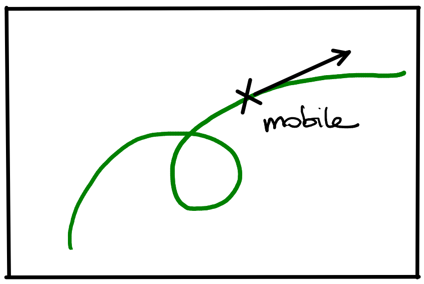
BREST 2017

01 INTRODUCTION PHYSIQUE

espace $\simeq \mathbb{R}^3$

* Aristote – Newton
  IVe av. JC — 1680'

ce n'est pas chronologique



trajectoire

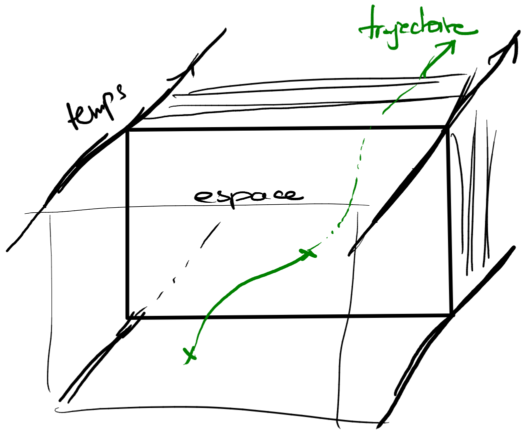
→ suit les lois de newton

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \sum \vec{\text{Forces}}$$

→ temps absolu.

* Galilée – Minkowski
  1630's — 1880's

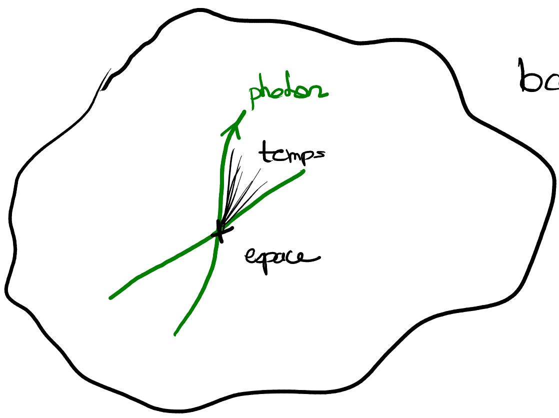
→ ESPACE–TEMPS



→

localement $\mathbb{R}^4$ $\xrightarrow{\text{fibré sur}}$ $\mathbb{R}$

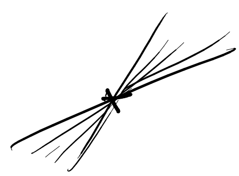
* Einstein
  1900's



localement $\mathbb{R}^4$

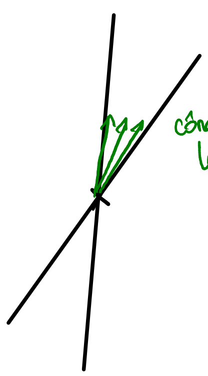
→ plus de temps absolu.
→ vitesse de la lumière absolue.
→ rayons lumineux

cône de lumière

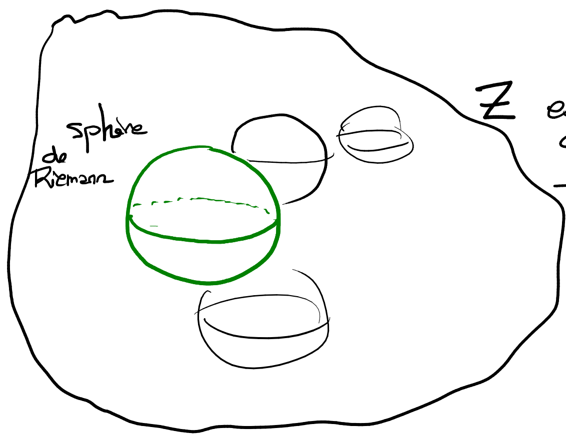


ensemble des rayons lumineux passant par 1 pt

* Penrose 1960's



⟷



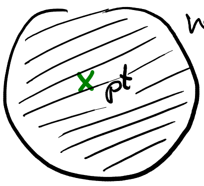
Z espace des twisteurs
→ localement $\mathbb{C}^3$ (var complexe)

La question → comment encoder les lois physiques (GRAVITATION...) dans Z ?

Dans l'espace temps

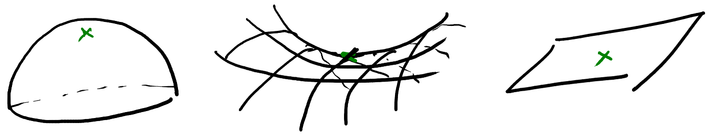
→ métrique de signature $(1,3)$

(modèle classique $-dx^2-dy^2-dz^2+c^2dt^2$)



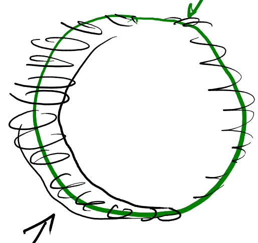
voisinage d'un pt $\subseteq \mathbb{R}^4$

→ se distingue par sa courbure



dans Z

cône de lumière $\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$



voisinage holomorphe

les vois holo d'un point dans Z se ressemblent tous

→ vois d'un pt de $\mathbb{C}^3$

les vois holo d'un $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont variés !!!

correspondent à la courbure (conforme)

I] Voisinages infinitésimaux

$(Z, \mathcal{O}_Z)$ var. complexe

↑ var topologique ; ↖ faisceau des fonctions « holomorphes » sur Z

} pour U ouvert de carte de Z $\quad U \cong \hat{U} \subseteq \mathbb{C}^n$

$$\mathcal{O}_{Z|U} \cong \mathcal{O}_{\hat{U}}$$

<u>Sous-variété</u> : → défini par une ou plusieurs <u>équation</u> (holomorphes)

$\mathcal{J}_L \hookrightarrow \mathcal{O}_Z$ faisceau d'idéaux.

$L \subseteq Z$ sous-espace topologique est défini comme l'ensemble des zéros des fonctions de $\mathcal{J}_L$

$$0 \to \mathcal{J}_L \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow i_*\mathcal{O}_L \to 0$$

Une f° sur L est localement une classe de fonctions sur Z modulo celles qui s'annulent sur L.

Sauf que dans $\mathbb{C}^2$ avec coord x, y.

* $x = 0$ définit une sous-var L d'idéal $\mathcal{J}_L = \langle x \rangle$
* $x^2 = 0$ définit le même espace top L mais d'idéal $\mathcal{J}'_L = \langle x^2 \rangle \subseteq \mathcal{J}_L$

$L' = (L^{top}, \mathcal{O}_{L'})$ est appelé épaississement de L.

x est une fonction sur L' qui vérifie $x \cdot x = 0$

L' possède plus de fonction que L

on a une restriction naturelle $L \hookrightarrow L'$

<u>Def</u> : Soit $L \subseteq Z$ sous-var d'idéal $\mathcal{J}_L$
le voisin. epaissi de L à l'ordre n dans Z noté $L^{(n)}$
est le schéma $(L^{top}, \mathcal{O}_L^{(n)})$ où

$$0 \to \mathcal{J}_L^n \to \mathcal{O}_Z \longrightarrow i_*\mathcal{O}_L^{(n)} \to 0$$

Une fonction sur $L^{(n)}$ est un jet d'ordre n de fonction sur L.

I.2 Épaississements de fibrés vectoriels

$E \to X$ un fibré vectoriel

- $\mathcal{O}_X(E)$ faisceau des sections locales de $E \to X$ est un faisceau sur X localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ (où $r = rk(E)$)

$\to$ On dit localement libre.

- Soit $X^{(n)}$ un épaississement de X

un épaississement de E à $X^{(n)}$ noté $E^{(n)}$ est un faisceau loc. libre $\mathcal{E}^{(n)}$ tel que $\mathcal{E}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X^{(n)}} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X(E)$

On note $\mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{O}_X^{(n)}(E^{(n)})$

$\to$ les sections locales de $E^{(n)}$ se restreignent sur X en des sections locales de E

I.3 Épaississement de fibré à connexion

Là ça se corse !

Rappel : L'existence d'une connexion ∇ sur un faisceau cohérent F entraîne que F est localement libre. [Malgrange]

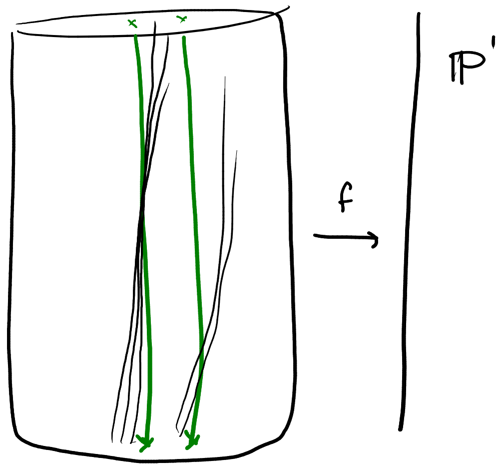
Une connexion sur un faisceau rigidifie le faisceau.

Dans notre contexte : Soit $\nabla^{(n)}$ une connexion sur $E^{(n)}$.
Alors elle définit de manière unique un épaississement $E^{(n+1)}$ de $E^{(n)}$!

Ainsi épaissir les fibrés à connexion est un ping-pong entre d'une part l'épaississement de la connexion sur un fibré fixé et d'autre part le choix de l'épaississement du fibré. Il y a des obstruction à chaque cran qu'il faut gérer.

II) Correspondance

$$Z^{m+1} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$$



j'appelle ça une « droite »

* On suppose qu'il y a plein de sections

→ $\forall z \in Z \ \exists \ L_z$ section "verticale" passant par z.

→ $\forall L \subset Z$ section

$$N_{L/Z} \simeq \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(1)$$

donc $H^1(L, N_{L/Z}) = 0$

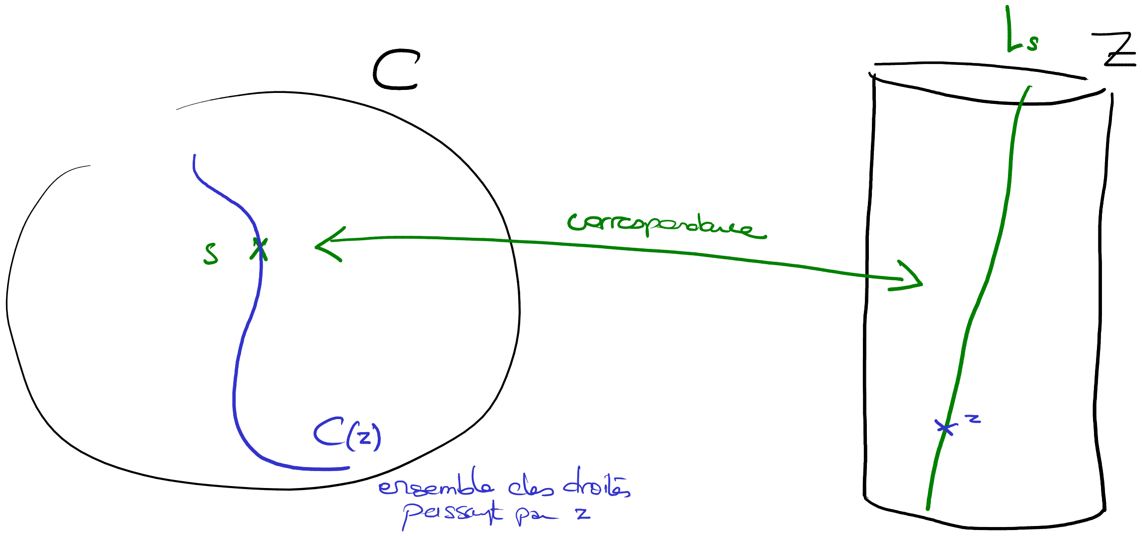
et par Kodaira L peut se déformer

$$T_{[L]}\left(\text{espace des def}\right) \simeq H^0(L, N_{L/Z}) \cong \mathbb{C}^{2m}$$

C : espace qui paramètre les sections $s : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Z$

[Kodaira] : $T_s C \simeq H^0(L_s, N_{L_s/Z})$

C lisse de dimension $2m$ sur $\mathbb{C}$



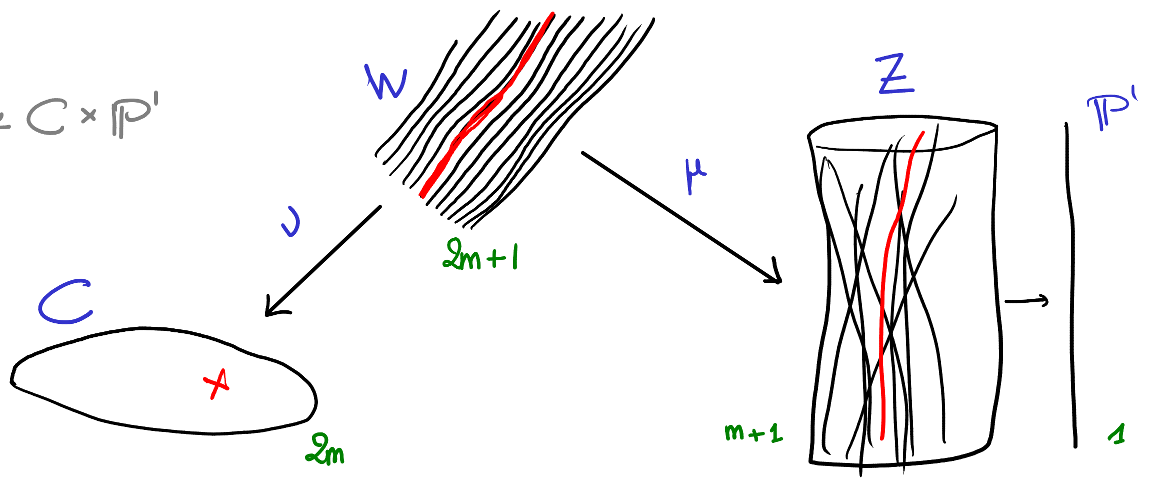
Espace tautologique

W ← Ensemble des couples $(z, s) \in Z \times C \mid z \in L_s$

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ C & & Z \end{tikzcd}$$

(z,s) ; s ; z

Cor $W \simeq C \times \mathbb{P}^1$



Fibrés L-triviaux et correspondance

$E_Z \to Z$ un fibré vectoriel holomorphe est dit **L-trivial** (trivial sur les droites) si

$\forall s \in C$, $\quad E_{Z|L_s}$ est un fibré trivial sur L_s

i.e. $\quad E_{Z|L_s} \simeq H^0(L_s, E_{Z|L_s}) \times L_s$

Mais alors $\mu^* E_Z$ est trivial en restriction à $\mu^{-1}(L_s) = \nu^{-1}(s)$

$\longrightarrow$ trivial sur les fibres de ν

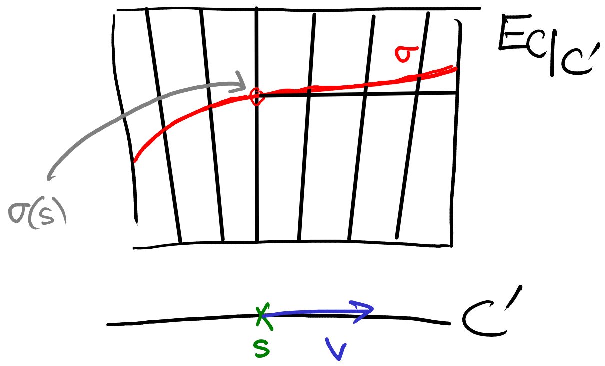
$\Rightarrow \exists!\, E_C \to C$ tel que $\nu^* E_C \simeq \mu^* E_Z$

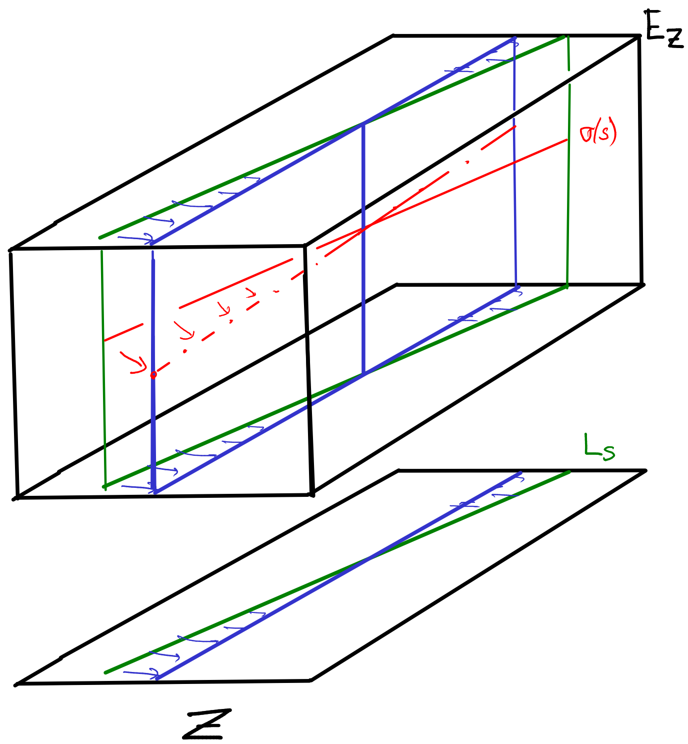
C'est comme une fonction qui est constante sur les fibres de f s'écrit forcément sous la forme quelquechose $\circ f$

Connexion associée

On peut donner un sens à « la section σ de E_C est plate »

On se donne $s \in C$, $v \in T_s C$ et on se restreint à C' une courbe locale passant par s dirigée par v





Si on prend la famille des courbes $(L_{s'})_{s' \in C'}$ qui rencontrent L_s en $z \in Z$ fixé. Alors pour tout s' on a un elt e donné par $\sigma(s)$

$$e \in H^0(L_s, E_{Z|L_s}) \simeq (E_Z)_z \simeq H^0(L_{s'}, E_{Z|L_{s'}})$$

donc nous donne un elt $e' =: \sigma(s')$

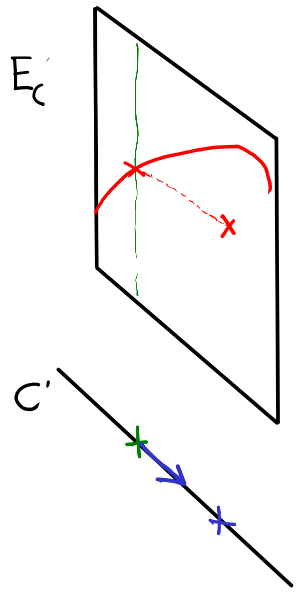
Plus concrètement

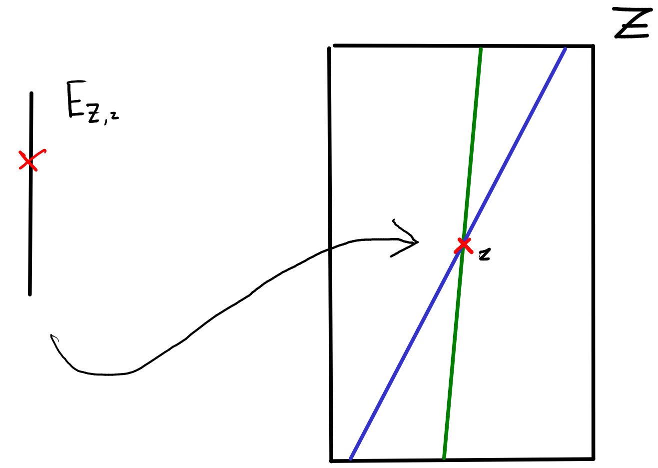
on a une opération $\mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \xrightarrow{d_\mu^\#} \Omega_\mu(\mu^* E_Z)$ Formes relatives W/Z

« dérivation dans les fibres de μ »

Fibre de μ $\to$ ensemble des droites passant par un point

en poussant en avant $\nu_* \Omega_\mu \simeq \Omega_C$ et on trouve $\mathcal{O}_C(E_C) \xrightarrow{\nabla} \Omega_C(E_C)$





COURBURE

$$\nabla : \Theta_C(E_C) \longrightarrow \Omega_C(E_C) \qquad\qquad \underbrace{\theta\wedge\theta}_{\omega}$$

$$\nu_* d_\mu : \nu_* \Theta_N(\mu^* E_Z) \longrightarrow \nu_* \Omega_\mu(\mu^* E_Z)$$

$$d_\mu \circ d_\mu = 0 \qquad \nu_* d^1_\mu \circ \nu_* d^0_\mu = 0$$

$$\nu_* d^1_\mu \circ \nabla = 0$$

$$\begin{tikzcd}
\nabla^1 : \Omega_C(E_C) \arrow[r] \arrow[dr, "\nu_* d^1_\mu"'] & \Omega^2_C(E_C) \arrow[d] \\
& \nu_* \Omega^2_\mu(E_C)
\end{tikzcd}$$

donc

$$\nabla \circ \nabla : \Theta_C(E_C) \longrightarrow \ker(\Omega^2_C \to \nu_* \Omega^2_\mu) \otimes E_C$$

$$F(\nabla) \in \Omega^2_+(\mathrm{End}(E_C)) \subseteq \Omega^2_C(\mathrm{End}\, E_C)$$

Thm 1 [_] (Buchdahl 80' ← Grassmaniennes)

Il y a eqv de cat. qui respecte $\otimes$, Dualité, Sections globales (plate)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fibrés à connexion } (E_C, \nabla) \\ \text{sur } C \\ \text{avec courbure} \\ F(\nabla) \in \Omega^2_+(\mathrm{End}\, E_C) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fibré } L\text{-triviaux} \\ E_Z \to Z \end{array} \right\}$$

morphismes plats $\longleftrightarrow$ morph.

III Relation épaississement — courbure

Thm 2 [_]

L'équivalence du Thm 1 se restreint

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Fibrés } (E_C,\nabla) \\ \text{à connexion} \\ \text{plate}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Fibrés } E_Z \to Z \\ \text{triviaux sur } L^{(2)} \\ \text{pour tout } L \subset Z \text{ droite}\end{array}\right\}$$

Moralement

$(E_C, \nabla) \quad \leftrightsquigarrow \quad E_Z \to Z$ trivial sur les droites

$F(\nabla) \quad \leftrightsquigarrow \quad$ obstruction à la trivialité de E_Z à l'ordre 2.

Système local sur C $\quad \leftrightsquigarrow \quad$ Fibré $E_Z \longrightarrow Z$ trivial sur les droites à l'ordre 2.

Soit $E_Z \to Z$ $\quad L^{(2)}$-trivial, de rk r

il est associé à E_C, ∇ de noyau $\underline{V}_{E_C} \hookrightarrow \mathcal{O}_C(E_C)$

or C simplement connexe !! $\quad \underline{V}_{E_C} \simeq \underline{\mathbb{C}}^r$

et $\underline{\mathbb{C}}^r$ associé $\mathcal{O}_C^{\oplus r} \xrightarrow{d} \Omega_C^{\oplus r}$

associé à $\mathcal{O}_Z^{\oplus r}$

QQV $\quad \underline{E_Z \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus r}}$

Il n'y a pas d'autres obstructions. $\qquad E_Z$ est vraiment trivial sur Z tout entier.

Idée de la preuve (Buchdahl : *Analysis on analytic spaces & Non-self-dual YM fields*) 1985 TRANS. AMS.

$W \hookrightarrow C \times Z$ on regarde $W^{(2)} \hookrightarrow C \times Z$ cet épaississement contient simultanément tous les $L^{(2)} \hookrightarrow Z$

$\nu^* E_C \simeq \mu^* E_Z =: E$

$(\nu^{(2)})^* E_C \quad \langle \cdots \rangle \quad (\mu^{(2)})^* E_Z \qquad$ 2 épaississements de E

$\uparrow$ imposé par $(\nu^{(1)})^*\nabla \qquad \uparrow$ imposé par $d_\mu^{(1)}$

$$\delta = (\nu^{(1)})^*\nabla - d_\mu^{(1)}$$

$$[\delta] = [E_C^{(2)}] - [E_\mu^{(2)}]$$

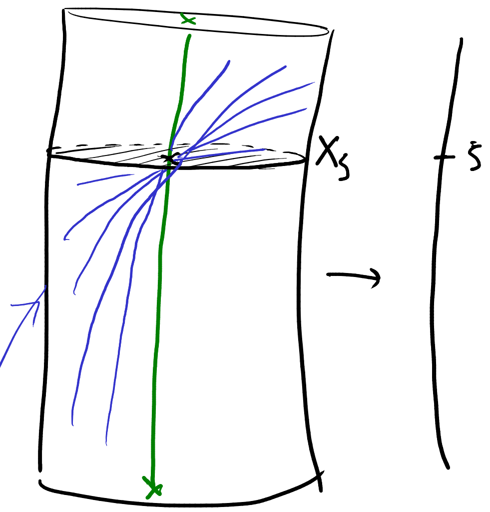
$$\langle \delta \rangle = F(\nu^{(1)*}\nabla) - F(d_\mu^{(1)}) = \nu^* F(\nabla)$$

Motivations

Espace de twisteurs de var. hyperkählerienne

$$Z \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 \qquad Z \underset{C^\infty}{\simeq} M \times \mathbb{S}^2$$

$$Z \overset{\pi}{\dashrightarrow} M \quad \text{HK}$$



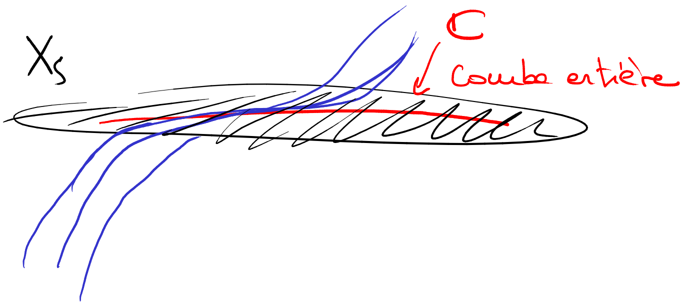
argument de CAMPANA

X_ζ var. symplectique holomorphe

non compacité de $\mathbb{C}$

$\exists$ déformation «grandes»

À la limite : dans X_ζ



X_ζ n'est pas hyperbolique !