1 Une première preuve

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

> Montrons que $\exists y \in \mathbb{R}, x > y$.
>
> On pose $y = x - 1$.
>
> > Montrons que $x > y$.
> >
> > On a bien $y \in \mathbb{R}$ et de plus comme $-1 < 0$, on a $x - 1 < x$ et donc $y < x$. Ce qui peut se réécrire $x > y$.
>
> On a vu que y convient. On a donc montré $\exists y \in \mathbb{R}, x > y$.

Ce raisonnement est valable quel que soit x. Ainsi on a montré $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y$. CQFD.

2 Par l'absurde

Montrons que $0 \neq 1$.

On raisonne par l'absurde en supposant $0 = 1$.

> On a donc $1 = 2$ ou encore par symétrie, $2 = 1$. Or le pape et moi somme deux personnes distinctes donc puisque $2 = 1$, le pape et moi somme une seule et même personne. Autrement dit : je suis le pape. C'est absurde car je ne parle pas latin et je n'ai même pas de chapeau.

On a aboutit a une contradiction, il était donc absurde de supposer $0 = 1$. Ainsi on a montré que $0 \neq 1$.

3 Continuité de la fonction sinus

Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| < \eta) \Rightarrow (|\sin(x)| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Montrons que $\exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| < \eta) \Rightarrow (|\sin(x)| < \varepsilon)$.

On pose $\eta = \varepsilon$.

On a $\eta > 0$ par définition de ε.
Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, (|x| < \eta) \Rightarrow (|\sin(x)| < \varepsilon)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que $(|x| < \eta) \Rightarrow (|\sin(x)| < \varepsilon)$.

On suppose $|x| < \eta$.

Montrons que $|\sin(x)| < \varepsilon$.

Par inégalité des accroissement finis appliqué à la fonction $\mathcal{C}^1$ sinus sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ suivant le signe de x), on a $|\sin(x) - \sin(0)| \leq 1 \times |x - 0|$ ou encore $|\sin(x)| \leq |x|$.
Dès lors, comme $|x| < \eta$ et $\eta = \varepsilon$ on a $|\sin(x)| < \varepsilon$.

On a montré $|\sin(x)| < \varepsilon$ sous l'hypothèse $|x| < \eta$. Ainsi on a montré $(|x| < \eta) \Rightarrow (|\sin(x)| < \varepsilon)$

Ce raisonnement est valable quel que soit x. Donc on a montré $\forall x \in \mathbb{R}, (|x| < \eta) \Rightarrow (|\sin(x)| < \varepsilon)$.

On a vu que η convient.
Donc on a montré $\exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| < \eta) \Rightarrow (|\sin(x)| < \varepsilon)$.

Ce raisonnement est valable quel que soit ε. Et finalement on a montré que la fonction sin est continue en 0 (en utilisant qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$, mais là n'est pas la question).

4 Disjonction de cas

4.1 Connexité des intervalles

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

Montrons que l'intervalle $[a, b[$ est connexe.

c'est-à-dire :

Montrons que $\forall u, v \in [a, b[\,, [u, v] \subseteq [a, b[\,.$

Soit $u, v \in [a, b[\,.$

Montrons que $[u, v] \subseteq [a, b[\,.$

Distinguons les cas :

Cas 1 : $u > v$.

Dans ce cas $[u, v]$ est vide et l'inclusion est automatique.

Cas 2 : $u \leq v$.

Montrons que $\forall x \in [u, v]\,, x \in [a, b[\,.$

Soit $x \in [u, v]$.

Montrons que $x \in [a, b[\,.$

On a $u \leq x \leq v$ par définition de x, et de plus

- comme $u \in [a, b[\,$, alors $a \leq u$, et ainsi $a \leq u \leq x$
- et de même comme $v \in [a, b[\,$, alors $v < b$ et donc $x \leq v < b$.

En conclusion, par transitivité $a \leq x < b$ ce qui signifie que $x \in [a, b[\,.$

Ce raisonnement est valable quel que soit x. On a donc montré que $[u, v] \subseteq [a, b[$ dans ce cas.

L'inclusion étant vraie dans tous les cas, on a montré $[u, v] \subseteq [a, b[$

Ce raisonnement est valable quel que soit u, v. On a donc montré que $[a, b[$ est connexe.

4.2 Résolution d'une inéquation

Soit à résoudre $|x-3| \leq |2x-3|$

4.2.1 Analyse

Soit $x \in \mathbb{R}$ solution de l'inéquation.

Distinguons les cas :

Cas 1 : $x-3<0$.

Alors $|x-3| = -x+3$.
Distinguons les cas :

Sous-cas 1 : $2x-3 \geq 0$.

On a alors $|2x-3| = 2x-3$ et donc x vérifie $3-x \leq 2x-3$ ou encore $3x \geq 6$ c'est-à-dire $x \geq 2$. Or on a supposé $x < 3$ donc $x \in [2, 3[$.

Sous-cas 2 : $2x-3<0$.

On a alors $|2x-3| = -2x+3$ et donc x vérifie $3-x \leq 3-2x$ ou encore $x \leq 0$.

On peut donc avoir les sous-cas suivants : $x \in [2, 3[$ ou $x \leq 0$.

Cas 2 : $x-3 \geq 0$.

Alors $|x-3| = x-3$ et d'autre part $x \geq 3$ et donc $2x \geq 6$ ainsi $2x-3 \geq 0$. On a donc $|2x-3| = 2x-3$. Il s'en suit donc que x vérifie $x-3 \leq 2x-3$ ou encore $x \geq 0$. Ce qui est automatique sous notre hypothèse.

En conclusion on peut avoir les cas suivants : $x \leq 0$, $x \in [2, 3[$ et $x \geq 3$.

Ce raisonnement est valable quel que soit x. Ainsi toute solution de l'équation est dans $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.