?

BASILE PILLET

Table des matières

1. Plan

1.0.1. *Contexte.* On se fixe une variété complexe Z fibrée sur $\mathbb{P}^1$.

On fait 2 hypothèses :

- Il y a des sections particulières (verticales) Une par chaque point.
- Si L est l'image d'une section de $f : Z \to \mathbb{P}^1$ (droite), alors $N_{L/Z}$ est une somme de $\mathcal{O}(1)$. En particulier $H^1(L, N_{L/Z}) = 0$ et donc dans toutes les directions cette section se déforme. Les droites de Z peuvent se déformer dans Z.

En particulier Z est une variété rationnellement connexe.

1.0.2. *EG.*

- Espace des twisteurs d'une surface K3 (ou var HK),
- Espace total de $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$,

1.1. Théorie des Épaississements.

Point de vu GA : définir un objet géométrique c'est définir les fonctions dessus. On veut définir ce que sont les **voisinages infinitésimaux d'une droite dans Z**

La droite L est représentée par son faisceau de fonctions $\mathcal{O}_L$ qui est lié aux fonctions sur Z par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_L \to \mathcal{O}_Z \to i_* \mathcal{O}_L \to 0$$

où $i : L \hookrightarrow Z$ et $\mathcal{I}_L$ l'idéal des fonctions sur Z qui s'annulent sur L.

C'est-à-dire : Une fonction sur L provient d'une fonction sur Z modulo les fonctions qui s'annulent sur L. (où tout est à comprendre au sens "local")

Date: Mai 2017.

1.1.1. *Épaississement.* Il suffit de définir $\mathcal{O}_L^{(n)}$ le faisceau des fonctions

$$0 \to \mathcal{I}_L^{n+1} \to \mathcal{O}_Z \to i_* \mathcal{O}_L^{(n)} \to 0$$

sur Z modulo celles qui s'annulent à l'ordre $n+1$ sur L.

La variété épaissie $L^{(n)}$ est alors l'espace topologique L mais possédant beaucoup plus de fonctions : $\mathcal{O}_L^{(n)}$.

Une fonction sur $L^{(n)}$ est un jet d'ordre n de fonctions sur L.

Lien avec les vecteurs tangents ; exemples

$\star$

(1) Droite dans $\mathbb{P}^3$ Considérons $\mathbb{P}^3$ avec coordonnées homogènes $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$ et définissons L la droite d'équation $X_1 = X_2 = 0$. Le faisceau $\mathcal{I}_L$ est localement engendré par
   - $x = X_1/X_0$ et $y = X_2/X_0$ sur U_0
   - $u = X_1/X_3$ et $v = X_2/X_3$ sur U_3

   Les coordonnées associées sur L sont données par
   - $z = X_3/X_0$ sur U_0
   - $w = X_0/X_3$ sur U_3

   Ainsi sur U_0, un germe de fonction qui s'annule sur L s'écrit (pas forcément de manière unique)

   $$xf(x,y,z) + yg(x,y,z)$$

   et un germe de $\mathcal{I}^n$

   $$x^n f_n(x,y,z) + x^{n-1} y f_{n-1}(x,y,z) + \cdots + y^n f_0(x,y,z)$$

   Par exemple $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}|U_0$ donne par restriction à L la fonction nulle sur $L \cap U_0$, mais définit une fonction locale non-nulle sur $L^{(1)}$; cette fonction χ vérifie $\chi^2 = 0$. (On peut la voir comme un dx, ou un ε quand on néglige les termes d'ordre 2).

1.1.2. *Épaississement de fibrés.* Avec les notations du paragraphe précédent, soit $E \to X$ un fibré vectoriel. On appelle épaississement de E à l'ordre m sur $X^{(m)}$ un faisceau localement libre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-modules tel que

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}^{(m)}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_X(E)$$

c'est-à-dire il étend le fibré E sur X à $X^{(m)}$.

On note $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^{(m)}(E^{(m)})$.

C'est le faisceau des sections sur $X^{(m)}$ d'un fibré vectoriel.

1.1.3. *Épaississements de connexions.* Là ça devient plus complexe !

Rappel : L'existence d'une connexion ∇ sur un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ entraîne que $\mathcal{F}$ est localement libre. [Malgrange]

https://justinsmath.wordpress.com/2012/05/30/a-coherent-sheaf-with-connection-is-locally-fr

Une connexion sur un faisceau **rigidifie** le faisceau. Dans notre contexte : Soit $\nabla^{(m)}$ une connexion sur $E^{(m)}$. Alors elle définit de manière unique un épaississement $E^{(m+1)}$ de $E^{(m)}$!

Ainsi épaissir les fibrés à connexion est un ping-pong entre d'une part l'épaississement de la connexion sur un fibré fixé et d'autre part le choix de l'épaississement du fibré. Il y a des obstruction à chaque cran qu'il faut gérer.

(1) Exemple ?

1.2. **Correspondance de Buchdahl.** On s'intéresse aux voisinages infinitésimaux d'une droite dans Z.

1.2.1. *Espace des sections et correspondance twistorielle.* Soit C l'espace des sections de Z (espace de Douady, espace des cycles de Barlett).

$$(T_C)_s \simeq H^0(L_s, N_{L_s/Z})$$

Mais comme le H^1 s'annule

((à finir))

1.2.2. *EG.* Grassmanienne des 2 -plans privée d'un point et d'un $\mathbb{P}^1$.

1.2.3. *Fibré L-triviaux.*

1.2.4. *Fibré à connexion associé.*

1.2.5. *EQV catégorie.* On a le théorème

Théorème 1

Il y a une équivalence de catégories

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Fibré à connexion sur } C \\ + \textit{ restriction de courbure}\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\textit{Fibré vectoriel holomorphe sur } Z \\ + \textit{ trivial sur les droites}\end{matrix}\right\}$$

1.3. **Relation épaississement-courbure.**

1.3.1. *Théorème.* On a le théorème

Théorème 2

L'équivalence précédente se restreint à

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Fibré à connexion} \\ \textbf{plate} \textit{ sur } C\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\textit{Fibré holomorphe sur } Z \\ \textit{trivial sur les voisinages} \\ \textit{infinitésimaux des droites à l'ordre } 2\end{matrix}\right\}.$$

1.3.2. *Idée de la preuve ?*

1.4. **Applications.**

2. Idées

- Épaississements ; correspondance de Buchdahl ; courbure

3. Références

- Buchdahl