Feuille d'exercices numéro 1, VAR

Exercice 1
Dessiner les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

1) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad max(|x|, |y|) \leq 1\}$;
2) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad |x| + |y| < 1\}$;
3) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad x^2 + 4y^2 < 1\}$;
4) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad 0 \leq y < x^2\}$;
5) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad sin(y) \leq x < 2\}$;

Lesquels sont ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre ?, expliquer à l'aide d'un dessin.

Exercice 2
Montrer à partir de la définition que les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont des ouverts.

1) L'intervalle $]-1, 1[$;
2) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad |x| < 1 \text{ et } |y| < 2\}$;
3) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad (x-1)^2 + y^2 < 1\}$;
4) Le cube $]-1, 1[^3$;
5) $\{(x, y, z) \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^4 + z^6 < -5\}$;

Exercice 3
Lesquels des sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts :

1) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad |xy| \leq 2\}$;
2) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad y > x^2 \quad \text{et} \quad 0 \leq |x| < 2\}$;
3) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad y < x\}$;
4) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;
5) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Z}\}$;
6) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad x \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Q}\}$;
7) $\{(x, y) \quad \text{tel que} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad y = sin(1/x)\}$;

Déterminer l'intérieur, le complémentaire, l'adhérance, la frontière des sous ensembles précédent.

Exercice 4
Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ arbitraires.

1) Montrer que : $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$;
2) Trouver deux sous ensembles ouverts A et B tels que les quatre sous ensembles suivants soient tous distincts : $A \cap \overline{B}$; $B \cap \overline{A}$; $\overline{A \cap B}$; et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3) Soient D_1 et D_2 deux disques fermés disjoints. On pose : $A = \mathring{D}_1 \cup \delta(D_2)$ et $B = \mathring{D}_2$. Montrer que $A \cap \overline{B}$ n'est pas contenu dans $\overline{A \cap B}$. (δ désigne la frontière)

Exercice 5
Trouver un sous ensemble X de $\mathbb{R}$ tel que les sous ensembles suivants soient tous distincts : X, $\overline{X}$, $\mathring{X}$, $\overline{\mathring{X}}$, $\mathring{\overline{X}}$, $\overline{\mathring{\overline{X}}}$, $\mathring{\overline{\mathring{X}}}$.

Exercice 6
Montrer qu'une réunion d'ensembles ouverts reste un ouvert, est ce vrai pour une intersection ?

Exercice 7
Dans les énoncés des trois premiers exercices, déterminer les sous ensembles compacts.

Exercice 8
Montrer que l'intersection ou la réunion de deux sous ensembles compacts est un ensemble compact. Peut on remplacer " deux " par une famille infinie ?

Exercice 9
Soient X et Y deux parties de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$). Montrer que :

1) Si X ou Y est un ouvert alors la somme $X + Y$ est un ouvert.
2) Si X et Y sont des compacts alors la somme est un compact.
3) Si l'un des deux est compact et l'autre fermé alors la somme est fermée.
4) Si les deux sont fermés, la somme n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 10
Soient X un compact de $\mathbb{R}^m$ et Y un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que le produit $X \times Y$ est un compact de $\mathbb{R}^{m+n}$.

Exercice 11
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ contenu dans une boule ouverte de rayon r. Montrer que K est contenue dans une boule fermé de rayon strictement inférieur à r.

Exercice 12
On considère sur $\mathbb{R}^2$, que l'on peut généraliser à $\mathbb{R}^n$, les applications suivantes où a et b sont deux réels non nuls :

$$n_1(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ \ ; \ \ n_2(x,y) = \sqrt{(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2} \ \ ; \ \ n_3(x,y) = Sup(|x|,|y|) \ \ ;$$

Montrer que ces applications définissent des normes sur $\mathbb{R}^2$. Sont elles équivalentes ?

Exercice 13
On considère sur $\mathbb{R}^n$ des normes $n_1, n_2, ...n_p$ et $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p$ des réels positifs de somme 1. Montrer que l'application suivante :

$$n(\vec{x}) = n((x_1, x_2, ...x_n)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . n_i((x_1, x_2, ...x_n));$$

définie une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14
On considère sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire euclidien ainsi que la norme qui lui est associée. Montrer les identités suivantes :

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \frac{1}{4}(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2) \ ; \ \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \ ;$$

où $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 15
Soit E un espace vectoriel normé de dimension fini. Montrer l'identité suivante :

$$\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\| \leq 2\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \ ;$$

où $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux éléments non nuls de E.

Exercice 16
On muni $\mathbb{R}^2$ d'une distance d, soit $\tilde{d}$ l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ suivante : $\tilde{d}(\vec{x}, \vec{y}) = Inf\{1, d(\vec{x}, \vec{y})\}$. Démontrer que $\tilde{d}$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Décrire lorsque d est la distance euclidienne, les boules ouvertes et fermées pour la distance $\tilde{d}$.

Exercice 17
Soit H le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini comme suit : $H = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0\}$. On muni H de la distance euclidienne usuelle. Trouver deux boules $B(\vec{x}, r_1)$ et $B(\vec{y}, r_2)$ tel que : $B(\vec{x}, r_1) \subset B(\vec{y}, r_2)$ et $r_1 \geq r_2$. Peut on avoir une inégalité stricte ?

Exercice 18
Soit K le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini comme suit : $K = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1.x_2 = 0\}$. On définit sur $K \times K$ l'application d suivante : $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = Sup\{|(x_1 - y_1)|, |(x_2 - y_2)|\}$. Montrer que d est une distance sur K, trouver une boule $B(\vec{a}, r)$ telle que la boule fermée de centre $\vec{a}$ et de rayon r soit distincte de l'adhérance $\overline{B(\vec{a}, r)}$ de $B(\vec{a}, r)$.

Exercice 19
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la variable X. Soit $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + ...a_n.X^n$ un élément de $\mathbb{R}[X]$, on défini les trois applications suivantes :

$$N_1(P) = Sup_{i\in\mathbb{N}}(|a_i|) \ ; \ N_2(P) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \ ; \ N_3(P) = Sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$$

Démontrer que chacune de ces applications définissent une norme sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$. Sont elles équivalentes ?

Exercice 20
Soient F_1 et F_2 deux sous ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. On suppose que la réunion $F_1 \cup F_2$ et l'intersection $F_1 \cap F_2$ sont connexes par arcs. En déduire que F_1 et F_2 sont connexes par arcs.