1. Un premier quotient symplectique : $\mathbb{C}^2//U(1)$

1.1. **Structures et notations.** Soit $M = \mathbb{C}^2$ munit des coordonnées $w = (w^1, w^2) = (x^1 + iy^1, x^2 + iy^2)$, de la structure kählérienne :

$$g = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}y^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}y^2)^2$$

et de la structure complexe

$$I\frac{\partial}{\partial w^k} = i\frac{\partial}{\partial w^k}$$

qui induisent une structure symplectique réelle

$$\omega = g(\_, I\_) = \mathrm{d}w^1 \wedge \mathrm{d}\bar{w^1} + \mathrm{d}w^2 \wedge \mathrm{d}\bar{w^2} = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}y^1 + \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}y^2$$

On notera une expression de la forme

$$\sum_{k=1,2} f(x^k, y^k)$$

par $f(x, y)$.

Ainsi les structures kählériennes et symplectiques s'écrivent

$$g = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 \qquad \omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

1.2. **L'action du groupe $U(1)$.** Le groupe de lie $G = U(1)$ agit sur M par homothétie

$$g \cdot w = (gw^1, gw^2)$$

On remarque que cette action préserve la forme symplectique ω.

A un point $w \in M$ fixé, on peut associer une application lisse

$$\begin{pmatrix} G & \longrightarrow & M \\ g & \mapsto & g \cdot w \end{pmatrix}$$

Qui s'exprime dans les coordonnées réelles par

$$e^{i\theta} \cdot (x + iy) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) + i(\cos(\theta)y + \sin(\theta)x)$$

D'où en $\theta = 0$,

$$e^{i\theta+it} \cdot (x + iy) = (\cos(t)x - \sin(t)y) + i(\cos(t)y + \sin(t)x) = x + iy + t(-y + ix) + o(t)$$

Ainsi la différentielle en $g = 1$ nous donne

$$\begin{pmatrix} T_1G & \longrightarrow & T_wM \\ it & \mapsto & -ty\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

On notera X^t_w le vecteur ainsi obtenu. En faisant varier w, on obtient un champ de vecteur X^t lisse sur M, ce champ de vecteur représente l'action infinitésimale de G sur M.

1.3. **Application moment.** Considérons $\omega(X^t, \_)$ le produit intérieur de ω par X^t.

$$\omega(X^t, \_) = -ty\,\mathrm{d}y - tx\,\mathrm{d}x = -\frac{t}{2}\,\mathrm{d}(yy + xx)$$

Notons $\mu^t : M \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$w = (x, y) \mapsto -\frac{t}{2}(xx + yy)$$

Dès lors le couplage $(t, w) \mapsto \mu^t(w)$ nous donne une application $\mu : M \to \mathfrak{u}(1)^\vee \cong \mathbb{R} : w \mapsto -\frac{1}{2}(xx+yy)$. Enfin cette application commute avec l'action de G (sur M et sur $\mathfrak{u}(1)^\vee$).

1.4. **Sous-variété de moment.** Considérons dès lors $N_a = \mu^{-1}(a)$. Pour $a \neq 0$ c'est une sous-variété (non vide pour $a < 0$). De plus l'équivariance de μ entraine que N_a est stable sous l'action de G.

On fixera dans toute la suite un $a = -\frac{1}{2}$. Alors $N_a = \left\{(w^1, w^2) \in M \;\middle|\; |w^1|^2 + |w^2|^2 = -2a = 1\right\}$ est $\mathbb{S}^3_{\mathbb{C}^2}$ la sphère unité de $\mathbb{C}^2$.

1.5. **Quotient symplectique.** G agit proprement sans point fixe sur N_a, et l'on peut donc considérer la variété quotient $S = N_a/G$.

On sait qu'on peut associer à tout $w \in N_a = \mathbb{S}^3_{\mathbb{C}^2}$ la droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$ qu'elle engendre, ce qui nous donne une application $N_a \to \mathbb{P}^1$ qui s'écrit $(w^1, w^2) \mapsto [w^1 : w^2]$. Or la fibre au dessus d'un élément $[z : z'] \in \mathbb{P}^1$ est exactement l'ensemble des (gz, gz') pour $g \in U(1)$. C'est la fibration de Hopf.

Le quotient s'identifie donc à $\mathbb{P}^1$.

Forme symplectique quotient. Notons φ l'application quotient $\mathbb{S}^3_{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{P}^1$. On notera $z = u + iv$ la coordonnée correspondant à w^1/w^2. Au point $(w^1, w^2) = (0, 1)$ on a

$$\varphi_* \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial u} \quad \varphi_* \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial v}$$

Maintenant par action de Sl_2 et PGl_2 sur respectivement $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{P}^1$, on peut envoyer le point $(0, 1)$ et son image $[0 : 1]$ sur n'importe quel point, en transportant avec eux les vecteurs tangents. En particulier, on peut déterminer des relevés X et Y de ∂_u et ∂_v dans $\mathbb{S}^3$.

Par exemple la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de $Sl_2(\mathbb{C})$ envoie $[0 : 1]$ sur $[z : 1]$ dans $\mathbb{P}^1$. Si $z = u + iv$ alors son action sur $T\mathbb{S}^3$ est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \partial_{x^1}, \partial_{y^1} & \mapsto & \partial_{x^1}, \partial_{y^1} \\ \partial_{x^2} & \mapsto & u\partial_{x^1} + v\partial y^1 + \partial x^2 \\ \partial_{y^2} & \mapsto & u\partial_{y^1} - v\partial_{x^1} + \partial y^2 \end{array}$$

2. Un exemple de quotient hyperkählérien : $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 /// U(1)$

2.1. **Structures et notations.** Soit $M = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ munit des coordonnées (w, z) où $w = (w^1, w^2) = (x^1 + iy^1, x^2 + iy^2)$ et $z = (z^1, z^2) = (u^1 + iv^1, u^2 + iv^2)$. On considère sur M les structures complexes suivantes

$$I = \begin{bmatrix} i1_2 & 0 \\ 0 & -i1_2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i1_2 \\ i1_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ces trois structures complexes vérifient les relations quaternioniques $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1_4$ et de plus sont orthogonales pour la structure kählérienne

$$g = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2$$

Ces données munissent M d'une structure de variété hyperkählérienne.

2.2. **Action du groupe unitaire.** Comme précédemment, le groupe $G = U(1)$ agit sur M par homothétie : $g \cdot m = (g \cdot w, g \cdot z) = (gw^1, gw^2, gz^1, gz^2)$. Son action en coordonnées réelles s'écrit

$$e^{i\theta}[(x, y), (u, v)] = [(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y), (\cos(\theta)u - \sin(\theta)v, \sin(\theta)u + \cos(\theta)v)]$$

Comme précédemment on peut calculer les vecteurs tangents qui proviennent de l'algèbre de Lie de G et qui représentent les déplacement infinitésimaux le long d'une orbite.

$$X^t_m = -ty\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial y} - tv\frac{\partial}{\partial u} + tu\frac{\partial}{\partial v}$$

2.3. **Structure tri-symplectique.** Les trois formes de Kähler $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ associées au structures complexes I, J et K munissent M de 3 structures symplectiques réelles. De plus l'action du groupe G préserve chacune de ces 2-formes.

$$\begin{array}{rcl} \omega_I & = & -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\ \omega_J & = & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}u + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}v \\ \omega_K & = & -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}v + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}u \end{array}$$

En calculant le produit intérieur de des formes symplectiques par les vecteurs provenant de l'algèbre de Lie de G, on obtient 3 applications moment

$$\begin{array}{rcl} \mu_I & = & \\ \mu_J & = & \\ \mu_K & = & \end{array}$$