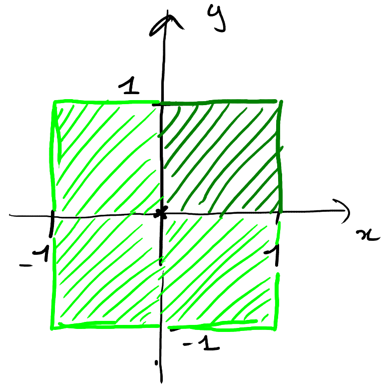
FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 1

1.



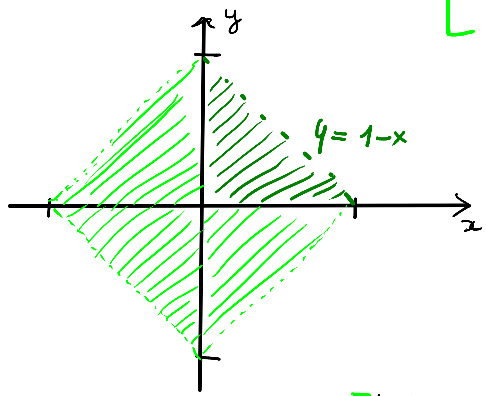
Supposons $x \geq 0, y \geq 0$

on doit donc tracer

$0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1$

L'ensemble $\{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) \leq 1\}$
est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$ symétrie d'axe Oy
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$ symétrie d'axe Ox
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$ symétrie de centre O

2.



Supposons $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ $|x| + |y| < 1$

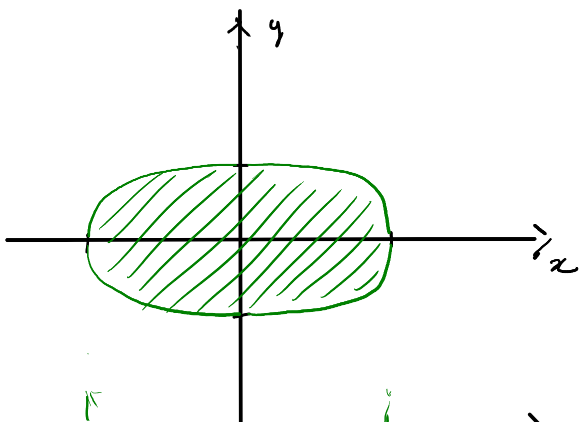
$\iff x + y < 1$

$\iff y < 1 - x$

→ décris l'ensemble strictement sous la droite $y = 1 - x$ et contenu dans le quart du plan $x, y \geq 0$

L'ensemble est stable par
$(x,y) \longmapsto (-x,y)$
$(x,y) \longmapsto (x,-y)$ [...]
$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$

3.



$x^2 + 4y^2 < 1 \iff x^2 + (2y)^2 < 1$

Intérieur de l'ellipse $x^2 + (2y)^2 = 1$

En raisonnant par quadrant

Si $x \geq 0, y \geq 0$ $\quad 4y^2 < 1 - x^2$

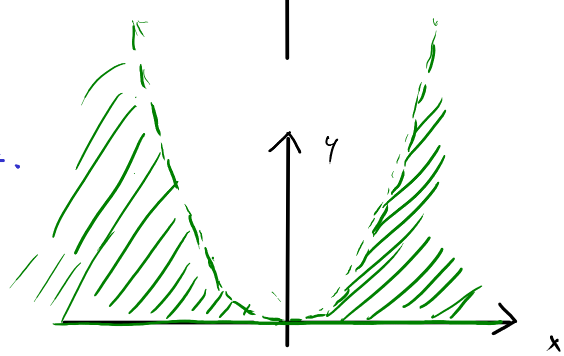
$y^2 < \frac{1}{4}(1 - x^2)$

on utilise que $y \geq 0$

$0 \leq y < \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$

donc partie du plan strictement sous la courbe
$y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$ $\quad 1 \geq x \geq 0$, $y \geq 0$

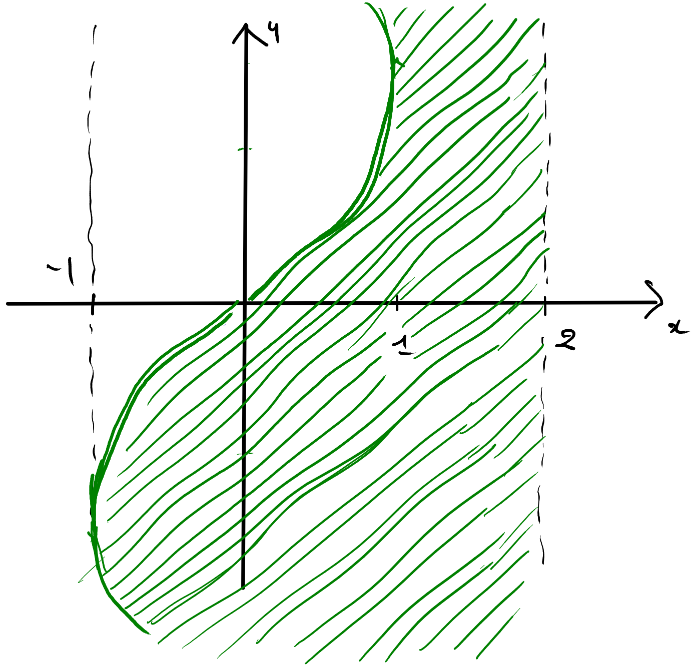
4.



On trace $y = x^2$ et $y = 0$

→ Partie du plan entre les 2 courbes

5.



On a $\sin(y) \le x < 2$

or $\sin(y) \ge -1$

donc $x \in [-1, 2[$

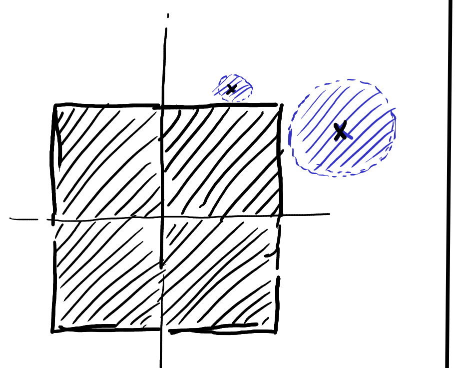
On trace $x = \sin(y)$

Partie du plan à droite de la courbe

$x \ge \sin(y)$

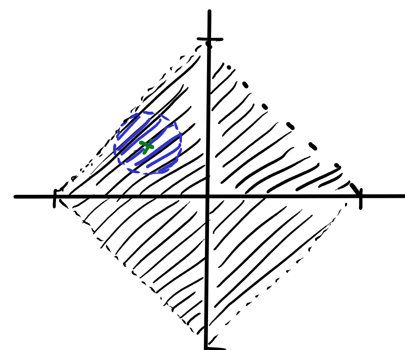
Ouvert / Fermé / Autre ?

1. Fermé →
2. Ouvert
3. Ouvert
4. Ni l'un, ni l'autre
5. Ni l'un, ni l'autre



$x \in \mathbb{R}^2 \setminus X$

$B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus X$ où $r = \min(1-|x|, 1-|y|)$, $r > 0$



$x \in X$

$B(x,r) \subseteq X$ où $r = (\dots)$

FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 2

1. $X =]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$

Montrons que $\forall x \in X \ \exists r>0 \ / \ B_{\mathbb{R}}(x,r) \subseteq X$ (déf X ouvert)

Soit $x \in X$, Montrons que $\exists r>0 \ / \ B(x,r) \subseteq X$

Or ds $\mathbb{R}$ $B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r \} =]x-r, x+r[$

donc Montrons que $\exists r>0 \ / \ ]x-r, x+r[\subseteq]-1,1[= X$

Or l'inclusion est vrai si $-1 < x-r$ et $x+r<1$

Montrons donc que $\exists r>0 \ / \ \begin{cases} -1 < x-r \\ x+r < 1 \end{cases}$

Un tel r doit donc vérifier $\begin{cases} r>0 \\ r < x+1 \\ r < 1-x \end{cases}$

Prenons $r = \min\{x+1, 1-x\}$, comme $x \in]-1,1[$

$x+1>0$ et $1-x>0$

donc $r>0$

Ainsi $\exists r>0 \ / \ ]x-r, x+r[\subseteq X$

Et ce quelque soit $x \in X$

donc $\forall x \in X \ \exists r>0 \ / \ B(x,r) \subseteq X$ c'est-à-dire X ouvert !

Ex 2. 2. Soit $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1 \text{ et } |y|<2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Montrons que X est ouvert dans $\mathbb{R}^2$

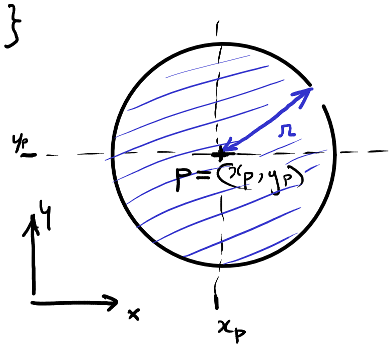
Montrons que $\forall p\in X, \exists r>0 \,/\, B(p,r)\subseteq X$ où $B(p,r)$ boule de centre p et rayon r de $\mathbb{R}^2$

Soit $p\in X$, Montrons $\exists r>0 \,/\, B(p,r)\subseteq X$ on notera $p=(x_p,y_p)$

On sait que $|x_p|<1$ et $|y_p|<2$.

De plus :

$$B(p,r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2} < r\}$$



On veut donc $r>0$ tel que

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r\} \subseteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1, |y|<2\}$$

ANALYSE

On veut donc $r>0$ tel que

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $\begin{cases}|x|<1\\|y|<2\end{cases}$ $\quad *$

Remarque : $(x-x_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$ car $(y-y_p)^2\geq 0$

donc $|x-x_p|<r$ donc $|x|-|x_p| \overset{IT}{\leq} |x-x_p|<r$ donc $|x|<r+|x_p|$

de même : $(y-y_p)^2 \leq (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 < r^2$

donc $|y-y_p|<r$ donc $|y|-|y_p| \underset{IT}{\leq} |y-y_p|<r$ donc $|y|<r+|y_p|$

Si on veut que r satisfasse $*$, il suffit d'imposer $\begin{cases} r+|x_p|\leq 1\\ r+|y_p|\leq 2\end{cases}$

$\boxed{\text{Prenons donc } r=\min(1-|x_p|, 2-|y_p|)}$

On vérifie que $r>0$ en effet $\left.\begin{array}{l}|x_p|<1 \text{ donc } 1-|x_p|>0\\ |y_p|<2 \text{ donc } 2-|y_p|>0\end{array}\right\}$ le min de deux valeurs >0 est >0.

Reste à montrer qu'avec ce r on a bien $B(p,r)\subseteq X$.

Montrons donc que $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$ alors $\begin{array}{l}|x|<1\\|y|<2\end{array}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, supposons $\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2}<r$,

Montrons que $|x|<1$ et $|y|<2$

SYNTHÈSE

Or $|x| = |x - x_p + x_p| \underset{IT}{\leq} \underbrace{|x - x_p|} + |x_p|$

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2} + |x_p|$ car $\sqrt{t}$ est une fonct° croissante

$\leq \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2} + |x_p|$ et $(y-y_p)^2 \geq 0$

$< \quad r + |x_p|$ par hypothèse.

$< \min(1-|x_p|, 2-|y_p|) + |x_p|$

$< \quad 1 - |x_p| + |x_p| = 1$

Ainsi
$|x| < 1$

On montre de même que $|y| < 2$ $\left(\begin{array}{l} |y| \leq |y-y_p| + |y_p| \quad [...] \\ < \quad r + |y_p| \leq 2 - |y_p| + |y_p| = 2 \end{array} \right)$

BILAN (x,y) vérifie $|x|<1$, $|y|<2$ donc $(x,y) \in X$

Et ceci est vrai quelquesoit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dès que $\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2} < r$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2} < r$ alors $(x,y) \in X$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $(x,y) \in B(p,r)$ alors $(x,y) \in X$

Donc $B(p,r) \subseteq X$ pour le $r>0$ qu'on a trouvé

On a bien montré $\exists r>0$ tel que $B(p,r) \subseteq X$

Et ceci est vrai pour tout $p \in X$

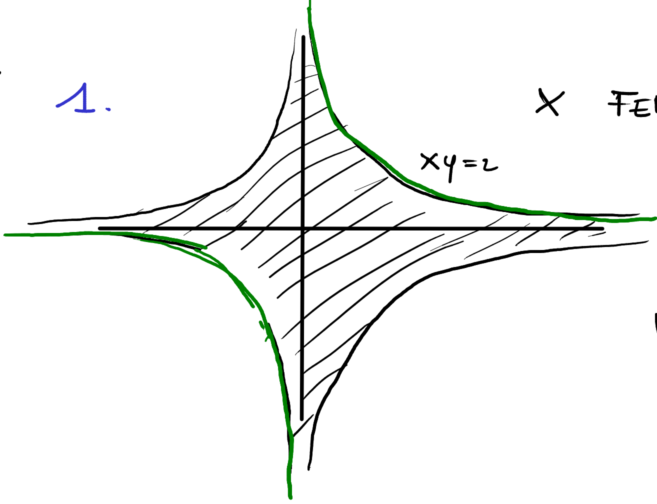
On a finalement montré que $\forall p \in X \quad \exists r>0$ tel que $B(p,r) \subseteq X$

c'est-à-dire X ouvert !

FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 3 :

1.



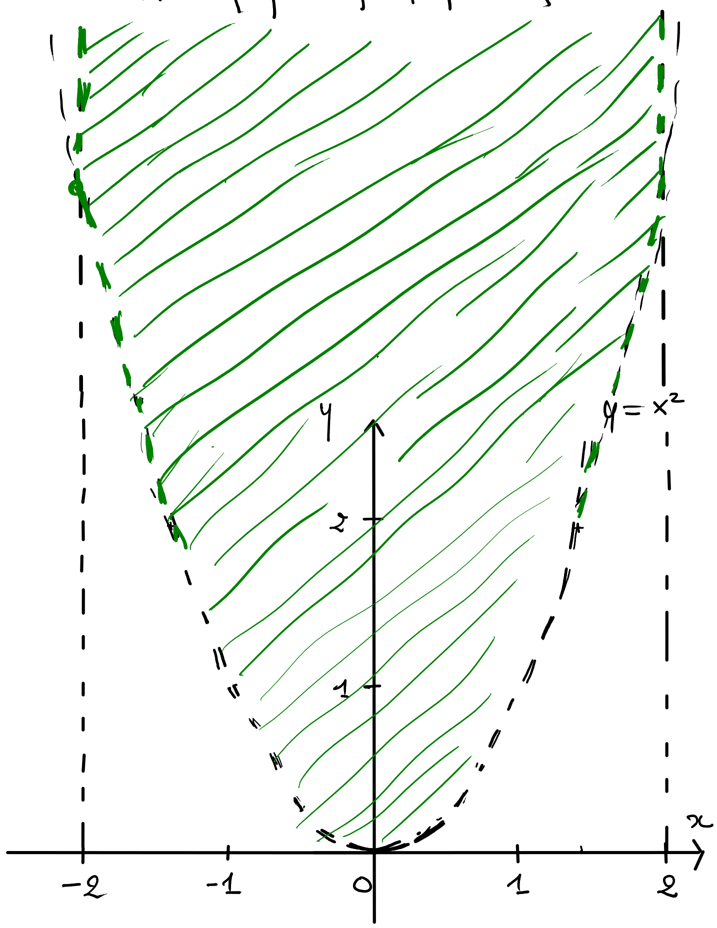
X FERMÉ (NON OUVERT)

$\mathring{X} = \{|xy|<2\}$

$\partial X = \{xy=2\} \cup \{xy=-2\}$

2. $y > x^2 \Rightarrow y \geq 0$

$|x|<2 \Rightarrow -2<x<2$



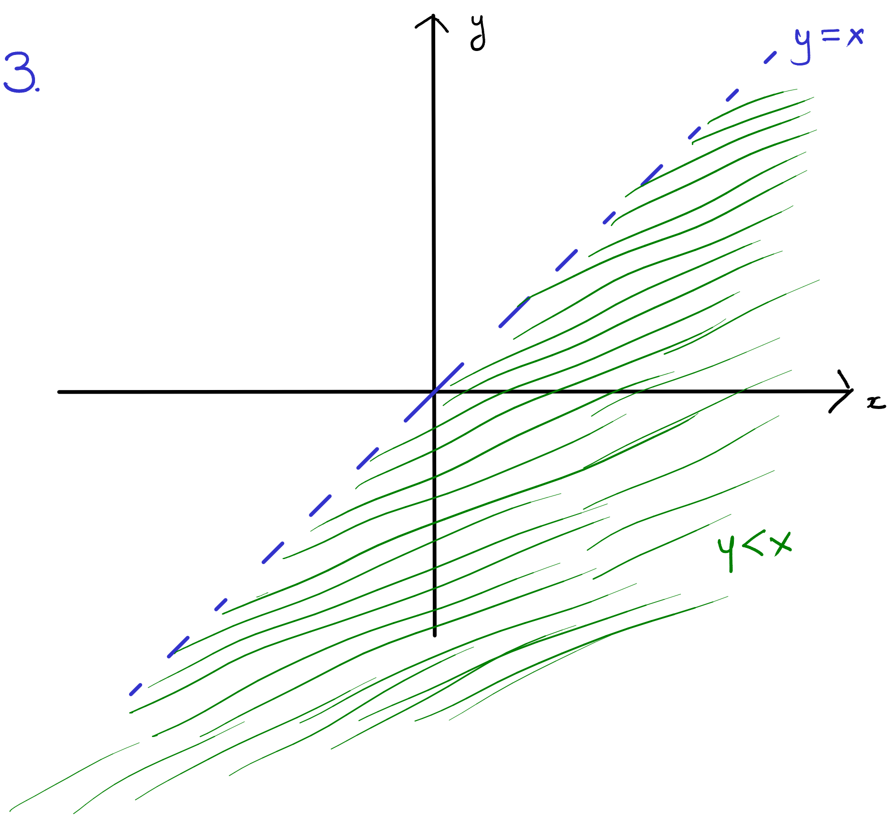
$\mathring{X} = X$ X est ouvert.

Rq $(0,0) \notin X$

$\overline{X} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2,\ |x|\leq 2\}$

$\partial X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2,\ |x|\leq 2\}$
$\cup \{(2,y) \mid y \geq 4\}$
$\cup \{(-2,y) \mid y \geq 4\}$

3.



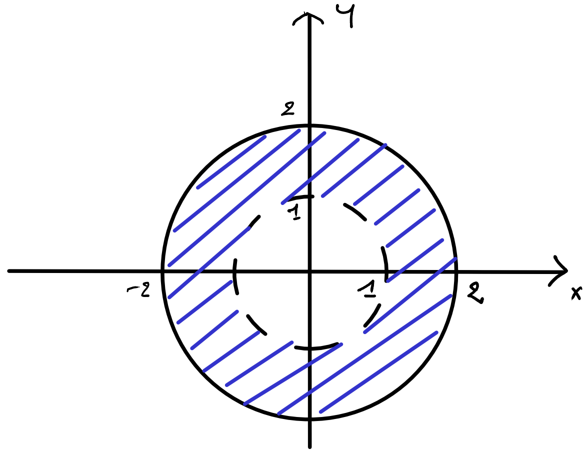
$X = \{(x,y) \mid y<x\}$ est OUVERT ds $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow \mathring{X} = X$

$\rightarrow \overline{X} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$

$\rightarrow \partial X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

Ex3. 4. $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$



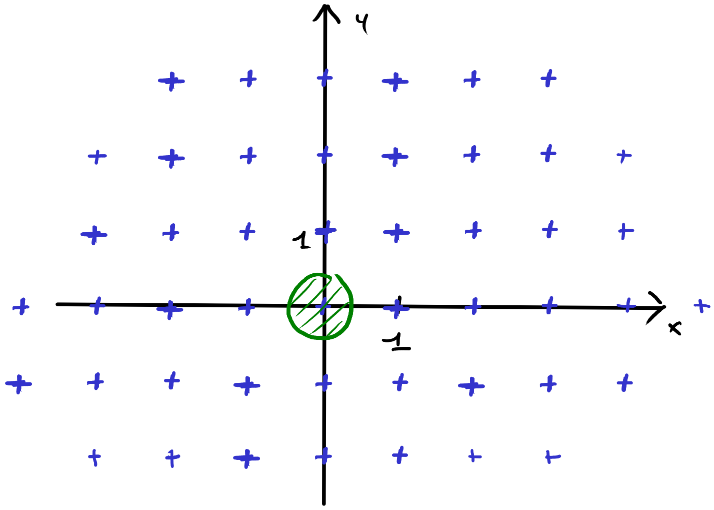
→ Ni ouvert ni fermé

→ ADHERENCE $\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

→ INTERIEUR $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$

→ FRONTIERE $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$



▶ Ensemble des points du plan à coord. entières.

▶ OUVERT ?

$(0,0) \in X$ soit $\varepsilon > 0$

$B((0,0),\varepsilon)$ contient tj un point à coord non entièr

donc $B((0,0),\varepsilon) \not\subseteq X$

donc X n'est pas ouvert !

▶ $Y = \mathbb{R}^2 \setminus X$ = ensemble des pts du plan dont les 2 coord. ne sont pas entières.

X FERMÉ $\Leftrightarrow$ Y OUVERT

or si $(x,y) \in Y$ alors OPS x pas entier $n < x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

pour $r > 0$ assez petit les points de $B((x,y),r)$ de la forme (x',y') auront $n < x' < n+1$

donc $B((x,y),r) \subseteq Y$ → donc Y ouvert.

▶ $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X} = X$

▶ $\overline{X} = X$ car X fermé

▶ $\mathring{X}$ = plus petit ouvert $\subseteq X$

or $(0,0) \notin \mathring{X}$ par le raisonnement précédent

le même raisonnement vaut pour $(n,m) \in X$

donc $\mathring{X} = \emptyset$

autre point de vue $\mathring{X} \subseteq X$ ouvert

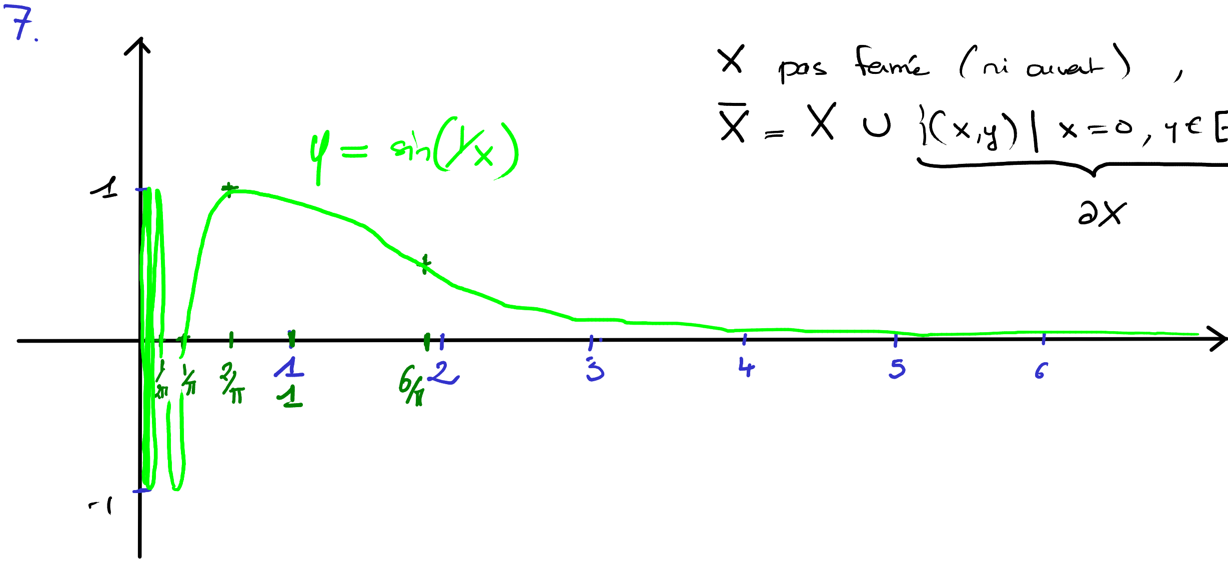
or X pas ouvert donc $\mathring{X} \subsetneq X$

donc on a enlevé un pt de X au moins.

mais tous les pts de X st les mêmes donc on enlève tous les pts de X

6. Pas de dessin. $\overline{X} = \mathbb{R}^2$, $\mathring{X} = \emptyset$, X ni ouvert ni fermé, $\partial X = \mathbb{R}^2$.

7.



X pas fermé (ni ouvert), $\mathring{X} = \emptyset$

$\overline{X} = X \cup \underbrace{\{(x,y) \mid x=0,\ y \in [-1,1]\}}_{\partial X}$

Ex 4

1) FAUX : $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$, $B=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{R}$

$A\cap B=\emptyset\times\mathbb{R}=\emptyset$ donc $\overline{A\cap B}=\emptyset$

$A\cap\overline{B}=A\cap\mathbb{R}^2=A\not\subset\emptyset$

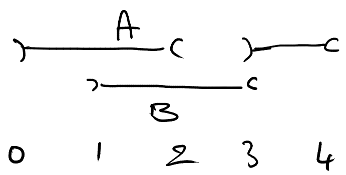
Probablement vrai si A ouvert.

2) $A=]0,2[\cup]3,4[$ $\quad$ $A\cap\overline{B}=[1,2[$

$B=]1,3[$ $\quad$ $B\cap\overline{A}=]1,2]$

$\overline{A\cap B}=[1,2]$

$\overline{A}\cap\overline{B}=[1,2]\cup\{3\}$



3) $A\cap B=\emptyset$ donc $\overline{A\cap B}=\emptyset$

d'autre part soit $x\in\delta D_2$ alors $\left.\begin{array}{l} x\in A \\ x\in D_2=B\end{array}\right\}$ donc $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

Ainsi $A\cap\overline{B}\not\subset\overline{A\cap B}$

Ex 5

$X=]-1,0[\cup]0,1[\cup\{2\}\cup\mathbb{Q}\cap[3,4]$

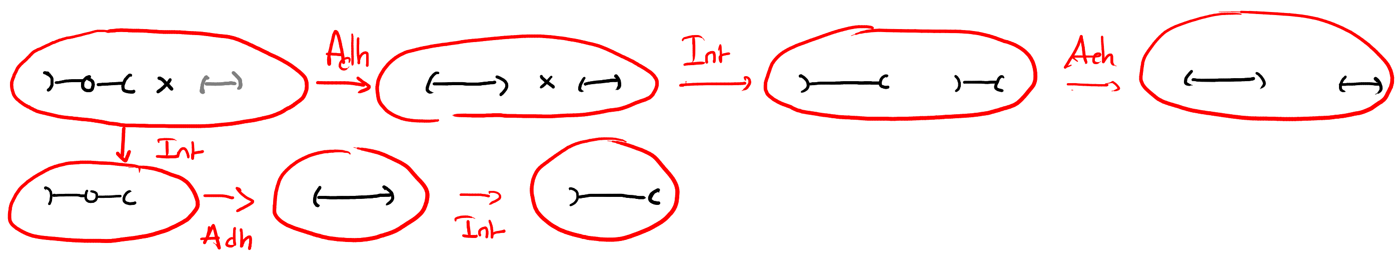
$\overline{X}=[-1,1]\cup\{2\}\cup[3,4]$

$\mathring{\overline{X}}=]-1,1[\cup]3,4[\ \rightarrow\ \overline{\mathring{\overline{X}}}=[-1,1]\cup[3,4]$

$\mathring{X}=]-1,0[\cup]0,1[\ \rightarrow\ \overline{\mathring{X}}=[-1,1]$

$\downarrow$

$\mathring{\overline{\mathring{X}}}=]-1,1[$



Ex 6

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts d'un espace X fixé indexée par l'ensemble I

Soit $A=\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\in X\mid \exists i\in I\ x\in A_i\}$ ensemble des $x\in X$ qui sont dans "l'un des A_i"

Montrons que A ouvert

Ex6 (suite)

Montrons que $\forall x\in A\ \exists r>0 \,/\, B(x,r)\subseteq A$

Soit $x\in A$. Mq $\exists r>0 \,/\, B(x,r)\subseteq A$

or $x\in A$ entraine $\exists i\in I \,/\, x\in A_i$ considérons un tel $i\in I$

Alors $x\in A_i$ et de plus A_i ouvert

donc $\exists r>0 \,/\, B(x,r)\subseteq A_i$ considérons un tel $r>0$

Alors $B(x,r)\subseteq A_i\subseteq A$ (car $A_i\subseteq \bigcup_{j\in I} A_j$)

donc on a trouvé $r>0$ tq $B(x,r)\subseteq A$

donc $\exists r>0 \,/\, B(x,r)\subseteq A$ et ce pour tout $x\in A$

donc $\forall x\in A,\ \exists r>0 \,/\, B(x,r)\subseteq A$

donc A ouvert.

Soient $A_i =]-1/i, 1/i[$ pour $i\in I := \mathbb{N}^*$

Alors $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in\mathbb{R} \mid \forall i\in\mathbb{N}^*\ x\in A_i\}$

$= \{x\in\mathbb{R} \mid \forall i\in\mathbb{N}^*\ -1/i<x<1/i\} = \{0\}$

à démontrer

$\boxed{\supseteq}$ évident. $\forall i$ $-1/i<0<1/i$ donc $0\in\bigcap_{i\in I} A_i$

$\boxed{\subseteq}$ Si $x\neq 0$ alors 1er cas : $x>0$ donc $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tq $x>1/n>0$

donc $x\notin \bigcap_{i\in I} A_i$

2e cas : $x<0$ ... pareil.

donc si $x\neq 0$, alors $x\notin\bigcap_{i\in I} A_i$. Ainsi $\bigcap_{i\in I} A_i\subseteq\{0\}$

Ex7

Ex 1. 1) oui 2) NON ($\bar{X}$ oui) 3) NON ($\bar{X}$ oui) 4) NON 5) NON

Ex 2 1) NON ($\bar{X}$ oui) 2) NON ($\bar{X}$ oui) 3) NON ($\bar{X}$ oui) 4) NON ($\bar{X}$ oui) 5) NON ($\bar{X}$ oui)

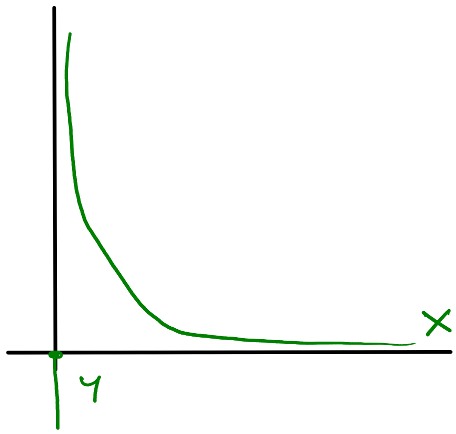
Ex3 : 1) NON 2) NON 3) NON ($\bar{X}$ oui) 4) NON 5) NON 6) NON 7) NON

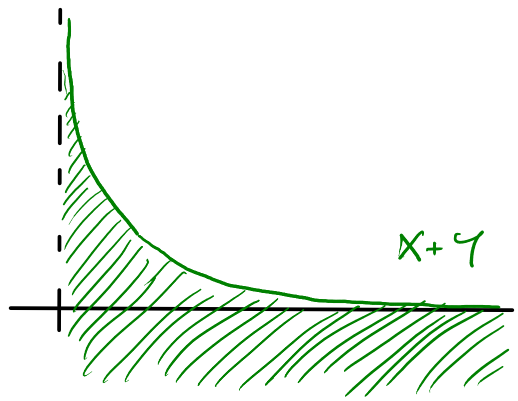
Ex 9 : 1) : $X+Y = \{x+y \mid x\in X, y\in Y\}$

$$= \bigcup_{y\in Y} (X+\{y\})$$

Lemme : [$X+\{y\}$ ouvert ssi X ouvert. + Exo 6

4) $X = \{(x, 1/x) \mid x>0\}$ $Y = \{(0,y) \mid y\in \mathbb{R}^-\}$





FEUILLE 1
VAR 2015

Ex 15

$x, y \in E \setminus \{\vec{0}\}$

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \underset{\text{IT.}}{\leq} \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\|}_{\text{homogenéité}} + \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x - y\| + \underbrace{\left\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) y \right\|}_{\text{homogenéité}}$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x - y\| + \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \cdot \|y\|$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \|x - y\| + \frac{1}{\|x\|} \underbrace{\left| \|y\| - \|x\| \right|}$$

$$\underset{\text{IT 2}}{\leq} \|y - x\| = \|x - y\|$$

$\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\|$
$\leq \|x-z\| + \|z-y\|$

$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

BILAN $\quad \dots \leq \frac{2}{\|x\|} \|x - y\|$

Ex 16

$$\tilde{d}(x,y) = \operatorname{Inf}(1, d(x,y))$$

* $\tilde{d}$ est symétrique : $\tilde{d}(y,x) = \operatorname{Inf}(1, d(y,x)) \overset{\text{d distance donc symétrique}}{=} \operatorname{Inf}(1, d(x,y)) = \tilde{d}(x,y)$

* $\tilde{d}(x,y) = \operatorname{Inf}(1, d(x,y)) \geq 0$ car d est positive

* $\tilde{d}$ satisfait l'ineg. triangulaire.

on effet soient $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

$\tilde{d}(x,z) = \inf(1, d(x,z))$ or $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ car d est une distance.

$$\leq \inf(1, d(x,y) + d(y,z))$$
$$\leq \inf(1, d(x,y)) + \inf(1, d(y,z))$$
$$\leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$$

lemme $\left[\begin{array}{l} \inf(a, b+c) \leq \inf(a,b) + \inf(a,c) \\ \text{si } a,b,c \text{ sont } \geq 0 \end{array} \right.$

Il suffit de montrer que

* $\inf(a, b+c) - \inf(a,b) \leq a$ (évident)
* $\inf(a, b+c) - \inf(a,b) \leq c$

$\inf(a, b+c) = \inf(a-c, b) + c$

$\inf(a-c, b) - \inf(a,b) \leq 0$

* Enfin si $\tilde{d}(x,y) = 0$

alors $\inf(1, d(x,y)) = 0$ donc

$d(x,y) = 0$

or d distance donc $x = y$