Table des matières

1. Théorème de Frobenius réel analytique en codimension 1

Le but de cette section est de démontrer de manière effective le théorème de Frobenius dans le cas de la codimension 1 (pour commencer). On se placera donc dans les hypothèses du théorème suivant :

Théorème 1 (Frobenius *codimension 1*)

Soit M variété analytique réelle de dimension n et ω une 1-forme analytique sur M satisfaisant la condition dite d'intégrabilité :

$$\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$$

Alors au voisinage de tout point $\wp \in M$, il existe un plongement $m : \mathbb{R}^{n-1} \to M$ tel que $0 \mapsto \wp$ et :

$$m^*\omega = 0$$

Remarque. La condition $m^*\omega = 0$ signifie que l'image de m est une sous-variété dont les espaces tangents s'identifient naturellement aux noyaux de la forme ω. (feuilletage de codimension 1).

On utilisera les notations tensorielles et la convention de sommation d'Einstein. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n-1} \arrow[r, "\check{m}"] \arrow[d, "x"] & M \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "\check{a}"] & \\
\mathbb{R}^{n-1} \arrow[r, "m"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "a"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

- x^i désigneront les coordonnées sur $\mathbb{R}^{n-1}$, on utilisera i, p, q, r comme indices associés.
- u^j désigneront les coordonnées locales sur M centrées au point $\wp$, on utilisera j, k, l comme indices associés.
- $\omega = \check{a}_j \, \mathrm{d}u^j$ avec $\check{(a)}(0) = a(0) \neq 0$.
- $\check{m}(0) = \wp$, mais $m(0) = 0$

L'équation que l'on veut résoudre : $\check{m}^*\omega = 0$ se traduit alors dans ces coordonnées :

$$\forall i,\ \forall x \quad a_j(m(x)) \frac{\partial m^j}{\partial x^i}(x) = 0$$

Le but de cet partie est d'utiliser le caractère analytique de a et analytique escompté de m pour exprimer cette équation degré par degré et ainsi déduire le développement en série entière de m.

1.1. **À l'ordre** 0.

On peut remarquer qu'à l'ordre 0, l'équation est sous-déterminée :

$$\forall i, \quad a_j(0) \frac{\partial m^j}{\partial x^i}(0) = 0$$

On peut donc choisir une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle :

$$a(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial m^j}{\partial x^i}(0) \right)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

1.2. **À l'ordre** 1.

$$\frac{\partial^2 m^1}{\partial x^i \partial x^p} = - \frac{\partial a_{i+1}}{\partial u^{p+1}}$$

1.3. **À l'ordre** 2.

On fait l'hypothèse que pour tous les $j \neq 1$, $\partial^2 m^j = 0$ (système sous déterminé)

$$\frac{\partial^3 m^1}{\partial x^i \partial x^p \partial x^q} = - \frac{\partial^2 a_{i+1}}{\partial x^{p+1} \partial x^{q+1}} + 2 \frac{\partial a_{i+1}}{\partial u^{p+1}} \frac{\partial a_1}{\partial u^{q+1}} + \frac{\partial a_{p+1}}{\partial u^{q+1}} \frac{\partial a_1}{\partial u^{i+1}}$$

2. Théorème de Newlander-Nirenberg avec données analytiques réelles

On fixera dans toute cette partie les notations telles qu'utilisées dans le théorème :

Théorème 2

*Soit M variété analytique réelle de dimension $2n$, et $I \in End(TM)$ une structure presque complexe ($I^2 = -\mathrm{Id}$) **intégrable** (cf 2.1).*

Alors au voisinage de tout points de M il existe des applications coordonnées $z_1, \cdots z_n : M \to \mathbb{C}$ centrées en ce points, qui induisent des changements de cartes soient holomorphes, et donc une structure complexe sur M

2.1. **Intégrabilité .** [God69, Voi02] I est **intégrable** si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :

(i) Le tenseur de Nijenhuis défini par : $N_I(X,Y) := [IX, IY] - I[X, IY] - I[IX, Y] + I2[X,Y]$ est identiquement nul.

(ii) Pour tout champ de vecteur complexes X, Y sur M satisfaisant $I^{\mathbb{C}}X = iX$ et $I^{\mathbb{C}}Y = iY$, le crochet de Lie $[X,Y]$ satisfait également $I^{\mathbb{C}}[X,Y] = i[X,Y]$

(iii) L'espace tangent I-holomorphe $T^{1,0}M := \ker(I^{\mathbb{C}} - i\,\mathrm{Id}) \subset TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ satisfait $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subseteq T^{1,0}M$

(iv) Pour toute famille $(\omega^\alpha)_\alpha$ de $(1,0)_I$-formes sur M de rang n, et pour tout α, $\mathrm{d}\omega^\alpha = \theta_\beta \wedge \omega^\beta$ pour des 1-formes analytiques θ_β.

(v) Le dual de l'espace tangent I-holomorphe $\Omega^{1,0}_M \subseteq \Omega^1_M$ satisfait $\mathrm{d}\Omega^{1,0}_M \subseteq \Omega^1_M \wedge \Omega^{1,0}_M$

Localité de la condition d'intégrabilité. Justifier qu'on puisse se ramener à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{2n}$. À faire, cf [Wei71, Voi02]

2.2. **Notations et définitions.** Par la remarque précédente, on se ramène à $M = U$ ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant 0, et l'on suppose donné une famille $\omega^1, \cdots \omega^n$ de 1-formes à valeurs complexes qui définissent la structure I sur M de la manière suivante : Si X est un champ de vecteur lisse complexe sur M, alors : Autre lien entre ω et I ?

$$I^{\mathbb{C}}X = -iX \quad \textbf{ssi} \quad \forall \alpha,\ \omega^\alpha(X) = 0$$

On cherche $m : \mathbb{C}^n \to U$ tel que $\forall \alpha, m^*\omega^\alpha = 0$ On suivra les notations du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "m"] \arrow[d, "(x^i)_i"] & U \arrow[d, "(u^j)_j"] & \\ \mathbb{C}^n & \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "a^\alpha"'] & \mathbb{C}^{2n} \end{tikzcd}$$

De même que précédemment :

- x^i désigneront les coordonnées canoniques holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, on utilisera $i, p, q, r = 1 \cdots n$ comme indices associés. De plus les coordonnées antiholomorphes $(\bar{x}^i)_i$ associées seront notées $(x^{i+n})_i$.
- u^j désigneront les coordonnées locales sur U centrées en 0, on utilisera $j, k, l = 1 \cdots 2n$ comme indices associés.
- $\omega^\alpha = a^\alpha_j \,\mathrm{d}u^j$; on utilisera $\alpha, \beta, \gamma = 1 \cdots n$ comme indices associés.
- $m(0) = 0$.

2.3. **Développement en séries entières.** Quand les dérivées partielles sont prises en 0, on omettra le (0) dans $\dfrac{\partial}{\partial}(0)$, à l'inverse si la formules est vraie pour tout x on le signalera par $\dfrac{\partial}{\partial}(x)$.

On veut m paramétrage holomorphe de U, en particulier on suppose nuls tous les $\partial_{x^{i+n}} m$ etc. ($\bar{\partial} m = 0$)

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & m^j(x) & = & \dfrac{\partial m^j}{\partial x^i} x^i + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 m^j}{\partial x^i \partial x^p} x^i x^p + \dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 m^j}{\partial x^{i,p,q}} x^i x^p x^q + \cdots \\
(2) & a_j^\alpha(u) & = & a_j^\alpha(0) + \dfrac{\partial a_j^\alpha}{\partial u^k} u^k + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 a_j^\alpha}{\partial u^k \partial u^l} u^k u^l + \cdots \\
(3) & \dfrac{\partial m^j}{\partial x^i}(x) & = & \dfrac{\partial m^j}{\partial x^i} + \dfrac{\partial^2 m^j}{\partial x^i \partial x^p} x^p + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^3 m^j}{\partial x^{i,p,q}} x^p x^q + \cdots
\end{array}
$$

Ainsi en réunissant on obtient :

$$
\begin{aligned}
a_j^\alpha(m(x))\frac{\partial m^j}{\partial x^i}(x) \;=\; & \left(a_j^\alpha(0)\frac{\partial m^j}{\partial x^i}\right) \\
+ & \left(\frac{\partial a_j^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial m^k}{\partial x^p}\frac{\partial m^j}{\partial x^i} + a_j^\alpha(0)\frac{\partial^2 m^j}{\partial x^i \partial x^p}\right) x^p \\
+ & \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_j^\alpha}{\partial u^k \partial u^l}\frac{\partial m^k}{\partial x^p}\frac{\partial m^l}{\partial x^q}\frac{\partial m^j}{\partial x^i}\right. \\
& \left. + \frac{\partial a_j^\alpha}{\partial u^k}\left(\frac{\partial^2 m^j}{\partial x^i \partial x^p}\frac{\partial m^k}{\partial x^q} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m^k}{\partial x^p \partial x^q}\frac{\partial m^j}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{2} a_j^\alpha(0)\frac{\partial^3 m^j}{\partial x^{i,p,q}}\right) x^p x^q \\
+ & \; o(|x|^2)
\end{aligned}
$$

2.4. **Système sous-déterminé.** On peut remarquer que l'on dispose de à chaque degré de 2 fois plus d'inconnues que d'équations (cf. A) ainsi pour régler se problème on est amené à choisir des valeurs (souvent 0) pour certaines inconnues.
Cas degré 0, condition sur a et Dm. L'équation au degré 0 est :

$$a_j^\alpha(0)\frac{\partial m^j}{\partial x^i}(0) = 0 \qquad \forall i$$

On remarque que cette équation est invariante si on remplace m par $m \circ N$ où N est une application linéaire inversible sur $\mathbb{C}^n$. On peut donc choisir une base de $\mathbb{C}^{2n}$ (arrivée) et une base de $\mathbb{C}^n$ (départ) telle que

$$
\begin{array}{lrcl}
(4) & a_j^\alpha & = & \delta_j^\alpha \\
(5) & \dfrac{\partial m^j}{\partial x^i} & = & \delta_{i+n}^j
\end{array}
$$

Ici la condition d'intégrabilité devrait permettre de montrer que D^2m est symétrique

Cas de degré 1. L'équation au degré 1 s'écrit :

$$\frac{\partial a_j^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial m^k}{\partial x^p}\frac{\partial m^j}{\partial x^i} + a_j^\alpha(0)\frac{\partial^2 m^j}{\partial x^i \partial x^p} = 0$$

Ce qui donne, sous les hypothèses précédentes :

$$\forall \alpha, i, p \quad \frac{\partial^2 m^\alpha}{\partial x^i \partial x^p} = -\frac{\partial a_{i+n}^\alpha}{\partial u^{p+n}} \in \mathbb{C}$$

Encore une fois on se retrouve avec n^3 equations pour $2n^3$ inconnues : les $(\partial_{i,p} m^j)_{j;i,p}$.
On pose alors :

$$\forall \alpha \leq n \quad \frac{\partial^2 m^{\alpha+n}}{\partial x^i \partial x^p} = 0$$

Cas en degré 2. L'équation en degré 2 s'écrit sous les hypothèses précédentes :

$$\frac{\partial^3 m^\alpha}{\partial x^{i,p,q}} + \frac{\partial^2 a_{i+n}^\alpha}{\partial u^{p+n}\partial u^{q+n}} - 2\frac{\partial a_\beta^\alpha}{\partial u^{q+n}}\frac{\partial a_{i+n}^\beta}{\partial u^{p+n}} - \frac{\partial a_{i+n}^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial a_{q+n}^\beta}{\partial u^{p+n}} = 0$$

On impose alors $\partial_{i,p,q} m^{\alpha+n} = 0$ pour les n^4 equations manquantes.
Cas de degré $d \geq 2$. On peut montrer que les équations obtenues au degré d sont toujours de la forme :

$$\frac{\partial^{d+1} m^\alpha}{\partial \cdots} = \phi\left(a_k^j, \partial a_k^j, \cdots, \partial^d a_k^j\right)$$

Il manque à chaque fois n^{d+2} equations correspondants aux valeurs de $\partial^d m^{\alpha+n}$, que l'on imposera à 0.

2.5. **Bilan.** On résume les informations obtenues sur m dans le tableau suivant ; à cela il faut ajouter la donnée que m est holomorphe (i.e. $\bar{\partial} m = 0$).

Expression	Valeur	Expression	Valeur
m^α	0	$m^{\alpha+n}$	0
$\dfrac{\partial m^\alpha}{\partial x^i}$	0	$\dfrac{\partial m^{\alpha+n}}{\partial x^i}$	δ_i^α
$\dfrac{\partial^2 m^\alpha}{\partial x^i \partial x^p}$	$-\dfrac{\partial a_{i+n}^\alpha}{\partial u^{p+n}}$	$\dfrac{\partial^2 m^{\alpha+n}}{\partial x^i \partial x^p}$	0
$\dfrac{\partial^3 m^\alpha}{\partial x^i \partial x^p \partial x^q}$	$-\dfrac{\partial^2 a_{i+n}^\alpha}{\partial u^{p+n} \partial u^{q+n}} + 2\dfrac{\partial a_\beta^\alpha}{\partial u^{q+n}} \dfrac{\partial a_{i+n}^\beta}{\partial u^{p+n}} + \dfrac{\partial a_{i+n}^\alpha}{\partial u^\beta} \dfrac{\partial a_{q+n}^\beta}{\partial u^{p+n}}$	$\dfrac{\partial^3 m^{\alpha+n}}{\partial x^i \partial x^p \partial x^q}$	0
$\dfrac{\partial^4 m^\alpha}{\partial x^i \partial x^p \partial x^q \partial x^r}$	$\cdots$	$\dfrac{\partial^4 m^{\alpha+n}}{\partial x^i \partial x^p \partial x^q \partial x^r}$	0

2.6. **Inversion et fonctions coordonnées.**

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, equal] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[d, "p_{\mathbb{R}^{2n}}"] \arrow[dll, "z"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "m"] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{C}^{2n}
\end{tikzcd}$$

On note $z : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ telle que la restriction à $\mathbb{R}^{2n}$ soit l'inverse de m, on doit donc avoir pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $z(m(x)) = x$ et $\forall u \in \mathbb{R}^{2n}$, $m(z(u)) = u$. On développera formellement m de la façon suivante :

$$m^j(\underline{x}) = 0 + \mu_p^j x^p + \mu_{pq}^j x^p x^q + \cdots = \sum_{d \geq 0} \sum_{|\underline{k}|=d} \mu_{\underline{k}}^j \underline{x}^{\underline{k}}$$

Comme m est holomorphe par construction seul des puissances de x apparaissent dans son développement. Cependant on écrira le développement de z en fonction des coordonnées u et $\bar{u}$ car a priori z n'est pas holomorphe pour la structure sur $\mathbb{C}^{2n}$.

$$z^i = z^i(0) + \frac{\partial z^i}{\partial u^j} u^j + \frac{\partial z^i}{\partial \bar{u}^j} \bar{u}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^i}{\partial u^j \partial u^k} u^j u^k + \frac{\partial^2 z^i}{\partial u^j \partial \bar{u}^k} u^j \bar{u}^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^i}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^k} \bar{u}^j \bar{u}^k + \cdots$$

Pour simplifier les notations on pose $u^{j+2n} = \bar{u}^j$ et on utilisera les indices $\tau, \kappa = 1 \cdots 4n$ pour u.

$$z^i = z^i(0) + \frac{\partial z^i}{\partial u^\tau} u^\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^i}{\partial u^\tau \partial u^\kappa} u^\tau u^\kappa + \cdots$$

Et de plus $m^{j+2n} = \bar{m}^j$

En cours de correction

$$\begin{aligned}
x^i &= z^i(m(x)) \\
&= z^i(0) + \frac{\partial z^i}{\partial u^\tau} m^\tau(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^i}{\partial u^\tau \partial u^\kappa} m^\tau(x) m^\kappa(x) + \cdots \\
&= 0 \\
&\quad + \left(\frac{\partial z^i}{\partial u^j} \mu_p^j \right) x^p + \left(\frac{\partial z^i}{\partial \bar{u}^j} \bar{\mu}_p^j \right) \bar{x}^p \\
&\quad + \left(\frac{\partial z^i}{\partial u^j} \mu_{pq}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^i}{\partial u^j \partial u^k} \mu_p^j \mu_q^k \right) x^p x^q + \left(\frac{\partial z^i}{\partial \bar{u}^j} \bar{\mu}_{pq}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^i}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^k} \bar{\mu}_p^j \bar{\mu}_q^k \right) \bar{x}^p \bar{x}^q \\
&\qquad + \left(\frac{\partial^2 z^i}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^k} \bar{\mu}_p^j \mu_q^k \right) \bar{x}^p x^q \\
&\quad + \left(\frac{\partial z^i}{\partial u^j} \mu_{pqr}^j + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 z^i}{\partial u^j \partial u^k} \left(\mu_p^j \mu_{qr}^k + \mu_q^j \mu_{pr}^k + \mu_r^j \mu_{pq}^k \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 z^i}{\partial u^j \partial u^k \partial u^l} \mu_p^j \mu_q^k \mu_r^l \right) x^p x^q x^r \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

D'où les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^i(0) &= 0 \\ \frac{\partial z^i}{\partial u^j}\mu_p^j &= \delta_p^i \\ \frac{\partial z^i}{\partial \bar{u}^j}\bar{\mu}_p^j &= 0 \\ \frac{\partial^2 z^i}{\partial u^j \partial u^k}\mu_p^j\mu_q^k + \frac{\partial z^i}{\partial u^j}\mu_{pq}^j &= 0 \end{aligned}$$

On ne récupère pas ainsi toute l'information car par exemple à l'ordre 1, on a : $\mu_p^j = \delta_{p+n}^j$ donc on ne connaîtra les $\partial_j z$ que pour $j = p+n \in \{n+1, \cdots, 2n\}$.

Peut être ces données proviennent de l'équation inverse $m \circ z = id$?

L'équation inverse est non-linéaire en les dérivées de z.

3. Tentative sans inversion

On cherche $(z^1, \cdots z^n)$ n fonctions analytiques à valeurs complexes telles que :

$$\mathrm{d}z^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^n = f\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n$$

pour une certaine fonction f analytique à valeurs complexes.
Bilan. Si on pose z^α et ω^β dans des coordonnées analytiques u^i, alors on se retrouve avec $\binom{2n}{n}$ equations de degré n auxquelles on ajoute l'inconnue due à la fonction f.

abandonné

4. Application à l'espace des twisteurs

Ajouter notations : M, Z, I, J, K

D'après [HKLR87], les $(1,0)$-formes pour la structure complexe $\underline{\mathbf{I}}$ sur l'espace des twisteurs Z sont les

$$\phi + i\zeta K\phi \quad \text{pour } \phi \ (1,0)_I\text{-forme} \qquad \text{et} \quad \mathrm{d}\zeta$$

En particulier si on considère $z^1, \cdots z^{2n}$ des coordonnées holomorphes locales sur (M, I), alors une base des $(1,0)_I$-formes est donnée par les $(\mathrm{d}z^\nu)_\nu$; ainsi base des $(1,0)$-formes sur Z est donnée par :

$$\mathrm{d}z^\nu + i\zeta K\,\mathrm{d}z^\nu \quad \nu = 1 \cdots 2n \qquad \text{et} \quad \mathrm{d}\zeta$$

En notant $K = K_\mu^\nu$ on pose $\omega^\alpha = (\delta_\mu^\alpha + i\zeta K_\mu^\alpha)\,\mathrm{d}z^\mu$ pour $\alpha \leq 2n$ et $\omega^{2n+1} = \mathrm{d}\zeta$.

Ainsi avec les notations précédentes

$$a_j^\alpha = \begin{cases} \delta_j^\alpha + i\zeta K_j^\alpha & \alpha < 2n+1 \\ \delta_j^{2n+1} & \alpha = 2n+1 \end{cases}$$

Comment déterminer le DSE de K ?

4.1. **La matrice K.**

5. Liste des questions et inquiétudes

- Liberté dans le choix de certaines dérivées de m
- Liberté dans le choix de l'inverse z de m !!! (absurde)
- Utilisation de la condition d'intégrabilité à l'ordre seulement 0, et encore !

Annexe A. Justification des degrés de liberté supplémentaires

On a une variété presque-complexe intégrable et on veut paramétrer cette variété localement depuis un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Il n'existe pas de paramétrage canonique, comme on peut le voir dans l'exemple suivant où l'on prend une variété déjà complexe :

$$M = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; (z_1+1)^2 + z_2^2 = 1\right\}$$

Cette sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{C}^2$ vient avec une coordonnée complexe z et deux coordonnées réelles (u^1, u^2) centrées en $(0,0)$:

$$\begin{array}{rcl} z & = & z_1 + iz_2 \\ u^1 & = & \Re(z) = \Re(z_1) - \Im(z_2) \\ u^2 & = & \Im(z) = \Im(z_1) + \Re(z_2) \end{array}$$

On peut en effet localement retrouver z_1, z_2 à partir de z :

$$\begin{array}{rcl} (1+z)(z_1+1-iz_2) & = & ((z_1+1)+iz_2)((z_1+1)-iz_2) = (z_1+1)^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 & = & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{1+z} - 1\right) \\ z_2 & = & \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{1+z} + 1\right) \end{array}$$

On cherche m et $\tilde{m}$ deux paramétrages d'un voisinage de $(0,0)$ dans M qui soient holomorphes, c'est-à-dire tels que

$$\frac{\partial m}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{m}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} m(z,\bar{z}) & = & \dfrac{1}{2}\left(\left(z + \dfrac{1}{1+z} - 1\right), \left(z - \dfrac{1}{1+z} + 1\right)\right) \\ \tilde{m}(z,\bar{z}) & = & (\cosh(z) - 1, i\sinh(z)) \end{array}$$

Alors $\tilde{m}(z) = m(\exp(z) - 1)$. Ainsi les deux fonctions sont holomorphes. Pourtant ce sont deux paramétrages différents d'un voisinage de $(0,0)$ dans M.

En fait j'ai utilisé qu'il y a deux paramétrages différents (entre autre) d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ donnés par id et $z \mapsto \exp(z) - 1$.

Annexe B. La condition d'intégrabilité en codimension 1

L'hypothèse $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$ se traduit dans la base des $\mathrm{d}u^j$:

$$a_j \frac{\partial a_k}{\partial u^l}\, \mathrm{d}u^j \wedge \mathrm{d}u^k \wedge \mathrm{d}u^l = 0$$

Ce qui donne en identifiant dans la base de $\Omega^3_{M,\mathbb{R}}$ donnée par $(\mathrm{d}u^j \wedge \mathrm{d}u^k \wedge \mathrm{d}u^l)$ pour $1 \leq j < k < l \leq n$:

$$a_j \left(\frac{\partial a_k}{\partial u^l} - \frac{\partial a_l}{\partial u^k}\right) + a_k \left(\frac{\partial a_l}{\partial u^j} - \frac{\partial a_j}{\partial u^l}\right) + a_l \left(\frac{\partial a_j}{\partial u^k} - \frac{\partial a_k}{\partial u^j}\right) = 0$$

Annexe C. La condition d'intégrabilité dans le cas complexe de codimension n

On note $\omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n$, la condition d'intégrabilité s'écrit alors :

$$\forall \alpha,\ \mathrm{d}\omega^\alpha \wedge \omega = 0$$

Le lemme de De Rham nous donne l'existence (effective) de 1-formes analytiques θ^α_β sur U telles que :

$$\forall \alpha,\ \mathrm{d}\omega^\alpha = \theta^\alpha_\beta \omega^\beta$$

En décomposant $\theta^\alpha_\beta = t^\alpha_{\beta,j}\, \mathrm{d}u^j$ on peut écrire :

$$\frac{\partial a^\alpha_j}{\partial u^k} - \frac{\partial a^\alpha_k}{\partial u^j} = t^\alpha_{\beta,j} a^\beta_k - t^\alpha_{\beta,k} a^\beta_j$$

Références

[God69] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique ...*, Collection Méthodes, Hermann, 1969.

[HKLR87] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 535–589. MR 877637 (88g :53048)

[Voi02] C. Voisin, *Théorie de hodge et géométrie algébrique complexe*, Collection SMF, Société Mathématique de France, 2002.

[Wei71] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Actualités scientifiques et industrielles, no. n° 1267, Hermann, 1971.