I) Paramétrer les sous-espaces vectoriels

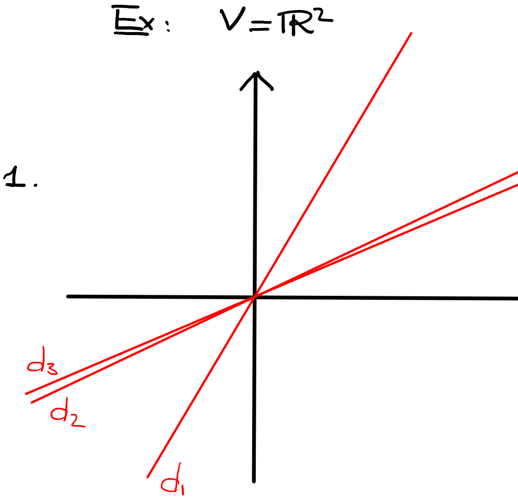
I.1) Espace projectif

V espace vectoriel de dimension finie.

$(\text{droite de } V) :=$ sous-espace vectoriel de V de dimension 1.

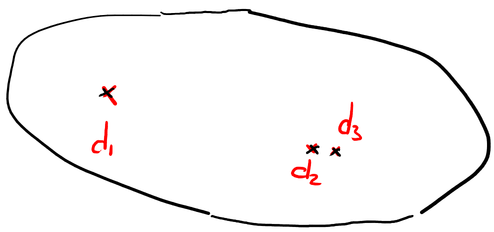
$\mathbb{P}(V) :=$ ensemble des droites de V.

Ex : $V = \mathbb{R}^2$



→ On peut dire que 2 droites sont "proches"

dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$



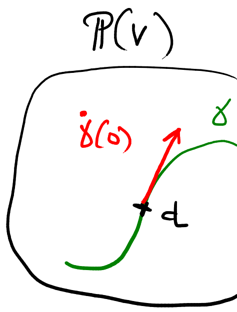
→ Topologie sur $\mathbb{P}(V)$

→ En fait on peut faire mieux que de la topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut faire de la géométrie différentielle

$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{P}(V)$ tel que $\gamma(0) = d \in \mathbb{P}(V)$

On peut donner un sens à $\dot{\gamma}(0) \in$ Espace tangent à $\mathbb{P}(V)$ en d

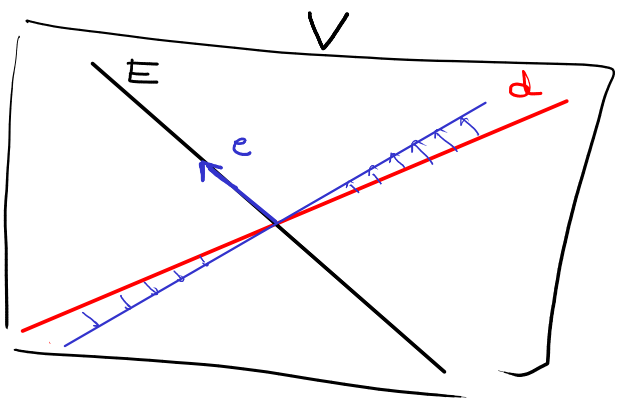
→ c'est la direction dans laquelle la droite est modifiée



Prop

$$T_d\,\mathbb{P}(V) \simeq V/d \quad \text{espace vectoriel de dim } (\dim V - 1)$$

$$\cong E \text{ pour } E \subseteq V \text{ tq } E \oplus d = V$$



→ $\mathbb{P}(V)$ est de dimension $\dim V - 1$

I.2) Grassmannienne

On a considéré $\{\text{sev de dim } 1 \text{ de } V\}$

→ 1^{re} généralisation soit $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$Gr_k(V) = \{\text{sev de dim } k \text{ de } V\}$$

* $Gr_1(V) = \mathbb{P}(V)$
* $Gr_{\dim V - 1}(V) = \{\text{hyperplan de } V\} = \left\{\begin{matrix}\text{noyaux d'élt} \\ \text{de } V^* \setminus \{0\}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{vect}(-)]{\overset{1:1}{\sim}} \left\{\begin{matrix}\text{droit} \\ \text{de } V^*\end{matrix}\right\} = \mathbb{P}(V^*)$

→ Idem : on peut dire si 2 k-plans de V sont proches → TOPOLOGIE

→ Idem : on peut voir $Gr_k(V)$ comme une variété lisse.

Prop : Soit $p \in Gr_k(V)$, $T_p Gr_k(V) \simeq \mathrm{Hom}(p, V/p)$ de dim $k \cdot (\dim V - k)$

→ $Gr_k(V)$ est de dimension $k \times (\dim V - k)$

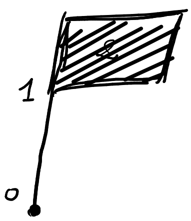
I.3) Variété de drapeaux

Généralison ... zon zon !

▷ droites de V

▷ k-plan de V

▷ (droit, plan, 3-plan, ...) tel que droit $\subseteq$ plan $\subseteq$ 3-plan $\dots \subseteq V$ "drapeau"



Def : On se donne $0 < k_1 < \dots < k_m < \dim(V)$ fixés

$$Fl_{k_1 < \dots < k_m}(V) = \{(W_1, \dots, W_m) \mid \dim(W_i) = k_i,\ W_i \underset{\text{sev}}{\subseteq} W_{i+1} \underset{\text{sev}}{\subseteq} V\}$$

* $Fl_{k_1}(V) = Gr_{k_1}(V)$
* $Fl_{k_1 < \dots < k_m}(V) \subseteq Gr_{k_1}(V) \times \dots \times Gr_{k_m}(V)$

→ TOPOLOGIE INDUITE

→ STRUCTURE DE SOUS-VARIÉTÉ

II) Un Exemple (Une histoire de Tauto)

II.1) Droites et plans de $k^{\oplus 4}$

$V = k^4$ pour k corps.

On a le diagramme

où

$$\begin{tikzcd} & (\text{droite} \subseteq \text{plan} \subseteq V) \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ (\text{plan} \subseteq V) & & (\text{droite} \subseteq V) \end{tikzcd}$$

Abr

$$\begin{tikzcd} & Fl_{1<2}(V) \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ Fl_2(V) & & Fl_1(V) \end{tikzcd} \qquad Fl_{1<2}(V) =: \mathbb{W}^{(5)}$$

$$\mathbb{M}^{(4)} := Gr(2,4) = Fl_2(V) \qquad Fl_1(V) = \mathbb{P}^3 =: \mathbb{T}^{(3)}$$

Diagramme des twisteurs en dim 4 ("classique")

Calcul des dimensions

- $\dim(\mathbb{T}) = 3$
- $\dim(\mathbb{M}) = 2 \times (4-2) = 4$

- $\dim(\mathbb{W})$?
  > On choisit le 2 plan V_2 dans V
  $\to$ 4 dim de choix

  > On choisit $V_1 \subseteq V_2$ droite
  $\to \mathbb{P}(V_2)$ choix possible
  $\to \dim = 1$

$$\dim(\mathbb{W}) = 4 + 1 = 5$$

II.2) «Correspondances» $k = \mathbb{C}$

| Ce diagramme est un temple où de vibrantes idées
| Laissent parfois sortir de confuses paroles.

| On se passe d'écrire des forêts de symboles,
| Pour seul'ment contempler des objets familiers.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{W} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ p \in \mathbb{M} & & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

$p \in \mathbb{M}$ donc $p \subseteq V$ est un 2-plan ($\mathbb{C}$-ev)

$$\nu^{-1}(p) = \{ (d,p) \mid d \subseteq p \quad d \text{ droite de } V \}$$

$$\mu(\nu^{-1}(p)) = \{ d \mid d \subseteq p,\ d \text{ droite} \} = \mathbb{P}(p) \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

donc (pt) $\rightsquigarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{T}$

Réciproquement, Soit $\ell \in \mathbb{T}$ $\quad \nu(\mu^{-1}(\ell)) = \{ p \in Gr_2(V) \mid \ell \subseteq p \} \simeq \mathbb{P}(V/\ell) \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{M} \leftsquigarrow$ (pt)

Coordonnées sur $Gr_2(V)$ (locales)

4

Soit $X, Y \in \mathbb{C}^4$ tel que la matrice 4×2 $\hat{M} = [X;Y]$ soit de rg 2

(ie (X,Y) libre $\longrightarrow$ engendre un plan)

Alors $\mathrm{Vect}(X,Y) \in \mathbb{M}$

de plus si $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $\hat{M}P = [X';Y']$

Alors $\mathrm{Vect}(X,Y) = \mathrm{Vect}(X',Y')$ en effet $\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = cX + dY \end{cases}$ si $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Et étant donné $\hat{M}$ et $\hat{M}'$ tels que $\mathrm{Vect}(X,Y) = \mathrm{Vect}(X',Y')$

$\exists!\, P \in GL_2$ tq $\hat{M}' = \hat{M}P$

dès lors $Gr_2(V) \simeq \{\hat{M} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rk}\, \hat{M} = 2\} / GL_2(\mathbb{C})$

Soit $[\hat{M}] \in Gr_2(V)$ tq $\hat{M} = \left[\begin{array}{c} P \\ \hdashline Q \end{array}\right]$ et $P \in GL_2(\mathbb{C})$

Alors $[\hat{M}] = [\hat{M}P^{-1}]$ et $\hat{M}P^{-1} = \begin{bmatrix} id_2 \\ M \end{bmatrix}$ avec $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

donc sur $Gr_2(V) \cap \{P \in GL_2(\mathbb{C})\}$ (ouvert) $\simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline & M & \end{pmatrix}\right] \longleftarrow\!\shortmid \quad M$$

localement au voisinage de $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ se donner un 2-plan de V c'est se donner une matrice 2×2

---

droite associée à M

$$\{V_1 \subseteq V_2 \subseteq V \mid \dim V_1 = 1\} \subseteq \mathbb{W}$$

$$\underset{[A;B]}{\overset{\shortparallel}{M}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B \end{pmatrix} \right\rangle}_{V_2} \in \mathbb{M} \qquad \mathbb{T} \supseteq \{V_1 \subseteq V_2 \mid \dim(E_1) = 1\} \underset{\mathbb{P}(V_2)}{\overset{\shortparallel\!S}{}}$$

Or $V_2 \simeq \left\{ Z_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} + Z_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B \end{pmatrix} \;\middle|\; z_i \in \mathbb{C} \right\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (Z_0, Z_1) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

Ainsi $V_1 \subseteq V_2$ est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}\right)$ pour un certain $(Z_0, Z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

c'est l'ensemble $\left\{(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}\right\}$

donc la droite $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3]$ avec $\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}$

Quadrique des twisteurs réels

Sur $\mathbb{P}^3 = \mathbb{T}$ On pose $\Sigma([Z]) = Z_0\bar{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_3 - Z_2\bar{Z}_0 - Z_3\bar{Z}_1$

$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{N} = \{\Sigma = 0\}$ quadrique réelle $\subseteq \mathbb{T}$

(dim = 5)

$$\Sigma([Z]) = (Z) \cdot \begin{pmatrix} \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_3 \\ -\bar{Z}_0 \\ -\bar{Z}_1 \end{pmatrix}$$

$\ell \subseteq \mathcal{N}$

ssi $\left(\begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \right) = 0$

ssi $(Z_0, Z_1) \cdot (id_2 \ \ M^t) \begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0$

ssi $(Z_0, Z_1) \left(\bar{M} - M^t\right) \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0$

ssi $\bar{M} = M^t$

ssi $M^* = M$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{TM} & \leftrightsquigarrow & \mathbb{T} \\
\cup & & \cup \\
\text{Matrices hermitiennes } 2\times 2 & \leftrightsquigarrow & \mathcal{N} \\
\wr\wr & & \\
\mathbb{R}^{3,1} \text{ espace de Minkow} & &
\end{array}$$

Espace de Mink.

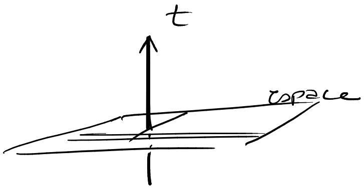
$$\mathbb{R}^{3,1} = \left(\mathbb{R}^4 + \text{forme quadratique } \underset{\substack{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2 \\ \text{signature } (1,3)}}{g} \right)$$

On a une isométrie

$$\mathbb{R}^{3,1} \xrightarrow{\sim} \{\text{Matrices } 2\times 2 \text{ hermitiennes}\} + \det$$

$$(x,y,z,t) \longmapsto \begin{pmatrix} t-z & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix} \qquad \det = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

espace-temps



Si $(x,y,z) = \gamma(t)$ chemin de l'espace temps.

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$
$$= (|\dot{\gamma}|^2 - 1)\, dt^2$$

Onde et bilan

Soit $\gamma \subseteq \mathbb{P}^1$ et f holomorphe sur $U \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathbb{T}$

mettons $U = (Z_0 \neq 0)$ $\quad f\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, \frac{Z_3}{Z_0}\right) = f(u,v,w)$

Alors pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3,1}$

on pose $L_{x,y,z,t}$ la sphère image $\subseteq \mathcal{N}$. $\quad L_{x,y,z,t} = \left\{ \binom{Z_2}{Z_3} = M_{x,y,z,t}\binom{Z_0}{Z_1} \right\}$

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_{h^*\gamma} f \qquad \simeq \mathbb{P}^1, \quad [Z:] \xmapsto{h} [Z_0 : Z_1]$$

$$= \int_{\gamma \subseteq \mathbb{P}^1} f\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{(t-z)Z_0+(x-iy)Z_1}{Z_0}, \frac{(x+iy)Z_0+(t+z)Z_1}{Z_0}\right) \qquad \zeta = \frac{Z_1}{Z_0}$$

$$= \int_0^\infty f\big(\zeta, (t-z)+(x-iy)\zeta, (x+iy)+(t+z)\zeta\big)\,d\zeta \qquad \gamma = \zeta \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

On calcule (dérivation sous $\int d\zeta$)

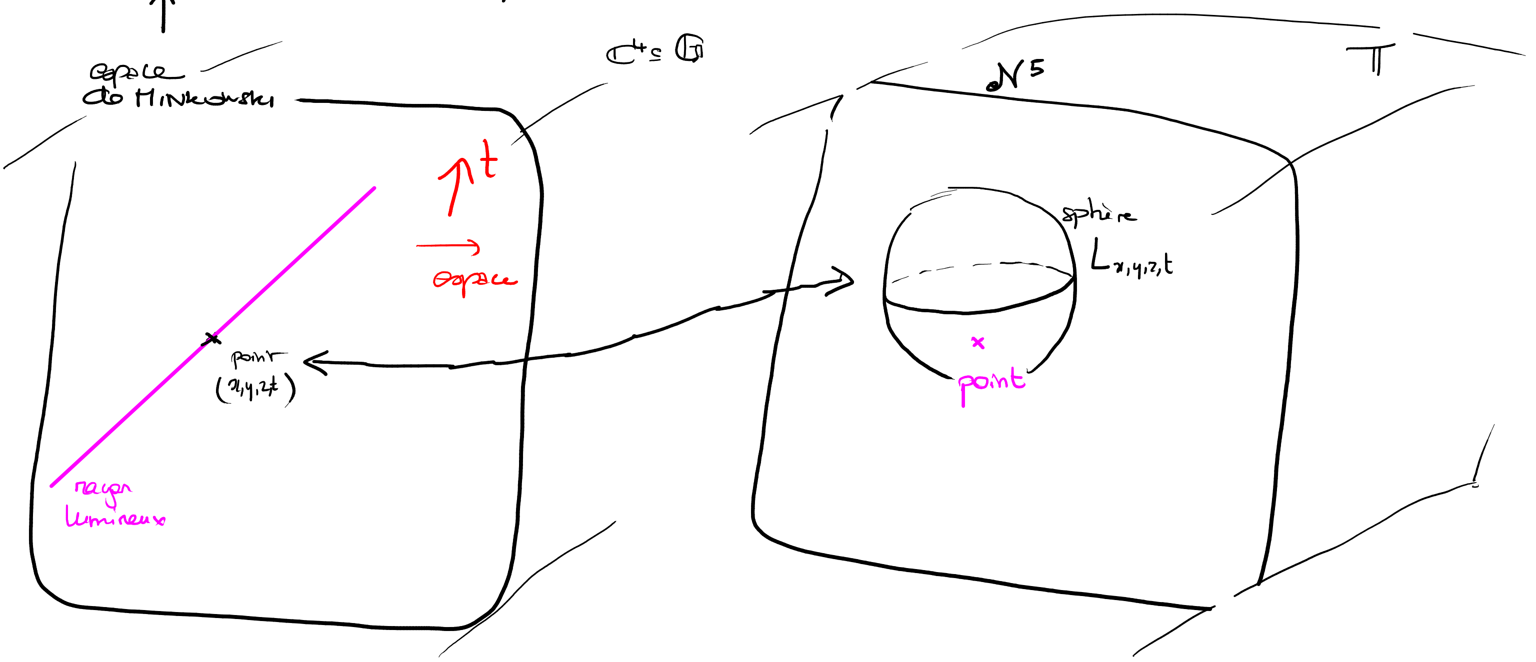
$\partial/\partial x\, \Phi$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi$, $\frac{\partial}{\partial y}\Phi$ ...

$[\ldots]$ $\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad \Phi$ onde !

$$\mathbb{M} = Gr_2(\mathbb{C}^4) \longleftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$$

$$\cup$$

$$\mathbb{R}^{3,1} \simeq \left\{ \begin{matrix}\text{matrices} \\ \text{hermitiennes} \\ 2\times 2\end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \mathcal{N}^5 \quad \text{quadrique réelle.}$$



Onde (vitesse $c = 1$) : $\Phi(x,y,z,t)$, $\quad \Box\Phi = 0 \quad \longleftrightarrow \quad$ fonction holo f sur un voisinage de γ ds L_{xyzt}

Conjugaison sur $\mathbb{P}^3 = \mathbb{T}$

$$\mathrm{Conj} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$
$$[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \longmapsto [\overline{Z_3} : -\overline{Z_2} : -\overline{Z_1} : \overline{Z_0}]$$

(Conj a des pts fixes... étrange !)

Alo $\mathrm{Conj}^2 = \mathrm{id}$ et $\mathbb{P}^1 \simeq \ell \subseteq \mathbb{P}^3$ est stable par Conj (ds son ensemble) ssi (CALCUL EXO) $M^* = M$ (M hermitienne)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{W}_{|\mathcal{M}_2(\mathbb{C})} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
* \circlearrowright \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & & \mathbb{T}_{|\mathcal{M}_2(\mathbb{C})} \circlearrowleft \mathrm{conj}
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{Fix}(*)} = \left\{ \begin{matrix} \text{matrices} \\ \text{hermitiennes} \end{matrix} \right| \simeq \mathbb{R}^{3,1}$$ espace-temps.

$\to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

métrique $-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$

$$\begin{pmatrix} t-z & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid (x,y,z,t)$$

$$\det(M) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Résumon

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{W}^I \subseteq \mathbb{W} \arrow[dl] \arrow[dr, dashed] & \\
\mathbb{M}^I & & \mathbb{T}^I
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{M}^I = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{R}^{3,1} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{Fix}(*)} \underset{\text{sous var réelle}}{\subseteq} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \overset{\text{ouvert}}{\subseteq} \mathbb{M} \qquad \mathbb{T}^I \subseteq \mathbb{T}$$

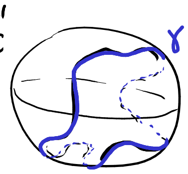
$$(x,y,z,t) \rightsquigarrow \left\{ [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \;\middle|\; \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-z & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right. \subseteq \mathbb{T}^I$$

$\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $\quad \mapsto [Z_0 : Z_1]$

Soit $f : \mathbb{T}^I \longrightarrow \mathbb{C}$ ~~méromorphe~~

Et soit $\gamma \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ courbe (réelle) fermée : lacet

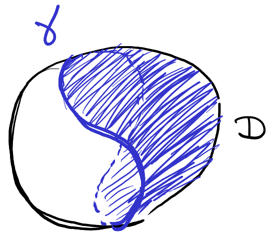
$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$



Alors pour $m = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3+1}$

on a un $\gamma_m \subseteq L_{x,y,z,t} \subseteq \mathbb{T}^{I}$
$$\begin{matrix} \gamma_m & \subseteq & L_{x,y,z,t} \\ \wr\!\! & & \wr\!\! \\ \gamma & \subseteq & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{matrix}$$

et on peut considérer
$$\Phi(m) = \int_{\gamma_m} f$$



$$\int_\gamma f = \int_D df$$

$\Phi(m) = \pi \times$ nombre de sing de f (d'ordre 1) sur L_m

$df \in \Omega^1(\mathbb{T}^I)$

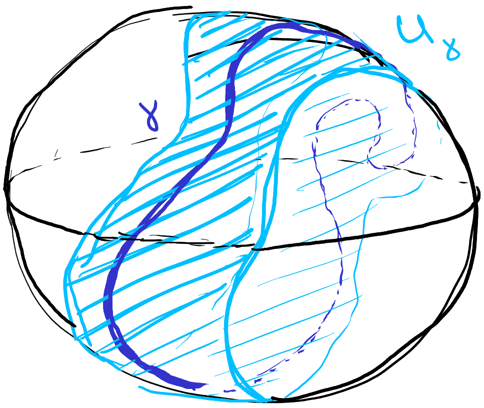
$df_{|L_{x,y,z,t}} \in \Omega^1(\mathbb{P}^1)$

$\longrightarrow$ singularités.

Soit $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \in L_m$

Alors $f([Z]) =$ sur $Z_0 \neq 0$ $f_0\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, \frac{Z_3}{Z_0}\right) = f_0(\zeta, (t-z)+(x-iy)\zeta, (t+z)\zeta+(x$

$\longrightarrow$ f holo sur un voisinage de γ !



Ajouter à f une fonction holo définie sur $D \subseteq \mathbb{P}^1$ tel que $\gamma \underset{H_1}{\simeq} \partial D$, $U_\gamma \subseteq D$ ne change pas Φ

$(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3+1}$

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda,\ (z+t) + \lambda(x+iy),\ (x-iy) + (t-z)\lambda)\, d\lambda$$

$$\partial_x \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f \times \lambda + \partial_3 f)\, d\lambda$$

$$\partial_x^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2^2 f \times \lambda^2 + 2\lambda\, \partial_{2,3}^2 f + \partial_3^2 f)\, d\lambda$$

$$\partial_y \Phi = i \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f \times \lambda - \partial_3 f)\, d\lambda \qquad \partial_y^2 \Phi = i \int_{\mathbb{R}} i\,\partial_2^2 f \times \lambda^2 - 2i\,\partial_{2,3}^2 f \times \lambda + i\,\partial_3^2 f$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -\partial_2^2 f \times \lambda^2 + 2\lambda\, \partial_{2,3}^2 f - \partial_3^2 f$$

$$\partial_z \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 f - \lambda \partial_3 f \qquad \partial_z^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f - 2\lambda\, \partial_{2,3} f + \lambda^2 \partial_3 f$$

$$\partial_t \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 f + \lambda \partial_3 f \qquad \partial_t^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f + 2\lambda\, \partial_{2,3} f + \lambda^2 \partial_3 f$$

$$(-\partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 + \partial_t^2)\Phi = \int_{\mathbb{R}} 4\lambda\, \partial_{2,3} f - 4\lambda\, \partial_{2,3} f = 0$$

$$\ell = \left\{ [Z] \;\middle|\; \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Conj} = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \longmapsto [\overline{Z_3} : -\overline{Z_2} : -\overline{Z_1} : \overline{Z_0}]$$

$$\mathrm{Conj}(\ell) = \left\{ [\overline{Z_3} : -\overline{Z_2} : -\overline{Z_1} : \overline{Z_0}] \;\middle|\; \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ [W_0 : W_1 : W_2 : W_3] \;\middle|\; \begin{pmatrix} -\overline{W_1} \\ \overline{W_0} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \overline{W_3} \\ -\overline{W_2} \end{pmatrix} \right\}$$

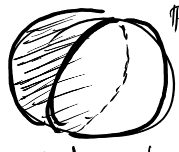
$$= \left\{ [W] \;\middle|\; \begin{pmatrix} -W_1 \\ W_0 \end{pmatrix} = \overline{M} \begin{pmatrix} W_3 \\ -W_2 \end{pmatrix} \right\}$$

point fixes

$$\begin{cases} Z_0 = \overline{Z_3} \\ Z_1 = -\overline{Z_2} \end{cases}$$

courbe

$\{ [Z : T : -\overline{T} : \overline{Z}],\ [Z:T] \in$



$\mathbb{P}^3$

$\mathbb{P}^1$ réel

pas souvent

$$\begin{pmatrix} W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ -W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{M}^{-1} \begin{pmatrix} -W_1 \\ W_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{M}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \overline{JMJ}^{-1} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix} = -\det(M)(M^{-1})^t$$

donc $\overline{JMJ}^{-1} = \overline{-\det(M)(M^{-1})^t}^{-1} = \left(-\frac{1}{\overline{\det}}\right)\overline{M}^t \simeq \overline{M}^t = M^*$

Sur $\mathbb{P}^3$ on pose $\quad \Sigma([Z]) = Z_0\bar{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_3 - Z_2\bar{Z}_0 - Z_3\bar{Z}_1$

$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{N} = \{\Sigma = 0\}$

$\ell \subseteq \mathcal{N} \qquad\qquad \Sigma([Z]) = (Z)\cdot \begin{pmatrix} \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_3 \\ -\bar{Z}_0 \\ -\bar{Z}_1 \end{pmatrix}$

ssi $\quad \left(\begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \right) = 0$

ssi $\quad (Z_0, Z_1) \cdot (id_2 \ \ M^t) \begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0$

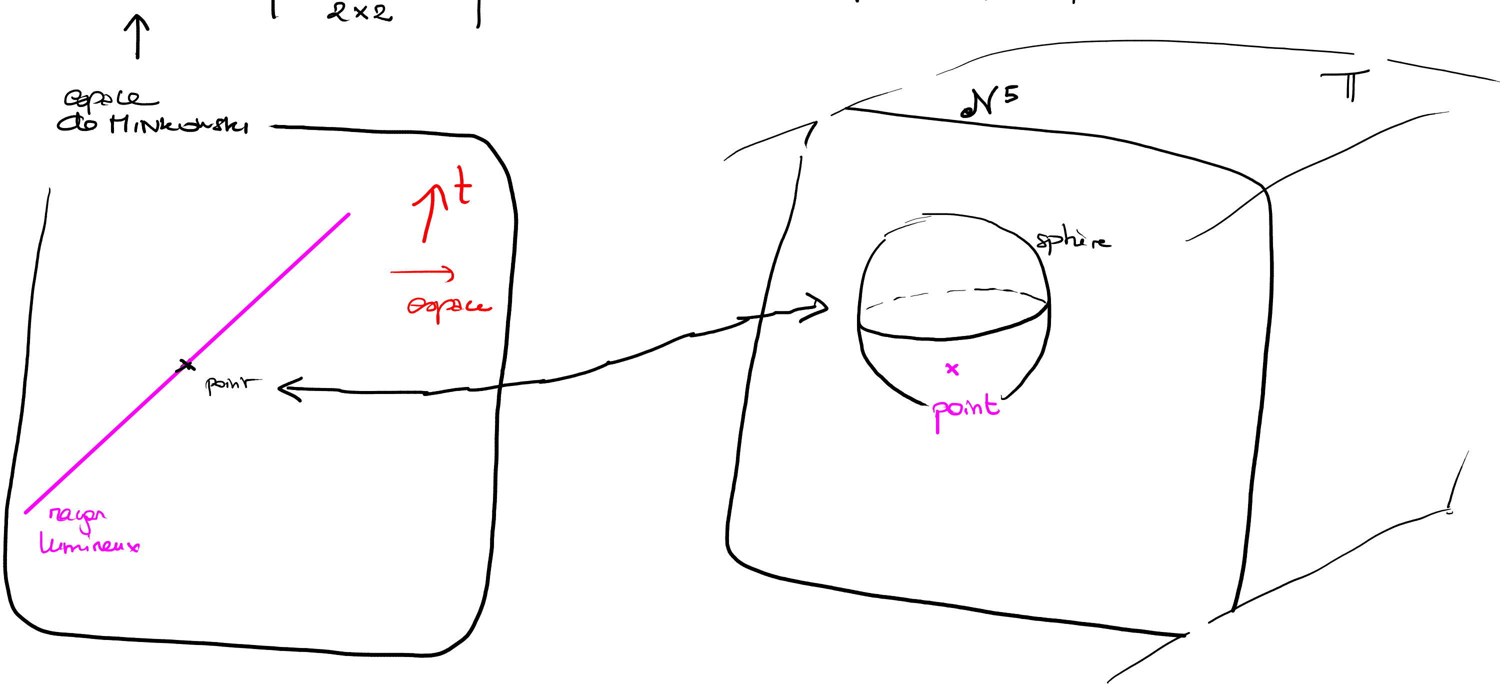
ssi $\quad (Z_0, Z_1)\,(\bar{M} - M^t) \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad$ ssi $\quad \bar{M} = M^t$

ssi $\quad M^* = M$

$\mathbb{M} = Gr_2(\mathbb{C}^4) \longleftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

$\cup$

$\mathbb{R}^{3,1} \simeq \left\{ \begin{matrix} \text{matrices} \\ \text{hermitiennes} \\ 2\times 2 \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \mathcal{N}^5$ quadrique réelle.



Onde (vitesse = c = 1) : $f(x,y,z,t)$ $\quad \longleftrightarrow \quad$ fonction holo sur un voisin. de γ ds L_{xyzt}

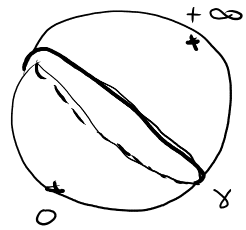
$\Box f = 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt = -i\int_0^{2\pi} e^{\gamma(t)}\,\frac{d\gamma}{\gamma}(t) = -i\int_\gamma \frac{e^s}{s}\,ds$$

$d\gamma(t) = \dot\gamma(t)\,dt$
$= i\,\gamma(t)\,dt$

$\underset{0}{\sim}\ \frac{ds}{s}$ pôle simple

$\underset{\infty}{\sim}\ \frac{e^s}{s}\,ds$ ... pas sympa



$$\int_0^{2\pi} e^{-e^{it}}\,dt = -i\int_\gamma \frac{e^{-s}}{s}\,ds$$

$\underset{\infty}{\sim}\ \frac{e^{-s}}{s}\,ds = s' e^{-1/s'}\,d(1/s') = -\frac{e^{-1/s'}}{s'}\,ds'$ pas sympas

$\underset{0}{\sim}\ \frac{ds}{s}$ ——— pô simple

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{\gamma(t)}}\,dt = -i\int_0^{2\pi} e^{e^s}\,\frac{ds}{s}$$

$\xrightarrow{\infty}$ $\frac{e^{e^s}}{s}$ pôle pas gentil.

$\xrightarrow[0]{}$ $\frac{e^{e^s}}{s}$ pôle simple. residu $= e$

$$\frac{e^{e^s}}{s} = \frac{e^{1+s+\cdots}}{s} = e^1\cdot\frac{e^s}{s} + o(\ )$$

$$= e^1\cdot\frac{1+s+\cdots}{s} + o(\ )$$

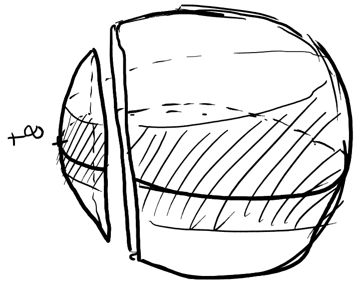
$$\int_{\hat\gamma\subseteq L_{x,y,z,t}} F = \int_0^\infty f(\zeta,\ (t+t)+(\cdot\,)\zeta,\ \text{—}\ )\,d\zeta$$

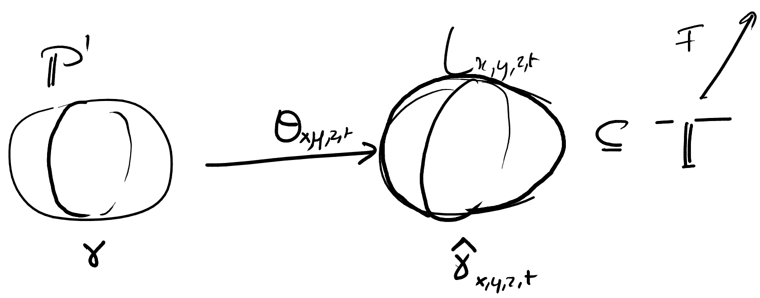
$$\| \qquad\qquad //$$

$$\int_{\gamma\subseteq\mathbb{P}^1} (F\circ\theta)\,d\theta$$

<u>Ex de F :</u>

$\exp\left(\exp\left(\frac{1}{z-i}\right)\right)$?





$\theta : [Z_0 : Z_1] \longmapsto [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3]$

$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}$

$\theta(\zeta) = (\zeta,\ \cancel{(\ )+(\ )\zeta},\ (\ )(\ )\zeta)$

$d\theta = (1,\ (\ ),(\ ))\,d\zeta$?