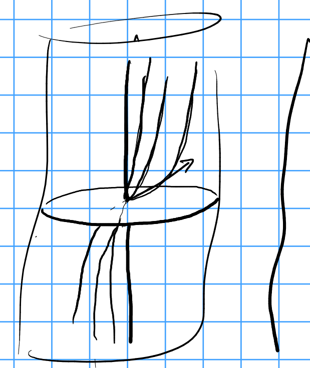
TWISTEURS

$$\begin{tikzcd}
 & \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sec}(Z) \\ \text{passant par } (pt) \end{array} \right\}_{(pt)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underset{(HK)}{M} \subseteq M^{\mathbb{C}} & & Z(M) \arrow[r] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

$$\longleftarrow\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim \ (pt)$$

$2n+1$

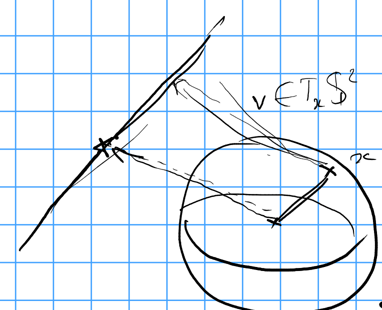


$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}(-1) \overset{?}{\simeq} \mathcal{O}(-1)_{\mathcal{O}(2)} \arrow[dl, "\text{droite passant par ce point}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Vect}(v) \text{ tautologique.}"] & \\
\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{C}^3 & & T\mathbb{P}^1 \simeq TS^2
\end{tikzcd}$$

droite réelle $\longleftarrow\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim$ (pt)

$\mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

droite $\longleftarrow\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim$ pt

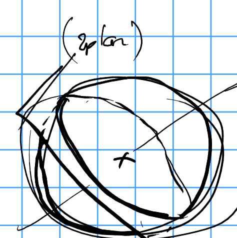


S^2

$$\begin{array}{c} Gr_{\mathbb{C}}(2,4) \\ \cup\!\!\!\shortmid \\ Gr_{\mathbb{R}}(2,4) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{array}$$

$S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 \subseteq \mathbb{C}^4$

Grand Cercle $\longleftarrow\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim$ (pt)



S^3

Dans $\mathbb{C}^4$ $\quad x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} + t\bar{t}$ forme hermitienne.

* $\mathbb{R}^4 \subseteq \mathbb{C}^4 \quad h(a,a) = 1 \iff a \in \mathbb{S}^3$
* $\mathbb{R}^3 \oplus i\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}^4 \quad h(a,a) = 1 \iff x^2+y^2+z^2 = 1+t^2 \qquad a \in \mathcal{H}^3$
* $\mathbb{R}^2 \oplus i\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^4 \quad h(a,a) = 1 \iff x^2+y^2 - (z^2+t^2) = 1$

$$\iff |x+iy|^2 - |z+it|^2 = 1$$
$$\iff (|x+iy| - |z+it|)\underbrace{(|x+iy| + |z-it|)}_{>0} = 1$$
$$\iff$$

* $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{C}^4 \quad h(a) = 1 \iff x^2 = 1+y^2+z^2+t^2$

$x > 1$ fixé : $(y,z,t) \in \sqrt{1-x^2}\,\mathbb{S}^3$

* $i\mathbb{R}^4 \subseteq \mathbb{C}^4 \quad h(a) = 1 \iff a \in \emptyset$

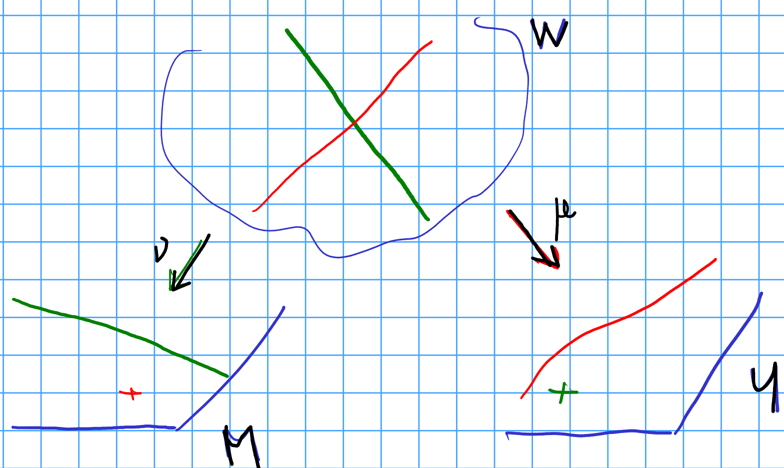
$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\nu"', "\text{proper.}"] \arrow[dr, "\mu", "\text{connected fibers.}"'] & \\ M & & Y \end{tikzcd}$$

avec μ, ν submersions holo

$\ker(\mu_*) \cap \ker(\nu_*) = 0$ in $TW \qquad (\dim W \leq \dim M + \dim Y)$

Assume $\forall x \in M \quad X = \nu^{-1}(x) \subseteq Z$

* $\mu|_X$ injective !
* $H^1(X, \mathcal{O}(N)) = 0 \qquad N = N_{\mu(X)/Y}$
* $\nu^\circ_* \mu^* : T_xM \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathcal{O}(N))$



$$0 \to \ker(\nu) \longrightarrow TW \longrightarrow \nu^*TM \to 0$$

$$\nu^*TM \simeq N_{X/W}$$

(Peut-on restreindre une suite exacte de faisceaux ... ?)

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Flag}(1\leq 2\leq 4) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Flag}(2\leq 4) & & \mathrm{Flag}(1\leq 4) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \overset{\substack{4n+1 \\ 5n \\ 6n-1}}{W} \arrow[dl, "\nu"', "\text{propre}"] \arrow[dr, "\mu", "\text{fibre connexe.}"'] & \\ \underset{2n}{M} \subseteq \underset{4n}{\mathrm{Sec}(Z)} & & \underset{2n+1}{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

$$W = \{\sigma : \mathbb{P}^1 \to Z,\ p\in Z \mid p \in \sigma(\mathbb{P}^1)\}$$

$$\nu^{-1}(pt) \cong \mathbb{P}^1$$

$$\mu^{-1}(p) \cong \{\sigma : \mathbb{P}^1 \to Z \mid \sigma \text{ passe par } p\}$$

$$\nu(\mu^{-1}(p)) \cap M = \{p_0\}$$

$$\dim(\nu(\mu^{-1}(p))) = 2n$$

$\mathrm{Sec}(Z)$ passant par ce pt $\rightsquigarrow$ (pt)

$$\dim(W) = 4n+1$$

$$W \subseteq M^{\mathbb{C}} \times Z$$

avec EQ $p \in \sigma(\mathbb{P}^1)$

$$\{(\sigma, \sigma(s)) \mid \sigma \in M^{\mathbb{C}},\ s \in \mathbb{P}^1\}$$

$$\begin{tikzcd} & W^{4n+1} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ M^{2n} \subseteq M^{\mathbb{C}\,4n} & & Z^{2n+1} \arrow[r] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

$$T_x M^{\mathbb{C}} \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)\otimes T_x M) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)\otimes \mathbb{C}^{2n}) \cong \mathbb{C}^{2n}\otimes\mathbb{C}^2$$

Si $x \in M$

Sinon ? On a toujours pour $\sigma \in M^{\mathbb{C}}$ $\quad N_{\sigma/Z} \cong \mathcal{O}(1)\otimes\mathbb{C}^{2n}$

Et donc comme $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)\otimes\mathbb{C}^{2n}) = 0$ par [KOD, complétude] $\quad T_\sigma M^{\mathbb{C}} \simeq H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z})$

Donc $M^{\mathbb{C}}$ lisse de dim $4n$.

et $T_\sigma M^{\mathbb{C}} \simeq H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z})$ en tant que $\mathbb{C}$-ev

$x \in M$ $\quad T_x M \subseteq T_x M^{\mathbb{C}} \simeq H^0(\mathbb{P}^1, N_{L_x/Z})$

$T_x M = (T_x M^{\mathbb{C}})^{Fix(\mathbb{R})}$

$I_x, J_x, K_x \in End(T_x M)$

donc $\quad i T_x M \cap T_x M = 0$

car $\overline{T_x M} = T_x M$

$T_x M$ $\quad \mathbb{R}$-ev de dim $4n$

↯ D'ailleurs la conj

$T_x M^{\mathbb{C}}$ $\quad \mathbb{C}$-ev de dim $4n$ $\quad \simeq \mathbb{C}[x_0, x_1]_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{2n}$

Qu'est ce que la conj sur $T_x M^{\mathbb{C}}$?

$$\bar{x} = \overline{x_0 a + x_1 b} \qquad a, b \in \mathbb{C}^{2n}$$
$$\| $$
$$x_0 \bar{a} + x_1 \bar{b} \qquad \bar{x}_0 \ ?$$

donc $\quad T_x M \simeq x_0 a + x_1 b \qquad a, b \in \mathbb{R}^{2n}$

$\forall \zeta \quad I_{\zeta, x}$ agit sur $T_x M$ par (magie) $\quad$ ex: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a x_0 + b x_1 \longmapsto -b x_0 + a x_1$

$\quad \underset{2n}{\longleftrightarrow} \ \underset{2n}{\longleftrightarrow}$

(Il ne semble pas y avoir de façon naturelle de le voir)

$$\begin{tikzcd} T_{(\sigma,p)} W \arrow[r] & W \arrow[r, "\mu"'] \arrow[d, "\nu"'] & Z \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^1 \arrow[l, bend left, "\sigma"] \\ & M^{\mathbb{C}} \ni \sigma & & \end{tikzcd}$$

$$T_{(\sigma,p)} W \simeq H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z}) \oplus T_{f(p)} \mathbb{P}^1$$
$$\simeq H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z}) \oplus (f^* T\mathbb{P}^1)_p$$

$$0 \longrightarrow \underset{4n}{\ker(df \circ d\mu)} \longrightarrow \underset{4n+1}{TW} \xrightarrow{df \circ d\mu} \underset{1}{f^* \mu^* T\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$$

$$K_W = (\Lambda^{4n} \ker d(f \circ \mu))(2) \qquad H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z})$$

$$0 \to T\sigma(\mathbb{P}^1) \longrightarrow TZ_{|\sigma} \longrightarrow N_{\sigma/Z} \longrightarrow 0$$

$\ker(df \circ d\mu) \subseteq \ker(d\mu)$

qui ne rencontre pas $\ker(d\nu)$

$$0 \longrightarrow \ker(d\nu) \longrightarrow TW \xrightarrow{d\nu} \nu^* TM^{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

donc $\quad \ker(df \circ d\mu) \xrightarrow[\sim]{\nu_*} TM^{\mathbb{C}}$

Ainsi $\quad 0 \longrightarrow TM^{\mathbb{C}} \longrightarrow TW \longrightarrow \mathcal{O}(2) \longrightarrow 0$

$$K_W = K_{M^{\mathbb{C}}} + \mathcal{O}(2)$$

$TM^{\mathbb{C}}_{|M} \simeq TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ... M n'est pas une sous variété complexe de $M^{\mathbb{C}}$ ...

$$0 \longrightarrow TM \otimes \mathbb{C} \longrightarrow TW_{|M} \longrightarrow \mathcal{O}(2)_{|M} \longrightarrow 0$$

$\otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M$ (

$$0 \longrightarrow TM \longrightarrow \mathcal{O}_M(TW) \longrightarrow \mathcal{O}_M(2) \longrightarrow 0 \quad ?$$

DOUTEUX ...

$I_\zeta^{\mathbb{C}}$ acting on $TM^{\mathbb{C}}_{|M}$

by $I_\zeta^{\mathbb{C}}(z \otimes \vec{v}) = z \otimes I_\zeta^{\mathbb{C}} \vec{v}$

$T_\sigma M^{\mathbb{C}} \simeq H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z})$ $\qquad s \in H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z})$

$$I_s = \zeta \mapsto \mathbb{I}\, s(\zeta)$$

Est-ce que $\mathbb{I}$ preserve $N_{\sigma/Z}$? ... oui ... c'est dire que c'est un fibré complexe sur Z/σ

WAIT $\quad 0 \to N_{\sigma/Z} \to TZ_{|\sigma} \circlearrowleft \mathbb{I} = i \times \_$ $\quad$ donc $\quad I_s = \zeta \mapsto i s(\zeta)$ ...

Sinon : $\quad I_{\zeta_0} s : \zeta \mapsto I_\zeta s(\zeta)$ $\quad$ toujours intégrable ?

$\forall \zeta_0 \in \mathbb{P}^1 \quad I_{\zeta_0} \circlearrowleft TM^{\mathbb{C}}$ $\qquad M^{\mathbb{C}}$ HK ?????

Ne marche pas ...

$I_{\zeta_0,\sigma} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(H^0(\mathbb{P}^1, N_{\sigma/Z}))$ mais est-ce que $I_{\zeta_0} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(TM^{\mathbb{C}})$?

ABOUT PENROSE TRANSFORM

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{F} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \mathbb{P} & & \mathbb{M} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \hat{\mathcal{U}} & & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{P} : H^1(\hat{\mathcal{U}}, \mathcal{O}(-2s-2)) \longrightarrow \ker(\nabla_s)$$

où $\nabla_s : \Gamma(\mathcal{U}, E_s) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}, E_s')$
(sur $\mathbb{M}$)