Soit M une variété réelle lisse de dimension n. On essayera d'interpréter les structures conformes sur M ou au voisinage d'un point de M en terme de sections (ou des germes) sur M du poussé en avant du $\mathcal{O}(2)$ sur $\mathbb{P}T_M$. Dans le cas hyperkählérien, on peut relier ce fibré projectif à un fibré provenant de l'espace des twisteurs.

1. Version riemannienne

1.1. **Structure riemannienne.** Une *métrique riemannienne* g sur M est la donnée d'une section globale lisse de $\odot^2 T^*M$ telle que

- Pour tout $X \in TM$, $g(X, X) \geq 0$
- Pour tout $X \in TM$, $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

1.2. **Interprétation polynomiale.** On peut remarquer que pour V espace vectoriel sur un corps k, on a :

Bott

$$H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(p)) = \odot^p V^* \tag{1}$$

pour tout p.

En particulier on a pour tout $x \in M$,

sym2enx

$$H^0(\mathbb{P}(T_x M), \mathcal{O}(2)) = \odot^2 T_x^* M \tag{2}$$

---

ce qui suit est douteux

Cet isomorphisme étant naturel, il s'étend en un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$H^0(\mathbb{P}(TM), \mathcal{O}(2)) = \odot^2 T^* M \tag{3}$$

Plus précisément : Si on note $\pi : TM \to M$ la projection et $\mathbb{P}\pi : \mathbb{P}(TM) \to M$ sa version projectivisée, on peut écrire le faisceau $H^0(\mathbb{P}(TM), \mathcal{O}(2)) = (\mathbb{P}\pi)_* \mathcal{O}(2)$. Ce faisceau est le faisceau des sections lisses d'un fibré vectoriel E sur M dont la fibre en x est donnée par $H^0(\mathbb{P}(T_x M), \mathcal{O}(2)) = \odot^2 T_x^* M$.

1.2.1. *Interprétation d'une métrique riemannienne.* Ainsi une métrique riemannienne sur M est une section globale g du faisceau $(\mathbb{P}\pi)_* \mathcal{O}(2) \to M$ qui vérifie de plus pour tout $x \in M$, et $X \in T_x M$, $g_x \in H^0(\mathbb{P}(T_x M), \mathcal{O}(2))$ et $g_x([X]) \in \mathbb{R}^{+*}$... ?

1.3. **Structure conforme.** Une structure conforme sur $U \subseteq M$ est la donnée d'une classe d'équivalence de structures riemanniennes $[g_0]$ de la forme

$$[g_0] = \left\{ e^\phi g_0 \mid \phi \in \mathcal{C}^\infty(U) \right\} \tag{4}$$

Pour g_0 métrique riemannienne sur U.

L'ensemble des structures conformes sur M correspond aux sections globale du faisceau $\mathcal{C}\mathrm{onf}$

$$\mathcal{C}\mathrm{onf} := \mathcal{C}^\infty(\odot^2 T^* M)/\mathcal{C}^\infty$$

où le quotient est relatif à l'action $(\phi, g_0) \mapsto e^\phi g_0$.

2. Version complexifiée

2.1. **Structure pseudo-riemannienne.** Une *métrique pseudo-riemannienne* g sur M est la donnée d'une section globale de $\odot^2 T^* M$ telle que

enerescence

$$\forall X \in TM \setminus \{0\}, \exists Y \in TM \ , \ g(X, Y) \neq 0 \tag{5}$$

---

ce qui suit est douteux

On definit son indice comme la dimension de la quadrique projective (lisse) réelle d'équation $g(X, X) = 0$.

On peut repérer les métriques riemanniennes comme etant celles d'indice 0 et positives.

Cela revient à se donner une section globale *réelle* non dégénérée de $\odot^2_{\mathbb{C}} T^* M^{\mathbb{C}}$ où $TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes \mathbb{C}$. En effet on étend une métrique pseudo-riemannienne g à $TM^{\mathbb{C}}$ par

$$g(X \otimes z, Y \otimes w) = zwg(X, Y)$$

Elle satisfait la condition de non dégénérescence (5) dans sa version complexifiée ($X, Y \in TM^{\mathbb{C}}$) et est réelle au sens suivant :

reel

$$\forall X, Y \in TM^{\mathbb{C}} \ , \quad \overline{g(X, Y)} = g\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \tag{6}$$

Réciproquement, on peut restreindre la donnée d'une section non-dégénérée réelle g de $\odot^2 T^* M^{\mathbb{C}}$ aux vecteurs de la forme $X \otimes 1, Y \otimes 1$. Un calcul rapide permet de vérifier que la condition de non dégénérescence réelle (5) est satisfaite.

2.2. **Structure pseudo-riemannienne conforme.** Dans notre cas, une *structure pseudo-riemannienne conforme* (PsRC) sera la donnée d'une classe d'équivalence de structures pseudo-riemanniennes (vues comme sections de $\odot^2 T^*M^{\mathbb{C}}$) modulo multiplication par les fonctions $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}^\times)$. Une telle fonction est une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré constant $\mathbb{C}^\times$ et donc une structure PsRC est la donnée d'une section globale de

$$\left(\odot^2 T^*M^{\mathbb{C}}\right)/\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{P}\left(\odot^2 T^*M^{\mathbb{C}}\right)$$

Reste à traduire la condition de non-dégénérescence et le caractère réel.

3. Le cas hyperkählérien

Dans le cas M variété hyperkählérienne, on a : $T_xM^{\mathbb{C}} \cong H^0(L, N)$ où $L = L_x \subseteq Z$ est la droite twistorielle associée à x et $N = N_{L_x/Z}$.

Ainsi l'équation (2) devient

$$\odot^2 T_x^*M^{\mathbb{C}} = H^0(\mathbb{P}(T_xM^{\mathbb{C}}), \mathcal{O}(2)) = H^0(\mathbb{P}(H^0(L, N)), \mathcal{O}(2))$$

Et on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N & & \mathcal{O}(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & & \mathbb{P}H^0(L, N) \end{array}$$

3.0.1. *Bilan.* Une métrique g_x en un point $x \in M$ donne un élément de $\odot^2 T_x^*M^{\mathbb{C}}$ et donc une section globale de $\mathcal{O}(2)$ au dessus de $\mathbb{P}H^0(L, N)$. Cette section est "réelle" (pour une bonne structure réelle sur cet espace de sections) et satisfait une condition qui doit correspondre à la non-dégénérescence de g_x (en particulier, cette section ne s'annule pas !).

Une classe conforme de métriques riemanniennes en x produit donc un élément de

$$\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}H^0(L, N), \mathcal{O}(2))$$

$$\begin{array}{ccccc} N & & \mathcal{O}(2) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ L & & \mathbb{P}H^0(L, N) & & \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}H^0(L, N), \mathcal{O}(2)) \end{array}$$

Reste à comprendre comment ce diagramme varie quand x varie. On peut noter que

$$H^0(L, N) = (\nu_*\mu^*T_f)_x$$

Ainsi les faisceaux $\mathcal{O}_{M^{\mathbb{C}}}(TM^{\mathbb{C}})$ et $\nu_*\mathcal{O}_W(\mu^*T_f)$ sont des fibrés vectoriels sur $M^{\mathbb{C}}$ et sont isomorphes fibres à fibres. Ils doivent donc différer par un fibré en droite. Par suite, les fibrés projectifs $\mathbb{P}TM^{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{P}(\nu_*\mu^*T_f)$ sont isomorphes.

Il peut être intéressant de considérer le fibré en $\mathbb{P}^{2n-1}$ sur M (ou plutôt $M^{\mathbb{C}}$) défini par $\mathbb{P}(\nu_*\mu^*T_f)$. Une PsRC est une section globale du poussé-en-avant sur M du faisceau $\mathcal{O}(2)$ sur $\mathbb{P}(\nu_*\mu^*T_f)$.

Enoncé. Soit (M, I_0, g_0) une variété hyperkählérienne. On notera Z son espace des twisteurs, W l'espace tautologique de la fibration twistorielle, $M^{\mathbb{C}}$ l'espace des sections de $f : Z \to \mathbb{P}^1$ et

$$M^{\mathbb{C}} \underset{\nu}{\longleftarrow} W \underset{\mu}{\longrightarrow} Z$$

la correspondance des twisteurs. Enfin, on notera $i : M \hookrightarrow M^{\mathbb{C}}$ l'injection en tant que sous-variété lisse.

Soit $[g]$ une classe conforme de métriques riemanniennes sur M. Alors $[g]$ définit un élément de

$$\Gamma_{\mathcal{C}^\infty}\Big(M \ , \ \mathbb{P}(p_*\mathcal{O}(2)) \Big)$$

où $p : \mathbb{P}(i^{-1}\nu_*\mu^*T_f) \to M$. De plus cette section satisfait les conditions suivantes

- *Non-dégénérée ...*
- *Réelle ...*
- *Positive (signature $(n, 0)$)...*

4. Autre point de vue

Références et autres

- cf 4.pdf section III pour le lien direct entre $TM^{\mathbb{C}}$ et $\nu_* \mu^* T_f$.
- Lire [Besse 1.J p.58] Conformal changes in Riemannian metrics
- Lire [Besse, thm 1.174 p.62] pour savoir comment varie les grandeurs Riemanniennes $\nabla, W, R \cdots$ quand g varie dans la direction $h \in \odot^2 T^* M$