DOCTORALES 2015

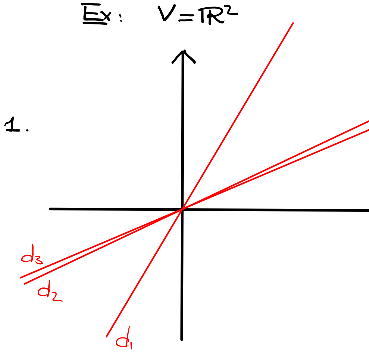
I) PARAMÉTRER LES SOUS-ESPACES VECTORIELS

I.1) ESPACE PROJECTIF

V espace vectoriel de dimension finie.

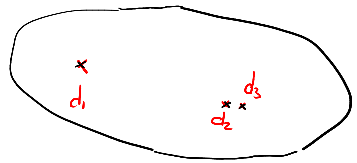
(droite de V) $:=$ sous-espace vectoriel de V de dimension 1.

Ex : $V = \mathbb{R}^2$



$\mathbb{P}(V) :=$ ensemble des droites de V.

→ On peut dire que 2 droites sont "proches" dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$



→ Topologie sur $\mathbb{P}(V)$

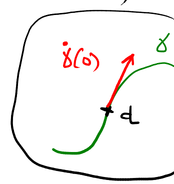
→ En fait on peut faire mieux que de la topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut faire de la géométrie différentielle

$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{P}(V)$ tel que $\gamma(0) = d \in \mathbb{P}(V)$

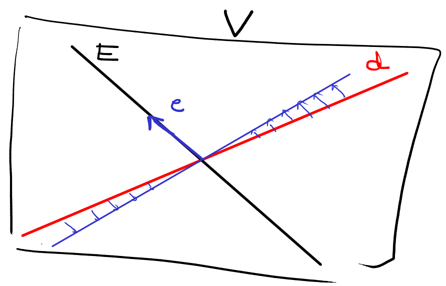
On peut donner un sens à $\dot{\gamma}(0) \in$ ESPACE TANGENT À $\mathbb{P}(V)$ en d

→ c'est la direction selon laquelle la droite est modifiée

$\mathbb{P}(V)$



Prop $\left[\begin{array}{l} T_d\mathbb{P}(V) \simeq V/d \quad \text{espace vectoriel de dim } (\dim V - 1) \\ \qquad\quad\;\; \cong E \text{ pour } E \subseteq V \text{ tq } E \oplus d = V \end{array}\right.$



→ $\mathbb{P}(V)$ est de dimension $\dim V - 1$

COORDONNÉES : Sur V on a des coordonnées $x_0, \dots, x_n$ $\quad n = \dim(V) - 1$

$d \in \mathbb{P}(V) \longleftrightarrow \{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \mid \lambda \in k\}$ pour un certain $(x_0, \dots, x_n) \in V \setminus \{0\}$

→ Coord homogènes $[X_0 : \dots : X_n]$ sur $\mathbb{P}(V)$ avec $\forall \lambda \neq 0$ $[\lambda X_0 : \dots : \lambda X_n] = [X_0 : \dots : X_n]$

→ Coord : $\xi_1, \dots, \xi_n$ sur l'ouvert $X_0 \neq 0$ $\quad \xi_i = \dfrac{X_i}{X_0} = \dfrac{\lambda X_i}{\lambda X_0}$ (bien défini !)

$\boxed{\mathbb{P}(V) \simeq V\setminus\{0\} / K\setminus\{0\}}$

I.2) Grassmannienne

On a considéré $\{$ sev de dim 1 de $V\}$

→ 1ère généralisation : soit $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$Gr_k(V) = \{ \text{sev de dim } k \text{ de } V \}$$

* $Gr_1(V) = \mathbb{P}(V)$
* $Gr_{\dim V - 1}(V) = \{ \text{hyperplan de } V \} = \left\{ \begin{smallmatrix} \text{noyaux d'élt} \\ \text{de } V^* \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right\} \xrightarrow[\text{Vect}(-)]{1:1 \ \simeq} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{droit} \\ \text{de } V^* \end{smallmatrix} \right\} = \mathbb{P}(V^*)$

→ Idem : on peut dire si 2 k-plans de V sont proches → TOPOLOGIE

→ Idem : on peut voir $Gr_k(V)$ comme une variété lisse.

Prop : Soit $p \in Gr_k(V)$, $T_p Gr_k(V) \simeq \mathrm{Hom}(p, V/p)$ de dim $k \cdot (\dim V - k)$

→ $Gr_k(V)$ est de dimension $k \times (\dim V - k)$

COORDONNEES (LOCALES) sur $Gr_2(V)$ $\quad V = \mathbb{C}^4$, $2(4-2) = 4$

Soit $X, Y \in \mathbb{C}^4$ tel que la matrice 4×2 $\hat{M} = [X;Y]$ soit de rg 2

($\Leftrightarrow$ (X,Y) libre → engendre un plan)

Alors $\mathrm{Vect}(X,Y) \in \mathrm{Im}$

de plus si $P \in Gl_2(\mathbb{C})$ et $\hat{M}P = [X';Y']$

Alors $\mathrm{Vect}(X,Y) = \mathrm{Vect}(X',Y')$ en effet $\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = cX + dY \end{cases}$ si $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Et étant donné $\hat{M}$ et $\hat{M}'$ tels que $\mathrm{Vect}(X,Y) = \mathrm{Vect}(X',Y')$

$\exists! \, P \in Gl_2$ tq $\hat{M}' = \hat{M}P$

dès lors $Gr_2(V) \simeq \{ \hat{M} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rk}\, \hat{M} = 2 \} / Gl_2(\mathbb{C})$

(analogue de $V \setminus \{0\} / K \setminus \{0\}$)

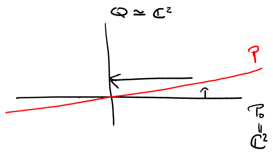
Soit $[\hat{M}] \in Gr_2(V)$ tel que $\hat{M} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$, $P \in Gl_2$

Alors $[\hat{M}] = [\hat{M}P^{-1}]$ et $\hat{M}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1_2 \\ M \end{bmatrix}$ $M \in \mathcal{M}_2$

$$\underbrace{Gr_2(V) \cap \{P \in Gl_2\}}_{\text{ouvert}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline & M \end{pmatrix} \right]_{Gr_2(V)} \longleftarrow\!\shortmid \; M$$

> Localement au voisinage de $\mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, se donner un 2-plan de V c'est se donner une matrice 2×2.



I.3) Variété de Drapeaux

Généralisation ... zon zon !

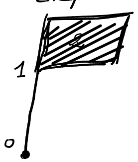
▷ droites de V ▷ k-plan de V

▶ (droite, plan, 3-plan, ...) tel que droite $\subseteq$ plan $\subseteq$ 3-plan $\ldots \subseteq V$

Déf : On se donne $0 < k_1 < \ldots < k_m < \dim(V)$ fixés

$$\mathcal{F}l_{k_1 < \cdots < k_m}(V) = \{ (W_1, \ldots, W_m) \mid \dim(W_i) = k_i, \ \underset{\text{sev}}{W_i} \subseteq \underset{\text{sev}}{W_{i+1}} \subseteq V \}$$

"drapeau"



* $\mathcal{F}l_{k_1}(V) = Gr_{k_1}(V)$
* $\mathcal{F}l_{k_1 < \cdots < k_m}(V) \subseteq Gr_{k_1}(V) \times \cdots \times Gr_{k_m}(V)$

→ TOPOLOGIE INDUITE

→ STRUCTURE DE SOUS-VARIÉTÉ

CALCUL

$(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3+1}$

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_{\mathbb{R}} f(\zeta, (t-z) + (x-iy)\zeta, (x+iy) + (t+z)\zeta) \, d\zeta$$

$$\partial_x \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f \cdot \zeta + \partial_3 f) \, d\zeta$$

$$\partial_x^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2^2 f \times \zeta^2 + 2\zeta \partial_{2,3}^2 f + \partial_3^2 f) \, d\zeta$$

$$\partial_y \Phi = i \int_{\mathbb{R}} (-\partial_2 f \cdot \zeta + \partial_3 f) \, d\zeta$$

$$\partial_y^2 \Phi = i \int_{\mathbb{R}} (i \partial_2^2 f \times \zeta^2 - 2i \partial_{2,3}^2 f \times \zeta + i \partial_3^2 f) \, d\zeta = \int_{\mathbb{R}} (-\partial_2^2 f \cdot \zeta^2 + 2\zeta \partial_{2,3}^2 f - \partial_3^2 f) \, d\zeta$$

$$\partial_z \Phi = \int_{\mathbb{R}} (-\partial_2 f + \zeta \partial_3 f) \, d\zeta \qquad \partial_z^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f - 2\zeta \partial_{2,3} f + \zeta^2 \partial_3 f$$

$$\partial_t \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f + \zeta \partial_3 f) \, d\zeta \qquad \partial_t^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f + 2\zeta \partial_{2,3} f + \zeta^2 \partial_3 f$$

$$(-\partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 + \partial_t^2) \Phi = \int_{\mathbb{R}} 4\zeta \partial_{2,3} f - 4\zeta \partial_{2,3} f = 0$$

Remarque : On utilise $f(u,v,w)$ holo

quand on dit $\partial_x \Phi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) \times \frac{\partial v}{\partial x} \, d\zeta$

car $\frac{\partial}{\partial x}\big(f(u,v,w)\big) = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdots + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}$ or $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = 0 \end{cases}$

Onde et bilan

Soit $\gamma \subseteq \mathbb{P}^1$ et f holomorphe sur $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathbb{T}$

mettons $\mathcal{U} = (Z_0 \neq 0)$ $\quad f\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, \frac{Z_3}{Z_0}\right) = f(u,v,w)$

Alors pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3,1}$

on pose $L_{x,y,z,t}$ la sphère image $\subseteq \mathcal{N}$. $\quad L_{x,y,z,t} = \left\{\binom{Z_2}{Z_3} = M_{x,y,z,t}\binom{Z_0}{Z_1}\right\}$

$$\phi(x,y,z,t) = \int_{\partial\gamma} f \qquad \simeq \mathbb{P}^1 \quad [Z_0 : Z_1] \xmapsto{\ \ } [Z_0 : Z_1]$$

$$= \int_{\gamma \subseteq \mathbb{P}^1} f\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{(t-z)Z_0 + (x-iy)Z_1}{Z_0}, \frac{(x+iy)Z_0 + (t+z)Z_1}{Z_0}\right) \qquad \zeta = \frac{Z_1}{Z_0}$$

$$= \int_0^\infty f\left(\zeta, (t-z) + (x-iy)\zeta, (x+iy) + (t+z)\zeta\right) d\zeta \qquad \gamma = \zeta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

On calcule (dérivation sous $\int d\zeta$)

$$\partial/_{\partial x}\phi, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi, \quad \frac{\partial}{\partial y}\phi \quad \dots$$

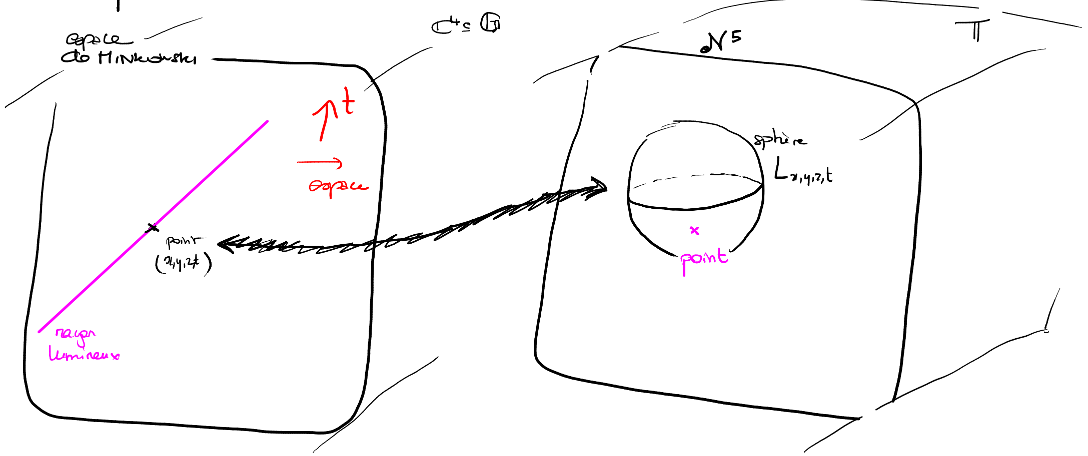
$$[\dots] \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

ϕ onde !

$$\mathbb{M} = Gr_2(\mathbb{C}^4) \longleftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup\!\!\!|$$

$$\mathbb{R}^{3,1} \simeq \left\{\begin{matrix}\text{matrices}\\ \text{hermitiennes}\\ 2\times 2\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \mathcal{N}^5 \quad \text{quadrique réelle.}$$



Onde (vitesse = c = 1) : $\phi(x,y,z,t)$ $\quad \square\phi = 0$ $\longleftrightarrow$ fonction holo f sur un voisinage de γ ds L_{xyzt}

II) Un exemple (Une histoire de Tauto)

II.1) Droites et plans de $k^{\oplus 4}$

$V = k^4$ pour k corps. $\quad$ Alg

On a le diagramme

où

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\text{droite} \subseteq \text{plan} \subseteq V) \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ (\text{plan} \subseteq V) & & (\text{droite} \subseteq V) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & Fl_{1<2}(V) =: \mathbb{W}^{(5)} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ Fl_2(V) & & Fl_1(V) \end{tikzcd}$$

$\mathbb{M}^{(4)} := Gr(2,4) = Fl_2(V)$ $\qquad$ $Fl_1(V) = \mathbb{P}^3 =: \mathbb{T}^{(3)}$

Diagramme des twisteurs en dim 4 ("classique")

Calcul des dimensions

- $\dim(\mathbb{T}) = 3$
- $\dim(\mathbb{M}) = 2 \times (4-2) = 4$
- $\dim(\mathbb{W})$?
  - > On choisit le 2 plan V_2 dans V → 4 dim de choix
  - > On choisit $V_1 \subseteq V_2$ droite → $\mathbb{P}(V_2)$ choix possible → dim = 1

$\dim(\mathbb{W}) = 4 + 1 = 5$

II.2) «Correspondances» $\quad k = \mathbb{C}$

| Ce diagramme est un temple où de vibrantes idées
| Laissent parfois sortir de confuses paroles.

| On se passe d'écrire des forêts de symboles,
| Pour seul'ment contempler des objets familiers.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{W} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ p \in \mathbb{M} & & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

$p \in \mathbb{M}$ donc $p \subseteq V$ est un 2-plan ($\mathbb{C}$-ev)

$\nu^{-1}(p) = \{(d,p) \mid d \subseteq p \quad d \text{ droite de } V\}$

$\mu(\nu^{-1}(p)) = \{d \mid d \subseteq p, d \text{ droite}\} = \mathbb{P}(p) \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

donc (pt) $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{T}$

Réciproquement, soit $\ell \in \mathbb{T}$ $\quad \nu(\mu^{-1}(\ell)) = \{p \in Gr_2(V) \mid \ell \subseteq p\} \simeq \mathbb{P}(V/\ell) \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{M} \leftsquigarrow$ (pt)

Droite associée à $M \in \mathbb{M}$

4

Rappel: $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que l'on écrit $M = [u ; u']$ en colonnes $u, u' \in \mathbb{C}^2$ $\mapsto$ $Gr_2(V) = \mathbb{M}$

$V_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\u'\end{pmatrix}\right\rangle \subset \mathbb{C}^4 = V$

$\longmapsto \mu(\nu^{-1}(V_2)) \subset \mathbb{T}$ isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ "droite"

$\nu^{-1}(V_2) = \{(V_1,V_2) \mid V_1 \subset V_2,\ \dim V_1 = 1\} \subseteq \mathbb{W}$

$\mu(\nu^{-1}(V_1)) = \{V_1 \mid V_1 \subset V_2,\ \dim V_1 = 1\} \subseteq \mathbb{T}$

Or $V_2 \simeq \left\{Z_0\begin{pmatrix}1\\0\\u\end{pmatrix} + Z_1\begin{pmatrix}0\\1\\u'\end{pmatrix} \,\middle|\, Z_i \in \mathbb{C}\right\} \simeq \left\{\begin{pmatrix}id_2\\M\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Z_0\\Z_1\end{pmatrix} \,\middle|\, (Z_0,Z_1) \in \mathbb{C}^2\right\}$

Ainsi $V_1 \subseteq V_2$ est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}id_2\\M\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Z_0\\Z_1\end{pmatrix}\right)$ pour un certain $(Z_0,Z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

c'est l'ensemble $\left\{(Z_0,Z_1,Z_2,Z_3) \in V \,\middle|\, \begin{pmatrix}Z_2\\Z_3\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}Z_0\\Z_1\end{pmatrix}\right\}$

donc la droite $[Z_0:Z_1:Z_2:Z_3]$ avec $\begin{pmatrix}Z_2\\Z_3\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}Z_0\\Z_1\end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
\nu^{-1}(V_2) = \{(V_1,V_2) \mid V_1 \subseteq V_2\} \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \subseteq \mathbb{W} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
M \longmapsto V_2 \in \mathbb{M} & \mu(\nu^{-1}(V_2)) \simeq \{V_1 \subseteq V_2\} \simeq \mathbb{P}(V_2) \subseteq \mathbb{P}(V) \simeq & \mathbb{T}
\end{tikzcd}$$

$$\ell = \left\{[Z_0:Z_1:Z_2:Z_3] \,\middle|\, \begin{pmatrix}Z_2\\Z_3\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}Z_0\\Z_1\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

Quadrique des twisteurs réels

5

Sur $\mathbb{P}^3 = \mathbb{T}$ on pose $\Sigma([Z]) = Z_0\bar{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_3 - Z_2\bar{Z}_0 - Z_3\bar{Z}_1$

$\ell = \left\{\begin{pmatrix}Z_2\\Z_3\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}Z_0\\Z_1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathcal{N} = \{\Sigma = 0\}$ quadrique réelle $\subset \mathbb{T}$ (dim = 5)

$\Sigma([Z]) = (Z)\cdot\begin{pmatrix}\bar{Z}_2\\\bar{Z}_3\\-\bar{Z}_0\\-\bar{Z}_1\end{pmatrix}$

$\ell \subseteq \mathcal{N}$

ssi $\left(\begin{pmatrix}id_2\\M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_0\\Z_1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}\bar{M}\\-id_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{Z}_0\\\bar{Z}_1\end{pmatrix}\right) = 0$

ssi $(Z_0,Z_1)\cdot(id_2\ \ M^t)\begin{pmatrix}\bar{M}\\-id_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{Z}_0\\\bar{Z}_1\end{pmatrix} = 0$

ssi $(Z_0,Z_1)\,(\bar{M} - M^t)\begin{pmatrix}\bar{Z}_0\\\bar{Z}_1\end{pmatrix} = 0$

ssi $\bar{M} = M^t$

ssi $M^* = M$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} & \leftrightsquigarrow & \mathbb{T} \\
\cup & & \cup \\
\text{Matrices hermitiennes } 2\times 2 & \leftrightsquigarrow & \mathcal{N} \\
\wr\!\!\mid & & \\
\mathbb{R}^{3,1} \text{ espace de Minkow} & &
\end{array}$$

Espace de Mink.

$\mathbb{R}^{3,1} = \big(\mathbb{R}^4$ + forme quadratique g $\big)$

$-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$

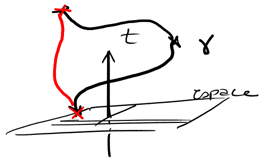
signature $(1,3)$

On a une isométrie

$\mathbb{R}^{3,1} \xrightarrow{\ \sim\ } \{$Matrices 2×2 hermitiennes$\}$ + det

$(x,y,z,t) \longmapsto \begin{pmatrix} t-z & x-iy \\ x+iy & t+z\end{pmatrix}$ $\quad \det = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

espace-temps



Si $(x,y,z) = \gamma(t)$ chemin de l'espace temps.

$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$

$= \sqrt{dt^2 - |\dot{\gamma}|^2 dt^2} = \sqrt{1 - |\dot{\gamma}|^2}\, d|t|$

→ Vous en avez marre de cet exposé, vous vous levez prendre un café → vous comptez 5 min avant de revenir ds la salle.
→ 5 min se sont écoulées

→ Vous partez en courant aux toilettes à la vitesse de la lumière! → vous comptez 5 min avant de revenir ds la salle.
→ moins de 5 min se sont écoulées! $\quad d\tau = \sqrt{1 - \text{vitesse}^2}\, dt$