VAR FEUILLE 3 (2015)

Ex 1

1. $f(x,y) = \ln(xy)$ est définie et continue quand $xy \in \mathbb{R}^{+*} = \mathcal{D}_{\ln}$

comme composée.

Ainsi $\mathcal{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}\right\} = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \cup \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{*}$

⚠ $\ln(xy) \neq \ln(x) + \ln(y)$ en effet si $\begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}$ $\ln(xy) = \ln(-x) + \ln(-y)$

À y fixé ($\neq 0$), la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est définie sur $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} \text{ si } y>0 \\ \mathbb{R}^{-*} \text{ si } y<0 \end{pmatrix}$

et deux fois dérivable sur ce domaine

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{x^2}$$

Rq $f(x,y) = f(y,x)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$

2. f polynôme donc définie sur $\mathbb{R}^2$ est dérivable à volonté

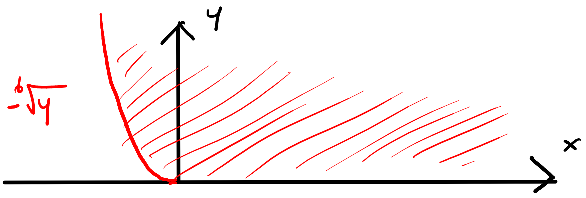
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 9x^2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3x^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

3. $f(x,y) = \ln(x^3 + \sqrt{y})$ est définie quand $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^3 + \sqrt{y} > 0 \end{cases}$

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x^3 > -\sqrt{y}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x > -\sqrt[6]{y}\}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ bijectº croissante



[...]
↑
JUSTIFICATION DÉRIVABILITÉ
(⚠ $y=0$ pas dérivable)

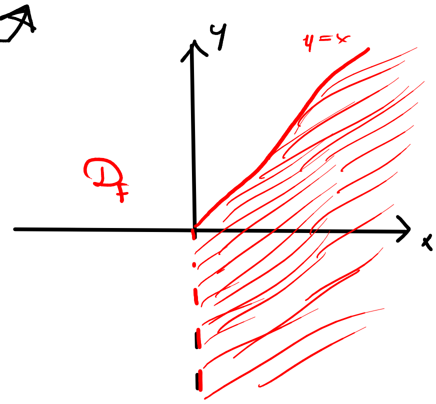
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + \sqrt{y}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-3x^4 + 6x^3\sqrt{y}}{(x^3 + \sqrt{y})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^3 + \sqrt{y}} \times \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y + x^3\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y(x^3 + \sqrt{y})^2} \times \left(1 + \frac{x^3}{2\sqrt{y}}\right)$$

4. $f(x,y) = \sqrt{x-y} + 3x^y$ définie quand $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

<u>Rappel</u> : x, y réels x^y = notation pour $\exp(y \times \ln(x))$



$$\mathcal{D}_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } x \geq y \}$$

<u>dérivabilité</u> [...] ($\triangle$ $y = x$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} + 3\exp(y\ln(x)) \times \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{2(x-y)} + 3\exp(y\ln(x))\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} + 3\exp(y\ln(x)) \cdot \ln(x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{2(x-y)} + 3\exp(y\ln x)(\ln(x))^2$$

Ex 2

f est linéaire donc admet des dérivées partielles à tout ordre sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 7$$

$$\mathrm{Jac}(F)(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = (5,7)$$

$$Df_{(x_0,y_0)} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \binom{h}{k} \longmapsto \mathrm{Jac}(F)_{(x_0,y_0)}\binom{h}{k} = 5h + 7k \end{pmatrix}$$

<u>donc</u> $D_{(x_0,y_0)} f = f$

AUTRE MÉTHODE

On a
$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= 5(x_0+h) + 7(y_0+k) \\ &= 5x_0 + 7y_0 + 5h + 7k \\ &= f(x_0,y_0) + f(h,k) \end{aligned}$$

<u>or</u> $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + D_{(x_0,y_0)}f(h,k) + \|(h,k)\|\,\theta(h,k)$

par déf de la différentielle $\theta(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0$

en identifiant, puisque f est linéaire

on a bien $D_{(x_0,y_0)}f \cdot (h,k) = f(h,k)$

Ex 3

f polynôme [...]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10xy$$

$$\mathrm{Jac}(f)_{(x_0,y_0)} = \left(2x_0 + 5y_0^2 \ , \ 10x_0y_0 \right)$$

$$D_{(x_0,y_0)} f : \left(\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{Jac}(f)_{(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (2x_0 + 5y_0^2)h + 10x_0y_0k \end{array} \right)$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= (x_0+h)^2 + 5(x_0+h)(y_0+k)^2 \\ &= x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 5\left(x_0y_0^2 + 2x_0y_0k + hy_0^2 + x_0k^2 + 2y_0hk + hk^2\right) \\ &= \underbrace{x_0^2 + 5x_0y_0^2} + \underbrace{2x_0h + 10x_0y_0k + 5y_0^2h} + \underbrace{x_0k^2 + 2y_0hk + hk^2 + h^2} \\ &= f(x_0,y_0) + \underbrace{(2x_0+5y_0^2)h + 10x_0y_0k}_{\text{linéaire}} + \varepsilon_{h,k} \end{aligned}$$

On vérifie $\dfrac{\varepsilon_{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0$ donc $\varepsilon_{h,k} = \|(h,k)\|\,\theta(h,k)$

avec $\theta(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0$

Donc on identifie $D_{(x_0,y_0)} f \cdot (h,k) = (2x_0 + 5y_0^2)h + 10x_0y_0k$.

Ex 17

1) * $f(x,y) = \dfrac{x^5y - y^5x}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

$|f(x,y)| = |xy| \cdot \left|\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\right| \leq |xy|$ car $|x^4-y^4| \leq |x^4| + |y^4| = x^4+y^4$

donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ f continue ssi $a=0$

* f est différentiable ailleurs qu'en $(0,0)$.

* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$
* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0-0}{k} = 0$

* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(5x^4y - y^5)(x^4+y^4) - 4x^3(x^5y - y^5x)}{(x^4+y^4)^2} = \dfrac{x^8y + 8x^4y^5 - y^9}{(x^4+y^4)^2}$

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = |y| \cdot \left|\dfrac{x^8 + 8x^4y^4 - y^8}{(x^4+y^4)^2}\right| \leq |y| \cdot \dfrac{x^8+8x^4y^4+y^8}{x^8+2x^4y^4+y^8} \leq |y| \cdot \dfrac{4(x^8+2x^4y^4+y^8)}{(x^8+2x^4y^4+y^8)} \leq 4|y|$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R}^2$

* $f(y,x) = -f(x,y)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ continue sur $\mathbb{R}^2$

Les dérivées partielles existent et sont continues sur D_f donc f est différentiable !

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\partial f/\partial x(h,0) - \partial f/\partial x(0,0)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\, 0 = 0$ $\quad r = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{1}{k} \dfrac{0+0-k^9}{(0+k^4)^2} = -1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$ par Schwarz. $\quad s = -1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ par symétrie. $t = 0$ $\qquad rt - s^2 = -1 < 0$

En $(0,0)$: $Df = 0$ et Hf mixte $\to$ point selle !

Ex 18

$$f : \begin{cases} xy \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x+y}{x-y}\right) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

$|f(x,y)| \leq |xy|$ car $|\sin(\dots)| \leq 1$ donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

donc f continue en $(0,0)$

⚠ Pas continue (a priori) en (x,x)

$y = x+h$ $\quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{2x+h}{h} = \frac{2x}{h} + 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{h}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)$ pas de limite quand $h \to 0$

Question avec $f(x,y) = (x-y)\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{x-y}\right)$ non du $x = y$

$(f(y,x) = f(x,y))$

* f continue sur $\mathbb{R}^2$

* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y \sin(\dots) + (x-y)\cos(\dots)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}$

$= -y \sin(\dots) - \frac{\pi y}{x-y} \cos(\dots)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x+h,x) - \underbrace{f(x,x)}_{0}\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{2x+h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)$$ n'existe pas !! si $x \neq 0$

Ex 15

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

1) $x = r\cos\theta$ $\qquad f(x,y) = r^{2p}(1+\sin^2\theta)^p \sin\left(\frac{1}{r}\right)$
$y = r\sin\theta$

Si $p>0$ $\quad |f(x,y)| \leq r^{2p}\,|1+\sin^2\theta|^p \leq 2^p r^{2p} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ $\quad$ donc f C^0 en 0

2) On suppose toujours $p>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(h,0) - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, h^{2p} \sin$$