(\forall x, y, z)(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

W ten sposób możemy porządkować elementy zbioru, ale czy wszystkie są porównywalne? Otóż nie. W zbiorze częściowo uporządkowanym może być sytuacja, kiedy nie jesteśmy w stanie porównać dwóch elementów.

Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X, $\forall(x \in X)(x \leq x)$
- *słaboantysymetryczna,* $(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
- *przechodnia,* $(\forall x, y, z)(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

W ten sposób możemy porządkować elementy zbioru, ale czy wszystkie są porównywalne? Otóż nie. W zbiorze częściowo uporządkowanym może być sytuacja, kiedy nie jesteśmy w stanie porównać dwóch elementów. Jeżeli natomiast dodamy do tego spójność, czyli relację $R \subset X \times X$ taką, że $(\forall x, y \in X)(xRy \vee yRx)$, to wówczas **relacja porządku**

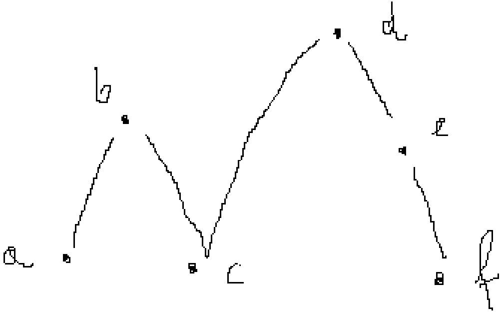
Częściowy porządek

$(X, \leq)$ *nazywamy częściowym porządkiem, jeśli jest to relacja*

- *zwrotna na* X, $\forall(x \in X)(x \leq x)$
- *słaboantysymetryczna*, $(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
- *przechodnia*, $(\forall x, y, z)(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

W ten sposób możemy porządkować elementy zbioru, ale czy wszystkie są porównywalne? Otóż nie. W zbiorze częściowo uporządkowanym może być sytuacja, kiedy nie jesteśmy w stanie porównać dwóch elementów. Jeżeli natomiast dodamy do tego spójność, czyli relację $R \subset X \times X$ taką, że $(\forall x, y \in X)(xRy \vee yRx)$, to wówczas **relacja porządku jest liniowa**.

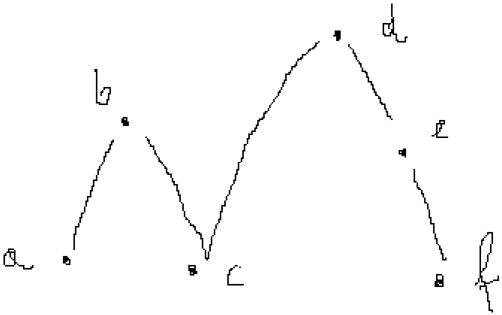
Relację częściowego porządku często przedstawia się a pomocą diagramów Hassego:



Rysunek: Przykład: relacja podzielności, inkluzji są porządkami częściowymi.

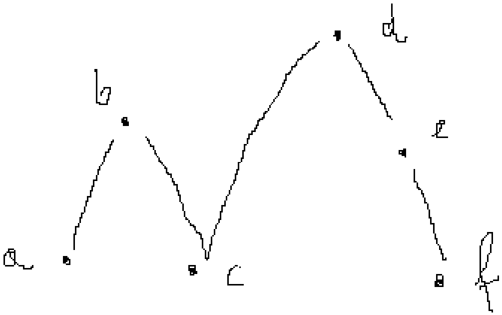
Częściowe porządki (X, R_1), (Y, R_2) są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja f taka, że $\forall x, y \in X : xR_1y \Leftrightarrow f(x)R_2f(y)$. Co to oznacza w kontekście diagramu? Co będzie jeśli weźmiemy podzbiór częściowego porządku?

Relację częściowego porządku często przedstawia się a pomocą diagramów Hassego:



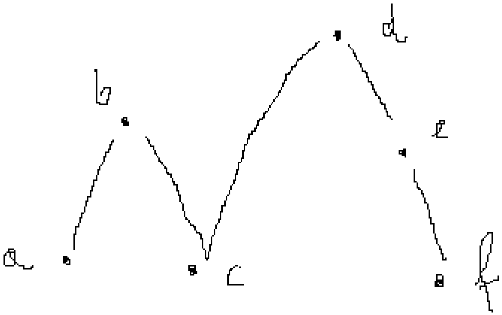
Rysunek: Przykład: relacja podzielności, inkluzji są porządkami częściowymi. Częściowe porządki (X, R_1), (Y, R_2) są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja f taka, że $\forall x, y \in X : xR_1y \Leftrightarrow f(x)R_2f(y)$. Co to oznacza w kontekście diagramu? Co będzie jeśli weźmiemy podzbiór częściowego porządku?

Relację częściowego porządku często przedstawia się a pomocą diagramów Hassego:



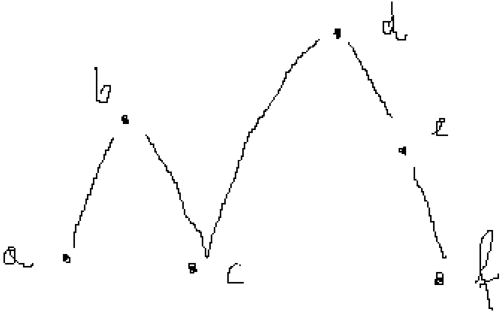
Rysunek: Przykład: relacja podzielności, inkluzji są porządkami częściowymi. Częściowe porządki (X, R_1), (Y, R_2) są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja f taka, że $\forall x, y \in X : xR_1y \Leftrightarrow f(x)R_2f(y)$. Co to oznacza w kontekście diagramu? Co będzie jeśli weźmiemy podzbiór częściowego porządku?

Relację częściowego porządku często przedstawia się a pomocą diagramów Hassego:



Rysunek: Przykład: relacja podzielności, inkluzji są porządkami częściowymi.

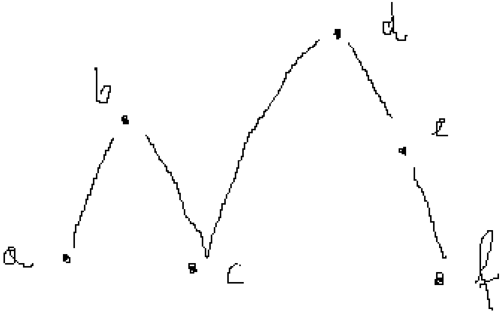
Relację częściowego porządku często przedstawia się a pomocą diagramów Hassego:



Rysunek: Przykład: relacja podzielności, inkluzji są porządkami częściowymi.

Częściowe porządki (X, R_1), (Y, R_2) są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja f taka, że $\forall x, y \in X : xR_1y \Leftrightarrow f(x)R_2f(y)$.

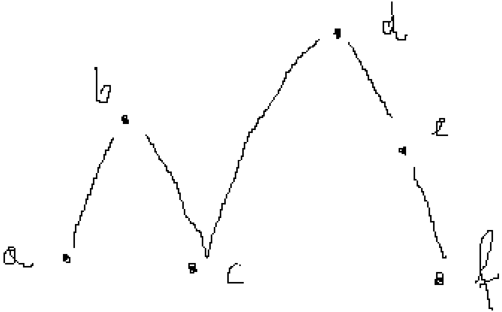
Relację częściowego porządku często przedstawia się a pomocą diagramów Hassego:



Rysunek: Przykład: relacja podzielności, inkluzji są porządkami częściowymi.

Częściowe porządki (X, R_1), (Y, R_2) są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja f taka, że $\forall x, y \in X : xR_1y \Leftrightarrow f(x)R_2f(y)$. Co to oznacza w kontekście diagramu?

Relację częściowego porządku często przedstawia się a pomocą diagramów Hassego:

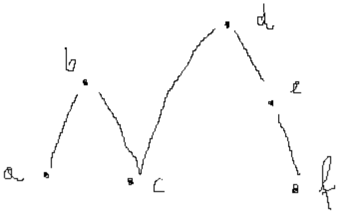


Rysunek: Przykład: relacja podzielności, inkluzji są porządkami częściowymi.

Częściowe porządki (X, R_1), (Y, R_2) są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja f taka, że $\forall x, y \in X : xR_1y \Leftrightarrow f(x)R_2f(y)$. Co to oznacza w kontekście diagramu? Co będzie jeśli weźmiemy podzbiór częściowego porządku?

Niech $(X, \leq)$ będzie częściowym porządkiem. Wtedy:

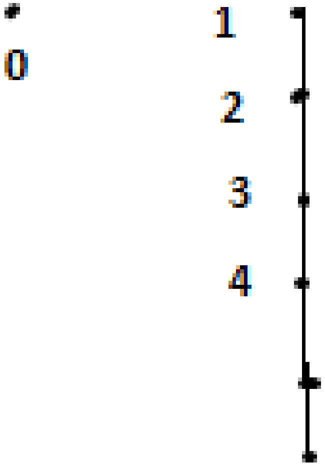
- m jest $\leq$-najmniejszy jeśli $\forall x \in X : m \leq x$;
- M jest $\leq$-najwiekszy, jeśli $\forall x \in X : x \leq M$;
- m jest $\leq$-minimalny, jeśli $\neg(\exists x \in X)(x \leq m \wedge x \neq a)$;
- M jest $\leq$-maksymalny, jeśli $\neg(\exists x \in X)(M \leq x \wedge x \neq M)$.



Rysunek: Ile mamy tu elementów największych, najmniejszych, minimalnych, maksymalnych?

Podaj przykład Diagramu Hassego, w którym będą 2 elementy maksymalne, 1 minimalny, 0 największych, 0 najmniejszych.

Podaj przykład Diagramu Hassego, w którym będą 2 elementy maksymalne, 1 minimalny, 0 największych, 0 najmniejszych.



Łańcuchy i antyłańcuchy

Niech $(X, \leq)$ *będzie częściowym porządkiem. Wówczas*

- $L \in X$ *nazywamy łańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$,

Łańcuchy i antyłańcuchy

Niech $(X, \leq)$ *będzie częściowym porządkiem. Wówczas*

- $L \in X$ *nazywamy łańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$,
- $A \in X$ *nazywamy antyłańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in A)(a \leq b \Rightarrow a = b)$.

Łańcuchy i antyłańcuchy

Niech $(X, \leq)$ *będzie częściowym porządkiem. Wówczas*

- $L \in X$ *nazywamy łańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$,
- $A \in X$ *nazywamy antyłańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in A)(a \leq b \Rightarrow a = b)$.

Intuicyjnie, zbiór jest łańcuchem gdy da się porównać każde 2 jego elementy.

Łańcuchy i antyłańcuchy

Niech $(X, \leq)$ będzie częściowym porządkiem. Wówczas

- *$L \in X$ nazywamy łańcuchem, jeśli $\forall(a, b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$,*
- *$A \in X$ nazywamy antyłańcuchem, jeśli $\forall(a, b \in A)(a \leq b \Rightarrow a = b)$.*

Intuicyjnie, zbiór jest łańcuchem gdy da się porównać każde 2 jego elementy.
Każdy zbiór jednoelementowy jest

Łańcuchy i antyłańcuchy

Niech $(X, \leq)$ *będzie częściowym porządkiem. Wówczas*

- $L \in X$ *nazywamy łańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$,
- $A \in X$ *nazywamy antyłańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in A)(a \leq b \Rightarrow a = b)$.

Intuicyjnie, zbiór jest łańcuchem gdy da się porównać każde 2 jego elementy.
Każdy zbiór jednoelementowy jest łańcuchem

Łańcuchy i antyłańcuchy

Niech $(X, \leq)$ będzie częściowym porządkiem. Wówczas

- $L \in X$ *nazywamy łańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$,
- $A \in X$ *nazywamy antyłańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in A)(a \leq b \Rightarrow a = b)$.

Intuicyjnie, zbiór jest łańcuchem gdy da się porównać każde 2 jego elementy.
Każdy zbiór jednoelementowy jest łańcuchem i jednocześnie antyłańcuchem.

Łańcuchy i antyłańcuchy

Niech $(X, \leq)$ *będzie częściowym porządkiem. Wówczas*

- $L \in X$ *nazywamy łańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in L)(a \leq b \vee b \leq a)$,
- $A \in X$ *nazywamy antyłańcuchem, jeśli* $\forall(a, b \in A)(a \leq b \Rightarrow a = b)$.

Intuicyjnie, zbiór jest łańcuchem gdy da się porównać każde 2 jego elementy.
Każdy zbiór jednoelementowy jest łańcuchem i jednocześnie antyłańcuchem.
Porządek cześciowy jest porządkiem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy antyłańcuch w tym porządku jest jednoelementowy

Jak podchodzić do dowodów?

Jak podchodzić do dowodów?
Korzystamy z definicji. Wykorzystujemy intuicje, aby ukierunkować rozważania. Jeżeli dowodzimy równoważności obiektów, to trzeba pokazać wynikanie jednej z charakterystycznych cech pierwszego obiektu w drugi obiekt.

Jak podchodzić do dowodów?
Korzystamy z definicji. Wykorzystujemy intuicje, aby ukierunkować rozważania. Jeżeli dowodzimy równoważności obiektów, to trzeba pokazać wynikanie jednej z charakterystycznych cech pierwszego obiektu w drugi obiekt.
Jeżeli nie mamy pomysłu, to zwykle udowadniamy dwie implikacje, z czego obie możemy robić niewprost (choć najczęściej jedna z implikacji jest oczywista).

Jak podchodzić do dowodów?
Korzystamy z definicji. Wykorzystujemy intuicje, aby ukierunkować rozważania. Jeżeli dowodzimy równoważności obiektów, to trzeba pokazać wynikanie jednej z charakterystycznych cech pierwszego obiektu w drugi obiekt.
Jeżeli nie mamy pomysłu, to zwykle udowadniamy dwie implikacje, z czego obie możemy robić niewprost (choć najczęściej jedna z implikacji jest oczywista).
Warto zaczynać od prostych przypadków i korzystać z indukcji, a także wykorzystywać kontrprzykłady.

Jak podchodzić do dowodów?
Korzystamy z definicji. Wykorzystujemy intuicje, aby ukierunkować rozważania. Jeżeli dowodzimy równoważności obiektów, to trzeba pokazać wynikanie jednej z charakterystycznych cech pierwszego obiektu w drugi obiekt.
Jeżeli nie mamy pomysłu, to zwykle udowadniamy dwie implikacje, z czego obie możemy robić niewprost (choć najczęściej jedna z implikacji jest oczywista).
Warto zaczynać od prostych przypadków i korzystać z indukcji, a także wykorzystywać kontrprzykłady.
PRZYKŁAD NIE JEST DOWODEM! INTUICJA JEST WSKAZÓWKĄ, ale ma wartość dopiero gdy zapiszemy ją formalnie.

Jak podchodzić do dowodów?
Korzystamy z definicji. Wykorzystujemy intuicje, aby ukierunkować rozważania. Jeżeli dowodzimy równoważności obiektów, to trzeba pokazać wynikanie jednej z charakterystycznych cech pierwszego obiektu w drugi obiekt.
Jeżeli nie mamy pomysłu, to zwykle udowadniamy dwie implikacje, z czego obie możemy robić niewprost (choć najczęściej jedna z implikacji jest oczywista).
Warto zaczynać od prostych przypadków i korzystać z indukcji, a także wykorzystywać kontrprzykłady.
PRZYKŁAD NIE JEST DOWODEM! INTUICJA JEST WSKAZÓWKĄ, ale ma wartość dopiero gdy zapiszemy ją formalnie.
Chyba, że wystarczy przykład. Pytanie: czy każdy liniowy porządek jest dobrym porządkiem (posiada element najmniejszy)?

Jak podchodzić do dowodów?
Korzystamy z definicji. Wykorzystujemy intuicje, aby ukierunkować rozważania. Jeżeli dowodzimy równoważności obiektów, to trzeba pokazać wynikanie jednej z charakterystycznych cech pierwszego obiektu w drugi obiekt.
Jeżeli nie mamy pomysłu, to zwykle udowadniamy dwie implikacje, z czego obie możemy robić niewprost (choć najczęściej jedna z implikacji jest oczywista).
Warto zaczynać od prostych przypadków i korzystać z indukcji, a także wykorzystywać kontrprzykłady.
PRZYKŁAD NIE JEST DOWODEM! INTUICJA JEST WSKAZÓWKĄ, ale ma wartość dopiero gdy zapiszemy ją formalnie.
Chyba, że wystarczy przykład. Pytanie: czy każdy liniowy porządek jest dobrym porządkiem (posiada element najmniejszy)? Nie, ponieważ wystarczy rozważyć naturalny porządek na liczbach całkowitych.

Dobry porządek a porządek liniowy

Udowodnij, że każdy dobry porządek jest porządkiem liniowym.

Dobry porządek a porządek liniowy

Udowodnij, że każdy dobry porządek jest porządkiem liniowym.

Przypomnijmy, że dobry porządek to taki rodzaj częściowego porządku, w którym każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy.

Dobry porządek a porządek liniowy

Udowodnij, że każdy dobry porządek jest porządkiem liniowym.

Przypomnijmy, że dobry porządek to taki rodzaj częściowego porządku, w którym każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy.
Niech $(X, \leq)$ będzie dobrym porządkiem. Zbiór pusty, jednoelementowy - oczywiste, że jest dobrze uporządkowany.

Dobry porządek a porządek liniowy

Udowodnij, że każdy dobry porządek jest porządkiem liniowym.

Przypomnijmy, że dobry porządek to taki rodzaj częściowego porządku, w którym każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy.
Niech $(X, \leq)$ będzie dobrym porządkiem. Zbiór pusty, jednoelementowy - oczywiste, że jest dobrze uporządkowany. Dla większych zbiorów prowadzimy następujące rozumowanie: weźmy dowolne dwa różne elementy $x, y \in X$.

Dobry porządek a porządek liniowy

Udowodnij, że każdy dobry porządek jest porządkiem liniowym.

Przypomnijmy, że dobry porządek to taki rodzaj częściowego porządku, w którym każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy.
Niech $(X, \leq)$ będzie dobrym porządkiem. Zbiór pusty, jednoelementowy - oczywiste, że jest dobrze uporządkowany. Dla większych zbiorów prowadzimy następujące rozumowanie: weźmy dowolne dwa różne elementy $x, y \in X$. Wówczas istnieje element minimalny, czyli $x \leq y$ lub $y \leq x$. Wobec tego dowolne dwa elementy X są porównywalne, co jest równoważne tezie.