Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

Test 1 : Fonctions de plusieurs variables

Corrigé

Questions de cours Revoir votre cours...

Exercice 1

1. On remarque tout d'abord que n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour que n soit une norme, elle doit satisfaire trois conditions :
   (a) Montrons que $n(x,y)=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$.
   Si $(x,y)=(0,0)$, on a bien $n(0,0)=\max(0,0)=0$.
   Supposons $n(x,y)=0$, alors $|x-2y|=0$ et $|x+y|=0$, soit $x=2y$ et $x=-y$. Ceci n'est possible que si $x=0$ et $y=0$.

   (b) Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on a
   $$n(\lambda x,\lambda y)=\max\left(|\lambda x-2\lambda y|,|\lambda x+\lambda y|\right)=\max\left(|\lambda||x-2y|,|\lambda||x+y|\right)=|\lambda|n(x,y).$$

   (c) Vérifions que n satisfait l'inégalité triangulaire. Soit $Z=(x,y)$ et $W=(u,v)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On a
   $$\begin{aligned} n(Z+W)&=n(x+u,y+v)=\max\left(|x+u-2(y+v)|,|x+u+y+v|\right)\\ &=\max\left(|(x-2y)+(u-2v)|,|(x+u)+(u+v)|\right). \end{aligned}$$
   D'après l'inégalité triangulaire satisfaite par la valeur absolue, on a
   $$\begin{aligned} |(x-2y)+(u-2v)|&\leqslant|x-2y|+|u-2v|\\ &\leqslant n(x,y)+n(u,v). \end{aligned}$$
   De même,
   $$|x+u+y+v|\leqslant n(x,y)+n(u,v).$$
   Par conséquent, le maximum vérifie
   $$n(Z+W)=\max\left(|(x-2y)+(u-2v)|,|(x+u)+(u+v)|\right)\leqslant n(x,y)+n(u,v).$$

2. La boule unité fermée est l'ensemble suivant
   $$\begin{aligned} B(0,1)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: n(x,y)\leqslant 1\right\}\\ &=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x-2y|\leqslant 1 \text{ et } |x+y|\leqslant 1\right\}\\ &=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x-1)/2\leqslant y\leqslant (x+1)/2 \text{ et } -1-x\leqslant y\leqslant 1-x\right\} \end{aligned}$$
   Par conséquent, la boule unité est la portion du plan délimité par les quatre droites d'équation respective : $y=(x-1)/2$, $y=(x+1)/2$, $y=-1-x$ et $y=-1+x$.

Exercice 1

1. Les fonctions f et g sont des rapports de fonctions polynômiales en x et y, elles sont donc continues là où le dénominateur ne s'annule pas. On remarque que $x^4 + y^6$ et $|x| + |y|$ s'annulent seulement en $(0,0)$. Par conséquent, les fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Le point $(0,0)$ est un point critique pour les deux fonctions f et g. On remarque que, pour $y \neq 0$

$$f(ay^2, y) = \frac{ay^6}{y^8 + y^6} = \frac{a}{y^2 + 1}.$$

Par conséquent, $\lim_{y \to 0} f(ay^2, y) = a$. La valeur de la limite dépendant du chemin qui va vers $(0,0)$, la fonction f n'est pas prolongeable pas continuité en $(0,0)$.
En ce qui concerne la fonction g, on remarque

$$g(x,y) = |x|\frac{|x|}{|x| + |y|} + |y|\frac{|y|}{|x| + |y|}.$$

Comme $|x|/(|x| + |y|) \leqslant 1$ et $|y|/(|x| + |y|) \leqslant 1$, on a

$$0 \leqslant g(x,y) \leqslant |x| + |y| \leqslant ||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Par conséquent, $\lim_{||(x,y)|| \to 0} g(x,y) = 0$ et g est prolongeable par continuité en $(0,0)$ par la valeur 0.