FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 15

$x,y \in E \setminus \{\vec{0}\}$

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \underset{IT.}{\leq} \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\|}_{\text{homogénéité}} + \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x-y\| + \underbrace{\left\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) y \right\|}_{\text{homogénéité}}$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x-y\| + \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \cdot \|y\|$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x-y\| + \frac{1}{\|x\|} \underbrace{\big| \|y\| - \|x\| \big|}$$

$$\underset{IT2}{\leq} \|y-x\| = \|x-y\|$$

$$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\|$$
$$\leq \|x-z\| + \|z-y\|$$
$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

BILAN $\quad \dots \leq \frac{2}{\|x\|}\|x-y\|$

Ex 16

$$\tilde{d}(x,y) = \text{Inf}(1, d(x,y))$$

d distance donc symétrique

* $\tilde{d}$ est symétrique : $\tilde{d}(y,x) = \text{Inf}(1, d(y,x)) = \text{Inf}(1, d(x,y)) = \tilde{d}(x,y)$
* $\tilde{d}(x,y) = \text{Inf}(1, d(x,y)) \geq 0$ car d est positive
* $\tilde{d}$ satisfait l'ineg. triangulaire.

en effet soient $x,y,z \in \mathbb{R}^2$

$\tilde{d}(x,z) = \text{inf}(1, d(x,z))$ or $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ car d est une distance.

$$\leq \text{inf}(1, d(x,y) + d(y,z))$$
$$\leq \text{inf}(1, d(x,y)) + \text{inf}(1, d(y,z))$$
$$\leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$$

lemme $\left[\begin{array}{l} \text{inf}(a,b+c) \leq \text{inf}(a,b) + \text{inf}(a,c) \\ \text{si } a,b,c \text{ sont } \geq 0 \end{array} \right.$

Il suffit de montrer que

* $\text{inf}(a,b+c) - \text{inf}(a,b) \leq a$ (évident)
* $\text{inf}(a,b+c) - \text{inf}(a,b) \leq c$

$$\text{inf}(a,b+c) = \text{inf}(a-c,b) + c$$
$$\text{inf}(a-c,b) - \text{inf}(a,b) \leq 0$$

* Enfin si $\tilde{d}(x,y) = 0$

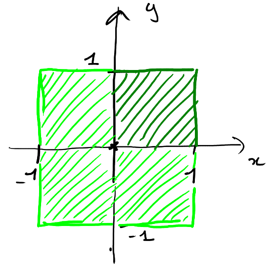
alors $\text{inf}(1, d(x,y)) = 0$ donc

$d(x,y) = 0$

or d distance donc $x = y$

Ex 1

1.



Supposons $x \geq 0, y \geq 0$

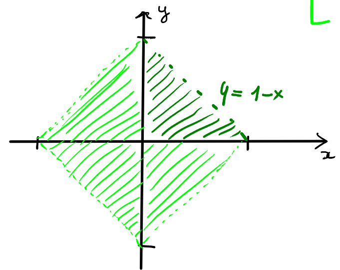
on doit donc tracer

$0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1$

L'ensemble $\{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) \leq 1\}$

est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$ symétrie d'axe O_y
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$ symétrie d'axe O_x
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$ symétrie de centre O

2.



Supposons $\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$ $|x| + |y| < 1$

$\iff x + y < 1$

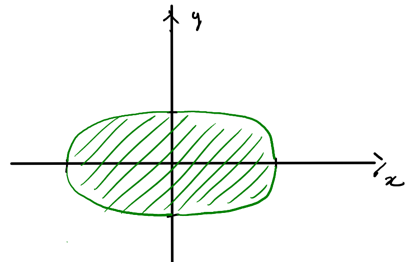
$\iff y < 1 - x$

→ décris l'ensemble strictement sous la droite $y = 1-x$ et contenu ds le quart de plan $x,y \geq 0$

L'ensemble est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$

[...]

3.



$x^2 + 4y^2 < 1 \iff x^2 + (2y)^2 < 1$

Intérieur de l'ellipse $x^2 + (2y)^2 = 1$

En raisonnant par quadrant

Si $x \geq 0, y \geq 0$ $\quad 4y^2 < 1 - x^2$

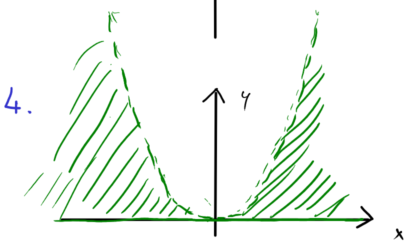
$y^2 < \frac{1}{4}(1-x^2)$

on utilise que $y \geq 0$

$0 \leq y < \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

donc partie du plan strictement sous la courbe $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ $\quad 1 \geq x \geq 0$, $y \geq 0$

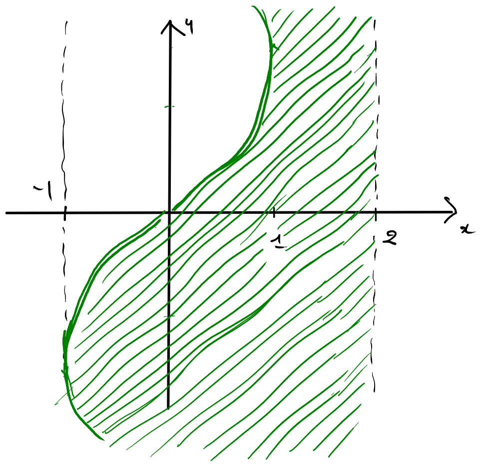
4.



On trace $y = x^2$ et $y = 0$

→ Partie du plan entre les 2 courbes

5.



On a $\sin(y) \leq x < 2$

or $\sin(y) \geq -1$

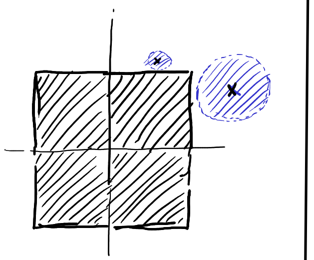
donc $x \in [-1, 2[$

On trace $x = \sin(y)$

Partie du plan à droite de la courbe $x \geq \sin(y)$

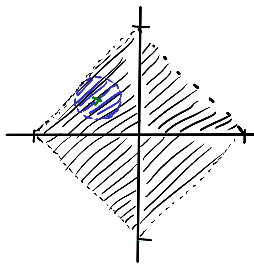
Ouvert / Fermé / Autre ?

1. Fermé $\longrightarrow$
2. Ouvert
3. Ouvert
4. Ni l'un, ni l'autre
5. Ni l'un, ni l'autre



$x \in \mathbb{R}^2 \setminus X$

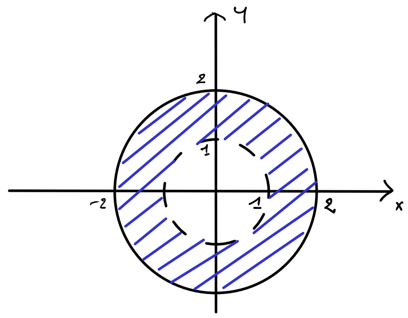
$B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus X$ où $r = \min(1-|x|, 1-|y|)$, $r > 0$



$x \in X$

$B(x,r) \subseteq X$ où $r = (\dots)$

Ex3. 4. $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$



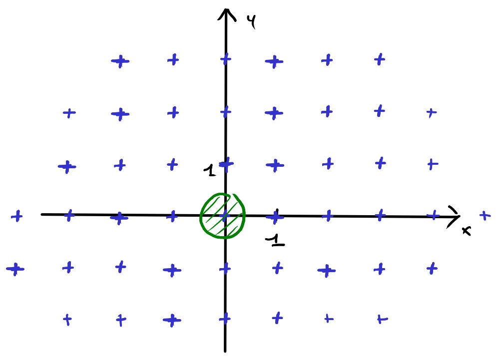
→ Ni ouvert ni fermé

→ Adhérence $\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

→ Intérieur $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$

→ Frontière $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 4\}$

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$



▶ Ensemble des points du plan à coord. entières.

▶ Ouvert ?

$(0,0) \in X$ soit $\varepsilon > 0$

$B((0,0),\varepsilon)$ contient tj un point à coord non entière

donc $B((0,0),\varepsilon) \not\subseteq X$

donc X n'est pas ouvert !

▶ $Y = \mathbb{R}^2 \setminus X$ = ensemble des pts du plan dont les 2 coord. ne sont pas entières.

X fermé $\Leftrightarrow$ Y ouvert

or si $(x,y) \in Y$ alors OPS x pas entier $\quad n < x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

pour $r > 0$ assez petit

les points de $B((x,y),r)$ de la forme (x',y') auront $n < x' < n+1$

donc $B((x,y),r) \subseteq Y$ $\quad \longrightarrow$ donc Y ouvert.

▶ $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X} = X$

▶ $\overline{X} = X$ car X fermé

▶ $\mathring{X}$ = plus petit ouvert $\subseteq X$

or $(0,0) \notin \mathring{X}$ par le raisonnement précédent

le même raisonnement vaut pour $(n,m) \in X$

donc $\mathring{X} = \emptyset$

autre point de vue $\mathring{X} \subseteq X$ ouvert

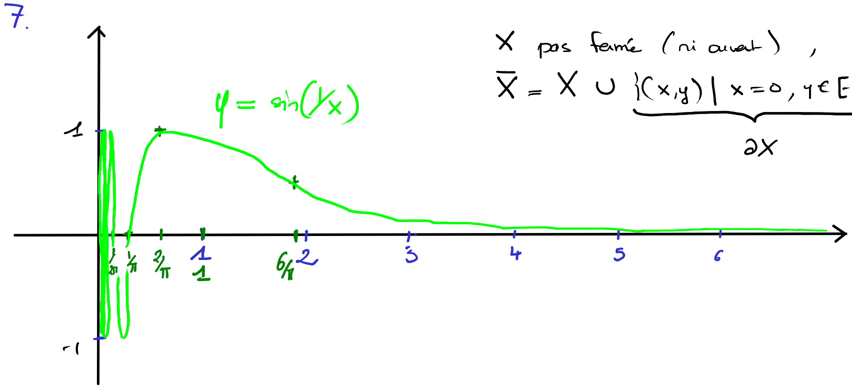
or X pas ouvert donc $\mathring{X} \subsetneq X$

donc on a enlevé un pt de X au moins.

mais tous les pts de X sont les mêmes donc on enlève tous les pts de X

6. Pas de dessin. $\overline{X} = \mathbb{R}^2$, $\mathring{X} = \emptyset$, X ni ouvert ni fermé, $\partial X = \mathbb{R}^2$.

7.

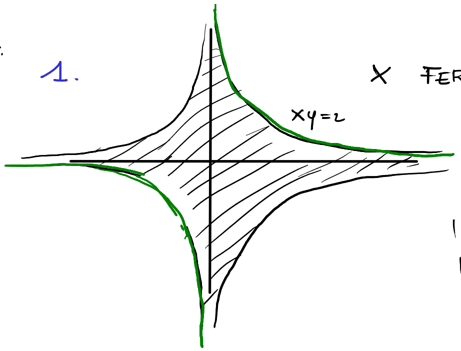


X pas fermé (ni ouvert), $\mathring{X} = \emptyset$

$$\overline{X} = X \cup \underbrace{\{(x,y) \mid x = 0, y \in [-1,1]\}}_{\partial X}$$

Ex 3 :

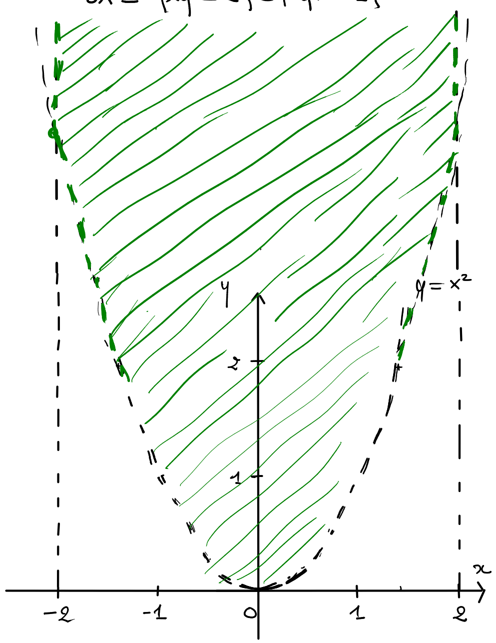
1.



X FERMÉ (NON OUVERT)

$\mathring{X} = \{|xy|<2\}$

$\partial X = \{xy=2\} \cup \{xy=-2\}$



2. $y > x^2 \Rightarrow y \geq 0$

$|x|<2 \Rightarrow -2<x<2$

$\mathring{X} = X$ $\quad X$ est ouvert.

Rq $(0,0) \notin X$

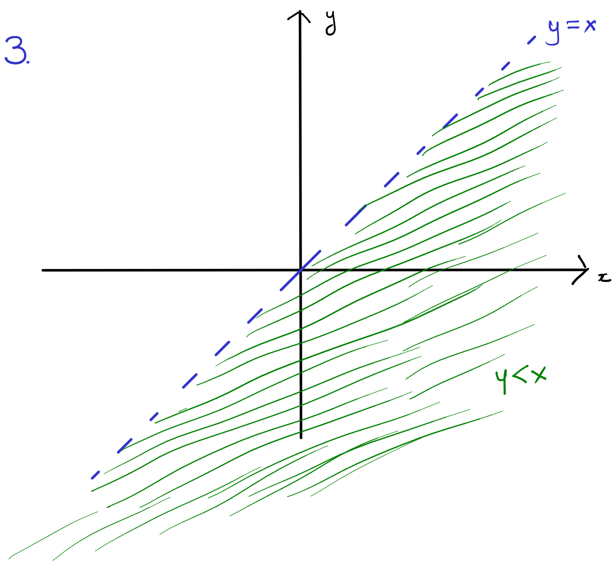
$\overline{X} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, |x|\leq 2\}$

$\partial X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2, |x|\leq 2\}$

$\cup \{(2,y) \mid y \geq 4\}$

$\cup \{(-2,y) \mid y\geq 4\}$

3.



$X = \{(x,y) \mid y<x\}$

est OUVERT ds $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow \mathring{X} = X$

$\rightarrow \overline{X} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\leq x\}$

$\rightarrow \partial X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x\}$

FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 2

1. $X =]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$

Montrons que $\forall x\in X \ \exists r>0 \ / \ B_{\mathbb{R}}(x,r)\subseteq X$ $\quad$ (déf X ouvert)

Soit $x\in X$, Montrons que $\exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq X$

Or ds $\mathbb{R}$ $\quad B(x,r) = \{y\in\mathbb{R} \mid |y-x|<r\} =]x-r,x+r[$

donc Montrons que $\exists r>0 \ / \ ]x-r,x+r[\subseteq]-1,1[=X$

Or l'inclusion est vrai si $-1 < x-r$ et $x+r<1$

Montrons donc que $\exists r>0 \ / \ \begin{cases} -1<x-r \\ x+r<1 \end{cases}$

Un tel r doit donc vérifier $\begin{cases} r>0 \\ r<x+1 \\ r<1-x \end{cases}$

Prenons $r = \min\{x+1, 1-x\}$, comme $x\in]-1,1[$

$x+1>0$ et $1-x>0$

donc $r>0$

Ainsi $\exists r>0 \ / \ ]x-r,x+r[\subseteq X$

Et ce quelque soit $x\in X$

donc $\forall x\in X \ \exists r>0 \ / \ B(x,r)\subseteq X$ $\quad$ c'est-à-dire X ouvert !

FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 2. 2. Soit $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1 \text{ et } |y|<2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Montrons que X est ouvert dans $\mathbb{R}^2$

Montrons que $\forall p\in X,\ \exists r>0 \ / \ B(p,r)\subseteq X$ où $B(p,r)$ boule de centre p et rayon r de $\mathbb{R}^2$

Soit $p\in X$, Montrons $\exists r>0 \ / \ B(p,r)\subseteq X$ on notera $p=(x_p,y_p)$

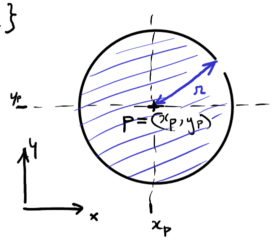
On sait que $|x_p|<1$ et $|y_p|<2$.

De plus :

$B(p,r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r\}$

On veut donc $r>0$ tel que

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r\} \subseteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|<2\}$



ANALYSE

On veut donc $r>0$ tel que

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $\begin{cases}|x|<1\\|y|<2\end{cases}$ ✱

Remarque : $(x-x_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$ car $(y-y_p)^2\geq 0$

donc $|x-x_p|<r$ donc $|x|-|x_p| \underset{IT}{\leq} |x-x_p|<r$ donc $|x|<r+|x_p|$

de même : $(y-y_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$

donc $|y-y_p|<r$ donc $|y|-|y_p| \underset{IT}{\leq} |y-y_p|<r$ donc $|y|<r+|y_p|$

Si on veut que r satisfasse ✱, il suffit d'imposer $\begin{cases} r+|x_p|\leq 1\\ r+|y_p|\leq 2\end{cases}$

$\boxed{\text{Prenons donc } r = \min(1-|x_p|,\ 2-|y_p|)}$

On vérifie que $r>0$ en effet $|x_p|<1$ donc $1-|x_p|>0$; $|y_p|<2$ donc $2-|y_p|>0$ } le min de deux valeurs >0 est >0.

Reste à montrer qu'avec ce r on a bien $B(p,r)\subseteq X$.

Montrons donc que $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $|x|<1$, $|y|<2$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, supposons $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$,

Montrons que $|x|<1$ et $|y|<2$

SYNTHÈSE

Or $|x| = |x-x_p+x_p| \underset{IT}{\leq} \underbrace{|x-x_p|}+|x_p|$

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2}+|x_p|$

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}+|x_p|$ car $\sqrt{t}$ est une fonct° croissante et $(y-y_p)^2\geq 0$

$< r+|x_p|$ par hypothèse.

$< \min(1-|x_p|,\ 2-|y_p|)+|x_p|$

$< 1-|x_p|+|x_p| = 1$

Ainsi $|x|<1$

On montre de même que $|y|<2$ $\left(|y| \leq |y-y_p|+|y_p| \ [...] < r+|y_p| \leq 2-|y_p|+|y_p| = 2 \right)$

BILAN (x,y) vérifie $|x|<1$, $|y|<2$ donc $(x,y)\in X$

Et ceci est vrai quelquesoit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ dès que $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$

Donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $(x,y)\in X$

Donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $(x,y)\in B(p,r)$ alors $(x,y)\in X$

Donc $B(p,r)\subseteq X$ pour le $r>0$ qu'on a trouvé

On a bien montré $\exists r>0$ tel que $B(p,r)\subseteq X$

Et ceci est vrai pour tout $p\in X$

On a finalement montré que $\forall p\in X\ \exists r>0$ tel que $B(p,r)\subseteq X$

c'est-à-dire X ouvert !