Cadre Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et V^* son dual sur $\mathbb{C}$.

On notera w^i les coordonnées de $w \in V$ associés à la base $(e_i)_{0\leq i\leq n}$ et de même on notera z^i les coordonnées de $z \in V^*$ associés à la base duale $(e_i^*)_{0\leq i\leq n}$.

On considerera éventuellement le coordonnées réelles x, y, u, v définies par les décompositions suivantes $w = x + iy$ et $z = u + iv$.

On dispose d'un accouplement canonique :

$$\begin{pmatrix} M = V \oplus V^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ w = (w^i)_i, z = (z^i)_i & \mapsto & z(w) = \sum_i z^i w^i \end{pmatrix}$$

1 Métriques, structures complexes et formes

1.1 Métrique hermitienne

$$h = \mathrm{d}\bar{w} \otimes \mathrm{d}w + \mathrm{d}\bar{z} \otimes \mathrm{d}z$$

1.2 Structures complexes

$$\begin{aligned} I(w,z) &= (iw, iz) && (1) \\ J(w,z) &= (-\bar{z}, \bar{w}) && (2) \\ K(w,z) &= (i\bar{z}, -i\bar{w}) && (3) \end{aligned}$$

On vérifie que $K = IJ = -JI$, donc ces structures complexes vérifient les relations quaternioniques.

On notera également l'action de J sur les 1-formes :

$$\begin{array}{r|cccc} \eta & \mathrm{d}w & \mathrm{d}\bar{w} & \mathrm{d}z & \mathrm{d}\bar{z} \\ J^*\eta & -\mathrm{d}\bar{z} & -\mathrm{d}z & \mathrm{d}\bar{w} & \mathrm{d}w \end{array}$$

1.3 Métrique Riemannienne et formes symplectiques

1.3.1 Métrique

On décompose h en partie réelle et imaginaire :

$$h = g + i\omega_I$$

où g est la métrique riemannienne, ω_I est la forme de Kähler pour g associée à la structure complexe I. Un calcul simple montre que

$$g = \mathrm{d}|w|^2 + \mathrm{d}|z|^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$$

et

$$\omega_I = -g(\_, I\_) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

qui est effectivement Kähler.

1.3.2 Forme symplectique holomorphe

On vérifie que le tenseur $\overline{h(\_,J\_)} = \overline{h^{\bar{k}l}J_l^m} = h^{\bar{l}k}J_{\bar{l}}^m$ définit une forme *symplectique holomorphe* sur (M,I) que l'on note $\omega_{\mathbb{C}}$.

$$h(\_,J\_) = \mathrm{d}\bar{w}\otimes J^*\,\mathrm{d}w + \mathrm{d}\bar{z}\otimes J^*\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\bar{w}\otimes(-\,\mathrm{d}\bar{z}) + \mathrm{d}\bar{z}\otimes\mathrm{d}\bar{w} = \mathrm{d}\bar{z}\wedge\mathrm{d}\bar{w}$$

Ainsi

$$\omega_{\mathbb{C}} = \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w \tag{4}$$

1.3.3 Formes de Kähler

On definit, de même que pour ω_I, les formes $\omega_J = -g(\_,J\_)$ et $\omega_K = -g(\_,K\_)$.
On remarque :

$$\omega_{\mathbb{C}} = \overline{h(\_,J\_)} = g(\_,J\_) - i\omega_I(\_,J\_) = -\omega_J + ig(\_,IJ\_) = -\omega_J - i\omega_K$$

2 Action, action infinitésimale

2.1 Action du groupe unitaire

On considère $G = U(1)$ qui agit sur M par

$$e^{i\theta}\cdot m = (e^{i\theta}w, e^{-i\theta}z)$$

On a les propriétés suivantes :
- L'action commute avec I et J et donc avec toutes les structures complexes $aI+bJ+cK$ (avec $(a,b,c)\in\mathbb{S}^3$)
- G agit par isométrie sur M : Il conserve la métrique hermitienne et a fortiori la métrique riemannienne.
- G préserve les formes symplectiques $\omega_{\mathbb{C}},\omega_I,\omega_J,\omega_K$.

2.2 Action de l'algèbre de Lie

On considère l'action infinitésimal de G sur un point $m=(w,z)\in M$.

$$e^{i\theta}\cdot m = (e^{i\theta}w, e^{-i\theta}z) = (w,z) + (i\theta w, -i\theta z) + o(\theta)$$

L'action infinitésimale en m est donc portée par le vecteur

$$X = (iw,-iz) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$$

L'espace vectoriel réel engendré par X dans T_mM s'identifie à $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie de G.
On peut également exprimer X à l'aide des champs de vecteurs holomorphes et anti-holomorphes :

$$X = i\left(w\frac{\partial}{\partial w} - \bar{w}\frac{\partial}{\partial\bar{w}} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

3 Forme moment, variété moment

3.1 Application moment complexe

L'application moment complexe $\mu_{\mathbb{C}} : M \to \mathbb{C}$ vérifie l'équation :

$$\mathrm{d}\mu_{\mathbb{C}} = \omega_{\mathbb{C}}(X, \_) = (\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w)(X, \_) = -i(w\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}w) = -i\,\mathrm{d}(wz)$$

Ainsi, quitte à choisir l'origine, on peut prendre $\mu_{\mathbb{C}} = -iwz$.

3.2 Application moment réelle

L'application moment complexe $\mu_{\mathbb{R}} : M \to \mathbb{R}$ vérifie l'équation :

$$\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \omega_I(X, \_) = (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v)(X, \_) = -y\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(w\bar{w} - z\bar{z})$$

Ainsi $\mu_{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}(w\bar{w} - z\bar{z})$.

3.3 Variété moment

Posons

$$N = \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(-2) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) = \{(w, z) \in M \mid w\bar{w} = 1 + z\bar{z}\ ,\ wz = 0\} \subseteq M$$

C'est une sous-variété de M de codimension (réelle) 3.

Par construction, ou simplement en vérifiant sur les équations, N est stable sous l'action de G.

On peut remarque de plus que N est naturellement fibrée au dessus de la sphère $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ (et donc, respectivement, au dessus de $\mathbb{P}^n$) par l'application à vérifier

$$w \mapsto \frac{w}{\sqrt{w\bar{w}}}\ ,\quad \text{respectivement}\ ,\quad w \mapsto [w^0 : \cdots : w^n]$$

4 Application quotient

4.1 Cas $n = 1$

On peut écrire l'application quotient globalement,

$$\left(\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \\ w, z & \mapsto & [w^0 : w^1], (w^0 z^1, -w^1 z^0) \end{array}\right)$$

L'image est le sous-fibré de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^1$ d'équation $(x_0)^2 y_1 + (x_1)^2 y_0 = 0$, où les x_i sont les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1$ et les y_i les coordonnées sur $\mathbb{C}^2$; qui s'identifie à $\mathcal{O}(-2)$.

4.2 Cas n quelconque

Localement, sur l'ouvert $w_0 \neq 0$, on peut écrire l'application quotient ainsi :

$$\left(\begin{array}{ccccc} N & \longrightarrow & \mathbb{C}^n & \times & \mathbb{C}^n \\ w, z & \mapsto & \left(\frac{w^1}{w^0}, \frac{w^2}{w^0}, \frac{w^3}{w^0}, \cdots, \frac{w^n}{w^0}\right) & , & (w^0 z^1, w^0 z^2, \cdots, w^0 z^n) \end{array}\right)$$

5 Équation du tangent aux fibres

On a la situation suivante

$$0 \to \mathfrak{g} \to TN \to \pi^*T(N/G) \to 0$$

Or par construction :

$$TN = \ker \mathrm{d}\mu = (I\mathfrak{g} \oplus J\mathfrak{g} \oplus K\mathfrak{g})^\perp \subseteq TM$$

Ainsi $\pi^*T(N/G)$ s'identifie à $(\mathbb{H}\mathfrak{g})^\perp$ dans TM.

On peut associer à chaque vecteur $Y \in T_{\pi(m)}N/G$, un unique vecteur $\hat{Y} \in T_mM$ satisfaisant

$$\begin{aligned} g(X, \hat{Y}) &= 0 \\ g(IX, \hat{Y}) &= 0 \\ g(JX, \hat{Y}) &= 0 \\ g(KX, \hat{Y}) &= 0 \end{aligned}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned} h(X, \hat{Y}) &= 0 \\ h(JX, \hat{Y}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -ih(X, \_) &= w\,\mathrm{d}\bar{w} - \bar{w}\,\mathrm{d}w + \bar{z}\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}\bar{z} \\ -ih(JX, \_) &= z\,\mathrm{d}w + w\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Relever un champ de vecteur holomorphe Y revient à résoudre le système

$$M\hat{Y} = \begin{bmatrix} -ih(X, \_) \\ -ih(JX, \_) \\ \\ \mathrm{Jac}(\pi) \\ \\ \end{bmatrix} \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ Y \\ \\ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow\ 2 \\ \\ \updownarrow\ n+1 \end{array}$$

où Jac désigne le jacobien holomorphe de π.

5.1 Cas $n = 1$

On la matrice suivante

$$M = \begin{bmatrix} -\bar{w}^0 & -\bar{w}^1 & \bar{z}^0 & \bar{z}^1 \\ z^0 & z^1 & w^0 & w^1 \\ -\frac{w^1}{(w^0)^2} & \frac{1}{w^0} & 0 & 0 \\ z^1 & 0 & 0 & w^0 \end{bmatrix}$$

Pour travailler avec des polynômes, on pose $D = \mathrm{diag}(1, 1, (w^0)^{-2}, 1)$ et $M = DM'$. On a alors

$$M' = \begin{bmatrix} -\bar{w}^0 & -\bar{w}^1 & \bar{z}^0 & \bar{z}^1 \\ z^0 & z^1 & w^0 & w^1 \\ -w^1 & w^0 & 0 & 0 \\ z^1 & 0 & 0 & w^0 \end{bmatrix}$$

On veut déterminer $H = (M^{-1})^* M^{-1} = (MM^*)^{-1} = (DM'(M')^*D^*)^{-1} = (D^{-1})^*(M'(M')^*)^{-1}(D^{-1})$. Posons dès lors $T = M'(M')^*$, un calcul rapide nous donne

$$T = \begin{bmatrix} |m|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |m|^2 & \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & a & w\bar{w} & \bar{c} \\ 0 & b & c & d \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{array}{rcl} |m|^2 & = & w\bar{w} + z\bar{z} \\ a & = & w^0\bar{z^1} - w^1\bar{z^0} \\ b & = & \bar{z^0}z^1 + w^0\bar{w^1} \\ c & = & -\bar{w^1}z^1 \\ d & = & w^0\bar{w^0} + z^1\bar{z^1} \end{array}$$

Le calcul de T^{-1} est alors en partie faisable et donne

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|m|^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & \star & \star \\ 0 & * & \star & \star \end{bmatrix}$$

où la partie en bas à droite ($\star$) est occupée par la matrice T_0 que l'on cherche :

$$T_0 = \frac{|m|^2}{\det(T)} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} |m|^2 & \bar{b} \\ b & d \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} |m|^2 & \bar{b} \\ a & \bar{c} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} |m|^2 & \bar{a} \\ b & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} |m|^2 & \bar{a} \\ a & w\bar{w} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Un calcul informatique nous donne

$$\frac{|m|^2}{\det(T)} = \frac{1}{|m|^2(w^0\bar{w^0})^2}$$

5.2 Cas n quelconque

Dans le cas général, la matrice du système s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccc||c|ccc} -\bar{w^0} & -\bar{w^1} & \cdots & -\bar{w^n} & \bar{z^0} & \bar{z^1} & \cdots & \bar{z^n} \\ z^0 & z^1 & \cdots & z^n & w^0 & w^1 & \cdots & w^n \\ \hline -\frac{w^1}{(w^0)^2} & \frac{1}{w^0} & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & 0 & \\ -\frac{w^n}{(w^0)^2} & 0 & & \frac{1}{w^0} & & & & \\ \hline z^1 & & & & 0 & w^0 & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ z^n & & & & 0 & & & w^0 \end{array}\right)$$

Ce qui donne après homogénéisation

$$\left(\begin{array}{c|ccc||c|ccc}
-\bar{w^0} & & -{}^t\bar{w'} & & \bar{z^0} & & {}^t\bar{z'} & \\
z^0 & & -{}^tz' & & w^0 & & {}^tw' & \\
\hline
 & w^0 & & 0 & & & & \\
-w' & & \ddots & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & w^0 & & & & \\
\hline
 & & & & & w^0 & & 0 \\
z' & & 0 & & 0 & & \ddots & \\
 & & & & & 0 & & w^0
\end{array}\right)$$

où ${}^tw'$, resp. ${}^tz'$, désigne $(w^1, \cdots w^n)$, resp. $(z^1, \cdots, z^n)$.

6 Métrique quotient

La métrique quotient est entièrement déterminée par la matrice hermitienne (2×2) H_0 telle que

$$H = (M^{-1})^* M^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & H_0 \end{bmatrix}$$

Dès lors H_0 est simplement donnée par

$$H_0 = \begin{bmatrix} (\bar{w^0})^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T_0 \begin{bmatrix} (w^0)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{|m|^2 d - b\bar{b}}{|m|^2} & -\dfrac{|m|^2 \bar{c} - a\bar{b}}{|m|^2 (w^0)^2} \\ -\dfrac{|m|^2 c - \bar{a} b}{|m|^2 (\bar{w^0})^2} & \dfrac{|m|^2 w\bar{w} - a\bar{a}}{|m|^2 (w^0 \bar{w^0})^2} \end{bmatrix}$$

Les équations liant les coordonnées (w, z) sur M aux coordonnées ζ, ξ sur N/G sont les suivantes :

$$\begin{aligned} w^0 \bar{w^0} + w^1 \bar{w^1} &= 1 + z^0 \bar{z^0} + z^1 \bar{z^1} && (5) \\ w^0 z^0 + w^1 z^1 &= 0 && (6) \\ \frac{w^1}{w^0} &= \zeta && (7) \\ w^0 z^1 &= \xi && (8) \end{aligned}$$

Dès lors on peut établir les relations suivantes

$$\begin{aligned} |m|^2 &= (1 + \zeta\bar{\zeta}) \left(w^0 \bar{w^0} + \frac{\xi\bar{\xi}}{w^0 \bar{w^0}} \right) \\ a &= (w^0)^2 \left(\frac{\bar{\xi}(1 + \zeta\bar{\zeta})}{w^0 \bar{w^0}} \right) \\ b &= \frac{\bar{\xi}}{w^0 \bar{w^0}} \left((w^0 \bar{w^0})^2 - \bar{\zeta}\xi \right) \\ c &= -\frac{\bar{w^0}^2}{w^0 \bar{w^0}} \bar{\zeta}\xi \\ d &= w^0 \bar{w^0} + \frac{\xi\bar{\xi}}{w^0 \bar{w^0}} \end{aligned}$$

De plus à partir de l'équation (5), on déduit une l'équation quadratique satisfaite par $X = w^0\bar{w^0}$:

$$X^2 - \frac{1}{1+\zeta\bar{\zeta}}X - \xi\bar{\xi} = 0$$

De plus $X = w^0\bar{w^0}$ est l'unique solution positive de cette équation, c'est-à-dire :

$$w^0\bar{w^0} = \frac{1+\sqrt{1+4\xi\bar{\xi}(1+\zeta\bar{\zeta})^2}}{2(1+\zeta\bar{\zeta})}$$

On remarque cependant que le terme les plus présent est $d = X - \xi\bar{\xi}X^{-1}$, ce qui peut s'écrire :

$$d = X - \frac{\xi\bar{\xi}}{X} = 2X - \frac{1}{1+\zeta\bar{\zeta}} = \frac{\sqrt{1+4\xi\bar{\xi}(1+\zeta\bar{\zeta})^2}}{(1+\zeta\bar{\zeta})}$$

En suivant la notation de Calabi [?], on pose $t = \xi\bar{\xi}(1+\zeta\bar{\zeta})^2$ qui correspond à la norme hermitienne du vecteur cotangent ξ au point ζ induite sur le fibré cotangent par la structure Kahlérienne (Fubini-Study) sur $\mathbb{P}^1$.

On peut reprendre

$$\begin{aligned}
|m|^2 &= \sqrt{1+4t} \\
a &= \frac{2(w^0)^2\bar{\xi}}{1+\sqrt{1+4t}} \\
b &= \bar{\xi}\left(X - \frac{\bar{\zeta}\xi}{X}\right) \\
c &= -\left(\bar{w^0}\right)^2 \frac{2\bar{\zeta}\xi(1+\zeta\bar{\zeta})}{1+\sqrt{1+4t}} \\
d &= \frac{\sqrt{1+4t}}{(1+\zeta\bar{\zeta})} \\
a\bar{a} &= t \\
b\bar{b} &= \frac{\zeta\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{|m|^2 w\bar{w} - a\bar{a}}{|m|^2(w^0\bar{w^0})^2} = \frac{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}{\sqrt{1+4t}}$$

$$\frac{|m|^2 d - b\bar{b}}{|m|^2} = \frac{\sqrt{1+4t}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2} + \frac{4\xi\bar{\xi}\zeta\bar{\zeta}}{\sqrt{1+4t}}$$