Notations. k sera un corps algébriquement clos. Et V un k-espace vectoriel de dimension finie d. On notera V^* son dual.

On notera $=$ ou $\simeq$ les isomorphismes naturels (selon si ils sont plus ou moins naturels au sens commun) et $\cong$ ceux qui ne sont pas canoniques dans le contexte. Par exemple on pourra noter $V \cong k^d$. Par contre si préalablement, une base de V a été fixée, on aurait du noter $V \simeq k^d$ (ou $V = k^d$), il existe un choix canonique d'un tel isomorphisme pour une base fixée.

1 Notions de base

1.1 Algèbre multilinéaire

- Produit tensoriel. Algèbre tensorielle
- Produit symétrique. Algèbre symétrique
- Produit extérieur. Algèbre extérieure
- Algèbre graduée

Proposition 1

$$S(V^*) \simeq K[V]$$

Proposition 2

Si $G \subseteq V^*$ et $F \subseteq V$ sont deux sous-espaces vectoriels alors il existe des applications naturelles $V^{**} = V \to G^*$ et $V^* \to F^*$ dites de "restriction" obtenues par dualité à partir des inclusions ci-dessus. Et de plus, les suites

$$0 \to G^\circ \to V \to G^* \to 0$$

et

$$0 \to F^\perp \to V^* \to F^* \to 0$$

sont exactes.

1.2 Fibrés vectoriels

Soit $f : M \to N$ lisse, alors

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "df"] \arrow[dr] & f^*TN \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & TN \arrow[d] \\ & M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

En particulier, on a une suite exacte de fibrés vectoriels sur M, peut-être faux

$$0 \to K \to TM \to f^*TN \to Q \to 0$$

- $Q = 0$ **ssi** f submersion
  Dès lors K est le fibré *tangent aux fibres de f dans M*
- $K = 0$ **ssi** f immersion
  Dès lors Q est le tiré-en-arrière du fibré *normal à l'image de f dans N*

2 L'espace projectif

On note

$$\mathbb{P}(V) = \{ \ker \varphi \mid \varphi : V \to k \text{ linéaire surjective } \}$$

Et

$$\mathcal{O}(-1) = \{(K, \psi) \in \mathbb{P}V \times V^* \mid \ker \psi \subseteq K\}$$

qui est un fibré localement libre (et inversible) de rang 1.

Fixons un $K \in \mathbb{P}(V)$.

Alors $\mathcal{O}(-1)_K = \{\psi \in V^* \mid \ker\psi \subseteq K\} \subseteq V^*$

On a une application naturelle $V \to (\mathcal{O}(-1)_K)^*$ qui a v associe l'évaluation en v : À $\psi \in V^*$ telle que $\ker\psi \subseteq K$, on associe $\psi(v)$. Dès lors le noyau de cette application est K, ce qui peut se résumer par la suite exacte suivante

$$0 \to K \to V \to \mathcal{O}(-1)^*_K \to 0$$

Définition 1

On note

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^*$$

Le fibré inversible dual, que l'on appelle le fibré universel ou hyperplan.

On peut reformuler le résultat obtenu : Pour $K \in \mathbb{P}V$, la suite

$$0 \to K \to V \to \mathcal{O}(1)_K \to 0$$

est exacte.

3 Quelques suites exactes de fibrés vectoriels et leurs interprétations géométriques

3.1 Suite exacte d'Euler

$$0 \to \mathcal{O} \to \underline{V} \otimes \mathcal{O}(1) \to T\mathbb{P}V \to 0$$

Unrelated Il paraîtrait que le tangent en un point s'identifie naturellement à un espace vectoriel de la manière suivante

$$T_K\mathbb{P}V \simeq \mathrm{Hom}(K, K^\circ)$$

also unrelated Les $\mathcal{O}(n)$ pour $n > 0$ ne sont JAMAIS des sous-fibré d'un fibré vectoriel trivial ! ! Tandis que les $\mathcal{O}(-n)$ le sont.

En effet un section au dessus de $\mathbb{P}^n$ d'un fibré trivial est constante. Ainsi tout sous-fibré d'un fibré trivial ne peut avoir comme section que les sections constantes. Et en fait dans le cas des $\mathcal{O}(-n)$, cette constante doit appartenir à toutes les fibres, qui sont, dans le cas $\mathcal{O}(-1)$, toutes les droites de $\mathbb{C}^{n+1}$. Du coup cette constante est nécessairement nulle. Réciproquement les section des $\mathcal{O}(n)$ sont des restrictions de section de $((C^m)^{\otimes}n)*$ donc des formes n-linéaires sur $\mathbb{C}^m$. Reste à montrer que ce sont exactement celles-ci.

Things to tell **To Do ! !**

To Do ! !

- Proj
- Euler exact sequence
- Chern class, Picard group. . .
- Tautological bundle
- Universal bundle
- Canonical bundle
- Bezout thm
- Grothendieck-Birkoff thm