VAR FEUILLE 3 (2015)

Ex 1

1. $f(x,y) = \ln(xy)$ est définie et continue quand $xy \in \mathbb{R}^{+*} = \mathcal{D}_{\ln}$

comme composée.

Ainsi $\mathcal{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}\} = \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*} \cup \mathbb{R}^{-*}\times\mathbb{R}^{*}$

⚠ $\ln(xy) \neq \ln(x) + \ln(y)$ en effet si $\begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}$ $\ln(xy) = \ln(-x)+\ln(-y)$

À y fixé $\neq 0$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est définie sur $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} \text{ si } y>0 \\ \mathbb{R}^{-*} \text{ si } y<0 \end{pmatrix}$

et deux fois dérivable sur ce domaine

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{x^2}$$

Rq $f(x,y) = f(y,x)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$

2. f polynôme donc définie sur $\mathbb{R}^2$ est dérivable à volonté

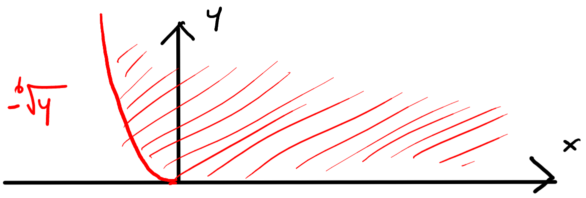
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 9x^2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3x^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

3. $f(x,y) = \ln(x^3+\sqrt{y})$ est définie quand $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^3+\sqrt{y} > 0 \end{cases}$

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0,\ x^3 > -\sqrt{y}\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0,\ x > -\sqrt[6]{y}\}$$

$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^3$ bijection croissante



[...] ↑ JUSTIFICATION DÉRIVABILITÉ (⚠ $y=0$ pas dérivable)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3+\sqrt{y}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-3x^4+6x\sqrt{y}}{(x^3+\sqrt{y})^2}$$

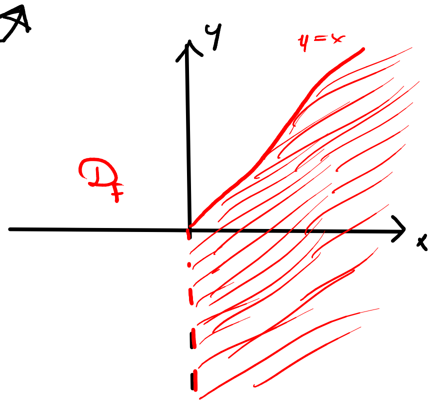
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^3+\sqrt{y}} \times \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y+x^3\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y(x^3+\sqrt{y})^2}\times\left(1+\frac{x^3}{2\sqrt{y}}\right)$$

4. $f(x,y) = \sqrt{x-y} + 3x^y$ définie quand $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Rappel : x,y réels x^y = notation pour $\exp(y \times \ln(x))$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } x \geq y\}$$



dérivabilité [...] (⚠ $y = x$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} + 3\exp(y\ln(x)) \times \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{2(x-y)} + 3\exp(y\ln(x))\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} + 3\exp(y\ln(x)) \cdot \ln(x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{2(x-y)} + 3\exp(y\ln x)(\ln(x))^2$$

Ex 2

f est linéaire donc admet des dérivées partielles à tout ordre sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 7$$

$$\mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = (5,7)$$

$$D_{(x_0,y_0)}f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \binom{h}{k} \longmapsto \mathrm{Jac}(F)_{(x_0,y_0)}\binom{h}{k} = 5h + 7k \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad D_{(x_0,y_0)}f = f$$

AUTRE MÉTHODE

On a
$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= 5(x_0+h) + 7(y_0+k) \\ &= 5x_0 + 7y_0 + 5h + 7k \\ &= f(x_0,y_0) + f(h,k) \end{aligned}$$

or
$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + D_{(x_0,y_0)}f\,(h,k) + \|(h,k)\|\,\theta(h,k)$$

par déf de la différentielle $\qquad \theta(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0$

en identifiant, puisque f est linéaire

on a bien $D_{(x_0,y_0)}f \cdot (h,k) = f(h,k)$

Ex 3

f polynôme [...]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10xy$$

$$\mathrm{Jac}(f)_{(x_0,y_0)} = \left(2x_0 + 5y_0^2 \; , \; 10x_0y_0 \right)$$

$$D_{(x_0,y_0)} f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{Jac}(f)_{(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (2x_0+5y_0^2)h + 10x_0y_0k \end{array} \right)$$

AUTRE MÉTHODE

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= (x_0+h)^2 + 5(x_0+h)(y_0+k)^2 \\ &= x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 5\left(x_0y_0^2 + 2x_0y_0k + hy_0^2 + x_0k^2 + 2y_0hk + hk^2\right) \\ &= \underbrace{x_0^2 + 5x_0y_0^2}_{} + \underbrace{2x_0h + 10x_0y_0k + 5y_0^2h}_{} + \underbrace{x_0k^2 + 2y_0hk + hk^2 + h^2}_{} \\ &= f(x_0,y_0) + \underbrace{(2x_0+5y_0^2)h + 10x_0y_0k}_{\text{linéaire}} + \varepsilon_{h,k} \end{aligned}$$

On vérifie $\dfrac{\varepsilon_{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0$ donc $\varepsilon_{h,k} = \|(h,k)\|\, \theta(h,k)$

avec $\theta(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0$

Donc en identifiant $D_{(x_0,y_0)} f \cdot (h,k) = (2x_0+5y_0^2)h + 10x_0y_0k$.