COHOMOLOGIE

Table des matières

Retour au fichier général :ATTACH :

1. Cohomologie

1.1. Notations.

1.1.1. *Faisceaux classiques.*

- Fonctions localement constantes
  $\underline{R}$ faisceau des fonctions localement constantes à valeur dans R
  - ▶ Structurels
    Fonction, par défaut, signifie à valeur dans $\mathbb{C}$

    $\mathcal{C}$: continues

    $\mathcal{C}^k$: k-fois dérivables à dérivées continue

    $\mathcal{E}$: lisses

    $\mathcal{C}^\omega$: analytiques

    $\mathcal{O}$: holomorphes

    $\underline{o}$: polynômiales

    Fonctions à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

    $\mathcal{H}$: harmoniques

    PSh: plurisousharmoniques

- formes et vecteurs

  $\mathcal{A}^p = \mathcal{E}^p$: p-formes différentielles

  $\mathcal{A}^{p,q} = \mathcal{E}^{p,q}$: $p+q$-formes différentielles de type (p,q) relativement à une structure presque-complexe

  Ω^p: p-formes holomorphes

  $\Omega^{p,q}$: $p+q$ formes holomorphes de type (p,q)

  $\mathfrak{X}$: champs de vecteurs lisses

$\mathcal{X}$: champs de vecteurs holomorphes

Cas particuliers

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{C}^\infty$$

$$\Omega^0 = \mathcal{O}$$

- ▶ Courants
  [?]

- Faisceau gratte-ciel

1.1.2. *Pousser et tirer.* [?]

- $f_!$
- f^{-1}
  exact
  - ▶ f^*
- f_*
  exact à gauche
  - ▶ Higher pushforwar $R^q f_*$
- $f^!$
- $f\otimes$
  Exact si plat

1.2. **Algebrique.**

1.2.1. *Cohomologie d'un complexe.* [?] Chap IV. [?]

Dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, un complexe est la donnée du couple $(M^\bullet, d^\bullet)$ tel que $d^i : M^i \to M^{i+1}$ et $d^{i+1} \circ d^i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

La cohomologie en degré i d'un complexe (M, d) est l'objet de la catégorie $\mathcal{A}$

$$H^i(M^\bullet) := \mathrm{Coker}\left(d^{i-1} : M^{i-1} \to \ker d^i\right)$$

- Hypercohomologie d'un complexe de faisceaux
  [?]

  Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X. Alors on définit *l'hypercohomologie* du complexe comme étant

  $$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) := R^k\Gamma(\mathcal{F}^\bullet)$$

  Si $\mathcal{G}^\bullet$ est un complexe de faisceaux Γ-acycliques et quasi-isomorphe à $\mathcal{F}^\bullet$ alors les $G^\bullet = \mathcal{G}^\bullet(X)$ forment un complexe de groupes abéliens et on a

  $$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^\bullet) = H^k(G^\bullet)$$

1.2.2. *Cohomologie des Faisceaux.*

- Faisceau flasques et résolution flasque
  [?] Chap. IV
  [?] Un complexe (M^i, d^i) pour $i \geq 0$ est une *résolution* de N si
  - ▶ $M^\bullet$ est exacte en M^i pour $i > 0$
  - ▶ on a une suite exacte

$$0 \to N \to M^0 \to M^1$$

- Cohomologie des faisceaux
- Suite exacte longue
- Suite de Mayer-Vietoris

1.2.3. *Cech.*

1.2.4. *Théorème de Leray des faisceaux acycliques.* **Définition 1**

Un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X est acyclique pour $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ n'as pas de cohomologie supérieure sur les intersections d'ouverts de $\mathfrak{U}$. C'est-à-dire :

$$\forall p > 0, \forall k > 0, \forall J \subseteq I, |J| = k \quad \check{H}^p(U_J, \mathcal{F}) = 0$$

Théoreme 1 (*leray*)

Si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement acyclique pour $\mathcal{F}$, alors

$$\forall p, \quad H^p(X, \mathcal{F}) = \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \tag{1}$$

morale : Coh de Cech sur un recouvrement acyclique = Coh des Faisceaux
[?] Chap IV par. 5. Cech Cohomologie

Corollaire 1

Si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement acyclique pour $\mathcal{F}$, alors

$$\forall p, \quad \check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \tag{2}$$

- Lemme d'acyclicité
  Sur une variété paracompacte, les faisceaux de C^∞-modules sont acycliques sur les recouvrements localement finis.
  En particulier pour de tels recouvrements, les faisceaux de C^∞-modules n'ont pas de cohomologie supérieure non nulle :

$$\forall q > 0, \quad \check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0 \tag{3}$$

- Sur un espace paracompact,
  Cech=Faisc. Si X est paracompacte et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X alors

$$\forall q \geq 0, \quad \check{H}^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F}) \tag{4}$$

1.2.5. *Isomorphisme de Leray.*

1.3. **Geometrique.**

1.3.1. *Betti.*

1.3.2. *De Rham.* Par le lemme de Poincaré le complexe

$$0 \to C^\infty \to_d \mathcal{A}^1 \to_d \mathcal{A}^2 \cdots \tag{5}$$

est exacte en A^k pour tout $k > 0$.

C'est une résolution du faisceau $\underline{C}$ [?].

- Lemme de Poincaré **:Poincare :**

Lemme 1 (*Poincaré*)

Soit U ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^n$ et soit ω une k-forme d*-fermée sur U alors il existe θ une $k-1$-forme sur U telle que $\omega =$* d*theta*

1.3.3. *Dolbeault.*

- Lemme de Dolbeault-Poincaré **:Poincare :**

Lemme 2 ()

Soit U ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^n$ et soit ω une (p,q)-forme $\bar\partial$-fermée sur U alors il existe θ une $(p,q-1)$-forme sur U telle que $\omega = \bar\partial$ theta

Lemme 3 ([?])

Soit Δ polydisque de $\mathbb{C}^n$, alors

$$H^{p,q}_{Dol}(\Delta, \underline{C}) = 0 \quad \text{pour } q \geq 1 \tag{6}$$

1.3.4. *Bott-Chern.*

$$\frac{\ker \partial \cap \ker \bar\partial}{\Im \partial\bar\partial}$$

1.3.5. *Aeppli.*

$$\frac{\ker \partial\bar\partial}{\Im \partial + \Im \bar\partial}$$

1.4. **Relations.**

1.4.1. *Vanishing Thm.*

- Grothendieck
  Pas de cohomologie des faisceaux en degré supérieur à la dimension. Dans tout le cadre le plus général possible.

  Theorem 1 (*Grothendieck vanishing*)

  Let X be a noetherian topological space.
  For all $i > dimX$ and all sheaves of abelian groups $\mathcal{F}$ on X, we have $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

- Kodaira

  Theorem 2 (*Kodaira Vanishing*)

  M is a compact Kähler manifold of complex dimension n, L any holomorphic line bundle on M that is positive (ample), and K_M is the canonical line bundle, then
  $$H^q(M, K_M \otimes L$$
  for $q > 0$.

  ▶ $\text{Kodaira}_{\text{Nakano}}$

1.4.2. *Dualités.*

- Poincaré
  Variété compacte sans bord, orientée de dimension n, alors
  $$H^k(M, \mathbb{C}) = H^{n-k}(M, \mathbb{C})^*$$
- Serres

1.4.3. *Künneth formula.* [Formule de Künneth pour l'homologie, [?] I.4 p. 58]

$$H_k(X \times Y, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H_p(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{C}} H_q(Y, \mathbb{Q}) \tag{7}$$

Si X, Y variétés complexes dont l'une au moins est compacte. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des faisceaux cohérents sur X et Y respectivement. [Formule de Künneth pour la cohomologie, [?] Chap IV par. 15 et Chap IX par. 5.B, 5.23]

$$H_k(X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H_p(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} H_q(Y, \mathcal{G}) \tag{8}$$

- Autre référence http://mathoverflow.net/questions/34673/kunneth-formula-for-sheaf-cohomology-of-varieties

1.5. **Théorie de Hodge.**

1.5.1. *Théorème de Hodge.* Métrique hermitienne -> Notion de forme harmonique (et dimension finie des espaces de formes harmoniques) -> Représentant harmonique des classes de Cohomologies

- Le cas Kahler

1.6. **Non-Classé.**

1.6.1. *Hirzebruch-Riemann-Roch* ***:HRR :GRR :Thm :*** Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X une variété complexe compacte

$$\chi(X,E) = \int_X \mathrm{Ch}(E)\mathrm{Td}(X) \tag{9}$$

- Grothendieck-Hirzebuch-Riemann-Roch
  Version relative où $X \to \star$ est remplacé par $f : X \to Y$ propre entre des schémas quasi-projectifs lisses. Et E remplacé par un complexe borné de faisceaux.

1.6.2. *Interpretation du H^1 en terme d'extensions.* $H^1(X,\mathcal{F})$ classifie les suites exactes

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}_X \to 0 \tag{10}$$

Ah bon ?

Dans le cas X compact, $H^0(X,\mathcal{O}_X) = \mathcal{C}$ et donc la suite exacte longue de cohomologie associée à une telle extension $\mathcal{G}$ nous donne

$$\cdots \to H^0(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to \cdots \tag{11}$$

et donc un élément de $H^1(X,\mathcal{F})$ obtenue comme l'image de $1 \in \mathcal{C} \cong H^0(X,\mathcal{O}_X)$.

Réciproquement ?

1.6.3. *Propriétés des faisceaux.*

- Flasque (flabby)
  Toute section locale peut être étendue en une section globale.
  Ex : Si X n'est pas discret, même C_X n'est pas flasque.
  ▶ Les faisceaux flasques sont acycliques
- Mou (Soft)
  Toute section sur un fermé S de X peut-être étendue en une section globale
  Ex : C_X (théorème de Tietze-Urysohn) et C^∞_X
  Si R est un faisceau d'anneaux doux, alors tous les faisceaux de R-modules sont doux.
- Acyclique

  Définition 2 (*Faisceau acyclique*)

  Un faisceau acyclique F sur X est un faisceau dont tous les groupes de cohomologie supérieure sont nuls.

▶ C^∞-modules
Les faisceaux de C^∞-modules sont acycliques
Bilan :

Proposition 1

Toute suite exacte de faisceaux de $\mathcal{C}^\infty$-modules est C^∞ scindée.

$$0 \to E \to F \to G \to 0$$

Alors en prenant le produit tensoriel au dessus de $\mathcal{C}^\infty$ par G^*, on obtient la suite exacte˜ :

$$0 \to \mathrm{Hom}(G,E) \to \mathrm{Hom}(G,F) \to \mathrm{End}(G) \to \mathrm{Ext}^1(G,E) \to \cdots$$

Or $\mathrm{Hom}(G,E)$ est un faisceau acyclique donc n'a pas de cohomologie supérieure.
Ainsi il existe un antécédent dans $\mathrm{Hom}(G,F)$ à l'identité dans $\mathrm{Hom}(G,G)$, c'est-à-dire une section de $F \to G$. Donc la suite est scindée.

- Fin (Fine)

1.6.4. *Suite spectrale de Frölisher.*

- Le cas Kahler
  Dégénère en page 1