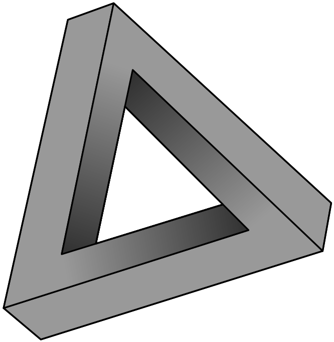
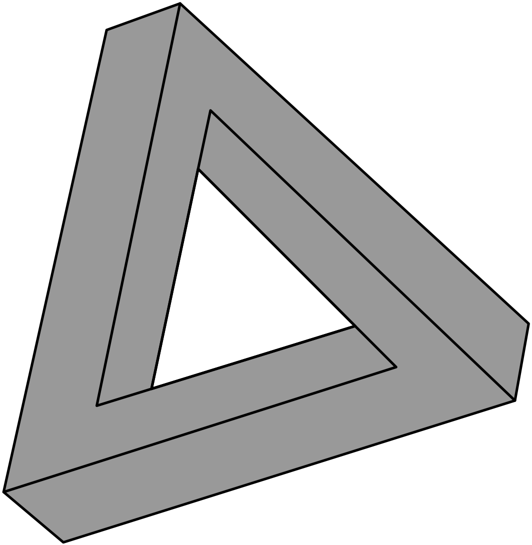
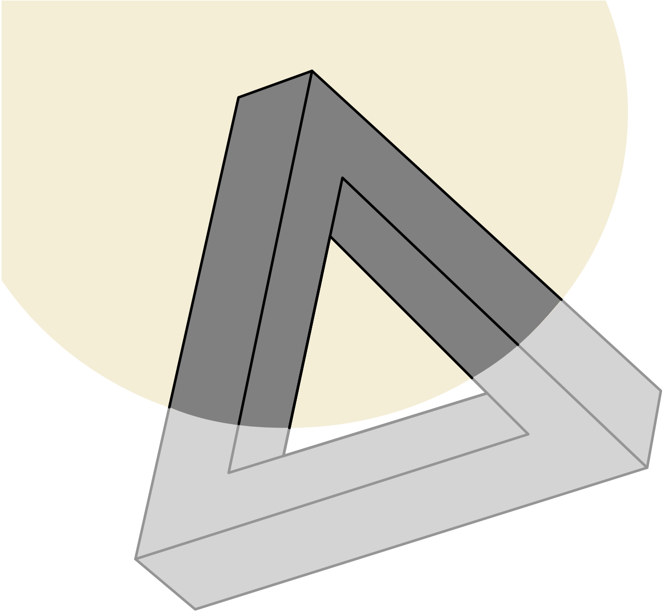
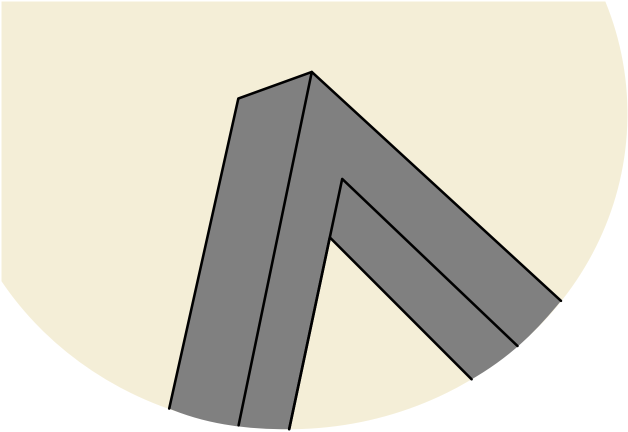
Cohomologie des figures impossibles

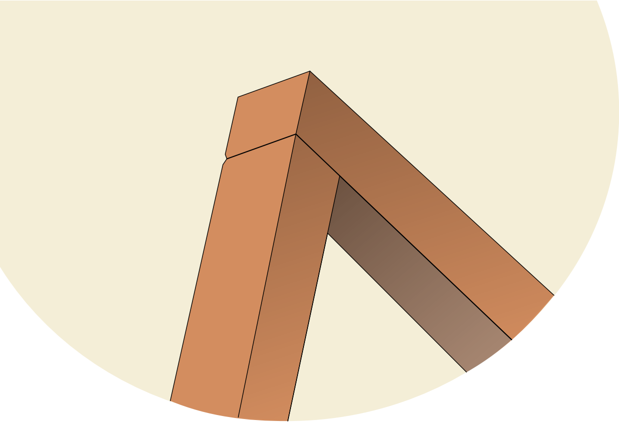
Basile Pillet

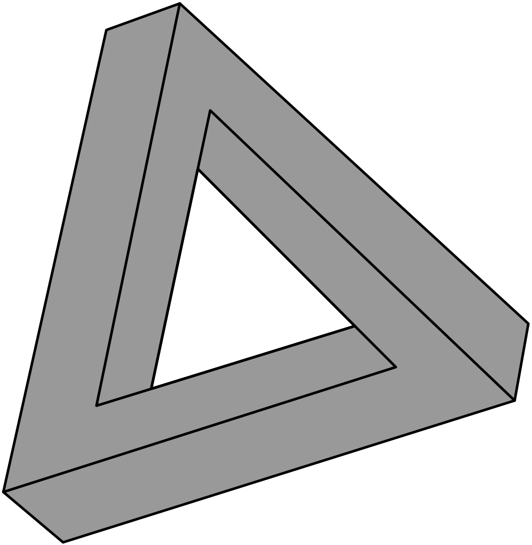


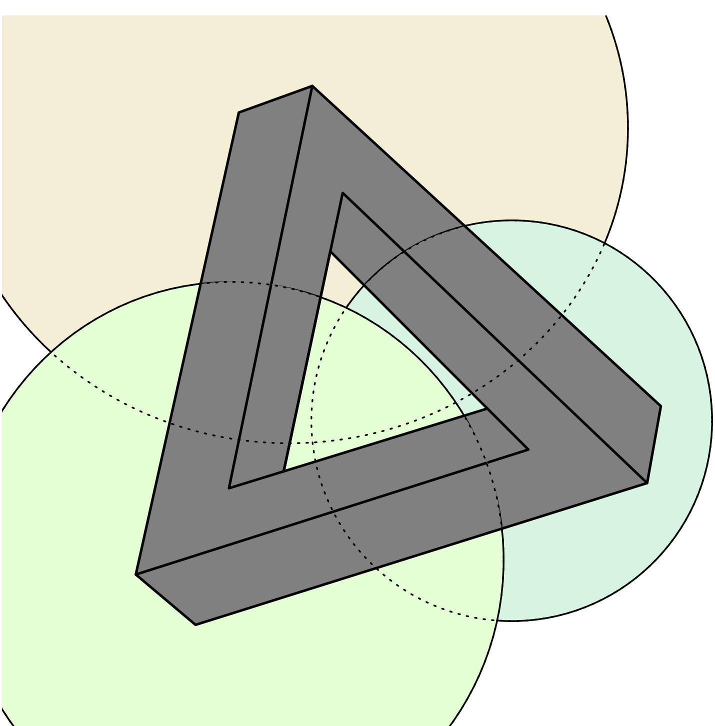


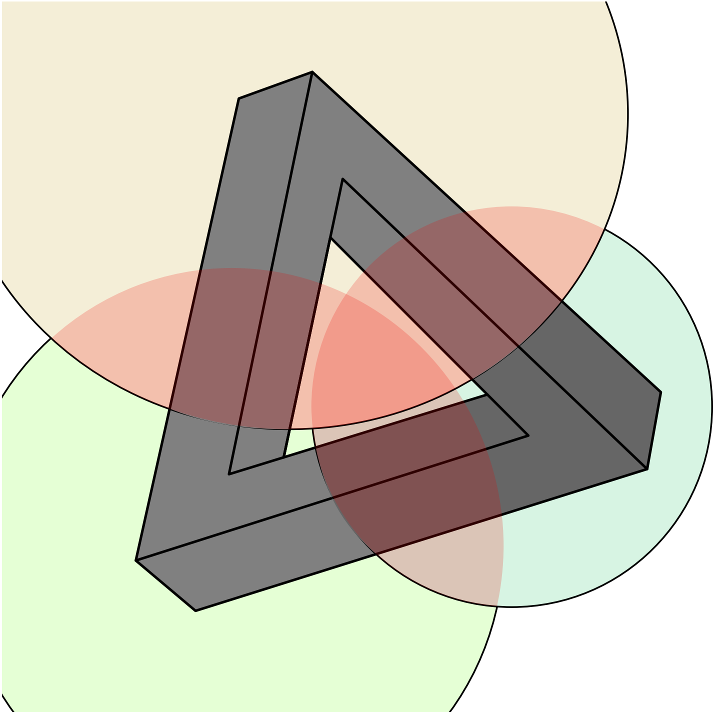


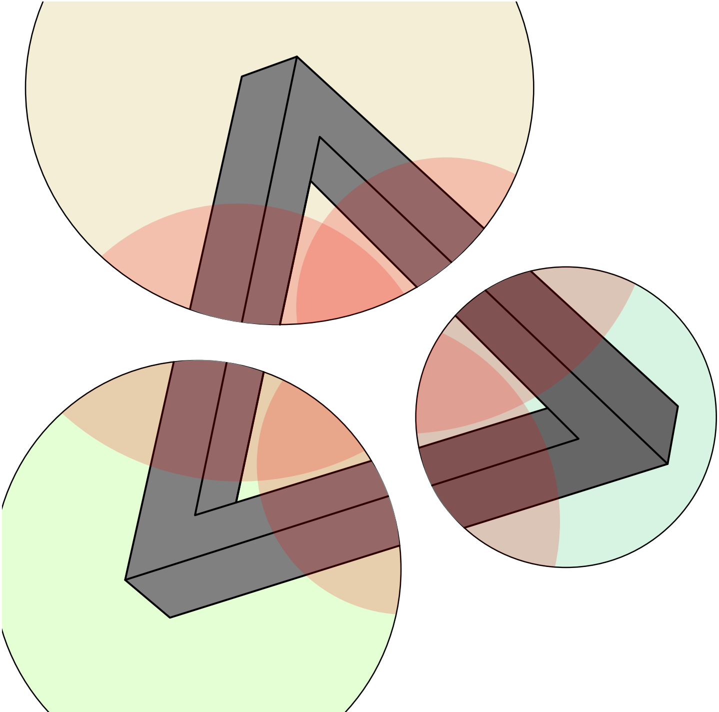


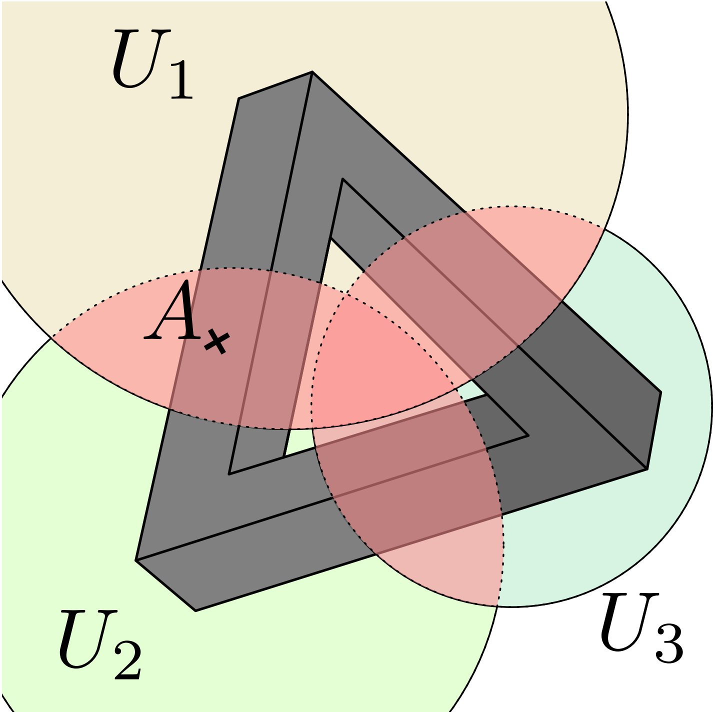




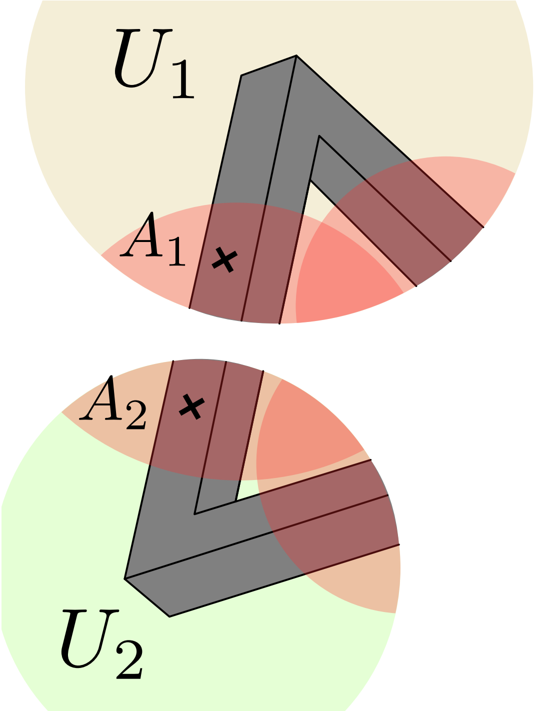


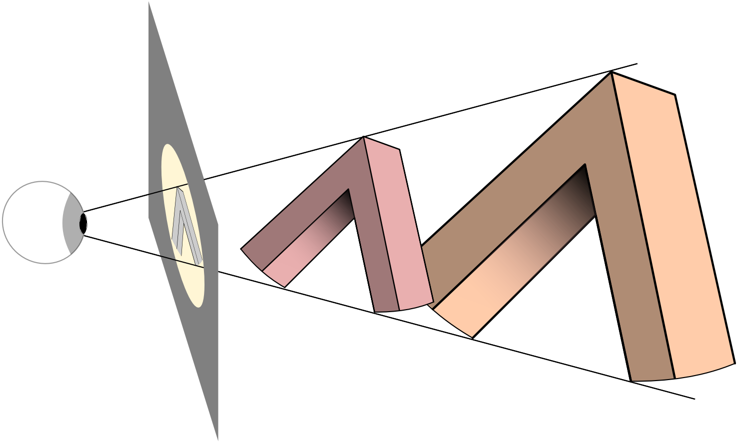


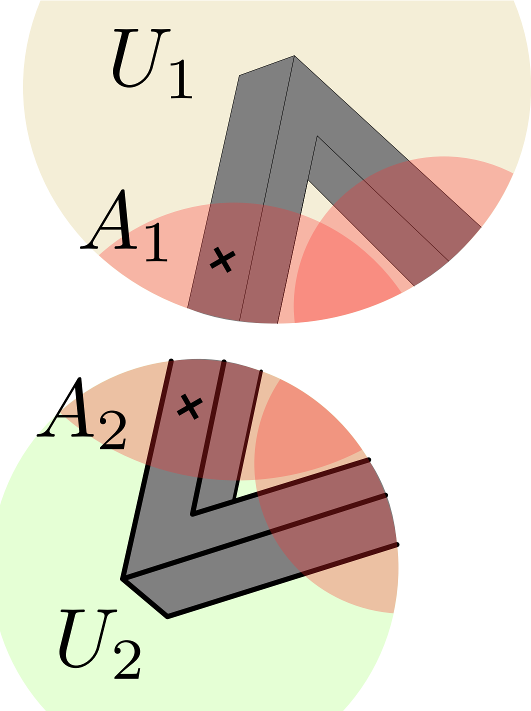




U_1
A
U_2
U_3

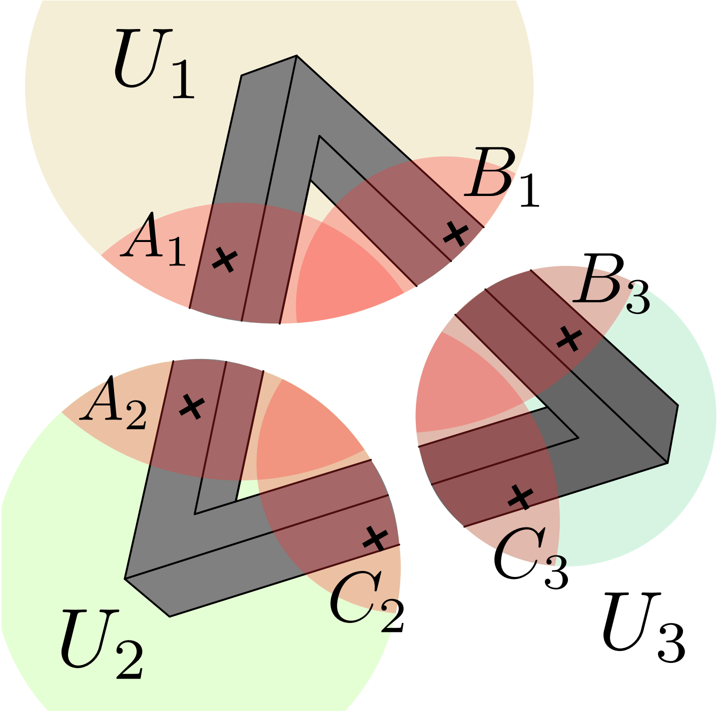

U_1
A_1
A_2
U_2





U_1
A_1
A_2
U_2

$$d_{12} = \frac{\text{distance du point représenté par } A_1 \text{ à l'observateur}}{\text{distance du point représenté par } A_2 \text{ à l'observateur}}$$


U_1
B_1
A_1
B_3
A_2
C_3
C_2
U_3
U_2

$$d_{13} = \frac{\text{distance du point représenté par } B_1 \text{ à l'observateur}}{\text{distance du point représenté par } B_3 \text{ à l'observateur}}$$

$$d_{23} = \frac{\text{distance du point représenté par } C_2 \text{ à l'observateur}}{\text{distance du point représenté par } C_3 \text{ à l'observateur}}$$

Recollement

Pour se recoller

Recollement

Pour se recoller

il faut

- que A_1 et A_2 se superposent

Recollement

Pour se recoller

il faut

- que A_1 et A_2 se superposent
- que B_1 et B_3 se superposent

Recollement

Pour se recoller

il faut

- que A_1 et A_2 se superposent
- que B_1 et B_3 se superposent
- que C_2 et C_3 se superposent

Recollement

Pour se recoller

il faut

- que A_1 et A_2 se superposent : $d_{12} = 1$
- que B_1 et B_3 se superposent
- que C_2 et C_3 se superposent

Recollement

Pour se recoller

il faut

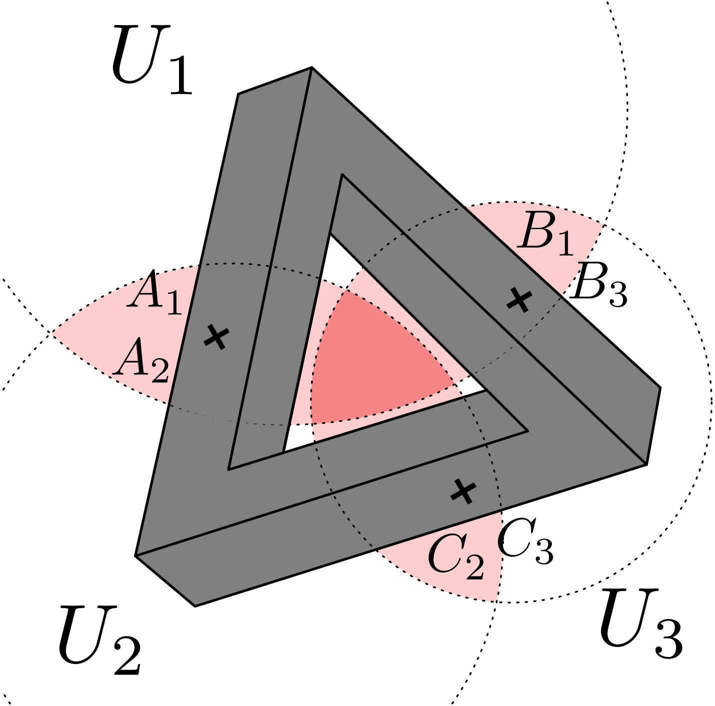
- que A_1 et A_2 se superposent : $d_{12} = 1$
- que B_1 et B_3 se superposent : $d_{13} = 1$
- que C_2 et C_3 se superposent

Recollement

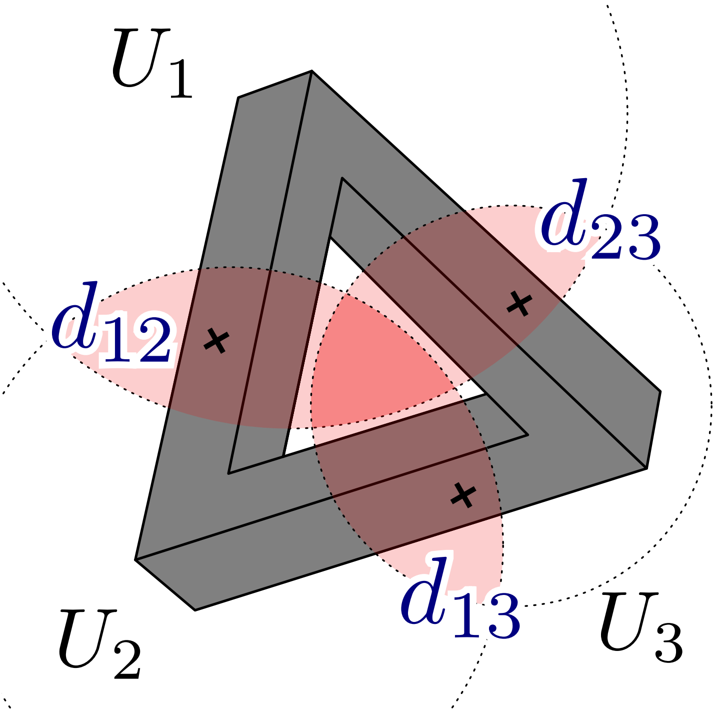
Pour se recoller

il faut

- que A_1 et A_2 se superposent : $d_{12} = 1$
- que B_1 et B_3 se superposent : $d_{13} = 1$
- que C_2 et C_3 se superposent : $d_{23} = 1$

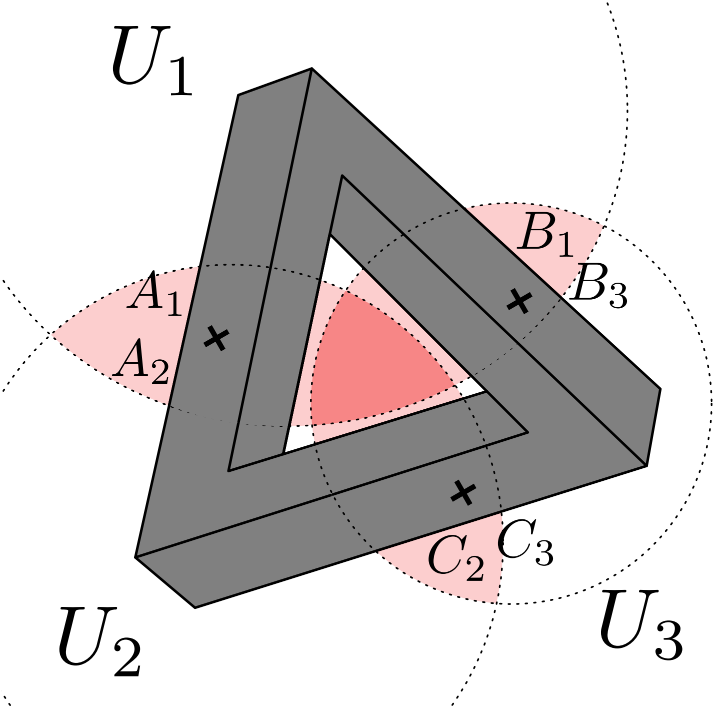


U_1
B_1
A_1
B_3
A_2
C_3
C_2
U_2
U_3


U_1
d_{23}
d_{12}
d_{13}
U_2
U_3

Les d_{ij} forment un **cocycle**.

Que ce passe-t-il si on multiplie toutes les dimensions de l'objet 1 par $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ ainsi que sa distance à l'observateur ?



U_1
A_1
A_2
B_1
B_3
C_2
C_3
U_2
U_3

$$d_{12} \mapsto$$

$$d_{13} \mapsto$$

$$d_{23} \mapsto$$

$$d_{12} \mapsto \lambda_1 d_{12}$$

$$d_{13} \mapsto$$

$$d_{23} \mapsto$$

$$d_{12} \mapsto \lambda_1 d_{12}$$

$$d_{13} \mapsto \lambda_1 d_{13}$$

$$d_{23} \mapsto$$

$$d_{12} \mapsto \lambda_1 d_{12}$$

$$d_{13} \mapsto \lambda_1 d_{13}$$

$$d_{23} \mapsto d_{23}$$

Il existe une manière de redimensionner les trois objets telle que

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1$$

Il existe une manière de redimensionner les trois objets telle que

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1$$

(c'est-à-dire de recoller les trois coins en un vrai *triangle de Penrose*)

Il existe une manière de redimensionner les trois objets telle que

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1$$

(c'est-à-dire de recoller les trois coins en un vrai *triangle de Penrose*)

si et seulement si

Il existe une manière de redimensionner les trois objets telle que

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1$$

(c'est-à-dire de recoller les trois coins en un vrai *triangle de Penrose*)

si et seulement si

$$d_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \qquad d_{13} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \quad , \qquad d_{23} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

Il existe une manière de redimensionner les trois objets telle que

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1$$

(c'est-à-dire de recoller les trois coins en un vrai *triangle de Penrose*)

si et seulement si

$$d_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \qquad d_{13} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \quad , \qquad d_{23} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

on dit alors que les d_{ij} forment un **cobord**.

Le *triangle de Penrose* existe

ssi

les d_{ij} forment un cobord

Le *triangle de Penrose* existe

ssi

les d_{ij} forment un cobord

Si c'est le cas alors

$d_{12} \times d_{23} =$

Le *triangle de Penrose* existe
ssi
les d_{ij} forment un cobord

Si c'est le cas alors

$$d_{12} \times d_{23} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_3} =$$

Le *triangle de Penrose* existe
ssi
les d_{ij} forment un cobord

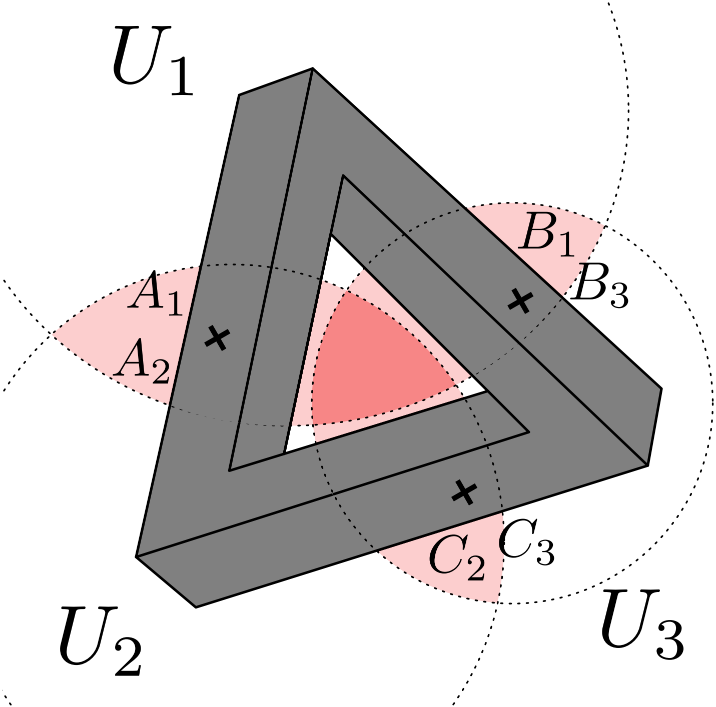
Si c'est le cas alors

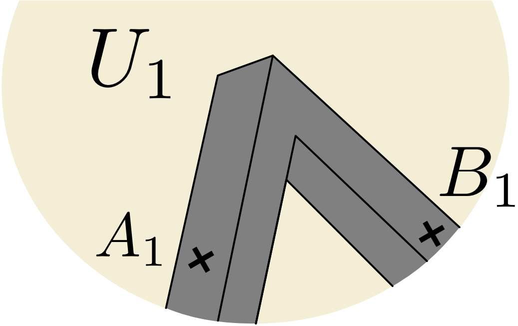
$$d_{12} \times d_{23} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} =$$

Le *triangle de Penrose* existe
ssi
les d_{ij} forment un cobord

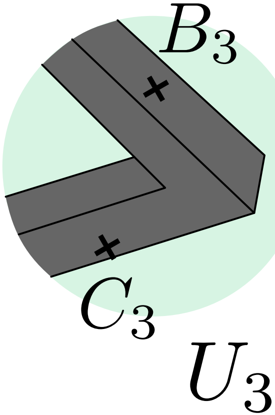
Si c'est le cas alors

$$d_{12} \times d_{23} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = d_{13}$$


U_1
U_2
U_3
A_1
A_2
B_1
B_3
C_2
C_3

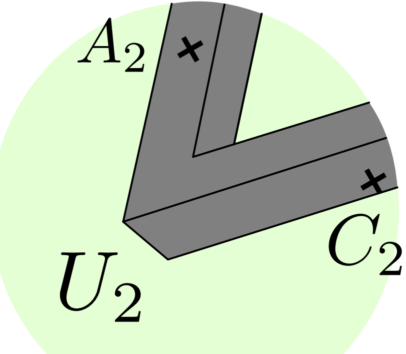

U_1
B_1
A_1

$$\text{distance}(A_1) < \text{distance}(B_1)$$


B_3
C_3
U_3

$$\text{distance}(A_1) < \text{distance}(B_1)$$

$$\text{distance}(B_3) < \text{distance}(C_3)$$


A_2
C_2
U_2

$$\text{distance}(A_1) < \text{distance}(B_1)$$

$$\text{distance}(B_3) < \text{distance}(C_3)$$

$$\text{distance}(A_2) > \text{distance}(C_2)$$

$$d_{13} = d_{12} \times d_{23}$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\
&= \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(A_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\
&= \frac{\mathrm{distance}(A_1)}{\mathrm{distance}(A_2)} \times \frac{\mathrm{distance}(C_2)}{\mathrm{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\mathrm{distance}(A_1)}{\mathrm{distance}(C_2)} \times \frac{\mathrm{distance}(C_2)}{\mathrm{distance}(C_3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\
&= \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(A_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\
&= \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(A_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(B_1)}{\text{distance}(C_3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\
&= \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(A_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(B_1)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(B_1)}{\text{distance}(B_3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\
&= \frac{\mathrm{distance}(A_1)}{\mathrm{distance}(A_2)} \times \frac{\mathrm{distance}(C_2)}{\mathrm{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\mathrm{distance}(A_1)}{\mathrm{distance}(C_2)} \times \frac{\mathrm{distance}(C_2)}{\mathrm{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\mathrm{distance}(A_1)}{\mathrm{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\mathrm{distance}(B_1)}{\mathrm{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\mathrm{distance}(B_1)}{\mathrm{distance}(B_3)} \\
&< d_{13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= d_{12} \times d_{23} \\
&= \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(A_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_2)} \times \frac{\text{distance}(C_2)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(A_1)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(B_1)}{\text{distance}(C_3)} \\
&< \frac{\text{distance}(B_1)}{\text{distance}(B_3)} \\
&< d_{13}
\end{aligned}
$$

Le *triangle de Penrose* n'existe pas.