0.1. **Notations.** Soit $L \subset Z$ une droite twistorielle de l'espace Z des twisteurs d'une variété hyperkahlérienne M de dimension $2n$. Soit $O \in L$.

0.1.1. *Ouverts et cartes.* On se fixe un recouvrement de L par une famille finie d'ouverts W_i de Z. On notera U_i leurs traces sur L ($U_i = L \cap W_i$ ouvert de L). Et i, j, k désigneront toujours des indices variant dans l'ensemble fini du recouvrement.

On supposera que les W_i sont des polydisques de rayon 1 dans $\mathbb{C}^{2n+1}$ et de même pour les U_i dans $\mathbb{C}$. On notera sur $\mathbb{C}^d$, $|\cdot|$ pour la norme infinie sur toutes les coordonnées complexes. Ainsi

(1a)
$$W_i = \left\{(z_i, w_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2n} \mid |w_i| < 1 \text{ et } |z_i| < 1\right\}$$
(1b)
$$U_i = \left\{(z_i, w_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2n} \mid w_i = 0 \text{ et } |z_i| < 1\right\}$$

Un ouvert particulier W_0 contient le point $\zeta = 0$ de L.

Si une fonction h_i est définie sur W_i (resp. U_i) on note $h_i(z, w)$ au lieu de $h_i(z_i, w_i)$ (resp. $h_i(z)$ au lieu de $h_i(z_i)$)

Les changements de carte sont donnés par des fonctions f_{ik}, g_{ik} holomorphes sur W_k satisfaisant

(2a)
$$w_i = f_{ik}(z, w)$$
(2b)
$$z_i = g_{ik}(z, w)$$

Remarques.

- $f(z, 0)$ donne les changements de carte de la sous-variété L
- Faire le lien avec la connaissance approchée de f à "l'ordre 2" !

0.1.2. *Polynômes et autres notations.* On notera en majuscule les polynômes homogènes en t.

(3)
$$A(t) = \frac{a}{16b} \sum_{s \geq 1} \frac{b}{s^2} (t_1 + \cdots + t_{4n})^s = \sum_{\underline{u} \in \mathbb{N}^{4n}} A_{\underline{u}} t^{\underline{u}}$$

Pour f série formelle en t, on notera

- $[f]^m$ la partie polynomiale de f de degré m.
- $[f]_m$ la partie homogène de f de degré m.

0.2. **Le fibré normal.** Le fibré normal de L dans Z, noté N s'identifie à $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2n}$, ses sections globales forment donc un $\mathbb{C}$-ev de dimension $4n$ qui s'identifie naturellement aux polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{C}^{2n}$.

(4)
$$H^0(L, N) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) \otimes \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{C}[\zeta]^1 \otimes \mathbb{C}^{2n}$$

Modulo cette identification, une section globale s de cet espace est donc donnée par

(5)
$$s(\zeta) = a + \zeta a' \qquad a, a' \in \mathbb{C}^{2n}$$

On construit une base $\beta = (\alpha_s, \alpha'_s)_s$ de cet espace de la manière suivante :

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}$ des sections globales qui évalués en O forment la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. C'est-à-dire $\alpha_s(\zeta) = a_s = (\delta_s^r)_r \in \mathbb{C}^{2n}$.
- $\alpha'_1, \cdots, \alpha'_{2n}$ des sections globales qui s'annulent en O tandis que leurs dérivées forment la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. C'est-à-dire $\alpha'_s(\zeta) = \zeta a'_s = (\zeta \delta_s^r)_r \in \mathbb{C}^{2n}$.

On désignera par $t \in \mathbb{C}^{4n}$ une section de $H^0(L, N)$ vue dans la base β, au besoin on notera $t = (\tau, \tau') \in \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2n}$ les composantes sur α et α'. Réécrire tout ça dans les cartes U_i!

Remarque : on s'intéressera plutôt aux sections s'annulant en $\zeta = 0$ c'est-à-dire aux sections pour lesquelles $\tau = 0$.

0.3. **But.** On cherche à construire un $\varepsilon > 0$ et pour tout i des fonctions $\varphi_i(z, t)$ holomorphes sur $|z_i| < 1$ et $|t| < \varepsilon$, à valeur dans $\mathbb{C}^{2n}$, satisfaisant

(i) *convergence en norme infinie*
$$\forall |t| < \varepsilon,\ \forall |z_i| < 1, \quad |\varphi_i(z_i, t)| < 1$$

(ii) *extension d'une section de fibré normal*
$$[\varphi_i(z, t)]^1 = \sum_{s=1}^{4n} t_s \beta_s(z_i) \text{pas de sens!}$$

(iii) *respect des changements de carte* (ou condition de *recollement*)
$$\varphi_i(g_{ik}(z, \varphi), t) = f_{ik}(z, \varphi)$$

(iv) *condition de domination*
$$\varphi_i(z, t) \ll A(t)$$

(v) *conditions ponctuelle et angulaire*

(6a)
$$[\varphi_0(0,t)]^m = [\varphi_0(0,t)]^1 = \sum_{s=1}^{2n} \tau_s \alpha_s(0) = \tau$$

(6b)
$$\left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(0,t)\right]^m = \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(0,t)\right]^1 = \sum_{s=1}^{2n} \tau'_s \frac{\partial \alpha'_s}{\partial z}(0) = \tau'$$

Des fonctions $\varphi_i(z,t)$ satisfaisant (ii), (iii),et (v) sont appelées *solutions formelles.* Elles seront définies comme série formelle en t à coefficients holomorphes en z. Sous les hypothèses supplémentaires (i), et (iv), ces séries convergent sur un petit polydisque en t et donnent lieu à une famille de déformations de L dans Z : la courbe $L_t \subseteq Z$ d'équation $\{w_i = \varphi_i(z,t)\}$ est alors une déformation de L d'équation $\{w_i = 0\}$.

Pour obtenir la propriété (iii) on essayera de l'obtenir à tous les ordres

$$[\varphi_i(g_{ik}(z,\varphi),t)]_m = [f_{ik}(z,\varphi)]_m \tag{7}$$

ce qui équivaut à demander

$$[\varphi_i^m(g_{ik}(z,\varphi^m),t)]_m = [f_{ik}(z,\varphi^m)]_m \tag{8}$$

Ainsi il semble possible de construire φ par récurrence sur m.

0.4. Preuve d'existence de déformation. On raisonne par récurrence : on définit φ^1 par l'équation (ii), il est clair par définition que φ^1 satisfait (8) pour $m = 1$.

Supposons que l'on ait construit φ^m satisfaisant les conditions formelles (ii), et (8),et (v) à l'ordre m. Alors on souhaite ajouter à φ^m un polynôme homogène Φ_{m+1} de degré $m+1$ pour que $\varphi^{m+1} = \varphi^m + \Phi_{m+1}$ satisfasse (8),et (v) à l'ordre $m+1$.

Par hypothèse de récurrence, la relation de recollement (8), est satisfaite à l'ordre m, ainsi

$$\varphi_i^m(g_{ik}(z,\varphi^m),t) - f_{ik}(z,\varphi^m) \tag{9}$$

est une série formelle en t de valuation au moins $m+1$. Soit donc $\Psi_{m+1}(=\Psi_{ik,m+1})$ la partie homogène de degré $m+1$. KODAIRA l'appelle *Obstruction d'ordre m.*

On a la relation suivante (à l'ordre $m+1$) :

$$\Psi_{ik}(z_k) = \Psi_{ij}(z_j) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial w}(z_j)\Psi_{jk}(z_k) \tag{10}$$

que l'on notera abusivement

$$\Psi_{ik} = \Psi_{ij} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial w}\Psi_{jk} \tag{11}$$

ou $z \in U_i \cap U_j \cap U_k$ est considéré comme z_i, z_j ou z_k suivant le besoin. Et ils sont reliés par les changements de carte de V, c'est-à-dire :

$$z_i = f_{ik}(z_k, 0) \quad \ldots \tag{12}$$

Ainsi Ψ est une section de $H^1(L,N)$ en z à coefficients dans les polynômes homogènes de degré $m+1$ en t. Par hypothèse, $H^1 = 0$ dont Ψ est le 1-cobord d'une 0-cochaîne $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_{i,m+1}(z_i,t))_i$ à coefficients dans les polynômes homogènes de degré $m+1$ en t.

$$\Psi_{ik} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial w}\tilde{\Phi}_k - \tilde{\Phi}_i \tag{13}$$

Deux telles cochaînes Ψ diffèrent d'une section globale de N à coefficients dans les polynômes homogènes en t de degré $m+1$: $H^0(L,N) \otimes \mathbb{C}[t]_{m+1}$.

Que veut-on imposer à $\tilde{\Phi}_i$? On ne demande qu'à $\tilde{\Phi}_0$ de satisfaire certaines conditions (car toutes nos hypothèses sont dans la carte "0") : les conditions pour que φ^{m+1} satisfasse (6a) et (6b).

On peut simplement imposer les mêmes contraintes à $\tilde{\Phi}_0$ que l'on peut imposer à une section de $H^0(L,N)$: Fixons un choix de $\tilde{\Phi}_0$, alors

- $\tilde{\Phi}_0(0,t)$ est un polynôme homogène en t de degré $m+1$ à coefficients dans $\mathbb{C}^{2n}$ vu comme N_0 la fibre de N au dessus de $z_0 = 0$.
- $\partial_z\tilde{\Phi}_0(0,t)$ est un un polynôme homogène en t de degré $m+1$ à coefficients dans $\mathbb{C}^{2n}$ vu comme T_0N_0 le tangent en 0 à la fibre de N au dessus de $z_0 = 0$.

Par les remarques du début, il existe une unique section U_t globale de N sur L à coefficients homogènes de degré $m+1$ en t telle que

$$U_t(0) = \tilde{\Phi}_0(0,t) \tag{14a}$$

$$\partial_z U_t(0) = \partial_z\tilde{\Phi}_0(0,t) \tag{14b}$$

En prenant dès lors $\Phi := \tilde{\Phi} - U_t$; Le polynôme homogène de degré $m+1$ en t à coefficient 0-cochaînes Φ satisfait toujours (13).

Ainsi $\varphi^{m+1} = \varphi^m - \Phi$ est un polynôme de degré $m+1$ en t à coefficients dans les fonctions holomorphes en z. Il satisfait toujours (ii), car il n'a été modifié qu'à l'ordre $m+1 \geq 2$ en t. De plus un calcul rapide permet de voir que

$$\begin{aligned} &\varphi_i^{m+1}(g_{ik}(z,\varphi^{m+1}),t) - f_{ik}(z,\varphi^{m+1}) \\ &= \varphi_i^m(g_{ik}(z,\varphi^m),t) - f_{ik}(z,\varphi^m) - \Phi_{ik,m+1} \\ &\qquad + o(t^{m+1}) \end{aligned} \tag{15}$$

qui est donc une série formelle en t de valuation au moins $m+2$. Ainsi φ^{m+1} satisfait (8) à l'ordre $m+1$.

Reste à vérifier la condition (v). Par hypothèse, φ^m la vérifiait à l'ordre m, ainsi c'est toujours le cas pour φ^{m+1}. Reste donc à vérifier que $\varphi_{0,m+1}(0,t) = 0$ et $\dfrac{\partial \varphi_{0,m+1}}{\partial w}(0,t) = 0$. Or $\varphi_{m+1} = \tilde{\Phi}_{m+1} - U_t$ est construit pour vérifier ces propriétés : cf. (14).

0.5. **Convergence.** On cherche à montrer que la solution formelle construite φ satisfait (i) et (iv) pour un certain $\varepsilon > 0$.

On peut dans un premier temps supposer que les changements de carte f_{ij} sur L sont bornés et à dérivée en w bornée. Dès lors les sections globales du fibré normal : β_s sont bornées sur chaque U_i. Il faut bien comprendre pourquoi !? En particulier, je ne suis plus si sûr que toute variété peut s'écrire comme recouvrement de boules unités (uniformisation de Riemann ?) et quand bien même pourquoi les changements de carte seraient bornés uniformément ?

Par suite, en choisissant a suffisamment grand, on a :

$$[\varphi_i(z,t)]^1 \ll \frac{a}{16}(t_1 + \cdots + t_{4n}) \ll A(t) \tag{16}$$

On notera $r = 2n$.

Supposons dès lors que pour un certain $m \geq 1$, on ait $\varphi^m \ll A(t)$. En suivant Kodaira

...

$$\Psi_{ik}(z,t) \ll c_3 A(t) \tag{17}$$

où $\Psi = \Psi_{m+1}$ est la m-ième obstruction et c_3 ne dépend pas de m

On veut vraiment connaître b. Il va falloir déterminer

- La constante c_4 de Kodaira qui assure la continuité de δ^{-1} et dont l'existence est un argument non-constructif.
- La norme sup des α'_s (remarque aucune hypothèse sur les α_s)
- La dépendance de b vis à vis du recouvrement. On peut espérer avoir un recouvrement d'un voisinage de L par 2 ouverts de carte, mais ce ne seront sans doute pas des boules unités...

0.6. **Choix d'un bon cobord.** On notera $E = N \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]_{m+1}$ le fibré des directions normales à L à coefficients dans les polynômes homogènes en t de degré $m+1$. Il est de rang $2n \times \binom{4n+m}{m+1}$. Cependant ses changements de trivialisation ne sont que des matrices diagonales à valeur dans $\mathbb{C}[\zeta]^1$.

On définit pour f holomorphe sur U_i à valeur dans $\mathbb{C}^d$,

$$|f|_{i,\infty} = \sup_{p \in U_i} |f(p)| \tag{18a}$$

$$|f|_{i,2} = \left(\int_{U_i} |f(p)|^2 \,\mathrm{d}p \right)^{1/2} \tag{18b}$$

Et par suite pour f section sur L d'un fibré hermitien de dimension d trivialisé par les U_i,

$$\|f\|_\infty = \sup_i |f|_{i,\infty} \tag{19a}$$

$$\|f\|_2 = \sup_i |f|_{i,2} \tag{19b}$$

Ces deux normes dépendent du recouvrement $\mathfrak{U}$ (au moins (19b)).

Lemme 1

Il existe une constante $\gamma_1 > 0$ telle que pour tout $\Psi \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, E)$, il existe h une 1-forme sur L, $\bar\partial$-fermée à valeur dans E satisfaisant

(i) $[\Psi]_{\check{H}^1} = [h]_{H^1_{Dol}}$ *via l'isomorphisme du théorème de* Dolbeault.

(ii) $\|h\|_{Dol} \leq \gamma_1 \|\Psi\|_{\check{C}}$

Lemme 2 (Hörmander)

Il existe une constante $\gamma_2 > 0$ telle que pour toute 1-forme $\bar\partial$-fermée h à valeur dans L, il existe g une section de L satisfaisant

(i) $\bar\partial g = h$

(ii) $\|g\|_{Dol} \leq \gamma_2 \|h\|_{Dol}$

Lemme 3

Il existe une constante $\gamma_3 > 0$ telle que pour toute section g sur L de E, il existe une cochaîne Φ sur $\mathfrak{U}$ à valeur dans L satisfaisant

(i) $\Phi_i = g|_{U_i}$ *en un certain sens*

(ii) $\|\Phi\|_{\check{C}} \leq \gamma_3 \|g\|_{Dol}$