1 Cas général

(M, I) variété réelle de dimension $2N$ avec structure complexe I, intégrable. On fixe un point $0 \in M$ et x^i des coordonnées réelles centrées en 0 pour lesquelles l'opérateur $I(0)$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1_N \\ -1_N & 0 \end{bmatrix}$$

dans la base des $\dfrac{\partial}{\partial x^i}|_0$.

To Do ! ! Décrire les indices et notations

On note

$$P = P(x) = \frac{1}{2}\left(1 - iI(x)\right) \tag{1}$$

la projection sur l'espace tangent $I(x)$-holomorphe inclus dans $T_x M$. On a en particulier $P(0) = \frac{1}{2}(1 - iI(0))$.

To Do ! ! quelques propriétés des P

L'opérateur $\bar\partial$ sur les fonctions s'écrit

$$\bar\partial\, f = \bar P^* \,\mathrm{d} f \tag{2}$$

Posons $u^a = 2P(0)^a_k x^k = x^a + ix^{a+N}$. On a dès lors

$$\begin{aligned} \bar\partial\, u^a &= \bar P^* \,\mathrm{d}u^a \\ &= \bar P^* \left(2P(0)^a_k \,\mathrm{d}x^k\right) \\ &= 2P(0)^a_k \bar P^k_l \,\mathrm{d}x^l \end{aligned}$$

Or quand $x \to 0$, on a $\bar P(x) \to \bar P(0)$ et donc $\bar\partial\, u^a = o(1)$ en 0. D'autre part $\overline{\partial u^b} = \mathrm{d}\bar u^b - \overline{\bar\partial\, u^b} = \mathrm{d}\bar u^b + o(1) = 2\bar P(0)^b_k \,\mathrm{d}x^k + o(1)$. Or les u^a étant des coordonnées, on a deux familles $\bar\partial\, u^a$ et $\overline{\partial u^b}$ de $\Omega^{0,1}_M$ dont la seconde est une base. On peut donc écrire

$$\bar\partial\, u^a = Q^a_b \overline{\partial u^b} = Q^a_b \,\mathrm{d}\bar u^b + o(Q^a_b)$$

Il est clair que $Q^a_b \to 0$ quand $x \to 0$ et donc on a la relation suivante

$$P(0)^a_k \bar P^k_l = Q^a_b \bar P(0)^b_l + o(Q^a_b)$$

en évaluant cette relation pour $l = c$ et en remarquant que $\bar P(0)^b_c = \delta^b_c$, on trouve

$$Q^a_b \sim P(0)^a_k \bar P^k_c$$

Notons $\tilde Q$ cette partie principale.

To Do ! ! [. . .]

$$z^a = u^a + u^b \bar u^c \frac{\partial \tilde Q^a_c}{\partial u^b} + \frac{1}{2} \bar u^b \bar u^c \frac{\partial \tilde Q^a_c}{\partial \bar u^b} \tag{3}$$

2 Le cas de l'espace des twisteurs de M variété hyperkählérienne