Université de Rennes 1,
UFR de mathématique

mardi 3 novembre 2015

Fonctions de plusieurs variables

(durée 2 heures, les documents et calculatrices sont prohibés)

Le sujet comporte cinq exercices indépendants

Exercice 1

Soit (X,d) un espace métrique, on considère les propositions suivantes :

1) Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de X et A une partie quelconque, alors $\mathcal{O} \cup A$ est un ouvert de X.
2) Soient $\mathcal{F}$ un fermé de X et B une partie quelconque, alors $\mathcal{F} \cap B$ est un fermé de X.

Ces propositions sont elles vraies ou fausses ? , justifier ou donner un contre exemple.

Exercice 2

Soient deux entiers positifs m et n, on considère la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad \begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^m y^n}{x^4 + y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ f(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) La fonction f est elle continue ? , déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur m et n pour qu'elle le soit.
2) Calculer les dérivées partielles d'ordre un en l'origine, est ce toujours possible ? , déterminer les conditions pour qu'elles existent. Donner un exemple d'un couple (m,n) tel que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ sans que f soit continue en ce point.
3) Calculer les dérivées partielles d'ordre un hors de l'origine lorsque cela est possible. Trouver les conditions pour que f soir de classe $\mathcal{C}^1$.
3) On suppose que f est différentiable en $(0,0)$, quelle est sa différentielle ?
4) Déterminer les conditions pour que f soit différentiable en $(0,0)$, est elle alors de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé arbitraire, on considère une application linéaire ϕ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ et a un point de $\mathbb{E}$. Calculer $D\phi(a)h$.

Exercice 4

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, soit $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ un élément de $\mathbb{R}[X]$, on définit l'application suivante : $N(P) = Sup_{i \in \mathbb{N}}(|a_i|)$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Soit ψ l'application définit comme suit :

$$\psi \; \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \;/\; P \longrightarrow \psi(P) = P^2 + 5P$$

Calculer $D\psi(P)H$.

Exercice 5

Soit une fonction ϕ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère une fonction $z(x, y)$ vérifiant la relation suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2(x, y) = \phi(x + y + z(x, y))$$

Démontrer que la fonction $z(x, y)$ satisfait l'égalité :

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$$