Préservation du fibré normal par déformation

Table des matières

1 Notations

Soit Z une variété complexe, $(L(t))_{\in\Delta}$ un famille de déformations de $L = L(0)$.

On recouvre Z par des ouverts Z_a de trace L_a sur L. On peut supposer que Z_a est un polydique de $\mathbb{C}^n$ avec coordonnées (v_a, w_a) et L_a est défini par l'équation $w_a = 0$. Les v_a sont alors des coordonnées locales sur L.

Quitte à restreindre Δ, on peut supposer que $L(t)$ a pour équation

$$w_a = \varphi_a(v_a, t)$$

dans Z_a. Les v_a sont donc également des coordonnées locales sur $L(t)$.

On se donne les changements de carte de Z sous la forme

$$v_b = f_{ba}(v_a, w_a) \tag{1}$$

$$w_b = g_{ba}(v_a, w_a) \tag{2}$$

En particulier, les changements de carte de L sont donnés par

$$v_b = f_{ba}(v_a, 0)$$

et ceux de $L(t)$ par

$$v_b = f_{ba}(v_a, \varphi_a(v_a, t))$$

2 Fibré normal

Toujours sur l'hypothèse de petitesse de Δ, les coordonnées w_a sont des coordonnées locales sur Z transverses à tous les $L(t)$.

Leurs changements de carte au dessus d'un point de coordonnée v_a de L est donné par la relation

$$w_b = g_{ba}(v_a, w_a)$$

Ainsi les cocycles de Cech $\epsilon_{ba}(v, t)$ qui définissent les changements de trivialisation du fibré normal de $L(t)$ dans Z sont donnés par

$$\epsilon_{ba}(v_a, t) = \frac{\partial g_{ba}}{\partial w}(v_a, \varphi(v_a, t))$$

On veut construire un isomorphisme entre le fibré normal à $L(t)$ et le fibré normal à L. Pour cela il suffit de relier $\epsilon_\bullet(t)$ et $\epsilon_\bullet(0)$ par un cobord, plus précisément, on cherche à résoudre

$$\epsilon_{ba}(v_a, t)\alpha_a(v_a, t) = \alpha_b(v_b, t)\epsilon_{ba}(v_b, 0) \tag{3}$$

d'inconnue $\alpha_\bullet(v, t)$ matrice inversible.

3 Développement en série entière

À l'ordre 0 en t la relation (3) nous donne $\alpha_\bullet(v,0) = \mathrm{Id}$.

À l'ordre 1, on trouve

$$(\partial_t \epsilon_{ba})(v_a, 0) + \epsilon_{ba}(v_a, 0)(\partial_t \alpha_a)(v_a, 0) = (\partial_t \alpha_b)(v_b, 0)\epsilon_{ba}(v_a, 0)$$

ou encore

$$(\partial_t \alpha_b)(v_b, 0) = (\partial_t \alpha_a)(v_a, 0) + \epsilon_{ba}(v_a, 0)^{-1}(\partial_t \epsilon_{ba})(v_a, 0)$$

À l'ordre k, avec la notation des indices implicites

$$(\partial_t^k \alpha_b) = (\partial_t^k \alpha_a) + \epsilon_{ba}^{-1}\left(k\partial_t^{k-1}\alpha_a \partial_t \epsilon_{ba} + \cdots + \partial_t^k \epsilon_{ba}\right)$$

où tout est évalué en $(v, 0)$.

On peut imposer $\alpha_0(v,t) = \mathrm{Id}$ pour tout v, t et par connexité, la relation précédente définie entièrement $\alpha_\bullet$ sur $L \times \Delta$.