BREST 2017

0] INTRODUCTION PHYSIQUE

* NEWTON
* MINKOWSKI
* EINSTEIN
* PENROSE

I] ÉPAISSISSEMENTS

I.1) DE SOUS-VAR.

I.2) DE FIBRÉ

I.3) DE CONNEXION

II] EQUIVALENCE DE BUCHDAHL

II.1 CORRESPONDANCE

II.2 ESPACE TAUTO.

II.3 FIBRÉS L-TRIVIAUX

II.4 CONNEXION ASSOCIÉE

II.5 COURBURE ET EQU. DE GAT.

Thm 1

III] RELATION ÉPAISSISSEMENT–COURBURE

Thm 2

⟶ III.1) PREUVE (idée)

⟶ III.1) MOTIVATIONS (géom HK, hyperb.)

01 INTRODUCTION PHYSIQUE

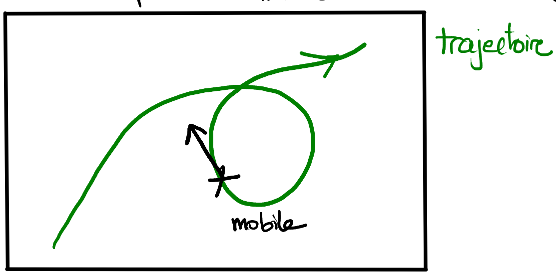
(Non chronologique)

* Aristote - Newton
IV^e av JC — 1680'

Film projeté sur un écran

espace $\simeq \mathbb{R}^3$ euclidien — temps $\simeq \mathbb{R}$

+ Simultanéité des événements → durée
+ Position absolue → mesure distance
+ temps absolu

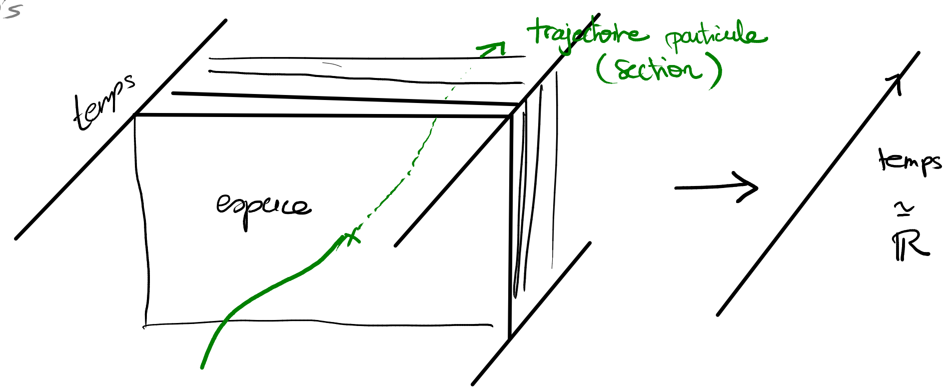


* Galilée - Minkowsky
1630' — 1880's

→ ESPACE-TEMPS (localement $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$)

+ temps absolu
+ simultanéité
+ plus de position absolue

→ donnée des trajectoire « au repos »

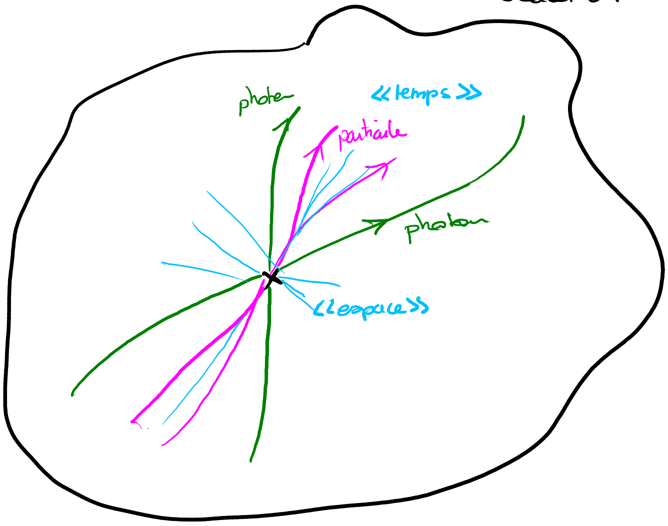


* Einstein (spéciale)
1900's

localement $\mathbb{R}^4$

+ plus de temps absolu
⟹ vitesse de la lumière absolue
→ rayons lumineux

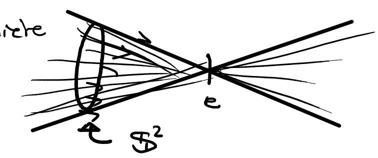
Les photons séparent les trajectoires de type espace et les trajectoires de type temps (trajectoires des particules φ)



concept de cône de lumière

ensemble des rayons lumineux par un pt.

$\simeq \mathbb{R} \cdot S^2$



* Penrose
1960's

approche « Platonicienne » : le monde se résume à ce qu'on observe
→ les cônes de lumière ont plus de réalité φ que les points de l'espace-temps.

espace temps (loc $\mathbb{R}^4$)

espace des twisteurs

→ var complexe

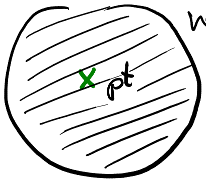
loc $\simeq \mathbb{C}^3$

La question → comment encoder les lois physiques (GRAVITATION...) dans Z ?

Dans l'espace temps

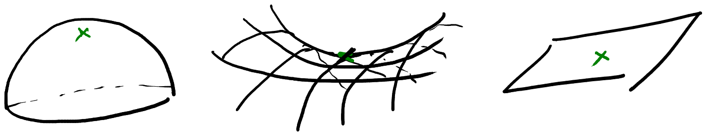
→ métrique de signature $(1,3)$

(modèle classique $-dx^2-dy^2-dz^2+c^2dt^2$)



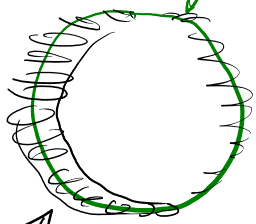
voisinage d'un pt $\subseteq \mathbb{R}^4$

→ se distingue par sa courbure



dans Z

cône de lumière $\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$



voisinage holomorphe

les vois holo d'un point dans Z se ressemblent tous → vois d'un pt ds $\mathbb{C}^3$

les vois holo d'un $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont variés !!!

correspondent à la courbure (conforme)

I] Voisinages infinitésimaux

$(Z, \mathcal{O}_Z)$ var. complexe

$\uparrow$ var topologique

$\nwarrow$ faisceau des fonctions « holomorphes » sur Z

pour U ouvert de carte de Z $\quad U \cong \hat{U} \subseteq \mathbb{C}^n$

$\mathcal{O}_{Z|U} \cong \mathcal{O}_{\hat{U}}$

<u>Sous-variété</u> : $\rightarrow$ défini par une ou plusieurs <u>équation</u> (holomorphes)

$\mathcal{J}_L \hookrightarrow \mathcal{O}_Z$ faisceau d'idéaux.

$L \subseteq Z$ sous-espace topologique est défini comme l'ensemble des zéros des fonctions de $\mathcal{J}_L$

$$0 \to \mathcal{J}_L \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow i_* \mathcal{O}_L \to 0$$

Une f^o sur L est localement une classe de fonctions sur Z modulo celles qui s'annulent sur L.

Sauf que dans $\mathbb{C}^2$ avec coord x, y.

* $x = 0$ définit une sous-var L d'idéal $\mathcal{J}_L = \langle x \rangle$
* $x^2 = 0$ définit le même espace top L mais d'idéal $\mathcal{J}_L' = \langle x^2 \rangle \subseteq \mathcal{J}_L$

$L' = (L^{top}, \mathcal{O}_{L'})$ est appelé épaississement de L.

x est une fonction sur L' qui vérifie $x \times x = 0$

L' possède plus de fonction que L

on a une restriction naturelle $\quad L \hookrightarrow L'$

<u>Def</u> : Soit $L \subset Z$ sous-var d'idéal $\mathcal{J}_L$

le voisin. épaissi de L à l'ordre n dans Z noté $L^{(n)}$

est le schéma $(L^{top}, \mathcal{O}_L^{(n)})$ où

$$0 \to \mathcal{J}_L^n \to \mathcal{O}_Z \longrightarrow i_* \mathcal{O}_L^{(n)} \to 0$$

Une fonction sur $L^{(n)}$ est un jet d'ordre n de fonction sur L.

I.2 Épaississements de fibrés vectoriels

$E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel

- $\mathcal{O}_X(E)$ faisceau des sections locales de $E \to X$
  est un faisceau sur X
  localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ (où $r = rk(E)$)
  $\longrightarrow$ On dit localement libre.

- Soit $X^{(n)}$ un épaississement de X

  un épaississement de E à $X^{(n)}$ noté $E^{(n)}$
  est un faisceau loc. libre $\mathcal{E}^{(n)}$ tel que $\mathcal{E}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X^{(n)}} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X(E)$
  On note $\mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{O}_X^{(n)}(E^{(n)})$

  $\longrightarrow$ les sections locales de $E^{(n)}$ se restreignent sur X en des sections locales de E

I.3 Épaississement de fibré à connexion

Là ça se corse !

Rappel : L'existence d'une connexion ∇ sur un faisceau cohérent F entraîne que F est localement libre. [Malgrange]

Une connexion sur un faisceau rigidifie le faisceau.

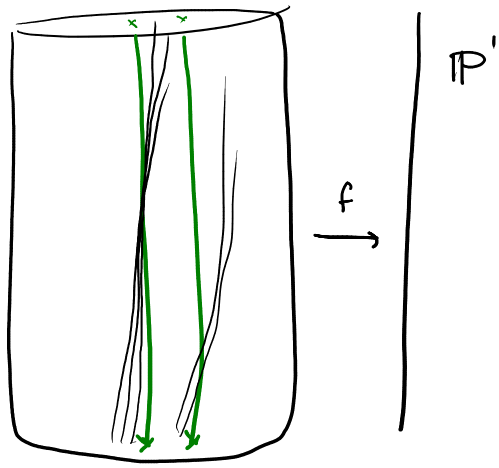
Dans notre contexte : Soit $\nabla^{(n)}$ une connexion sur $E^{(n)}$.
Alors elle définit de manière unique un épaississement $E^{(n+1)}$ de $E^{(n)}$!

Ainsi épaissir les fibrés à connexion est un ping-pong entre d'une part l'épaississement de la connexion sur un fibré fixé et d'autre part le choix de l'épaississement du fibré. Il y a des obstruction à chaque cran qu'il faut gérer.

II/ CORRESPONDANCE

$$Z^{m+1} \xrightarrow[f]{} \mathbb{P}^1$$

j'appelle ça une « droite »



* On suppose qu'il y a plein de sections

→ $\forall z \in Z$ $\exists$ L_z section "verticale" passant par z.

→ $\forall L \subseteq Z$ section

$$N_{L/Z} \simeq \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(1)$$

donc $H^1(L, N_{L/Z}) = 0$

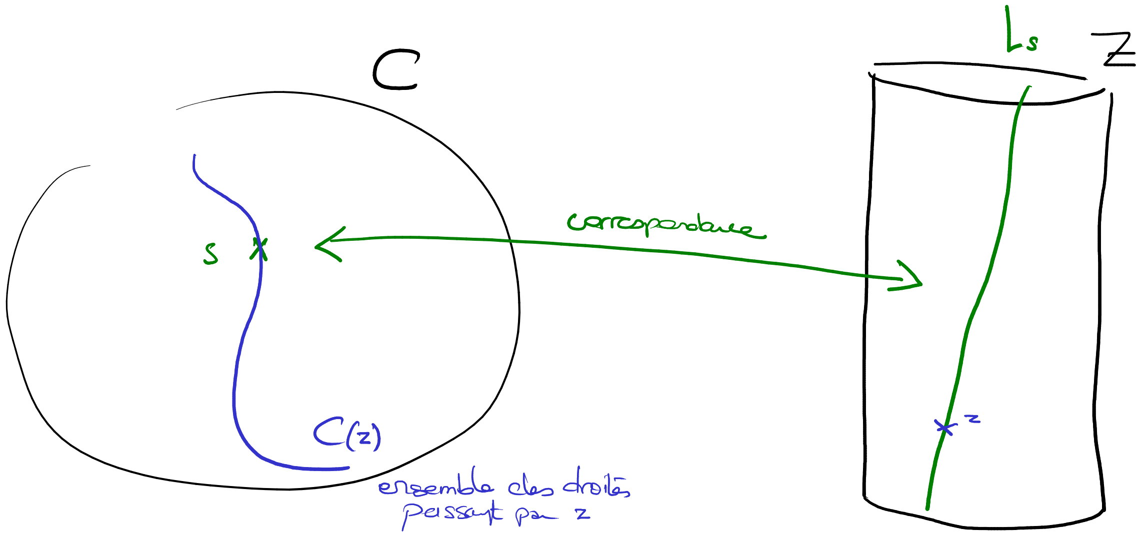
et par Kodaira L peut se déformer

$$T_{[L]}\left(\text{espace des def}\right) \simeq H^0(L, N_{L/Z}) \cong \mathbb{C}^{2m}$$

C : espace qui paramètre les sections $s : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Z$

[KODAIRA] : $\quad T_s C \simeq H^0(L_s, N_{L_s/Z})$

C lisse de dimension $2m$ sur $\mathbb{C}$



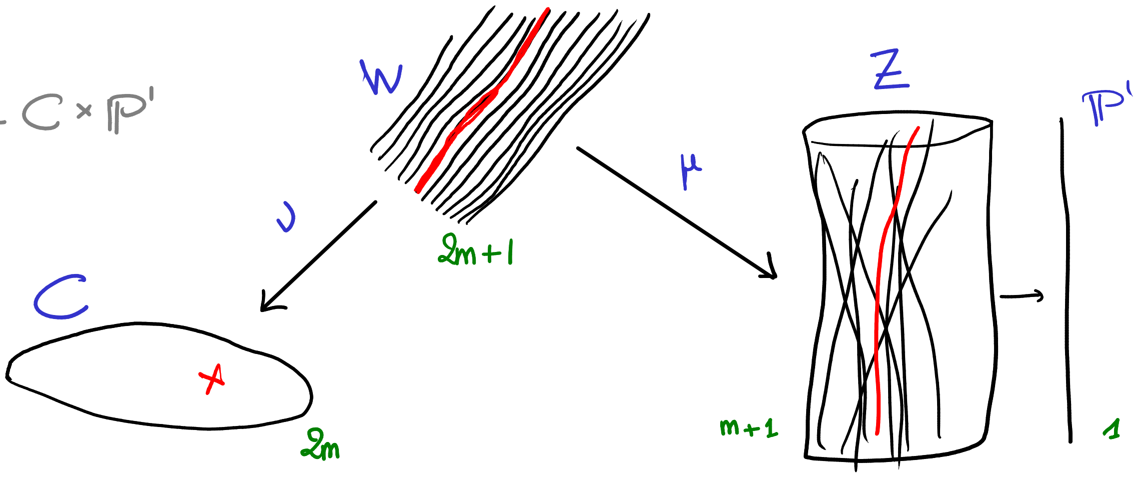
ESPACE TAUTOLOGIQUE

W ← Ensemble des couples $(z, s) \in Z \times C \mid z \in L_s$

$$C \xleftarrow{\nu} W \xrightarrow{\mu} Z$$

$$s \leftarrow (z,s) \rightarrow z$$

Cor $W \simeq C \times \mathbb{P}^1$



Fibrés L-triviaux et correspondance

$E_Z \longrightarrow Z$ un fibré vectoriel holomorphe est dit L-trivial (trivial sur les droites) si

$\forall s \in C$, $\quad E_{Z|L_s}$ est un fibré trivial sur L_s

i.e. $E_{Z|L_s} \simeq H^0(L_s, E_{Z|L_s}) \times L_s$

Mais alors $\mu^* E_Z$ est trivial en restriction à $\mu^{-1}(L_s) = \nu^{-1}(s)$

$\longrightarrow$ trivial sur les fibres de ν

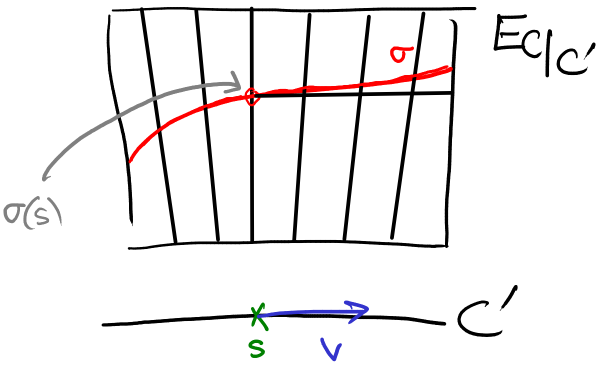
$\Rightarrow \exists !\ E_C \longrightarrow C$ tel que $\nu^* E_C \simeq \mu^* E_Z$

C'est comme une fonction qui est constante sur les fibres de f s'écrit forcément sous la forme quelquechose $\circ f$

Connexion associée

On peut donner un sens à « la section σ de E_C est plate »

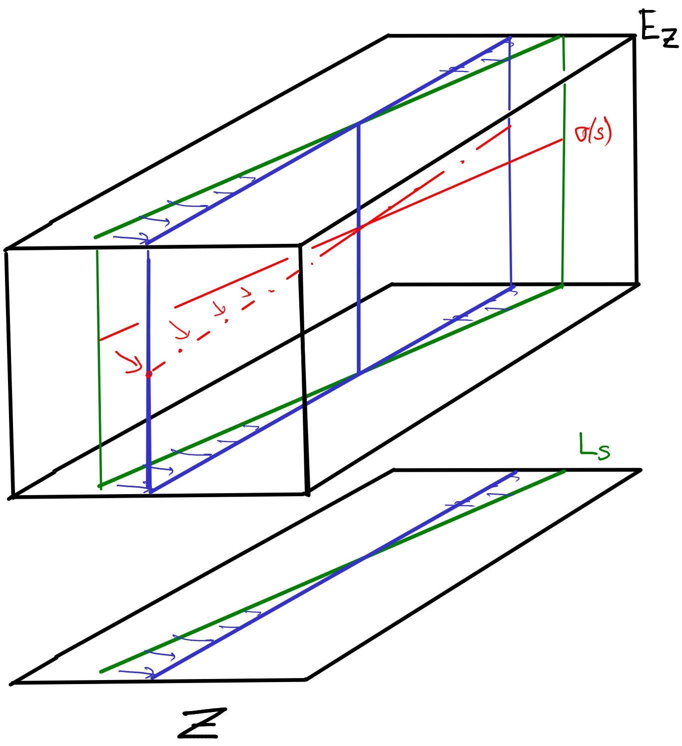
On se donne $s \in C$, $v \in T_sC$ et on se restreint à C' une courbe locale passant par s dirigée par v



Si on prend la famille des courbes $(L_{s'})_{s' \in C'}$ qui rencontrent L_s en $z \in Z$ fixé. Alors pour tout s' on a un elt e donné par $\sigma(s)$

$$e \in H^0(L_s, E_{Z|L_s}) \simeq (E_Z)_z \simeq H^0(L_{s'}, E_{Z|L_{s'}})$$

donc nous donne un elt $e' =: \sigma(s')$



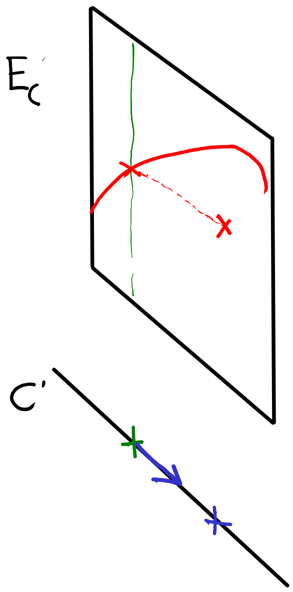
Plus concrètement

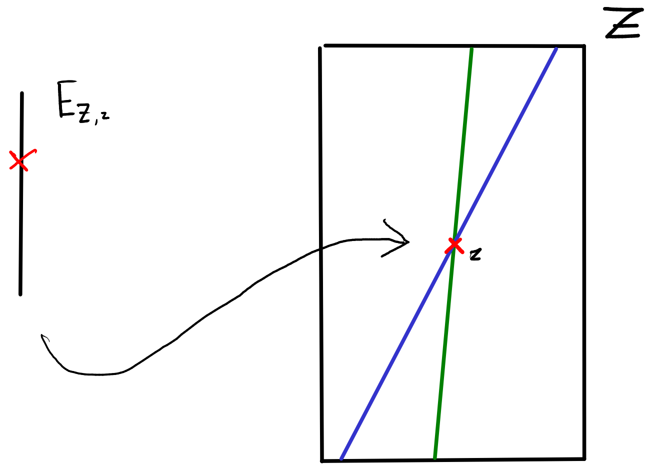
on a une opération $\mathcal{O}_W(\mu^* E_Z) \xrightarrow{d_\mu^\#} \Omega_\mu(\mu^* E_Z)$ Formes relatives W/Z

« dérivation dans les fibres de μ »

Fibre de μ $\rightarrow$ ensemble des droites passant par un point

en poussant en avant $\nu_* \Omega_\mu \simeq \Omega_C$ et on trouve $\mathcal{O}_C(E_C) \xrightarrow{\nabla} \Omega_C(E_C)$





COURBURE

$$\nabla : \Theta_C(E_C) \longrightarrow \Omega_C(E_C) \qquad\qquad \underbrace{\theta\wedge\theta}_{\omega}$$

$$\nu_* d_\mu : \nu_* \Theta_W(\mu^* E_Z) \longrightarrow \nu_* \Omega_\mu(\mu^* E_Z)$$

$$d_\mu \circ d_\mu = 0 \qquad\qquad \nu_* d_\mu^1 \circ \nu_* d_\mu^0 = 0$$

$$\nu_* d_\mu^1 \circ \nabla = 0$$

$$\begin{tikzcd} \Omega_C(E_C) \arrow[r, "\nabla^1"] \arrow[dr, "\nu_* d_\mu^1"'] & \Omega^2_C(E_C) \arrow[d] \\ & \nu_* \Omega^2_\mu(E_C) \end{tikzcd}$$

donc

$$\nabla \circ \nabla : \Theta_C(E_C) \longrightarrow \ker\left(\Omega^2_C \to \nu_* \Omega^2_\mu\right) \otimes E_C$$

$$F(\nabla) \in \Omega^2_+(\mathrm{End}(E_C)) \subseteq \Omega^2_C(\mathrm{End}\,E_C)$$

Thm 1 [_] (Buchdahl 80' ← Grassmaniennes)

Il y a eqv de cat. qui respecte $\otimes$, Dualité, Sections globales (plate)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fibrés à connexion } (E_C, \nabla) \\ \text{sur } C \\ \text{avec courbure} \\ F(\nabla) \in \Omega^2_+(\mathrm{End}\,E_C) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fibré } L\text{-triviaux} \\ E_Z \to Z \end{array} \right\}$$

morphismes plats $\longleftrightarrow$ morph.

III Relation Epaississement — Courbure

Thm 2 [_]

L'équivalence du Thm 1 se restreint

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Fibrés } (E_C,\nabla) \\ \text{à connexion} \\ \text{plate}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fibrés } E_Z \to Z \\ \text{triviaux sur } L^{(2)} \\ \text{pour tout } L \subseteq Z \\ \quad\quad\quad\quad \text{droite}\end{array}\right\}$$

Moralement

(E_C, ∇) ⟷ $E_Z \to Z$ trivial sur les droites

$F(\nabla)$ ⟷ obstruction à la trivialité de E_Z à l'ordre 2.

Système local sur C ⟷ Fibré $E_Z \to Z$ trivial sur les droites à l'ordre 2.

Soit $E_Z \to Z$ $L^{(2)}$-trivial, de rk r

il est associé à E_C, ∇ de noyau $V_{E_C} \hookrightarrow \mathcal{O}_C(E_C)$

or C simplement connexe !! $V_{E_C} \simeq \mathbb{C}^r$

et $\mathbb{C}^r$ associé $\mathcal{O}_C^{\oplus r} \xrightarrow{d} \Omega_C^{\oplus r}$

associé à $\mathcal{O}_Z^{\oplus r}$

QQV $\quad \underline{E_Z \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus r}}$

Il n'y a pas d'autres obstructions.

E_Z est vraiment trivial sur Z tout entier.

Idée de la preuve (Buchdahl : Analysis on analytic spaces & Non-self-dual YM fields) 1985
TRANS. AMS.

$W \hookrightarrow C \times Z$ on regarde $W^{(2)} \hookrightarrow C \times Z$ cet épaississement contient simultanément tous les $L^{(2)} \hookrightarrow Z$

$$\nu^* E_C \simeq \mu^* E_Z =: E$$

$(\nu^{(2)})^* E_C \quad \langle \cdots \rangle \quad (\mu^{(2)})^* E_Z \qquad$ 2 épaississement de E

↑ imposé par $(\nu^{(1)})^* \nabla$ ↑ imposé par $d_\mu^{(1)}$

$$\delta = (\nu^{(1)})^* \nabla - d_\mu^{(1)}$$

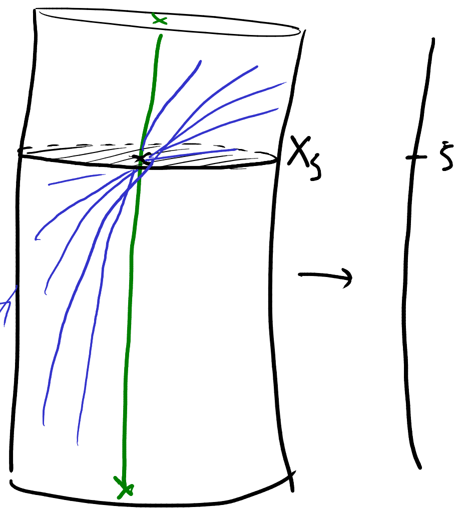
$$[\delta] = [E_C^{(2)}] - [E_\mu^{(2)}]$$

$$\langle \delta \rangle = F((\nu^{(1)})^* \nabla) - F(d_\mu^{(1)}) = \nu^* F(\nabla)$$

MOTIVATIONS

Espace de twisteurs de var. hyperkählérienne

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & & \\ M & \text{HK} & \end{array} \qquad Z \underset{C^\infty}{\simeq} M \times \mathbb{S}^2$$



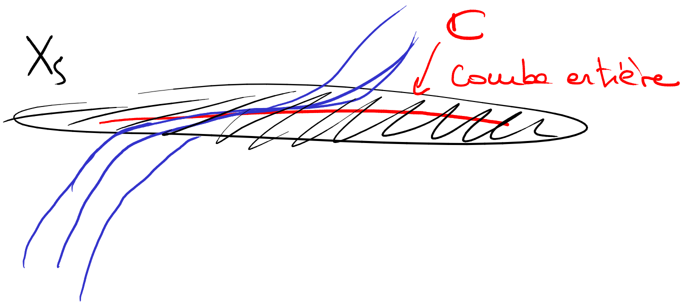
argument de CAMPANA

X_ζ var. symplectique holomorphe

non compacité de C

∃ déformation « grandes »

À la limite : dans X_ζ



X_ζ n'est pas hyperbolique !