1. Complexes et suites exactes

1.1. **Filtration.** si on a une suite d'ev F^a avec des morphismes $f^a : F^a \to F^{a+1}$, de graphe $\phi^a = \Gamma(f^a) \in F^a \oplus F^{a+1}$.

On pose

$$F = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} F^a$$

$$\Phi = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \phi^a \quad \subseteq \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \left(F^a \oplus F^{a+1}\right)$$

Alors si $F^\bullet$ est un complexe, Φ induit une graduation B sur F donnée par

$$B^k = \left(\bigoplus_{a<k} F^a\right) \oplus \phi^a$$

Mais de façon évidente, il y a une autre graduation A de F : celle donnée par

$$A^k = \bigoplus_{a \leq k} F^a \subseteq F$$

On a alors

$$A^k \cap B^k = ?$$

1.2. **Complexe Gradué.** On peut supposer que chaque F^a vient avec un graduation

$$F^a \supset \cdots \supset G^p F^a \supset G^{p+1} F^a \supset \cdots 0$$

qui est préservé par le complexe au sens suivant

$$f^a \left(G^p F^a\right) \subseteq G^p F^{a+1}$$

1.2.1. *Cas le plus simple : Un sous-complexe avec la dérivation induite.* Soit $G^\bullet \subseteq F^\bullet$ un sous-complexe stable par $f^\bullet$.
Page 0.

$$\cdots \longrightarrow G^a \longrightarrow G^{a+1} \longrightarrow G^{a+2} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow F^{a-1}/G^{a-1} \longrightarrow F^a/G^a \longrightarrow F^{a+1}/G^{a+1} \longrightarrow \cdots$$

On calcule alors les $E_1^{p,q}$ comme la cohomologie des complexes suivants

$$F^{a-1}/G^{a-1} \longrightarrow \underset{E_1^{0,a}}{F^a/G^a} \longrightarrow F^{a+1}/G^{a+1}$$

et

$$G^a \longrightarrow \underset{E_1^{1,a}}{G^{a+1}} \longrightarrow G^{a+2}$$

Page 1.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & E^{1,a-1} & E^{1,a} & E^{1,a+1} & \cdots \\
\cdots & E^{0,a-1} \arrow[u] & E^{0,a} \arrow[u] & E^{0,a+1} \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On calcule alors les $E_2^{p,q}$ comme la cohomologie du complexe suivant

$$\cdots \to 0 \to 0 \to \underset{E_2^{0,a}}{E_1^{0,a}} \to \underset{E_2^{1,a}}{E_1^{1,a}} \to 0 \to 0 \to \cdots$$

ce qui donne en fait la suite exacte

$$0 \to E_2^{0,a} \to E_1^{0,a} \to E_1^{1,a} \to E_2^{1,a} \to 0$$

Page 2.

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots & E^{1,a-1} & E^{1,a} & E^{1,a+1} & \cdots \\
 & & & & \\
\cdots & E^{0,a-1} & E^{0,a} & E^{0,a+1} & \cdots
\end{array}$$

1.3. **Interprétation à 1 object.** La mise en commun de tous les f^a donne un endomorphisme f de F. Si $F^\bullet$ est un complexe, alors $f^2 = 0$. Soit

$$G = \frac{\ker\ f}{\mathrm{Im}\ f}$$

- f^2 mesure l'obstruction à ce que $F^\bullet$ soit un complexe
- Si $F^\bullet$ est un complexe, G mesure l'obstruction à ce que $F^\bullet$ soit exacte.