1 La dimension 1

2 La dimension $n \geq 2$

Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ avec pour tout k, $0 < |\lambda_k| < 1$ Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Agit sur $\mathbb{C}^n \setminus 0$ par multiplication à gauche. Les orbites sont discrètes.

Ainsi le quotient

$$M_\lambda^n := (\mathbb{C}^n \setminus 0) \big/ \lambda \tag{2}$$

est une variété complexe.

De plus comme $\mathbb{C}^n \setminus 0$ est simplement connexe (car $n \geq 2$), c'est le revêtement universel de M_λ^n. Les fibres de $\pi : \mathbb{C}^n \setminus 0 \to M_\lambda^n$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}$.

2.1 Fonctions méromorphes

Si $F : M_\lambda^n \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ est une fonction méromorphe, alors $F \circ \pi : \mathbb{C}^n \setminus 0 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ est aussi une fonction méromorphe λ-périodique au sens où

$$\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus 0 \ , \quad (F \circ \pi)(\lambda z) = (F \circ \pi)(z) \tag{3}$$

Théorème 1 (*Hartogs-Levi*)

Soit $n \geq 2$ et $\Delta \in \mathbb{C}^n$ un polydisque ouvert contenant 0. Soit $f : \Delta \setminus 0 \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, alors f s'étend de manière unique en une fonction holomorphe sur Δ.

Théorème 2 (*Hartogs-Levi, version méromorphe*)

Soit $n \geq 2$ et $\Delta \in \mathbb{C}^n$ un polydisque ouvert contenant 0. Soit $f : \Delta \setminus 0 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ une fonction méromorphe, alors f s'étend de manière unique en une fonction méromorphe sur Δ.

Le théorème **??** nous dit donc que $G = F \circ \pi$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^n$. Elle vérifie toujours

$$\forall z \in \mathbb{C}^n \ , \quad G(\lambda z) = G(z) \tag{4}$$

2.2 Étude locale

Soit Δ un polydisque voisin de 0 suffisamment petit pour que G s'écrive G_1/G_2 avec G_1, G_2 holomorphes sur Δ. De plus $\lambda : \Delta \to \lambda\Delta \subseteq \Delta$ car tous les λ_i sont de module < 1.

Alors l'équation (**??**) nous donne

$$\frac{G_1 \circ \lambda}{G_2 \circ \lambda} = \frac{G_1}{G_2}$$

En particulier, $G_1 \circ \lambda$ s'annule sur les 0 de G_1 et de même $G_2 \circ \lambda$ s'annule sur les pôles de G_2.

Théorème 3 (***Lemme de préparation de Weierstrass***)

Soit f holomorphe sur $U \subseteq \mathbb{C}^n$ tel que $0 \in U$. Supposons que f s'annule en 0, alors, quitte à restreindre U

- *il existe g holomorphe sur U qui ne s'annule pas (inversible).*
- *il existe $p = f_0 + f_1 z +$*

...

On trouve $G_i \circ \lambda = U_i G_i$, avec U_i holomorphe inversible. Ainsi on a

$$\frac{U_1 G_1}{U_2 G_2} = \frac{G_1}{G_2}$$

d'où $U_1 = U_2$. Que l'on notre U.

Cas de la dimension 2

On pose $z = (z_1, z_2)$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$

Supposons G non constante (on cherche une contradiction). De plus si $G(0) \neq 0$ alors $G - G(0)$ vérifie toujours les même propriétés (λ-périodicité, méromorphe sur $\mathbb{C}^n$), on peut donc se ramener au cas où $G(0) = 0$.

En particulier la valuation de G_1 est strictement plus élevée que celle de G_2 car G s'annule en 0.

Posons v la valuation de G_1, on peut écrire donc

$$G_1(z) = \sum_{k=0}^{v} a_k z_1^k z_2^{v-k} + o(|z|^v)$$

La relation $G_1 \circ \lambda = U G_1$ entraîne que

$$\sum_{k=0}^{v} a_k \lambda_1^k \lambda_2^{v-k} z_1^k z_2^{v-k} = \sum_{k=0}^{v} U(0) a_k z_1^k z_2^{v-k}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a_0 \lambda_1^0 \lambda_2^v &= U(0) a_0 \\ a_1 \lambda_1^1 \lambda_2^{v-1} &= U(0) a_1 \\ &\cdots \\ a_v \lambda_1^v \lambda_2^0 &= U(0) a_v \end{aligned}$$

Supposons dans un premier temps que deux des a_i soient non nuls : a_s et a_t pour $s < t$. Alors

$$\lambda_1^s \lambda_2^{v-s} = U(0) = \lambda_1^t \lambda_2^{v-t} \tag{5}$$

et donc

$$\lambda_1^{t-s} \lambda_2^{s-t} = 1$$

On fait ici l'hypothèse "générique" (presque toujours satisfaite), que les λ_i sont algébriquement indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \ , \qquad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{l_i} = 1 \ \Rightarrow \ l_1 = l_2 = \cdots = l_n = 0$$

Donc $s = t$ ainsi il est impossible que 2 des coefficients a_i soient non nuls. Nécessairement G_1 s'écrit

$$az_1^s z_2^{v-s} + o(|z|^v)$$

au voisinage de 0.

Le même raisonnement est valable pour G_2 de valuation $w < v$ et donc s'écrit

$$bz_1^{s'} z_2^{w-s'} + o(|z|^w)$$

au voisinage de 0.

Donc

$$G(z) = \frac{az_1^s z_2^{v-s} + o(|z|^v)}{bz_1^{s'} z_2^{w-s'} + o(|z|^w)}$$

Mais $G(\lambda z) = G(z)$ entraîne

$$G(z) = \frac{\lambda_1^s \lambda_2^{v-s} az_1^s z_2^{v-s} + o(|z|^v)}{\lambda_1^{s'} \lambda_2^{w-s'} bz_1^{s'} z_2^{w-s'} + o(|z|^w)}$$

En identifiant on trouve

$$\left(\lambda_1^s \lambda_2^{v-s} az_1^s z_2^{v-s} + o(|z|^v)\right)\left(bz_1^{s'} z_2^{w-s'} + o(|z|^w)\right) = \left(az_1^s z_2^{v-s} + o(|z|^v)\right)\left(\lambda_1^{s'} \lambda_2^{w-s'} bz_1^{s'} z_2^{w-s'} + o(|z|^w)\right)$$

et dont le terme de bidegré $(s + s', w + v - s - s')$ nous donne après simplification par a et b

$$\lambda_1^s \lambda_2^{v-s} = \lambda_1^{s'} \lambda_2^{w-s'}$$

Mais par notre hypothèse d'indépendance algébrique, nécessairement $s = s'$ et $v - s = w - s'$ donc $v = w$ ce qui est une contradiction avec l'annulation de G en 0.