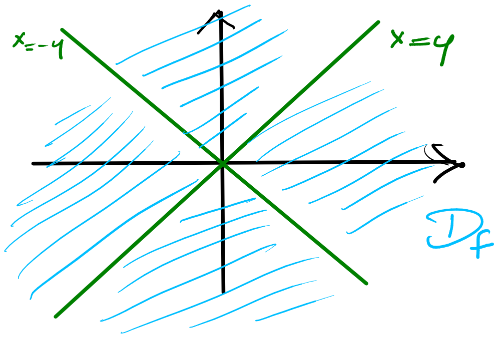
VAR FEUILLE 2.

Ex 1 $f(x,y)$ est une fraction rationnelle en 2 variables

elle est donc définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus Z$

où Z est l'ensemble d'annulation de son dénominateur

$$Z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\pm y\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-y\}$$



Remarque : D_f ouvert.

$$f : \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

et $z\in Im(f)$ ssi $\exists (x,y)\in D_f \,/\, z = \dfrac{x}{x^2-y^2}$

ssi $\exists (x,y)\in D_f$ $zx^2 - x - zy^2 = 0$

1er cas : $z=0$ alors $(x,y)=(0,\pi/4)$ convient

2e cas : $z\neq 0$

* cherchons avec $y=0$ $(x\neq 0)$ car $(x,y)\in D_f = \mathbb{R}^2\setminus Z$

$zx^2 - x = 0$ donc $(zx-1)x=0$

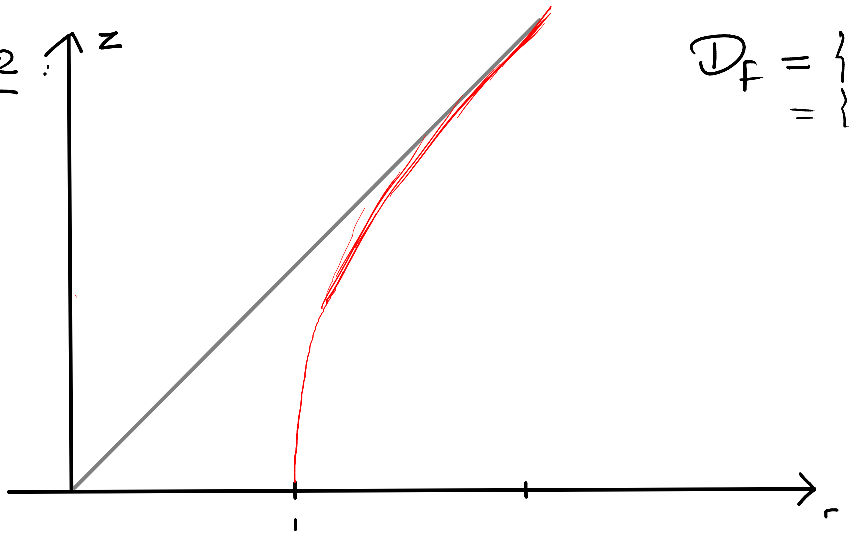
donc $x = 1/z$ $(1/z, 0)\in D_f$

on vérifie $f(1/z, 0) = \dfrac{1/z}{(1/z)^2 - 0} = \dfrac{1/z}{(1/z)^2} = \dfrac{z^2}{z} = z$ ok.

donc $z\in Im(f)$

FINALEMENT $Im(f) = \mathbb{R}$.

Ex 2 :



$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 \in \text{Domaine}(\sqrt{\ })\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1\}$$

On passe en polaire :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad x^2+y^2=r^2$$

$r>0$, $\theta\in\,]-\pi,\pi]$

$f(x,y) = \sqrt{r^2-1}$

$D_{f\,pol} = \{(r,\theta) \mid r\geq 1\}$

Ex 3 On remarque $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$

On pose $\begin{cases} X = (x-2) \\ Y = (y-3) \end{cases}$ $f(x,y) = X^2 + Y^2$

donc Γ_f = paraboloïde de révolution d'axe Oz centré au point $(2,3,0)$

"RAPPEL" Courbe de niveau

Def. : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ on appelle courbe de niveau $c \in \mathbb{R}$ de f l'ensemble $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c \}$

Ex 4 1) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ Image ?

Tracer $f = 0$, $f = 1/2$, $f = -1/2$, $f = 1$, $f = 1/4$

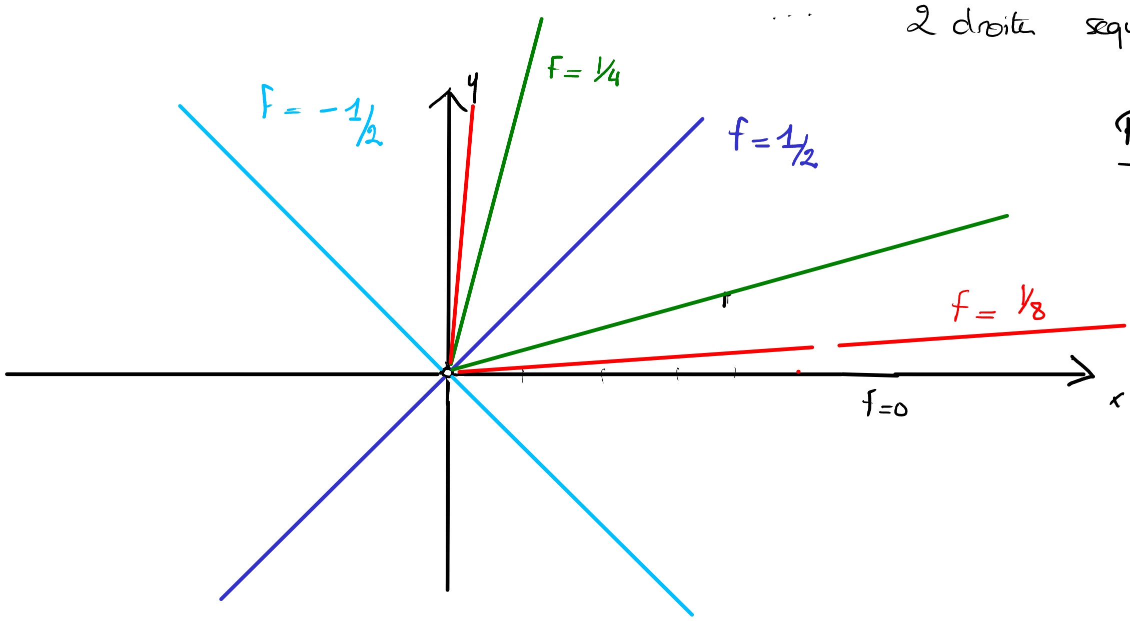
$f = 0$ ssi $((x=0) \text{ ou } (y=0))$

$f = 1/2$ ssi $x^2+y^2-2xy = 0$ ssi $(x-y)^2 = 0$ ssi $(x = y)$

$f = -1/2$ ssi $x^2+y^2+2xy = 0$ ssi $(x+y)^2 = 0$ ssi $(x = -y)$

$f = t$ ssi $x^2+y^2-(1/t)xy = 0$ ssi $(x - \frac{1}{2t}y)^2 - (\frac{1}{4t^2} - 1)y^2 = 0$

... 2 droites sequantes



Rq $(|x|-|y|)^2 \geq 0$

$x^2+y^2 \geq 2|xy|$

donc

$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

$|f(x,y)| \leq 1/2$

$|t| < 1/2$

$f = t \iff \dots \iff (x - \tau y)^2 - (\tau^2 - 1)y^2 = 0$

$\left(\tau = \frac{1}{2t}\right)$

$|\tau| > 1$

$\iff (x - (\tau + \sqrt{\tau^2-1})y)(x - (\tau - \sqrt{\tau^2-1})y) = 0$

Rq : produit des racines = 1

$\Rightarrow (x = 5y)$, $(y = 5x)$

droites $x = (\tau \pm \sqrt{\tau^2-1})y$

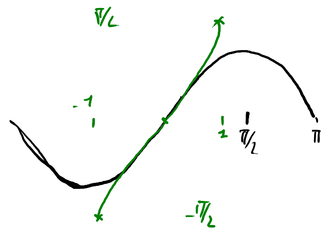
$\tau = 2$ $(t = 1/4)$ $x = (2 \pm \sqrt{3})y$

En polaire : $f(x,y) = \cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in]-\pi, \pi]$

donc $f(x,y) = c$

ssi $\sin(2\theta) = 2c$ $2c \in [-1,1]$

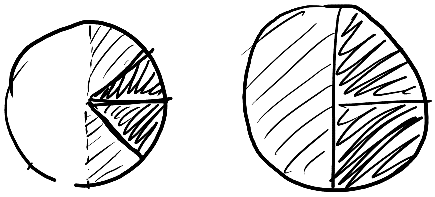
ssi $\text{Arcsin}(\sin 2\theta) = \text{Arcsin}(2c)$



si $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \longrightarrow \theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2c), \\ \pi + \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2c) \end{cases}$

si $\theta \in]-\pi/2, -\pi/4] \cup [\pi/4, \pi/2] \longrightarrow$

$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - \text{Arcsin}(2c)) & \theta > 0 \\ 1/2(-\pi + \text{Arcsin}(2c)) & \theta < 0 \end{cases}$



θ 2θ

$\sin(2\theta) = \sin(2(\theta+\pi))$

donc on peut regarder seulement $\theta \in [0,\pi]$

($(r,\theta) \in$ ligne de niv (c) $\Leftrightarrow$ $(r, \theta+\pi) \in$ ling de niveau de (c))

2. $f(x,y) = r^2(\cos^2 - \sin^2)$
$= r^2\cos(2\theta)$

$f(x,y) = c$ ssi $r^2\cos(2\theta) = c$ (en particulier $|c| \leq r^2$)

ssi $\cos(2\theta) = \frac{c}{r^2}$

$r^2 = \frac{c}{\cos(2\theta)}$

$\cos(2\theta) = \cos(2(\theta+\pi)) \longrightarrow \theta \in [0,\pi[$

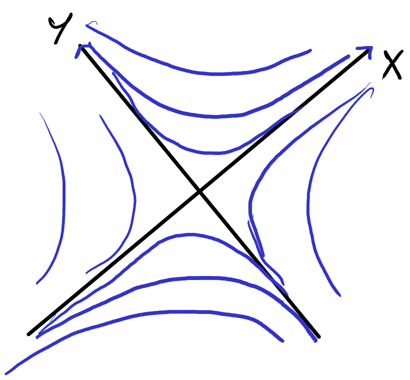
$\text{Arccos}(\cos 2\theta) = \text{Arccos}\left(\frac{c}{r^2}\right)$ donc $\begin{cases} 2\theta = \text{Arccos}(c/r^2) & \text{si } \theta \in [0,\pi/2] \\ 2\theta = \text{Arccos}(c/r^2) + \pi & \text{si } \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$

... BOF

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$x^2 - y^2 = c$ ssi $(x-y)(x+y) = c$ $\begin{cases} X = x+y \\ Y = x-y \end{cases}$

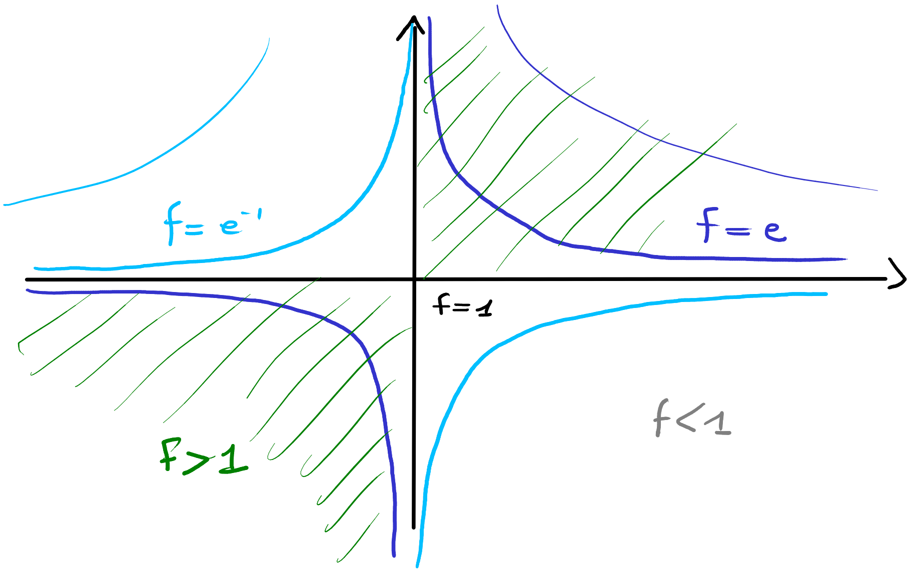
ssi $XY = c$



$\text{axe}(OX) = \{Y=0\}$ = droit $x+y=0$
$\text{axe}(OY) = \{X=0\}$ = droit $y=x$

$f(x,y) = \exp(xy)$ $\qquad f > 0$!

$F = c$ ssi $\exp(xy) = c$ ssi $xy = \ln(c)$



Ex 5 $\quad$ 1) $\displaystyle \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0$

donc $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

Remarque $f(x,y) = f(y,x)$

donc $\displaystyle \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{X\to 0}\lim_{Y\to 0} f(Y,X)$ en posant $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$

$\displaystyle = \lim_{X\to 0}\lim_{Y\to 0} f(X,Y) = 0$

2) Non ! Si $x = y$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4} = 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

donc f n'est pas continue sur la droite $y = x$

donc f n'est pas continue.

Ex6 : 1. $|f(x,y)| = |(x+y)^2| \cdot \left|\cos\frac{1}{x}\right| \cdot \left|\cos\frac{1}{y}\right|$

$\leq |x+y|^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

donc F admet une limite en $(0,0)$

$\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

2. Soit $y_0 \neq 0$ $\quad (x+y_0)^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y_0}\right)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$

ex : $y_0 = \frac{1}{2\pi}$ $\quad f(x,y_0) = \left(x+\frac{1}{2\pi}\right)^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{\pi}\cos\frac{1}{x} + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

C'est equivalent quand $x \to 0$ à $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ qui n'a pas de limite.

Ex 7

$$|f(x,y)| = |xy| \cdot \frac{|x^2-y^2|}{|x^2+y^2|}$$

Or $\left(|x|-|y|\right)^2 \geq 0$ $\quad |x|^2 - 2|xy| + |y|^2 \geq 0$, $\quad 2|xy| \leq |x|^2 + |y|^2$ $\Big\}$ $|f| \leq \frac{1}{2}|x^2-y^2| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ $\Leftarrow$ f est C^0 en 0.

et f continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme fract° rationelle.

Ex 8

f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

il faut la c° ité en $(0,0)$ donc on doit prendre $\alpha = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad f(x,y) = \frac{1-\cos r}{r^2}$ $\quad \frac{0}{0}$ forme indéterminée

$+\frac{\sin(r)}{2r} \longrightarrow \frac{0}{0}$

$\frac{\cos(r)}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$

Ex 9

1. • $y = \alpha x$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$f(x,\alpha x) = \frac{x^4}{\alpha x(\alpha x - x^2)}$ si $\alpha x - x^2 \neq 0$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \alpha \end{cases}$

$\frac{x^2}{\alpha(\alpha - x)} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0\\ x\neq\alpha}]{} 0$ continue

• $x = 0$ (autre droit ($\alpha = \infty$)) $\quad f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ contin

2. Si $y = x^3$

$f(x,x^3) = \frac{x^4}{x^3(x^3-x^2)} = \frac{1}{x(x-1)}$ si $\begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$

$\xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$

Ex 10 BOF

Ex 11 NON

Ex 12 BOF

Ex 13

* f de classe C^1 en x $\Rightarrow$ g continue en (x,x)
* f de classe C^1 en x $\Leftarrow$ g continue en (x,x)