Fonctions de plusieurs variables

Correction CC 1

Exercice 1

1. Faux ! Par exemple $\mathcal{O} = \emptyset$ est un ouvert et alors $\mathcal{O} \cup A = A$. Donc, dans ce cas, $\mathcal{O} \cup A$ n'est un ouvert de X que si A est ouvert de X.
   Autre exemple, dans $\mathbb{R}$ prendre $\mathcal{O} =]0, 1[$ et $A = \{1\}$. Alors $\mathcal{O} \cup A =]0, 1]$ qui n'est pas ouvert.
2. Faux ! Par exemple $\mathcal{F} = X$ est un fermé de X et alors $\mathcal{F} \cap B = B$. Donc, dans ce cas, $\mathcal{F} \cap B$ n'est un fermé de X que si B est fermé.
   Autre exemple, dans $\mathbb{R}$ prendre $\mathcal{F} = [-2, 2]$ et $B =]-1, 5]$. Alors $\mathcal{F} \cap B =]-1, 2]$ qui n'est pas fermé.

Exercice 2

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2$. De plus sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. C'est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Reste à regarder si elle est continue sur en $(0, 0)$.
   1er méthode : En coordonnées polaires
   $$x = r\cos(\theta)$$
   $$y = r\sin(\theta)$$
   avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
   On a alors
   $$f(x,y) = \frac{(r\cos(\theta))^m (r\sin(\theta))^n}{r^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))} = r^{m+n-4}\frac{\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}$$
   Première remarque
   $$\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) = (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))^2 - 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 1 - 2(\cos(\theta)\sin(\theta))^2$$
   Or $\cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc $2(\cos(\theta)\sin(\theta))^2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
   Bilan $\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) > \frac{1}{2}$ et donc la fraction
   $$\frac{\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}$$
   est bornée.
   On remarque ensuite que : **Si** $m + n - 4 > 0$ **alors** la limite de f quand $(x, y) \to (0, 0)$ vaut 0 car $r^{m+n-4} \to 0$ et la fraction est bornée.
   Reste à vérifier la réciproque : si $m + n \leq 4$ alors f est discontinue.

Par exemple si $\theta = \pi/4$ alors

$$\frac{\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m+n} \neq 0$$

Et donc

$$\lim_{r\to 0, \theta=\pi/4} f(x,y) \neq 0$$

Donc f ne peut pas être continue en 0.

2ème méthode : On rappelle que $\|(x,y)\|^2 = x^2+y^2$ et que par définition $\|(x,y)\| \to 0$ **ssi** $(x,y) \to 0$.

$$\begin{aligned} |x| &\leq \|(x,y)\| \\ |y| &\leq \|(x,y)\| \\ x^4+y^4 \geq (x^2+y^2)^2 &\geq \|(x,y)\|^4 \end{aligned}$$

Bilan

$$|f(x,y)| \leq \frac{\|(x,y)\|^m \|(x,y)\|^n}{\|(x,y)\|^4} = \|(x,y)\|^{m+n-4}$$

Ce qui permet de conclure que f est continue en 0 dès lors que $m+n-4 > 0$.

2. Les dérivées partielles en 0 sont définies comme limite du taux d'accroissement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(h,0) - f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^m 0^n}{h^4}\right)$$

Cette limite existe et vaut 0 dès lors que $n > 0$ ou ($n = 0$ et $m > 5$). Dans le cas $n = 0$ et $m = 5$, cette limite vaut 1. Elle n'existe pas ou n'est pas finie dans tous les autres cas. De même pour la dérivée par rapport à y (ou par un argument de symétrie (à rédiger en exercice))

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \begin{cases} 0 & m > 0 \\ 1 & m = 0, n = 5 \\ 0 & m = 0, n > 5 \end{cases}$$

et n'existe pas ou n'est pas finie dans les autres cas.

En conclusion les dérivées partielles existent en $(0,0)$ si $m, n > 0$ ou si $\max(m,n) \geq 5$. En particulier pour $m = n = 1$, par ce qui précède f n'est pas continue en $(0,0)$, pourtant des dérivée partielles d'ordre 1 existent et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

3. La fonction f admet des dérivées partielles à tout ordre en dehors de $(0,0)$. On les obtient par les formules usuelles de dérivation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{mx^{m-1}y^n(x^4+y^4) - 4x^{m+3}y^n}{(x^4+y^4)^2} = \frac{(m-4)x^{m+3}y^n + mx^{m-1}y^{n+4}}{(x^4+y^4)^2}$$

On vérifie prudemment que cette formule donne bien le résultat même dans le cas $m = 0$ et $m = 1$. Et de même par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(n-4)y^{n+3}x^n + ny^{n-1}x^{m+4}}{(x^4 + y^4)^2}$$

En passant en polaire comme précédemment, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = r^{m+n+3-2\times 4}\frac{(m-4)\cos^{m+3}\sin^n + m\cos^{m-1}\sin^{n+4}}{(\cos^4 + \sin^4)^2}$$

On se restreindra à partir de maintenant au cas $m, n > 0$ comme demandé dans l'énoncé. Dès lors cette fonction tend vers 0 **ssi** $m + n - 5 > 0$. Un raisonnement symétrique pour y permet de conclure que les dérivées partielles de f sont continues en $(0, 0)$ **ssi** $m + n > 5$. Comme f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ hors de $(0, 0)$. On peut dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ **ssi** $m + n > 5$.

4. Si la différentielle de f existe en $(0, 0)$, elle est donnée par les dérivées partielles en $(0, 0)$ dès lors
$$Df(0,0)(h, k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

5. Si est différentiable en $(0, 0)$, alors elle est continue et donc par le point (1), on a $m + n \geq 5$. Cependant elle n'est de classe $\mathcal{C}^1$ que si $m+n > 5$ donc son caractère différentiable n'implique pas son caractère $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3

On suppose $\mathbb{E}$ de dimension finie.
ϕ est continue car linéaire et on a

$$\phi(a + h) = \phi(a) + \phi(h)$$

par linéarité de ϕ, il s'en suit donc que en posant $L = \phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ et ϵ la fonction nulle de $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$.
L'égalité du dessus se réécrit donc

$$\phi(a + h) = \phi(a) + L(h) + \|h\|_{\mathbb{E}}\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et L linéaire continue donc L est la différentielle de ϕ en a.
Ainsi

$$D\phi(a)(h) = L(h) = \phi(h)$$

Exercice 4

On vérifie les axiomes de norme :

(a) $N : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$

(b) *homogénéité positive* : $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}[X], N(\lambda p) = |\lambda|N(p)$

(c) *définie* : $\forall p \in \mathbb{R}[X], N(p) = 0$ **ssi** $p = 0$

(d) *Inégalité triangulaire (pour les normes)* : $\forall p, q \in \mathbb{R}[X], N(x + y) \leq N(p) + N(q)$

(a) Il est clair que N est définie sur $\mathbb{R}[X]$ tout entier et à valeur positives.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $p \in \mathbb{R}[X]$, alors en posant

$$p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

on a

$$(\lambda p)(X) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) X + \cdots + (\lambda a_n) X^n$$

et donc

$$N(\lambda p) = \sup_{i \in \mathbb{N}} (|\lambda a_i|) = \sup_{i \in \mathbb{N}} (|\lambda||a_i|) = |\lambda| \sup_{i \in \mathbb{N}} (|a_i|) = |\lambda| N(p)$$

Ceci étant vrai quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}[X]$ on a bien montré que N vérifie l'axiome d'homogénéité (b).

(c) Il est clair que si $p = 0$ est le polynôme nul alors $N(p) = 0$. Réciproquement, soit $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N(p) = 0$. Posons

$$p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

Alors on en déduit que $\sup_{i \in \mathbb{N}}(|a_i|) = 0$ donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|a_i| = 0$ donc $p = 0$. On a bien montré que pour $p \in \mathbb{R}[X]$, $N(p) = 0$ **ssi** $p = 0$.

(d) Soient $p, q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\begin{aligned} p(X) &= a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \\ q(X) &= b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n \end{aligned}$$

quitte à poser $b_n, b_{n-1}, \cdots, b_k = 0$ si le degré de q est inférieur à k. Alors $p + q$ est donné par

$$(p+q)(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + \cdots + (a_n + b_n) X^n$$

dès lors, en utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue et la propriété "la borne supérieure d'une sommes est plus grande que la somme des bornes supérieures" on trouve

$$N(p+q) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i + b_i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} (|a_i| + |b_i|) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| + \sup_{j \in \mathbb{N}} |b_j| = N(p) + N(q)$$

Ceci étant vrai quelque soient p et q dans $\mathbb{R}[X]$. On a donc bien montré l'inégalité triangulaire.

Bilan N est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

La fonction ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}[X]$ comme fonction polynomiale (n'a rien avoir avec le fait que les éléments de $\mathbb{R}[X]$ sont des polynômes ; c'est simplement la fonction $u \mapsto u^2 + 5u$ qui est polynomiale, et donc les propriétés usuelles de continuité s'appliquent).

Soit $p, h \in \mathbb{R}[X]$, considérons

$$\psi(p+h) = (p+h)^2 + 5(p+h) = p^2 + 5p + 2ph + 5h + h^2 = \psi(p) + L(h) + h^2$$

où $L(h) = (2p+5)h$. Il est clair que L est linéaire et continue par rapport à h. Reste à montrer que $h^2 = N(h)\epsilon(h)$ avec ϵ qui a pour limite $0 \in \mathbb{R}[X]$ quand $h \to 0$.

Pour cela, on peut admettre [1] que $N(h^2)/N(h) \to 0$ quand $h \to 0$ et $h \neq 0$. Dès lors on a bien $D\psi(p)h = L(h)$.

1. Cf annexe pour une preuve

Exercice 5

On supposera z de classe $\mathcal{C}^1$.

On a une égalité de deux fonctions de x, y :

$$x^2 + y^2 + z(x,y)^2 = \phi(x + y + z(x,y))$$

Comme ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composés et sommes de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ on peut dériver l'égalité par rapport à x et y pour obtenir

$$\begin{aligned} 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \phi'(x+y+z)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) \\ 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= \phi'(x+y+z)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) \end{aligned}$$

où z signifie réellement $z(x,y)$.

En faisant la différence des deux equations on obtient

$$2(x-y) + (2z - \phi'(x+y+z))\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) = 0$$

D'autre part, en multipliant la première par $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ et la seconde par $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ et en faisant la différence, on obtient :

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 2y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \phi'(x+y+z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)$$

En regroupant, il s'en suit que

$$2(x-y)+2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) = \phi'(x+y+z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) = 2x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 2y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$$

Et donc

$$x - y = (x-z)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + (z-y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$$

Annexe exercice 3

Il suffit de montrer que $N(h^2)/N(h) \to 0$ quand $h \to 0$ et $h \neq 0$. En effet $N(h^2) = N(N(h)\epsilon(h)) = N(h)N(\epsilon(h))$ par homogénéité. De plus, par définition, $N(\epsilon(h)) \to 0$ quand $h \to 0$.

Or si

$$h(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

alors

$$h^2(X) = a_0^2 + 2a_0 a_1 X + (2a_0 a_2 + a_1^2)X^2 + \cdots + b_k X^k + \cdots + a_n^2 X^{2n}$$

où on peut montrer par récurrence que

$$b_k = \sum_{i+j=k} a_i a_j$$

Dès lors

$$N(h^2) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |b_k| = \sup_{k \leq 2n} |b_k| = \sup_{k \leq 2n} \left| \sum_{i+j=k} a_i a_j \right| \leq \sup_{k \leq 2n} \sum_{i+j=k} |a_i||a_j|$$

or pour i_0 fixé, $|a_{i_0}| \leq \sup_i |a_i| = N(h)$ donc on peut écrire

$$N(h^2) \leq \sup_{k \leq 2n} \sum_{i+j=k} N(h)N(h) \leq \sup_{k \leq 2n} kN(h)N(h) \leq 2nN(h)^2$$

Ce qui suffit pour conclure.