1. Coordonnées holomorphes approchées

On se donne une variété hyperkählérienne (X, g, I, J, K). On notera ω_L la forme de Kähler associée à la structure complexe L, $\sigma = \omega_J + i\omega_K$ la forme symplectique et ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique.

1.1. Soit $O \in X$. Soient v $(= u^0)$ et w $(= u^1)$ deux fonctions définies sur un voisinage de O à valeur dans $\mathbb{C}^n$, on les considérera comme coordonnées, mais on notera en cas de besoin $u^\epsilon = (u^{\epsilon,i})_{1\leq i\leq n}$.

1.2. Caractère holomorphe. On supposera que dans la base $\mathrm{d}v, \mathrm{d}w, \mathrm{d}\bar{v}, \mathrm{d}\bar{w}$, la matrice de la structure complexe I s'écrit

(1.2.1)
$$\begin{bmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{bmatrix}$$

Cela revient à demander que v et w forment une carte I-holomorphe au voisinage de O.

1.3. Caractère normal. On demande de plus que les coordonnées u soient normales, c'est-à-dire (pour nous) simplement que

(1.3.1)
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^{\epsilon,i}}} \frac{\partial}{\partial u^{\epsilon,j}} = 0$$

en O pour tout $\epsilon = 0$ ou 1 et tout $0 \leq i, j \leq n$.

L'existence de telles coordonnées provient du caractère kählérien du couple (g, I)

Une conséquence immédiate est que les symboles de Christoffel de la métrique s'annulent en O.

1.4. Réduction de $J(O)$. On sait que $IJ = -JI$ et donc on en déduit qu'en O la matrice de J est de la forme

(1.4.1)
$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où A est une matrice carrée de taille $2n$ à coefficients complexes. Ainsi, en posant le changement de variable $u' = Au$, on a $\mathrm{d}u' = A\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}\bar{u}' = \bar{A}\,\mathrm{d}\bar{u}$