1 Germe de variété analytique complexe défini par une variété analytique réelle

1.1 Introduction

On peut considérer une fonction analytique réelle sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe $R > 0$ tel que cette fonction soit développable en série entière sur $]-R, R[$. Ainsi elle définit une fonction analytique complexe donc holomorphe sur le disque ouvert de rayon R centré en 0 dans $\mathbb{C}$.

On peut faire le même raisonnement avec une fonction analytique définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe $(R_1, \cdots, R_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ tels que la fonction s'étende en une fonction holomorphe sur le polydisque $\Delta(R_1, \cdots, R_n) \subseteq \mathbb{C}^n$.

Maintenant les zéros réels de la fonction précédente (supposée dès maintenant non nulle), formaient une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$; il s'étendent en une unique sous-variété complexe du polydisque $\Delta \in \mathbb{C}^n$: les zéros de la fonction holomorphe obtenue par prolongement.

1.2 Théorème de complexification

Théorème 1

Soit M une variété analytique réelle paracompacte. Alors :
- *Il existe X variété complexe (de variété analytique réelle sous-jacente $X_{\mathbb{R}}$) et $\varphi : M \to X_{\mathbb{R}}$ plongement analytique. (tel que dans les cartes φ s'identifie à un isomorphisme analytique complexe restreint à $\mathbb{R}^n$)*
- *Si (X_1, φ_1) et (X_2, φ_2) sont deux telles complexifications de M, alors en notant $M_i = \varphi_i(X_{i,\mathbb{R}})$, l'isomorphisme $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : M_1 \to M_2$ se prolonge en un isomorphisme de variété complexes d'un ouvert de X_1 contenant M_1 sur un ouvert de X_2 contenant M_2.*

Le théorème 1 nous dit que toute variété analytique réelle définit un unique "germe" de variété complexe, ayant donc la propriété universelle suivante (dont l'énoncé est mal spécifié) :

Proposition 1 (*Propriété universelle de la complexification infinitésimale*)

Soit M une variété analytique réelle paracompacte. X la "complexification infinitésimale", et $X_{\mathbb{R}}$ la "variété" analytique réelle sous-jacente. Alors :
- $\iota : M \hookrightarrow X_{\mathbb{R}}$.
- *Pour tout Y variété complexe complexification de M, il existe un unique $\psi : X \hookrightarrow Y$ qui fasse commuter le diagramme suivant.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & X_{\mathbb{R}} \\ Y_{\mathbb{R}} \arrow[ur, dotted, "\psi_{\mathbb{R}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \\ Y \arrow[u, dotted, "\psi"] \end{tikzcd}$$

Cet object X n'existe pas dans la catégorie des variété complexes, mais d'après la propriété précédente il s'exprime comme une limite projective et donc existe dans la complétion libre de la catégorie des variété complexes.

Notations
- $\mathbf{AnaMan}_{\mathbb{C}}$ variétés analytiques complexes (et applications holomorphes)

- $\mathbf{AnaMan}_{\mathbb{R}}$ variétés analytiques réelles (et applications analytiques)
- $C = Psh^{op}(\mathbf{AnaMan}_{\mathbb{C}}^{op}) := \mathrm{Hom}(\mathbf{AnaMan}_{\mathbb{C}}, \mathbf{Set})^{op}$ complétion libre de la catégorie des variétés analytiques complexes.
- $\mathcal{Y}^{op} : \mathbf{AnaMan}_{\mathbb{C}} \to C$ plongement de Yoneda dual.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{AnaMan}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\mathcal{Y}^{op}"] \arrow[d, "(\_)_{\mathbb{R}}"'] & C \\ \mathbf{AnaMan}_{\mathbb{R}} \arrow[ur, dotted, "\text{\"germe\"}"'] & \end{tikzcd}$$

A Extension de Kan à gauche

Soient R et T deux anneaux (non nécessairement commutatifs) et $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ les catégories correspondantes de modules sur ces anneaux. Soit M un R-module à gauche et T-module à droite.

Le module M peut-être vu comme un foncteur préservant les produits finis : $F : \mathcal{R}^0 \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

Alors le foncteur $\_ \otimes_R M : \mathrm{Mod}_{\mathcal{R}} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ est l'extension de Kan à gauche de F le long du plongement de Yoneda : $\mathcal{R}^0 \hookrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathcal{R}}$.

Références

[1] L. Hormander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* North-Holland Mathematical Library. Elsevier Science, 1973.

[2] Louis Nirenberg. *Lectures on Linear Partial Differential Equations.* Regional Conference Series in Mathematics, No. 17. 1973.

[3] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Collection SMF. Société Mathématique de France, 2002.

[4] A. Weil. *Introduction à l'étude des variétés kählériennes.* Number n° 1267 in Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1971.