STRUCTURES DE HODGE

(William Hodge 1903-1975
(Ecossait))

> Motivations sur les structures de Hodge, intérêts autres que pour les var. de Shimura

[Claire Voisin 2002]

> Traiter ce qu'il y a dans [Milne] pour Shimura

→ Mq les domaines sym. hermitiens sont des espaces de paramètres de structures de Hodges enrichies

---

I Intro

• V $\mathbb{R}$-ev, J structure cmplx sur V ie $\begin{cases} J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \\ J^2 = -\mathrm{Id}_V \end{cases}$

J se prolonge à $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ en $J^{\mathbb{C}}$ par $\mathbb{C}$-linéarité

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = \{ z \otimes v \mid z \in \mathbb{C}, v \in V \}$$

et il est diagonalisable de vp i et $-i$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = E_i(J^{\mathbb{C}}) \oplus E_{-i}(J^{\mathbb{C}})$$

de plus sur $\mathbb{C} \otimes V$ on a une conjugaison naturelle donnée par $z \otimes v \longmapsto \bar{z} \otimes v$

- V s'identifie aux points fixes sous cette conj.
- $\overline{E_i(J)} = E_{-i}(J)$

> La donnée de V et de la décomposit° $\mathbb{C} \otimes V = E_i \oplus \overline{E_i}$ est le premier avatar fondamental de structure de Hodge.

• X var. complexe,
X_{diff} var. différentielle sous-jacente

$x \in X$ on a $E = TX_{diff,x}$ $\mathbb{R}$-ev muni d'une structure cmplx. J_x
(J_x provient de (x_i))

- donc on a la décomposition $TX^{\mathbb{C}}_{diff,x} = \mathbb{C} \otimes E =: T_xX^{(0,1)} \oplus T_xX^{(1,0)}$

$$\overline{T_xX^{1,0}} = T_xX^{0,1}$$

TX_{diff} fibré tangent (fibré des germes de champs de vecteurs)

$TX^{(1,0)} \subseteq TX^{\mathbb{C}}$ sous-fibré des germes de champs de vecteurs holomorphes $J\vec{v} = i\vec{v}$

- On dualise pour obtenir

$\Omega_{X,\mathbb{R}} = TX_{diff}^{*}$ faisceau des germes de 1-forme C^∞

$\Omega_X^{1,0} = (TX^{1,0})^{*}$ ——————— holomorphe

$\mathbb{C} \otimes \Omega_{X,\mathbb{R}} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}$

$\overline{\Omega^{1,0}} = \Omega^{0,1}$ Autre structure de Hodge

- On peut définir les k-formes

$\Omega^k_{X,\mathbb{R}} = \Lambda^k \Omega_{X,\mathbb{R}}$ faisceau des germes de k-formes C^∞

$\Omega_X^{p,q} = \Lambda^p \Omega_X^{1,0} \otimes \Lambda^q \Omega_X^{0,1}$ ——————— p+q-formes

avec p variables holomorphes

q ——— anti-holomorphes

On peut alors écrire

$\mathbb{C} \otimes \Omega^k_{X,\mathbb{R}} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^{(p,q)}$ et de plus $\overline{\Omega_X^{p,q}} = \Omega_X^{q,p}$

Autre structure de Hodge

- <u>Cohomologies</u> :

$H^k := H^k_{dR}(X_{diff}, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-ev des k-formes fermées modulo les k-formes exactes

$H^{p,q} := \check{H}^0(X, \Omega_X^{p,q})$ gp ~~de cohomologie associé~~ sections du faisceau $\Omega_X^{p,q}$

<u>Thm</u> (Hodge) $\left[\ H^k = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}\ \right]$ et $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$

Ce genre de choses nous apprend beaucoup sur la topologie de X

II Définitions

V $\mathbb{R}$-ev , $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} V =: V(\mathbb{C})$ est appelé complexifié de V

- Une base V est une $\mathbb{C}$-base de $V(\mathbb{C})$
- La conjugaison sur $V(\mathbb{C})$ est donnée par $\overline{z\otimes v} = \bar{z}\otimes v$

Prop : Si $W \subseteq V(\mathbb{C})$ sous-$\mathbb{C}$-ev
et si $\overline{W} = W$ Alors $\exists!\, W_{\mathbb{R}} \subseteq V$
tq $W = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}}$

$$W_{\mathbb{R}} := \Big\{ \sum_{\text{fini}} v \in V \;\Big|\; 1\otimes v \in W \Big\}$$

Def (une Décomposition de Hodge)
Soit V $\mathbb{R}$-ev est la donnée de $(V^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ famille de $\mathbb{C}$-sev de $V(\mathbb{C})$ satisfaisant :

- $V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} V^{p,q}$
- $\forall\, p,q\in\mathbb{Z}$ $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$

- Structure de Hodge : donnée de V et d'une décompo. de Hodge sur V
- Type : $\{(p,q)\in\mathbb{Z}^2 \mid V^{p,q} \neq 0\}$

Def (Poids)
On pose $V_n^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$, $\overline{V_n^{\mathbb{C}}} = V_n^{\mathbb{C}}$
donc on note $V_n \subseteq V$ le sev tel que $V_n^{\mathbb{C}} = V_n(\mathbb{C})$

- Si $V = V_n$ on dit qu'on a une structure de Hodge de poids n
- Si V est muni d'une décompo. de Hodge, on a gratuitement $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$

Ex : (V, J) $\mathbb{R}$-ev + structure cmplx

$$V(\mathbb{C}) = \underbrace{E_i(J) \oplus E_{-i}(J)}_{V^{(-1,0)}\oplus V^{(0,-1)}}$$

V muni d'une structure de Hodge de poids -1

Structures entières et rationnelles

- V $\mathbb{Q}$-ev de dim $< \infty$

Structure de Hodge rationnelle : Structure de Hodge sur $V(\mathbb{R})$ telle que V_n soit un $\mathbb{Q}$-ev (on dit V_n défini sur $\mathbb{Q}$)

- V $\mathbb{Z}$-module libre de rg $< \infty$

Structure de Hodge entière : Struct. de H. rationnelle sur $V(\mathbb{Q})$

> Passage $V \rightsquigarrow V(\mathbb{C})$

on peut remonter de $V_n^{\mathbb{C}}$ à $V_n^{\mathbb{R}}$ naturellement pas sur $\mathbb{Q}$ ...

Ex : Structure de Hodge bidon

$\mathbb{Q}(m)$ c'est $\mathbb{Q}(m) = \mathbb{Q} = V$

$V(\mathbb{C}) = V^{-m,-m}$ où $V^{-m,-m} = \mathbb{C}$

→ poids $= -2m$

→ pareil $\mathbb{R}(m)$, $\mathbb{Z}(m)$

Filtration (autre vision)

V, $V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$ S.H. de poids n

On pose $F^p = \bigoplus_{\substack{r \geq p \\ r+s=n}} V^{r,s} \subseteq V(\mathbb{C})$

Alors $F^\bullet$: $\dots \subseteq F^{p+1} \subseteq F^p \subseteq F^{p-1} \subseteq \dots \subseteq V(\mathbb{C})$

Prop : $\left[V^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q} \right]$ → On peut retrouver la SH avec $F^\bullet$

III Un tore pas comme les autres

Def $\left[\mathbb{S} := \mathbb{U}_1 \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \right.$ vu comme var. (groupe alg.) $\left. / \mathbb{R} \right]$ $\mathrm{Spec}\left(\dfrac{\mathbb{R}[x,y,z,z^{-1}]}{x^2+y^2-1} \right)$

- $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}_1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times \simeq \mathbb{C}^\times$
- $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+iy,\ z)$$

$\rightarrow$ Donc $\mathbb{S}$ tore.

- $\mathbb{S} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ rotation et homothétie d'où $\mathbb{S} \to Gl_2(\mathbb{R})$

$\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z \neq 0\}$

$$\to \mathbb{C}^\times \longrightarrow Gl_2(\mathbb{R})$$
$$a+ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

On a une structure réelle (conjugaison sur $\mathbb{S}(\mathbb{C})$) naturelle

$\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(A_{\mathbb{S}}, \mathbb{C})$ qui provient de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$

On peut choisir un iso $\mathbb{S}_\mathbb{C} \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$

tel que
- la conjugaison soit $\begin{pmatrix} \mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C}) \\ (z_1, z_2) \longmapsto (\bar{z}_2, \bar{z}_1) \end{pmatrix}$
- L'injection soit $\begin{pmatrix} \mathbb{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C}) \\ z \longmapsto (z, \bar{z}) \end{pmatrix}$

Représentation de $\mathbb{S}$

- $X^*(\mathbb{S}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{S}_\mathbb{C}, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

(Rappel : $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}$ $\quad \{z \mapsto z^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$)

- La conjugaison agit par $(p,q) \longmapsto (q,p)$

Soit maintenant V $\mathbb{R}$-ev

et $\mathbb{S} \xrightarrow{h} Gl_V$ action

Alors en complexifiant $h_{\mathbb{C}} : \mathbb{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(V(\mathbb{C}))$

est une représentation d'un tore

donc [cf Charles] ou [Milne : Gp alg I]

$$V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\chi \in X^*(\mathbb{S})} \underbrace{\{ w \in V(\mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \quad h_{\mathbb{C}}(t) w = \chi(t) w \}}$$

$$= \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} V^{p,q}$$

On a de plus $\forall \sigma \in Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, $\forall \chi \in X^*(\mathbb{S})$ $\quad \sigma(V_\chi) = V_{\sigma\chi}$

c'est-à-dire $\boxed{\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}}$

» Une action $\mathbb{S} \curvearrowright V$ donne une structure de Hodge sur V

– Sur les réels :

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C}) \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}} Gl(V(\mathbb{C}))$$

$$z \longmapsto (z, \bar{z}) \longmapsto \quad w \in V^{p,q} \mapsto z^{-p} \bar{z}^{-q} w$$

donc $\forall z \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$

$$V \longrightarrow V(\mathbb{C}) \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}(z)} V(\mathbb{C})$$

$$v \longmapsto 1 \otimes v \qquad\qquad 1 \otimes v' \in V$$

$$1 \otimes v = \sum w_{p,q} \longmapsto \sum z^{-p} \bar{z}^{-q} w_{p,q} = 1 \otimes v'$$

» Si on a une SH

on a la réciproque : on définit une action sur V ainsi

Bilan :

- $\left\{ \begin{matrix} SH \\ \text{sur } V \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{rep. de } \mathbb{S} \\ \text{sur } V \end{matrix} \right\}$ naturel en V

- $\{ SH \} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{rep de} \\ \mathbb{S} \end{matrix} \right\}$

et pareil pour : rationnel / entière.

Exemples :

$\mathbb{R}[X] / X^2+1$

- $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ structure cmplx $\longleftrightarrow$ $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$
  donné par $h(i) = J$
  morph. de $\mathbb{R}$-alg.

  Alors $h_{|\mathbb{C}^\times} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow Gl(V)$
  structure de Hodge de type $(-1,0),(0,-1)$

- Structure $\mathbb{Q}(m)$ de poids $-2m$
  correspond à $h : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$
  $z \longmapsto (z\bar{z})^m$

$\{SH\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{rep de } \mathbb{S}\} \longleftarrow$ catégorie abélienne ? monoïdale

---

IV Some more structure

1) Produit tensoriel

V, W SH de poids n et m

- $V \otimes_{\mathbb{R}} W$ est muni d'une déc. de Hodge
  donnée par $$(V \otimes_{\mathbb{R}} W)^{p,q} = \bigoplus_{\substack{r+r'=p \\ s+s'=q}} \left(V^{r,s} \otimes V^{r',s'} \right)$$

- En terme de représentations :
  $$(V, h_V) \otimes (W, h_W) = (V \otimes W, h_V \otimes h_W)$$ produit tensoriel de rep. de $\mathbb{S}$

Rmk : neutre $\mathbb{R}$ muni de la SH canonique (de poids 0) :
$C = \mathbb{C}$ avec $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ (C'est aussi $\mathbb{R}(0)$)

représentation : Cela correspond à la représentation
$\mathbb{S} \to \mathbb{G}_m$ donnée sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times$, $z \longmapsto 1$

2) Morphismes

- $\varphi : V \longrightarrow W$ morph. de SH si $\forall p,q \quad \varphi_{\mathbb{C}}(V^{p,q}) \subseteq W^{p,q}$
- $\varphi : (V,h_V) \to (W,h_W)$ ———— si morphisme de représentation.

Bilan : SH $\longleftrightarrow$ Rep. de $\mathbb{S}$ est une équivalence de catégories monoïdale

---

3) Tenseurs de Hodge

Déf : $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ et (V,h) R-SH de poids n

Un (r-) tenseur de Hodge
est une forme r-linéaire $t : V^r \longrightarrow R$
telle que $\forall z \in \mathbb{C}, \forall v_i \in V(\mathbb{R}) \quad t(h(z)v_1, \dots, h(z)v_r) = (z\bar{z})^{-\frac{nr}{2}} t(v_1 \cdots v_r)$
ou telle que $\forall p_i, q_i \quad \left(\sum(p_i - q_i) \neq 0\right) \Rightarrow \forall v_i \in V^{p_i q_i} \quad t_{\mathbb{C}}(v_1^{p_1 q_1} \dots v_r^{p_r q_r}) = 0$

Rq : c'est la donnée d'un morph de rep : $t : V \otimes V \cdots \otimes V \longrightarrow R(-nr/2)$

Opérateur de Weil

Si (V,h) SH , $h_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^* = \mathbb{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL(V)$

on a donc un endomorphisme distingué de V :
$C := h(i) : V \longrightarrow V$ opérateur de Weil

Il vérifie
- $C^4 = id_V$
- $C_{\mathbb{C}} : w \in V^{p,q} \longmapsto i^{p-q} w$
- $C^2 : v \in V_n \longmapsto (-1)^n v \quad \longrightarrow$

$$\begin{array}{cccc} V_n & V_{n+1} & V_{n+2} & \cdots \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} Id & & & \\ & -Id & & \\ & & Id & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ex : (V,h) SH de type $(-1,0),(0,-1)$
Alors $C = J$ structure cmplx sur V

Prop : t tenseur de Hodge alors
$t(Cv_1, \dots, Cv_r) = t(v_1, \dots, v_r)$

en effet $t(Cv_1 \dots Cv_r) = t(h(i)v_1 \cdots h(i)v_r) = (|i|^2)^{-nr/2} t(v_1 \cdots v_r)$

Polarisation

Def Une polarisation Ψ de (V,h) est un tenseur de Hodge tq $\Psi(-,C-)$ sym. définie >0

Ex : Sur (V,h) de type $(-1,0),(0,-1)$ $\quad J=C=h(i)$

- t tenseur de Hodge ssi $\big(t(J-,J-)=\big)t(C-,C-)=t$
- Ψ est une polarisation signifie Ψ forme hermitienne.

V Variation de Structures de H.

1) Préliminaires avec Grassmann

Def : V un K-ev de dim n et $0<d<n$
$G_d(V)=\{\Lambda^d W\in\mathbb{P}(\Lambda^d V)\mid W\subseteq V \text{ sev de dim } d\}$

Explication : $W\subseteq V$ sev de rg d et soit $\{e_1,\dots,e_d\}$ une base

Alors les bases de $\Lambda^p W$ sont indexées par les $\{f_1,\dots,f_p\}\subseteq\{e_1,\dots,e_d\}$ parties de card d

d'où $\dim(\Lambda^p W)=\binom{d}{p}$

$\rightarrow$ En particulier $\Lambda^d W$ est de rang 1 (droite vectorielle de $\Lambda^d V$)

d'où $\left\{\begin{matrix}\text{sev de}\\ \text{rg } d \text{ de } V\end{matrix}\right\}\longrightarrow G_d(V)$ qui est en fait une bijection

Prop : $G_d(V)$ paramètre les sev de V de rang d

Gd(V) est une variété proj. lisse $(K=\mathbb{C})$

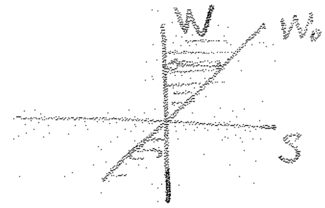
Soit $S\subseteq V$ de dim $n-d$, on note $G_d(V)_S=\{W\in G_d(V)\mid W\cap S=0\}$

> Va nous servir d'ouvert de carte.

Si $W_0\in G_d(V)_S$, $W_0\oplus S=V$ soit $W\in G_d(V)_S$

La decomposition $\nearrow$ nous donne $\begin{matrix}W\\ \downarrow\\ W_0\end{matrix}\longrightarrow S$ et on montre $\begin{matrix}W\\ \downarrow{\scriptstyle S}\\ W_0\end{matrix}$

Donc W s'identifie au graphe d'un elt $f_W \in \mathrm{Hom}(W_0, S)$



et réciproquement ... $\underline{G_d(V)_S \simeq \mathrm{Hom}(W_0, S)}$

et donc $G_d(V)$ lisse car $T_{W_0} G_d(V) \simeq \mathrm{Hom}(W_0, S)$

$$\simeq \mathrm{Hom}(W_0, V/W_0)$$

Variété des drapeaux

$\underline{d} = 0 < d_r < \cdots < d_1 < n$

On veut $G_{\underline{d}}(V)$ qui paramètre les suites de sev

$F^\bullet : \quad 0 \subsetneq V^r \subsetneq \cdots \subsetneq V^1 \subsetneq V$ avec $\dim V_i = d_i$

Naturellement $G_{\underline{d}}(V) \subseteq \prod_{i=1}^{r} G_{d_i}(V) \subseteq \prod_i \mathbb{P}(\Lambda^{d_i} V)$

et $T_{F^\bullet} G_{\underline{d}} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{\mathrm{Hom}(V^i, V / V^i)}_{T_{V_i} G_{d_i}(V)}$

avec la condition

$\varphi^i : V^i \longrightarrow V^{i-1}/V^i$ représent un vecteur tangent en $F^\bullet$

si $\varphi^i|_{V^{i+1}} = \varphi^{i+1}$ modulo V^{i+1}

2) Variations

S variété complexe connexe (appelée "source")
et V $\mathbb{R}$-ev
On suppose que $\forall s \in S$ $\quad h_s$ structure de Hodge sur V de poids n.

$$V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} V_s^{p,q}$$

Déf $(h_s)_s$ est dit <u>continue</u>
si $\forall p,q$ $\quad V_s^{p,q}$ varie continuement avec s
i.e. $\exists d = d(p,q)$ tel que $\forall s$ $\quad V_s^{p,q}$ de dim d
et $\begin{pmatrix} S \longrightarrow G_d(V) \\ s \longmapsto V_s^{p,q} \end{pmatrix}$ est <u>continue</u> (topologie classique sur $\mathbb{C}$ ...)

Déf Soit $\underline{h} = (h_s)_s$ une famille C^0 de structures de Hodge sur V de source S
$\underline{h}$ est <u>holomorphe</u> si $\begin{pmatrix} S \xrightarrow{\varphi} G_{\underline{d}}(V) \\ s \longmapsto F_s^\bullet \end{pmatrix}$ est holomorphe

où $F_s^\bullet$ filtration de Hodge associée $\left(\bigoplus_{r \geq p} V^{r,s}\right)_p$
$\underline{d} = \dim(F^\bullet) = \left(\ldots, \sum_{r \geq p} d(r,p), \ldots\right)$

Si de plus $d\varphi : T_s S \longrightarrow T_{F_s^\bullet} G_{\underline{d}}$
a son image contenue dans $\bigoplus_p \mathrm{Hom}\left(F_s^p, F_s^{p-1}/F_s^p\right)$
Alors h est une <u>variation de Structure de Hodge sur S</u>

- T famille de tenseurs sur V contenant une forme bil. non dég. t_0
- $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonction
  - symétrique
  - à support fini
  - nulle sur $\{(p,q) \mid p+q \neq n\}$

$S(d,T) =$ ensemble de SH h sur V
qui vérifient
- $\dim(V_h^{p,q}) = d(p,q)$
- $\forall t \in T$, t tenseur de Hodge pour h
- t_0 polarisat° de h

$S(d,T) \subseteq \prod_{\mathrm{Supp}(d)} G_{d'}(V)$ ⟵ donc est muni d'une topologie

Thm : S^+ composante connexe de $S(d,T)$

(a) Si $S^+ \neq \phi$ il existe une unique structure de variété complexe sur S^+ tel que $(h_s)_{s \in S^+}$ soit une famille holo.

(b) Avec cette structure S^+ est un DSH dès que $(h_s)_s$ est une variable

(c) Tout DSH irred. est de cette forme

Rappel : DSH variété complexe hermitienne possédant une symétrie s_p pour tout point p. qui ne fixe localement que p.

$\{$ Elise $\} \longrightarrow$ E DSH $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} G \text{ grp alg} \\ \mathbb{U} \xrightarrow{u} G \\ + \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{fidèle de } G]{\text{représ.}} G \hookrightarrow GL(V)$

on a trouvé V