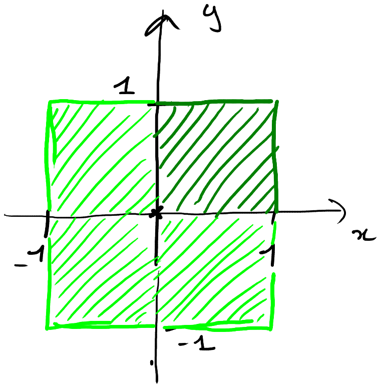
FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 1

1.



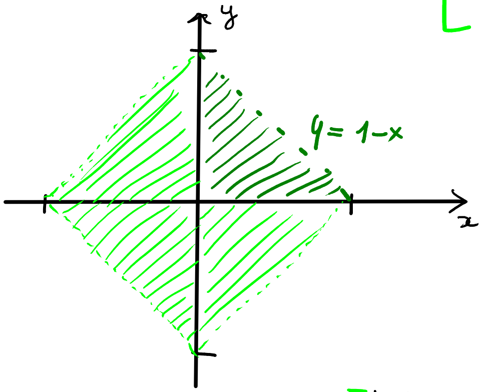
Supposons $x \geq 0, y \geq 0$

on doit donc tracer

$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

L'ensemble $\{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) \leq 1\}$
est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$ symétrie d'axe Oy
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$ symétrie d'axe Ox
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$ symétrie de centre O

2.



Supposons $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\}$ $|x|+|y| < 1$

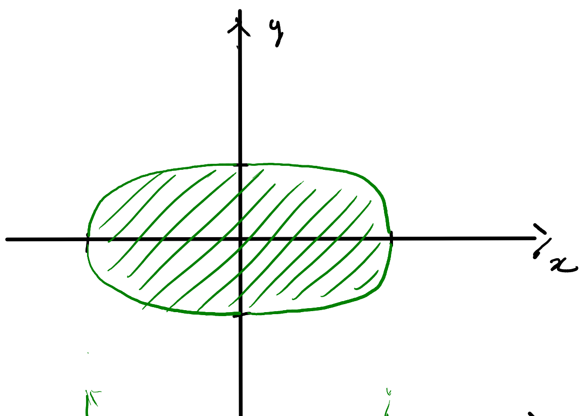
$\iff x+y < 1$

$\iff y < 1-x$

→ décris l'ensemble strictement sous la droite $y = 1-x$ et contenu dans le quart de plan $x,y \geq 0$

L'ensemble est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$
[...]

3.



$x^2+4y^2<1 \iff x^2+(2y)^2<1$

Intérieur de l'ellipse $x^2+(2y)^2=1$

En raisonnant par quadrant
Si $x \geq 0, y \geq 0$

$4y^2 < 1-x^2$

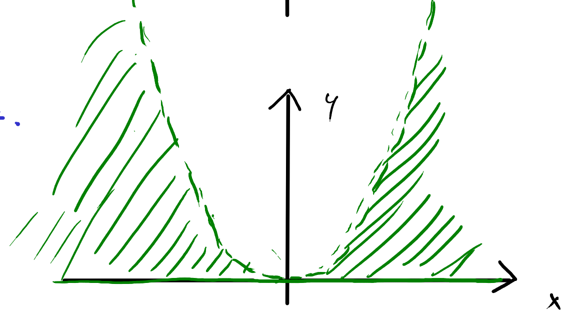
$y^2 < \frac{1}{4}(1-x^2)$

on utilise que $y \geq 0$

$0 \leq y < \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

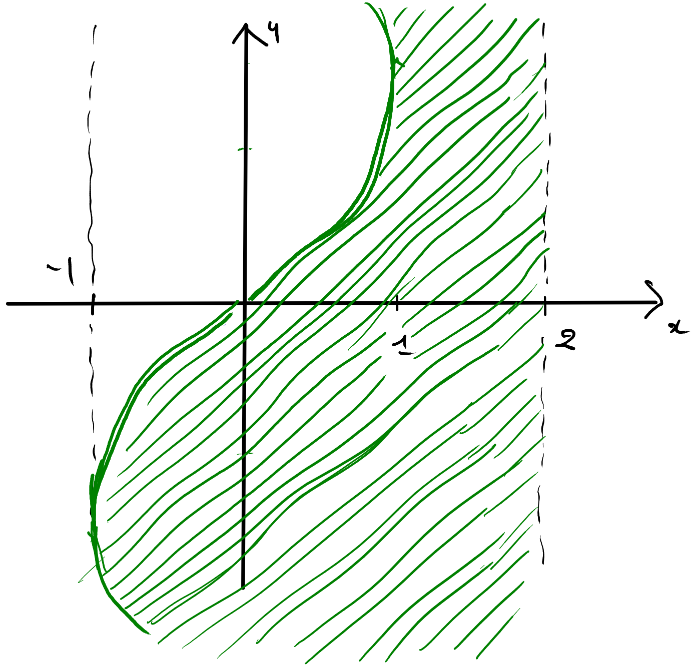
donc partie du plan strictement sous la courbe $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ $\begin{matrix} 1 \geq x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$

4.



On trace $y = x^2$ et $y=0$
→ Partie du plan entre les 2 courbes

5.



On a $\sin(y) \leq x < 2$

or $\sin(y) \geq -1$

donc $x \in [-1, 2[$

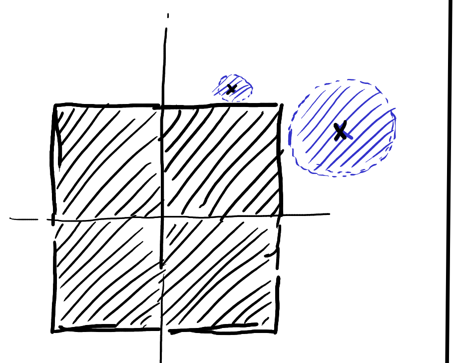
On trace $x = \sin(y)$

Partie du plan à droite de la courbe

$x \geq \sin(y)$

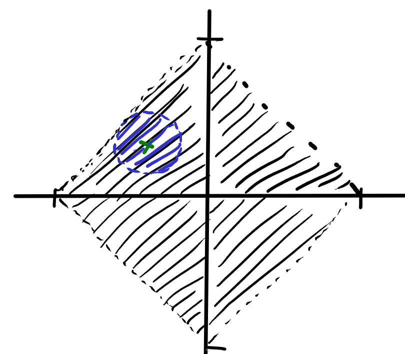
Ouvert / Fermé / Autre ?

1. Fermé $\longrightarrow$
2. Ouvert
3. Ouvert
4. Ni l'un, ni l'autre
5. Ni l'un, ni l'autre



$x \in \mathbb{R}^2 \setminus X$

$B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus X$ où $r = \min(1-|x|, 1-|y|)$, $r > 0$



$x \in X$

$B(x, r) \subseteq X$ où $r = (\dots)$

FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 2

1. $X =]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$

Montrons que $\forall x \in X \ \exists r>0 \ / \ B_{\mathbb{R}}(x,r) \subseteq X$ (déf X ouvert)

Soit $x \in X$, Montrons que $\exists r>0 \ / \ B(x,r) \subseteq X$

Or ds $\mathbb{R}$ $B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r \} =]x-r, x+r[$

donc Montrons que $\exists r>0 \ / \ ]x-r,x+r[\subseteq]-1,1[= X$

Or l'inclusion est vrai si $-1 < x-r$ et $x+r<1$

Montrons donc que $\exists r>0 \ / \ \begin{cases} -1 < x-r \\ x+r < 1 \end{cases}$

Un tel r doit donc vérifier $\begin{cases} r>0 \\ r < x+1 \\ r < 1-x \end{cases}$

Prenons $r = \min\{x+1, 1-x\}$, comme $x \in]-1,1[$
$x+1>0$ et $1-x>0$
donc $r>0$

Ainsi $\exists r>0 \ / \ ]x-r,x+r[\subseteq X$

Et ce quelque soit $x \in X$

donc $\forall x \in X \ \exists r>0 \ / \ B(x,r) \subseteq X$ c'est-à-dire X ouvert !

Ex 2. 2. Soit $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1 \text{ et } |y|<2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Montrons que X est ouvert dans $\mathbb{R}^2$

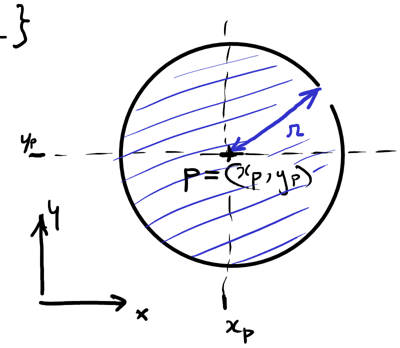
Montrons que $\forall p\in X,\ \exists r>0 \ /\ B(p,r)\subseteq X$ où $B(p,r)$ boule de centre p et rayon r de $\mathbb{R}^2$

Soit $p\in X$, Montrons $\exists r>0 \ /\ B(p,r)\subseteq X$ on notera $p=(x_p,y_p)$

On sait que $|x_p|<1$ et $|y_p|<2$.

De plus :

$$B(p,r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r\}$$



On veut donc $r>0$ tel que

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r\} \subseteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|<2\}$$

ANALYSE

On veut donc $r>0$ tel que

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $\begin{cases}|x|<1\\ |y|<2\end{cases}$ $\quad *$

Remarque : $(x-x_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$ car $(y-y_p)^2\geq 0$

donc $|x-x_p|<r$ donc $|x|-|x_p| \overset{IT}{\leq} |x-x_p| < r$ donc $|x| < r+|x_p|$

de même : $(y-y_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$

donc $|y-y_p|<r$ donc $|y|-|y_p| \underset{IT}{\leq} |y-y_p|<r$ donc $|y|<r+|y_p|$

Si on veut que r satisfasse $*$, il suffit d'imposer $\begin{cases} r+|x_p|\leq 1\\ r+|y_p|\leq 2\end{cases}$

$\boxed{\text{Prenons donc } r=\min(1-|x_p|,\ 2-|y_p|)}$

On vérifie que $r>0$ en effet $\left.\begin{array}{l}|x_p|<1 \text{ donc } 1-|x_p|>0\\ |y_p|<2 \text{ donc } 2-|y_p|>0\end{array}\right\}$ le min de deux valeurs >0 est >0.

Reste à montrer qu'avec ce r on a bien $B(p,r)\subseteq X$.

Montrons donc que $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $\begin{array}{l}|x|<1\\ |y|<2\end{array}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, supposons $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$,

Montrons que $|x|<1$ et $|y|<2$

SYNTHÈSE

Or $|x| = |x-x_p+x_p| \underset{IT}{\leq} \underbrace{|x-x_p|} + |x_p|$

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2} + |x_p|$

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} + |x_p|$ car $\sqrt{t}$ est une fonct° croissante et $(y-y_p)^2 \geq 0$

$< r + |x_p|$ par hypothèse.

$< \min(1-|x_p|, 2-|y_p|) + |x_p|$

$< 1-|x_p| + |x_p| = 1$

Ainsi
$|x|<1$

On montre de même que $|y|<2$ $\left(|y| \leq |y-y_p| + |y_p| \ [\ldots] < r + |y_p| \leq 2-|y_p|+|y_p| = 2 \right)$

BILAN (x,y) vérifie $|x|<1$, $|y|<2$ donc $(x,y)\in X$

Et ceci est vrai quelquesoit $(x,y)\in \mathbb{R}^2$ dès que $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r$

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r$ alors $(x,y)\in X$

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $(x,y)\in B(p,r)$ alors $(x,y)\in X$

Donc $B(p,r) \subseteq X$ pour le $r>0$ qu'on a trouvé

On a bien montré $\exists r>0$ tel que $B(p,r)\subseteq X$

Et ceci est vrai pour tout $p\in X$

On a finalement montré que $\forall p\in X \ \exists r>0$ tel que $B(p,r)\subseteq X$

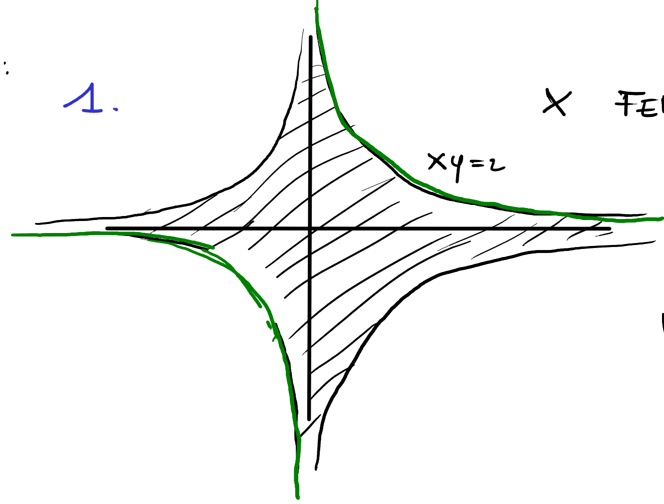
c'est-à-dire X ouvert !

Feuille 1

VAR 2015

Ex 3 :

1.



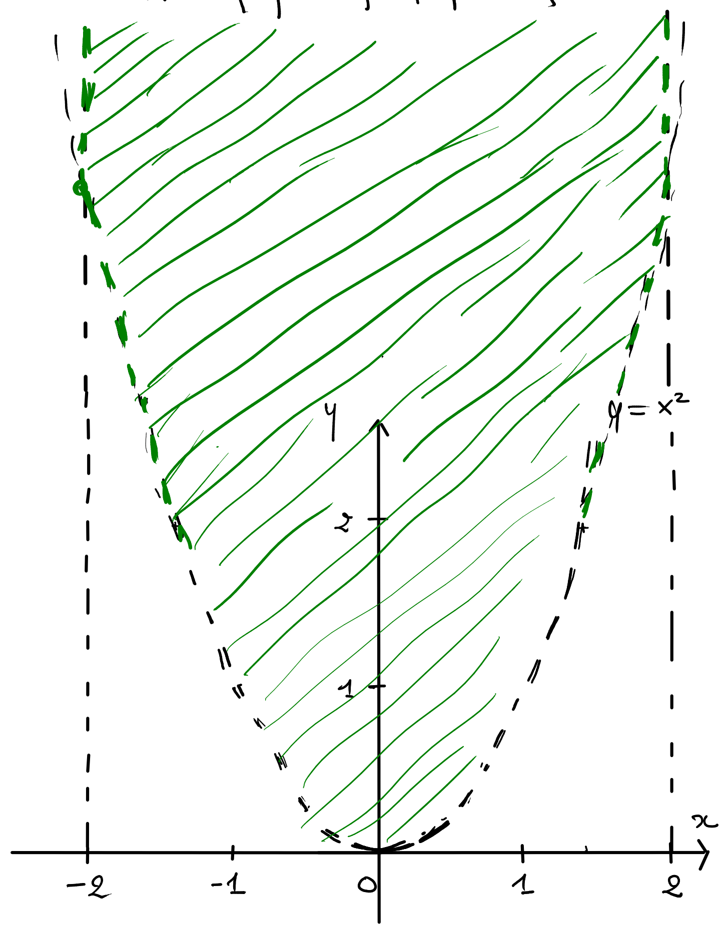
X FERMÉ (NON OUVERT)

$\mathring{X} = \{|xy| < 2\}$

$\partial X = \{xy = 2\} \cup \{xy = -2\}$

2. $y > x^2 \Rightarrow y \geq 0$

$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$



$\mathring{X} = X$ X est ouvert.

Rq $(0,0) \notin X$

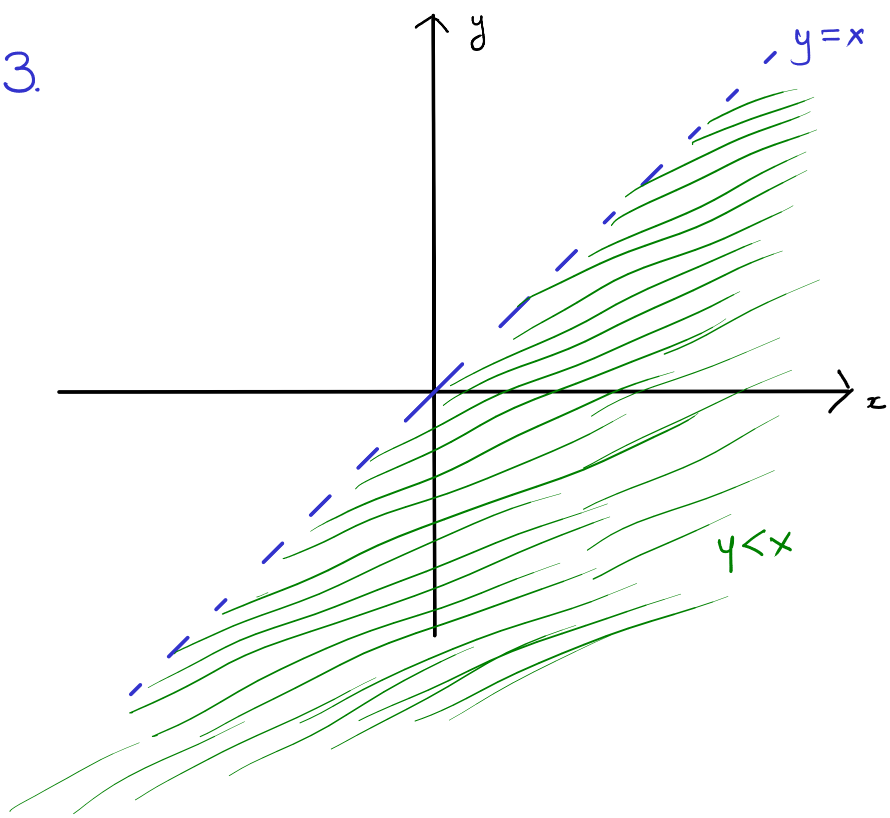
$\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, |x| \leq 2\}$

$\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, |x| \leq 2\}$

$\cup \{(2,y) \mid y \geq 4\}$

$\cup \{(-2,y) \mid y \geq 4\}$

3.



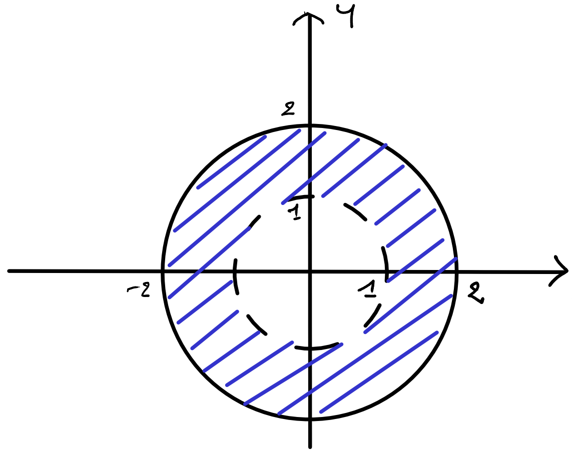
$X = \{(x,y) \mid y < x\}$ est OUVERT ds $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ $\mathring{X} = X$

$\rightarrow$ $\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$

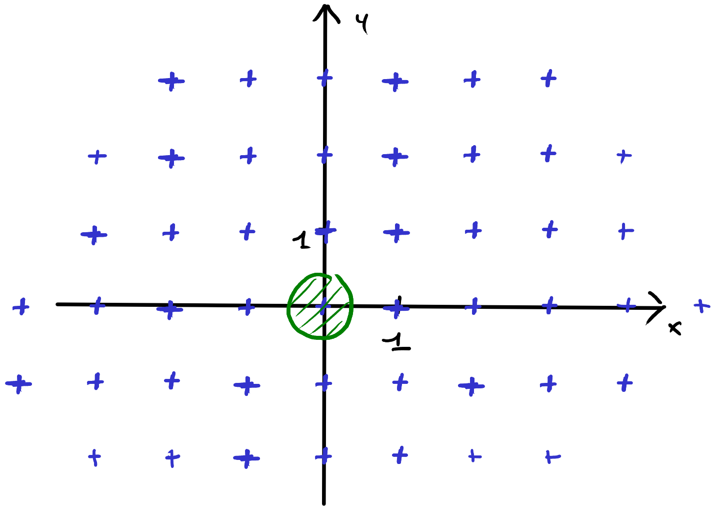
$\rightarrow$ $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

Ex3. 4. $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$



- Ni ouvert ni fermé
- ADHERENCE $\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$
- INTERIEUR $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$
- FRONTIERE $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$



- Ensemble des points du plan à coord. entières.
- OUVERT?

$(0,0) \in X$ soit $\varepsilon > 0$

$B((0,0),\varepsilon)$ contient tj un point à coord non entières

donc $B((0,0),\varepsilon) \not\subseteq X$

donc X n'est pas ouvert!

- $Y = \mathbb{R}^2 \setminus X$ = ensemble des pts du plan dont les 2 coord. ne sont pas entières.

X FERMÉ $\Leftrightarrow$ Y OUVERT

or si $(x,y) \in Y$ alors OPS x pas entier $n < x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

pour $r > 0$ assez petit les points de $B((x,y),r)$ de la forme (x',y') auront $n < x' < n+1$

donc $B((x,y),r) \subseteq Y$ $\longrightarrow$ donc Y ouvert.

- $\overline{X} = X$ car X fermé
- $\mathring{X}$ = plus petit ouvert $\subseteq X$

or $(0,0) \notin \mathring{X}$ par le raisonnement précédent

le même raisonnement vaut pour $(n,m) \in X$

donc $\mathring{X} = \emptyset$

autre point de vue $\mathring{X} \subseteq X$ ouvert

or X pas ouvert donc $\mathring{X} \subsetneq X$

donc on a enlevé un pt de X au moins.

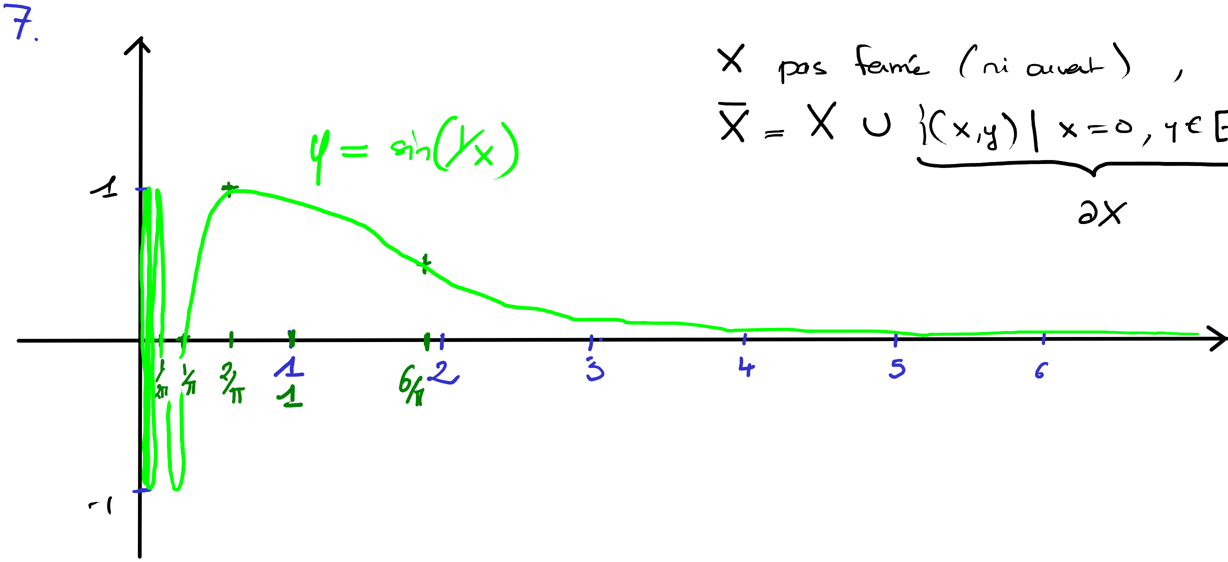
mais tous les pts de X st les mêmes donc on enlève tous les pts de X

- $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X} = X$

6. Pas de dessin.

$\overline{X} = \mathbb{R}^2$, $\mathring{X} = \emptyset$, X ni ouvert ni fermé, $\partial X = \mathbb{R}^2$.

7.



X pas fermé (ni ouvert), $\mathring{X} = \emptyset$

$\overline{X} = X \cup \underbrace{\{(x,y) \mid x=0,\ y \in [-1,1]\}}_{\partial X}$

FEUILLE 1 VAR 2015

Ex 15

$x, y \in E \setminus \{\vec{0}\}$

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \underset{\text{I.T.}}{\leq} \underbrace{\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|x\|}\right\|}_{\text{homogénéité}}+\left\|\frac{y}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

$$=\frac{1}{\|x\|}\|x-y\|+\underbrace{\left\|\left(\frac{1}{\|x\|}-\frac{1}{\|y\|}\right)y\right\|}_{\text{homogénéité}}$$

$$=\frac{1}{\|x\|}\|x-y\|+\left|\frac{1}{\|x\|}-\frac{1}{\|y\|}\right|\cdot\|y\|$$

$$=\frac{1}{\|x\|}\|x-y\|+\frac{1}{\|x\|}\underbrace{\big|\|y\|-\|x\|\big|}$$

$$\underset{\text{IT2}}{\leq} \|y-x\| = \|x-y\|$$

$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\|$
$\leq \|x-z\|+\|z-y\|$

$\|a+b\| \leq \|a\|+\|b\|$

BILAN $\quad \ldots \leq \frac{2}{\|x\|}\|x-y\|$

Ex 16

$\tilde{d}(x,y) = \operatorname{Inf}(1, d(x,y))$

* $\tilde{d}$ est symétrique : $\tilde{d}(y,x) = \operatorname{Inf}(1, d(y,x)) \overset{\text{d distance donc symétrique}}{=} \operatorname{Inf}(1, d(x,y)) = \tilde{d}(x,y)$
* $\tilde{d}(x,y) = \operatorname{Inf}(1, d(x,y)) \geq 0$ car d est positive
* $\tilde{d}$ satisfait l'inég. triangulaire.

on effet soient $x,y,z \in \mathbb{R}^2$

$\tilde{d}(x,z) = \inf(1, d(x,z))$ or $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ car d est une distance.

$\leq \inf(1, d(x,y)+d(y,z))$

$\leq \inf(1, d(x,y)) + \inf(1, d(y,z))$

$\leq \tilde{d}(x,y)+\tilde{d}(y,z)$

* Enfin si $\tilde{d}(x,y) = 0$

alors $\inf(1, d(x,y)) = 0$ donc

$d(x,y) = 0$

or d distance donc $x = y$

lemme $\left[\begin{array}{l}\inf(a,b+c) \leq \inf(a,b)+\inf(a,c) \\ \text{si } a,b,c \text{ sont } \geq 0\end{array}\right.$

Il suffit de montrer que

* $\inf(a,b+c) - \inf(a,b) \leq a$ (évident)
* $\inf(a,b+c) - \inf(a,b) \leq c$

$\inf(a,b+c) = \inf(a-c,b)+c$

$\inf(a-c,b) - \inf(a,b) \leq 0$