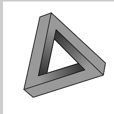
Cohomologie des figures impossibles

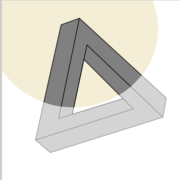
Basile Pillet



Bonjour, je m'appelle Basile Pillet et je suis doctorant à l'institut de mathématiques de Rennes. Je vais vous parler d'un outil assez sophistiqué d'algèbre et de géométrie qu'on appelle *Cohomologie* et je vais vous le présenter sur l'exemple du *triangle de Penrose*.

Le *triangle de Penrose*, c'est l'objet impossible dessiné ici. Il a été créé par le physicien et mathématicien Sir Roger Penrose dans les années 50. Il a alors été présenté comme étant "*L'impossibilité dans sa forme la plus pure*".

On va se servir de la cohomologie pour identifier ce qui empêche un tel objet d'exister.

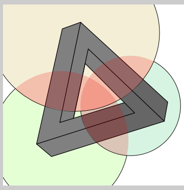


On part de notre objet impossible

Si on ne regarde que le coin en haut à gauche ...

... on remarque qu'il n'a plus rien d'impossible !

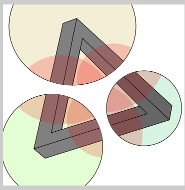
On peut le réaliser en vrai avec deux bouts de bois et un peu de colle



Revenons à notre *triangle de Penrose* ou plutôt son dessin

On peut découper ce dessin en trois parties autour de chaque coin.

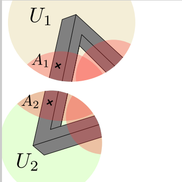
...parties qui s'intersectent



Éclatons donc notre dessin. On a trois dessins qui chacun représente des objets RÉALISABLES

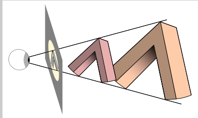
Ces trois dessins doivent être recollés suivant les zones rouges pour obtenir le dessin d'origine.

Notre figure impossible est LOCALEMENT possible. Mais si les trois dessins peuvent se recoller pour donner le dessin du *triangle de Penrose*, les trois objets physiques eux ne peuvent pas ! C'est ce qu'on va voir.



Appelons U_1, U_2 et U_3 les trois parties qui recouvrent le dessin. Prenons un point A sur le dessin qui soit à la fois dans U_1 et U_2

Après découpage, le point A se dédouble : une copie A_1 dans U_1 et une copie A_2 dans U_2

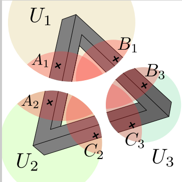


Si maintenant on construit un coin numéro 1, il aura une certain taille. Et pour qu'il apparaisse tel que sur le dessin, il faut le mettre à une certaine distance de l'observateur. Si on l'avait construit plus petit, il aurait fallu le mettre plus près.

Mais le coin numéro 2 n'est pas forcément à la même distance de l'observateur. Imaginez que l'on construise l'objet 1 immense mais très loin et l'objet 2 petit mais très près.

$$d_{12} = \frac{\text{distance du point représenté par } A_1 \text{ à l'observateur}}{\text{distance du point représenté par } A_2 \text{ à l'observateur}}$$

Pour garder cette information en mémoire, on va noter d_{12} le rapport des distances entre ces deux points.



On recommence avec un point B sur l'intersection de U_1 et U_3 et un point C sur l'intersection de U_2 et U_3

$$d_{13} = \frac{\text{distance du point représenté par } B_1 \text{ à l'observateur}}{\text{distance du point représenté par } B_3 \text{ à l'observateur}}$$

$$d_{23} = \frac{\text{distance du point représenté par } C_2 \text{ à l'observateur}}{\text{distance du point représenté par } C_3 \text{ à l'observateur}}$$

On définit de même entre l'objet 1 et l'objet 3 le rapport d_{13}

et le rapport d_{23}

Recollement

Pour se recoller Il faut

- que A_1 et A_2 se superposent : $d_{12} = 1$
- que B_1 et B_3 se superposent : $d_{13} = 1$
- que C_2 et C_3 se superposent : $d_{23} = 1$

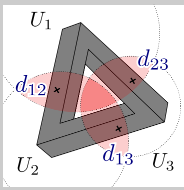
À quelle(s) condition(s) les trois objets construits se recollent-t-ils ?

Il faut

que A_1 et A_2 se superposent ... donc qu'ils soient à la même distance de l'observateur

... donc que le rapport d_{12} vaille 1.

Ces conditions sont nécessaire pour que l'objet existe réellement. Sinon on pourrait avoir des problèmes comme dans le film Inception.

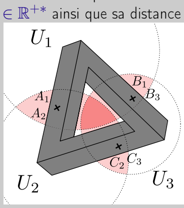


Les d_{ij} forment un cocycle.

Que voyons-nous ?

C'est l'information importante sur cette construction.

Que ce passe-t-il si on multiplie toutes les dimensions de l'objet 1 par $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ ainsi que sa distance à l'observateur ?



Rien ne change

$d_{12} \mapsto \lambda_1 d_{12}$

$d_{13} \mapsto \lambda_1 d_{13}$

$d_{23} \mapsto d_{23}$

Cependant

Il existe une manière de redimensionner les trois objets telle que

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1$$

(c'est-à-dire de recoller les trois coins en un vrai *triangle de Penrose*)

si et seulement si

$$d_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \qquad d_{13} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \quad , \qquad d_{23} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

on dit alors que les d_{ij} forment un **cobord**.

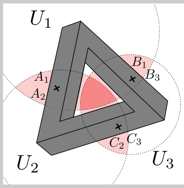
Si c'est le cas alors

$$d_{12} \times d_{23} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = d_{13}$$

Donc le *triangle de Penrose* existe si et seulement si les d_{ij} forment un cobord.

$$H^1(U,\mathbb{R}^{+*}) = \frac{\{\text{triplets } (d_{12}, d_{13}, d_{23})\}}{\{\text{triplets } (d_{12}, d_{13}, d_{23}) \text{ tels que } d_{ij} = \lambda_i/\lambda_j\}}$$

Si l'on regarde l'ensemble des triplet d_{12}, d_{13}, d_{23} mais qu'on force ceux qui s'écrivent comme des quotients de λ_i à s'annuler on a construit un objet de ce qu'on appelle **espace de cohomologie**



distance(A_1) $<$ distance(B_1)

distance(B_3) $<$ distance(C_3)

distance(A_2) $>$ distance(C_2)

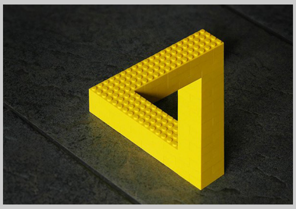
On va montrer que c'est absurde

1. On voit que le point A_1 est plus proche que le point B_1
2. Le point B_3 est plus proche que le point C_3
3. Le point C_2 est plus proche que le point A_2

$$\begin{aligned} d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\ &= \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(A_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\ &< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\ &< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_3)} \\ &< \frac{\text{distance}(B_1)}{\text{distance}(C_3)} \\ &< \frac{\text{distance}(B_1)}{\text{distance}(B_3)} \\ &< d_{13} \end{aligned}$$

Le *triangle de Penrose* n'existe pas.

En regroupant tout ça



L'intérêt n'est pas de montrer que le *triangle de Penrose* est impossible ! L'intérêt c'est qu'en mathématique (en algèbre et en géométrie), quand quelque chose ne marche pas, eh bien la vie ne s'arrête pas. Il y a **des choses**, de nouveaux objets, qui empêchent que ça marche et l'étude de ces **obstructions** se révèle bien souvent très riche