Exposé Hyperbolicité — 29/05/2015

> Dans tout l'exposé X variété complexe compacte de dimension n

I) Hyperbolicité

I.1) Hyperbolicité au sens de Brody

Déf : X est dit hyperbolique (au sens de Brody) si toute $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ holomorphe est constante

Ex : • $\mathbb{C}^n$ et les tores $\mathbb{C}^n/\Lambda$ avec $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ ne sont pas hyperboliques

Prop : Soit $f : \mathbb{C} \to X$, $t \in \mathbb{C}$, $x = f(t)$ et $x_0 \in \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ tq $\pi(x_0) = x$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \quad \text{tq} \quad \begin{array}{l} \bullet\ \pi \circ \tilde{f} = f \\ \bullet\ \tilde{f}(t) = x_0 \end{array}$$

Conséquence : X hyperbolique $\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ hyperbolique.

Ex : Cas des courbes.

genre	0	1	2 ...
courbure	<0	$=0$	>0
$\tilde{X}$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{C}$	Δ
Ex	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{C}/\Lambda$ smooth deg 3 hypersf $\subset \mathbb{P}^2$	rev. ramifié de $\mathbb{P}^1$ au dessus de 6 pts ...
HYPERBOLIQUE	NON	NON	OUI
K_X	$\mathcal{O}(-2)$	$\mathcal{O}_X$	>0

$\longrightarrow$ Liens entre la positivité de K_X et l'hyperbolicité ?

I.2) Hyperbolicité au sens de KOBAYASHI

(On va supposer X kähler pour simplifier)

Déf : (Quasi-norme de FINSLER de KOBAYASHI-ROYDEN sur T_X)

$x \in X$, $\xi \in T_x X$. On considère $M_{x,\xi} = \left\{ f : \Delta \to X \;\middle|\; \begin{array}{l} f(0) = x \\ f'(0) \in \langle \xi \rangle \end{array} \right\}$

$$k_x(\xi) = \inf \left\{ \frac{|\xi|}{|f'(0)|} \text{ pour } f \in M_{x,\xi} \right\}$$

Morale : ξ unitaire : $k_x(\xi)$ petit $\Leftrightarrow$ Il existe des app $f : \Delta \to X$, $0 \mapsto x$ avec $f'(0)$ très grand dans la direction ξ

$k_x(\xi) = 0 \Leftrightarrow$ Il existe ... arbitrairement grand ...

Rq : • $k_x(\xi) < \infty$ (on peut prendre Δ comme carte au voisinage de x)

• $k_x(\xi + \zeta) \not\leq k_x(\xi) + k_x(\zeta)$ "quasi-norme de Finsler"

Déf (pseudo-distance de KOBAYASHI)

$x, y \in X$, $\gamma : x \rightsquigarrow y$ chemin.
$$d_K(x,y) = \int_0^1 \dot\gamma(t)\, k_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\, dt =: \int_\gamma dk$$

Rq : • ce n'est pas une distance car on peut avoir : $d(x,y) = 0$ pour $x \neq y$

Déf X est dit <u>HYPERBOLIQUE AU SENS DE KOBAYASHI</u> si d_K <u>distance</u>

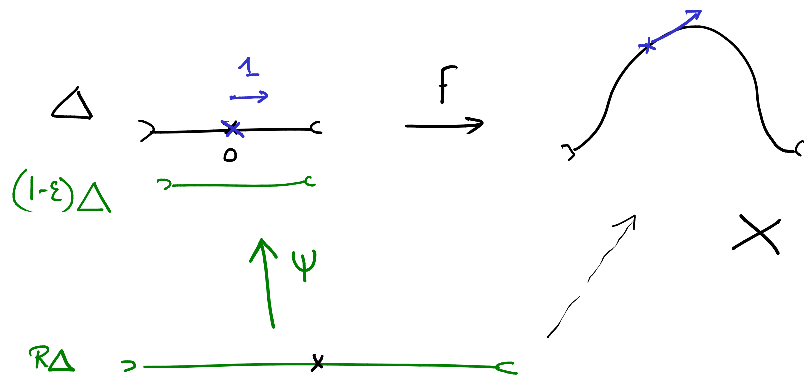
Lemme de BRODY

$f : \Delta \to X$ holomorphe, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R \geq (1-\varepsilon)|f'(0)|$ et il existe $\psi : R\Delta \to (1-\varepsilon)\Delta$ homographie telle que

$$|(f \circ \psi)'(0)| = 1 \quad \text{et} \quad |(f \circ \psi)'(s)| \leq \frac{1}{1 - |s|^2/R^2} \quad \forall s \in R\Delta$$

dem : f grandit les vecteurs tangents à Δ

On munit Δ de la métrique de Poincaré $\dfrac{d|t|^2}{(1-|t|^2)^2}$



On cherche où sur $(1-\varepsilon)\Delta$ elle grandit le plus les vecteurs,

$$f'((1-\varepsilon)t) : T_\Delta \longrightarrow T_X$$

a pour norme $N_t = \sup\limits_{|\xi|\le 1-|t|^2} |f'((1-\varepsilon)t)\xi|_X = (1-|t|^2)\,|f'((1-\varepsilon)t)| \xrightarrow[|t|\to 1]{} 0$

donc $\exists\, t_0 \in \Delta$ tq $N_{t_0} = \sup\limits_t N_t$

On va reparamétrer en envoyant $0 \in R\Delta$ sur $t_0 \in \Delta$

$$\Psi : \begin{pmatrix} R\Delta & \longrightarrow & (1-\varepsilon)\Delta \\ s & \longmapsto & (1-\varepsilon)\dfrac{t_0 - s/R}{1-\overline{t_0}\, s/R} \end{pmatrix}$$

homographie $\quad \Psi(0) = t_0$, $\quad \Psi'(0) = \dfrac{1-\varepsilon}{R}(|t_0|^2-1)$

$\Psi'(s) = \dfrac{1-\varepsilon}{R}\,\dfrac{|t_0|^2-1}{(1-\overline{t_0}\,s/R)^2}$

Il suffit de prendre R tq $|(f\circ\Psi)'(0)| = 1$ ie $|f'((1-\varepsilon)t_0)\cdot\Psi'(0)| = 1$

d'où $N_{t_0} \times \dfrac{1-\varepsilon}{R}(1-|t_0|^2) = 1$ ie $R = \dfrac{1-|t_0|^2}{(1-\varepsilon)N_{t_0}}$

$$f\circ\Psi : R\Delta \longrightarrow X$$

$(f\circ\Psi)'(s) : T_{R\Delta} \longrightarrow T_X \qquad \|(f\circ\Psi)'(s)\|_{P,X} = \sup\limits_{|\xi| < 1-|s|^2/R^2} |(f\circ\Psi)'(s)\cdot\xi|_X = |(f\circ\Psi)'(s)|_X \cdot (1-|s|^2/R^2)$

or par construction $\|(f\circ\Psi)'(s)\|_{P,X} \le \|f'(\Psi(s))\|_{P,X}\cdot\|\Psi'(s)\|_{P,P} \le \|f'((1-\varepsilon)t_0)\|_{P,X}\cdot\|\Psi'(0)\|_{P,P} = N_{t_0}\dfrac{(1-\varepsilon)(1-|t_0|^2)}{R} = 1$

d'où $\quad |(f\circ\Psi)'(s)|_X \le \dfrac{1}{1-|s|^2/R^2}$

Cor 1 : Soient $f_n : \Delta \longrightarrow X$ suite de f° holo.

Telles que $|f_n'(0)|_X \longrightarrow +\infty$

Alors $\exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow X$ tq $|g'(0)|_X = 1$ et $|g'|_X \le 1$ sur $\mathbb{C}$

dem : On a par le lemme de BRODY une suite $(R_n)_n$ $\quad R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$(\varphi_n)_n \quad \varphi_n : R_n\Delta \longrightarrow (1-\varepsilon)\Delta$

$$f_n \circ \varphi_n : R_n\Delta \longrightarrow X$$

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ Alors APCR $\Omega \subseteq R_n\Delta$

et $(f_n\circ\varphi_n)_n$ est equicontinue sur Ω

donc par MONTEL $\exists$ sous suit qui cv uniformément sur tout compact de Ω.

Par extraction diagonale on construit une suit

qui cv unif sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $g : \mathbb{C} \longrightarrow X$

avec $|g'(0)|_X = 1$

$\square$

Cor 2 $\left[\; k_x(\xi) = 0 \Rightarrow \exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow X \right.$ holo. non constant

Rq : La distance de Kobayashi est identiquement nulle sur $\mathbb{C}$
et décroit par app holomorphe

donc si $\mathbb{C} \longrightarrow X$ holo non constant, X hyperbolique au sens de Kobayashi.

BILAN :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{HYPERBOLIQUE AU SENS DE KOBAYASHI} \\ \Longleftrightarrow \quad \text{HYPERBOLIQUE AU SENS DE BRODY}\end{array}}$$

II) DIMENSION DE KODAIRA

II 1) Définitions

Déf (Plurigenres) Soit $d \geq 0$

on note $P_d = h^0(X, K_X^{\otimes d})$

Cas d'une courbe :

$P_0 = 1$

$P_1 = g$

surface :

$P_0 = 1$

$P_1 = $ "g"

$P_2 = h^0(X, K_X^2)$

$\geq 1 - h^1(\mathcal{O}) + K \cdot K$

$\underline{RR} \Rightarrow \chi(K^2) = \chi(\mathcal{O}) + \frac{1}{2}(K^{\otimes 2} \cdot K^{\otimes 2} - K^{\otimes 2} \cdot K)$

$\chi(K^2) = h^0(K^2) + h^0(K) - h^1(K^2)$

or $\chi(\mathcal{O}) = h^0(\mathcal{O}) - h^1(\mathcal{O}) + h^2(\mathcal{O})$

$= h^0(\mathcal{O}) + h^0(K) - h^1(\mathcal{O})$

BILAN $P_2 = 1 - h^1(\mathcal{O}) + h^1(K^{\otimes 2}) + K \cdot K \geq 1 - h^1(\mathcal{O}) + K \cdot K$

Déf

$$K(X) = \limsup_{d \to +\infty} \left(\frac{\log(P_d)}{\log(d)} \right)$$

dimension de KODAIRA

Rk

$$h^0(X, K_X^{\otimes d}) \in \Theta(d^{K(X)})$$

Prop $K_X^{\otimes d} \to X$ induit $\phi_d : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_d - 1}$ alors

$$K(X) = \limsup_{d \to +\infty} (\dim \phi_d(X))$$

Cor : X de dim n, $K(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2, \dots, n\}$

dem : Si A très ample

$\phi : X \to \mathbb{P}^n$ $A = \phi^*(\mathcal{O}(1))$

$$H^0(X, mA) = H^0(X, \phi^*(\mathcal{O}(m)))$$
$$= H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)_{|\phi(X)})$$

Demailly : $L \to X$ ample, $x \in X$

$\exists C > 0 \,/\, \forall m > 0 \ \forall k \geq C(m+1)$

$H^0(X, L^{\otimes k}) \twoheadrightarrow (J^m L)_x$

cor $h^0(L^{\otimes k}) \geq \binom{n+m}{n} = \frac{(m+1)\cdots(m+n)}{1 \times \cdots \times n} \geq \frac{(m+1)^n}{n} \geq \frac{k^n}{n C^n}$

$\log h^0(L^{\otimes k}) = n(\log(k) - \log(C)) - \log(n)$

$\frac{\log h^0(L^{\otimes k})}{\log(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} n$ L ample $\Rightarrow K(X, L) \geq n$

$L \to X$, $A \to X$ ample

$h^0(L) \leq h^0(L \otimes A) \cdots \leq h^0(L \otimes A^{\otimes m})$

engendré par ses sections globales.

II.2) Classification

κ	$-\infty$	0	$0 < \kappa < n$	n
				"TYPE GENERAL"
Ex :	$\mathbb{P}^n$, var. de Fano	3 ex : • Tores • Calabi-Yau • Symp holo	Se ramène au cas $\kappa = 0$ (fibration en $\kappa = 0$ var)	Hypersurfaces de grand d° de $\mathbb{P}^n$

$K_X \backslash \kappa$	$-\infty$	0	$0 < \kappa < n$	n
Anti-ample	FANO ex : $\mathbb{P}^n$ COUVERT PAR DES COURBES RATIONELLES	X	X	X
...			X	X
Trivial	X	Tores, Calabi-Yau Symp. holo. COUVERT PAR DES COURBES ENTIÈRES	X	X
...	X			CONJ ABONDANCE
Ample	X	X	X	"TYPE GENERAL" Ex : hypersurfaces de grand degré $\subseteq \mathbb{P}^n$ HYPERBOLIQUE.

Le caractère diagonal du tableau ci dessus est conjectural
il comprend entre autres la conjecture d'abondance

Le plus dur semble cas $\kappa = 0$, on va se restreindre
au cas $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ et $h^{2,0} = 1$

III) Le cas Hyperkählerien

III.1) Espace des twisteurs

III.1.a) **Déf** (M, g, I, J, K) var. Riemannienne lisse (compacte) de $\dim_{\mathbb{R}} 4n$

- $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ ds $\mathrm{End}(TM)$
- $\nabla_g I = \nabla_g J = \nabla_g K = 0$
- $\pi_1(M) = 0$, $h^{2,0}(M, I) = 1$

$X_0 = (M, g, I)$ var complexe kähler de $\dim_{\mathbb{C}} 2n$

$g((J+iK)-,-)$ forme symp. I-holo sur X

$\Rightarrow T_X \simeq \Omega^1_X \Rightarrow K_X \simeq \mathcal{O}_X \Rightarrow K(X) = 0$

---

b) $\zeta \in \mathbb{P}^1 \simeq S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ alors

$$\underbrace{(\zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K)}_{I_\zeta}{}^2 = \zeta_1^2 I^2 + \zeta_2^2 J^2 + \zeta_3^2 K^2 + \zeta_1\zeta_2(IJ+JI) + \zeta_1\zeta_3(IK+KI) + \zeta_2\zeta_3(JK+KJ)$$
$$= (\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2)(-1) + 0 = -1$$

$\Rightarrow I_\zeta$ structure presque complexe sur M

$\nabla_g I_\zeta = 0 \Rightarrow I_\zeta$ structure kähler sur (M, g) on note $X_\zeta = (M, g, I_\zeta)$

Bilan $\forall \zeta \in \mathbb{P}^1$ X_ζ var. symplectique holomorphe. kählerienne.

Thm $\exists Z$ variété complexe de dimension $2n+1$

- $f : Z \to \mathbb{P}^1$ fibration holo
- $\forall \zeta \in \mathbb{P}^1$ $f^{-1}(\zeta) \simeq X_\zeta$

$Z \to \mathbb{P}^1$ est appelé espace des Twisteurs de M

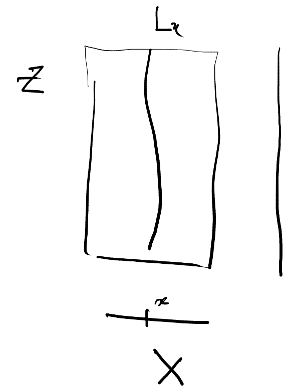
III.1.c) **Déf** Une section $g : \mathbb{P}^1 \to Z$ de f est appelée droite twistorielle si $\exists x \in M$ tq $\forall \zeta \in \mathbb{P}^1$ $g(\zeta) = x$ dans X_ζ

Prop : $x \in M$, $L_x \subseteq Z$ a pour fibré normal [HKLR]

$$N_{L_x/Z} \simeq \mathcal{O}(1) \otimes_{\mathbb{C}} T_x X \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 2n}$$

$$\mathrm{Sec}(Z) = \{ g : \mathbb{P}^1 \to Z \text{ section de } f \}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & \mathrm{Sec}(Z) \\ x & \longmapsto & \text{droite twistorielle } L_x \end{array} \right)$$

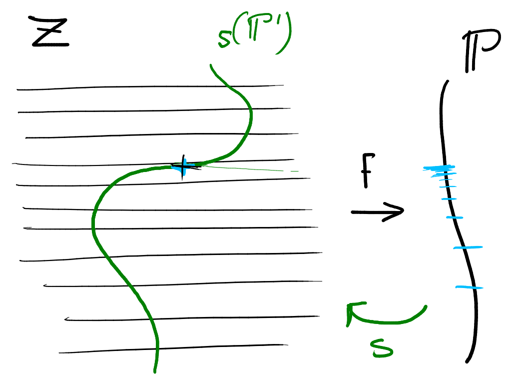


thm (Kodaira) | $\mathrm{Sec}(Z)$ est lisse au voisinage de L_x pour tout x et de dimension $4n = h^0(L_x, N_{L_x/Z})$

$$T_{L_x} \mathrm{Sec}(Z) \simeq H^0(L_x, N_{L_x/Z}) \simeq T_x X \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$$

$S :=$ comp irred de $\mathrm{Sec}(Z)$ qui contienne les L_x, $x \in X$

III.2) Grandes Deformations



Soit $s \in S$

alors $df \circ ds = \mathrm{id}_{T\mathbb{P}^1}$ donc ds ne s'annule pas

ainsi $ds : T\mathbb{P}^1 \longrightarrow TZ \setminus 0$ (section nulle)

$$\left(\forall \zeta \in \mathbb{P}^1, \; ds_\zeta \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \in T_{s(\zeta)} Z \setminus 0 \right)$$

d'où ds et $\zeta \in \mathbb{P}^1$ définissent un pt de $\mathbb{P}(T_Z)$: $\{ ds(\zeta) \cdot X \mid X \in T_{\mathbb{P}^1} \} \subseteq T_Z$

Soit $D := \mathbb{P}\ker(df) \subseteq \mathbb{P}T_Z$

$$0 \to \ker df \to TZ \xrightarrow{df} f^* T_{\mathbb{P}^1} \to 0$$

Prop : $\exists (s_n, \zeta_n)_n$ suite de $S \times \mathbb{P}^1$ et $\exists p \in D$ telle que

$$\mathbb{P} ds_n(\zeta_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} p \in D$$

CERTAINES DEFORMATIONS DE DROITES TWISTORIELLES TENDENT À ETRE HORIZONTALES EN CERTAINS POINT

dem : Sinon en prenant D à l'infini ds $\mathbb{P}TZ$

$s : \mathbb{P}^1 \to Z$ $\qquad ds : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}(TZ) \setminus D$ peut être vu comme une section d'un fibré

— A FINIR —

La famille S est equicontinue [ooo]

Il suffit de mq les $(ds)_{s\in S}$ soit unif. bornées (TROP FORT !)

$\zeta \in \mathbb{P}^1$ $\forall \xi \in \mathbb{P}^1$ proche ζ on veut $d(ds(\xi) - ds(\xi)) < \varepsilon$ ds $\mathbb{P}TZ \setminus D$

donc S compacte.

Soit $z \in Z$ considérer $S_z \in \{ s \in S \mid z \in s(\mathbb{P}^1) \}$ ensemble des sections passant par z

$S_z \subseteq S$ sous-ensemble analytique. $\Longrightarrow$ compact

et $\varphi_z : \begin{pmatrix} S_z \longrightarrow \mathbb{P}(T_z Z) \\ s \longmapsto \text{direct}^{\text{ion}} \text{ tangente à } s(\mathbb{P}^1) \text{ en } z \end{pmatrix}$ or $\exists!\, L_x \in S_z$ et $N_{L_x/Z}$ ample

donc φ_z est ouverte au vois de L_x

$+$ $\left.\begin{array}{l} \text{COMPACTE} \\ \text{OUVERTE} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi_z(S_z) = \mathbb{P}(T_z Z)$ en particulier $\varphi_z(S_z)$ rencontre D_z

ce qui contredit l'hypothèse.

III.3) CONCLUSION

On a une suite $s_n \in S$

$\zeta_n \in \mathbb{P}^1$ OPS quitte à prendre une sous-suite $\zeta_n \longrightarrow 0$, $\zeta_n \neq +\infty$

donc on a une suite de f° $s_{n|\Delta} : \Delta \longrightarrow Z$ $\qquad \mathcal{U} = f^{-1}(\Delta) \subseteq S$

$|s_{n|\Delta}'(\zeta_n)| \longrightarrow +\infty$

lemme de BRODY $\Rightarrow$ $\exists\, g : \mathbb{C} \longrightarrow Z$ limite avec $|g'(0)| = 1$

Mais $g \in \overline{\mathcal{U}}$ donc $f \circ g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\Delta}$

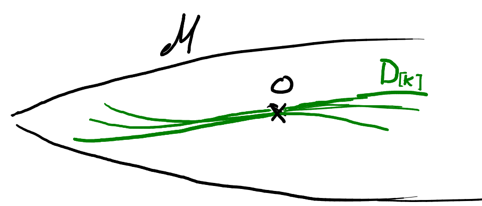
nécessairement $f \circ g = \zeta_0$ constante.

donc $g : \mathbb{C} \longrightarrow f^{-1}(\zeta_0) = X_{\zeta_0}$ CQFD !

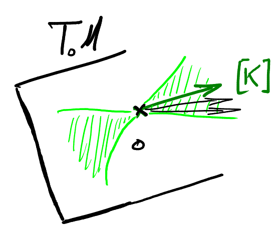
(Un petit supplément qui donne une idée de l'approche de VERBITSKY)

$X_0 = (X, \sigma, K)$ var symp + kahler class.

$\mathcal{M}$: domaine des périodes des déf de X_0



$O = [X_0] \in \mathcal{M}$ $\qquad T_0\mathcal{M} \cong H^1(X_0, T_{X_0}) \simeq_\sigma H^1(X_0, \Omega^1_{X_0})$



$\left(\begin{matrix} \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{M} \\ \zeta \longmapsto X_\zeta \end{matrix}\right)$ envoie $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ dans $\mathbb{C}\cdot[K] \in H^{1,1}(X_0, \mathbb{C}) \simeq T_0\mathcal{M}$

On peut faire varier $[K] \in \mathrm{Kahler}(X_0) \subseteq H^{1,1}(X_0, \mathbb{C}) \cap H^2(X_0, \mathbb{R})$

Ça nous donne à chaque fois une nouvelle direct° de droite twistorielle.

de $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} = 1$

Et on sait par ce qui précède que chacune de ces directions contient au moins un point $[X]$ avec X non hyperbolique. Donc l'ensemble des HK non hyperbolique est de $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \leq 2$