

EPAISSISSEMENTS

TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|------|--------------------------------|---|
| 1. | Definitions | 1 |
| 2. | Propriété fondamentale | 1 |
| 3. | Epaississements de fibrés | 1 |
| 3.1. | Propriétés | 1 |
| 3.2. | Classes d'extensions de fibrés | 2 |
| 3.3. | Application à V_- | 2 |
| 3.4. | Il doit y avoir une erreur | 2 |

Epaississements de fibrés en suivant Buchdahl [?]

1. DEFINITIONS

Soit $L^\infty = (L, \mathcal{O})$ un espace analytique non-nécessairement réduit. On note \mathcal{I} l'idéal des fonctions nilpotentes de \mathcal{O} .

Et on note $L^{(k)} := (L, \mathcal{O}/\mathcal{I}^{k+1}) = (L, \mathcal{O}^{(k)})$ avec l'abus suivant : L désigne à la fois l'espace topologique sous-jacent et $L^{(0)}$.

Soit E^∞ un fibré vectoriel analytique sur L^∞ . C'est-à-dire, par définition, le faisceau $\mathcal{O}(E^\infty)$ des sections locales de E^∞ est localement libre en tant que \mathcal{O} -module.

2. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

On a pour tout $n \geq 0$ la suite exacte suivante de \mathcal{O} -modules

$$(1) \quad 0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}^{n+1}}{\mathcal{I}^{n+2}} \rightarrow \mathcal{O}^{(n+1)} \rightarrow \mathcal{O}^{(n)} \rightarrow 0$$

De plus [?], on peut écrire

$$(2) \quad \frac{\mathcal{I}^{n+1}}{\mathcal{I}^{n+2}} = \mathcal{O}_L(\odot^{n+1} N^*)$$

en tant que faisceaux de \mathcal{O} -modules.

3. EPAISSISSEMENTS DE FIBRÉS

On notera $E^{(n)}$ le fibré sur $L^{(n)}$ défini par

$$\mathcal{O}^{(n)}(E^{(n)}) = \mathcal{O}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(E^\infty)$$

Il est clair qu'il est localement libre.

3.1. Propriétés. Les epaississements de fibrés satisfont plusieurs propriétés de "fonctorialité" (plutôt de naturalité)

- $E^{(n)} \oplus F^{(n)} \simeq (E \oplus F)^{(n)}$ avec comme convention que $E \oplus F$ désigne le fibré $E^\infty \oplus F^\infty$.
- $E^{(n)} \otimes F^{(n)} \simeq (E \otimes F)^{(n)}$ (idem)
- $(E^{(n)})^* \simeq (E^*)^{(n)}$ (idem)

Enfin si $k < n$ alors

$$(3) \quad \mathcal{O}^{(k)}(E^{(n)}) = \mathcal{O}^{(k)}(E^{(k)})$$

car en effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(k)}(E^{(n)}) &= \mathcal{O}^{(k)} \otimes_{\mathcal{O}^{(n)}} \mathcal{O}^{(n)}(E^{(n)}) \\ &= \mathcal{O}^{(k)} \otimes_{\mathcal{O}^{(n)}} \mathcal{O}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(E^\infty) \\ &= \mathcal{O}^{(k)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(E^\infty) \end{aligned}$$

3.2. Classes d'extensions de fibrés. Soit $E^{(n)}$ un fibré sur $L^{(n)}$ et soient $E^{(n+1)}$ et $F^{(n+1)}$ deux fibrés sur $L^{(n+1)}$ qui étendent $E^{(n)}$ au sens suivant

$$\mathcal{O}^{(n)}(E^{(n+1)}) = \mathcal{O}^{(n)}(F^{(n+1)}) = \mathcal{O}^{(n)}(E^{(n)})$$

Alors en tensorisant la suite exacte (1) par le fibré $\text{Hom}(E^{(n+1)}, F^{(n+1)})$ sur $L^{(n+1)}$, on trouve

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*) \rightarrow \mathcal{O}^{(n+1)}(\text{Hom}(E^{(n+1)}, F^{(n+1)})) \rightarrow \mathcal{O}^{(n)}(\text{End}(E^{(n)})) \rightarrow 0$$

Passons à la cohomologie et interprétons

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(L, \mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*)) \\ &\rightarrow H^0(L, \mathcal{O}^{(n+1)}(\text{Hom}(E^{(n+1)}, F^{(n+1)}))) \\ &\rightarrow H^0(L, \mathcal{O}^{(n)}(\text{End}(E^{(n)}))) \\ &\rightarrow H^1(L, \mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*)) \end{aligned}$$

L'image de $1 \in H^0(L, \mathcal{O}^{(n)}(\text{End}(E^{(n)})))$ dans $H^1(L, \mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*))$ que l'on peut noter c est une obstruction à ce que 1 soit l'image d'un $\phi \in H^0(L, \mathcal{O}^{(n+1)}(\text{Hom}(E^{(n+1)}, F^{(n+1)})))$. Or un tel ϕ est un morphisme $\mathcal{O}^{(n+1)}$ -linéaire entre $E^{(n+1)}$ et $F^{(n+1)}$ qui se restreint en l'identité à l'ordre (n) .

Nécessairement un tel ϕ est un isomorphisme et alors l'ensemble de ces isomorphismes est un espace homogène sous l'action de $H^0(L, \mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*))$.

On peut donc à deux extensions $E^{(n+1)}$ et $F^{(n+1)}$ de $E^{(n)}$ associer un $c \in H^1(L, \mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*))$ canonique que l'on notera $[F - E]$ quand le contexte le permettra.

3.3. Application à V_- . On prend $L \subseteq Z$ une droite twistorielle dans Z et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Z|_L$. Soit $E^\infty = T_f(-1)$. Sa restriction (analytique) à L est triviale au moins à l'ordre 0. Qu'en est-il à l'ordre supérieur ?

On peut vérifier que pour $n = 1$, on a $\mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^{n+1} N^*)$ qui s'écrit comme une somme de $\mathcal{O}(-2)$. Donc a priori deux extensions de $E^{(0)}$ à l'ordre 1 peuvent différer.

Or on a deux extensions canoniques de $E^{(0)}$:

- la première est simplement $E^{(1)}$ qui est la restriction de $E \rightarrow Z$ à $L^{(1)}$.
- la seconde est le prolongement trivial que l'on notera $E_N^{(1)}$. Il est défini en tant qu'espace comme $E \oplus N^* \otimes E$ au dessus de L et la structure de $\mathcal{O}^{(1)}$ -module est la suivante \sim :

Soit $\hat{f} = f + \beta$ et soit $\hat{e} = e + \alpha \otimes e'$ une section locale de $E \oplus N^* \otimes E$, alors

$$\hat{f}\hat{e} = fe + f\alpha \otimes e' + \beta \otimes e$$

C'est également l'extension triviale de la suite (1) tensorisée par $E^{(1)}$.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_L(N^* \otimes E) \rightarrow \mathcal{O}^{(1)}(E^{(1)}) \rightarrow \mathcal{O}_L(E) \rightarrow 0$$

en tant que suite de $\mathcal{O}^{(1)}$ -modules.

On a donc une classe $[E_Z - E_N]$ dans $H^1(L, \mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes \odot^2 N^*))$

3.4. Il doit y avoir une erreur. L'espace qui classifie les extensions de la suite ci-dessus est $H^1(\mathcal{O}_L(\text{End}(E) \otimes N^*)) = 0$. On retrouve ce qu'on voudrait que l'extension à l'ordre 1 est triviale.