Notes sur la théorie de Galois des schémas

Tristan Vaccon

6 mai 2015

Table des matières

Remarque. Ce qui suit est (sauf mention du contraire) extrait de *Galois Groups and Fundamental Groups* de Tamás Szamuely (Cambridge University Press, 2009). Tout y est bien sûr bien mieux expliqué et détaillé : les notes ici ne constituent qu'un très rapide extrait.

0 Quelques rappels sur les schémas

0.1 Notions qui dépendent du faisceau de fonctions

Propriété du schéma X	**Propriété de O_X**
réduit	$\forall U \subset X,$ ouvert, $O_X(U)$ sans élément nilpotent
entier	$\forall U \subset X,$ ouvert, $O_X(U)$ sans diviseur de zéro
localement noethérien	les $O_{X,P}$ sont locaux et noethériens
normal	les $O_{X,P}$ sont intégralement clos
régulier	tout $O_{X,P} = R$ est local régulier $(\dim_{\kappa(R)} M(R)/M(R)^2 = \dim R)$
$\phi : Y \to X$ loc. de type fini	$X = \cup U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $\phi^{-1}(U_i) = \cup V_{i,j}$ $V_{i,j} = \operatorname{Spec} B_{i,j}$ et $B_{i,j}$ est une A_i-algèbre de type fini
de type fini	comme au-dessus avec un nombre fini de $V_{i,j}$ pour chaque i.
$\phi : Y \to X$ fini	$X = \cup U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $\phi^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$ B_i est un A_i-module de type fini

0.2 Notions qui dépendent de la topologie

Propriété du schéma X	**Propriété de X comme espace topologique**
irréductible	pas l'union de deux ouverts non-triviaux
connexe	connexe
quasi-compact	de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini

0.3 Notions composées

entier	= réduit + irréductible
noethérien	= quasi-compact + loc. noethérien

0.4 Produit

Proposition 0.1. *Soit X un schéma et deux morphismes de schéma $p : Y \to X$ et $q : Z \to X$. Alors le foncteur contravariant suivant :*

$$S \mapsto \{(\phi, \psi) \in \operatorname{Hom}(S, Y) \times \operatorname{Hom}(S, Z) \,:\, p \circ \phi = q \circ \psi\},$$

de la catégorie des X-schémas vers les ensembles est représentable par un schéma, $Y \times_X Z$.

Démonstration. Dans le cas affine, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $Z = \operatorname{Spec} C$, $Y \times_X Z = \operatorname{Spec} B \otimes_A C$. Le cas général s'obtient par recollement. $\square$

On a bien sûr une propriété universelle correspondante.

Sur $\operatorname{Spec} A$, si P est un point, on a bien sûr la composition de morphismes $A \to A_P \to A_P/PA_P = \kappa(P)$. Sur un schéma X, si P est un point de X, on en déduit un morphisme d'inclusion $\operatorname{Spec} \kappa(P) \to X$.

Définition 0.2. Si $\phi : Y \to X$ est un morphisme de schémas, si P est un point de X, nous définissons *la fibre* de ϕ en P par $Y_P = Y \times_X \operatorname{Spec} \kappa(P)$.

Remarque. Y_P est homéomorphe, en tant qu'espace topologique, à $\phi^{-1}(P)$.

0.5 Dernier rappel

Définition 0.3. Un morphisme $Z \to X$ de schémas affines est une *immersion fermée* s'il correspond à une projection $A \to A/I$. Un morphisme $Z \to X$ de schémas est une *immersion fermée* s'il est injectif, d'image fermée, et tel que sa restriction sur un recouvrement affine de Z donne lieu à des immersions fermées de schémas affines.

Définition 0.4. Un morphisme $Y \to X$ de schémas est *séparé* si la diagonale $\Delta : Y \to Y \times_X Y$ est une immersion fermée.

Définition 0.5. Un morphisme séparé $Y \to X$ de schémas est *propre* s'il est de type fini, et pour tout $Z \to X$, le changement de base $Y \times_X Z \to Z$ est une application fermée (elle envoie fermé sur fermé).

1 Revêtements étales finis de schémas

Définition 1.1. Une k-algèbre A de dimension finie est *étale* (sur k) si elle est isomorphe à un produit fini d'extension séparables de k.

Remarque. Une k-algèbre A de dimension finie est *étale* (sur k) si et seulement si $A \otimes_k \overline{k} = \overline{k}^l$ (pour un certain l), si et seulement si $A \otimes_k \overline{k}$ est réduit.

Définition 1.2. Un morphisme fini de schémas $\phi : X \to S$ est *localement libre* si le faisceau image directe $\phi_* O_X$ est localement libre (de rang fini).
Si de plus, chaque fibre X_P de ϕ est le spectre d'une $\kappa(P)$-algèbre finie étale, alors nous parlons de morphisme *fini étale*.
Un *revêtement fini étale* est un morphisme fini étale surjectif.

Définition 1.3. X un schéma, $\mathcal{F}$ un O_X-module. On dit que $\mathcal{F}$ est *localement libre* si on peut écrire $X = \cup U_i$ avec $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ et $M_i = \mathcal{F}(U_i)$ est un A_i-module libre.

Remarque. Les morphismes finis étales correspondent à une O_X-algèbre $\phi_* O_X$ telle que $\phi_* O_X \oplus_{O_{X,P}} \kappa(P)$ est une $\kappa(P)$-algèbre finie étale pour tout $P \in X$.

Exemple. Soit $S = \operatorname{Spec} A$ et $X = \operatorname{Spec} B$ des schémas affines tels que $B = A[x]/(f)$ avec f polynôme unitaire de degré d. Nous avons B librement engendré par les images de $1, \ldots, x^{d-1}$ dans B. Ainsi, le morphisme $\phi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ est fini est localement libre. Si de plus, $\operatorname{Res}(f, f') = 1$ dans $A[x]$ (ou $f \wedge f' = 1$), alors ϕ est fini étale. En effet, si $P \in S$, alors la fibre X_P est le spectre de $B \oplus_A \kappa(P) \simeq \kappa(P)[x]/(\overline{f})$, avec $\overline{f}$ l'image de f dans $\kappa(P)[x]$. Par hypothèse, elle est à racine simple, donc il s'agit bien d'une $\kappa(P)$-algèbre finie étale.

Remarque. composition, base change

Définition 1.4. Soit $\phi : X \to S$ un revêtement fini étale. Nous disons qu'il est *trivial* si X, comme S-schéma, est isomorphe à une union disjointe de copies de S, et que ϕ est l'identité sur chaque composante.

Proposition 1.5. *Soit S un schéma connexe et $\phi : X \to S$ un morphisme surjectif affine. Alors ϕ est un revêtement fini étale si et seulement si il existe un morphisme fini, localement libre et surjectif $\psi : Y \to S$ tel que $X \times_S Y$ est un revêtement trivial de Y.*

Remarque. En topologie, les revêtements sont caractérisés par le fait qu'ils deviennent triviaux lorsqu'on se restreint à des ouverts suffisamment petits. Remarquons que la restriction d'un revêtement $Y \to X$ à un ouvert $U \subset X$ n'est rien d'autre que le produit fibré $Y \times_X U \to U$ (dans la catégorie des espaces topologiques).
En fait, la proposition suivante nous dit que les revêtements finis étales sont localement triviaux pour la *topologie de Grothendieck*, où les recouvrements sont donnés par les morphismes localement libres, finis, surjectifs.

Remarque. Il existe aussi un critère jacobien pour être étale, qui dit *grosso modo* qu'en tout point, le jacobien est inversible. Hélas, il n'y a pas d'inversion locale au sens que l'on a en analyse.

2 Théorie de Galois des revêtements étales finis

Proposition 2.1. *Soit $\varphi : X \to S$ un revêtement fini étale, et soit $s : S \to X$ une section de ϕ (i.e. un morphisme tel que $\phi \circ s = Id_s$). Alors s induit un isomorphisme de S avec un sous-schéma ouvert-fermé de X. En particulier, si S est connexe, s envoie S sur une composante connexe de X.*

Corollaire 2.2. *Si $Z \to S$ est un S-schéma connexe et $\phi_1, \phi_2 : Z \to X$ sont deux S-morphismes vers un S-schéma fini étale X avec $\phi_1 \circ \overline{z} = \phi_2 \circ \overline{z}$ pour un certain point géométrique $\overline{z} : \operatorname{Spec} \Omega \to Z$, alors $\phi_1 = \phi_2$.*

Définition 2.3. Soit $\varphi : X \to S$ un morphisme de schémas. Définissons $\mathrm{Aut}(X|S)$ comme le groupe des automorphismes de schéma de X qui préservent ϕ.

Définition 2.4. Pour un point géométrique $\overline{s} : \operatorname{Spec}\Omega \to S$, nous avons une action naturelle de $\mathrm{Aut}(X|S)$ sur la fibre géométrique $X_{\overline{s}} = X \times_S \operatorname{Spec}\Omega$ venant par changement de base de l'action sur X.

Corollaire 2.5. *Si $\phi : X \to S$ est une revêtement fini étale, les éléments non-triviaux de $\mathrm{Aut}(X|S)$ agissent sans point fixe sur les points des fibres géométriques. En conséquence, $\mathrm{Aut}(X|S)$ est fini.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Aut}(X|S)$, on prend $\phi_1 = \phi$ et $\phi_2 = \phi \circ \lambda$ et l'on obtient la première partie.
En conséquence, l'action de $\mathrm{Aut}(X|S)$ par permutation sur une fibre géométrique est fidèle. Comme ces ensembles sont finis, le résultat est clair. $\square$

Définition 2.6. Soit $\phi : X \to S$ un morphisme surjectif de schémas. Soit $G \subset \mathrm{Aut}(X|S)$ un sous-groupe fini. Nous définissons un espace annelé $G \setminus X$ et un morphisme d'espaces annelés $\pi : X \to G \setminus X$ de la manière suivante. L'espace topologique sous-jacent à $G \setminus X$ est le quotient de $G \setminus X$, avec topologie quotient, et π la projection naturelle, qui est continue. Nous définissons alors le faisceau structural de $G \setminus X$ comme le sous-faisceau $(\pi_* O_X)^G$ des éléments de $\pi_* O_X$ qui sont G-invariants.

Proposition 2.7. *L'espace annelé $G \setminus X$ construit précédemment est un schéma, le morphisme π est affine et surjectif, et ϕ se factorise en $\phi = \psi \circ \pi$ pour un morphisme affine $\psi : G \setminus X \to S$.*

Proposition 2.8 (PU du quotient)**.** *Le S-schéma $G \setminus X$ est le quotient de X par G. Il est caractérisé par la propriété universelle suivante : pour $\lambda : X \to Y$ morphisme dans la catégorie des schémas affines et surjectif sur S tel que λ est constante sur les orbites pour l'action de G, λ se factorise de manière unique par $G \setminus X$.*

Proposition 2.9. *Soit $\phi : X \to S$ un revêtement fini étale connexe, et soit $G \subset \mathrm{Aut}(X|S)$ un groupe fini de S-automorphismes de X. Alors ϕ s'écrit comme composé de deux revêtements finis étales : $X \to G \setminus X \to S$.*

Définition 2.10. Soit $\phi : X \to S$ un revêtement fini étale connexe. Nous disons qu'il est *galoisien* si le groupe de S-automorphismes agit transitivement sur les fibres.

Théorème 2.11 (Correspondance de Galois pour les schémas)**.** *Soit $\phi : X \to S$ un revêtement fini étale galoisien. Si $Z \to S$ est un revêtement fini étale connexe* *s'insérant dans le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

alors $\pi : X \to Z$ *est un revêtement fini étale galoisien. De plus,* $Z \simeq H \setminus X$ *pour un certain sous-groupe* H *de* $G = \mathrm{Aut}(X|S)$.
Ainsi, on obtient une bijection entre les sous-groupes de G *et les revêtements intermédiaires* Z *comme précédemment. Le revêtement* $\psi : Z \to S$ *est galoisien si et seulement si* H *est un sous-groupe distingué de* G *et dans ce cas,* $\mathrm{Aut}(Z|S) \simeq G/H$.

Proposition 2.12 (Clôture galoisienne)**.** *Soit* $\phi : X \to S$ *un revêtement fini étale connexe. Il existe un morphisme* $\pi : P \to X$ *tel que* $\phi \circ \pi : P \to S$ *est un revêtement fini étale galoisien, et de plus, tout* S*-morphisme* $Q \to X$ *qui est un revêtement galoisien se factorise par* P.

3 Le groupe fondamental algébrique

3.1 Foncteur fibre

Définition 3.1. Pour un schéma S, notons $\mathrm{Fét}_S$ la catégorie dont les objets sont les revêtements finis étales sur S et les morphismes les morphismes de schéma sur S.

Définition 3.2. Soit S un schéma et $\overline{s} : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$ un point géométrique. Pour un objet $X \to S$ de $\mathrm{Fét}_S$, nous considérons la fibre géométrique $X \times_S \mathrm{Spec}\,\Omega$ sur $\overline{s}$, et la notons $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}(X)$.

Définition 3.3. Soit un morphisme $X \to Y$ dans $\mathrm{Fét}_S$. Il en résulte un morphisme de schémas $X \times_S \mathrm{Spec}\,\Omega \to Y \times_S \mathrm{Spec}\,\Omega$ et ainsi une application (ensembliste) $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}(X) \to \mathrm{Fib}_{\overline{s}}(Y)$. En conséquence, nous avons défini un foncteur $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}$, de $\mathrm{Fét}_S$ dans les ensembles. Nous l'appelons le *foncteur fibre* au point géométrique $\overline{s}$.

Définition 3.4. Soit F un foncteur entre deux catégories C_1 et C_2. Un automorphisme de F est un morphisme de foncteurs $F \to F$ qui a un inverse (des deux côtés). Avec la composition, $\mathrm{Aut}(F)$ est alors muni d'une structure de groupe. Nous l'appelons le *groupe d'automorphismes* de F. Remarquons que pour tout objet C de C_1 et tout automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(F)$, il y a par définition un morphisme $F(C) \to F(C)$ induit par ϕ. Pour un foncteur vers les ensembles, ceci donne une action de groupe de $\mathrm{Aut}(F)$ sur $F(C)$.

Définition 3.5. Soit S un schéma et $\overline{s} : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$ un point géométrique. Nous définissons le *groupe fondamental algébrique* $\pi_1(S, \overline{s})$ comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}$ sur $\mathrm{Fét}_S$.

Par ce qui précède, on a une action de groupe de $\pi_1(S,\overline{s})$ sur $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}(X)$ pour tout S-schéma fini étale X. En conséquence, $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}$ prend ses valeurs dans les $\pi_1(S,\overline{s})$-ensembles.

Théorème 3.6 (Théorème principale pour le groupe fondamental sur un schéma)**.** *Soit S un schéma connexe et $\overline{s}$: $\mathrm{Spec}\,\Omega \to S$ un point géométrique.*

1. *Le groupe $\pi_1(S,\overline{s})$ est profini, et son action sur $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}(X)$ est continue pour tout X dans $\mathrm{Fét}_S$.*
2. *Le foncteur $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}$ induit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Fét}_S$ et la catégorie des $\pi_1(S,\overline{s})$-ensembles (avec action continue). Les revêtements connexes correspondent aux $\pi_1(S,\overline{s})$-ensembles avec action transitive, et les revêtements galoisiens aux quotients finis de $\pi_1(S,\overline{s})$.*

Exemple. Le théorème précédent inclus le cas où $S = \mathrm{Spec}\,k$ avec k corps. Ici, X est un revêtement fini étale s'il est le spectre d'une k-algèbre finie étale. Pour un point géométrique $\overline{s}$, le foncteur fibre envoie un revêtement connexe $X = \mathrm{Spec}\,L$ sur l'ensemble sous-jacent à $\mathrm{Spec}\,L \otimes_k \Omega$, qui est un ensemble fini (L est étale sur k), indicé par les morphismes de k-algèbres $L \to \Omega$. L'image de chacun de ces morphismes se trouve dans la clôture séparable k_s de k dans Ω (via l'inclusion donnée par $\overline{s}$). Finalement, nous obtenons que $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}(X) \simeq \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$, pour tout $X = \mathrm{Spec}\,L$. Ainsi, $\pi_1(S,\overline{s}) \simeq \mathrm{Gal}(k_s|k)$.

Ici, le foncteur fibre est représentable par le foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,(k_s), X)$. Ce n'est pas le cas générale de le voir représentable. Par contre, nous allons voir qu'il est pro-représentable.

Définition 3.7. Soit C une catégorie et F un foncteur de C dans les ensembles. Nous disons que F est *pro-représentable* s'il existe un système projectif $P = (P_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ formés de couples (objets, morphismes) de C constituant un ensemble partiellement ordonné Λ, ainsi qu'un isomorphisme fonctoriel :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(P_\alpha, X) \simeq F(X),$$

pour tout objet X dans C.

Remarquons que dans la définitions précédente, la limite projective de Λ n'existe pas forcément dans C mais par contre, la limite inductive des $\mathrm{Hom}(P_\alpha, X)$ existe toujours dans les ensembles. Rappelons que la limite inductive d'un système inductif $(S_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ est donnée par l'union disjointe des ensembles S_α modulo la relation d'équivalence : $s_\alpha \sim s_\beta$ si $\phi_{\alpha\gamma}(s_\alpha) = \phi_{\alpha\gamma}(s_\beta)$ pour un certain $\gamma \geq \alpha, \beta$.

Proposition 3.8. *Sous les hypothèses du théorème, le foncteur fibre $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}$ est pro-représentable.*

Démonstration. Quelques idées sur la preuve. Λ est donné par tout les revêtements finis étales galoisiens $P_\alpha \to S$, et nous l'ordonnons avec $P_\alpha \leq P_\beta$ s'il existe un morphisme $P_\beta \to P_\alpha$ (de S-schémas). Il faut rendre ce système orienté et définir les $\phi_{\alpha\beta}$. Pour ça, on fixe pour tout P_α de Λ un élément p_α de $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}(P_\alpha)$. Lorsqu'il y a un morphisme $\phi : P_\alpha \to P_\beta$, nous construisons $\phi_{\alpha\beta}$ tel que $\mathrm{Fib}_{\overline{s}}(\phi_{\alpha\beta})(p_\beta) = p_\alpha$. □

Proposition 3.9. *Les automorphismes de groupe* $\mathrm{Aut}(P_\alpha)^{\mathrm{op}}$ *forment un système projectif dont la limite projective est isomorphe à* $\pi_1(S, \overline{s})$.

Proposition 3.10. *Soit S un schéma normal entier. Notons K_s une clôture séparable du corps de fonctions K de S, et notons K_S le composé de toutes les sous-extensions finies $L|K$ de K_s telles que la normalisation de S dans L est étale sur S. Alors $K_S|K$ est une extension galoisienne, et* $\mathrm{Gal}(K_S|K)$ *est canoniquement isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(S, \overline{s})$ pour le point géométrique* $\overline{s} : \mathrm{Spec}\,\overline{K} \to S$, *avec $\overline{K}$ la clôture algébrique de K contenant K_s.*

Proposition 3.11. *Soit S un schéma connexe. Soit* $\overline{s} : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$ *et* $\overline{s}' : \mathrm{Spec}\,\Omega' \to S$ *deux points géométriques. Alors il existe un isomorphisme entre les foncteurs fibres :* $\mathrm{Fib}_{\overline{s}} \simeq \mathrm{Fib}_{\overline{s}}$.

En conséquence, il existe un isomorphisme continu de groupes profinis : $\pi_1(S, \overline{s}) \simeq \pi_1(S, \overline{s}')$.

3.2 Applications

Définition 3.12. Un k-schéma X est dit *géométriquement intégral* si $X \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,\overline{k}$ est entier pour $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

Proposition 3.13. *Soit X un schéma quasi-compact, géométriquement entier sur un corps k. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit $k_s|k$ la clôture séparable correspondante. Notons* $\overline{X} = X \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,k_s$. *Soit $\overline{x}$ un point géométrique de $\overline{X}$ à valeur dans $\overline{k}$. Nous avons alors la suite exacte de groupes profinis suivante :*

$$1 \to \pi_1(\overline{X}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \to \mathrm{Gal}(k_s|k) \to 1.$$

Elle est induite par les applications $\overline{X} \to X$ et $X \to \mathrm{Spec}\,k$.

La démonstration repose en partie sur le lemme suivant :

Lemme 3.14. *Soit $\overline{Y} \to \overline{X}$ un revêtement étale fini. Il existe une extension finie L de k incluse dans k_s et un revêtement fini étale Y_L de* $X_L = X \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,L$ *tel que* $\overline{Y} \simeq Y_L \times_{\mathrm{Spec}\,L} \mathrm{Spec}\,k_s$. *De la même manière, les éléments de* $\mathrm{Aut}(\overline{Y}|\overline{X})$ *proviennent d'un* $\mathrm{Aut}(Y_L|X_L)$ *pour L assez grand.*

En conséquence de la proposition, $\mathrm{Gal}(k_s|k) \simeq \pi_1(X,\overline{x})/\pi_1(\overline{X},\overline{x})$. De plus, $\pi_1(X,\overline{x})$ agit sur son sous-groupe distingué $\pi_1(\overline{X},\overline{x})$ par conjugaison, d'où un morphisme $\pi_1(X,\overline{x}) \to \mathrm{Aut}(\pi_1(\overline{X},\overline{x}))$. Dans ce dernier, les automorphismes intérieurs s'identifient à $\pi_1(\overline{X},\overline{x})$. Nous en déduisons :

Proposition 3.15. *Nous avons une représentation extérieure :*

$$\rho_X \,:\, \mathrm{Gal}(k_S|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X},\overline{x})).$$

Proposition 3.16. *Soit S un schéma entier noethérien. Soit $\phi \,:\, X \to S$ un morphisme plat et propre, avec fibres géométriquement entières. Soit $\overline{s} : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$ un point géométrique de S tel que Ω est la clôture algébrique du corps résiduel de l'image de $\overline{s}$ dans S. Soit $\overline{x}$ un point géométrique de la fibre géométrique $\overline{X_{\overline{s}}}$. Alors la suite suivante est exacte :*

$$\pi_1(X_{\overline{s}},\overline{x}) \to \pi_1(X,\overline{x}) \to \pi_1(S,\overline{s}) \to 1.$$

Proposition 3.17. *Soit k un corps algébriquement clos et X, Y des schémas connexes et noethériens sur k. Supposons X propre et géométriquement entier. Soit $\overline{x} \,:\, \mathrm{Spec}\,k \to X$ et $\overline{y} \,:\, \mathrm{Spec}\,k \to Y$ des points géométriques avec valeur dans k. Le morphisme naturel suivant est un isomorphisme :*

$$\pi_1(X \times Y, (\overline{x},\overline{y})) \to \pi_1(X,\overline{x}) \times \pi_1(Y,\overline{y}).$$

Proposition 3.18. *Soit $k \subset K$ une extension de corps algébriquement clos et soit X un schéma sur k entier et propre. L'application $\pi_1(X_K,\overline{x}_K) \to \pi_1(X,\overline{x})$ induite par la projection $X_K \to X$ est un isomorphisme pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X.*

3.3 Engendrement

Proposition 3.19. *Soit X un schéma entier projectif lisse sur $\mathbb{C}$. Pour tout point géométrique $\overline{x}$, le groupe $\pi_1(X,\overline{x})$ est topologiquement finiment engendré.*

Théorème 3.20 (Comparaison GAGA)**.** *Soit X un schéma connexe de type fini sur $\mathbb{C}$. Le foncteur $(Y \to X) \mapsto (Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}})$ induit une équivalence de catégories entre les revêtements finis étales de X et les revêtements finis topologiques de X^{an}. En conséquence, pour tout $\mathbb{C}$-point $\overline{x} \,:\, \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to X$, ce foncteur induit un isomorphisme :*

$$\widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}},\overline{x}) \simeq \pi_1(X,\overline{x}),$$

avec dans le membre de gauche la complétion profinie du groupe fondamental topologique avec pour point de base $im(\overline{x})$.

Remarque. Lorsque X est projectif, c'est une conséquence du GAGA de Serre.

Exemple. Pour une courbe elliptique E sur $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}/\Lambda$), pour un point géométrique $\overline{x}$, on a $\pi_1^{\text{top}}(E, \overline{x}) = \mathbb{Z}^2$ et donc, sauf erreur, $\pi_1(E, \overline{x}) = \widehat{\mathbb{Z}}^2$.

Proposition 3.21. *Soit X un schéma séparé, entier, de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors, le morphisme de Frobenius engendre un sous-groupe dense dans $\pi_1^{\text{ab}}(X)$ (quotient de $\pi_1(X, \overline{x})$ par l'adhérence du sous-groupe engendré par les commutateurs).*

4 Catégories galoisiennes (SGA 1)

Soit C une catégorie et F un foncteur $C \to \text{Ens}$. Supposons les conditions suivantes satisfaites :

G 1 C a un objet final et les produits fibrés dans C existent (ceci est équivalent à l'existence des limites projectives finies).

G 2 Les sommes finies dans C existent (donc en particulier il y a un objet initial, jouant le rôle de l'ensemble vide), ainsi que le quotient d'un objet par un groupe fini d'automorphismes.

G 3 Soit $u : X \to Y$ un morphisme dans C. Alors u se factorise en un produit $X \to^{u'} Y' \to^{u''} Y$ avec u' épimorphisme strict et u'' monomorphisme, qui est un isomorphisme sur un sommande directe de Y.

G 4 Le foncteur F est exacte à gauche (*i.e.* transforme unité à droite en unité à droite et commute aux produits fibrés).

G 5 F commute aux sommes directes finies, transforme épimorphismes stricts en épimorphismes , et commute au passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes.

G 6 Soit $u : X \to Y$ un morphisme dans C tel que $F(u)$ soit un isomorphisme. Alors u est un isomorphisme.

C munie du foncteur F est alors appelée une *catégorie galoisienne*. Dans ce cas, il existe un groupe pro-fini G tel que l'on ait une équivalence de catégorie entre C et $G - \text{EnsF}$ (catégorie des ensembles finis avec action continue de G) qui envoie F sur le foncteur d'oubli $\widetilde{F}$, $G - \text{EnsF} \to \text{Ens}$.

Bien sûr, $(G - \text{EnsF}, \widetilde{F})$ est alors une catégorie galoisienne.

Il est alors clair que, avec les notations du début de la partie précédente, $(\text{Fét}_S, \text{Fib}_{\overline{s}})$ est une catégorie galoisienne