Exposé Hyperbolicité

29/05/2015

Dans tout l'exposé X variété complexe de dimension n

I) Hyperbolicité

I.1) Hyperbolicité au sens de Brody

Def X est dit hyperbolique (au sens de Brody) si tout $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ holomorphe est constante

Ex : • $\mathbb{C}^n$ et les tores $\mathbb{C}^n/\Lambda$ avec $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ ne sont pas hyperboliques

Prop : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$, $t \in \mathbb{C}$, $x = f(t)$ et $x_0 \in \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ tq $\pi(x_0) = x$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

tq
- $\pi \circ \tilde{f} = f$
- $\tilde{f}(t) = x_0$

Conséquence : X hyperbolique $\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ hyperbolique.

Ex : Cas des courbes.

genre	0	1	2	. . .
Courbure	<0	$=0$	>0	
$\tilde{X}$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{C}$	Δ	
Ex	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{C}/\Lambda$ smooth deg 3 hypersurf $\subset \mathbb{P}^2$	rev. ramifié de $\mathbb{P}^1$ au dessus de 6 pts	. . .
HYPERBOLIQUE	NON	NON	OUI	
K_X	$\mathcal{O}(-2)$	$\mathcal{O}_X$	>0	

$\longrightarrow$ Liens entre la positivité de K_X et l'hyperbolicité ?

Conj. (Kobayashi) X compact kähler hyperbolique $\Longrightarrow$ K_X ample

I.2) Hyperbolicité au sens de Kobayashi

$\Delta := \mathbb{D}(0,1) \subseteq \mathbb{C}$

Déf : (Quasi-norme de Finsler de Kobayashi–Royden sur T_X)

$x \in X$, $\xi \in T_xX$ $\quad k_x(\xi) := \inf\left\{ \frac{1}{\rho} \;\middle|\; \exists f : \rho\Delta \longrightarrow X \text{ tq. } \begin{array}{l} f(0) = x \\ f'(0) = \xi \end{array} \right\}$

$\qquad = \inf\left\{ \lambda > 0 \;\middle|\; \exists g : \Delta \longrightarrow X \text{ tq. } \begin{array}{l} g(0) = x \\ g'(0) = \frac{1}{\lambda}\xi \end{array} \right\}$

$g(t) = f(\rho t)$
$g'(0) = \rho f'(0)$

Morale : ξ unitaire : $k_x(\xi)$ petit (nul) $\iff$ Il existe des $g : \Delta \longrightarrow X$ passant par x avec $g'(0)$ très grand. (arbitrairement grand)

("copies" : isométrique au voisinage de ξ) $\iff$ Il existe des copies de grand disque (arbitrairement grand) $\rho\Delta$ dans X passant par x dans la direction ξ

Rq : • $k_x(\xi) < \infty$ (on peut prendre Δ comme carte au voisinage de x)

• $k_x(\xi + \zeta) \not\leq k_x(\xi) + k_x(\zeta)$ "quasi-norme de Finsler"

Déf : X est dit <u>Infinitésimalement hyperbolique au sens de Kobayashi</u>

si $\forall x \in X$, $\quad k_x(\xi) = 0 \implies \xi = 0$

→ Il n'y a pas de disque arbitrairement grand passant par x dans une direction unitaire ξ.

→ $X = \Delta$, k est la métrique de Poincaré : $\dfrac{|dt|^2}{(1-|t|^2)^2}$

Lemme de Brody $\qquad (X, |\cdot|_X)$ hermitienne

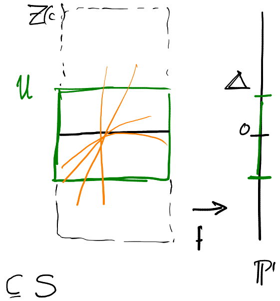
$f : \Delta \longrightarrow X$ holomorphe, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R \geq (1-\varepsilon)|f'(0)|$
et il existe $\psi : R\Delta \longrightarrow (1-\varepsilon)\Delta$ homographie telle que

$$|(f \circ \psi)'(0)|_X = 1 \quad \text{et} \quad |(f\circ\psi)'(s)|_X \leq \frac{1}{1 - |s|^2/R^2} \quad \forall s \in R\Delta$$

III.3) Conclusion

On a une suite $s_n \subseteq S$
$\qquad \zeta_n \subseteq \mathbb{P}^1$

OPS quitte à prendre une sous-suite
$\zeta_n \longrightarrow 0$
$\zeta_n \in \Delta$



donc on a une suite de f° $s_n|_\Delta : \Delta \longrightarrow Z$

$$|s_n'|_\Delta(\zeta_n)| \longrightarrow +\infty \qquad \mathcal{U} = f^{-1}(\Delta) \subseteq S$$

lemme de Brody (sur $\overline{\mathcal{U}}$)

$$\Rightarrow \exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}} \subseteq Z \text{ limite avec } |g'(0)| = 1$$

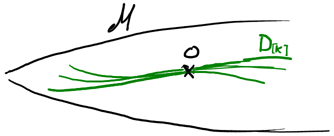
Mais $g \in \overline{\mathcal{U}}$ donc $f\circ g : \mathbb{C} \to \overline{\Delta}$

nécessairement $f \circ g = \zeta_0$ constante.

donc $g : \mathbb{C} \longrightarrow f^{-1}(\zeta_0) = X_{\zeta_0}$ CQFD.

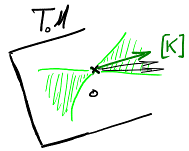
(Un petit supplément qui donne une idée de l'approche de VERBITSKY)

$X_0 = (X, \sigma, c)$ var symp + classe de kähler



$\mathcal{M}$: espace des déformations de X_0

$0 = [X_0] \in \mathcal{M} \qquad T_0\mathcal{M} \cong H^1(X_0, T_{X_0}) \simeq_\sigma H^1(X_0, \Omega^1_{X_0})$



$\begin{pmatrix} \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{M} \\ \zeta \mapsto X_\zeta \end{pmatrix}$ envoie $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ dans $\mathbb{C}\cdot[c] \in H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \simeq T_0\mathcal{M}$

On peut faire varier $[c] \in \mathrm{Kahler}(X_0) \subseteq H^{1,1}(X_0, \mathbb{C}) \cap H^2(X_0, \mathbb{R})$

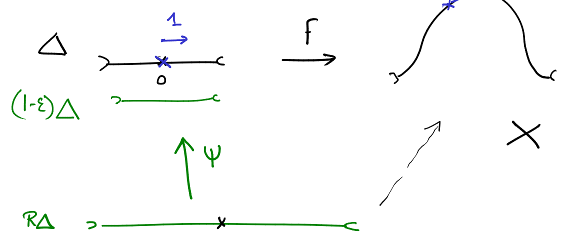
ça nous donne à chaque fois une nouvelle direct° de droit twistorielle. $(\mathrm{codim}_\mathbb{R} = 1)$

Et on sait pas ce qui précède que chacune de ces directions contient au moins un point $[X]$ avec X non hyperbolique. Donc l'ensemble des HK non hyperbolique est de $\mathrm{codim}_\mathbb{R} \leq 2$

---

dem : f grandit les vecteurs tangent à Δ

on munit Δ de la metrique de Poincaré $\dfrac{d|t|^2}{(1-|t|^2)^2}$



On cherche où sur $(1-\varepsilon)\Delta$ elle grandit le plus le vecteur,

$$t \mapsto f'((1-\varepsilon)t) : T_\Delta \longrightarrow T_X$$

a pour norme $N_t = \sup_{|\xi| \leq 1-|t|^2} |f'((1-\varepsilon)t)\xi|_X = (1-|t|^2)\,|f'((1-\varepsilon)t)| \xrightarrow[|t|\to 1]{} 0$

donc $\exists\, t_0 \in \Delta$ tq $N_{t_0} = \sup_{t\in\Delta} N_t$

On va reparamétrer en envoyant $0 \in R\Delta$ sur $(1-\varepsilon)t_0 \in (1-\varepsilon)\Delta$

$$\Psi : \begin{pmatrix} R\Delta \longrightarrow (1-\varepsilon)\Delta \\ s \longmapsto (1-\varepsilon)\dfrac{t_0 - s/R}{1 - \overline{t_0}\, s/R} \end{pmatrix} \text{ homographie} \qquad \begin{aligned} \Psi(0) &= t_0 \\ \Psi'(0) &= \frac{1-\varepsilon}{R}(|t_0|^2 - 1) \end{aligned}$$

$\Psi'(s) = \frac{1-\varepsilon}{R} \dfrac{|t_0|^2 - 1}{(1 - \overline{t_0}s/R)^2}$

Il suffit de prendre R tq $|(f\circ\Psi)'(0)|_X = 1$ ie $|f'((1-\varepsilon)t_0)\cdot\Psi'(0)|_X = 1$

d'où $N_{t_0} \cdot \frac{1-\varepsilon}{R}(1-|t_0|^2) = 1$. ie $R = \dfrac{1-|t_0|^2}{(1-\varepsilon)N_{t_0}}$

$f\circ\Psi : R\Delta \longrightarrow X$

$(f\circ\Psi)'(s) : T_{R\Delta} \longrightarrow T_X \qquad \|(f\circ\Psi)'(s)\|_{P,X} = \sup_{|\xi| < 1-|s|^2/R^2} |(f\circ\Psi)'(s)\cdot\xi|_X = |(f\circ\Psi)'(s)|_X \cdot (1-|s|^2/R^2)$

or par construction $\|(f\circ\Psi)'(s)\|_{P,X} \leq \|f'(\Psi(s))\|_{P,X} \cdot \|\Psi'(s)\|_{P,P} \leq \|f'((1-\varepsilon)t_0)\|_{P,X} \cdot \|\Psi'(0)\|_{P,P} = N_{t_0} \frac{(1-\varepsilon)(1-|t_0|^2)}{R} = 1$

La métrique de Poincaré est max. en 0

d'où $|(f\circ\Psi)'(s)|_X \leq \dfrac{1}{1 - |s|^2/R^2}$

Cor 1 On suppose X compact. Soient $f_n : \Delta \longrightarrow X$ suite de f° holo. telles que $|f_n'(0)|_X \longrightarrow +\infty$

Alors $\exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow X$ tq $|g'(0)|_X = 1$ et $|g'|_X \leq 1$ sur $\mathbb{C}$

dem : On a par le lemme de BRODY une suite $(R_n)_n$, $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$(\varphi_n)_n$, $\varphi_n : R_n\Delta \to (1-\varepsilon)\Delta$

$f_n \circ \varphi_n : R_n\Delta \longrightarrow X$

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$. Alors APCR $\Omega \subseteq R_n\Delta$
et $(f_n \circ \varphi_n)_n$ est equicontinue sur Ω

donc par MONTEL $\exists$ sous suit qui cv uniformément sur tout compact de Ω.

Par extraction diagonale on construit une suit
qui cv unif sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $g : \mathbb{C} \longrightarrow X$
avec $|g'(0)|_X = 1$

Rq: on ne sait rien sur $g(0)$ □

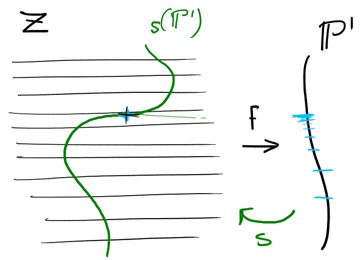
Cor 2 $\big[\ k_x(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\ g : \mathbb{C} \longrightarrow X$ hol. non constant
(Ne passe pas necessairement par x)

Rq : Sur $\mathbb{C}$, $k_x \equiv 0$.
On peut montrer que si $\mathbb{C} \longrightarrow X$ alors $k \equiv 0$ sur son image
donc X n'est pas infinitésimalement hyperbolique au sens de KOBAYASHI.

BILAN :

$$\boxed{\text{INFINIT. HYPERBOLIQUE AU SENS DE KOBAYASHI} \iff \text{HYPERBOLIQUE AU SENS DE BRODY}}$$

III.2) GRANDES DEFORMATIONS



Soit $s \in S$
alors $df \circ ds = id_{T\mathbb{P}^1}$ donc ds ne s'annule pas

ainsi $ds : T\mathbb{P}^1 \longrightarrow TZ \setminus 0$ ← (section nulle)
$\left(\forall \zeta \in \mathbb{P}^1,\ ds_\zeta \cdot \frac{\partial}{\partial\zeta} \in T_{s(\zeta)}Z \setminus 0\right)$

d'où ds et $\zeta \in \mathbb{P}^1$ définissent un pt de $\mathbb{P}(T_Z)$: $\{ds(\zeta)\cdot X \mid X \in T_{\mathbb{P}^1}\} \subseteq T_Z$

Soit $D := \mathbb{P}\ker(df) \subseteq \mathbb{P}T_Z$ $\qquad 0 \longrightarrow \ker df \longrightarrow TZ \xrightarrow{df} f^*T_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$

Prop : $\Big[\ \exists\ (s_n, \zeta_n)_n$ suit de $S \times \mathbb{P}^1$ et $\exists\ p \in D$ telle que
$\mathbb{P}\,ds_n(\zeta_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p \in D$

CERTAINES DEFORMATIONS DE DROITES TWISTORIELLES TENDENT À ETRE HORIZONTALES EN CERTAINS POINT

dem : Sinon en prenant D à l'infini ds $\mathbb{P}T_Z$

Pour $s \in S$, on a $ds : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}(T_Z)$ ne s'approchent pas de D
donc la famille S est équicontinue. Par compacité de $\mathbb{P}^1$
il s'en suit que S est compact

Soit $p \in Z$ considérons $S_p \in \{s \in S \mid p \in s(\mathbb{P}^1)\}$ ensemble des sections passant par p

$S_p \subseteq S$ sous-ensemble analytique. $\Longrightarrow$ compact

et $\varphi_p : \begin{pmatrix} S_p \longrightarrow \mathbb{P}(T_pZ) \\ s \longmapsto \text{direct}^{\text{o}} \text{ tangente à } s(\mathbb{P}^1) \text{ en } p \end{pmatrix}$ or $\forall\ C = s(\mathbb{P}^1)$ pour $s \in S_p$, $N_{C/Z}$ ample
donc φ_p est ouverte

$+$ $\left.\begin{matrix}\text{COMPACTE} \\ \text{OUVERTE}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi_p(S_p) = \mathbb{P}(T_pZ)$ en particulier $\varphi_p(S_p)$ rencontre D_p
ce qui contredit l'hypothèse.

$Z(c) := (X_{diff} \times S^2)$ muni de $(I_S, I_{\mathbb{P}^1})$ sur $TX \otimes TS^2$

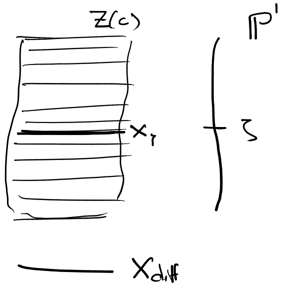
ESPACE DES TWISTEURS

Variété complexe de dimension $2n+1$
Métrique hermitienne produit (pas Kähler)

$f : Z(c) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ fibration holo.

$\left(\pi : Z(c) \longrightarrow X_{diff}\right.$ fibration $\left.C^\infty\right)$

Regroupe toutes les structures | kähler sur X symphols. associées à g



III.1.c) **Def** $\forall x \in X$, $\pi^{-1}(x) \subseteq Z(c)$ est une sous-variété complexe appelée <u>droite twistorielle</u> (notée L_x)

$f_{|L_x} : L_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ biholo.

(c'est l'image d'une section particulière de f)

Prop $s : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Z(c)$ section de f

Alors $C = s(\mathbb{P}^1)$ a pour fibré normal $N_{C/Z} \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 2n}$

$$Sec(F,c) = \{ s : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Z(c) \text{ section de } f \}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} X_{ens} & \longrightarrow & Sec(f,c) \\ x & \longmapsto & L_x \end{array} \right)$$

Thm [KODAIRA] $\Big[$ $Sec(f,c)$ lisse de dimension $4n = h^0(C, N_{C/Z})$

On a $T_{L_x} Sec(f,c) \simeq H^0(L_x, N_{L_x/Z}) \simeq T_x X \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$

Dans la suite, on note $S :=$ compo irred de $Sec(f,c)$ qui contient tout les L_x, $x \in X$

II) DIMENSION DE KODAIRA

II 1) Définitions

Def (Plurigenres) Soit $d \geq 0$
on note $P_d = h^0(X, K_X^{\otimes d})$

Cas d'une courbe :
$P_0 = 1$
$P_1 = g$

surface :
$P_0 = 1$
$P_1 = $ "g"
$P_2 = h^0(X, K_X^2)$
$\geq 1 - h^1(\mathcal{O}) + K \cdot K$

RR $\Rightarrow$ $\chi(K^2) = \chi(\mathcal{O}) + \frac{1}{2}(K^{\otimes 2} \cdot K^{\otimes 2} - K^{\otimes 2} \cdot K)$
$\quad\quad \| $
$h^0(K^2) + h^0(K) - h^1(K^2)$ or $\chi(\mathcal{O}) = h^0(\mathcal{O}) - h^1(\mathcal{O}) + h^2(\mathcal{O})$
$= h^0(\mathcal{O}) + h^0(K) - h^1(\mathcal{O})$

BILAN $P_2 = 1 - h^1(\mathcal{O}) + h^1(K^{\otimes 2}) + K \cdot K \geq 1 - h^1(\mathcal{O}) + K \cdot K$

Def $\kappa(X) = \limsup_{d \to +\infty} \left(\dfrac{\log(P_d)}{\log(d)} \right)$
dimension de KODAIRA

ie $h^0(X, K_X^{\otimes d}) \in \Theta(d^{\kappa(X)})$

Prop $\Big[$ $K_X^{\otimes d} \to X$ induit $\phi_d : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_d - 1}$ alors

$\kappa(X) = \limsup_{d \to +\infty} (\dim \phi_d(X))$

Cor : $\Big[$ X de dim n, $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2, \dots, n\}$ $\Big]$

Exemple : ① $\mathbb{P}^n$ $K_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(-(n+1))$

donc $\forall d > 0$ $H^0(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n}^{\otimes d}) = 0$

$\kappa(\mathbb{P}^n) = -\infty$

② De manière générale si K_X anti-ample

$H^0(X, K_X^{\otimes d}) = 0$ APCR donc $\kappa(X) = -\infty$

③ À l'inverse si K_X ample, $h^0(K_X^{\otimes d}) = \chi(K_X^{\otimes d})$ [HRR]
polynôme en d de deg n

donc $\kappa(X) = n$.

④ Enfin $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ (Tore par ex), $\kappa(X) = 0$

II.2) Classification, le cas des surfaces

Conjecture (Kobayashi) (X kähler hyperbolique $\Rightarrow$ K_X ample)

Surfaces Kähler (compacte)

(1) $\kappa(X) = -\infty$

X est uniréglé donc non-hyperbolique (ce résultat est conjecturé en dim supérieure)

(2) $\kappa(X) = 0$ alors $\exists\ \tilde{X} \longrightarrow X$ avec $\tilde{X} \in \{\text{Tore}, K3\}$

→ les Tores sont non-hyperbolique

→ les K3 sont non-hyperbolique (difficile)

[Toute K3 peut être approchée par des Kummer en déformation
or Kummer $= \frac{\text{Tore}}{\text{invol}}$ est non-hyperb.
donc les courbes entières]

(3) $\kappa(X) = 1$

X elliptique.

→ non-hyperbolique

(4) $\kappa(X) = 2 = \dim(X)$

(*) Si K_X non ample, alors il existe (-2)-courbe ds X donc non-hyperbolique

Exemple:

$E \subseteq Bl_0(X)$ $\quad \underbrace{b^*K_X + E}_{\text{non ample}} = K_{Bl_0(X)}$

$\downarrow b$

X $\quad K_X$ ample hyperbolique

La conj de Kobayashi est vérifiée pour les surfaces

"Si X hyperbolique le seul cas qui reste c'est K_X ample"

En dim supérieure, le cas le plus dur reste de montrer :
$(\kappa(X) = 0) \Rightarrow (X \text{ non-hyperbolique})$

En particulier si $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ Alors $X = (\text{Tore}) \times (\text{Calabi-Yau}) \times (\text{Symp.Holo})$
(quitte à passer à un rev fini)

* Tores (ok!)
* Symp Holo ↓
* CY ???

III) Le cas Hyperkählerien

III.1) Espace des twisteurs

III.1.a) (X, σ) de dim $2n$ est dit symplectique holomorphe si
- $\mathbb{C}[\sigma] = H^{2,0}(X, \mathbb{C})$
- σ^n non deg.

Rq : $T_X \simeq \Omega^1_X$ (produit intérieur par σ)
et donc $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ (et donc $\kappa(X) = 0$)

Soit $c \in \text{Kähler}(X) \subseteq H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$

Thm [YAU] X compacte symp. hol
$\exists!\ g_c$ métrique Riem. $/X$ tq Ricci-plat $\left((X, g_c) \text{ kähler et } [\omega_{g_c}] = c \right)$

On montre $\text{Hol}(g_c) \simeq Sp(n) = U(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{C})$
kähler (preserve I), symp. (preserve σ)

Prop : (M, g) var Riem. avec $\text{Hol}(g_0) \simeq Sp(n)$
$\exists\ I, J, K \in \text{End}(TM)^\nabla$ $(\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0)$ tq
$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1_{TM}$

$\boxed{(M, I, J, K, g) \text{ est appelé variété hyperkählerienne}}$

III.1.b) $\zeta \in \mathbb{P}^1 \simeq S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$

$$I_\zeta = \zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K$$

$$(\zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K)^2 = \zeta_1^2 I^2 + \zeta_2^2 J^2 + \zeta_3^2 K^2 + \zeta_1\zeta_2(IJ + JI) + \zeta_1\zeta_3(IK + KI) + \zeta_2\zeta_3(JK + KJ)$$
$$= (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)(-1) + 0 = -1$$

$$\nabla_g I_\zeta = 0$$

donc
- I_ζ structure complexe
- (I_ζ, g) structure kählerienne $\quad$ on note $X_\zeta = (X_{\text{diff}}, I_\zeta, g_c)$

On a de plus sur X_ζ une structure symplectique $(I_\zeta-)$holomorphe
$\sigma_\zeta = g((J + iK)\_, \_)$

BILAN $\quad \zeta \in \mathbb{P}^1 \longmapsto (X_\zeta, \sigma_\zeta)$ variété symp. hol.