1. Coordonnées holomorphes approchées

Soit $O \in X$

1.1. Soient x^1, y^1, x^2, y^2 des fonctions définies sur un voisinage de O à valeur dans $\mathbb{R}^n$ qui fournissent un système de coordonnées réelles telles que dans la base adaptée l'opérateur I s'écrive

$$\left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right] \tag{1.1.1}$$

où les 1 sont des blocs identité de taille n.

Cela revient à dire que les fonctions $v = x^1 + iy^1$ et $w = x^2 - iy^2$ donnent une carte holomorphe au voisinage de O.

1.2. **A finir et éclaircir.** Pourquoi on peut choisir les coordonnées normales sans avoir d'impact sur la structure complexe? Comme g est Kählérienne pour I (où ce qui revient au même I est parallèle pour g) on peut supposer que les coordonnées ainsi fournies sont normales.

il faut remarquer que si un système de coordonnées $x^i : X \to \mathbb{R}$ vérifie $\nabla_{\partial_i}\partial_i = 0$, alors les courbes images des axes de coordonnées sont des géodésiques et donc les coordonnées sont normales en O.

Un changement de coordonnées du type

$$\hat{x} = x + 1/2\Gamma xx + O(x^3) \tag{1.2.1}$$

où Γ sont les symboles de Christoffel ou y ressemblent.

1.3. On sait que $IJ = -JI$ et donc on en déduit qu'en O la matrice de J est semblable à

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & -1 & & \end{array}\right] \tag{1.3.1}$$

via une matrice de passage qui commute avec I. Quitte à faire ce changement linéaire (ne dépendant pas du point x) de coordonnées en O, on peut supposer que $J(O)$ a la forme (1.3.1) et de plus on a

$$K(O) = \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{0} & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -1 & & & \end{array}\right] \tag{1.3.2}$$

dans la base $(D_{x^1}|_O, D_{y^1}|_O, D_{x^2}|_O, D_{y^2}|_O)$

- Les coordonnées ainsi obtenues sont toujours normales en O. En effet, il suffit de calculer les
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x'^i}} \frac{\partial}{\partial x'^j} = R_i^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left(R_j^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$
où $x'^i = (R^{-1})^i_j x^j$ (changement de coordonnées linéaire constant). Or
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} R_j^k = \frac{\partial R_j^k}{\partial x^l} = 0$$
Ce qui montre bien que les coordonnées x' sont effectivement normales.
- Comme la matrice de passage commute avec I, les coordonnées ainsi obtenues satisfont toujours (1.1.1) en tout point $x \in X$.

1.4. Fixons $\zeta \in \mathbb{P}^1$, en O la structure complexe $I_\zeta(O)$ s'écrit

(1.4.1)
$$\frac{1}{1+\zeta\bar{\zeta}} \begin{bmatrix} 0 & 1-\zeta\bar{\zeta} & \zeta+\bar{\zeta} & i(\zeta-\bar{\zeta}) \\ \zeta\bar{\zeta}-1 & 0 & i(\bar{\zeta}-\zeta) & \zeta+\bar{\zeta} \\ -(\zeta+\bar{\zeta}) & i(\zeta-\bar{\zeta}) & 0 & \zeta\bar{\zeta}-1 \\ i(\bar{\zeta}-\zeta) & -(\zeta+\bar{\zeta}) & 1-\zeta\bar{\zeta} & 0 \end{bmatrix}$$

1.5. On peut faire un changement linéaire (ne dépendant pas de x) de coordonnées pour obtenir des fonctions $\hat{x}^\epsilon = \hat{x}^\epsilon(\zeta), \hat{y}^\epsilon = \hat{y}^\epsilon(\zeta)$, $\epsilon = 1, 2$ telles que dans la base adaptée, l'opérateur $I_\zeta(O)$ s'écrive :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right] \tag{1.5.1}$$

Si l'on pose $\zeta = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, alors la matrice de passage et son inverse peuvent s'écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta\bar{\zeta}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b & -a \\ 0 & 1 & a & -b \\ b & -a & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta\bar{\zeta}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -a & b \\ -b & a & 1 & 0 \\ -a & -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.3}$$

1.6. Les coordonnées ainsi obtenues sont normales pour g par le même argument que précédemment (1.3). Elles sont données par

$$\hat{x}^1 = x^1 + bx^2 + ay^2$$
$$\hat{y}^1 = y^1 - ax^2 + by^2$$
$$\hat{x}^2 = -bx^1 + ay^1 + x^2$$
$$\hat{y}^2 = -ax^1 - by^1 + y^2$$

1.7. On pose $\hat{v} = \hat{v}(\zeta) = \hat{x}^1 + i\hat{y}^1$ et $\hat{w} = \hat{w}(\zeta) = \hat{x}^2 - i\hat{y}^2$ les fonctions complexes associées. Les fonctions $\hat{v}, \hat{w}$ ainsi obtenues sont une approximation de fonctions holomorphes (résulte immédiatement de (1.5.1)). On a

$$\hat{v} = v - i\zeta\bar{w} \tag{1.7.1}$$
$$\hat{w} = w + i\zeta\bar{v} \tag{1.7.2}$$

1.8. Les deux points précédents (sous-section 1.7 et sous-section 1.6) entraînent que les fonctions $\hat{v}, \hat{w}$ sont une approximation de fonctions holomorphes à l'ordre 2 :

$$\bar{\partial}\,\hat{v}, \bar{\partial}\,\hat{w} \in O(v\bar{v} + w\bar{w})$$

1.9. **Symétrie de l'espace des twisteurs.** La structure réelle sur l'espace des twisteurs est donnée en ζ par l'antipode

$$\zeta \mapsto -\frac{1}{\bar{\zeta}} \tag{1.9.1}$$

La structure complexe satisfait donc la propriété suivante

$$I_{-1/\bar{\zeta}} = -I_\zeta \tag{1.9.2}$$

Ainsi, on sait que pour tout ζ, $\hat{v}(\zeta)$ est holomorphe (approchée) sur $X_\zeta = (X, I_\zeta)$, on en déduit

- que $v + \frac{i}{\zeta}\bar{w}$ est holomorphe (approchée) sur $X_{-1/\bar{\zeta}} = (X, -I_\zeta)$
- donc $v + \frac{i}{\zeta}\bar{w}$ est antiholomorphe (approchée) sur $X_\zeta = (X, I_\zeta)$
- d'où en conjuguant, $\bar{v} - \frac{i}{\zeta}w$ est holomorphe (approchée) sur X_ζ
- ce qui donne enfin, en multipliant par $i\zeta$, que $w + i\zeta\bar{v}$ est holomorphe (approchée) sur X_ζ

Ce qui peut se résumer par

$$i\zeta\left(\overline{\hat{v}\left(-1/\bar{\zeta}\right)}\right) = \hat{w}(\zeta) \tag{1.9.3}$$

c'est-à-dire, à un facteur $i\zeta$ près, les deux coordonnées sont échangées par la structure réelle. Est-ce une manifestation du $\mathcal{O}(\pm 1)$?

2. Approximation à l'ordre supérieur par la méthode de Demailly

2.1. On peut appliquer la méthode de Demailly [?] aux fonctions précédentes. On peut obtenir des coordonnées holomorphes approchées à l'ordre 3 ; mais la dépendance en ζ n'a plus de raison d'être holomorphe.

Plus précisément, à ζ fixé, on sait que $\mathrm{d}\hat{u} = \partial\hat{u} + \bar{\partial}\,\hat{u} = \partial\hat{u} + O(x^2)$ et d'autre part comme les $\partial\hat{u}$ forment une base du fibré tangent holomorphe, les $\overline{\partial\hat{u}}$ forment une base du fibré tangent anti-holomorphe. Ainsi, il existe un $\tilde{Q}$ tel que $\bar{\partial}\,\hat{u} = \tilde{Q}\overline{\partial\hat{u}}$ et il s'en suit que $\tilde{Q} \in O(x^2)$. On notera Q sa partie homogène de degré 2.

On a donc

$$\bar{\partial}\,\hat{u} = Q\,\mathrm{d}\overline{\hat{u}} + O(x^3) \tag{2.1.1}$$

Les coordonnées $\hat{u}$ sont obtenues par combinaisons à coefficient complexes des $\hat{x}^i = R^i_j x^j$. Avec les notations habituelles, l'équation (2.1.1) donne

$$\dot{P_0}(O)R^{-1}\overline{(P_\zeta - P_\zeta(O))} = Q\overline{\dot{P_0}(O)}R^{-1} + O(x^3) \tag{2.1.2}$$

Or le terme $P_\zeta - P_\zeta(O)$ peut se développer en série entière et au moins s'approcher à l'ordre 2 tout en sachant que son terme d'ordre 0 est nul et son terme d'ordre 1 aussi grâce à (1.6) :

$$P_\zeta - P_\zeta(O) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_\zeta}{\partial x^t \partial x^s}x^t x^s + O(x^3) \tag{2.1.3}$$

Ce qui donne

$$P_\zeta - P_\zeta(O) = \frac{1}{2}I_{\zeta,ts}x^{ts} + O(x^3) \tag{2.1.4}$$

Après identification et multiplication par R à droite, on obtient

$$Q\overline{\dot{P_0}(O)} = \dot{P_0}(O)R^{-1}I_{\zeta,ts}x^{ts}R \tag{2.1.5}$$

Or

$$I_{\zeta,ts} = \frac{1}{1+\zeta\bar{\zeta}}\left((\zeta+\bar{\zeta}) + i(\zeta-\bar{\zeta})I\right)J_{,ts} \tag{2.1.6}$$

En fait $J_{,ts}$ est de la forme $L \cdot J$ où L est un pseudo-tenseur faisant intervenir les symboles de Christoffel et le tenseur de courbure de Riemann. Il ne dépend que de la géométrie de X en O.

Cependant son caractère non-tensoriel est source de problèmes notamment quand on va vouloir changer de coordonnées $x \rightsquigarrow \hat{u}$ pour intégrer Q en suivant la méthode de Demailly !

3. Le cas de $X = T^*\mathbb{P}^1$

L'ensemble

$$\left\{\left((w,w'),[z_0 : z_1]\right) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \;\middle|\; wz_0^2 + w'z_1^2 = 0\right\} \tag{3.0.7}$$

s'identifie naturellement à l'espace cotangent à $\mathbb{P}^1$.

Les coordonnées I-holomorphes associées dans une carte près de $O = ((0,0),[1:0])$ sont $v = z_1/z_0$ et w.

3.1. **Forme symplectique et seconde structure complexe.** La forme symplectique holomorphe qui existe naturellement sur le cotangent d'une variété kählérienne est ici

$$\sigma = \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}v \tag{3.1.1}$$

dès lors J est donnée par

$$J\partial_v = -\partial_{\bar{w}} \tag{3.1.2}$$

$$J\partial_w = \partial_{\bar{v}} \tag{3.1.3}$$

Pour des raisons pratique on exprimera plutôt J comme agissant sur les 1-formes

$$J\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}\bar{w} \tag{3.1.4}$$

$$J\,\mathrm{d}w = -\,\mathrm{d}\bar{v} \tag{3.1.5}$$

3.2. **Coordonnées holomorphes sur l'espace des twisteurs.** On dispose d'après ce qui précède de 3 coordonnées holomorphes approchées sur Z :

- $v - i\zeta\bar{w} + O(|v,w|^2)$
- $w + i\zeta\bar{v} + O(|v,w|^2)$
- ζ

Dans le cas $\zeta = 1$ c'est-à-dire $I_\zeta = J$ les coordonnées sont $v - i\bar{w}$ et $w + i\bar{v} = i(\bar{v} - iw)$. Il suffit de vérifier qu'elles sont bien holomorphes sur (X, J).

$$J\,\mathrm{d}\hat{v} = (J\,\mathrm{d}v) - i(J\,\mathrm{d}\bar{w}) = \mathrm{d}\bar{w} + i\,\mathrm{d}v = i\,\mathrm{d}\hat{v} \tag{3.2.1}$$

et de même pour $\hat{w}$.

Un calcul similaire montre que les coordonnées $\hat{v}$ et $\hat{w}$ sont holomorphes sur chaque fibre X_ζ. Ainsi on a bien des coordonnées holomorphes *exactes* sur $Z(T^*\mathbb{P}^1)$.

3.3. **Cas général.** Dans le cas général, on ne peut pas espérer avoir une expression aussi simple que (Équation 3.1.2) pour J et donc ses variations doivent apparaître dans les coordonnées $\hat{v}$ et $\hat{w}$. On peut, en prenant des coordonnées normales sous-section 1.6 ne pas voir ces variations à l'ordre 1, mais elles arrivent nécessairement à l'ordre 2. Il se peut que la constance de J provienne de la courbure constante de $\mathbb{P}^1$, on pourrait se demander si les cotangent d'espaces homogènes ne vérifieraient pas tous cette propriété ? Cf Calabi**?**