

TEST 1 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Durée : 30 min.

Question de cours

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On considère une application $f : E \rightarrow F$ et $a \in E$.

1. Donner la définition de « f continue au point a ».
2. Donner la définition de « f différentiable au point a ».

Exercice 1. On définit l'application n sur \mathbb{R}^2 par

$$n(x, y) = \max(|x - 2y|, |x + y|).$$

1. Montrer que n est une norme sur \mathbb{R}^2 .
2. Dessiner sa boule unité fermée.

Exercice 2. On considère les fonctions suivantes :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy^4}{x^4 + y^6} \quad ; \quad g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}.$$

1. Justifier la continuité de ces fonctions sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Peuvent-elles être prolongées par continuité en $(0, 0)$?