1 Intégrabilité

1.1 Notations

Données. Soit M une variété réelle lisse ou analytique de dimension $2n$ munie d'une structure complexe I intégrable. On dispose au voisinage d'un point $O \in M$ de coordonnées réelles x^i centrées en O. On notera $u^a = x^a + ix^{a+n}$.

On introduit les objets suivants :

(1.1.a) Les différents faisceaux naturels, (on notera $\Gamma(U, \mathcal{F})$ les sections de $\mathcal{F}$ sur l'ouvert U) :

- Les faisceaux constants $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{\mathbb{C}}$. Dont les sections sont les fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$.
- Le faisceau structural (lisse) $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^\infty_M$, dont les sections sont les fonctions lisses à valeurs complexes.
- Le faisceau structural analytique $\mathcal{C}^\omega$ ou $\mathcal{C}^\omega_M$, dont les sections sont les fonctions analytiques à valeurs complexes.

(1.1.b) Le fibré tangent $T_\mathbb{R}M$ à M, c'est de manière naturelle un faisceau de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions $2n$. Une base locale des sections est donnée par la famille :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{2n}}$$

On prend comme définition qu'un champ de vecteur est une dérivation réelle sur l'anneau des fonctions réelles sur M.

(1.1.c) Son complexifié $T_\mathbb{C}M := T_\mathbb{R}M \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ (fibre à fibre ou, ce qui revient au même le produit tensoriel au dessus de faisceau constant de corps $\underline{\mathbb{R}}$ avec le faisceau de $\underline{\mathbb{R}}$-espaces vectoriels $\underline{\mathbb{C}}$). Une base locale des sections est donnée par la famille précédente ou par :

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^n}$$

On a la décomposition spectrale (fibre à fibres ou en tant que faisceaux)

$$T_\mathbb{C}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

qui fait apparaître

- L'espace propre pour la valeur propre i de l'opérateur I : $T^{1,0}M$. Fibré vectoriel complexe de dimension n dont les sections sont appelés *champs de vecteurs I-holomorphes.*
  Il s'identifie naturellement au fibré tangent réel par l'application partie réelle $T^{1,0}M \to T_\mathbb{R}M$; on le notera par la suite TM.

- L'espace propre pour la valeur propre $-i$ de l'opérateur I : $T^{0,1}M$. Fibré vectoriel complexe de dimension n dont les sections sont appelés *champs de vecteurs (I-)antiholomorphes.*
- Une opération $X \mapsto \bar{X}$ sur $T_{\mathbb{C}}M = T_{\mathbb{R}}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui échange $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$.

(1.1.d) L'espace des 1-formes réelles $\Omega_{\mathbb{R},M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}M, \mathbb{R})$.
Si K est un tenseur $T_{\mathbb{R}}M \to T_{\mathbb{R}}M$, alors K agit naturellement sur $\Omega_{\mathbb{R},M}$ par composition à droite, on le notera toujours K.

(1.1.e) Son complexifié $\Omega_{\mathbb{C},M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}M, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}M, \mathbb{C})$. On a la décomposition obtenue par dualité :

$$\Omega_{\mathbb{C},M} = \Omega^{0,1} \oplus \Omega^{1,0}$$

- $\Omega^{1,0} := (T^{0,1}M)^{\perp}$ faisceau des formes qui s'annulent sur les $(0,1)$-vecteurs. Fibré vectoriel complexe de dimension n.
  C'est également l'espace des formes propres de valeur propre i pour l'opérateur I.
- $\Omega^{0,1} := (T^{1,0}M)^{\perp}$ faisceau des formes qui s'annulent sur les $(1,0)$-vecteurs. Fibré vectoriel complexe de dimension n.
  C'est également l'espace des formes propres de valeur propre $-i$ pour l'opérateur I.

(1.1.f) On définit les m-formes à valeur complexes par :

$$\Omega^m := \bigwedge^m \Omega_{\mathbb{C},M}$$

C'est le faisceau des formes m-linéaires alternées sur TM à valeurs complexes. On remarquera que $\Omega^0 = \mathcal{C}^{\infty}_M$ faisceau des fonctions complexes lisses.

(1.1.g) Enfin, on définit les (p,q)-formes de la façon suivante :

$$\Omega^{p,q} := \bigwedge^p \Omega^{1,0} \wedge \bigwedge^q \Omega^{0,1} \subset \Omega^m$$

Si on pose $m = p + q$. C'est également le faisceau des formes m-linéaires alternées sur $T_{\mathbb{C}}M$ qui s'annulent sur les m-uplets de vecteurs $(X_1, \cdots X_m)$ dès lors que
- au moins $p+1$ des X_i sont de type $(1,0)$
- ou au moins $q+1$ des X_i sont de type $(0,1)$.

On a alors la décomposition

$$\Omega^m = \bigoplus_{p+q=m} \Omega^{p,q}$$

(1.1.h) Les opérateurs $\mathrm{d}\colon \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ en définissant $(\mathrm{d}\theta)(X)$ pour $\theta \in \Omega^k$, $X = (X_1, X_2, \cdots, X_{k+1})$ où les $X_i \in TM$ par :

$$\sum_{1\leq j\leq k} (-1)^j X_j\left(\theta\left(\check{X}^j\right)\right) + \sum_{1\leq j<i\leq k} (-1)^{j+i}\theta\left([X_j, X_i], \check{\check{X}}^{j,i}\right)$$

- Dans le cas $k = 0$, la deuxième partie de la formule est vide, et on retrouve l'opération $f \mapsto X(f)$, ainsi $(\mathrm{d}f)(X) = X(f)$.
- Cette définition intrinsèque coïncide dans des coordonnées avec

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\big(\theta_K\,\mathrm{d}x^K\big) = \frac{\partial\theta_K}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K$$

- L'opérateur d sur Ω^k satisfait la règle de Leibnitz :

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{d}\alpha\wedge\beta + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\wedge\mathrm{d}\beta$$

(1.1.i) On dispose naturellement des projections

$$\pi^{p,q} : \Omega^{p+q} \longrightarrow \Omega^{p,q}$$

On peut dès lors définir les opérateurs ∂ et $\bar\partial$ comme
- la partie de type $(p+1, q)$ de la différentielle d'une (p,q)-forme : $\partial = \pi^{p+1,q} \circ \mathrm{d}_{|\Omega^{p,q}}$
- la partie de type $(p, q+1)$ de la différentielle d'une (p,q)-forme : $\bar\partial = \pi^{p,q+1} \circ \mathrm{d}_{|\Omega^{p,q}}$

(1.1.j) On définit $\mathcal{O}_M$ (ou $\mathcal{O}_{(M,I)}$ si il y a ambiguïté) le faisceau des fonctions holomorphes sur M à valeurs complexes comme le noyau de l'opérateur $\bar\partial : \mathcal{C}^\infty_M \to \Omega^1$. C'est automatiquement un sous-faisceau de $\mathcal{C}^\omega_M$ (conséquence de la formule de Cauchy).
De même on définit $\mathcal{O}_M(E)$ pour $E \to M$ fibré vectoriel holomorphe, comme le faisceau des sections holomorphes de E.

(1.1.k) La structure presque complexe I est dite *intégrable* si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :

(i) Le tenseur de Nijenhuis défini par : $N_I(X,Y) := [IX, IY] - I[X, IY] - I[IX, Y] + I^2[X,Y]$ est identiquement nul.

(ii) Pour tout champ de vecteur complexes X, Y sur M satisfaisant $IX = iX$ et $IY = iY$, le crochet de Lie $[X,Y]$ satisfait également $I[X,Y] = i[X,Y]$

(iii) L'espace tangent I-holomorphe $TM = T^{1,0}M \subset T_{\mathbb{C}}$ est stable par crochet de Lie. C'est-à-dire $[TM, TM] \subseteq TM$

(iv) Pour toute famille $(\omega^\alpha)_\alpha$ de $(1,0)_I$-formes sur M de rang n, et pour tout α, $\mathrm{d}\omega^\alpha = \theta^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$ pour des 1-formes θ^α_β.

(*v*) Le dual de l'espace tangent I-holomorphe $\Omega^{1,0} \subseteq \Omega^1$ satisfait $\mathrm{d}\Omega^{1,0} \subseteq \Omega^1 \wedge \Omega^{1,0}_M$.

(*vi*) $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$, ce qui signifie que la différentielle d'une (p,q)-forme est une somme de $(p+1,q)$ et $(p,q+1)$-formes.

(*vii*) $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$ sur Ω^1_M.

(*viii*) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{0,1} \arrow[d, "\bar{\partial}"] & \Omega^1 \arrow[l, "\pi^{0,1}"'] \arrow[r, "\pi^{1,0}"] \arrow[d, "d"] & \Omega^{1,0} \arrow[d, "\partial"] \\
\Omega^{0,2} & \Omega^2 \arrow[l, "\pi^{0,2}"'] \arrow[r, "\pi^{2,0}"] & \Omega^{2,0}
\end{tikzcd}$$

Cette propriété d'intégrabilité est détaillé en appendice **??**.

(*ix*) $\partial^2 f = 0$ pour tout $f \in \Gamma(M, \mathcal{C}^\infty)$.

To Do ! !

- Anti-symétrisation
- Notation tensorielle
- d (définition tensorielle)

Formulaire.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial z}\ \mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\ \overline{\mathrm{d}z} \\
\bar{\partial}\, f &= \frac{\partial f}{\partial z}\ \bar{\partial}\, z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\ \overline{\partial z} \\
\partial f &= \frac{\partial f}{\partial z}\ \partial z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\ \overline{\bar{\partial}\, z}
\end{aligned}$$

2 Espace des twisteurs d'une variété hyperkahlérienne

2.1 Notations

[HKLR87]

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats précédents à $M = Z := X \times \mathbb{P}^1$ l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählérienne $(X, (I, J, K), g)$ que l'on supposera construite à partir d'une variété symplectique holomorphe (X, I, σ) et de la donnée d'une classe de Kähler ω_I qui détermine d'après le théorème de Yau une unique métrique Ricci-plate g.

Z est de dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}}(X)+2=4n+2$. On notera $N=2n+1$, ainsi $\dim_{\mathbb{R}}(Z)=2N$.

On utilisera les indices suivants :

- Les indices $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ vont varier entre 1 et $2n$ (soit $2n$ indices). Ils correspondront aux tenseurs sur X.
- Les indices a,b,c,d vont varier entre 0 (sur $\mathbb{P}^1$) et $2n$ (soit N indices). Ils correspondront aux tenseurs sur Z.
- Les indices p,q,r,s vont varier entre 1 et $4n+1$ en évitant $2n+1$ (soit $4n$ indices). Ils correspondront aux tenseurs réels sur X. Tout indice p est de la forme α ou $\alpha+N$.
- Les indices i,j,k,l vont varier entre 0 et $4n+1$ (soit $2N$ indices). Ils correspondront aux tenseurs réels sur Z. Les indices $i=0$ et $i=N$ sont particuliers et correspondent aux tenseurs provenant de $\mathbb{P}^1$. Tout indice i est de la forme a ou $a+N$.

Structure presque-complexe. La structure presque-complexe $\mathbb{I}$ sur $Z=X\times\mathbb{P}^1$ est donnée par :

$$\mathbb{I}=\left(\frac{1-\zeta\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}I+\frac{\zeta+\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}J+\frac{i(\zeta-\bar\zeta)}{1+\zeta\bar\zeta}K\ ,\ I_0\right)$$

2.2 Les structures complexes J et K sur X

Les trois structures complexes I,J,K d'une variété hyperkählérienne pointée, doivent satisfaire les relations "quaternioniques". En particulier $K=IJ$ et $IJ=-JI$.

On cherche donc sur (X,I) une structure complexe J satisfaisant la dernière relation.

Sur un ouvert U de X on a des coordonnées complexes u^τ qui se décomposent en $4n$ coordonnées réelles x^p (par exemple $u^\tau=x^\tau+ix^{\tau+2n}$) qui induisent une trivialisation locale du fibré tangent

$$T(X_{\mathrm{diff}})_{|U}\cong\bigoplus_p\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x^p}$$

Dans cette base la structure I est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix}0&-\mathrm{Id}_{2n}\\ \mathrm{Id}_{2n}&0\end{pmatrix}$$

On va chercher J parmi les matrices qui vérifient $IJ=-JI$ et qui satisfont

$$\sigma(X,Y)=g(JX,Y)+ig(IJX,Y)=g^{\mathbb{C}}((1+iI)JX,Y)\tag{1}$$

où σ est la forme symplectique sur (X,I) et g est la métrique Ricci-plate obtenue par le théorème de Yau.

Posons $A = J + iK$, alors l'équation précédente se réécrit

$$\sigma(X,Y) = g(AX,Y)$$

Ce qui donne en notation tensorielle

$$\sigma_{pq} = g_{rq}A^r_p$$

On peut dès lors inverser g pour obtenir $A^q_p = \sigma_{pr}g^{rq}$. On peut montrer facilement les propriétés suivantes vérifiées par le tenseur A :

(*i*) $\mathtt{Re}(A) = J$ et $\mathtt{Im}(A) = K$.

(*ii*) $A = (1 + iI)J$ et donc $(1 - iI)A = 0$.

(*iii*) $A^2 = 0$

(*iv*) $AI = -IA$

(*v*) $A \in \mathcal{O}(g) \otimes \mathbb{C}$ interpréter

(*vi*) $\nabla A = 0$. v

Le tenseur A est parallèle car J et K le sont. Ce qui s'écrit en notation tensorielle

$$\frac{\partial A^p_q}{\partial x^r} + \Gamma^p_{sr}A^s_q = 0$$

où les Γ^p_{qr} sont les symboles de Christoffel associés à la métrique g.

2.2.1 Projections et espaces propres holomorphes

On notera par la suite P ou $P(\zeta)$ si le contexte l'exige, la projection sur l'espace propre I_ζ-holomorphe

$$P(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - iI_\zeta) : T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}M \tag{2}$$

Le projecteur associé sur l'espace propre antiholomorphe est $\bar{P}$.

Il est à noter que $P(0) = \frac{1}{2}(1 - iI)$ et $P(1) = \frac{1}{2}(1 - iJ)$.

De plus on a la propriété d'adjonction suivante qui résulte de l'orthogonalité des structures I_ζ par rapport à g :

$$\forall X, Y \quad g(PX,Y) = g(X,\bar{P}Y) \tag{3}$$

Remarque : Critère métrique d'intégrabilité L'intégrabilité de la structure I_ζ équivaut à

$$\forall X, \forall Y, \forall Z, \quad g([PX,PY],PZ) = 0 \tag{4}$$

2.3 Structure presque-complexe sur l'espace des twisteurs

En regroupant ce qu'on a obtenu, on peut écrire $\mathbb{I}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{I}_i^j = \begin{cases} \dfrac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}\, I_i^j + \dfrac{\zeta+\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}\, \mathtt{Re}(A_i^j) + i\dfrac{\zeta-\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}\, \mathtt{Im}(A_i^j) & i,j \notin \{0,N\} \\ 1 & (i,j)=(0,N) \\ -1 & (i,j)=(N,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\zeta = x^0 + ix^N$. Donc la structure complexe $\mathbb{I}$ est la partie réelle du tenseur suivant que l'on notera Υ avec

$$\Upsilon_p^q = \frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}\, I_p^q + \frac{2\zeta}{1+\zeta\bar{\zeta}}\, A_p^q$$

2.4 1-formes holomorphes

[HKLR87] On a l'application suivante

$$\begin{pmatrix} \Omega_M^1 & \longrightarrow & \Omega_M^1 \\ \theta & \mapsto & (1+\zeta K)\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

qui envoie $\Omega_0^{1,0}$ sur $\Omega_\zeta^{1,0}$, c'est-à-dire qui envoie les formes I-holomorphes sur des formes I_ζ-holomorphes. L'application induite entre ces deux espaces est de plus bijective pour tout ζ (le cas $\zeta = \pm i$ est géré en remarquant que $\theta = P(0)^*\theta$ et que le rang de $P(0)(1+\zeta K)$ ne dépend pas de ζ).

Références

[HKLR87] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 535–589. MR 877637 (88g :53048)