KODAIRA SPENCER RELATIF

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi"'] & X \times D \arrow[l, hook'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ 0 \in D \arrow[r, equal] & D \end{tikzcd}$$

$Y = Y_0 = \pi^{-1}(0)$

$$T_0 D \xrightarrow{KS_0} H^1(Y, \mathcal{O}_Y(TY))$$

$$T_0 D \xrightarrow{KS_0^{(0)}} H^1(Y, \mathcal{J}_X(TY))$$

$$T_0 D \xrightarrow{KS_0^{(m)}} H^1(Y, \mathcal{J}_X^{m+1}(TY))$$

$\mathcal{J}_X^{m+1}(TY)$

champs de vecteurs sur Y qui s'annulent à l'ordre $m+1$ sur X

Natural map $\quad H^1(Y, \mathcal{J}_X^{m+1}(TY)) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{J}_X^{m}(TY))$

<u>Fixons m</u> $\qquad X_0^{(m)} \subseteq Y \qquad X_t^{(m)} \subseteq Y_t$

$$\mathcal{J}_X^{m+1} \twoheadrightarrow \mathcal{J}_X^{m+1} / \mathcal{J}_X^{m+1+p}$$

<u>donc</u>

$$\begin{tikzcd} T_0 D \arrow[r, "KS_0^{(m)}"'] & H^1(Y, \mathcal{J}_X^{m+1}(TY)) \arrow[r] & H^1\left(Y, \mathcal{J}_X^{m+1}(TY) / \mathcal{J}_X^{m+p+1}(TY)\right) \arrow[d] \\ & & H^1\left(X, \underbrace{\mathcal{J}^{m+1}(TY) / \mathcal{J}^{m+p+1}(TY)}\right) \end{tikzcd}$$

Or sur $X^{(m+p)}$ $\qquad \mathcal{J}^{m+1}_{(m+p)} \simeq \mathrm{Sym}^{m+1}_{\mathcal{O}_{(p-1)}} \mathcal{J}_{(p)}$

$$\mathcal{J}^{m+1}_{(m+p)} \subseteq \mathcal{O}_{(m+p)} = \mathcal{O}_Y / \mathcal{J}^{m+p+1}$$

<u>donc</u> $\quad KS_0^{(m)} : T_0 D \longrightarrow H^1\Big(X, \underbrace{\mathrm{Sym}^{m+1}_{\mathcal{O}_{(p-1)}} (\mathcal{J}_{(p)})(TY)}_{\mathrm{Der}\left(\mathcal{O}_{(p)},\, \mathrm{Sym}^{m+1}_{\mathcal{O}_{(p-1)}} \mathcal{J}_{(p)}\right)}\Big)$