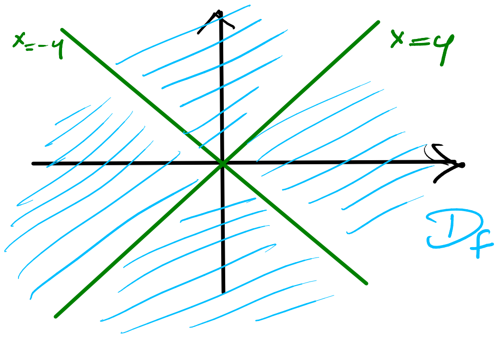
VAR FEUILLE 2.

Ex 1 $f(x,y)$ est une fraction rationnelle en 2 variables

elle est donc définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus Z$

où Z est l'ensemble d'annulation de son dénominateur

$$Z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\pm y\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-y\}$$



Remarque : D_f ouvert.

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

et $z\in Im(f)$ ssi $\exists (x,y)\in D_f \,/\, z = \frac{x}{x^2-y^2}$

ssi $\exists (x,y)\in D_f$ $zx^2 - x - zy^2 = 0$

1er cas : $z=0$ alors $(x,y)=(0,\pi/4)$ convient

2e cas : $z\neq 0$

* cherchons avec $y=0$ $(x\neq 0)$ car $(x,y)\in D_f = \mathbb{R}^2\setminus Z$

$zx^2 - x = 0$ donc $(zx-1)x=0$

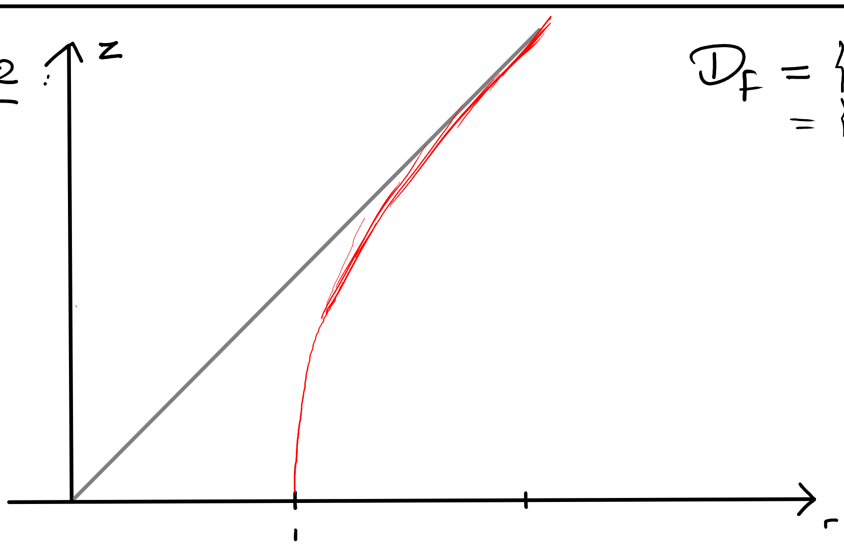
donc $x = 1/z$ $(1/z, 0)\in D_f$

on vérifie $f(1/z,0) = \frac{1/z}{(1/z)^2-0} = \frac{1/z}{(1/z)^2} = \frac{z^2}{z} = z$ ok.

donc $z\in Im(f)$

FINALEMENT $Im(f) = \mathbb{R}$.

Ex 2 :



$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 \in \text{Domaine}(\sqrt{\ })\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1\}$$

On passe en polaire :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad x^2+y^2=r^2$$

$r>0$, $\theta\in]-\pi,\pi]$

$$f(x,y) = \sqrt{r^2-1}$$
$$D_{f_{pol}} = \{(r,\theta) \mid r\geq 1\}$$

Ex 3 On remarque $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$

On pose $\begin{cases} X = (x-2) \\ Y = (y-3) \end{cases}$ $f(x,y) = X^2 + Y^2$

donc Γ_f = paraboloïde de révolution d'axe Oz centrée au point $(2,3,0)$

"RAPPEL" Courbe de niveau

Def : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ on appelle courbe de niveau $c \in \mathbb{R}$ de f l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$

Ex 4 1) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Tracer $f = 0$, $f = 1$, $f = -1$, $f = 5$