THÉORÈME DE NEWLANDER-NIRENBERG EFFECTIF AVEC DONNÉES ANALYTIQUES ET APPLICATION À L'ESPACE DES TWISTEURS

Table des matières

1. Cadre et théorie 1
1.1. Intégrabilité d'une structure presque complexe 1
1.2. Localité de la condition d'intégrabilité 1
1.3. Théorème de Frobenius-Newlander-Nirenberg 1
2. Structure complexe donnée par des $(1,0)$-formes 2
2.1. Cadre et notations. 2
2.2. Développement 2
3. Structure complexe donnée par I 3
3.1. Énoncé avec les structures complexes 3
3.2. Calcul tensoriel 3
3.3. À l'ordre 0 et hypothèses 4
3.4. Aux ordres supérieurs 4
4. Application à l'espace des twisteurs 5
4.1. Notations 5
4.2. Les structures complexes J et K sur X 5
4.3. Structure complexe sur l'espace des twisteurs 6
4.4. 1-formes holomorphes sur l'espace des twisteurs 6
Annexe A. Intégrabilité de la structure presque complexe sur l'espace des twisteurs 6
Références 6

1. Cadre et théorie

Soit M une variété analytique réelle de dimension $2n$ munie de $I \in \mathrm{End}(TM)$ une structure presque complexe ($I^2 = -\mathrm{Id}$) analytique **intégrable** (cf 1.1).

1.1. **Intégrabilité d'une structure presque complexe.** [God69, Voi02] Une structure presque complexe I est **intégrable** si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :

- (i) Le tenseur de Nijenhuis défini par : $N_I(X,Y) := [IX, IY] - I[X, IY] - I[IX, Y] + I^2[X,Y]$ est identiquement nul.
- (ii) Pour tout champ de vecteur complexes X, Y sur M satisfaisant $I^{\mathbb{C}}X = iX$ et $I^{\mathbb{C}}Y = iY$, le crochet de Lie $[X,Y]$ satisfait également $I^{\mathbb{C}}[X,Y] = i[X,Y]$
- (iii) L'espace tangent I-holomorphe $T^{1,0}M := \ker(I^{\mathbb{C}} - i\,\mathrm{Id}) \subset TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ satisfait $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subseteq T^{1,0}M$
- (iv) Pour toute famille $(\omega^\alpha)_\alpha$ de $(1,0)_I$-formes sur M de rang n, et pour tout α, $\mathrm{d}\omega^\alpha = \theta_\beta \wedge \omega^\beta$ pour des 1-formes analytiques θ_β.
- (v) Le dual [1] de l'espace tangent I-holomorphe $\Omega^{1,0}_M \subseteq \Omega^1_M$ satisfait $\mathrm{d}\Omega^{1,0}_M \subseteq \Omega^1_M \wedge \Omega^{1,0}_M$

Date: 10 janvier 2014.

1. La somme directe $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$ induit une décomposition du dual $Omega^1_M = (T^{1,0})^\vee \oplus (T^{0,1})^\vee = \Omega^{1,0}_M \oplus \Omega^{0,1}_M$

1.2. **Localité de la condition d'intégrabilité.** Les conditions ci-dessus sont locales (nullité d'un tenseur par exemple) ; ainsi si (M, I) est presque complexe intégrable alors ses ouverts de cartes $(U, I_{|U})$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{2n}$ presque-complexes intégrables.

De plus, si tous les $(U, I_{|U})$ sont effectivement des variétés complexes alors les changements de carte sont holomorphes (respectent les $I_{|U}$) car les $I_{|U}$ proviennent d'un I global sur M et donc (M, I) est une variété complexe.

1.3. **Théorème de Frobenius-Newlander-Nirenberg.** La condition d'intégrabilité est satisfaite par la multiplication par i sur l'espace tangent holomorphe d'une variété complexe. Le théorème suivant énonce la réciproque, il a été prouvé par Newlander et Nirenberg dans un cadre beaucoup plus large (variété moins régulière) ; alors que la version ci-dessous est une application plus simple du théorème d'intégrabilité de Frobenius.

Ajout dates 1840 par Feodor Deahna et appliqué aux systèmes Pfaffiens par Frobenius

Théorème 1 (*Frobenius-Newlander-Nirenberg*)

Soit M variété analytique réelle de dimension $2n$, munie d'une structure presque complexe I intégrable.

Alors au voisinage de tout points de M il existe des applications coordonnées $z_1, \cdots z_n : M \to \mathbb{C}$ centrées en ce points, qui induisent, pour des points distincts, des changements de cartes holomorphes, et donc une structure complexe sur M.

De manière équivalent cela signifie que pour tout $x \in M$ il existe une application $m : \mathbb{C}^n \to M$ holomorphe pour la structure complexe I à l'arrivée qui paramètre un voisinage de x.

1.3.1. *But.* On sait l'existence d'un tel M par le théorème, on va donc chercher à en déterminer un développement en série entière.

2. Structure complexe donnée par des $(1,0)$-formes

2.1. **Cadre et notations.** On cherche à expliciter une application de paramétrisation $m : \mathbb{C}^n \to U$ qui soit holomorphe pour la structure presque complexe I. Le théorème de Frobenius-Newlander-Nirenberg assure son existence. Dans un premier temps on supposera donné en lieu et place de I, une base $(\omega^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n}$ de sections de l'espace propre pour la valeur propre i de I dans le complexifié du cotangent à U. On notera :

- i, j, k, l et p, q, r, s deux familles d'indices variant de 1 à $2n$, qui décrivent respectivement la source et le but.
- $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \nu$ les indices variant de 1 à n.
- x^i désigneront les coordonnées réelles sur $\mathbb{C}^n$ telles que $x^\alpha + ix^{\alpha+n} = z^\alpha$ soit une coordonnée canonique $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. On utilisera les indices $i, j, k, l = 1 \cdots 2n$ ou les indices $\alpha, \beta, \cdots$ et $\alpha + n, \beta + n, \cdots$ quand il conviendra de distinguer entre les parties "réelles" et "imaginaires".
- u^p désigneront les coordonnées locales réelles sur U centrées en 0, on utilisera $p, q, r, s = 1 \cdots 2n$ comme indices associés.
- $\omega^\alpha = a^\alpha_p \, \mathrm{d}u^p$; on utilisera $\alpha, \beta, \gamma = 1 \cdots n$ comme indices associés.

On supposera en outre que $m(0) = 0 \in U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$.

Les $z^\alpha := x^\alpha + ix^{\alpha+n}$ sont les coordonnées complexes canoniques sur $\mathbb{C}^n$, donc les $\mathrm{d}z^\alpha$ forment une base des $(1,0)$-formes.

2.2. **Développement.** Exprimer que m est holomorphe pour la structure canonique sur $\mathbb{C}^n$ au départ et pour la structure complexe donnée par les ω^α signifie que $m^*\omega^\alpha$ est une $(1,0)$-forme donc obtenue comme combinaison (à coefficients holomorphes) des $\mathrm{d}z^\alpha$. Cependant, quitte à changer la base et les omega… On peut supposer :

pourquoi on peut passer du cas $f\,\mathrm{d}z$ à $\mathrm{d}z$?

$$m^*\omega^\alpha = \mathrm{d}z^\alpha$$

Toutes les applications considérées sont analytiques, en particulier, on peut écrire leurs développements en séries entières.

$$m^p(x) = \frac{\partial m^p}{\partial x^j}x^j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m^p}{\partial x^j \partial x^k}x^j x^k + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 m^p}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l}x^j x^k x^l + \cdots \tag{1}$$

$$a_s^\alpha(u) = a_s^\alpha(0) + \frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^p}u^p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_s^\alpha}{\partial u^p \partial u^q}u^p u^q + \cdots \tag{2}$$

$$\frac{\partial m^s}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial m^s}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 m^s}{\partial x^i \partial x^j}x^j + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 m^s}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}x^j x^k + \cdots \tag{3}$$

On peut alors écrire le développement de $a_s^\alpha(m(x))$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
a_s^\alpha(m(x)) &= a_s^\alpha(0) \\
&+ \left(\frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^p}\frac{\partial m^p}{\partial x^j}\right)x^j \\
&+ \left(\frac{1}{2}\frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^p}\frac{\partial^2 m^p}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_s^\alpha}{\partial u^p \partial u^q}\frac{\partial m^p}{\partial x^j}\frac{\partial m^q}{\partial x^k}\right)x^j x^k \\
&+ \left(\frac{1}{6}\frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^p}\frac{\partial^3 m^p}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l} + \frac{1}{12}\frac{\partial^2 a_s^\alpha}{\partial u^p \partial u^q}\frac{\partial m^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 m^q}{\partial x^k \partial x^l}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 a_s^\alpha}{\partial u^p \partial u^q \partial u^r}\frac{\partial m^p}{\partial x^j}\frac{\partial m^q}{\partial x^k}\frac{\partial m^r}{\partial x^l}\right)x^j x^k x^l \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

Donc après multiplication par $\frac{\partial m^s}{\partial x^i}(x)$ on peut obtenir la décomposition suivante :

ordre	coefficient
0	$a_s^\alpha(0)\frac{\partial m^s}{\partial x^i}$
1	$a_s^\alpha(0)\frac{\partial^2 m^s}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^p}\frac{\partial m^p}{\partial x^j}\frac{\partial m^s}{\partial x^i}$
2	$\frac{1}{2}a_s^\alpha(0)\frac{\partial^3 m^s}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^p}\frac{\partial m^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 m^s}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^p}\frac{\partial^2 m^p}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial m^s}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_s^\alpha}{\partial u^p \partial u^q}\frac{\partial m^p}{\partial x^j}\frac{\partial m^q}{\partial x^k}\frac{\partial m^s}{\partial x^i}$

Or on veut $m^*\omega^\alpha = \mathrm{d}z^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha + i\,\mathrm{d}x^{\alpha+n}$ donc

$$\begin{aligned}
a_s^\alpha(0)\frac{\partial m^s}{\partial x^i} &= \delta_i^\alpha + i\delta_i^{\alpha+n} \\
\text{termes d'ordre} >0 &= 0
\end{aligned}$$

Mais quitte à composer m à droite par un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$, et prendre les coordonnées z^α correspondantes, on peut supposer

$$\frac{\partial m^s}{\partial x^i} = \delta_i^s$$

et par suite

$$a_s^\alpha = \delta_s^\alpha + i\delta_s^{\alpha+n}$$

Après simplification on peut donc écrire :

pas rigoureux, écrire les changements de base
En fait, très douteux ! On a a qui est fixé dans les coordonnées u_p, a priori changer m ne doit pas l'affecter

ordre	coefficient
1	$a_s^\alpha(0)\frac{\partial^2 m^s}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial u^j}$
2	$\frac{1}{2}a_s^\alpha(0)\frac{\partial^3 m^s}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial a_s^\alpha}{\partial u^j}\frac{\partial^2 m^s}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial u^p}\frac{\partial^2 m^p}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_i^\alpha}{\partial u^j \partial u^k}$
3	

3. Structure complexe donnée par I

Dans toute cette section (et seulement celle-ci) J dénotera la structure complexe canonique de $\mathbb{C}^n$.

3.1. **Énoncé avec les structures complexes.** Demander à ce que $m : \mathbb{C}^n \to U$ soit holomorphe revient à demander à ce qu'elle respecte les structures complexes au sens suivant :

$$\forall X \in \Gamma(\mathbb{C}^n, T_{\mathbb{R}}\mathbb{C}_n), \quad I(m_* X) = m_*(JX) \tag{4}$$

En effet, il est équivalent de demander que $m_*^{\mathbb{C}} : T_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} \to T_{\mathbb{R}}U \otimes \mathbb{C}$ envoie $T\mathbb{C}^n = T^{(1,0)}\mathbb{C}^n$ sur $T^{(1,0)_I}U$.

3.2. **Calcul tensoriel.** On notera I_q^p et J_j^i les notations tensorielles pour I et J, dans les bases respectives u^p et x^i. C'est-à-dire, on a :

$$J_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} = J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

et de même pour I avec les u^p.

On peut alors écrire la condition (4) en coordonnées pour $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ au point x :

$$\frac{\partial m^p}{\partial x^i}(x) I_p^q(m(x)) \frac{\partial}{\partial u^q}(m(x)) = J_i^j(x) \frac{\partial m^p}{\partial x^j}(x) \frac{\partial}{\partial u^p}(m(x))$$

Ce qui se traduit par :

$$J_i^j(x) \frac{\partial m^p}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial m^q}{\partial x^i}(x) I_q^p(m(x))$$

Or J ne dépend pas du point $x \in \mathbb{C}^n$ choisit (c'est dire que les coordonnées x_i sont issues des coordonnées holomorphes canoniques). Ainsi pour tout x, $J(x) = J(0) = J$.

En résumé :

$$J_i^j \frac{\partial m^p}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial m^q}{\partial x^i}(x) I_q^p(m(x)) \tag{5}$$

ou de manière équivalente (en utilisant $I^2 = -1$) :

$$J_i^j \frac{\partial m^q}{\partial x^j}(x) I_q^p(m(x)) + \frac{\partial m^p}{\partial x^i}(x) = 0 \tag{6}$$

Ce qui s'écrit matriciellement $JDmI = -Dm$ ou $JDm = DmI$.

3.3. **À l'ordre** 0 **et hypothèses.** On peut de plus choisir les coordonnées (u^j) sur U telles que $I_p^q(0)$ soit la matrice symplectique canonique J

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors, à l'ordre 0, l'équation (6) signifie que $Dm(0)$ est un endomorphisme complexe au sens où il provient d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vu dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Ainsi par changement $\mathbb{C}$-linéaire de coordonnées sur $\mathbb{C}^n$ (les x^i), on peut imposer $Dm = I_{2n} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$.

$$
\begin{aligned}
I^p_q(m(x)) &= I^p_q(0)\\
&+ \left(\frac{\partial I^p_q}{\partial u^r}\frac{\partial m^r}{\partial x^i}\right)x^i\\
&+ \left(\frac{1}{2}\frac{\partial I^p_q}{\partial u^r}\frac{\partial^2 m^r}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I^p_q}{\partial u^r \partial u^l}\frac{\partial m^r}{\partial x^i}\frac{\partial m^l}{\partial x^j}\right)x^i x^j\\
&+ \dots\\
&= J^p_q\\
&+ \frac{\partial I^p_q}{\partial u^i}x^i\\
&+ \left(\frac{1}{2}\frac{\partial I^p_q}{\partial u^r}\frac{\partial^2 m^r}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I^p_q}{\partial u^i \partial u^j}\right)x^i x^j\\
&+ \dots\\
\frac{\partial m^p}{\partial x^i} &= \delta^p_i + \frac{\partial^2 m^p}{\partial x^i \partial x^j}x^j + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 m^p}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}x^j x^k + \dots
\end{aligned}
$$

3.4. **Aux ordres supérieurs.** On peut développer le produit $JDm(x)I(m(x))$

$$J^j_i\left(\delta^q_j + \frac{\partial^2 m^q}{\partial x^j \partial x^k}x^k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 m^p}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}x^j x^k + \cdots\right)\left(J^p_q + \frac{\partial I^p_q}{\partial u^k}x^k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial I^p_q}{\partial u^r}\frac{\partial^2 m^r}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 I^p_q}{\partial u^j \partial u^k}\right)x^j x^k + \cdots\right)$$

On peut alors déterminer le développement de m à tous les ordres :

ordre	équation
1	$\frac{\partial^2 m^p}{\partial x^i \partial x^k} + J^j_i\frac{\partial^2 m^q}{\partial x^j \partial x^k}J^p_q = -J^q_i\frac{\partial I^p_q}{\partial u^k}$
2	$\frac{\partial^3 m^p}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} + \frac{1}{2}J^i_l\frac{\partial^3 m^q}{\partial x^l \partial x^k \partial x^j}J^p_q = -J^l_i\left(\frac{\partial^2 m^q}{\partial x^l \partial x^k}\frac{\partial I^p_q}{\partial u^j} + \frac{1}{2}\delta^q_l\left(\frac{\partial^2 I^p_q}{\partial u^j \partial u^k} + \frac{\partial I^p_q}{\partial u^t}\frac{\partial^2 m^t}{\partial x^j \partial x^k}\right)\right)$
3	

Système sous forme résolue ? On se convainc facilement qu'à tout ordre l'équation sera de la forme

$$\frac{\partial D^d m^p}{\partial x^i} + J^i_j\lambda\frac{\partial D^d m^q}{\partial x^j}J^p_q = H$$

avec H ne dépendant que des dérivées à l'ordre d de m et des dérivées de I.

Un tel système n'est pas bien posé !

En effet, dans le cas de l'ordre 1 par exemple. L'équation matricielle $JX - XJ = Y$ n'a pas unicité de la solution si elle existe. L'existence est conditionnée au fait que Y soit de cette forme

$$Y = \begin{pmatrix} U & V \\ V & -U \end{pmatrix}$$

Dès lors si

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'équation revient à :

$$
\begin{aligned}
D - A &= V\\
B + C &= U
\end{aligned}
$$

Donc X est déterminée à une matrice de la forme $RId + SJ$ près.

4. Application à l'espace des twisteurs

4.1. **Notations.** [HKLR87] Le but de cette partie est d'appliquer les résultats précédents à $M = Z$ l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählérienne $(X, (I, J, K), g)$ que l'on supposera construite à partir d'une variété symplectique holomorphe (X, I, ω). Z est de dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}}(X) + 2 = 4n + 2$. On notera $N = 2n + 1$, ainsi $\dim_{\mathbb{R}}(Z) = 2N$.

La structure presque-complexe $\mathbb{I}$ sur $Z = X \times \mathbb{P}^1$ est donnée par :

$$\mathbb{I} = \left(\frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}} I + \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}} J + \frac{i(\zeta-\bar{\zeta})}{1+\zeta\bar{\zeta}} K \ , \ I_0 \right)$$

4.2. **Les structures complexes J et K sur X.** Les trois structures complexes I, J, K d'une variété hyperkählérienne pointée, doivent satisfaire les relations "quaternioniques". En particulier $K = IJ$ et $IJ = -JI$.

On cherche donc sur (X, I) une structure complexe J satisfaisant la dernière relation.

Sur un ouvert U de X on a des coordonnées complexes z^τ qui se décomposent en $4n$ coordonnées réelles u^p (par exemple $z^\tau = u^\tau + iu^{\tau+n}$) qui induisent une trivialisation locale du fibré tangent

$$T(X_{\mathrm{diff}})_{|U} \cong \bigoplus_p \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial u^p}$$

Dans cette base la structure I est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_{2n} \\ I_{2n} & 0 \end{pmatrix}$$

Justifier ce choix

On va chercher J parmi les matrices qui vérifient $IJ = -JI$ et qui satisfont

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) + ig(IJX,Y) = g^{\mathbb{C}}((1+iI)JX,Y) \tag{7}$$

où ω est la forme symplectique sur (X, I) et g est la métrique Ricci-plate obtenue par le théorème de Yau. On développe en notation tensorielle :

$$\begin{aligned} g &= g_{pq}\, \mathrm{d}u^p\, \mathrm{d}u^q \\ \omega &= \omega_{pq}\, \mathrm{d}u^p \wedge \mathrm{d}u^q \\ J\frac{\partial}{\partial u^p} &= J_p^q \frac{\partial}{\partial u^q} \\ I\frac{\partial}{\partial u^p} &= I_p^q \frac{\partial}{\partial u^q} \end{aligned}$$

On peut alors faire le calcul en évaluant dans (7) par $X = \partial_{u^p}$ et $Y = \partial_{u^q}$.

$$\omega_{pq} = g^{\mathbb{C}} \left((1+iI)J_p^r \frac{\partial}{\partial u^r}, \frac{\partial}{\partial u^q} \right) = g^{\mathbb{C}} \left((\delta_p^k + iI_p^k) J_k^l \frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^q} \right)$$

Or $g^{\mathbb{C}}$ est tensoriel, donc on peut écrire

$$\omega_{pq} = (\delta_p^r + iI_p^r) J_r^k g^{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^q} \right) = (\delta_p^r + iI_p^r) J_r^k g_{kq}$$

Ce qui donne finalement en inversant g et en utilisant le fait que $IJ = -JI$:

$$\omega_{pr} g^{rq} = J_p^k \, (\delta_k^q - iI_k^q) \tag{8}$$

L'équation (8) nous donne immédiatement que J est définie à une matrice de la forme $M(1+iI)$ près, en effet

$$(J + M(1+iI))(1-iI) = J(1-iI) + M(1+iI)(1-iI) = J(1-iI)$$

Cependant comme ω et $(1+iI)$ sont à coefficients complexes, les solutions J sont a priori également complexes, cependant on peut remarquer que si $J = J_1 + iJ_2$ est la décomposition d'une solution J en partie réelle et imaginaire, alors $J' = J_1 + J_2 I$ est également solution, réelle cette fois-ci. Et dès lors la solution réelle est unique ! En effet, le choix de M dans l'équation ci-dessus tel que J reste réel impose nécessairement $M = 0$.

weird !

En notant A la matrice des $A_p^q := \omega_{pr} g^{rq}$, on a

$$J = \Re(A) \quad \text{ie} \quad J_p^q = \Re(A_p^q) = \Re(\omega_{pr} g^{rq})$$

4.3. Structure complexe sur l'espace des twisteurs. En regroupant ce qu'on a obtenu, on peut écrire $\mathbb{I}$ de la façon suivante :

$$\left(1+\zeta\bar{\zeta}\right)\mathbb{I}_p^q = \left(1-\zeta\bar{\zeta}\right) I_p^q + \left(\zeta+\bar{\zeta}\right)\Re(\omega_{pr}g^{rq}) + i\left(\zeta-\bar{\zeta}\right) I_p^r \Re(\omega_{rk}g^{kq})$$

pour p et q compris entre 1 et $4n$. Il reste les valeurs $\mathbb{I}_u^v$ pour u ou v compris entre $4n+1$ et $4n+2$, qui proviennent de la structure sur $\mathbb{P}^1$.

Donc la structure complexe $\mathbb{I}$ est la partie réelle du tenseur suivant que l'on notera Υ

$$\Upsilon_p^q = \frac{1-|u^{4n+1}|^2-|u^{4n+2}|^2}{1+|\zeta|^2} I_p^q + \frac{2u^{4n+1}}{1+|\zeta|^2} A_p^q - \frac{2u^{4n+2}}{1+|\zeta|^2} I_p^r A_r^q$$

où $A_p^q = \omega_{pr}g^{rq}$ et $\zeta = u^{4n+1} + iu^{4n+2}$. **To Do ! !** A FINIR une fois qu'on aura les expressions des dérivées de m

4.4. 1-formes holomorphes sur l'espace des twisteurs. Avec le résultat sur les structures complexes $J_p^q = \Re(A_p^q) = \Re(\omega_{pr}g^{rq})$, on peut exprimer les $(1,0)$-formes pour $\mathbb{I}$ données dans [HKLR87] :

$$\varphi + \zeta K\varphi = \left(\varphi^i + \zeta\Re(I_j^i A_k^j)\varphi^k\right)_i$$

On a donc pour $\varphi^p = \mathrm{d}u^p$, $a_r^p = \delta_r^p + \zeta I_q^p \Re(A_r^q)$.

Annexe A. Intégrabilité de la structure presque complexe sur l'espace des twisteurs

Le tenseur de Nijenhuis d'une structure presque complexe I est défini par :

$$N_I(X,Y) = [IX,IY] - I[X,IY] - I[IX,Y] - [X,Y]$$

Ce qui donne en coordonnées

$$N_{pq}^l = I_p^r \frac{\partial I_q^l}{\partial u^r} - I_q^r \frac{\partial I_p^l}{\partial u^r} - I_r^l \left(\frac{\partial I_q^r}{\partial u^p} - \frac{\partial I_p^r}{\partial u^q}\right)$$

To Do ! ! Exprimer l'intégrabilité de $\mathbb{I}$ à l'aide du tenseur de Nijenhuis. Ça devrait ressembler au calcul dans [HKLR87] pour les 1-formes

Références

[God69] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique ...*, Collection Méthodes, Hermann, 1969.

[HKLR87] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 535–589. MR 877637 (88g :53048)

[Voi02] C. Voisin, *Théorie de hodge et géométrie algébrique complexe*, Collection SMF, Société Mathématique de France, 2002.