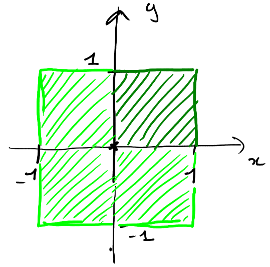
FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 1

1.



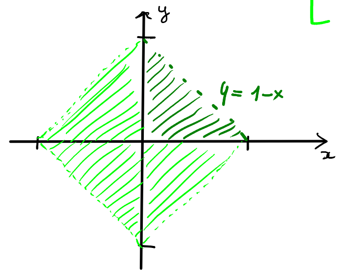
Supposons $x \geq 0$, $y \geq 0$

on doit donc tracer

$0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1$

L'ensemble $\{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) \leq 1\}$
est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$ symétrie d'axe Oy
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$ symétrie d'axe Ox
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$ symétrie de centre O

2.

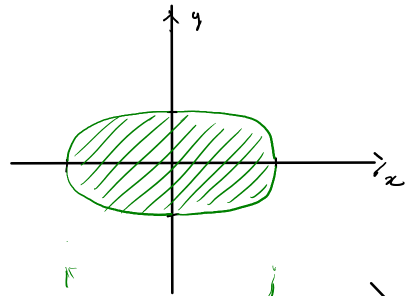


Supposons $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ $|x|+|y|<1$
$\iff x+y<1$
$\iff y<1-x$

→ d'où l'ensemble strictement sous la droite $y = 1-x$ et contenu dans le quart de plan $x,y \geq 0$

L'ensemble est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$ [...]
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$

3.



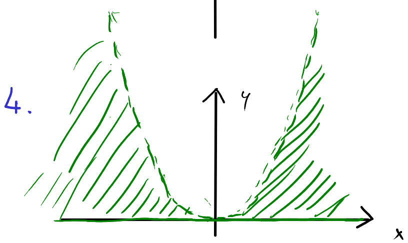
$x^2+4y^2<1 \iff x^2+(2y)^2<1$

Intérieur de l'ellipse $x^2+(2y)^2=1$

En raisonnant par quadrant
Si $x \geq 0$, $y \geq 0$ $4y^2 < 1-x^2$
$y^2 < \frac{1}{4}(1-x^2)$
on utilise que $y \geq 0$
$0 \leq y < \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

donc partie du plan strictement sous la courbe
$y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ $1 \geq x \geq 0$, $y \geq 0$

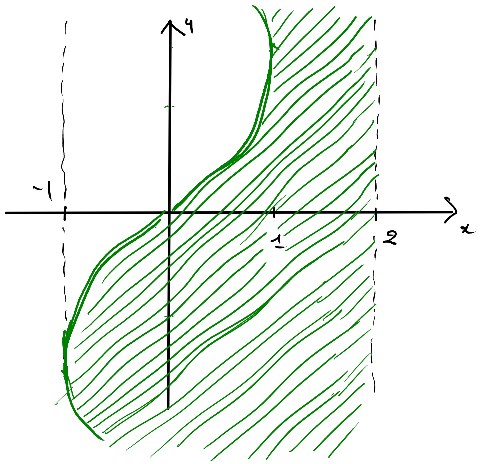
4.



On trace $y = x^2$ et $y = 0$
→ Partie du plan entre les 2 courbes

FEUILLE 1
VAR 2015

5.

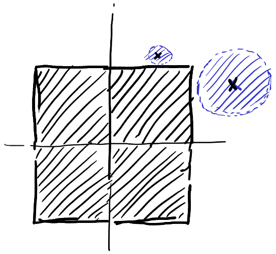


On a $\sin(y) \leq x < 2$
or $\sin(y) \geq -1$
donc $x \in [-1, 2[$

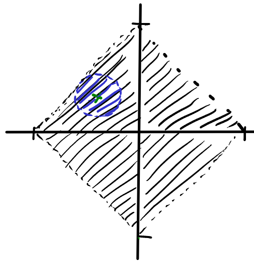
On trace $x = \sin(y)$
Partie du plan à droite de la courbe
$x \geq \sin(y)$

Ouvert / Fermé / Autre ?

1. Fermé ⟶
2. Ouvert
3. Ouvert
4. Ni l'un, ni l'autre
5. Ni l'un, ni l'autre



$x \in \mathbb{R}^2 \setminus X$
$B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus X$ où $r = \min(1-|x|, 1-|y|)$, $r > 0$



$x \in X$
$B(x,r) \subseteq X$ où $r = (\dots)$

Ex 15

$x, y \in E \setminus \{\vec{0}\}$

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \underset{IT}{\leq} \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\|}_{\text{homogénéité}} + \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x - y\| + \underbrace{\left\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}\right) y \right\|}_{\text{homogénéité}}$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x - y\| + \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \cdot \|y\|$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x - y\| + \frac{1}{\|x\|} \underbrace{\big| \|y\| - \|x\| \big|}_{\underset{IT2}{\leq} \|y - x\| = \|x - y\|}$$

$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\|$
$\leq \|x-z\| + \|z-y\|$
$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

BILAN $\dots \leq \dfrac{2}{\|x\|} \|x - y\|$

Ex 16

$\tilde{d}(x,y) = \mathrm{Inf}(1, d(x,y))$

* $\tilde{d}$ est symétrique : $\tilde{d}(y,x) = \mathrm{Inf}(1, d(y,x)) \overset{\text{d distance donc symétrique}}{=} \mathrm{Inf}(1, d(x,y)) = \tilde{d}(x,y)$

* $\tilde{d}(x,y) = \mathrm{Inf}(1, d(x,y)) \geq 0$ car d est positive

* $\tilde{d}$ satisfait l'ineg. triangulaire.

on effet soit $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

$\tilde{d}(x,z) = \inf(1, d(x,z))$ or $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ car d est une distance.

$$\leq \inf(1, d(x,y) + d(y,z))$$
$$\leq \inf(1, d(x,y)) + \inf(1, d(y,z))$$
$$\leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$$

* Enfin si $\tilde{d}(x,y) = 0$
alors $\inf(1, d(x,y)) = 0$ donc
$d(x,y) = 0$
or d distance donc $x = y$

Lemme [$\inf(a, b+c) \leq \inf(a,b) + \inf(a,c)$
si a, b, c sont ≥ 0

Il suffit de montrer que

* $\inf(a,b+c) - \inf(a,b) \leq a$ (évident)
* $\inf(a,b+c) - \inf(a,b) \leq c$

$\inf(a, b+c) = \inf(a-c, b) + c$

$\inf(a-c,b) - \inf(a,b) \leq 0$

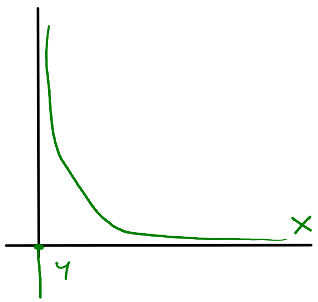
FEUILLE 1
VAR 2015

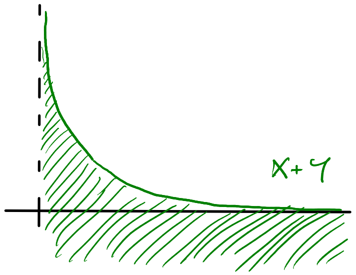
Ex 9 :

1) : $X+Y := \{x+y \mid x\in X, y\in Y\}$
$= \bigcup_{y\in Y} (X+\{y\})$

Lemme : $[X+\{y\}$ ouvert ssi X ouvert. + Exo 6

4) $X = \{(x, 1/x) \mid x>0\}$ $\quad Y = \{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}^-\}$





Ex 2

1. $X =]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$

Montrons que $\forall x\in X \ \exists r>0 \ / \ B_{\mathbb{R}}(x,r) \subseteq X$ (déf X ouvert)

Soit $x\in X$, Montrons que $\exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq X$

Or ds $\mathbb{R}$ $B(x,r) = \{y\in\mathbb{R} \mid |y-x|<r\} =]x-r, x+r[$

donc Montrons que $\exists r>0 \ / \ ]x-r,x+r[\subseteq]-1,1[= X$

Or l'inclusion est vraie ssi $-1 < x-r$ et $x+r<1$

Montrons donc que $\exists r>0 \ / \ \begin{cases} -1 < x-r \\ x+r < 1 \end{cases}$

Un tel r doit donc vérifier $\begin{cases} r>0 \\ r < x+1 \\ r < 1-x \end{cases}$

Prenons $r = \min\{x+1, 1-x\}$, comme $x\in]-1,1[$
$x+1>0$ et $1-x>0$
donc $r>0$

Ainsi $\exists r>0 \ / \ ]x-r,x+r[\subseteq X$

Et ce quelque soit $x\in X$

donc $\forall x\in X \ \exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq X$ c'est-à-dire X ouvert !

Ex 2. 2. Soit $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1 \text{ et } |y|<2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Montrons que X est ouvert dans $\mathbb{R}^2$

Montrons que $\forall p\in X,\ \exists r>0 \ / \ B(p,r)\subseteq X$ où $B(p,r)$ boule de centre p et rayon r de $\mathbb{R}^2$

Soit $p\in X$, Montrons $\exists r>0 \ / \ B(p,r)\subseteq X$ on notera $p=(x_p,y_p)$

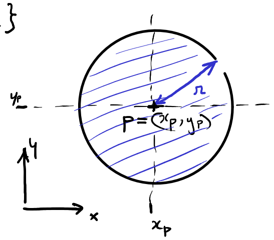
On sait que $|x_p|<1$ et $|y_p|<2$.

De plus :

$$B(p,r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r\}$$

On veut donc $r>0$ tel que

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r\} \subseteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|<2\}$$



ANALYSE

On veut donc $r>0$ tel que

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $\begin{cases}|x|<1\\ |y|<2\end{cases}$ $\quad *$

Remarque : $(x-x_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$ car $(y-y_p)^2\geq 0$

donc $|x-x_p|<r$ donc $|x|-|x_p| \overset{IT}{\leq} |x-x_p| < r$ donc $|x| < r+|x_p|$

de même : $(y-y_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$

donc $|y-y_p|<r$ donc $|y|-|y_p| \underset{IT}{\leq} |y-y_p|<r$ donc $|y|<r+|y_p|$

Si on veut que r satisfasse $*$, il suffit d'imposer $\begin{cases} r+|x_p|\leq 1\\ r+|y_p|\leq 2\end{cases}$

$\boxed{\text{Prenons donc } r = \min(1-|x_p|,\ 2-|y_p|)}$

On vérifie que $r>0$ en effet $|x_p|<1$ donc $1-|x_p|>0$; $|y_p|<2$ donc $2-|y_p|>0$ } le min de deux valeurs >0 est >0.

Reste à montrer qu'avec ce r on a bien $B(p,r)\subseteq X$.

Montrons donc que $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $\begin{array}{l}|x|<1\\ |y|<2\end{array}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, supposons $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$,

Montrons que $|x|<1$ et $|y|<2$

Ex 6 (suite) Montrons que $\forall x\in A\ \exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq A$

Soit $x\in A$ Mq $\exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq A$

or $x\in A$ entraine $\exists i\in I \ / \ x\in A_i$ considérons un tel $i\in I$

Alors $x\in A_i$ et de plus A_i ouvert

donc $\exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq A_i$ considérons un tel $r>0$

Alors $B(x,r)\subseteq A_i\subseteq A$ (car $A_i\subseteq \bigcup_{j\in I} A_j$)

donc on a trouvé $r>0$ tq $B(x,r)\subseteq A$

donc $\exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq A$ et ce pour tout $x\in A$

donc $\forall x\in A,\ \exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq A$

donc A ouvert.

Soient $A_i =]-1/i, 1/i[$ pour $i\in I := \mathbb{N}^*$

Alors $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in\mathbb{R} \mid \forall i\in\mathbb{N}^*\ x\in A_i\}$

$= \{x\in\mathbb{R} \mid \forall i\in\mathbb{N}^*\ -1/i<x<1/i\} = \{0\}$ à démontrer

$\boxed{\supseteq}$ évident $\forall i\ -1/i<0<1/i$ donc $0\in\bigcap_{i\in I} A_i$

$\boxed{\subseteq}$ Si $x\neq 0$ alors 1er cas : $x>0$ donc $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tq $x>1/n>0$ donc $x\notin\bigcap_{i\in I} A_i$

2e cas : $x<0$ ... pareil.

donc si $x\neq 0$, alors $x\notin\bigcap_{i\in I} A_i$. Ainsi $\bigcap_{i\in I} A_i\subseteq\{0\}$

Ex 7

Ex 1. 1) oui 2) NON ($\bar{X}$ oui) 3) NON ($\bar{X}$ oui) 4) NON 5) NON

Ex 2 1) NON ($\bar{X}$ oui) 2) NON ($\bar{X}$ oui) 3) NON ($\bar{X}$ oui) 4) NON ($\bar{X}$ oui) 5) NON ($\bar{X}$ oui)

Ex 3 : 1) NON 2) NON 3) NON ($\bar{X}$ oui) 4) NON 5) NON 6) NON 7) NON

Ex 4

1) FAUX : $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$, $B = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{R}$

$A\cap B = \emptyset\times\mathbb{R} = \emptyset$ donc $\overline{A\cap B} = \emptyset$

$\overline{A}\cap\overline{B} = A\cap\mathbb{R}^2 = A \not\subset \emptyset$

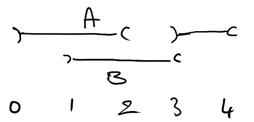
Probablement vrai si A ouvert.

2) $A =]0,2[\,\cup\,]3,4[$ $\qquad$ $A\cap\overline{B} = [1,2[$

$B =]1,3[$ $\qquad$ $B\cap\overline{A} =]1,2]$

$\overline{A\cap B} = [1,2]$

$\overline{A}\cap\overline{B} = [1,2]\cup\{3\}$



3) $A\cap B = \emptyset$ donc $\overline{A\cap B} = \emptyset$

d'autre part soit $x\in\delta D_2$ donc $x\in A$, $x\in D_2 = B$ $\}$ donc $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

Ainsi $\overline{A}\cap\overline{B}\not\subset\overline{A\cap B}$

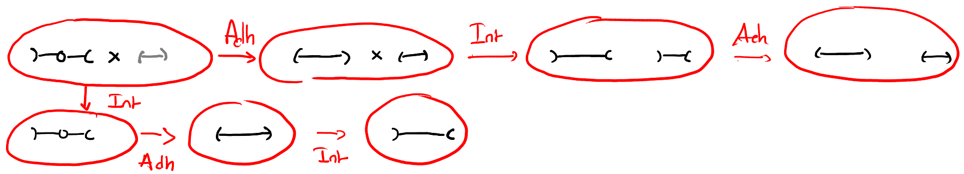
Ex 5

$X =]-1,0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,\{2\}\,\cup\,\mathbb{Q}\cap[3,4]$ $\qquad$ $\overline{X} = [-1,1]\cup\{2\}\cup[3,4]$

$\overset{\circ}{X} =]-1,0[\,\cup\,]0,1[\;\rightarrow\; \overline{\overset{\circ}{X}} = [-1,1]$ $\qquad$ $\overset{\circ}{\overline{X}} =]-1,1[\,\cup\,]3,4[\;\rightarrow\; \overline{\overset{\circ}{\overline{X}}} = [-1,1]\cup[3,4]$

$\downarrow$

$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{X}}} =]-1,1[$



Ex 6

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts d'un espace X fixé

indexée par l'ensemble I

Soit $A = \bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in X \mid \exists i\in I \; x\in A_i\}$ ensemble des $x\in X$ qui soit dans "l'un des A_i"

Montrons que A ouvert

SYNTHÈSE

Or $|x| = |x-x_p+x_p| \underset{IT}{\leq} \underbrace{|x-x_p|} + |x_p|$

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2} + |x_p|$

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} + |x_p|$ $\qquad$ car $\sqrt{t}$ est une fonct° croissante et $(y-y_p)^2 \geq 0$

$< r + |x_p|$ par hypothèse.

$< \min(1-|x_p|, 2-|y_p|) + |x_p|$

$< 1-|x_p| + |x_p| = 1$

Ainsi

$|x|<1$

On montre de même que $|y|<2$ $\quad\left(|y| \leq |y-y_p|+|y_p| \underset{<}{\leq} r + |y_p| \leq 2-|y_p|+|y_p| = 2 \quad [...]\right)$

Bilan (x,y) vérifie $|x|<1$, $|y|<2$ donc $(x,y)\in X$

Et ceci est vrai quelquesoit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ dès que $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r$

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r$ alors $(x,y)\in X$

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $(x,y)\in B(p,r)$ alors $(x,y)\in X$

Donc $B(p,r)\subseteq X$ pour le $r>0$ qu'on a trouvé

On a bien montré $\exists r>0$ tel que $B(p,r)\subseteq X$

Et ceci est vrai pour tout $p\in X$

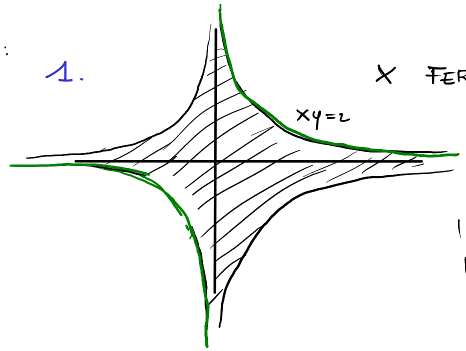
On a finalement montré que $\forall p\in X \;\exists r>0$ tel que $B(p,r)\subseteq X$

C'est-à-dire X ouvert !

FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 3 :

1.



X FERMÉ (NON OUVERT)

$\mathring{X} = \{|xy|<2\}$

$\partial X = \{xy=2\} \cup \{xy=-2\}$

2. $y > x^2 \Rightarrow y \geq 0$

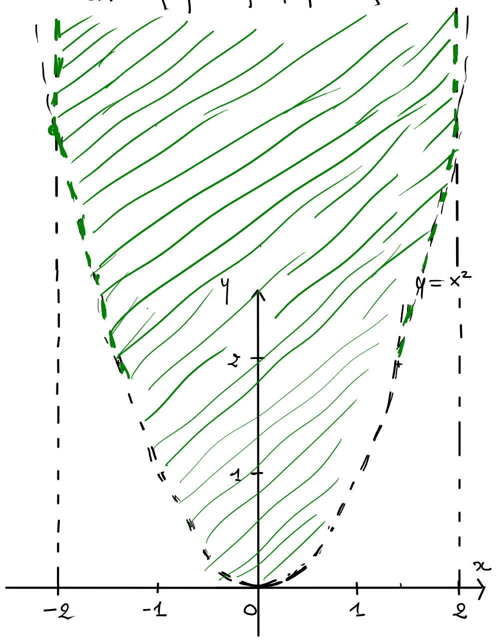
$|x|<2 \Rightarrow -2<x<2$

$\mathring{X} = X$ X est ouvert.

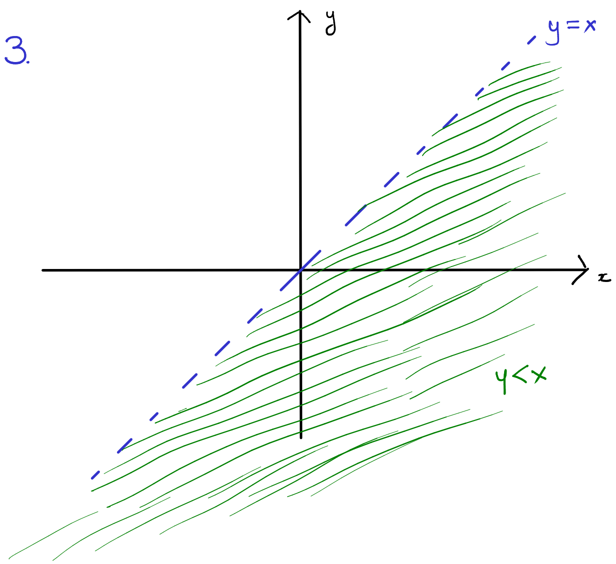
Rq $(0,0) \notin X$

$\overline{X} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, |x| \leq 2\}$

$\partial X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2, |x|\leq 2\}$
$\cup \{(2,y) \mid y \geq 4\}$
$\cup \{(-2,y) \mid y \geq 4\}$



3.



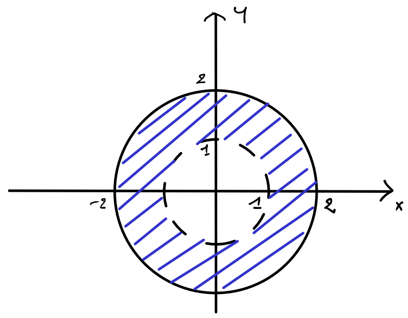
$X = \{(x,y) \mid y<x\}$
est OUVERT ds $\mathbb{R}^2$

→ $\mathring{X} = X$

→ $\overline{X} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$

→ $\partial X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

Ex3. 4. $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$



→ Ni ouvert ni fermé

→ ADHERENCE $\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

→ INTERIEUR $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$

→ FRONTIERE $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$

▶ $\overline{X} = X$ car X fermé

▶ $\mathring{X}$ = plus petit ouvert $\subseteq X$

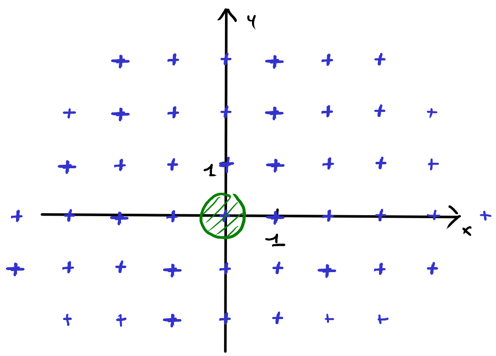
or $(0,0) \notin \mathring{X}$ par le raisonnement précédent

le même raisonnement vaut pour $(n,m)\in X$

donc $\mathring{X} = \emptyset$

autre point de vue $\mathring{X} \subseteq X$ ouvert
or X pas ouvert donc $\mathring{X} \subsetneq X$
donc on a enlevé un pt de X au moins.
mais tous les pts de X st les m̂ donc on enlève tous les pts de X

5. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$



▶ Ensemble des points du plan à coord. entières.

▶ OUVERT ?

$(0,0)\in X$ soit $\varepsilon > 0$

$B((0,0),\varepsilon)$ contient tj un point à coord non entières

donc $B((0,0),\varepsilon) \not\subseteq X$

donc X n'est pas ouvert !

▶ $Y = \mathbb{R}^2 \setminus X$ = ensemble des pts du plan dont les 2 coord. ne sont pas entières.

X FERMÉ $\Leftrightarrow$ Y OUVERT

or si $(x,y)\in Y$ alors OPS x pas entier $n < x < n+1$, $n\in\mathbb{Z}$

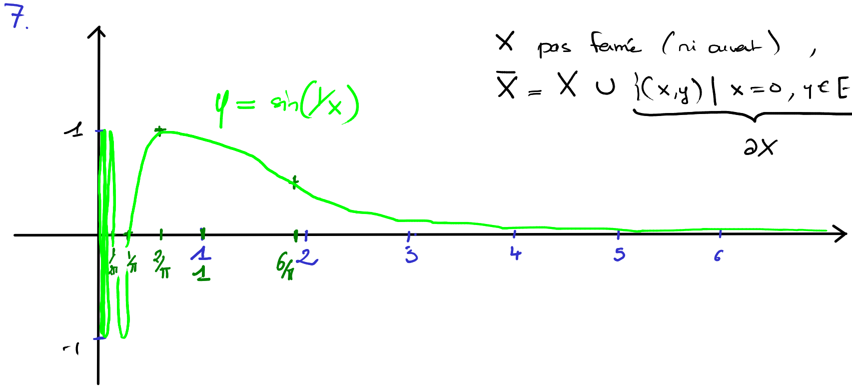
pour $r>0$ assez petit
les points de $B((x,y),r)$
de la forme (x',y') auront $n < x' < n+1$

donc $B((x,y),r) \subseteq Y$ → donc Y ouvert.

▶ $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X} = X$

6. Pas de dessin. $\overline{X} = \mathbb{R}^2$, $\mathring{X} = \emptyset$, X ni ouvert ni fermé, $\partial X = \mathbb{R}^2$.

7.



X pas fermé (ni ouvert), $\mathring{X} = \emptyset$

$\overline{X} = X \cup \underbrace{\{(x,y) \mid x=0, y\in[-1,1]\}}_{\partial X}$