1 Un premier quotient symplectique : $\mathbb{C}^2 /\!\!/ U(1)$

1.1 Structures et notations

Soit $M = \mathbb{C}^2$ munit des coordonnées $w = (w^1, w^2) = (x^1 + iy^1, x^2 + iy^2)$, de la structure riemannienne :

$$g = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}y^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}y^2)^2$$

et de la structure complexe

$$I\frac{\partial}{\partial w^k} = i\frac{\partial}{\partial w^k}$$

qui induisent une structure symplectique réelle

$$\omega = -g(\_, I\_) = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}y^1 + \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}y^2$$

On notera une expression de la forme

$$\sum_{k=1,2} f(x^k, y^k)$$

par $f(x, y)$.

Ainsi les structures riemannienne et symplectiques s'écrivent

$$g = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 \qquad \omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

1.2 L'action du groupe $U(1)$

Le groupe de lie $G = U(1)$ agit sur M par homothétie

$$g \cdot w = (gw^1, gw^2)$$

On remarque que cette action préserve la forme symplectique ω.

A un point $w \in M$ fixé, on peut associer une application lisse

$$\begin{pmatrix} G & \longrightarrow & M \\ g & \mapsto & g \cdot w \end{pmatrix}$$

Qui s'exprime dans les coordonnées réelles par

$$e^{i\theta} \cdot (x + iy) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) + i(\cos(\theta)y + \sin(\theta)x)$$

D'où en $\theta = 0$,

$$e^{i\theta+it} \cdot (x + iy) = (\cos(t)x - \sin(t)y) + i(\cos(t)y + \sin(t)x) = x + iy + t(-y + ix) + o(t)$$

Ainsi la différentielle en $g = 1$ nous donne

$$\begin{pmatrix} T_1G & \longrightarrow & T_wM \\ it & \mapsto & -ty\dfrac{\partial}{\partial x} + tx\dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

On notera X_w^t le vecteur ainsi obtenu. En faisant varier w, on obtient un champ de vecteur X^t lisse sur M, ce champ de vecteur représente l'action infinitésimale de G sur M.

1.3 Application moment

Considérons $\omega(X^t, \_)$ le produit intérieur de ω par X^t.

$$\omega(X^t, \_) = ty\, \mathrm{d}ytx\, \mathrm{d}x = \frac{t}{2}\, \mathrm{d}(yy + xx)$$

Notons $\mu^t : M \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$w = (x, y) \mapsto \frac{t}{2}(xx + yy)$$

Dès lors le couplage $(t, w) \mapsto \mu^t(w)$ nous donne une application $\mu : M \to \mathfrak{u}(1)^\vee \cong \mathbb{R}$: $w \mapsto \frac{1}{2}(xx + yy)$. Enfin cette application commute avec l'action de G (sur M et sur $\mathfrak{u}(1)^\vee$).

1.4 Sous-variété de moment

Considérons dès lors $N_a = \mu^{-1}(a)$. Pour $a \neq 0$ c'est une sous-variété (non vide pour $a > 0$). De plus l'équivariance de μ entraîne que N_a est stable sous l'action de G.

On fixera dans toute la suite un $a = \frac{1}{2}$. Alors $N_a = \left\{(w^1, w^2) \in M \;\middle|\; |w^1|^2 + |w^2|^2 = 2a = 1\right\}$ est $\mathbb{S}^3_{\mathbb{C}^2}$ la sphère unité de $\mathbb{C}^2$.

1.5 Quotient symplectique

G agit proprement sans point fixe sur N_a, et l'on peut donc considérer la variété quotient $S = N_a/G$.

On sait qu'on peut associer à tout $w \in N_a = \mathbb{S}^3_{\mathbb{C}^2}$ la droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$ qu'elle engendre, ce qui nous donne une application $N_a \to \mathbb{P}^1$ qui s'écrit $(w^1, w^2) \mapsto [w^1 : w^2]$. Or la fibre au dessus d'un élément $[z : z'] \in \mathbb{P}^1$ est exactement l'ensemble des (gz, gz') pour $g \in U(1)$. C'est la fibration de Hopf.

Le quotient s'identifie donc à $\mathbb{P}^1$.

1.6 Relèvement des champs de vecteurs

Notre quotient donne lieu à la suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathbb{S}^3$ suivante

$$0 \to \ker \mathrm{d}\pi \longrightarrow T\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \pi^* T\mathbb{S}^2 \to 0$$

On cherche étant donné un champ de vecteur sur $\mathbb{S}^2$ (une section de $T\mathbb{S}^2$) un relevé "canonique" de ce champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^3$. Or $\mathbb{S}^3$ hérite de la structure riemannienne de $\mathbb{C}^2$ (comme sous-variété réelle) et on peut donc définir $H = (\ker \mathrm{d}\pi)^\perp \cap T\mathbb{S}^3$ qui est du coup isomorphe à $\pi^* T\mathbb{S}^2$. Cet isomorphisme impose en chaque point une unique direction pour relever le vecteur. Ceci combiné aux conditions d'appartenir à $T\mathbb{S}^3$ et d'être bel et bien l'image réciproque du vecteur sur $\mathbb{S}^2$ impose 4 conditions linéaires et linéairement indépendantes qui déterminent de manière unique le relevé.

1.6.1 Expression en coordonnées

Soit z la coordonnées naturelle sur $\mathbb{P}^1 \cap \Omega_0$ notons $z = u + iv$. Dès lors u et v sont des coordonnées réelles sur un ouvert de $\mathbb{S}^2$. L'application π s'écrit alors

$$(x, y) \mapsto z = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_1^2 + y_1^2}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} u &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} \\ v &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned}$$

Soit $Y = \alpha\partial_u + \beta\partial_v$ un vecteur sur $\mathbb{S}^2$. On cherche $X = a\partial_x + b\partial_y \in T\mathbb{C}^2$ un antécédent à Y avec $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$. C'est-à-dire, on veut,

$$(\mathrm{d}\pi)(X) = a(\mathrm{d}\pi)\partial_x + b(\mathrm{d}\pi)\partial_y = a\frac{\partial u}{\partial x}\pi^*\partial_u + a\frac{\partial v}{\partial x}\pi^*\partial_v + b\frac{\partial u}{\partial y}\pi^*\partial_u + b\frac{\partial v}{\partial y}\pi^*\partial_v$$

Ce qui donne après identification

$$\begin{aligned} \alpha &= a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} \\ \beta &= a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Conditions d'orthogonalité L'unique relevé $X = a\partial_x + b\partial_y$ de Y évoqué précédemment satisfait de plus

$$ax + by = 0$$

qui est la condition d'appartenance à $T\mathbb{S}^3 = \ker \mathrm{d}\mu$. Et

$$bx - ay = 0$$

qui est la condition d'orthogonalité à $\ker \mathrm{d}\pi$.

Expression matricielle En regroupant toutes ces conditions linéaires, X est l'unique solution du système suivant :

$$A(x,y)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ \beta(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{bmatrix}$$

où

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \\ -y_1 & -y_2 & x_1 & x_2 \\ -x_1^2x_2 + x_2y_1^2 - 2x_1y_1y_2 & x_1^3 + x_1y_1^2 & -{y_1}^2y_2 + y_2x_1 - 2y_1x_1x_2 & y_1^3 + y_1x_1^2 \\ -x_1^2y_2 + y_2y_1^2 + 2x_1y_1x_2 & -x_1^2y_1 - y_1^3 & -x_1^2x_2 + x_2y_1^2 - 2x_1y_1y_2 & x_1^3 + x_1y_1^2 \end{bmatrix}$$

1.7 Calcul de la forme symplectique quotient

La résolution de ce système par un logiciel de calcul formel [1] nous donne

$$\omega_{\text{quotient}}\left(\alpha\partial_u + \beta\partial_v, \alpha'\partial_u + \beta'\partial_v\right) = \frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')(x_1^2 + y_1^2)^2}{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}$$

Si on impose de plus la condition $(x,y) \in N$, en particulier $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$ et ainsi on a :

$$\omega_{\text{quotient}}\left(\alpha\partial_u + \beta\partial_v, \alpha'\partial_u + \beta'\partial_v\right) = |w_1|^4(\alpha\beta' - \beta\alpha')$$

1. Sage

2 Un exemple de quotient hyperkählérien : $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 /\!\!/\!\!/ \, U(1)$

2.1 Structures et notations

Soit $M = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ munit des coordonnées (w, z) où $w = (w^1, w^2) = (x^1 + iy^1, x^2 + iy^2)$ et $z = (z^1, z^2) = (u^1 + iv^1, u^2 + iv^2)$. On considère sur M les structures complexes suivantes

$$I = \begin{bmatrix} i1_2 & 0 \\ 0 & -i1_2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i1_2 \\ i1_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ces trois structures complexes vérifient les relations quaternioniques $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1_4$ et de plus sont orthogonales pour la structure riemannienne

$$g = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2$$

Ces données munissent M d'une structure de variété hyperkählérienne.

2.2 Action du groupe unitaire

Comme précédemment, le groupe $G = U(1)$ agit sur M par homothétie : $g \cdot m = (g \cdot w, g \cdot z) = (gw^1, gw^2, gz^1, gz^2)$. Son action en coordonnées réelles s'écrit

$$e^{i\theta}[(x, y), (u, v)] = [(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y), (\cos(\theta)u - \sin(\theta)v, \sin(\theta)u + \cos(\theta)v)]$$

Comme précédemment on peut calculer les vecteurs tangents qui proviennent de l'algèbre de Lie de G et qui représentent les déplacement infinitésimaux (en t) le long d'une orbite (passant par m).

$$X_m^t = -ty\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial y} - tv\frac{\partial}{\partial u} + tu\frac{\partial}{\partial v}$$

2.3 Structure tri-symplectique

Les trois formes de Kähler $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ associées au structures complexes I, J et K munissent M de 3 structures symplectiques réelles. De plus l'action du groupe G préserve chacune de ces 2-formes.

$$\begin{aligned} \omega_I &= -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\ \omega_J &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}u + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}v \\ \omega_K &= -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}v + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}u \end{aligned}$$

En calculant le produit intérieur de des formes symplectiques par les vecteurs provenant de l'algèbre de Lie de G, on obtient 3 applications moment

$$\begin{aligned} \mu_I &= xx + yy - uu - vv \\ \mu_J &= -uy + xv \\ \mu_K &= yv + xu \end{aligned}$$

On remarque dès lors que

$$\mu_I = |w|^2 - |z|^2 \quad \text{et} \quad \mu_K + i\mu_J = \bar{w}z$$

2.4 Sous-variété moment et quotient

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la sous-variété de $M = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ définie par

$$N_{a,b,c} = \left\{(w, z) \in M \;\middle|\; |w|^2 - |z|^2 = a \;\text{ et }\; \bar{w}z = b + ic\right\}$$

On notera $N = N_{1,0,0}$. Quitte à changer w en $\omega := |w|^{-1}(w^1, w^2)$, on a :

$$N = \left\{((\omega_0, \omega_1), (z_0, z_1)) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \omega_0 \bar{z_0} + \omega_1 \bar{z_1} = 0\right\}$$

Le changement dans les indices est justifié juste en dessous et le passage d'exposant à indice n'est a priori que pratique.

N est naturellement fibré au dessus de $\mathbb{P}^1$ par l'application $(\omega, z) \mapsto [\omega_0 : \omega_1]$, de plus cette application est $U(1)$-équivariante.

On dispose de plus d'application coordonnées "linéaires" $U(1)$-équivariantes sur N qui munissent le quotient d'une structure de fibré en droite :

$$\text{sur } \{\omega_0 \neq 0\} \;, \qquad \zeta = \frac{\omega_1}{\omega_0} \;, \qquad s = \omega_0 \bar{z_1}$$

et

$$\text{sur } \{\omega_1 \neq 0\} \;, \qquad \zeta' = \frac{\omega_0}{\omega_1} \;, \qquad s' = -\omega_1 \bar{z_0}$$

Dès lors le changement de trivialisation sur $\{\omega_0 \neq 0\} \cap \{\omega_1 \neq 0\}$ est donné par

$$\frac{s'}{s} = \frac{-\omega_1 \bar{z_0}}{\omega_0 \bar{z_1}} = \frac{-\omega_1 \omega_0 \bar{z_0}}{\omega_0^2 \bar{z_1}} = \frac{\omega_1^2 \bar{z_1}}{\omega_0^2 \bar{z_1}} = \left(\frac{1}{\zeta'}\right)^2$$

Ainsi le quotient s'identifie au fibré $\mathcal{O}(-2)$ sur $\mathbb{P}^1$.

reste à montrer que c'est effectivement le quotient

2.5 Preuve de l'identification

La preuve consiste à identifier l'image de $N/U(1)$ et de l'espace total $\mathcal{O}(-2)$ comme sous-schémas localement fermés de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.

2.5.1 Le cas $\mathcal{O}(-2)$

On sait que

$$\mathcal{O}(-1) = \left\{[x : y], (s, t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \;\middle|\; sy - tx = 0\right\}$$

est le fibré tautologique sur $\mathbb{P}^1 = P(\mathbb{C}^2)$.

Pareillement,

$$\mathcal{O}(-2) = \left\{[x : y], (s, t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \;\middle|\; sy^2 - tx^2 = 0\right\} \tag{1}$$

2.5.2 Le cas $N/U(1)$

On considère l'application suivante

$$\left(\begin{array}{cccc} N & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 & \times & \mathbb{C}^2 \\ (\omega, z) & \mapsto & ([\omega_0 : \omega_1] & , & (\omega_0 \bar{z_1}, -\omega_1 \bar{z_0})) \end{array}\right)$$

Alors

– L'application est bien définie ; c'est-à-dire pour $(\omega, z) \in N$, (ω_0, ω_1) n'est pas identiquement nul.
– L'application est $U(1)$-équivariante ; en effet si $g \in U(1)$ alors $[g\omega_0 : g\omega_1] = [\omega_0 : \omega_1]$ et $((g\omega_0)\overline{(gz_1)}, -(g\omega_1)\overline{(gz_0)})) = (g\bar{g}\omega_0\bar{z_1}, -g\bar{g}\omega_1\bar{z_0}) = (\omega_0\bar{z_1}, -\omega_1\bar{z_0})$ ce qui nous donne bien le même point de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$.
– L'application est un quotient de N sous l'action de $U(1)$.
– L'image vérifie bien les propriétés de (1).

définir quotient...

2.6 Relevé de champs de vecteurs

Nous avons les applications suivantes : $\mu : M \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ dont N est une fibre et $\pi : N \to N/G$ on en déduit donc les suites exactes

$$0 \to \underbrace{\ker \mathrm{d}\mu}_{TN} \longrightarrow TM \xrightarrow{\mathrm{d}\mu} \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$$

$$0 \to \ker \mathrm{d}\pi \longrightarrow TN \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \pi^* T\,(N/G) \to 0$$

Or $N \subset M$ peut-être munie de la structure riemannienne induite, ce qui permet d'obtenir une section de $\mathrm{d}\pi$ par l'identification

$$\pi^* T\,(N/G) \cong TN \cap (\ker \mathrm{d}\pi)^{\perp} \cong \ker \mathrm{d}\mu \cap (\ker \mathrm{d}\pi)^{\perp}$$

De plus, $\ker \mathrm{d}\pi$ s'identifie à $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}$ et est engendré par le vecteur X des déplacements infinitésimaux sous l'action de G. Et de même on sait que $(\mathrm{d}\mu_L)(Y) = \omega_L(X, Y)$ pour $L \in \{I, J, K\}$.

En résumé, pour tout $\tilde{Y}$ champ de vecteur sur N/G, il existe un unique champ de vecteur sur M satisfaisant

$$\begin{array}{rcll} g(X,Y) & = & 0 & \text{orthogonalité avec } \ker \mathrm{d}\pi \\ \omega_I(X,Y) & = & 0 & \text{appartenance à } TN \\ \omega_J(X,Y) & = & 0 & \text{appartenance à } TN \\ \omega_K(X,Y) & = & 0 & \text{appartenance à } TN \\ \pi_* Y & = & \tilde{Y} & \text{être un relevé de } \tilde{Y} \text{ dans } TM \end{array}$$

Les quatre premières équations signifient que Y est orthogonal au $\mathbb{H}$-module à gauche engendré par X, si cela a un sens.

$$g(X,Y) = g(IX,Y) = g(JX,Y) = g(KX,Y) = 0$$

Ce qui correspond à $g(qX, Y) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{H}$.

Références

[God69] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique ...*, Collection Méthodes, Hermann, 1969.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F.C. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1994.

[SCH08] Olivier SCHIFFMANN, *Variétés carquois de nakajima*, Astérisque **317** (2008), no. 976, 295–344.