0.1. **Notations.** Soit $L \subset Z$ une droite twistorielle de l'espace Z des twisteurs d'une variété hyperkahlérienne M de dimension $2n$. Soit $O \in L$. On se fixe un recouvrement de L par une famille finie d'ouverts W_i de Z. On notera U_i leurs traces sur L ($U_i = L \cap W_i$ ouvert de L). Et i, j, k désigneront toujours des indices variant dans l'ensemble fini du recouvrement.

Un ouvert particulier W_0 contient le point $\zeta = 0$ de L.

On notera en majuscule les polynômes homogènes en t.

Si une fonction h_i est définie sur W_i (resp. U_i, V_i) on note $h_i(z, w)$ au lieu de $h_i(z_i, w_i)$ (resp. $h_i(z)$ au lieu de $h_i(z_i)$ et $h_i(w)$ au lieu de $h_i(w_i)$)

On notera sur $\mathbb{C}^d$, $|\cdot|$ pour la norme infinie sur toutes les coordonnées complexes.

$$(1)\quad A(t) = \frac{a}{16b}\sum_{s\geq 1}\frac{b}{s^2}(t_1+\cdots+t_{4n})^s = \sum_{\underline{\mathrm{u}}\in\mathbb{N}^{4n}} A_{\underline{\mathrm{u}}} t^{\underline{\mathrm{u}}}$$

Pour f série formelle en t, on notera

- $[f]^m$ la partie polynomiale de f de degré m.
- $[f]_m$ la partie homogène de f de degré m.

0.2. **Le fibré normal.** Le fibré normal de L dans Z, noté N s'identifie à $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2n}$, ses sections globales forment donc un $\mathbb{C}$-ev de dimension $4n$ qui s'identifie naturellement aux polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{C}^{2n}$.

$$(2)\quad H^0(L, N) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) \otimes \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{C}[\zeta]^1 \otimes \mathbb{C}^{2n}$$

Modulo cette identification, une section globale s de cet espace est donc donnée par

$$(3)\qquad s(\zeta) = a + \zeta a' \qquad a, a' \in \mathbb{C}^{2n}$$

On construit une base $\beta = (\alpha_i, \alpha'_i)$ de cet espace de la manière suivante :

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}$ des sections globales qui évalués en O forment la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. C'est-à-dire $\alpha_i(\zeta) = a_i = (\delta_i^j)_j \in \mathbb{C}^{2n}$.
- $\alpha'_1, \cdots, \alpha'_{2n}$ des sections globales qui s'annulent en O tandis que leurs dérivées forment la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. C'est-à-dire $\alpha'_i(\zeta) = \zeta a'_i = (\zeta\delta_i^j)_j \in \mathbb{C}^{2n}$.

On désignera par $t \in \mathbb{C}^{4n}$ une section de $H^0(L, N)$ vue dans la base β, au besoin on notera $t = (\tau, \tau') \in \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2n}$ les composantes sur α et α'.

Remarque : on s'intéressera plutôt aux sections s'annulant en $\zeta = 0$ c'est-à-dire aux sections pour lesquelles $\tau = 0$.

0.3. **But.** On cherche à construire un $\varepsilon > 0$ et pour tout i des fonctions $\varphi_i(z, t)$ holomorphes sur $|z_i| < 1$ et $|t| < \varepsilon$, satisfaisant

(i) *convergence en norme infinie*

$$\forall |t| < \varepsilon,\ \forall |z_i| < 1, \quad |\varphi_i(z_i, t)| < 1$$

(ii) *extension d'une section de fibré normal*

$$[\varphi_i(z, t)]_1 = \sum_{s=1}^{4n} t_s \beta_s(z_i)$$

(iii) *respect des changements de carte* (ou condition de *recollement*)

$$\varphi_i(g_{ik}(z, \varphi), t) = f_{ik}(z, \varphi)$$

(iv) *condition de domination*

$$\varphi_i(z, t) \ll A(t)$$

(v) *conditions ponctuelle et angulaire*

$$(4a)\quad [\varphi_0(0, t)]^m = [\varphi_0(0, t)]^1 = \sum_{s=1}^{2n} \tau_s \alpha_s(0) = \tau$$

(4b)

$$\left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(0, t)\right]^m = \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(0, t)\right]^1 = \sum_{s=1}^{2n} \tau'_s \frac{\partial \alpha'_s}{\partial z}(0) = \tau'$$

Des fonctions $\varphi_i(z, t)$ satisfaisant (ii), (iii),et (v) sont appelées *solutions formelles.* Elles seront définies comme série formelle en t à coefficients holomorphes en z. Sous les hypothèses supplémentaires (i), et (iv), ces séries convergent sur un petit polydisque en t et donnent lieu à une famille de déformations de L dans Z.

Pour obtenir la propriété (iii) on essayera de l'obtenir à tous les ordres

$$(5)\qquad [\varphi_i(g_{ik}(z, \varphi), t)]_m = [f_{ik}(z, \varphi)]_m$$

ce qui équivaut à demander

$$(6)\qquad [\varphi_i^m(g_{ik}(z, \varphi^m), t)]_m = [f_{ik}(z, \varphi^m)]_m$$

Ainsi il semble possible de construire φ par récurrence sur m.

0.4. **Preuve d'existence de déformation.** On raisonne par récurrence : on définit φ^1 par l'équation (ii), il est clair par définition que φ_1 satisfait (6) pour $m = 1$.

Supposons que l'on ait construit φ^m satisfaisant les conditions formelles (ii), et (6),et (v) à l'ordre m. Alors on souhaite ajouter à φ^m un polynôme homogène Φ_{m+1} de degré $m + 1$ pour que $\varphi^{m+1} = \varphi^m + \Phi_{m+1}$ satisfasse (6),et (v) à l'ordre $m + 1$.

Par hypothèse de récurrence, la relation de recollement (6), est satisfaite à l'ordre m, ainsi

$$(7)\qquad \varphi_i^m(g_{ik}(z, \varphi^m), t) - f_{ik}(z, \varphi^m)$$

est une série formelle en t de valuation au moins $m+1$. Soit donc $\Psi_{m+1}(= \Psi_{ik,m+1})$ la partie homogène de degré $m+1$. Kodaira l'appelle *Obstruction d'ordre m.*

On a la relation suivante (à l'ordre $m + 1$) :

$$(8)\qquad \Psi_{ik}(z_k) = \Psi_{ij}(z_j) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial w}(z_j)\Psi_{jk}(z_k)$$

que l'on notera abusivement

$$\Psi_{ik} = \Psi_{ij} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial w} \Psi_{jk} \tag{9}$$

ou $z \in U_i \cap U_j \cap U_k$ est considéré comme z_i, z_j ou z_k suivant le besoin. Et ils sont reliés par les changements de carte de V, c'est-à-dire :

$$z_i = f_{ik}(z_k, 0) \quad \dots \tag{10}$$

Ainsi Ψ est une section de $H^1(L, N)$ en z à coefficients dans les polynômes homogènes de degré $m+1$ en t. Par hypothèse, $H^1 = 0$ dont Ψ est le 1-cobord d'une 0-cochaîne $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_{i,m+1}(z_i, t))_i$ à coefficients dans les polynômes homogènes de degré $m+1$ en t.

$$\Psi_{ik} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial w} \tilde{\Phi}_k - \tilde{\Phi}_i \tag{11}$$

Deux telles cochaînes Ψ diffèrent d'une section globale de N à coefficients dans les polynômes homogènes en t de degré $m+1$: $H^0(L, N) \otimes \mathbb{C}[t]_{m+1}$.

Que veut-on imposer à $\tilde{\Phi}_i$? On ne demande qu'à $\tilde{\Phi}_0$ de satisfaire certaines conditions (car toutes nos hypothèses sont dans la carte "0") : les conditions pour que φ^{m+1} satisfasse (4a) et (4b).

On peut simplement imposer les mêmes contraintes à $\tilde{\Phi}_0$ que l'on peut imposer à une section de $H^0(L, N)$: Fixons un choix de $\tilde{\Phi}_0$, alors

- $\tilde{\Phi}_0(0, t)$ est un polynôme homogène en t de degré $m+1$ à coefficients dans $\mathbb{C}^{2n}$ vu comme N_0 la fibre de N au dessus de $z_0 = 0$.
- $\partial_z \tilde{\Phi}_0(0, t)$ est un un polynôme homogène en t de degré $m+1$ à coefficients dans $\mathbb{C}^{2n}$ vu comme $T_0 N_0$ le tangent en 0 à la fibre de N au dessus de $z_0 = 0$.

Par les remarques du début, il existe une unique section U_t globale de N sur L à coefficients homogènes de degré $m+1$ en t telle que

$$U_t(0) = \tilde{\Phi}_0(0, t) \tag{12a}$$

$$\partial_z U_t(0) = \partial_z \tilde{\Phi}_0(0, t) \tag{12b}$$

En prenant dès lors $\Phi := \tilde{\Phi} - U_t$; Le polynôme homogène de degré $m+1$ en t à coefficient 0-cochaînes Φ satisfait toujours (11).

Ainsi $\varphi^{m+1} = \varphi^m - \Phi$ est un polynôme de degré $m+1$ en t à coefficients dans les fonctions holomorphes en z. Il satisfait toujours (ii), car il n'a été modifié qu'à l'ordre $m+1 \geq 2$ en t. De plus un calcul rapide permet de voir que

$$\begin{aligned} \varphi_i^{m+1}(g_{ik}(z, \varphi^{m+1}), t) - f_{ik}(z, \varphi^{m+1}) \\ = \varphi_i^m(g_{ik}(z, \varphi^m), t) - f_{ik}(z, \varphi^m) - \Phi_{ik,m+1} \\ + o(t^{m+1}) \end{aligned} \tag{13}$$

qui est donc une série formelle en t de valuation au moins $m+2$. Ainsi φ^{m+1} satisfait (6) à l'ordre $m+1$.

Reste à vérifier la condition (v).

0.5. **Convergence.** On cherche à montrer que la solution formelle construite φ satisfait (i) et (iv) pour un certain $\varepsilon > 0$.

On peut dans un premier temps supposer que les changements de carte f_{ij} sur L sont bornés et à dérivée en w bornée. Dès lors les sections globales du fibré normal : β_s sont bornées sur chaque U_i. Il faut bien comprendre pourquoi !? En particulier, je ne suis plus si sûr que toute variété peut s'écrire comme recouvrement de boules unités (uniformisation de Riemann ?) et quand bien même pourquoi les changements de carte seraient bornés uniformément ?

Par suite, en choisissant a suffisamment grand, on a :

$$[\varphi_i(z, t)]^1 \ll \frac{a}{16}(t_1 + \cdots + t_{4n}) \ll A(t) \tag{14}$$

On notera $r = 2n$.

Supposons dès lors que pour un certain $m \geq 1$, on ait $\varphi^m \ll A(t)$. En suivant Kodaira

$\dots$

$$\Psi_{ik}(z, t) \ll c_3 A(t) \tag{15}$$

où $\Psi = \Psi_{m+1}$ est la m-ième obstruction et c_3 ne dépend pas de m

On veut vraiment connaître b. Il va falloir déterminer

- La constante c_4 de Kodaira qui assure la continuité de δ^{-1} et dont l'existence est un argument non-constructif.
- La norme sup des α'_s (remarque aucune hypothèse sur les α_s)
- La dépendance de b vis à vis du recouvrement. On peut espérer avoir un recouvrement d'un voisinage de L par 2 ouverts de carte, mais ce ne seront sans doute pas des boules unités...