Feuille d'exercices numéro 2 VAR

Exercice 1
Donner l'ensemble de définition et l'image de la fonction suivante : $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2
Dessiner le graphe de la fonction suivante : $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 3
Même question pour le fonction : $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 4
Tracer quelques courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \;\; ; \;\; f(x,y) = x^2 - y^2 \;\; ; \;\; f(x,y) = exp(xy) \;\; ;$$

Exercice 5
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;\; / \;\; (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \;\; ; \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \; . \end{cases}$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} (\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y \to 0} (\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)) = 0$.
2) Peut on en déduire que f admet une limite en l'origine ?

Exercice 6
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;\; / \;\; (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\dfrac{1}{x} \cos\dfrac{1}{y} & \text{si} \quad xy \neq 0 \;\; ; \\ 0 \quad \text{si} \quad xy = 0 \; . \end{cases}$$

1) Montrer que f admet une limite en l'origine.
2) Peut on en déduire que les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y_0)$ et $\lim\limits_{y \to 0} f(x_0, y)$ existent pour tout x_0 ou y_0 constants ?

Exercice 7
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;\; / \;\; (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \;\; ; \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = 0 \; . \end{cases}$$

Étudier la continuité de cette fonction.

Exercice 8
Comment faut il choisir le nombre réel α pour que la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x, y) \longrightarrow f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \ ; \\ \\ \alpha \quad \text{si} \quad (x, y) = 0 \ . \end{cases}$$

soit continue ?

Exercice 9
Montrer que la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x, y) \longrightarrow f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{y(y - x^2)} & \text{si} \quad y(y - x^2) \neq 0 \ ; \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad y(y - x^2) = 0 \ . \end{cases}$$

n'est pas continue en l'origine mais que ses restrictions à toute droite passant par $(0, 0)$ sont continues.

Exercice 10
Pour chacune des fonctions suivantes définies sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donner son domaine de définition et dire en le justifiant si elle admet ou non un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_1(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \ ; \ f_2(x, y) = \frac{y}{x^2} \exp(-\frac{|y|}{x^2}) \ ; \ f_3(x, y) = (x - 5y) \sin \frac{x}{x^2 - y^2} \ .$$

Exercice 11
On considère les fonctions définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x, y) = \text{Sup}(\frac{x}{2 + |y|}, \frac{y}{1 + |x|}) \ ; \ g(x, y) = \text{Inf}(\frac{x^4 y}{|x| + 4y^2}, \frac{xy^4}{|y| + 4x^2}) \ .$$

Sont elles continues ?

Exercice 12
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles continue, on considère la fonction ϕ définie sur $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ /y \neq 0\}$ par : $\phi(x, y) = (x + y)f(x/y)$. Vérifier que ϕ est une fonction continue sur X, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que ϕ puisse être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 13
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles continument dérivable c'est à dire de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la fonction g définie comme suit :

$$g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq y\} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x, y) \longrightarrow g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \ ;$$

Étudier la continuité de g au voisinage de la diagonale, montrer que la condition de classe $\mathcal{C}^1$ de f est nécessaire.

Exercice 14
On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles de classes $\mathcal{C}^1$. Soit la fonction ϕ définie comme suit :

$$\phi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ h(x) \neq h(y)\} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow \phi(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \ ;$$

Montrer que si g' ne s'annule pas alors ϕ admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15
Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles continue. Montrer que l'image $f(K)$ est un compact.

Exercice 16
Sous les mêmes hypothéses que l'exercice précédent, montrer que f atteint ses minimums et maximums. Construire des contre-exemples montrant que l'affirmation précédente est fausse si : K est fermé mais non borné, K est borné mais non fermé, f est non continue.

Exercice 17
Soient E un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ connexe par arc et f une fonction définie sur E à valeurs réelles continue et ne s'annulant pas. Montrer que pour deux points quelconques a et b de E on a nécessairement : $f(a)f(b) > 0$.

Exercice 18
Sous les mêmes hypothéses que l'exercice précédent mais sans supposer que la fonction f ne s'annule pas. Montrer que s'il existe deux points a_0 et b_0 de E tel que $f(a_0)f(b_0) \leq 0$ alors la fonction f s'annule au moins une fois sur E.