1. Notations universelles

$$\boxed{\tau = 2\pi}$$

On fixe une identification de $A \otimes A \cong (A \wedge A) \oplus (A \odot A)$ en posant

$$a \otimes b = a \wedge b + a \odot b$$

2. Volume et métriques

2.1. Cas riemannien. Soit (M, g) une variété riemannienne orienté. Alors dans *n'importe quelle carte* (orientée) $(x^i)_i$ on peut écrire

$$g_x = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \tag{1}$$

Le tenseur g_{ij} est
- Symétrique : $g_{ij} = g_{ji}$
- Positif : $\sum g_{ij} x^i x^j \geq 0$
- Défini : $\left(\sum g_{ij} x^i x^j = 0\right) \Rightarrow (x = 0)$

On définit la forme de volume riemannienne

$$\mathrm{d}Vol = \sqrt{\det(g)}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{2}$$

Elle ne dépend pas du choix de la carte !

On peut remarquer que

$$\mathrm{d}Vol = E_1^* \wedge \cdots \wedge E_n^* \tag{3}$$

où $(E_i)_i$ base orthonormée orientée de TM et (E_i^*) la base duale.

2.2. Cas hermitien. Soit X une variété complexe. Alors une métrique hermitienne h sur X peut s'écrire dans *n'importe quelle carte* holomorphe $(z^i)_i$ comme

$$h_x = \sum_{i,j} h_{ij}(z)\, \mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\bar{z}^j \tag{4}$$

Rq : Une métrique hermitienne est antiholomorphe à droite

On lui associe :
- $\omega = -Im(h)$ la forme fondamentale [**?**]
- $g = Re(h)$ la métrique riemannienne sous-jacente

Dès lors

$$h = g - i\omega \tag{5}$$

d'où

$$g(I\_, \_) = \omega \tag{6}$$

et

$$\omega(I\_, \_) = -g \tag{7}$$

On pose $\mathrm{d}V_\omega = \omega^n / n!$ forme volume hermitienne [**?**]

On a la relation

$$dV_\omega = 2^n \, dVol \tag{8}$$

2.3. Sur $\mathbb{P}^1$.

$$\omega_{FS} = i\,\partial\bar\partial \log(1+\zeta\bar\zeta) = \frac{i\,d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\left(1+\zeta\bar\zeta\right)^2}$$

En posant $\zeta = re^{i\theta}$ on a

$$i\,d\zeta\wedge d\bar\zeta = 2r\,dr\wedge d\theta$$

et donc on en déduit que

$$\int_{\mathbb{P}^1}\omega_{FS} = \int_0^\tau\int_0^\infty \frac{2r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^2} = \tau$$

Et $Vol(\mathbb{P}^1) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{P}^1}\omega = \pi$: La sphère de rayon $\frac{1}{2}$.

2.3.1. *Courbure.* Une section locale du tangent de $\mathbb{P}^1$ est un champ de vecteur local. Prenons $X = \partial_\zeta$ alors sa norme relativement à la métrique ω_{FS} est

$$|\partial_\zeta|^2 = \frac{1}{\left(1+\zeta\bar\zeta\right)^2}$$

D'où la courbure de $\mathbb{P}^1$ est donnée dans cette carte par

$$\Theta(T\mathbb{P}^1) = -i\,\partial\bar\partial \log\left(\frac{1}{\left(1+\zeta\bar\zeta\right)^2}\right) = 2\omega_{FS}$$