EXPOSÉ HYPERBOLICITÉ

29/05/2015

Dans tout l'exposé X variété complexe de dimension n

I) HYPERBOLICITÉ

I.1) Hyperbolicité au sens de BRODY

Def X est dit hyperbolique (au sens de BRODY) si tout $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ holomorphe est constante

Ex : • $\mathbb{C}^n$ et les tores $\mathbb{C}^n/\Lambda$ avec $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ ne sont pas hyperboliques

Prop : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$, $t \in \mathbb{C}$, $x = f(t)$ et $x_0 \in \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ tq $\pi(x_0) = x$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

tq
- $\pi \circ \tilde{f} = f$
- $\tilde{f}(t) = x_0$

Conséquence : X hyperbolique $\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ hyperbolique.

Ex : Cas des courbes.

genre	0	1	2 ...
Courbure	<0	$=0$	>0
$\tilde{X}$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{C}$	Δ
Ex	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{C}/\Lambda$ smooth deg 3 hypersurf $\subset \mathbb{P}^2$	rev. ramifié de $\mathbb{P}^1$ au dessus de 6 pts ...
HYPERBOLIQUE	NON	NON	OUI
K_X	$\mathcal{O}(-2)$	$\mathcal{O}_X$	>0

$\longrightarrow$ Liens entre la positivité de K_X et l'hyperbolicité ?

CONJ. (KOBAYASHI) X compact kähler hyperbolique $\Longrightarrow$ K_X ample

I.2) Hyperbolicité au sens de KOBAYASHI

$\Delta := \mathbb{D}(0,1) \subseteq \mathbb{C}$

Déf : (Quasi-norme de FINSLER de KOBAYASHI–ROYDEN sur T_X)

$x \in X$, $\xi \in T_x X$ $\quad k_x(\xi) := \inf \left\{ \frac{1}{\rho} \mid \exists f : \rho\Delta \to X \text{ tq. } \begin{array}{l} f(0) = x \\ f'(0) = \xi \end{array} \right\}$

$\qquad = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \exists g : \Delta \to X \text{ tq. } \begin{array}{l} g(0) = x \\ g'(0) = 1/\lambda\, \xi \end{array} \right\}$

$g(t) = f(\rho t)$
$g'(0) = \rho f'(0)$

Morale : ξ unitaire : $\quad k_x(\xi)$ petit (nul) $\iff$ Il existe des $g : \Delta \to X$ passant par x avec $g'(0)$ très grand. (arbitrairement grand)

$\iff$ Il existe des copies de grand disque (arbitrairement grand) $\rho\Delta$ dans X passant par x dans la direction ξ

("copies" : isométrique au moins dans ξ)

Rq : • $k_x(\xi) < \infty$ (on peut prend Δ comme carte au voisinage de x)

• $k_x(\xi + \zeta) \not\leq k_x(\xi) + k_x(\zeta)$ "quasi-norme de Finsler"

Déf X est dit <u>INFINITESIMALEMENT HYPERBOLIQUE AU SENS DE KOBAYASHI</u>

si $\forall x \in X$, $\quad k_x(\xi) = 0 \implies \xi = 0$

→ Il n'y a pas de disque arbitrairement grand passant par x dans une direction unitaire ξ.

→ $X = \Delta$, k est la métrique de Poincaré : $\dfrac{d|t|^2}{(1-|t|^2)^2}$

Lemme de BRODY $\qquad (X, |\cdot|_X)$ hermitienne

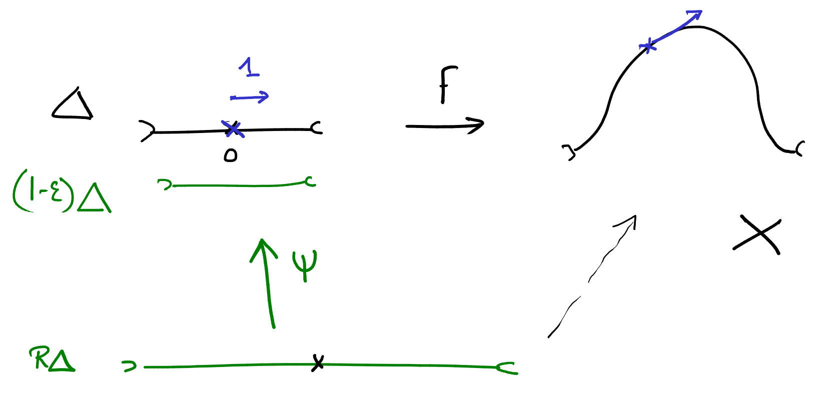
$f : \Delta \to X$ holomorphe, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R \geq (1-\varepsilon)|f'(0)|$
et il existe $\psi : R\Delta \to (1-\varepsilon)\Delta$ homographie telle que

$$|(f \circ \psi)'(0)|_X = 1 \quad \text{et} \quad |(f\circ\psi)'(s)|_X \leq \frac{1}{1 - |s|^2/R^2} \quad \forall s \in R\Delta$$

dem : f grandit les vecteurs tangents à Δ

On munit Δ de la métrique de Poincaré

$$\frac{d|t|^2}{(1-|t|^2)^2}$$



On cherche où sur $(1-\varepsilon)\Delta$ elle grandit le plus les vecteurs,

$$t \mapsto f'((1-\varepsilon)t) : T_\Delta \longrightarrow T_X$$

a pour norme $N_t = \sup_{|\xi| \leq 1-|t|^2} |f'((1-\varepsilon)t)\,\xi|_X = (1-|t|^2)\,|f'((1-\varepsilon)t)| \xrightarrow[|t|\to 1]{} 0$

donc $\exists\, t_0 \in \Delta$ tq $N_{t_0} = \sup_{t\in\Delta} N_t$

On va reparamétrer en envoyant $0 \in R\Delta$ sur $(1-\varepsilon)t_0 \in (1-\varepsilon)\Delta$

$$\psi : \begin{pmatrix} R\Delta & \longrightarrow & (1-\varepsilon)\Delta \\ s & \longmapsto & (1-\varepsilon)\dfrac{t_0 - s/R}{1-\bar{t_0}\, s/R} \end{pmatrix}$$

homographie $\quad \psi(0) = t_0$

$$\psi'(0) = \frac{1-\varepsilon}{R}\left(|t_0|^2 - 1\right)$$

$$\psi'(s) = \frac{1-\varepsilon}{R}\,\frac{|t_0|^2-1}{(1-\bar{t_0}\,s/R)^2}$$

Il suffit de prendre R tq $|(f\circ\psi)'(0)|_X = 1$ ie $|f'((1-\varepsilon)t_0)\cdot\psi'(0)|_X = 1$

d'où $N_{t_0} \times \frac{1-\varepsilon}{R}(1-|t_0|^2) = 1$. ie $R = \dfrac{1-|t_0|^2}{(1-\varepsilon)N_{t_0}}$

$$f\circ\psi : R\Delta \longrightarrow X$$

$(f\circ\psi)'(s) : T_{R\Delta} \longrightarrow T_X \qquad \|(f\circ\psi)'(s)\|_{P,X} = \sup_{|\xi|<1-|s|^2/R^2} |(f\circ\psi)'(s)\cdot\xi|_X = |(f\circ\psi)'(s)|_X\cdot(1-|s|^2/R^2)$

or par construction $\|(f\circ\psi)'(s)\|_{P,X} \leq \|f'(\psi(s))\|_{P,X}\cdot\|\psi'(s)\|_{P,P} \leq \|f'((1-\varepsilon)t_0)\|_{P,X}\cdot\underbrace{\|\psi'(0)\|_{P,P}}_{\text{La métrique de Poincaré est max. en } 0} = N_{t_0}\frac{(1-\varepsilon)(1-|t_0|^2)}{R} = 1$

d'où $|(f\circ\psi)'(s)|_X \leq \dfrac{1}{1-|s|^2/R^2}$

Cor 1 On suppose X compact. Soient $f_n : \Delta \longrightarrow X$ suite de f° holo. telles que $|f_n'(0)|_X \longrightarrow +\infty$

Alors $\exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow X$ tq $|g'(0)|_X = 1$ et $|g'|_X \leq 1$ sur $\mathbb{C}$

dem : On a par le lemme de BRODY une suite $(R_n)_n$ $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$(\varphi_n)_n$ $\varphi_n : R_n\Delta \longrightarrow (1-\varepsilon)\Delta$

$f_n \circ \varphi_n : R_n\Delta \longrightarrow X$

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ Alors APCR $\Omega \subseteq R_n\Delta$
et $(f_n\circ\varphi_n)_n$ est equicontinue sur Ω

donc par MONTEL $\exists$ sous suit qui cv uniformément sur tout compact de Ω.

Par extraction diagonale on construit une suit
qui cv unif sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $g : \mathbb{C} \longrightarrow X$
avec $|g'(0)|_X = 1$

Rq: on ne sait rien sur $g(0)$ □

Cor 2 $\Big[$ $k_x(\xi) = 0 \Rightarrow \exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow X$ hol. non constant
(Ne passe pas necessairement par x)

Rq : Sur $\mathbb{C}$, $k_x \equiv 0$.
On peut montrer que si $\mathbb{C} \longrightarrow X$ alors $k \equiv 0$ sur son image
donc X n'est pas infinitésimalement hyperbolique au sens de KOBAYASHI,

BILAN :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{INFINIT. HYPERBOLIQUE AU SENS DE KOBAYASHI}\\ \Longleftrightarrow \quad \text{HYPERBOLIQUE AU SENS DE BRODY}\end{array}}$$

II) Dimension de Kodaira

II 1) Définitions

Déf (Plurigenres) Soit $d \geq 0$

on note $P_d = h^0(X, K_X^{\otimes d})$

Cas d'une courbe :

$P_0 = 1$

$P_1 = g$

surface :

$P_0 = 1$

$P_1 = $ "g"

$P_2 = h^0(X, K_X^2)$

$\geq 1 - h^1(\mathcal{O}) + K\cdot K$

Déf

$$K(X) = \limsup_{d \to +\infty} \left(\frac{\log(P_d)}{\log(d)} \right)$$

dimension de Kodaira

$\underline{RR} \Rightarrow \chi(K^2) = \chi(\mathcal{O}) + \frac{1}{2}(K^{\otimes 2} \cdot K^{\otimes 2} - K^{\otimes 2} \cdot K)$

$\chi(K^2) = h^0(K^2) + h^0(K) - h^1(K^2)$

or $\chi(\mathcal{O}) = h^0(\mathcal{O}) - h^1(\mathcal{O}) + h^2(\mathcal{O})$

$= h^0(\mathcal{O}) + h^0(K) - h^1(\mathcal{O})$

BILAN $P_2 = 1 - h^1(\mathcal{O}) + h^1(K^{\otimes 2}) + K\cdot K \geq 1 - h^1(\mathcal{O}) + K \cdot K$

Rk $h^0(X, K_X^{\otimes d}) \in \Theta(d^{K(X)})$

Prop $K_X^{\otimes d} \longrightarrow X$ induit $\phi_d : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_d - 1}$ alors

$$K(X) = \limsup_{d \to +\infty} (\dim \phi_d(X))$$

Cor : X de dim n, $K(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2, \dots, n\}$

Exemple :

1. $\mathbb{P}^n$ $K_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(-(n+1))$

   donc $\forall d > 0$ $H^0(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n}^{\otimes d}) = 0$

   $K(\mathbb{P}^n) = -\infty$

2. De manière générale si K_X anti-ample

   $H^0(X, K_X^{\otimes d}) = 0$ APCR donc $K(X) = -\infty$

3. À l'inverse si K_X ample, $h^0(K_X^{\otimes d}) = \chi(K_X^{\otimes d})$ [HRR]

   polynôme en d de deg n

   donc $K(X) = n$.

4. Enfin $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ (Tore par ex), $K(X) = 0$

II.2) Classification, le cas des surfaces

<u>Conjecture (Kobayashi)</u> $\left(X \text{ kahler hyperbolique} \Rightarrow K_X \text{ ample} \right)$

<u>Surfaces Kahler (compacte)</u>

① $\kappa(X) = -\infty$

X est uniréglé donc non-hyperbolique (ce resultat est conjecturé en dim superieure)

② $\kappa(X) = 0$ <u>alors</u> $\exists\, \tilde{X} \longrightarrow X$ <u>avec</u> $\tilde{X} \in \{ \text{Tore}, K3 \}$

→ les Tores sont non-hyperbolique

→ les K3 sont non-hyperboliq (difficile)

[Toute K3 peut être approché par des Kummer en deformation or $\text{Kummer} = \frac{\text{Tore}}{\text{invol}}$ est non-hyperb. <u>donc</u> les courbes entières

③ $\kappa(X) = 1$

X elliptique.

→ non-hyperbolique

④ $\kappa(X) = 2 = \dim(X)$

⊛ Si K_X non ample, <u>alors</u> il exist (−2)-courbe ds X donc non-hyperbolique

Exemple:

$E \subseteq Bl_0(X) \quad b^*K_X + E = K_{Bl_0(X)}$ non ample,

$\downarrow b$

$X \quad K_X$ ample hyperbolique

La conj de Kobayashi est verifiee pour les surfaces

" Si X hyperbolique le seul cas qui est c'est K_X ample "

En dim superieure, le cas le plus dur rest de montrer :

$$(\kappa(X) = 0) \Rightarrow (X \text{ non-hyperbolique})$$

En particulier si $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ <u>Alors</u> $X = (\text{Tores}) \times (\text{Calabi Yau}) \times (\text{Symp.Holo})$

(quitte à passer à un rev fini)

* Tores (ok!)

* CY ???

* Symp Holo ↴

III) Le cas hyperkählerien

III.1) Espace des twisteurs

III.1.a) (X,σ) est dit symplectique holomorphe si $\bullet\ \mathbb{C}\cdot[\sigma] = H^{2,0}(X,\mathbb{C})$
de dim $2n$ $\bullet\ \sigma^n$ non dég.

Rq : $TX \simeq \Omega^1_X$ (produit intérieur par σ)
et donc $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ (et donc $\kappa(X)=0$)

Soit $c \in \mathrm{Kahler}(X) \subseteq H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{R})$

Thm [YAU] X compacte symp. hol.
$\exists!\ g_c$ métrique Riem./X tq $\left(\begin{array}{l} (X,g_c) \text{ kähler et} \\ [\omega_{g_c}] = c \end{array} \right)$
Ricci-plate

On montre
$$\mathrm{Hol}(g_c) \simeq Sp(n)$$
$$\| $$
$$U(2n) \cap Sp(2n,\mathbb{C})$$
kähler (preserve I) symp. (preserve σ)

Prop : (M,g) var Riem. avec $\mathrm{Hol}(g_c) \simeq Sp(n)$
$\exists\ I,J,K \in \mathrm{End}(TM)^\nabla$ $(\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0)$ tq
$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1_{TM}$

(M,I,J,K,g) est appelé variété hyperkählérienne

III.1.b) $\zeta \in \mathbb{P}^1 \simeq S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$

$$I_\zeta = \zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K$$

$$(\zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K)^2$$
$$= \zeta_1^2 I^2 + \zeta_2^2 J^2 + \zeta_3^2 K^2 + \zeta_1\zeta_2(IJ+JI) + \zeta_1\zeta_3(IK+KI) + \zeta_2\zeta_3(JK+KJ)$$
$$= (\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2)(-1) + 0 = -1$$

$$\nabla_g I_\zeta = 0$$

donc • I_ζ structure complexe
• (I_ζ, g) structure kählérienne

on note $X_\zeta = (X_{\mathrm{diff}}, I_\zeta, g_c)$

On a de plus sur X_ζ une structure symplectique (I_ζ-)holomorphe
$\sigma_\zeta = g((J+iK)\_\,,\_)$

BILAN $\zeta \in \mathbb{P}^1 \longmapsto (X_\zeta, \sigma_\zeta)$ variété symp. hol.

$Z(c) := \quad (X_{diff} \times S^2)$ muni de $(I_\zeta, I_{\mathbb{P}^1})$ sur $TX \oplus TS^2$

ESPACE DES TWISTEURS

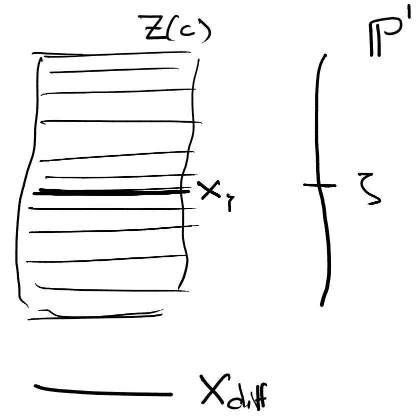
Variété complexe de dimension $2n+1$

Métrique hermitienne produit (pas Kähler)

$f : Z(c) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ fibration holo.

$\left(\pi : Z(c) \longrightarrow X_{diff} \text{ fibration } C^\infty\right)$

Regroupe toutes les structures kähler sur X | symp holo. associées à g_c



III.1.c) **Def** $\forall x \in X$, $\pi^{-1}(x) \subseteq Z(c)$ est une sous-variété complexe appelée droite twistorielle (notée L_x)

$f_{|L_x} : L_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ biholo.

(c'est l'image d'une section particulière de f)

Prop $s : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Z(c)$ section de f

Alors $C = s(\mathbb{P}^1)$ a pour fibré normal $N_{C/Z} \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 2n}$

$$\mathrm{Sec}(f,c) = \{ s : \mathbb{P}^1 \to Z(c) \text{ section de } f \}$$

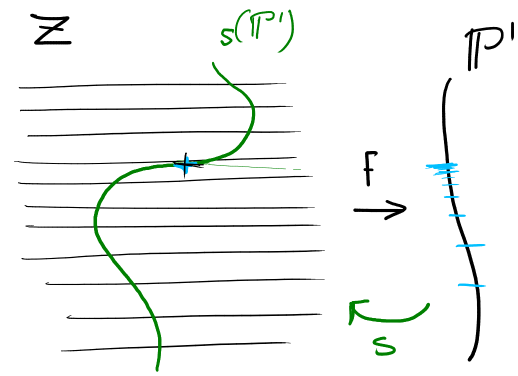
$$\begin{pmatrix} X_{ens} & \longrightarrow & \mathrm{Sec}(f,c) \\ x & \longmapsto & L_x \end{pmatrix}$$

Thm [KODAIRA] [$\mathrm{Sec}(f,c)$ lisse de dimension $4n = h^0(C, N_{C/Z})$

On a $T_{L_x} \mathrm{Sec}(f,c) \simeq H^0(L_x, N_{L_x/Z}) \simeq T_xX \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$

Dans la suite, on note $S :=$ compo irred de $\mathrm{Sec}(f,c)$ qui contient tous les L_x, $x \in X$

III.2) GRANDES DEFORMATIONS



Soit $s \in S$

alors $df \circ ds = id_{T\mathbb{P}^1}$ donc ds ne s'annule pas

ainsi $ds : T\mathbb{P}^1 \longrightarrow TZ \setminus 0$ ← (section nulle)

$\left(\forall \zeta \in \mathbb{P}^1, \; ds_\zeta \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \in T_{s(\zeta)} Z \setminus 0 \right)$

d'où ds et $\zeta \in \mathbb{P}^1$ définissent un pt de $\mathbb{P}(T_Z)$: $\{ ds(\zeta) \cdot X \mid X \in T_{\mathbb{P}^1} \} \subseteq T_Z$

Soit $D := \mathbb{P}\, \mathrm{Ker}(df) \subseteq \mathbb{P} T Z$

$0 \longrightarrow \ker df \longrightarrow TZ \xrightarrow{df} f^* T_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$

Prop : $\exists (s_n, \zeta_n)_n$ suite de $S \times \mathbb{P}^1$ et $\exists\, p \in D$ telle que

$$\mathbb{P}\, ds_n(\zeta_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} p \in D$$

CERTAINES DEFORMATIONS DE DROITES TWISTORIELLES TENDENT À ETRE HORIZONTALES EN CERTAINS POINT

dem : Sinon en prenant D à l'infini ds $\mathbb{P}TZ$

pour $s \in S$, on a $ds : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}(TZ)$ ne s'approchant pas de D

donc la famille S est équicontinue. Par compacité de $\mathbb{P}^1$ il s'en suit que S est compact

Soit $p \in Z$ considérer $S_p \in \{ s \in S \mid p \in s(\mathbb{P}^1) \}$ ensemble des sections passant par p

$S_p \subseteq S$ sous-ensemble analytique. $\Longrightarrow$ compact

et $\varphi_p : \begin{pmatrix} S_p \longrightarrow \mathbb{P}(T_p Z) \\ s \longmapsto \text{direct}^{\text{ion}} \text{ tangente à } s(\mathbb{P}^1) \text{ en } p \end{pmatrix}$ or $\forall\, C = s(\mathbb{P}^1)$ pour $s \in S_p$, $N_{C/Z}$ ample

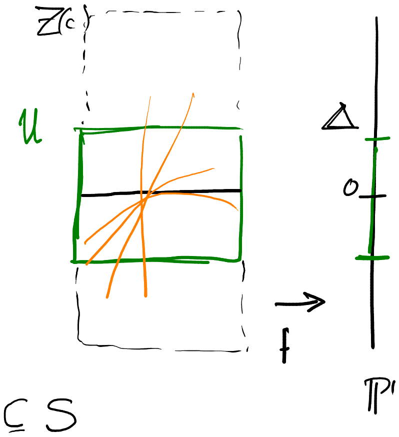
donc φ_p est ouverte

$+ \left. \begin{matrix} \text{COMPACTE} \\ \text{OUVERTE} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \varphi_p(S_p) = \mathbb{P}(T_p Z)$ en particulier $\varphi_p(S_p)$ rencontre D_p

ce qui contredit l'hypothèse.

III.3) Conclusion

On a une suite $s_n \subseteq S$ OPS quitte à prendre une sous-suite
$\zeta_n \subseteq \mathbb{P}^1$ $\zeta_n \longrightarrow 0$
$\zeta_n \in \Delta$



donc on a une suite de f° $s_{n|\Delta} : \Delta \longrightarrow Z$

$|s'_{n|\Delta}(\zeta_n)| \longrightarrow +\infty$ $\quad \mathcal{U} = f^{-1}(\Delta) \subseteq S$

lemme de Brody (sur $\overline{\mathcal{U}}$)

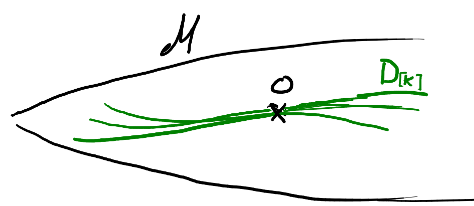
$\Rightarrow \exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}} \subseteq Z$ limite avec $|g'(0)| = 1$

Mais $g \in \overline{\mathcal{U}}$ donc $f \circ g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\Delta}$
nécessairement $f \circ g = \zeta_0$ constante.

donc $g : \mathbb{C} \longrightarrow f^{-1}(\zeta_0) = X_{\zeta_0}$ CQFD.

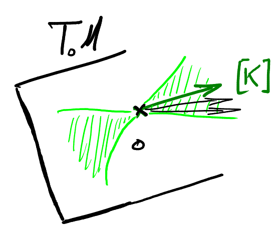
(Un petit supplément qui donne une idée de l'approche de Verbitsky)

$X_0 = (X, \sigma, c)$ var symp + classe de kähler



$\mathcal{M}$: espace des déformations de X_0

$0 = [X_0] \in \mathcal{M}$ $\quad T_0\mathcal{M} \cong H^1(X_0, T_{X_0}) \simeq_\sigma H^1(X_0, \Omega^1_{X_0})$



$\begin{pmatrix} \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{M} \\ \zeta \longmapsto X_\zeta \end{pmatrix}$ envoie $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ dans $\mathbb{C} \cdot [c] \in H^{1,1}(X_0, \mathbb{C}) \simeq T_0\mathcal{M}$

On peut faire varier $[c] \in \mathrm{Kahler}(X_0) \subseteq H^{1,1}(X_0, \mathbb{C}) \cap H^2(X_0, \mathbb{R})$
Ça nous donne à chaque fois une nouvelle direct° de droit twistorielle. $(\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} = 1)$

Et on sait par ce qui précède que chacune de ces directions contient au moins un point $[X]$ avec X non hyperbolique. Donc l'ensemble des HK non hyperbolique est de $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \leq 2$