

VOISINAGES INFINITÉSIMAUX DE DROITES PROJECTIVES COMPLEXES ET CORRESPONDANCE TWISTORIELLE.

BASILE PILLET

TABLE DES MATIÈRES

0.1.	Résumé	1
1.	Plan	1
1.1.	Théorie des Épaississements	2
•		2
1.2.	Correspondance de Buchdahl	3
1.3.	Relation épaississement-courbure	3
1.4.	Applications	3
2.	Idées	4
3.	Références	4

0.1. Résumé. Les correspondances twistorielles sont des constructions géométriques qui associent à chaque point d'une variété, une droite projective complexe dans un autre espace appelé "espace des twisteurs". En dimension 4, on a une interprétation physique : cette correspondance associe à un point de l'espace-temps la sphère (droite projective complexe) de tous les rayons lumineux arrivant à ce point à cet instant.

Dans cet exposé on présentera les objets de base de la géométrie complexe infinitésimale (épaississements de sous-variétés, de fibrés) et on verra qu'ils se traduisent à travers la correspondance twistorielles en propriétés riemanniennes (connexions et courbures).

1. PLAN

1.0.1. *Contexte.* On se fixe une variété complexe Z fibrée sur \mathbb{P}^1 .

On fait 2 hypothèses :

- Il y a des sections particulières (verticales) Une par chaque point.
- Si L est l'image d'une section de $f : Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ (droite), alors $N_{L/Z}$ est une somme de $\mathcal{O}(1)$.
En particulier $H^1(L, N_{L/Z}) = 0$ et donc dans toutes les directions cette section se déforme.
Les droites de Z peuvent se déformer dans Z .

En particulier Z est une variété rationnellement connexe.

1.0.2. *EG.*

- Correspondance des twisteurs physique. C'est une forme de philosophie platonicienne : Est-ce que la réalité physique du monde c'est un espace temps qui est une variété pseudo-riemannienne de dimension 4 (ou quelque chose de plus compliqué) ou simplement la réalité se limite à ce qu'on observe (les rayons lumineux qui arrivent à nos yeux). Il se trouve que si on mathématise cette idée en considérant non plus l'espace temps, mais l'espace de toutes

les directions de rayons lumineux en tout point, on trouve une variété de dimension 6 appelée Espace des twisteurs et qui miraculeusement est munie d'une structure de variété complexe. Cette idée a été initialement développée par Sir Roger Penrose dans les années 60.

- Espace total de $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$,
- Espace des twisteurs d'une surface K3 (ou var HK),

1.1. Théorie des Épaississements. Point de vu GA : définir un objet géométrique c'est définir les fonctions dessus. On veut définir ce que sont les **voisinages infinitésimaux d'une droite dans Z**

La droite L est représentée par son faisceau de fonctions \mathcal{O}_L qui est lié aux fonctions sur Z par la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_L \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow i_* \mathcal{O}_L \rightarrow 0$$

où $i : L \hookrightarrow Z$ et \mathcal{I}_L l'idéal des fonctions sur Z qui s'annulent sur L .

C'est-à-dire : Une fonction sur L provient d'une fonction sur Z modulo les fonctions qui s'annulent sur L . (où tout est à comprendre au sens "local")

1.1.1. *Épaississement.* Il suffit de définir $\mathcal{O}_L^{(n)}$ le faisceau des fonctions

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_L^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow i_* \mathcal{O}_L^{(n)} \rightarrow 0$$

sur Z modulo celles qui s'annulent à l'ordre $n+1$ sur L .

La variété épaissie $L^{(n)}$ est alors l'espace topologique L mais possédant beaucoup plus de fonctions : $\mathcal{O}_L^{(n)}$.

Une fonction sur $L^{(n)}$ est un jet d'ordre n de fonctions sur L .

★

- (1) Droite dans \mathbb{P}^3 Considérons \mathbb{P}^3 avec coordonnées homogènes $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$ et définissons L la droite d'équation $X_1 = X_2 = 0$. Le faisceau \mathcal{I}_L est localement engendré par

- $x = X_1/X_0$ et $y = X_2/X_0$ sur U_0
- $u = X_1/X_3$ et $v = X_2/X_3$ sur U_3

Les coordonnées associées sur L sont données par

- $z = X_3/X_0$ sur U_0
- $w = X_0/X_3$ sur U_3

Ainsi sur U_0 , un germe de fonction qui s'annule sur L s'écrit (pas forcément de manière unique)

$$xf(x, y, z) + yg(x, y, z)$$

et un germe de \mathcal{I}^n

$$x^n f_n(x, y, z) + x^{n-1} y f_{n-1}(x, y, z) + \cdots + y^n f_0(x, y, z)$$

Par exemple $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}|_{U_0}$ donne par restriction à L la fonction nulle sur $L \cap U_0$, mais définit une fonction locale non-nulle sur $L^{(1)}$; cette fonction χ vérifie $\chi^2 = 0$. (On peut la voir comme un dx , ou un ε quand on néglige les termes d'ordre 2).

1.1.2. *Épaississement de fibrés.* Avec les notations du paragraphe précédent, soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel. On appelle épaississement de E à l'ordre m sur $X^{(m)}$ un faisceau localement libre \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules tel que

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}^{(m)}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_X(E)$$

c'est-à-dire il étend le fibré E sur X à $X^{(m)}$.

On note $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^{(m)}(E^{(m)})$.

C'est le faisceau des sections sur $X^{(m)}$ d'un "fibré vectoriel". Si on se restreint aux sections obtenues avec des vrais fonctions locales de L , on retrouve E .

1.1.3. *Épaississements de connexions.* Là ça devient plus complexe !

Rappel : L'existence d'une connexion ∇ sur un faisceau cohérent \mathcal{F} entraîne que \mathcal{F} est localement libre. [Malgrange]

<https://justinsmath.wordpress.com/2012/05/30/a-coherent-sheaf-with-connection-is-locally-free/>

Une connexion sur un faisceau **rigidifie** le faisceau. Dans notre contexte : Soit $\nabla^{(m)}$ une connexion sur $E^{(m)}$. Alors elle définit de manière unique un épaississement $E^{(m+1)}$ de $E^{(m)}$!

Ainsi épaissir les fibrés à connexion est un ping-pong entre d'une part l'épaississement de la connexion sur un fibré fixé et d'autre part le choix de l'épaississement du fibré. Il y a des obstructions à chaque cran qu'il faut gérer.

(1) Exemple ?

1.2. **Correspondance de Buchdahl.** On s'intéresse aux voisinages infinitésimaux d'une droite dans Z .

1.2.1. *Espace des sections et correspondance twistorielle.* Soit C l'espace des sections de Z (espace de Douady, espace des cycles de Barlett).

$$(T_C)_s \simeq H^0(L_s, N_{L_s/Z})$$

Mais comme le H^1 s'annule

((à finir))

1.2.2. *EG.* Grassmannienne des 2 -plans privée d'un point et d'un \mathbb{P}^1 .

1.2.3. *Fibré L -triviaux.*

1.2.4. *Fibré à connexion associé.*

1.2.5. *EQV catégorie.* On a le théorème

Théorème 1

Il y a une équivalence de catégories

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fibré à connexion sur } C \\ + \text{ restriction de courbure} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fibré vectoriel holomorphe sur } Z \\ + \text{ trivial sur les droites} \end{array} \right\}$$

1.3. **Relation épaississement-courbure.**

1.3.1. *Théorème.* On a le théorème

Théorème 2

L'équivalence précédente se restreint à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fibré à connexion} \\ \textbf{plate} \text{ sur } C \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fibré holomorphe sur } Z \\ \text{trivial sur les voisinages} \\ \text{infinitésimaux des droites à l'ordre 2} \end{array} \right\}.$$

1.3.2. *Idée de la preuve ?*

1.4. **Applications.**

2. IDÉES

- Épaississements ; correspondance de Buchdahl ; courbure

3. RÉFÉRENCES

- Buchdahl