Fonctions de plusieurs variables

Correction CC 1

Exercice 1

1. Faux ! Par exemple $\mathcal{O} = \emptyset$ est un ouvert et alors $\mathcal{O} \cup A = A$. Donc, dans ce cas, $\mathcal{O} \cup A$ n'est un ouvert de X que si A est ouvert de X.
   Autre exemple dans $\mathbb{R}$ prendre $\mathcal{O} =]0, 1[$ et $A = \{1\}$. Alors $\mathcal{O} \cup A =]0, 1]$ qui n'est pas ouvert.
2. Faux ! Par exemple $\mathcal{F} = X$ est un fermé de X et alors $\mathcal{F} \cap B = B$. Donc, dans ce cas, $\mathcal{F} \cap B$ n'est un fermé de X que si B est fermé.
   Autre exemple dans $\mathbb{R}$ prendre $\mathcal{F} = [-2, 2]$ et $B =]-1, 1[$. Alors $\mathcal{F} \cap B =]-1, 1[$ qui n'est pas fermé.

Exercice 2

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2$. De plus sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. C'est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
   Reste à regarder si elle est continue sur en $(0, 0)$.
   En coordonnées polaires :
   $$x = r\cos(\theta)$$
   $$y = r\sin(\theta)$$
   avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
   On a alors
   $$f(x, y) = \frac{(r\cos(\theta))^m (r\sin(\theta))^n}{r^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))} = r^{m+n-4}\frac{\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)}{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)}$$
   Première remarque
   $$\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) = (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))^2 - 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 1 - 2(\cos(\theta)\sin(\theta))^2$$
   Or $\cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
   Bilan $\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) > \frac{1}{2}$ et donc la fraction
   $$\frac{\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)}{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)}$$
   est bornée.
   On remarque ensuite que : **Si** $m + n - 4 > 0$ **alors** la limite de f quand $(x, y) \to (0, 0)$ vaut 0 car $r^{m+n-4} \to 0$ et la fraction est bornée.
   Reste à vérifier la réciproque : si f...

Exercice 3

On suppose $\mathbb{E}$ de dimension finie.

ϕ est continue car linéaire et on a

$$\phi(a+h) = \phi(a) + \phi(h)$$

par linéarité de ϕ, il s'en suit donc que en posant $L = \phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ et ϵ la fonction nulle de $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$.

L'égalité du dessus se réécrit donc

$$\phi(a+h) = \phi(a) + L(h) + \|h\|_{\mathbb{E}}\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et L linéaire continue donc L est la différentielle de ϕ en a.

Ainsi

$$D\phi(a)(h) = L(h) = \phi(h)$$

Exercice 4

Exercice 5