

Préservation du fibré normal par déformation

Table des matières

1	Notations	1
2	Fibré normal	1
3	Développement en série entière	2
4	Convergence	2

1 Notations

Soit Z une variété complexe, $(L(t))_{t \in \Delta}$ une famille de déformations de $L = L(0)$.

On recouvre Z par des ouverts Z_a de trace L_a sur L . On peut supposer que Z_a est un polydisque de \mathbb{C}^n avec coordonnées (v_a, w_a) et L_a est défini par l'équation $w_a = 0$. Les v_a sont alors des coordonnées locales sur L .

Quitte à restreindre Δ , on peut supposer que $L(t)$ a pour équation

$$w_a = \varphi_a(v_a, t)$$

dans Z_a . Les v_a sont donc également des coordonnées locales sur $L(t)$.

On se donne les changements de carte de Z sous la forme

$$v_b = f_{ba}(v_a, w_a) \tag{1}$$

$$w_b = g_{ba}(v_a, w_a) \tag{2}$$

En particulier, les changements de carte de L sont donnés par

$$v_b = f_{ba}(v_a, 0)$$

et ceux de $L(t)$ par

$$v_b = f_{ba}(v_a, \varphi_a(v_a, t))$$

2 Fibré normal

Toujours sur l'hypothèse de petitesse de Δ , les coordonnées w_a sont des coordonnées locales sur Z transverses à tous les $L(t)$.

Leurs changements de carte au dessus d'un point de coordonnée v_a de L est donné par la relation

$$w_b = g_{ba}(v_a, w_a)$$

Ainsi les cocycles de Čech $\epsilon_{ba}(v, t)$ qui définissent les changements de trivialisation du fibré normal de $L(t)$ dans Z sont donnés par

$$\epsilon_{ba}(v_a, t) = \frac{\partial g_{ba}}{\partial w}(v_a, \varphi(v_a, t))$$

On veut construire un isomorphisme entre le fibré normal à $L(t)$ et le fibré normal à L . Pour cela il suffit de relier $\epsilon_{\bullet}(t)$ et $\epsilon_{\bullet}(0)$ par un cobord, plus précisément, on cherche à résoudre

$$\epsilon_{ba}(v_a, t) \alpha_a(v_a, t) = \alpha_b(v_b, t) \epsilon_{ba}(v_b, 0) \tag{3}$$

d'inconnue $\alpha_{\bullet}(v, t)$ matrice inversible.

3 Développement en série entière

À l'ordre 0 en t la relation (3) nous donne $\alpha_\bullet(v, 0) = \text{Id}$.

À l'ordre 1, on trouve

$$(\partial_t \epsilon_{ba})(v_a, 0) + \epsilon_{ba}(v_a, 0)(\partial_t \alpha_a)(v_a, 0) = (\partial_t \alpha_b)(v_b, 0) \epsilon_{ba}(v_a, 0)$$

ou encore

$$(\partial_t \alpha_b)(v_b, 0) = (\partial_t \alpha_a)(v_a, 0) + \epsilon_{ba}(v_a, 0)^{-1} (\partial_t \epsilon_{ba})(v_a, 0)$$

À l'ordre k , avec la notation des indices implicites

$$(\partial_t^k \alpha_b) = (\partial_t^k \alpha_a) + \epsilon_{ba}^{-1} (k \partial_t^{k-1} \alpha_a \partial_t \epsilon_{ba} + \cdots + \partial_t^k \epsilon_{ba})$$

où tout est évalué en $(v, 0)$.

On peut imposer $\alpha_0(v, t) = \text{Id}$ pour tout v, t et par connexité, la relation précédente définie entièrement α_\bullet sur $L \times \Delta$.

4 Convergence

On voudrait une propriété du genre, pour tout $t \in \Delta$ et pour tout a , pour tout $v = v_a \in L_a$

$$\alpha_a(v, t) \ll A(t)$$

où

$$A(t) = \frac{\lambda}{16\chi} \sum_{s \geq 1} \frac{\chi}{s^2} (t_1 + \cdots + t_{4n})^s = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{4n}} A_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{u}}$$

- Le fait d'avoir t de dimension $4n \dots$ est perturbant, ce n'est pas ce que je cherchais à faire au début. D'autre part c'est peut-être la meilleure chose à faire pour avoir uniformité de la convergence dans toutes les directions.

En dim 1 ((réelle ou complexe?))

$$A(t) = \frac{\lambda}{16} \sum_{s \geq 1} \frac{t^s}{s^2}$$

qui a un rayon de convergence de 1. Et $u(t) \ll v(t)$ signifie que tous les coefficients de u sont majorés en valeur absolue par les coefficients de v (positifs).