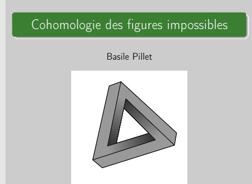
2017-04-24

Cohomologie des figures impossibles



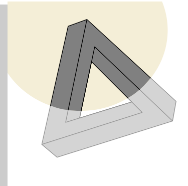
Bonjour, je m'appelle Basile Pillet et je suis doctorant à l'institut de mathématiques de Rennes. Je vais vous parler d'un outil d'algèbre et de géométrie qu'on appelle *Cohomologie* et je vais vous le présenter sur l'exemple du *triangle de Penrose*.

Le *triangle de Penrose*, c'est l'objet impossible dessiné ici.

On va se servir de la cohomologie pour identifier ce qui empêche un tel objet d'exister.

2017-04-24

Cohomologie des figures impossibles

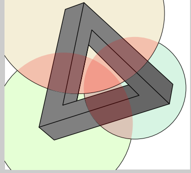


On part de notre objet impossible

Si on ne regarde que le coin en haut à gauche ...

... on remarque qu'il n'a plus rien d'impossible !

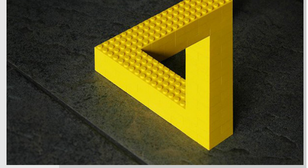
On peut le réaliser en vrai avec deux bouts de bois et un peu de colle



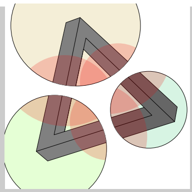
Revenons à notre *triangle de Penrose* ou plutôt son dessin

On peut découper ce dessin en trois parties autour de chaque coin.

...parties qui s'intersectent suivant la zone en rouge



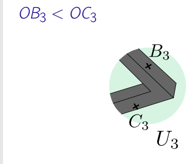
L'intérêt n'est pas de montrer que le *triangle de Penrose* est impossible ! L'intérêt c'est qu'en mathématique (en algèbre et en géométrie), quand quelque chose ne marche pas, eh bien la vie ne s'arrête pas. Il y a **des choses**, de nouveaux objets, qui empêchent que ça marche et l'étude de ces **obstructions** se révèle bien souvent très riche



Éclatons donc notre dessin. On a trois dessins qui chacun représente des objets RÉALISABLES

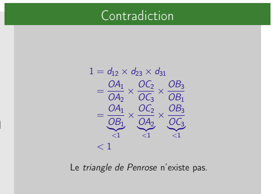
Ces trois dessins doivent être recollés suivant les zones rouges pour obtenir le dessin d'origine.

Notre figure impossible est LOCALEMENT possible. Mais si les trois dessins peuvent se recoller pour donner le dessin du *triangle de Penrose*, les trois objets physiques eux ne peuvent pas !



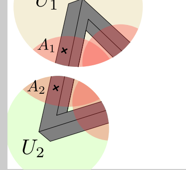
De même pour l'objet 3, le point B_3 apparaît plus proche que le point C_3

Contradiction



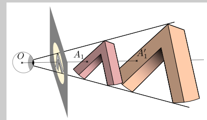
Finalement chacun des trois rapports est strictement inférieur à 1, on a donc une contradiction

Le *triangle de Penrose* n'existe pas.



Numérotons ces trois parties qui recouvrent le dessin. Prenons un point A à l'intersection de l'objet 1 et de l'objet 2

Après découpage, le point A se dédouble : une copie A_1 dans U_1 et une copie A_2 dans U_2

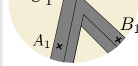


Si maintenant on construit un coin numéro 1, il aura une certain taille. Et pour qu'il apparaisse tel quel sur le dessin, il faut le mettre à une certaine distance de l'observateur. Si on l'avait construit plus petit, il aurait fallu le mettre plus près.

Mais le coin numéro 2 n'est pas forcément à la même distance de l'observateur. Imaginez que l'on construise l'objet 1 immense mais très loin et l'objet 2 petit mais très près.

$d_{12} = \frac{OA_1}{OA_2}$

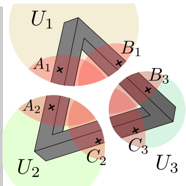
Pour garder cette information en mémoire, on va noter d_{12} le rapport des distances entre ces deux points.



$\frac{OA_1}{OB_1} < 1$

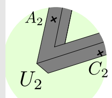
Concentrons nous sur l'objet 1, la perspective nous dit que le point A_1 est plus proche de l'observateur que le point B_1

Donc le rapport OA_1/OB_1 est inférieur à 1



On recommence avec un point B sur l'intersection de U_1 et U_3 et un point C sur l'intersection de U_2 et U_3

$OC_2 < OA_2$



De même pour l'objet 2, le point C_2 apparaît plus proche que le point A_2

ssi
les d_{ij} forment un cobord

Si c'est le cas alors

$$d_{12} \times d_{23} \times d_{31} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \times \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 1$$

Donc le *triangle de Penrose* existe si et seulement si les d_{ij} forment un cobord.

$$d_{12} = \frac{OA_1}{OA_2}$$
$$d_{31} = \frac{OB_3}{OB_1}$$
$$d_{23} = \frac{OC_2}{OC_3}$$

On définit de même entre l'objet 1 et l'objet 3 le rapport d_{31}

et le rapport d_{23}

Contradiction

$$1 = d_{12} \times d_{23} \times d_{31}$$
$$= \frac{OA_1}{OA_2} \times \frac{OC_2}{OC_3} \times \frac{OB_3}{OB_1}$$
$$= \frac{OA_1}{OB_1} \times \frac{OC_2}{OA_2} \times \frac{OB_3}{OC_3}$$

On va montrer que c'est absurde

En revenant à la définition, on écrit chaque d_{ij} comme un rapport de distances

On peut réorganiser ce produit en un produit de 3 termes qui ne dépendent chaque que d'un seul objet.

Recollement

Pour se recoller

il faut

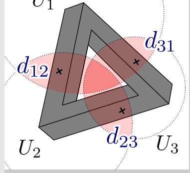
- que A_1 et A_2 se superposent : $d_{12} = 1$
- que B_1 et B_3 se superposent : $d_{31} = 1$
- que C_2 et C_3 se superposent : $d_{23} = 1$

À quelle(s) condition(s) les trois objets construits se recollent-t-ils ?

Il faut

que A_1 et A_2 se superposent

Mais si A_1 et A_2 se superposent ... ils sont à la même distance de l'observateur... donc que le rapport d_{12} vaut 1.



Les d_{ij} forment un **cocycle**.

Que voyons-nous ?

C'est l'information importante sur cette construction. Qui ne se voit pas sur le dessin

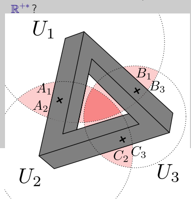
$$d_{12} \mapsto \lambda_1 d_{12}$$

$$d_{31} \mapsto \frac{d_{31}}{\lambda_1}$$

$$d_{23} \mapsto d_{23}$$

Cependant

Que se passe-t-il si on multiplie toutes les dimensions de l'objet 1 ainsi que sa distance à l'observateur, par $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{+*}$?



Rien ne change

Recollement 2

Il existe une manière de redimensionner les trois objets telle que

$$d_{12} = d_{23} = d_{31} = 1$$

si et seulement si

$$d_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \quad d_{31} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \quad , \quad d_{23} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

on dit alors que les d_{ij} forment un **cobord**.