Feuille d'exercices numéro 3 VAR

Exercice 1
Donner l'ensemble de définition et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 des fonctions à deux variables suivantes :

$$f(x,y)=\ln xy \ ; \ f(x,y)=xy^2+3x^3y-4 \ ; \ f(x,y)=\ln(x^3+\sqrt{y}) \ ; \ f(x,y)=\sqrt{x-y}+3x^y \ ;$$

Exercice 2
Soit l'application $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow f(x,y)=5x+7y$. Calculer la matrice jacobienne de f, en déduire la différentielle de f. Essayer de calculer directement la différentielle de f.

Exercice 3
Même question que l'exercice précédent pour la fonction : $f(x,y)=x^2+5xy^2$.

Exercice 4
Soit l'application $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \ (x,y) \longrightarrow f(x,y)=(2x^2+y^2, x^2y)$. Calculer la matrice jacobienne de f et déterminer les points où cette dernière est une matrice inversible. Donner l'image du vecteur (a, b) par $Df(1,2)$.

Exercice 5
Même question que l'exercice précédent pour la fonction : $f(x,y)=(xy, \exp xy)$.

Exercice 6
On considère l'application : $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (r,\phi,\theta) \longrightarrow f(r,\phi,\theta)=(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$. Calculer la matrice jacobienne de f et déterminer à quelles conditions elle est inversible.

Exercice 7
Soient $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la variable X et A_0 un élément fixé. On considère l'application suivante : $\Omega:\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \ / \ P \longrightarrow \Omega(P)=A_0.P$. Calculer l'image de H_0 par la différentielle de Ω au point Q_0. Préciser ce que sont les éléments H_0 et Q_0.

Exercice 8
Même question que l'exercice précédent pour l'expression suivante de Ω : $\Omega(P)=P^2+5P+A_0$.

Exercice 9
On note E l'espace vectoriel des matrices carrées à n ligne et n colonnes. Soit l'application Ω suivante : $\Omega:E \longrightarrow E \ / \ M \longrightarrow \Omega(M)=M^3+M$. Calculer la différentielle de Ω.

Exercice 10
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction g par l'expression : $g(x,y)=f(x^2-y^3, x^5y+2y^2)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 11
Soient f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et g celle définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $g(u,v) = (u+5v, 3u-2v)$. Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ ainsi que sa différentielle. Calculer les matrices jacobines de f et g, puis retrouver le résultat précédent.

Exercice 12
Même question que l'exercice précédent mais avec les données suivantes : $f(x,y,z) = 2x^3y - 2y\exp z + x - 2y^2$ et $g(t) = (t, \exp(-2t), 3t)$.

Execice 13
Même question que l'exercice précédent mais avec les données suivantes : $f(x,y,z) = x^2 - xy + 3z^2$ et $g(u,v) = (u^2 - v^2, (u+1)v, u + v^3)$.

Exercice 14
Soit une certaine fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5$. Considérrons la fonction g suivante : $g(t) = f(2t + t^2 + \exp t, \sin t + \cos t)$. Calculer $g'(0)$.

Exercice 15
Soient p un nombre réel et f la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} (x^2+2y^2)^p \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \ ; \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = 0 \ . \end{cases}$$

1) À quelle condition f est elle continue ?
2) Et de classe $\mathcal{C}^1$? (on ne demande pas différentiable)

Exercice 16
Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) on considère la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = 0 \ . \end{cases}$$

Étudier les conditions pour que f soit continue, différentiable, de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 17
On considère la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 y - x y^5}{x^4 + y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ \\ \alpha \quad \text{si} \quad (x,y) = 0 \ . \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue, est elle différentiable ?

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre deux en l'origine, que peut on en déduire ?

Exercice 18

Même question que l'exercice précédents mais avec la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\frac{\pi}{2})(\frac{x+y}{x-y}) \quad \text{si} \quad y \neq x \ ; \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad y = x \ . \end{cases}$$

Exercice 19

Soit une fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction F suivante : $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Montrer l'égalité :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f"(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f'(\sqrt{x^2+y^2})$$

Exercice 20

Soit une fonction f de deux variables réelles à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction F suivante : $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (r,\theta) \longrightarrow F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

Exercice 21

On considère la fonction ψ définie comme suit : $\psi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \ / \ (x,y) \longrightarrow \psi(x,y) = (u,v) = (xy, y/x)$. Montrer que cette application est un bijection. Soit g une fonction à deux variables de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $f(x,y) = g \circ \psi(x,y)$. Calculer les dérivées premières et secondes de f en fonction de celles de g. On se propose de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Transformer cette équation en une équation en fonction de g, la résoudre puis retrouver les solutions en f.