1 Intégrabilité

1.1 Notations

Données. Soit M une variété réelle lisse ou analytique de dimension $2n$ munie d'une structure complexe I intégrable. On dispose au voisinage d'un point $O \in M$ de coordonnées réelles x^i centrées en O. On notera $u^a = x^a + ix^{a+n}$.

On introduit les objets suivants :

(1.1.a) Les différents faisceaux naturels, (on notera $\Gamma(U, \mathcal{F})$ les sections de $\mathcal{F}$ sur l'ouvert U) :

- Les faisceaux constants $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{\mathbb{C}}$. Dont les sections sont les fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$.
- Le faisceau structural (lisse) $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^\infty_M$, dont les sections sont les fonctions lisses à valeurs complexes.
- Le faisceau structural analytique $\mathcal{C}^\omega$ ou $\mathcal{C}^\omega_M$, dont les sections sont les fonctions analytiques à valeurs complexes.

(1.1.b) Le fibré tangent $T_\mathbb{R}M$ à M, c'est de manière naturelle un faisceau de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions $2n$. Une base locale des sections est donnée par la famille :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{2n}}$$

On prend comme définition qu'un champ de vecteur est une dérivation réelle sur l'anneau des fonctions réelles sur M.

(1.1.c) Son complexifié $T_\mathbb{C}M := T_\mathbb{R}M \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ (fibre à fibre ou, ce qui revient au même le produit tensoriel au dessus de faisceau constant de corps $\underline{\mathbb{R}}$ avec le faisceau de $\underline{\mathbb{R}}$-espaces vectoriels $\underline{\mathbb{C}}$). Une base locale des sections est donnée par la famille précédente ou par :

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^n}$$

On a la décomposition spectrale (fibre à fibres ou en tant que faisceaux)

$$T_\mathbb{C}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

qui fait apparaître

- L'espace propre pour la valeur propre i de l'opérateur I : $T^{1,0}M$. Fibré vectoriel complexe de dimension n dont les sections sont appelés *champs de vecteurs I-holomorphes.*
  Il s'identifie naturellement au fibré tangent réel par l'application partie réelle $T^{1,0}M \;\to\; T_\mathbb{R}M$; on le notera par la suite TM.

- L'espace propre pour la valeur propre $-i$ de l'opérateur $I : T^{0,1}M$. Fibré vectoriel complexe de dimension n dont les sections sont appelés *champs de vecteurs (I-)antiholomorphes*.
- Une opération $X \mapsto \bar{X}$ sur $T_{\mathbb{C}}M = T_{\mathbb{R}}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui échange $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$.

(1.1.d) L'espace des 1-formes réelles $\Omega_{\mathbb{R},M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}M, \mathbb{R})$.

(1.1.e) Son complexifié $\Omega_{\mathbb{C},M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}M, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}M, \mathbb{C})$. On a la décomposition obtenue par dualité :

$$\Omega_{\mathbb{C},M} = \Omega^{0,1} \oplus \Omega^{1,0}$$

- $\Omega^{1,0} := (T^{0,1}M)^{\perp}$ faisceau des formes qui s'annulent sur les $(0,1)$-vecteurs. Fibré vectoriel complexe de dimension n.
  C'est également l'espace des formes propres de valeur propre i pour l'operateur I^*.
- $\Omega^{0,1} := (T^{1,0}M)^{\perp}$ faisceau des formes qui s'annulent sur les $(1,0)$-vecteurs. Fibré vectoriel complexe de dimension n.
  C'est également l'espace des formes propres de valeur propre $-i$ pour l'operateur I^*.

(1.1.f) On définit les m-formes à valeur complexes par :

$$\Omega^m := \bigwedge^m \Omega_{\mathbb{C},M}$$

C'est le faisceau des formes m-linéaires alternées sur TM à valeurs complexes. On remarquera que $\Omega^0 = \mathcal{C}^\infty_M$ faisceau des fonctions complexes lisses.

(1.1.g) Enfin, on définit les (p,q)-formes de la façon suivante :

$$\Omega^{p,q} := \bigwedge^p \Omega^{1,0} \wedge \bigwedge^q \Omega^{0,1} \ \subset \ \Omega^m$$

Si on pose $m = p + q$. C'est également le faisceau des formes m-linéaires alternées sur $T_{\mathbb{C}}M$ qui s'annulent sur les m-uplets de vecteurs $(X_1, \cdots X_m)$ dès lors que
- au moins $p + 1$ des X_i sont de type $(1,0)$
- ou au moins $q + 1$ des X_i sont de type $(0,1)$.

On a alors la décomposition

$$\Omega^m = \bigoplus_{p+q=m} \Omega^{p,q}$$

(1.1.h) Les opérateurs $\mathrm{d}: \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ en définissant $(\mathrm{d}\theta)(X)$ pour $\theta \in \Omega^k$, $X = (X_1, X_2, \cdots, X_{k+1})$ où les $X_i \in TM$ par :

$$\sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^j X_j \left(\theta \left(\check{X}^j\right)\right) + \sum_{1 \leq j < i \leq k} (-1)^{j+i} \theta \left([X_j, X_i], \check{\check{X}}^{j,i}\right)$$

- Dans le cas $k = 0$, la deuxième partie de la formule est vide, et on retrouve l'opération $f \mapsto X(f)$, ainsi $(\mathrm{d}f)(X) = X(f)$.
- Cette définition intrinsèque coïncide dans des coordonnées avec

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\big(\theta_K \, \mathrm{d}x^K\big) = \frac{\partial \theta_K}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K$$

- L'opérateur d sur Ω^k satisfait la règle de Leibnitz :

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$$

(1.1.i) On dispose naturellement des projections

$$\pi^{p,q} : \Omega^{p+q} \longrightarrow \Omega^{p,q}$$

On peut dès lors définir les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ comme
- la partie de type $(p+1, q)$ de la différentielle d'une (p,q)-forme : $\partial = \pi^{p+1,q} \circ \mathrm{d}_{|\Omega^{p,q}}$
- la partie de type $(p, q+1)$ de la différentielle d'une (p,q)-forme : $\bar{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ \mathrm{d}_{|\Omega^{p,q}}$

(1.1.j) On définit $\mathcal{O}_M$ (ou $\mathcal{O}_{(M,I)}$ si il y a ambiguïté) le faisceau des fonctions holomorphes sur M à valeurs complexes comme le noyau de l'opérateur $\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty_M \to \Omega^1$. C'est automatiquement un sous-faisceau de $\mathcal{C}^\omega_M$ (conséquence de la formule de Cauchy).
De même on définit $\mathcal{O}_M(E)$ pour $E \to M$ fibré vectoriel holomorphe, comme le faisceau des sections holomorphes de E.

(1.1.k) La structure presque complexe I est dite *intégrable* si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :

(*i*) Le tenseur de Nijenhuis défini par : $N_I(X,Y) := [IX, IY] - I[X, IY] - I[IX, Y] + I^2[X,Y]$ est identiquement nul.

(*ii*) Pour tout champ de vecteur complexes X, Y sur M satisfaisant $IX = iX$ et $IY = iY$, le crochet de Lie $[X,Y]$ satisfait également $I[X,Y] = i[X,Y]$

(*iii*) L'espace tangent I-holomorphe $TM = T^{1,0}M \subset T_{\mathbb{C}}$ est stable par crochet de Lie. C'est-à-dire $[TM, TM] \subseteq TM$

(*iv*) Pour toute famille $(\omega^\alpha)_\alpha$ de $(1,0)_I$-formes sur M de rang n, et pour tout α, $\mathrm{d}\omega^\alpha = \theta^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$ pour des 1-formes θ^α_β.

(v) Le dual de l'espace tangent I-holomorphe $\Omega^{1,0} \subseteq \Omega^1$ satisfait $\mathrm{d}\Omega^{1,0} \subseteq \Omega^1 \wedge \Omega^{1,0}_M$.

(vi) $\mathrm{d} = \partial + \bar\partial$, ce qui signifie que la différentielle d'une (p,q)-forme est une somme de $(p+1,q)$ et $(p,q+1)$-formes.

(vii) $\mathrm{d} = \partial + \bar\partial$ sur Ω^1_M.

(viii) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{0,1} \arrow[d, "\bar\partial"] & \Omega^1 \arrow[l, "\pi^{0,1}"'] \arrow[r, "\pi^{1,0}"] \arrow[d, "d"] & \Omega^{1,0} \arrow[d, "\partial"] \\
\Omega^{0,2} & \Omega^2 \arrow[l, "\pi^{0,2}"'] \arrow[r, "\pi^{2,0}"] & \Omega^{2,0}
\end{tikzcd}$$

Cette propriété d'intégrabilité est détaillé en appendice Appendice A.

(ix) $\partial^2 f = 0$ pour tout $f \in \Gamma(M, \mathcal{C}^\infty)$.

To Do ! !

- Anti-symétrisation
- Notation tensorielle
- d (définition tensorielle)

Formulaire.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,\overline{\mathrm{d}z} \\
\bar\partial f &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\bar\partial z + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,\overline{\partial z} \\
\partial f &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\partial z + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,\overline{\bar\partial z}
\end{aligned}$$

1.2 Expression du $\bar\partial$ et intégrabilité

1.2.1 Expression pour les fonctions

La projection d'un vecteur sur l'espace propre pour la valeur propre $-i$ de l'opérateur I est donnée par

$$\bar P : X \mapsto \frac{1}{2}(X + iIX) \in T^{0,1}M$$

Ainsi pour une 1-forme, l'opérateur de projection $\Omega^1 \to \Omega^{0,1}$ obtenu par dualité est donné par

$$\bar P^* : \omega \mapsto \frac{1}{2}(\omega + iI^*\omega)$$

Ce qui donne en notation tensorielle

$$\bar P^* : \omega_i\,\mathrm{d}x^i \mapsto \frac{1}{2}(\omega_k + iI^j_k\omega_j)\,\mathrm{d}x^k$$

ou encore simplement

$$\mathrm{d}x^j \mapsto \frac{1}{2}(\delta^j_k + iI^j_k)\,\mathrm{d}x^k \tag{1}$$

Par suite, on peut exprimer l'opérateur $\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty_M \to \Omega^{0,1}$ comme suit

$$\bar{\partial}\, f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)\left(\delta^k_j + iI^k_j\right)\mathrm{d}x^j \tag{2}$$

1.2.2 Expression pour les 1-formes

Caractérisation du type. On rappelle, cf paragraphe **(1.1.g)**, qu'une 2-forme θ est dans $\Omega^{0,2}$ si et seulement si pour tout $X, Y \in T_{\mathbb{C}}M$, si X est de type $(1,0)$ alors $\theta(X,Y) = 0$. Il est alors équivalent de demander que $\forall X, Y \in T_{\mathbb{C}}M$, $\theta(X - iIX, Y) = 0$ ce qui s'exprime en notation tensorielle

$$\left(\theta_{ij} - iI^k_i\theta_{kj}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0$$

ou alors

$$2\theta_{ij} - i(I^k_i\theta_{kj} - I^k_j\theta_{ki}) = 0$$

Dans le cas d'une 2-forme θ de type $(1,1)$, on doit de même vérifier que $\forall X, Y \in T_{\mathbb{C}}M$, $\theta(X - iIX, Y - iIY) = 0$ et $\theta(X + iIX, Y + iIY) = 0$, car une telle forme s'annule sur les paires de vecteurs de même type. En développant les deux équations précédentes et en simplifiant, on peut réécrire la condition d'appartenance à $\Omega^{1,1}$ par

$$\begin{aligned} \theta(X,Y) - \theta(IX,IY) &= 0 \\ \theta(IX,Y) + \theta(X,IY) &= 0 \end{aligned}$$

On remarque que la seconde équation est équivalente à la première (quitte à changer X par IX). On peut donc traduire l'appartenance à $\Omega^{1,1}$ en notation tensorielle de la façon suivante

$$\left(\theta_{ij} - I^k_i I^l_j\theta_{kl}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0$$

ou encore (après anti-symétrisation et simplification)

$$\theta_{ij} - I^k_i I^l_j\theta_{kl} = 0$$

On remarque au passage que cette équation est réelle, et l'on retrouve que l'espace $\Omega^{1,1}$ est stable par conjugaison.

Opérateur de projection "partie de type $(1,1)$". Il suffit dès lors de vérifier que

$$\theta_{ij} \mapsto \frac{1}{2}\left(\theta_{ij} + I^k_i I^l_j\theta_{kl}\right)$$

réalise une projection de Ω^2 sur $\Omega^{1,1}$.

Opérateur de projection "partie de type $(0,2)$". Étant donné $\theta \in \Omega^2$, on peut remarquer que σ définie par

$$\sigma(X,Y) := \frac{1}{4}\theta\left(X+iIX, Y+iIY\right) = \frac{1}{4}\left(\theta(X,Y) - \theta(IX,IY) + i\left(\theta(X,IY)+\theta(IX,Y)\right)\right)$$

est bien une 2-forme qui s'annule dès qu'une de ses variables est de type $(1,0)$. Elle est donc de type $(0,2)$ et c'est la projection de θ via $\Omega^2 \to \Omega^{0,2}$.

En coordonnées, on a

$$\theta_{ij} \mapsto \frac{1}{4}\left(\theta_{ij} - I_i^k I_j^l \theta_{kl} + iI_i^k\theta_{kj} + iI_j^l\theta_{il}\right)$$

ou encore

$$\theta_{ij} \mapsto \frac{1}{4}\left(\delta_i^k\delta_j^l - I_i^k I_j^l + iI_i^k\delta_j^l + i\delta_i^k I_j^l\right)\theta_{kl}$$

Opérateur $\bar\partial$ pour les $(1,0)$-formes. Étant donnée une 1-forme $\omega = \omega_j \,\mathrm{d}x^j$ de type $(1,0)$, on a

$$\bar\partial\,\omega = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^l}\left(\delta_i^k\delta_j^l + I_i^k I_j^l\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$$

Pour des raisons de symétrie, il se trouve que l'opérateur $\partial : \Omega^{0,1} \to \Omega^{1,1}$ a la même expression pour ω de type $(0,1)$:

$$\partial\omega = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^l}\left(\delta_i^k\delta_j^l + I_i^k I_j^l\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$$

Opérateur $\bar\partial$ pour les $(0,1)$-formes. Étant donnée une 1-forme $\omega = \omega_j \,\mathrm{d}x^j$ de type $(0,1)$, on a

$$\bar\partial\,\omega = \frac{1}{4}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^l}\left(\delta_i^k\delta_j^l - I_i^k I_j^l + iI_i^k\delta_j^l + i\delta_i^k I_j^l\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$$

Et en conjuguant on obtient l'opérateur $\partial : \Omega_M^{1,0} \to \Omega_M^{2,0}$ ce qui donne

$$\partial\omega = \frac{1}{4}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^l}\left(\delta_i^k\delta_j^l - I_i^k I_j^l - iI_i^k\delta_j^l - i\delta_i^k I_j^l\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$$

1.2.3 Intégrabilité

La seule chose à vérifier est $\bar\partial^2 = 0$ pour les fonctions. C'est une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité d'après paragraphe **(1.1.k)**.

$$\bar\partial\,\bar\partial\,f = \frac{1}{8}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial f}{\partial x^m}\left(\delta_k^m + iI_k^m\right)\right)}_{T_{kl}}\underbrace{\left(\delta_i^k\delta_j^l - I_i^k I_j^l + iI_i^k\delta_j^l + i\delta_i^k I_j^l\right)}_{S_{ij}^{kl}}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$$

où le tenseur T peut s'écrire

$$T_{kl} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m}(\delta_k^m + iI_k^m) + i\frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{\partial I_k^m}{\partial x^l}$$

En utilisant la propriété de symétrie du tenseur S, l'équation $\bar\partial^2 f = 0$ équivaut à

$$(T_{kl} - T_{lk})S_{ij}^{kl} = 0$$

En évaluant pour $f = x^m$, on trouve

$$\left(\frac{\partial I_k^m}{\partial x^l} - \frac{\partial I_l^m}{\partial x^k}\right)\left(\delta_i^k\delta_j^l - I_i^k I_j^l + iI_i^k\delta_j^l + i\delta_i^k I_j^l\right) = 0$$

En se restreignant à la partie imaginaire de cette équation, on obtient

$$I_i^k\partial_j I_k^m - I_j^k\partial_i I_k^m - I_i^k\partial_k I_j^m + I_j^k\partial_k I_i^m = 0$$

en notant ∂_i pour $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Or sachant que $I_i^k I_k^j = \delta_i^j$ on obtient par dérivation $I_k^j\partial_l I_i^k = -I_i^k\partial_l I_k^j$. Ce qui peut se réintroduire dans les deux premiers termes de l'équation ci-dessus pour obtenir

$$I_k^m(\partial_i I_j^k - \partial_j I_i^k) - I_i^k\partial_k I_j^m + I_j^k\partial_k I_i^m = 0$$

qui n'est autre que l'expression du tenseur de Nijenhuis.

2 Coordonnées holomorphes approchées [Dem02]

On construit par récurrence sur $s \geq 0$ des coordonnées $z^a, \bar z^a$ sur M telles que

$$\bar\partial\, z^a = o(|z|^s) \tag{3}$$

À l'ordre 0. Sous l'hypothèse que $I(0)$ a la forme suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \text{ dans la base des } \frac{\partial}{\partial x^i},$$

on montre que les coordonnées $u^a = x^a + ix^{a+n}$ satisfont (3) à l'ordre 0 au voisinage de O.

L'expression de $\bar\partial$ est donnée par

$$\bar\partial\, f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\left(\delta_j^i + iI_j^i\right)\mathrm{d}x^j$$

Ce qui appliqué à u^a donne

$$\begin{aligned}
\bar\partial\, u^a &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^a}{\partial x^i}\right)\left(\delta^i_j + iI^i_j\right)\mathrm{d}x^j \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta^a_i + i\delta^{a+n}_i\right)\left(\delta^i_j + iI^i_j\right)\mathrm{d}x^j \\
&= \frac{1}{2}(\underbrace{\delta^a_j - I^{a+n}_j}_{o(1)} + i(\underbrace{\delta^{a+n}_j + I^a_j}_{o(1)}))\,\mathrm{d}x^j
\end{aligned}$$

En effet on a, par hypothèse, $I^{a+n}_b(O) = \delta^a_b$ et $I^a_{b+n}(O) = -\delta^a_b$ et de plus I dépend continûment du point.

À l'ordre 1. D'après paragraphe **(1.1.k)** toute l'information sur l'intégrabilité est contenue dans $\bar\partial^2 = 0$. Il faut donc parvenir à pousser le développement de $\bar\partial\, u^a$ sans faire intervenir la structure complexe. On sait que $\bar\partial\, u^a$ est une $(0,1)$-forme, donc elle s'écrit dans la base des $\overline{\partial u^b}$:

$$\bar\partial\, u^a = Q^a_b \overline{\partial u^b}$$

Or le calcul précédent montre également que ∂u^b tends vers $\mathrm{d}u^b$ en O. Par suite, nécessairement $Q^b_a(O) = 0$.

Si on applique l'égalité $\bar\partial\, u^a = Q^a_b \overline{\partial u^b} = Q^a_b(\mathrm{d}\overline{u^b} + o(1))$ à $\dfrac{\partial}{\partial x^b}$ on en déduit

$$\delta^a_b - I^{a+n}_b + \underbrace{i\delta^{a+n}_b}_{0} + iI^a_b = Q^a_b + o(Q^a_b)$$

Si l'on décompose I sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} I' & * \\ I'' & * \end{pmatrix} \qquad I' = (I^a_b)_{a,b}\ ,\ I'' = (I^{a+n}_b)_{a,b}$$

Et l'on notera $\Xi = I'' + iI'$ Après développement limité de I' et I'' au voisinage de O, on obtient

$$Q^a_b(u,\bar u) = u^c\left(-\frac{\partial I''^a_b}{\partial u^c} - i\frac{\partial I'^a_b}{\partial u^c}\right) + \bar u^c\left(-\frac{\partial I''^a_b}{\partial \bar u^c} - i\frac{\partial I'^a_b}{\partial \bar u^c}\right) + o(|u|)$$

ou encore

$$Q^a_b(u,\bar u) = -u^c\frac{\partial \Xi^a_b}{\partial u^c} - \bar u^c\frac{\partial \Xi^a_b}{\partial \bar u^c} + o(|u|)$$

où les dérivées sont implicitement prises en O. On notera $\tilde Q$ la partie de degré 1 de l'expression précédente (tout ce qui n'est pas négligeable devant u). Posons dès lors

$$P^a(u,\bar u) = \int_0^1 \bar u^b \tilde Q^a_b(u, t\bar u)\,\mathrm{d}t$$

Alors

$$P^a = -\int_0^1 \left(u^c \bar{u}^b \frac{\partial \Xi^a_b}{\partial u^c} + t\bar{u}^c \bar{u}^b \frac{\partial \Xi^a_b}{\partial \bar{u}^c} \right) \mathrm{d}t = -u^c \bar{u}^b \frac{\partial \Xi^a_b}{\partial u^c} - \frac{1}{2}\, \bar{u}^c \bar{u}^b \frac{\partial \Xi^a_b}{\partial \bar{u}^c}$$

On considère enfin

$$z^a = u^a - P^a = u^a + u^c \bar{u}^b \frac{\partial \Xi^a_b}{\partial u^c} + \frac{1}{2}\, \bar{u}^c \bar{u}^b \frac{\partial \Xi^a_b}{\partial \bar{u}^c}$$

d'après [Dem02], ce sont des coordonnées complexes lisses qui vérifient $\bar{\partial}\, z^a = o(|z|)$.

3 Application à l'espace des twisteurs d'une variété hyperkahlérienne

3.1 Notations

[HKLR87]

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats précédents à $M = Z := X \times \mathbb{P}^1$ l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählérienne $(X, (I, J, K), g)$ que l'on supposera construite à partir d'une variété symplectique holomorphe (X, I, σ).

Z est de dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}}(X) + 2 = 4n + 2$. On notera $N = 2n + 1$, ainsi $\dim_{\mathbb{R}}(Z) = 2N$.

On utilisera les indices suivants :

- Les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vont varier entre 1 et $2n$ (soit $2n$ indices). Ils correspondront aux tenseurs sur X.
- Les indices a, b, c, d vont varier entre 0 (sur $\mathbb{P}^1$) et $2n$ (soit N indices). Ils correspondront aux tenseurs sur Z.
- Les indices p, q, r, s vont varier entre 1 et $4n + 1$ en évitant $2n + 1$ (soit $4n$ indices). Ils correspondront aux tenseurs réels sur X. Tout indice p est de la forme α ou $\alpha + N$.
- Les indices i, j, k, l vont varier entre 0 et $4n + 1$ (soit $2N$ indices). Ils correspondront aux tenseurs réels sur Z. Les indices $i = 0$ et $i = N$ sont particuliers et correspondent aux tenseurs provenant de $\mathbb{P}^1$. Tout indice i est de la forme a ou $a + N$.

Structure presque-complexe. La structure presque-complexe $\mathbb{I}$ sur $Z = X \times \mathbb{P}^1$ est donnée par :

$$\mathbb{I} = \left(\frac{1 - \zeta\bar{\zeta}}{1 + \zeta\bar{\zeta}} I + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + \zeta\bar{\zeta}} J + \frac{i(\zeta - \bar{\zeta})}{1 + \zeta\bar{\zeta}} K \ , \ I_0 \right)$$

3.2 Les structures complexes J et K sur X

Les trois structures complexes I, J, K d'une variété hyperkählérienne pointée, doivent satisfaire les relations "quaternioniques". En particulier $K = IJ$ et $IJ = -JI$.

On cherche donc sur (X, I) une structure complexe J satisfaisant la dernière relation.

Sur un ouvert U de X on a des coordonnées complexes u^τ qui se décomposent en $4n$ coordonnées réelles x^p (par exemple $u^\tau = x^\tau + ix^{\tau+2n}$) qui induisent une trivialisation locale du fibré tangent

$$T(X_{\text{diff}})_{|U} \cong \bigoplus_p \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x^p}$$

Dans cette base la structure I est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id}_{2n} \\ \operatorname{Id}_{2n} & 0 \end{pmatrix}$$

On va chercher J parmi les matrices qui vérifient $IJ = -JI$ et qui satisfont

$$\sigma(X, Y) = g(JX, Y) + ig(IJX, Y) = g^{\mathbb{C}}((1 + iI)JX, Y) \tag{4}$$

où σ est la forme symplectique sur (X, I) et g est la métrique Ricci-plate obtenue par le théorème de Yau.

Posons $A = J + iK$, alors l'équation précédente se réécrit

$$\sigma(X, Y) = g(AX, Y)$$

Ce qui donne en notation tensorielle

$$\sigma_{pq} = g_{rq}A^r_p$$

On peut dès lors inverser g pour obtenir $A^q_p = \sigma_{pr}g^{rq}$. On peut montrer facilement les propriétés suivantes vérifiées par le tenseur A :

(i) `Re`$(A) = J$ et `Im`$(A) = K$.

(ii) $A = (1 + iI)J$ et donc $(1 - iI)A = 0$.

(iii) $AI = -IA$

(iv) $A \in \mathcal{O}(g) \otimes \mathbb{C}$ interpréter *(iv)*

(v) $\nabla A = 0$.

Le tenseur A est parallèle car J et K le sont. Ce qui s'écrit en notation tensorielle

$$\frac{\partial A^p_q}{\partial x^r} + \Gamma^p_{sr}A^s_q = 0$$

où les Γ^p_{qr} sont les symboles de Christoffel associés à la métrique g.

3.3 Structure complexe sur l'espace des twisteurs

En regroupant ce qu'on a obtenu, on peut écrire $\mathbb{I}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{I}_i^j = \begin{cases} \frac{1-\zeta\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\, I_i^j + \frac{\zeta+\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\,\mathtt{Re}(A_i^j) + i\frac{\zeta-\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\, I_i^k\mathtt{Re}(A_k^j) & i,j \notin \{0,N\} \\ 1 & (i,j)=(0,N) \\ -1 & (i,j)=(N,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\zeta = x^0 + ix^N$. Donc la structure complexe $\mathbb{I}$ est la partie réelle du tenseur suivant que l'on notera Υ avec

$$\Upsilon_p^q = \frac{1-|\zeta|^2}{1+|\zeta|^2} I_p^q + \frac{2\mathtt{Re}(\zeta)}{1+|\zeta|^2} A_p^q - \frac{2\mathtt{Im}(\zeta)}{1+|\zeta|^2} I_r^q A_p^r$$

Cependant

$$\mathtt{Re}(\zeta)A_p^q - \mathtt{Im}(\zeta) I_r^q A_p^r = (\mathtt{Re}(\zeta) + i\mathtt{Im}(\zeta))\, A_p^q - \mathtt{Im}(\zeta)\left(I_r^q + i\delta_q^r\right) A_p^r = \zeta A_p^q$$

d'après la remarque *(ii)*.

Finalement

$$\Upsilon_p^q = \frac{1-\zeta\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\, I_p^q + \frac{2\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\, A_p^q$$

3.4 Coordonnées naïves et leur $\bar\partial$

Posons

$$u^a = \begin{cases} x^a + ix^{a+N} & a \neq 0 \\ \zeta & a = 0 \end{cases}$$

. Les u^a sont des fonctions complexes lisses sur Z qui se restreignent sur X au coordonnées I-holomorphes u^α. Soient de même les v^a des fonctions complexes lisses sur Z qui se restreignent sur X en des coordonnées J-holomorphes v^α.

Ces applications ainsi définies ne sont clairement pas holomorphes sur Z cependant, les coordonnées u^a par exemple approchent des coordonnées holomorphes au voisinage de la fibre $\zeta = 0$ (qui correspond à $\mathbb{I} = (I, I_0)$). Il est intéressant de préciser cela en calculant le $\bar\partial\, u^a$.

Calculs intermédiaires

$$\bar\partial\, u^a = \frac{1}{2}\left(\delta_p^a - \mathbb{I}_p^{a+N} + i(\delta_p^{a+N} + \mathbb{I}_p^a)\right)\mathrm{d}x^p$$

Remarque : pas de $\overline{\partial\zeta}$! !

On peut également remarquer que dans les coordonnées x^p, $I_p^{a+N} = \delta_p^a$ et $I_p^a = \delta_p^{a+N}$ Ainsi

$$2\mathtt{Re}\,\bar\partial\, u^a\left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right) = \left(1 - \frac{1-\zeta\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\right)\,\delta_p^a - \frac{\zeta+\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\,\mathtt{Re}(A_{a+N}^p) - i\frac{\zeta-\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\, I_{a+N}^k\mathtt{Re}(A_k^p)$$

et

$$2\mathtt{Im}\,\bar\partial\, u^a\left(\frac{\partial}{\partial x^p}\right) = \left(1 - \frac{1-\zeta\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\right)\,\delta_p^{a+N} + \frac{\zeta+\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\,\mathtt{Re}(A_a^p) + i\frac{\zeta-\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}\, I_a^k\mathtt{Re}(A_k^p)$$

3.5 Coordonnées holomorphes approchées

Dans les coordonnées x^p considérées, la structure complexe I est constante. Et de plus $I^\alpha_\beta = 0$ et $I^{\alpha+N}_\beta = \delta^\alpha_\beta$. Dès lors on peut déterminer le tenseur Ξ :

A Preuve de l'équivalence de certaines conditions d'intégrabilité

Remarque : On a toujours $(\bar\partial\,\partial + \partial\,\bar\partial)f = 0$ pour les fonctions f, que la structure complexe soit intégrable ou non.

En effet si $\omega = \omega^{1,0} + \omega^{0,1}$ est une 1-forme décomposée en types pures, on a $\pi^{1,1}\,\mathrm{d}\omega = \pi^{1,1}\,\mathrm{d}\omega^{1,0} + \pi^{1,1}\,\mathrm{d}\omega^{0,1} = \bar\partial\,\omega^{1,0} + \partial\omega^{0,1}$. Ainsi si $\omega = \mathrm{d}f$, alors $\omega^{1,0} = \partial f$ et $\omega^{0,1} = \bar\partial\,f$; ce qui entraîne

$$0 = \pi^{1,1}\,\mathrm{d}\mathrm{d}f = \bar\partial\,\partial f + \partial\,\bar\partial\,f$$

La condition que les diagrammes commutent signifie simplement que $\partial^2 = 0$ et $\bar\partial^2 = 0$ sur les fonctions.

La condition d'intégrabilité est la décomposition $d = \partial + \bar\partial$ pour les (p,q)-formes. Autrement dit : la différentielle d'une (p,q)-forme s'exprime uniquement en somme de $(p+1,q)$-formes et de $(p,q+1)$-formes. Cependant comme d satisfait la règle de Leibnitz, il suffit de vérifier $d = \partial + \bar\partial$ sur les 1-formes (le résultat pour les fonctions étant trivial).

Une autre approche consiste à vérifier que $(\partial + \bar\partial)^2 = 0$ sur les fonctions. **Question ?!** Vérifier l'équivalence avec l'intégrabilité (faire apparaître les torsions analytiques θ' et θ'' comme demailly).

Références

[Dem02] Jean-Pierre Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, 2002.

[HKLR87] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 535–589. MR 877637 (88g :53048)