1. Notations

Données. Soit M une variété réelle lisse ou analytique de dimension $2n$ munie d'une structure complexe I intégrable. On dispose au voisinage d'un point $O \in M$ de coordonnées réelles x^i centrées en O. On notera $u^a = x^a + ix^{a+n}$.

On introduit les objets suivants :

1.1. Les différents faisceaux naturels, (on notera $\Gamma(U, \mathcal{F})$ les sections de $\mathcal{F}$ sur l'ouvert U) :

- Les faisceaux constants $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{\mathbb{C}}$. Dont les sections sont les fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$.
- Le faisceau structural (lisse) $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^\infty_M$, dont les sections sont les fonctions lisses à valeurs complexes.
- Le faisceau structural analytique $\mathcal{C}^\omega$ ou $\mathcal{C}^\omega_M$, dont les sections sont les fonctions analytiques à valeurs complexes.

1.2. Le fibré tangent $T_{\mathbb{R}}M$ à M, ses sections lisses forment de manière naturelle un faisceau de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions $2n$ que l'on notera $\mathfrak{X}$. Une base locale des sections est donnée par la famille :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{2n}}$$

On identifie les champs de vecteurs et les dérivations réelles sur l'anneau des fonctions réelles sur M.

1.3. Son complexifié $T_{\mathbb{C}}M := T_{\mathbb{R}}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dont le faisceau associé est $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{X} \otimes_{\underline{\mathbb{R}}} \underline{\mathbb{C}}$. Une base locale des sections est donnée par la famille précédente ou par :

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^n}$$

On a la décomposition spectrale (fibre à fibres)

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

qui s'écrit en terme de faisceaux

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{C}} = \mathcal{X} \oplus \bar{\mathcal{X}} \tag{1}$$

qui fait apparaître

- L'espace propre pour la valeur propre i de l'opérateur $I : T^{1,0}M$. Fibré vectoriel complexe de dimension n dont les sections sont appelés *champs de vecteurs I-holomorphes.*
  Il s'identifie naturellement au fibré tangent réel par l'application partie réelle $T^{1,0}M \to T_{\mathbb{R}}M$; on le notera par la suite TM.
- L'espace propre pour la valeur propre $-i$ de l'opérateur $I : T^{0,1}M$. Fibré vectoriel complexe de dimension n dont les sections sont appelés *champs de vecteurs (I-)antiholomorphes.*
- Une opération $X \mapsto \bar{X}$ sur $T_{\mathbb{C}}M = T_{\mathbb{R}}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui échange $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$.

1.4. L'espace des 1-formes réelles $\Omega_{\mathbb{R},M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}M, \mathbb{R})$.

1.5. Son complexifié $\Omega_{\mathbb{C},M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}M, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}M$

On a la décomposition obtenue par dualité :

$$\Omega_{\mathbb{C},M} = \Omega^{0,1} \oplus \Omega^{1,0}$$

- $\Omega^{1,0} := (T^{0,1}M)^\perp$ faisceau des formes qui s'annulent sur les $(0,1)$-vecteurs. Fibré vectoriel complexe de dimension n.
  C'est également l'espace des formes propres de valeur propre i pour l'operateur I^*.
- $\Omega^{0,1} := (T^{1,0}M)^\perp$ faisceau des formes qui s'annulent sur les $(1,0)$-vecteurs. Fibré vectoriel complexe de dimension n.
  C'est également l'espace des formes propres de valeur propre $-i$ pour l'operateur I^*.

1.6. On définit les m-formes à valeur complexes par :

$$\Omega^m := \bigwedge^m \Omega_{\mathbb{C},M}$$

C'est le faisceau des formes m-linéaires alternées sur TM à valeurs complexes. On remarquera que $\Omega^0 = \mathcal{C}^\infty_M$ faisceau des fonctions complexes lisses.

1.7. Enfin, on définit les (p,q)-formes de la façon suivante :

$$\Omega^{p,q} := \bigwedge^p \Omega^{1,0} \wedge \bigwedge^q \Omega^{0,1} \ \subset \ \Omega^m$$

Si on pose $m = p + q$. C'est également le faisceau des formes m-linéaires alternées sur $T_{\mathbb{C}}M$ qui s'annulent sur les m-uplets de vecteurs $(X_1, \cdots X_m)$ dès lors que

- au moins $p + 1$ des X_i sont de type $(1,0)$
- ou au moins $q + 1$ des X_i sont de type $(0,1)$.

On a alors la décomposition

$$\Omega^m = \bigoplus_{p+q=m} \Omega^{p,q}$$

1.8. Les opérateurs $\mathrm{d} : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ en définissant $(\mathrm{d}\theta)(X)$ pour $\theta \in \Omega^k$, $X = (X_1, X_2, \cdots, X_{k+1})$ où les $X_i \in TM$ par :

$$\sum_{1 \le j \le k} (-1)^j X_j \left(\theta\left(\check{X}^j\right)\right) + \sum_{1 \le j < i \le k} (-1)^{j+i} \theta\left([X_j, X_i], \check{\check{X}}^{j,i}\right)$$

- Dans le cas $k = 0$, la deuxième partie de la formule est vide, et on retrouve l'opération $f \mapsto X(f)$, ainsi $(\mathrm{d}f)(X) = X(f)$.
- Cette définition intrinsèque coïncide dans des coordonnées avec
  $$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\big(\theta_K \, \mathrm{d}x^K\big) = \frac{\partial \theta_K}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K$$
- L'opérateur d sur Ω^k satisfait la règle de Leibnitz :
  $$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$$

1.9. On dispose naturellement des projections

$$\pi^{p,q} : \Omega^{p+q} \longrightarrow \Omega^{p,q}$$

On peut dès lors définir les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ comme

- la partie de type $(p+1,q)$ de la différentielle d'une (p,q)-forme : $\partial = \pi^{p+1,q} \circ \mathrm{d}_{|\Omega^{p,q}}$
- la partie de type $(p,q+1)$ de la différentielle d'une (p,q)-forme : $\bar{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ \mathrm{d}_{|\Omega^{p,q}}$

1.10. On définit $\mathcal{O}_M$ (ou $\mathcal{O}_{(M,I)}$ si il y a ambiguïté) le faisceau des fonctions holomorphes sur M à valeurs complexes comme le noyau de l'opérateur $\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty_M \to \Omega^1$. C'est automatiquement un sous-faisceau de $\mathcal{C}^\omega_M$ (conséquence de la formule de Cauchy).
De même on définit $\mathcal{O}_M(E)$ pour $E \to M$ fibré vectoriel holomorphe, comme le faisceau des sections holomorphes de E.

1.11. La structure presque complexe I est dite *intégrable* si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :

(*i*) Le tenseur de Nijenhuis défini par : $N_I(X,Y) := [IX,IY] - I[X,IY] - I[IX,Y] + I^2[X,Y]$ est identiquement nul.

(*ii*) Pour tout champ de vecteur complexes X, Y sur M satisfaisant $IX = iX$ et $IY = iY$, le crochet de Lie $[X,Y]$ satisfait également $I[X,Y] = i[X,Y]$

(*iii*) L'espace tangent I-holomorphe $TM = T^{1,0}M \subset T_{\mathbb{C}}$ est stable par crochet de Lie. C'est-à-dire $[TM, TM] \subseteq TM$

(*iv*) Pour toute famille $(\omega^\alpha)_\alpha$ de $(1,0)_I$-formes sur M de rang n, et pour tout α, $\mathrm{d}\omega^\alpha = \theta^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$ pour des 1-formes θ^α_β.

(*v*) Le dual de l'espace tangent I-holomorphe $\Omega^{1,0} \subseteq \Omega^1$ satisfait $\mathrm{d}\Omega^{1,0} \subseteq \Omega^1 \wedge \Omega^{1,0}_M$.

(*vi*) $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$, ce qui signifie que la différentielle d'une (p,q)-forme est une somme de $(p+1,q)$ et $(p,q+1)$-formes.

(*vii*) $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$ sur Ω^1_M.

(*viii*) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{0,1} \arrow[d, "\bar{\partial}"] & \Omega^1 \arrow[l, "\pi^{0,1}"'] \arrow[r, "\pi^{1,0}"] \arrow[d, "d"] & \Omega^{1,0} \arrow[d, "\partial"] \\
\Omega^{0,2} & \Omega^2 \arrow[l, "\pi^{0,2}"'] \arrow[r, "\pi^{2,0}"] & \Omega^{2,0}
\end{tikzcd}$$

Cette propriété d'intégrabilité est détaillé en appendice **??**.

(*ix*) $\partial^2 f = 0$ pour tout $f \in \Gamma(M, \mathcal{C}^\infty)$.

Todo.

- Anti-symétrisation
- Notation tensorielle
- d (définition tensorielle)

Formulaire.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\overline{\mathrm{d}z} \\
\bar{\partial} f &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\bar{\partial} z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\overline{\partial z} \\
\partial f &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\partial z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\overline{\bar{\partial} z}
\end{aligned}$$