Exposé Groupe de travail Déformations (14/10/2015)

Le théorème de Bogomolov-Tian-Todorov

0) CADRE : LES CALABI-YAU

Notation: X var compacte complexe lisse de dim n $\qquad K_X = \Omega^n_X$
$M = X_{diff}$ var. C^∞ sous-jacente

Def: X C.Y. si X kähler compacte.
et $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ ⇔ $\exists$ v forme holo de deg max $(=n)$ globale sur X qui ne s'annule jamais.

Ex :
* Tore $= \mathbb{C}/\Lambda$ (n'a pas de 1-forme holo non constante)
* K3, surfaces abéliennes (2-Tores, ...) en dim 2.
* Quintique lisse dans $\mathbb{P}^4$ (formule adj $\longrightarrow K_X = 0$) dim 3

Rappel

Thm (Kuranishi) $\longrightarrow$ Existence d'un espace analytique de def univ.
X compacte complexe, $H^0(X,TX) = 0$ Alors
X admet un espace analytique de def. universelles $Def(X)$
de plus $Def(X)$ est universel pour toute les fibres

$Def(X) \hookrightarrow Teich(M)$
$X_t = (M, J_t) \longmapsto [J_t] = [S_t] \qquad S_t \in \Gamma(X, T_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1})$

Rappel : $H^1(X,TX) \xrightarrow{KS} T_0 Def(X)$ ← QUOI C'EST ÇA ???

⚠ $Def(X)$ n'est pas une variété lisse a priori !

le cas calabi yau

Thm (Bogomolov-Tian-Todorov)
X C.Y. (compact)
$H^0(X, T_X) = 0$
} Alors $Def(X)$ est lisse en 0 d'espace tangent $H^1(X,TX)$

Idée, motivation

On a $\quad Def(X) \subseteq Teich(M)$ $\quad$ on en sait pas plus.

$\quad\quad\quad\quad 0 \mapsto I$

Soit $s_1 \in H^1(X, TX)$ on veut $s(t) = \sum_{i \geq 0} s_i t^i \in Def(X)$

alors $s_1 = \dot{s}(0)$ donc $Def(X)$ lisse

$T_0 Def(X) = H^1(TX)$

On va devoir résoudre

$$\bar{\partial} s(t) + \frac{1}{2}[s(t), s(t)] = 0$$

EQ de MAURER-CARTAN

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\partial} s_1 = 0 \\ \bar{\partial} s_2 + [s_1, s_1] = 0 \\ \dots \end{cases}$$

(I) EPAISSISSEMENTS

X var analytique complexe. $\quad (X, \mathcal{O}_X)$ espace analytique.

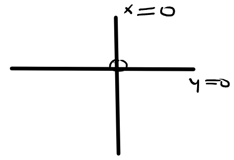
morph. structurel : $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow[!]{} (pt, \mathcal{O}_{pt} = \mathbb{C})$

$pt \xrightarrow{x} X$ correspond à $x \in X$ vu comme sous-var.

induit morphisme $x^{\#} : \left(\begin{array}{ccc} x^*\mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_{pt} = \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array} \right)$ de faisceaux.

QUE PEUT-IL SE PASSER $\longrightarrow$ PAS LISSE

1. PAS IRREDUCTIBLE $\quad X = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[x,y]/(xy)\right)$



2. PAS REDUIT $\quad X = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\right)$

$\longrightarrow$ EPAISSISSEMENT

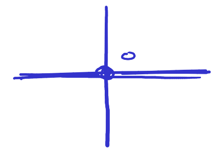
POURQUOI $\operatorname{Def}(X)$ pour X C.Y. EST IRRED. AU VOIS DE 0 ?

Thm $h^{pq}(X_t)$ loc constant

donc pour t petit $\quad h^{1,n-1}(X_t) = h^{1,n-1}(X)$

$$\underset{\displaystyle \dim H^1(X_t, \Omega^{n-1}_{X_t})}{\parallel} = \dim H^1(X_t, TX_t)$$

$\longrightarrow$ Tous les espaces "tangents" ont $\hat{m}$ dim. $\quad \neq$



$$\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}_0^2} = \frac{(x,y)/(xy)}{\left((x,y)/(xy)\right)^2} = \frac{\sum a_i x^i + \sum b_j x^j}{\cdots} = \{a_1, b_1\}$$

$$A_n = \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$$

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

$$\left(\sum_{i \leq n} a_i t^i\right) \times \left(\sum_{i \leq n} b_i t^i\right) = \sum_{i \leq n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) t^i$$

$$\begin{array}{ccccc} X/A_{n+1} & \longrightarrow & X/A_n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (A_{n+1}) & \longrightarrow & (A_n) & \longrightarrow & (\mathbb{C}) \\ & & a_i t^i & \longmapsto & a_0 \end{array}$$

X a un épaississement naturel :

$$X/A_n = (X, \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} A_n)$$

On va le déformer infinitésimalement

$$\left(X_s/A_n \quad , s \in D_X(A_n) \right)$$

mais la var. $/\mathbb{C}$ sous-jacente sera toujours $(X, \mathcal{O}_X)$

X_s/A_n sera "C.Y. sur A_n"

II) PREUVE

$$D_X(A_n) = \left\{ s = \sum_{i=1}^{n} s_i t^i \quad s_i \in \Gamma(M, T^{1,0} \otimes \Omega^{0,1}) \;\middle|\; \bar\partial s + \tfrac{1}{2}[s,s] = 0 \right\} \Big/ \sim$$

$$= \left\{ s \in \Gamma(M, T^{1,0} \otimes \Omega^{0,1}) \otimes (t)_{\subseteq A_n} \;\middle|\; \text{MAURER-CARTAN} \right\} \Big/ \sim$$

$$D_X(A_1) = H^1(X, TX)$$

$s \in D_X(A_n)$ $\qquad s \in \Gamma(M, T_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1}) \otimes (t)$

$$\mathcal{O}_{X_s/A_n} = \left\{ f \in \mathcal{C}_X^\infty \otimes_{\mathbb{C}} A_n \;\middle|\; (\bar\partial + s \circ \partial) f = 0 \right\}$$

f holo pour la structure s.

$(X, \mathcal{O}_{X_s/A_n})$ on le note X_s/A_n espace ANALYTIQUE sur $\mathrm{Spec}(A_n)$

$f = \sum_{i=0}^{n} (f_i) t^i \qquad f_i \in \mathcal{C}_X^\infty \qquad$ <u>mais</u> $\quad s = t\sigma$

MAURER CARTAN $\Rightarrow$ $\bar\partial f_0 = 0$

f_0 holo.

$s \in D_X(A_n) \rightsquigarrow X_s/A_n$ $\qquad$ EPAISS. DE $(X, \mathcal{O}_X)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_{A_n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}_{A_n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\
D_X(A_n) \arrow[r] & \mathrm{Def}(X)_{A_n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Def}(X) \arrow[d] \\
 & (A_n) \arrow[r] & (\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

On a $s_1 \in D_X(A_1) = H^1(TX)$

ON VEUT

$$s = \sum_{i \geq 0} s_i t^i \;\middle|\; \bar\partial s + \tfrac{1}{2}[s,s] = 0$$

$\rightarrow$ struct complexe infinit.

On va construire par réc. $s \in D_X(A_n)$ tel que $s = s_1 t + \cdots + s_n t^n$

On veut montrer que $\forall n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} D_X(A_{n+1}) \longrightarrow D_X(A_n) \\ s = \sum_{i=1}^{n+1} s_i t^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i t^i = \underline{s} \end{pmatrix} \text{ surjective}$$

$$T^1(X_s) = \left\{ s + \varepsilon s' \;\middle|\; s' \in \Gamma(M, T^{1,0} \otimes \Omega^{0,1}) \otimes A_n \text{ et } \bar\partial(s + \varepsilon s') + \tfrac{1}{2}[s + \varepsilon s', s + \varepsilon s'] = 0 \right\}$$

$\varepsilon^2 = 0$

$$= \left\{ s + \varepsilon s' \;\middle|\; \text{———} \text{ et } \underbrace{\bar\partial s' + [s, s'] = 0} \right\}$$

Lemme T^1 – Lifting [Ran]

Si $\phi_n : T^1(X_{s}/A_n) \longrightarrow T^1(X_{\underline{s}}/A_{n-1})$ surj. $\forall s \in D_X(A_n)$

Alors $D_X(A_{n+1}) \longrightarrow D_X(A_n)$ surj.

$s = \sum_{i>0}^{n} s_i t^i \qquad \underline{s} = \sum_{i>0}^{n-1} s_i t^i$

$$\begin{array}{ccc} T^1(X_s/A_n) & \longrightarrow & T^1(X_{\underline{s}}/A_{n-1}) \\ s+\varepsilon s' & \longmapsto & \underline{s}+\varepsilon \underline{s}' \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{ccc} D_X(A_{n+1}) & \longrightarrow & D_X(A_n) \\ \sigma & \longmapsto & \underline{\sigma} \end{array}$$

Soit $s \in D_X(A_n) \qquad s = \sum_{i=1}^{n} s_i t^i$

consid. $\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} s_i t^i}_{\underline{s}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i s_i t^{i-1} \varepsilon}_{\dot{s}\varepsilon} \in T^1(X_{\underline{s}}/A_{n-1})$

Alors $\exists \sigma_n$ tq $\underbrace{\underline{s} + \dot{s}\varepsilon + \sigma_n t^n \varepsilon}_{\sigma} \in T^1(X_s/A_n)$ par surj de ϕ_n

$\sigma_n \in T(T^{1,0} \otimes \Omega^{0,1})$

donc on doit avoir $\bar{\partial}\sigma + \frac{1}{2}[\sigma,\sigma] = 0$

à l'ordre n en t, 1 en ε

$$\bar{\partial}\sigma_n + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} [s_i, (n-i+1)s_{n-i+1}] + [i s_i, s_{n-i+1}]\right) = 0$$

$$\bar{\partial}\sigma_n + \frac{n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} [s_i, s_{n-i+1}] = 0$$

Posons $\hat{s} = s + \frac{\sigma_n}{n+1} t^{n+1} \in T(M, T^{1,0} \otimes \Omega^{0,1}) \otimes \mathfrak{m}_{A_{n+1}}$

ELLE VERIFIE (MC) à L'ORDRE 1, 2, ... n

→ il suffit qu'elle la vérifie à l'ordre $n+1$

$$\frac{1}{n+1}\bar{\partial}\sigma_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [s_i, s_{n+1-i}] = 0 \qquad \text{ok !} \qquad \hat{s} \in D_X(A_{n+1})$$

RAPPEL :

$$T^1(X_s) = \{ s+\varepsilon s' \mid s' \in \Gamma(M, T^{1,0}\otimes\Omega^{0,1})\otimes A_n \text{ et } \bar\partial(s+\varepsilon s') + \tfrac{1}{2}[s+\varepsilon s', s+\varepsilon s'] = 0 \}$$

$\varepsilon^2 = 0$
$$= \{ s+\varepsilon s' \mid \text{———} \text{ et } \underbrace{\bar\partial s' + [s,s'] = 0}\}$$

Rappel $s = t(s_1 + s_2 t + \cdots)$

$$s' = \sum_{i=0}^{n} s'_i t^i$$

$$\bar\partial s'_0 = 0$$
$$\bar\partial s'_1 + [s_1, s'_0] = 0$$
$$\bar\partial s'_2 + [s_2, s'_0] + [s_1, s'_1]$$

[...] $T^1(X_s) \simeq H^1(X, T_{X_s/A_n})$

Or X_s/A_n déformat° (petite) de X/A_n

et

$\omega \in H^0(X, \Omega^n_X)$ alors $\omega + \text{"}ot\text{"} \in H^0(X, \Omega^n_{X/A_n})$

$\Omega^n_X \simeq \mathcal{O}_X$ $\qquad$ $\Omega^n_{X/A_n} \simeq \mathcal{O}_{X/A_n}$

donc $T_{X/A_n} \otimes \Omega^1_{X/A_n} \longrightarrow \mathcal{O}_{X/A_n} \simeq \Omega^n_{X/A_n}$

on peut identifier $T_{X/A_n} \simeq \Omega^{n-1}_{X/A_n}$

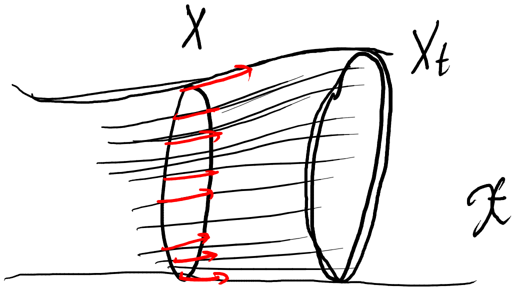
D'AUTRE PART $h^{n,0}(X/A_n) = \dim_{A_n} H^0(X, \Omega^n_{X/A_n}) = \dim_{A_n} H^0(X, \mathcal{O}_{X/A_n}) = 1$

Thm Hodge ... $1 = h^{n,0}(X/A_n) = h^{n,0}(X_s/A_n)$ donc $\Omega^n_{X_s/A_n} \simeq \mathcal{O}_{X_s/A_n}$

donc $\dim H^1(X, T_{X/A_n}) = \dim H^1(X, \Omega^{n-1}_{X/A_n})$
$= h^{n-1,1}(X/A_n)$

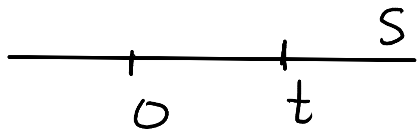
thm Hodge $h^{p,q}$ loc constant $\longrightarrow$ $= h^{n-1,1}(X_s/A_n)$
$= \dim H^1(X, \Omega^{n-1}_{X_s/A_n})$

III) OBSTRUCTION



$$0 \to TX_0 \to T\mathcal{X}|_{X_0} \to N_{X_0/\mathcal{X}} \to 0$$

$$H^0(T\mathcal{X}|_{X_0}) \to T_0 S \to H^1(X, TX)$$



Si quand $t \to 0$
on trouve un champ de vecteur
holo le long de X
(section de $T\mathcal{X}|X$)

Alors en intégrant ce champ de vecteur
on a un biholo $X_0 \xrightarrow{1:1} X_t$
donc X_t n'est pas une vraie déformation de X

$H^1(X, TX)$ = Obstruction à ce qu'on trouve un tel champ de vecteur le long de X
= Obstruction à ce que $\mathcal{X} \to S$ soit loc. trivial.
= Obstruction à ce qu'il n'y ait pas de déformat°

$H^2(X, TX)$ = " Obstruction à l'obstruction "
= Obstruct° à la déformation.

Quand on construit s

$s = s_1 t + s_2 t^2 + \dots$

$\bar{\partial} s_1 = 0$

$\bar{\partial} s_2 + \frac{1}{2}[s_1, s_1] = 0$

Il faut donc $[s_1, s_1]$ $\bar{\partial}$ exact pour un bon choix de s_1

Rq $\bar{\partial}[s_1, s_1] = 2[\bar{\partial} s_1, s_1] = 0$ donc $[s_1, s_1]$ donne un elt de H^2

si on avait choisit $s_1' = s_1 + \bar{\partial}\sigma$

$[s_1', s_1'] = [s_1, s_1] + \bar{\partial}\big([\sigma, s_1] + [\sigma, \bar{\partial}\sigma]\big) = [s_1, s_1]$ ds H^2

donc $[s_1, s_1] \in H^2(X, TX)$: obstruct° à ce que s_2 existe

COROLLAIRE GÉNÉRAL : [KOD, SPEN]

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } H^2(X,TX) = 0 \\ \underline{\text{Alors}} \text{ il n'y a pas d'obstruction à la déf.} \\ \Rightarrow \text{Def}(X) \text{ germe de var lisse.} \end{array}}$

on a montré $[s_1, s_1] = 0$ ds H^2 et de même pour ds le cas CY les obst. supérieures.

<u>MAIS</u> ⚠ $H^2(X, TX) = H^2(X, \Omega_X^{n-1})$ X C.Y.

$= H^{n-1,2}(X)$

dim $X = 3$ $= H^{2,2}(X) \underset{\text{dualité}}{\cong} H^{1,1}(X) \neq 0$ si X kähler.