Ceci s'étend immédiatement aux ensembles parfaits discontinus situés sur des courbes de Jordan sans point multiple d'un espace quelconque. Soient P et p deux ensembles parfaits discontinus situés respectivement sur des arcs de Jordan sans point multiple Γ et γ, les extrémités de ces arcs n'appartenant pas aux ensembles. Supposons que les coordonnées d'un point de Γ s'expriment en fonctions continues d'un paramètre T variant de o à 1. Faisons correspondre aux points de Γ les points de l'axe des T dont l'abscisse est leur paramètre. A Γ correspond un segment de droite Γ' et à P un ensemble parfait partout discontinu P′ situé sur Γ'. Faisons de même pour p : à γ correspond un segment de droite γ' et à p un ensemble parfait discontinu p' sur γ'. Or, on peut étendre à la totalité de Γ' et de γ' une certaine correspondance entre P′ et p' et il en résulte l'extension à la totalité de tout Γ et de tout γ d'une certaine correspondance entre P et p. (Ceci ne s'applique naturellement pas à une correspondance quelconque entre P et p.)

La même propriété a évidemment lieu si Γ et γ sont des courbes fermées. Elle a aussi lieu, dans le cas des courbes ouvertes, si certaines extrémités de ces courbes appartiennent aux ensembles sous la réserve que, si un point de P est extrémité de Γ, le point correspondant de p soit aussi extrémité de γ.

CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

78. Les résultats ne sont plus aussi simples pour l'espace à trois dimensions. La correspondance entre deux ensembles parfaits, partout discontinus, bornés, gauches, peut, soit s'étendre à tout l'espace, soit s'étendre aux voisinages de ces ensembles, soit ne s'étendre à aucun voisinage. Nous allons donner des exemples de ces deux derniers cas. Ils résulteront des propriétés d'un ensemble particulier, que je désignerai par P et que je vais définir.

P est donné par ses *surfaces de définition* (n° **75**). Toutes ces surfaces sont des *tores*, que je désignerai par T. Je suppose qu'il existe un seul tore d'ordre 1. Si je considère un tore quelconque d'un ordre quelconque λ, je suppose qu'il contient à son intérieur k tores d'ordre $\lambda + 1$ et que ces *tores sont enlacés comme les anneaux d'une chaîne fermée entourant l'axe du tore* d'ordre λ considéré.

Précisons ces définitions. Je dis que *deux tores sont enlacés*, si, étant extérieurs l'un à l'autre, un parallèle de l'un est enlacé avec un parallèle de l'autre. Il en sera de même pour deux parallèles quelconques pris un sur chacun de ces tores, et aussi pour toute courbe se déduisant d'un parallèle sans sortir du tore envisagé. En particulier, si deux tores sont enlacés, les lieux des centres de leurs méridiens sont enlacés. Pour simplifier le langage, j'appellerai *circonférence d'ordre λ, intérieure à un tore d'ordre λ, le lieu des centres des méridiens de ce tore.* Je désignerai ces circonférences par la lettre C.

Numérotons de 1 à k les k tores d'ordre $\lambda + 1$ intérieurs à un tore d'ordre λ. Je supposerai que deux tores ayant des numéros consécutifs, ainsi que les tores k et 1, sont enlacés, alors que deux tores non consécutifs ne sont pas enlacés. Je suppose enfin que les centres de ces k tores sont sur la circonférence d'ordre λ et qu'en joignant ces points dans l'ordre de leurs numéros, on forme un polygone régulier non étoilé. Ces conditions sont possibles à réaliser. Il suffit pour cela que le rayon du méridien d'un tore T soit assez petit, par rapport au rayon de la circonférence C de ce tore, et que k soit assez grand. On peut alors prendre pour tores d'ordre $\lambda + 1$ des tores semblables au tore d'ordre λ. La possibilité de la construction a alors lieu quel que soit λ, k étant fixe. Pour simplifier quelques raisonnements ultérieurs, je *supposerai que ce nombre k est pair.*

Enfin le diamètre d'un tore d'ordre $\lambda + 1$ est inférieur à la moitié du diamètre du tore d'ordre λ qui le contient. Donc le diamètre maximum des tores d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment. Les tores T satisfont donc aux trois conditions a, b', c (n° **75**); ils définissent donc bien un ensemble parfait partout discontinu P, qui est l'ensemble des points intérieurs à une infinité des tores T.

79. Théorème. — *L'ensemble* P *qui vient d'être défini et tout ensemble parfait, discontinu, p situé sur une droite sont homéomorphes seulement en eux-mêmes.*

Supposons qu'il existe une correspondance entre P et p qui puisse s'étendre à leurs voisinages. Soient M et m deux points homologues de P et p. m est centre d'une sphère s dont tout l'intérieur appartient au voisinage en question de p. Il y a d'ailleurs dans s une infinité de points de p, p étant parfait. Soient alors a et b deux points de la droite portant p, intérieurs à s, n'appartenant pas à p, tels que m soit entre a et b et qu'il y ait dans s des points de p extérieurs à l'intervalle ab. La sphère σ de diamètre ab ne contient alors aucun point de p sur sa surface, elle est intérieure à s, m est à son intérieur et il y a dans l'intérieur de s des points de p extérieurs à σ.

σ étant intérieure à s, il lui correspond dans l'espace de P une *surface simplement connexe sans point multiple* Σ ne passant par aucun point de P ayant des points de P dans chacune de ses régions. Pour démontrer le théorème, il me suffit alors de prouver que ceci est impossible. C'est ce qui résulte du théorème suivant.

80. Théorème. — *Toute surface simplement connexe sans point multiple* Σ *qui a des points de* P *dans chacune de ses régions coupe* P.

Supposons qu'il existe une surface simplement connexe sans point multiple Σ, ayant des points de P dans chacune de ses régions et ne coupant pas P. Σ et P ont alors un écart non nul et l'on peut déterminer un nombre λ tel que tous les tores d'ordre λ aient un diamètre inférieur à cet écart. Or chaque tore d'ordre λ contient des points de P. *Aucun d'eux ne coupera donc* Σ. De plus, l'ensemble des tores d'ordre λ contient tout P, dont il y a *des tores d'ordre* λ *dans chacune des deux régions de* Σ. La *même propriété a lieu pour les circonférences d'ordre* λ.

Soient T un tore particulier d'ordre $\lambda - 1$ et $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les k circonférences d'ordre λ qu'il contient. C_1 C_2 étant enlacées sont dans la même région de Σ, de même C_2 et $C_3, \ldots, C_k$ et C_1

(n° **34**). Nous allons d'ailleurs reprendre la démonstration de cette propriété et en tirer d'autres conséquences.

Appelons $2i$ le cercle limité par C_{2i} et A_{2i-1} et A_{2i} les points d'intersection de L_{2i} respectivement avec C_{2i-1} et C_{2i+1}. Envisageons d'abord le cercle Γ_2 et les points A_1, A_2. Je dis que ces points peuvent être joints sur L_2 par une ligne polygonale ne coupant pas Σ. Enfermons en effet Σ dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_1, C_2 et C_3. Nous pouvons choisir ce domaine de façon que les cubes qui le constituent n'aient aucun de leurs sommets dans le plan de C_2 (n° **30**). La frontière de l'ensemble des points de D situés sur Γ_2 est alors formée d'un nombre fini de contours polygonaux I sans point multiple et sans point commun, ne touchant pas C_2. Le point A_1 n'est intérieur à aucun de ces polygones. Si, en effet, il était intérieur au contour I, C_1 serait enlacé avec I, ce qui est impossible puisque I appartient à D. De même, A_2 n'est intérieur à aucun des contours I. *Donc on peut joindre* A_1 *et* A_2 *sur* Γ_2 *par une ligne polygonale* α_2 *ne coupant pas* D, donc extérieure à D comme A_1 et A_2. α_2 *ne coupe pas* Σ qui est intérieure à D.

Construisons de même les lignes α_4, α_6, ..., α_k ne coupant pas Σ (1). Appelons enfin α_{2i+1} l'un des deux arcs A_{2i}, A_{2i+1} de C_{2i+1}. L'ensemble de tous ces arcs forme une ligne fermée α ne coupant pas Σ, intérieure à T et enlacée avec l'axe de T. *Je vais prouver que, par une déformation homéomorphe de l'espace, n'altérant que l'intérieur de* T, *je peux passer de* α *à la circonférence d'ordre* $\lambda - 1$ *que contient* T.

81. Considérons d'abord l'arc α_2. Appelons β_2 le segment de droite $A_1 A_2$. On peut passer de α_2 à β_2 par une déformation de Γ_2 sur lui-même, n'altérant pas la frontière C_2. Ceci résulte du théorème du n° **26**. Mais la déformation qui est indiquée à ce numéro ne conviendra pas ici parce que les points A_1, A_2 ne restent pas fixes, alors que cette fixité me sera nécessaire. Mais α_2 étant une ligne polygonale, il n'y a pas de difficulté à réaliser cette condition.

---

(1) Je rappelle que le nombre k est pair.

Pour cela, remarquons que α_2 est partagé en tronçons par β_2. Il y a deux tronçons particuliers d'extrémités A_1 ou A_2. J'appellerai *tronçon de la première catégorie* un des tronçons restant et tel que le contour formé par ce tronçon et le segment rectiligne joignant ses extrémités ne contienne à son intérieur ni A_1 ni A_2. Par un raisonnement analogue à celui du n° **45**, je peux définir des déformations du type envisagé faisant disparaître ces tronçons de première catégorie et ceci en diminuant le nombre des extrémités de tronçons. Ces déformations faites, parcourons la nouvelle ligne α_2 de A_1 vers A_2 et appelons B le premier point de rencontre avec β_2. Sur le segment $A_1 B$, il n'y a pas d'extrémités de tronçons, car une telle extrémité appartiendrait nécessairement à un tronçon de la première catégorie, tronçon qui serait totalement intérieur au contour formé par l'arc $A_1 B$ et le segment $A_1 B$. Nous pouvons alors, par une déformation du type envisagé et portant sur un polygone un peu supérieur à celui limité par ce contour, faire disparaître l'extrémité B (*cf.* n° **45**). Cette opération ne fait d'ailleurs apparaître aucune nouvelle extrémité de tronçons et aucun tronçon de première catégorie. Je peux alors la répéter sur les extrémités restantes et j'arriverai à un arc α_2 n'ayant plus que ses extrémités A_1, A_2 en commun avec β_2. Une dernière déformation laissant ces extrémités fixes amènera finalement α_2 sur β_2.

Ceci étant, appliquons à la déformation totale et au cercle Γ_2 la propriété du n° **36**. Je la modifie légèrement en supposant qu'au lieu des normales à Γ_2, j'envisage une famille d'arcs de circonférence jouant le même rôle et dont C_1 et C_2 font partie. La détermination d'une telle famille ne présente aucune difficulté. *Je peux donc passer de α_2 à β_2 par une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant que le voisinage de Γ_2, laissant fixes les points A_1, A_2 et pa suite les circonférences C_1 et C_2.* Faisons des déformations analogues pour les arcs α_3, α_6, ..., α_k.

Après ces déformations, Σ sera devenue une autre surface simplement connexe Σ', les portions de Σ intérieures à T ayant seules été modifiées. Les arcs β_2, β_3, ..., β_k et les arcs α_1, α_2, ... ne coupent pas Σ' et si, par exemple, les circonférences C_i sont intérieures à Σ, ces arcs sont intérieurs à Σ'.

Considérons maintenant le cercle Γ_1 limité par C_1. Une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant que le voisinage de Γ_1 permet de passer de α_1 au segment β_1, joignant A_k et A_1. Je fais la même déformation pour tous les arcs α_1, α_3, ... *J'obtiens ainsi une surface simplement connexe sans point multiple Σ'' qui n'est pas coupée par la courbe β, somme des arcs β_i.* Si d'ailleurs les courbes C_i sont intérieures à Σ, β est intérieur à Σ''. Les parties de Σ extérieures à T n'ayant pas été altérées, les circonférences d'ordre λ extérieures à T occupent la même position par rapport à Σ'' et à Σ.

La courbe β diffère très peu de la circonférence d'ordre $\lambda - 1$ que contient T. Une dernière déformation permet de passer de β à cette circonférence.

L'extérieur de T n'ayant pas été altéré, je peux répéter les mêmes opérations sur chacun des autres tores d'ordre $\lambda - 1$ sans modifier les propriétés acquises. Après ces opérations, j'arrive à une surface simplement connexe sans point multiple $\Sigma_{\lambda-1}$ ayant les propriétés suivantes :

$\Sigma_{\lambda-1}$ ne coupe aucune des circonférences d'ordre $\lambda - 1$. Il y a des circonférences d'ordre $\lambda - 1$ dans chacune des régions de $\Sigma_{\lambda-1}$, parce qu'il y avait des circonférences d'ordre λ dans chacune des régions de Σ.

82. $\Sigma_{\lambda-1}$ a donc par rapport aux circonférences d'ordre $\lambda - 1$ la propriété qu'avait Σ par rapport aux circonférences d'ordre λ. Les mêmes raisonnements me permettront d'en déduire une surface $\Sigma_{\lambda-2}$ ayant les mêmes propriétés par rapport aux circonférences d'ordre $\lambda - 2$ et de proche en proche j'arriverai à une surface simplement connexe Σ_2 ne coupant aucune des circonférences d'ordre 2 et en ayant dans chacune de ses régions. Or, ceci est impossible. En effet, les circonférences d'ordre 2 sont toutes intérieures au tore unique d'ordre 1 et par suite sont dans la même région de Σ_2 (nº **50**).

Il est donc impossible que Σ ne coupe pas P, ce qui démontre le théorème du nº **80** et achève la démonstration du théorème du nº **79**.