Doctorales 2015

I) Paramétrer les sous-espaces vectoriels

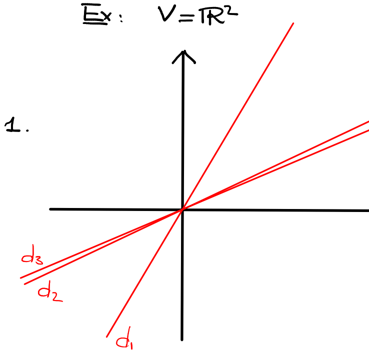
I.1) Espace projectif

V espace vectoriel de dimension finie.

(droite de V) $:=$ sous-espace vectoriel de V de dimension 1.

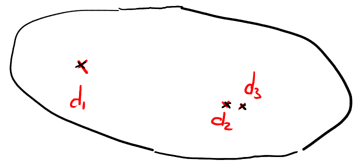
$\mathbb{P}(V) :=$ ensemble des droites de V.

Ex : $V = \mathbb{R}^2$



→ On peut dire que 2 droites sont "proches"

dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$



→ Topologie sur $\mathbb{P}(V)$

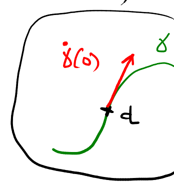
→ En fait on peut faire mieux que de la topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut faire de la géométrie différentielle

$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{P}(V)$ tel que $\gamma(0) = d \in \mathbb{P}(V)$

On peut donner un sens à $\dot{\gamma}(0) \in$ Espace tangent à $\mathbb{P}(V)$ en d

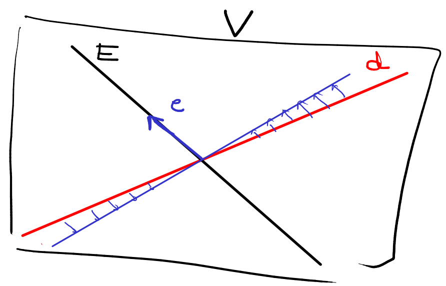
→ c'est la direction selon laquelle la droite est modifiée

$\mathbb{P}(V)$



Prop $\left[\begin{array}{l} T_d\,\mathbb{P}(V) \simeq V/d \quad \text{espace vectoriel de dim } (\dim V - 1) \\ \cong E \text{ pour } E \subseteq V \text{ tq } E \oplus d = V \end{array}\right.$

→ $\mathbb{P}(V)$ est de dimension $\dim V - 1$



Sur $\mathbb{P}^3$ on pose $\Sigma([Z]) = Z_0\bar{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_3 - Z_2\bar{Z}_0 - Z_3\bar{Z}_1$

$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \mathcal{N} = \{\Sigma = 0\}$

$\ell \subseteq \mathcal{N}$ $\qquad \Sigma([Z]) = (Z) \cdot \begin{pmatrix} \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_3 \\ -\bar{Z}_0 \\ -\bar{Z}_1 \end{pmatrix}$

ssi $\left(\begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \right) = 0$

ssi $(Z_0, Z_1) \cdot (id_2 \;\; M^t) \begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0$

ssi $(Z_0, Z_1)\,(\bar{M} - M^t) \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad$ ssi $\bar{M} = M^t$

ssi $M^* = M$

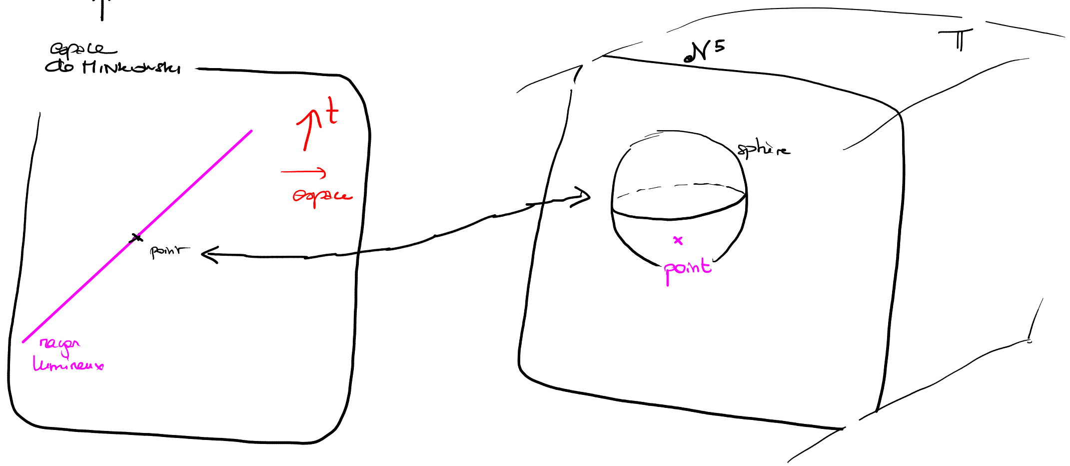
$\mathbb{M} = Gr_2(\mathbb{C}^4) \longleftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup$

$\mathbb{R}^{3,1} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{matrices} \\ \text{hermitiennes} \\ 2\times 2 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \mathcal{N}^5$ quadrique réelle.

$\uparrow$

espace de Minkowski



I.2) GRASSMANNIENNE

On a considéré $\{ \text{sev de dim } 1 \text{ de } V \}$

→ 1ère généralisation soit $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$Gr_k(V) = \{ \text{sev de dim } k \text{ de } V \}$$

* $Gr_1(V) = \mathbb{P}(V)$
* $Gr_{\dim V - 1}(V) = \{ \text{hyperplan de } V \} = \left\{ \begin{matrix} \text{noyaux d'élt} \\ \text{de } V^* \setminus \{0\} \end{matrix} \right\} \xrightarrow[\text{vect}(-)]{1:1 \; \sim} \left\{ \begin{matrix} \text{droit} \\ \text{de } V^* \end{matrix} \right\} = \mathbb{P}(V^*)$

→ Idem : on peut dire si 2 k-plans de V sont proches → TOPOLOGIE
→ Idem : on peut voir $Gr_k(V)$ comme une variété lisse.

<u>Prop</u> : Soit $p \in Gr_k(V)$, $T_p Gr_k(V) \simeq \mathrm{Hom}(p, V/p)$ de dim $k \cdot (\dim V - k)$

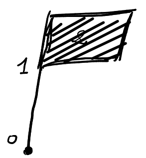
→ $Gr_k(V)$ est de dimension $k \times (\dim V - k)$

I.3) VARIÉTÉ DE DRAPEAUX

Généralisons... zon zon !
- ▷ droites de V
- ▷ k-plan de V

▷ (droit, plan, 3-plan, ...) tel que droite ⊆ plan ⊆ 3-plan ... ⊆ V

"drapeau"



<u>Déf</u> : On se donne $0 < k_1 < \dots < k_m < \dim(V)$ fixés

$$\mathcal{F}\ell_{k_1 < \dots < k_m}(V) = \{ (W_1, \dots, W_m) \mid \dim(W_i) = k_i \,,\; \underset{\text{sev}}{W_i \subseteq W_{i+1}} \underset{\text{sev}}{\subseteq} V \}$$

* $\mathcal{F}\ell_{k_1}(V) = Gr_{k_1}(V)$
* $\mathcal{F}\ell_{k_1 < \dots < k_m}(V) \subseteq Gr_{k_1}(V) \times \dots \times Gr_{k_m}(V)$

→ TOPOLOGIE INDUITE
→ STRUCTURE DE SOUS-VARIÉTÉ

$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{3+1}$

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda, (z+t) + \lambda(x+iy), (x-iy) + (t-z)\lambda)\, d\lambda$$

$$\partial_x \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f \times \lambda + \partial_3 f)\, d\lambda$$

$$\partial_x^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2^2 f \times \lambda^2 + 2\lambda \partial_{2,3}^2 f + \partial_3^2 f)\, d\lambda$$

$$\partial_y \Phi = i \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f \times \lambda - \partial_3 f)\, d\lambda \qquad \partial_y^2 \Phi = i \int_{\mathbb{R}} i\partial_2^2 f \times \lambda^2 - 2i\partial_{2,3}^2 f \times \lambda + i\partial_3^2 f$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -\partial_2^2 f \times \lambda^2 + 2\lambda \partial_{2,3}^2 f - \partial_3^2 f$$

$$\partial_z \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 f - \lambda \partial_3 f \qquad \partial_z^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f - 2\lambda \partial_{2,3} f + \lambda^2 \partial_3 f$$

$$\partial_t \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 f + \lambda \partial_3 f \qquad \partial_t^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f + 2\lambda \partial_{2,3} f + \lambda^2 \partial_3 f$$

$$(-\partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 + \partial_t^2)\Phi = \int_{\mathbb{R}} 4\lambda \partial_{2,3} f - 4\lambda \partial_{2,3} f = 0$$

$$\ell = \left\{ [\underline{Z}] \;\middle|\; \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{Conj} = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \longmapsto [\overline{Z_3} : -\overline{Z_2} : -\overline{Z_1} : \overline{Z_0}]$$

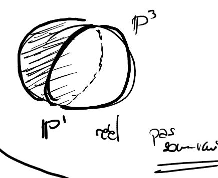
$$Conj(\ell) = \left\{ [\overline{Z_3} : -\overline{Z_2} : -\overline{Z_1} : \overline{Z_0}] \;\middle|\; \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ [W_0 : W_1 : W_2 : W_3] \;\middle|\; \begin{pmatrix} -\overline{W_1} \\ \overline{W_0} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \overline{W_3} \\ -\overline{W_2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ [\underline{W}] \;\middle|\; \begin{pmatrix} -W_1 \\ W_0 \end{pmatrix} = \overline{M} \begin{pmatrix} W_3 \\ -W_2 \end{pmatrix} \right\}$$

point fixes
$$\begin{cases} Z_0 = \overline{Z_3} \\ Z_1 = -\overline{Z_2} \end{cases}$$
<u>courbe</u>

$\{ [Z : T : -\overline{T} : \overline{Z}] ,\; [Z:T] \in$



$$\begin{pmatrix} W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ -W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{M}^{-1} \begin{pmatrix} -W_1 \\ W_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{M}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \overline{JMJ}^{-1} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix} = -\det(M)(M^{-1})^t$$

donc $\overline{JMJ}^{-1} = \overline{-\det(M)(M^{-1})^t}^{-1} = \left(-\frac{1}{\overline{\det}}\right) \overline{M}^t \simeq \overline{M}^t = M^*$

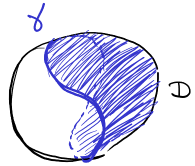
Alors pour $m = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3+1}$

On a un $\gamma_m \subseteq L_{x,y,z,t} \subseteq \mathbb{T}^{I}$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_m & \subseteq & L_{x,y,z,t} \\ \wr\mathrm{s} & & \wr\mathrm{s} \\ \gamma & \subseteq & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{array}$$

et on peut considérer

$$\Phi(m) = \int_{\gamma_m} f$$



$$\int_\gamma f = \int_D df$$

$$\Phi(m) = \pi \times \text{nombre de sing de } f \text{ (d'ordre 1) sur } L_m$$

$df \in \Omega^1(\mathbb{T}^I)$

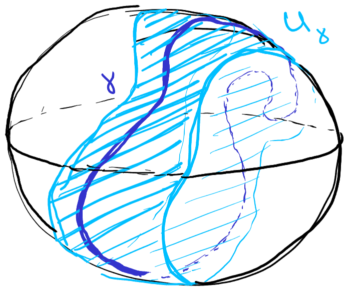
$df_{|L_{x,y,z,t}} \in \Omega^1(\mathbb{P}^1)$

$\longrightarrow$ singularités.

Soit $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \in L_m$

Alors $f([Z]) =$ Sur $Z_0 \neq 0$ $\quad f_0\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, \frac{Z_3}{Z_0}\right) = f_0\big(\zeta, (t-z)+(x-iy)\zeta, (t+z)\zeta+ \ldots$

$\longrightarrow$ f holo sur un voisinage de γ !



Ajouter à f une fonct° holo définie sur $D \subseteq \mathbb{P}^1$

tel que $\gamma \underset{H_1}{\simeq} \partial D$, $U_\gamma \subseteq D$

ne change pas Φ

II) Un Exemple (Une histoire de Tauto)

II.1) Droites et plans de $k^{\oplus 4}$

$V = k^4$ pour k corps.

On a le diagramme

où

$$\begin{tikzcd} & (\text{droite} \subseteq \text{plan} \subseteq V) \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ (\text{plan} \subseteq V) & & (\text{droite} \subseteq V) \end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{tikzcd} & Fl_{1<2}(V) =: \mathbb{W}^{(5)} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ Fl_2(V) & & Fl_1(V) \\ \mathbb{M}^{(4)} := Gr(2,4) \arrow[u, equal] & & \mathbb{P}^3 =: \mathbb{T}^{(3)} \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

Diagramme des twisteurs en dim 4 ("classique")

Calcul des dimensions

- $\dim(\mathbb{T}) = 3$
- $\dim(\mathbb{M}) = 2 \times (4-2) = 4$
- $\dim(\mathbb{W})$?
  - > On choisit le 2 plan V_2 dans V $\rightarrow$ 4 dim de choix
  - > On choisit $V_1 \subseteq V_2$ droite $\rightarrow$ $\mathbb{P}(V_2)$ choix possible $\rightarrow$ dim $= 1$

$\dim(\mathbb{W}) = 4 + 1 = 5$

II.2) «Correspondances» $k = \mathbb{C}$

| Ce diagramme est un temple où de vibrantes idées
| Laissent parfois sortir de confuses paroles.

| On se passe d'écrire des forêts de symboles,
| Pour seul'ment contempler des objets familiers.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{W} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ p \in \mathbb{M} & & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

$p \in \mathbb{M}$ donc $p \subseteq V$ est un 2-plan ($\mathbb{C}$-ev)

$\nu^{-1}(p) = \{ (d,p) \mid d \subseteq p \quad d \text{ droite de } V \}$

$\mu(\nu^{-1}(p)) = \{ d \mid d \subseteq p, d \text{ droite} \} = \mathbb{P}(p)$
$\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

donc (pt) $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{T}$

Réciproquement, soit $\ell \in \mathbb{T}$ $\quad \nu(\mu^{-1}(\ell)) = \{ p \in Gr_2(V) \mid \ell \subseteq p \} \simeq \mathbb{P}(V/\ell)$
$\simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{M}$ $\leftsquigarrow$ (pt)

Coordonnées sur $Gr_2(V)$ (locales)

Soit $X, Y \in \mathbb{C}^4$ tq que la matrice 4×2 $\hat{A} = [X;Y]$ soit de rg 2

(i.e. (X,Y) libre $\to$ engendre un plan)

Alors $\mathrm{Vect}(X,Y) \in \mathbb{M}$

de plus si $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $\hat{A}P = [X';Y']$

Alors $\mathrm{Vect}(X,Y) = \mathrm{Vect}(X',Y')$ en effet $\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = cX + dY \end{cases}$ si $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Et étant donné $\hat{A}$ et $\hat{A}'$ tels que $\mathrm{Vect}(X,Y) = \mathrm{Vect}(X',Y')$

$\exists !\, P \in GL_2$ tq $\hat{A}' = \hat{A}P$

dès lors $Gr_2(V) \simeq \{\hat{A} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rk}\, \hat{A} = 2\} / GL_2(\mathbb{C})$

Soit $[\hat{A}] \in Gr_2(V)$ tq $\hat{A} = \begin{bmatrix} P \\ \hdashline Q \end{bmatrix}$ et $P \in GL_2(\mathbb{C})$

Alors $[\hat{A}] = [\hat{A}P^{-1}]$ et $\hat{A}P^{-1} = \begin{bmatrix} id_2 \\ M \end{bmatrix}$ avec $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

donc sur $Gr_2(V) \cap \{P \in GL_2(\mathbb{C})\}$ (ouvert) $\simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{M} \end{pmatrix} \right] \longleftarrow M$$

localement au voisinage de $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ se donner un 2-plan de V c'est se donner une matrice 2×2

---

droite associée à M

$$\{ V_1 \subseteq V_2 \subseteq V \mid \dim V_1 = 1 \} \subseteq \mathbb{W}$$

$$\underset{[A;B]}{\overset{\shortparallel}{M}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B \end{pmatrix} \right\rangle}_{V_2} \in \mathbb{M} \qquad \mathbb{T} \supseteq \{ V_1 \subseteq V_2 \mid \dim(E_1) = 1 \} \cong \mathbb{P}(V_2)$$

Or $V_2 \simeq \left\{ s_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B \end{pmatrix} \;\middle|\; s_i \in \mathbb{C} \right\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (s_0, s_1) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

Ainsi $V_1 \subseteq V_2$ est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} \right)$ pour un certain $(s_0, s_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

c'est l'ensemble $\left\{ (s_0, s_1, s_2, s_3) \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} \right\}$

donc la droite $[s_0 : s_1 : s_2 : s_3]$ avec $\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix}$

Conjugaison sur $\mathbb{P}^3 = \mathbb{T}$

$$\mathrm{Conj} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$
$$[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \longmapsto [\overline{Z_3} : -\overline{Z_2} : -\overline{Z_1} : \overline{Z_0}]$$

(Conj a des pts fixes… étrange!)

Alors $\mathrm{Conj}^2 = id$ et $\mathbb{P}^1 \simeq \ell \subseteq \mathbb{P}^3$ est stable par Conj (ds son ensemble)

ssi (CALCUL EXO) $M^* = M$ (M hermitienne)

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{W}_{|\mathcal{M}_2(\mathbb{C})} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ * \circlearrowright \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & & \mathbb{T}_{|\mathcal{M}_2(\mathbb{C})} \circlearrowleft \mathrm{Conj} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{Fix}(*)} = \left\{ \begin{matrix} \text{matrices} \\ \text{hermitiennes} \end{matrix} \right\} \simeq \mathbb{R}^{3,1}$ espace-temps.

$\to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

métrique $-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$

$$\begin{pmatrix} t-z & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix} \longleftarrow (x,y,z,t)$$

$$\det(M) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Résumons

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{W}^I \subseteq \mathbb{W} \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{R}^{3,1} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{Fix}(*)} \underset{\text{sous var réelle}}{\subseteq} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \overset{\text{ouvert}}{\subseteq} \mathbb{M} & \mathbb{M}^I = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & & \mathbb{T}^I \subseteq \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

$(x,y,z,t) \rightsquigarrow \left\{ [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \;\middle|\; \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-z & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{T}^I$

$\cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \qquad \mapsto [Z_0 : Z_1]$

Soit $f : \mathbb{T}^I \longrightarrow \mathbb{C}$ ~~méromorphe~~

Et soit $\gamma \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ courbe (réelle) fermée : lacet

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$