VAR Feuille 4 CORRECTION

Ex 1

Supposons que f n'atteigne pas de minimum global
Montrons que f atteint un max global.

Soit $M = \sup_{\mathbb{R}^+} f$

* $M < \infty$ en effet sinon $\exists (u_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^+$
telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Si $(u_n)_n$ bornée alors $\exists \varphi$ extraction telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow u_\infty \in \mathbb{R}^+$
par continuité $f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(u_\infty)$
donc $f(u_\infty) = +\infty$ impossible car f définie en u_∞.

Sinon $\exists \varphi$ extract° tq $u_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$
donc $f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim_{+\infty} f = f(0)$ CONTRAD.

Donc $M < \infty$

* Si $M = f(0)$ alors ok.
Sinon $M > f(0)$ Soit $\varepsilon > 0$ tel que $M > f(0) + \varepsilon > f(0)$
comme $\lim_{+\infty} f = f(0)$, $\exists L > 0 / \forall x > L$ $\underbrace{|f(x) - f(0)| < \varepsilon}$
donc $f(x) < f(0) + \varepsilon$

* BILAN $M = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} f(x)$ mais ce sup ne peut être obtenu pour $x \in [L, +\infty[$
$= \sup_{x\in[0,L]} f(x)$ Or f continue sur $[0,L]$ et $[0,L]$ compact.

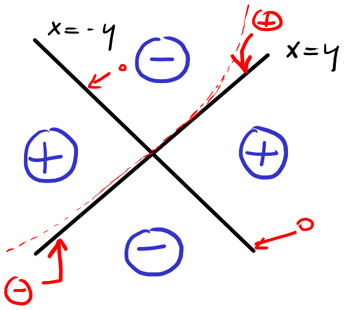
donc $\exists t \in [0,L] / f(t) = M$ CQFD.

Ex 2

Ex 3

$f = x^2 - y^2 + x^3 + y^3$

* On étudie le signe de $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$



Si $x^2 - y^2 \neq 0$ alors pour (x, y) assez proche de 0
f est du signe de $x^2 - y^2$

Si $x^2 - y^2 = 0$ alors f est du signe de $x^3 + y^3$

* 1er cas $x = y$ ——————— $2x^3$
* 2e cas $x = -y$ $f = 0$