DOCTORALES 2015

1

I) PARAMÉTRER LES SOUS-ESPACES VECTORIELS

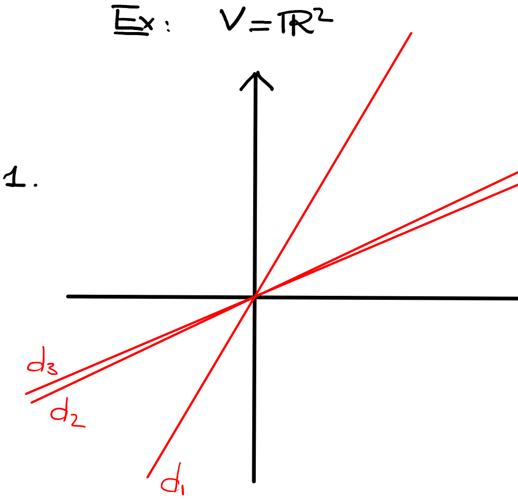
I.1) ESPACE PROJECTIF

V espace vectoriel de dimension finie.

(droite de V) := sous-espace vectoriel de V de dimension 1.

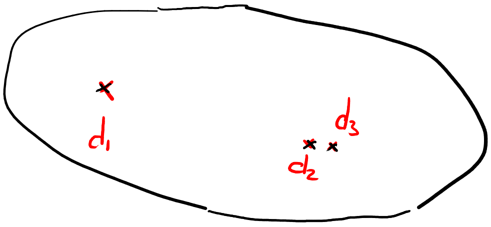
$\mathbb{P}(V)$:= ensemble des droites de V.

Ex : $V = \mathbb{R}^2$



→ On peut dire que 2 droites sont "proches"

dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$



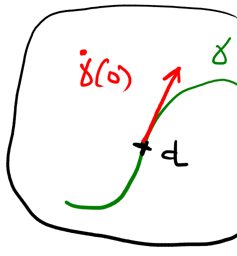
→ Topologie sur $\mathbb{P}(V)$

→ En fait on peut faire mieux que de la topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut faire de la géométrie différentielle

$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{P}(V)$ tel que $\gamma(0) = d \in \mathbb{P}(V)$

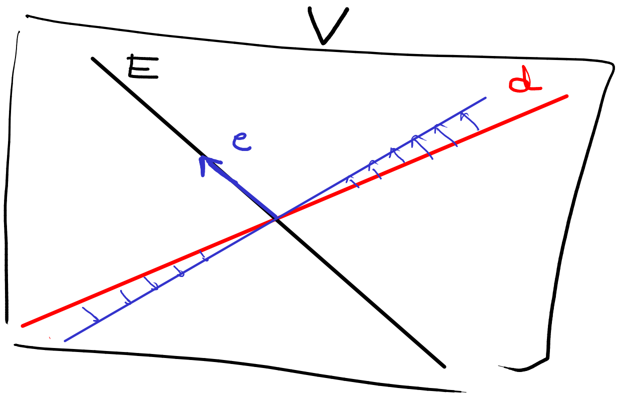
On peut donner un sens à $\dot{\gamma}(0) \in$ ESPACE TANGENT À $\mathbb{P}(V)$ en d

→ c'est la direction selon laquelle la droite est modifiée



Prop $T_d \mathbb{P}(V) \simeq V/d$ espace vectoriel de dim $(\dim V - 1)$

$\cong E$ pour $E \subseteq V$ tq $E \oplus d = V$



→ $\mathbb{P}(V)$ est de dimension $\dim V - 1$

COORDONNÉES : Sur V on a des coordonnées $x_0, \ldots, x_n$ $\quad n = \dim(V) - 1$

$d \in \mathbb{P}(V) \longleftrightarrow \{ (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \mid \lambda \in K \}$ pour un certain $(x_0, \ldots, x_n) \in V \setminus \{0\}$

→ Coord homogènes $[X_0 : \cdots : X_n]$ sur $\mathbb{P}(V)$ avec $\forall \lambda \neq 0 \quad [\lambda X_0 : \ldots : \lambda X_n] = [X_0 : \ldots : X_n]$

$\boxed{\mathbb{P}(V) \simeq V \setminus \{0\} / K \setminus \{0\}}$

→ Coord : $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sur l'ouvert $X_0 \neq 0$ $\quad \xi_i = \dfrac{X_i}{X_0} = \dfrac{\lambda X_i}{\lambda X_0}$ (bien défini !)

I.2) Grassmannienne

On a considéré $\{\text{sev de dim } 1 \text{ de } V\}$

→ 1ère généralisation soit $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$Gr_k(V) = \{\text{sev de dim } k \text{ de } V\}$$

* $Gr_1(V) = \mathbb{P}(V)$

* $Gr_{\dim V - 1}(V) = \{\text{hyperplan de } V\} = \left\{\begin{matrix}\text{noyaux d'élt} \\ \text{de } V^* \setminus \{0\}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{vect}(-)]{\overset{1:1}{\sim}} \left\{\begin{matrix}\text{droit} \\ \text{de } V^*\end{matrix}\right\} = \mathbb{P}(V^*)$

→ Idem : on peut dire si 2 k-plans de V sont proches → TOPOLOGIE

→ Idem : on peut voir $Gr_k(V)$ comme une variété lisse.

Prop : Soit $p \in Gr_k(V)$, $T_p Gr_k(V) \simeq \mathrm{Hom}(p, V/p)$ de dim $k \cdot (\dim V - k)$

→ $Gr_k(V)$ est de dimension $k \times (\dim V - k)$

COORDONNEES (LOCALES) sur $Gr_2(V)$ $\quad V = \mathbb{C}^4$

$2(4-2) = 4$

Soit $X, Y \in \mathbb{C}^4$ tel que la matrice 4×2 $\hat{M} = [X; Y]$ soit de rg 2

(i.e. (X, Y) libre → engendre un plan)

Alors $\mathrm{Vect}(X, Y) \in \mathbb{M}$

de plus si $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $\hat{M}P = [X'; Y']$

Alors $\mathrm{Vect}(X, Y) = \mathrm{Vect}(X', Y')$ en effet $\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = cX + dY \end{cases}$ si $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Et étant donné $\hat{M}$ et $\hat{M}'$ tels que $\mathrm{Vect}(X, Y) = \mathrm{Vect}(X', Y')$

$\exists!\, P \in GL_2$ tq $\hat{M}' = \hat{M}P$

dès lors $Gr_2(V) \simeq \{\hat{M} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rk}\, \hat{M} = 2\} / GL_2(\mathbb{C})$

(analogue de $V \setminus \{0\} / K \setminus \{0\}$)

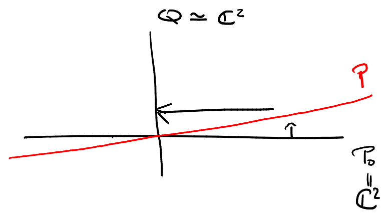
Soit $[\hat{M}] \in Gr_2(V)$ tel que $\hat{M} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$, $P \in GL_2$

Alors $[\hat{M}] = [\hat{M}P^{-1}]$ et $\hat{M}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1_2 \\ M \end{bmatrix}$ $M \in \mathcal{M}_2$

$$\overset{\text{ouvert}}{Gr_2(V) \cap \{P \in GL_2\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{M} \end{pmatrix}\right]_{Gr_2(V)} \longleftarrow\!\!\shortmid\ M$$

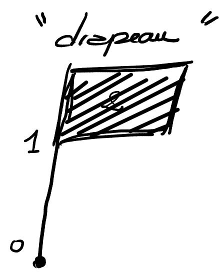
> Localement au voisinage de $\mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, se donner un 2-plan de V c'est se donner une matrice 2×2.



I.3) Variété de drapeaux

Généralisons... zon zon ! ▷ droites de V ▷ k-plan de V

▷ (droit, plan, 3-plan, ...) tel que droit $\subseteq$ plan $\subseteq$ 3-plan $\cdots \subseteq V$



Déf : On se donne $0 < k_1 < \cdots < k_m < \dim(V)$ fixés

$$\mathcal{F}\ell_{k_1 < \cdots < k_m}(V) = \left\{ (W_1, \ldots, W_m) \,\middle|\, \dim(W_i) = k_i,\ W_i \underset{\text{sev}}{\subseteq} W_{i+1} \underset{\text{sev}}{\subseteq} V \right\}$$

* $\mathcal{F}\ell_{k_1}(V) = Gr_{k_1}(V)$

* $\mathcal{F}\ell_{k_1 < \cdots < k_m}(V) \subseteq Gr_{k_1}(V) \times \cdots \times Gr_{k_m}(V)$ → TOPOLOGIE INDUITE → STRUCTURE DE SOUS-VARIÉTÉ

II) Un Exemple (Une histoire de Tauto)

II.1) Droites et plans de $k^{\oplus 4}$

$V = k^4$ pour k corps.

On a le diagramme

où

$$\begin{tikzcd}
 & (\text{droite} \subseteq \text{plan} \subseteq V) \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
(\text{plan} \subseteq V) & & (\text{droite} \subseteq V)
\end{tikzcd}$$

Abr

$$\begin{tikzcd}
 & Fl_{1<2}(V) =: \mathbb{W}^{(5)} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
Fl_2(V) & & Fl_1(V)
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{M}^{(4)} := Gr(2,4) = Fl_2(V) \qquad Fl_1(V) = \mathbb{P}^3 =: \mathbb{T}^{(3)}$$

DIAGRAMME DES TWISTEURS EN DIM 4 ("CLASSIQUE")

Calcul des dimensions

- $\dim(\mathbb{T}) = 3$
- $\dim(\mathbb{M}) = 2\times(4-2) = 4$
- $\dim(\mathbb{W})$?

> On choisit le 2 plan V_2 dans V
> $\to$ 4 dim de choix

> On choisit $V_1 \subseteq V_2$ droite
> $\to$ $\mathbb{P}(V_2)$ choix possible
> $\to$ dim $= 1$

$$\dim(\mathbb{W}) = 4+1 = 5$$

II.2) «Correspondances» $k = \mathbb{C}$

| Ce diagramme est un temple où de vibrantes idées
| Laissent parfois sortir de confuses paroles.

| On se passe d'écrire des forêts de symboles,
| Pour seul'ment contempler des objets familiers.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{W} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
p \in \mathbb{M} & & \mathbb{T}
\end{tikzcd}$$

$p \in \mathbb{M}$ donc $p \subseteq V$ est un 2-plan ($\mathbb{C}$-ev)

$$\nu^{-1}(p) = \{ (d,p) \mid d \subseteq p \quad d \text{ droite de } V \}$$

$$\mu(\nu^{-1}(p)) = \{ d \mid d \subseteq p,\ d \text{ droite} \} = \mathbb{P}(p) \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

donc $(\text{pt}) \rightsquigarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{T}$

Réciproquement, soit $\ell \in \mathbb{T}$ $\quad \nu(\mu^{-1}(\ell)) = \{ p \in Gr_2(V) \mid \ell \subseteq p \} \simeq \mathbb{P}(V/\ell) \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{M} \leftsquigarrow (\text{pt})$

Droite associée à $M \in \mathbb{M}$

<u>Rappel</u> $\quad M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que l'on écrit en colonnes $M = [u\,;u']$, $u, u' \in \mathbb{C}^2$

$$\mapsto \quad Gr_2(V) = \mathbb{M}$$

$$V_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\ u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\ u'\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^4 = V$$

$$\mapsto \quad \mu(\nu^{-1}(V_2)) \subseteq \mathbb{T} \quad \text{isomorphe à } \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \text{ "droite"}$$

$$\nu^{-1}(V_2) = \{(V_1, V_2) \mid V_1 \subseteq V_2,\ \dim V_1 = 1\} \subseteq \mathbb{W}$$

$$\mu(\nu^{-1}(V_1)) = \{V_1 \mid V_1 \subseteq V_2,\ \dim V_1 = 1\} \subseteq \mathbb{T}$$

<u>Or</u> $\quad V_2 \simeq \left\{ Z_0 \begin{pmatrix}1\\0\\ u\end{pmatrix} + Z_1 \begin{pmatrix}0\\1\\ u'\end{pmatrix} \,\middle|\, Z_i \in \mathbb{C} \right\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix}id_2\\ M\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}Z_0\\ Z_1\end{pmatrix} \,\middle|\, (Z_0, Z_1) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

<u>Ainsi</u> $\quad V_1 \subseteq V_2$ est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}id_2\\ M\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}Z_0\\ Z_1\end{pmatrix} \right)$ pour un certain $(Z_0, Z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

c'est l'ensemble $\left\{ (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) \in V \,\middle|\, \begin{pmatrix}Z_2\\ Z_3\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}Z_0\\ Z_1\end{pmatrix} \right\}$

donc la droite $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3]$ avec $\begin{pmatrix}Z_2\\ Z_3\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}Z_0\\ Z_1\end{pmatrix}$

$$\nu^{-1}(V_2) = \{(V_1, V_2) \mid V_1 \subseteq V_2\} \subseteq \mathbb{W}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{W} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
\mathbb{M} & & \mathbb{T}
\end{tikzcd}$$

$$M \mapsto V_2 \in \mathbb{M}$$

$$\mu(\nu^{-1}(V_2)) \simeq \{V_1 \subseteq V_2\} \simeq \mathbb{P}(V_2) \subseteq \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{T}$$

$$\ell = \left\{ [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \,\middle|\, \begin{pmatrix}Z_2\\ Z_3\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}Z_0\\ Z_1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

QUADRIQUE DES TWISTEURS RÉELS

Sur $\mathbb{P}^3 = \mathbb{T}$ On pose $\Sigma([Z]) = Z_0\bar{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_3 - Z_2\bar{Z}_0 - Z_3\bar{Z}_1$

$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{N} = \{\Sigma = 0\}$ quadrique réelle $\subset \mathbb{T}$ (dim = 5)

$$\Sigma([Z]) = (Z) \cdot \begin{pmatrix} \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_3 \\ -\bar{Z}_0 \\ -\bar{Z}_1 \end{pmatrix}$$

$\ell \subseteq \mathcal{N}$

ssi $\left(\begin{pmatrix} id_2 \\ M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \right) = 0$

ssi $(Z_0, Z_1) \cdot (id_2 \ \ M^t) \begin{pmatrix} \bar{M} \\ -id_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0$

ssi $(Z_0, Z_1)(\bar{M} - M^t) \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = 0$

ssi $\bar{M} = M^t$

ssi $M^* = M$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \leftrightsquigarrow & \mathbb{T} \\ \cup & & \cup \\ \text{Matrices hermitiennes } 2\times 2 & \leftrightsquigarrow & \mathcal{N} \\ \wr\| & & \\ \mathbb{R}^{3,1} & & \end{array}$$

espace de Minkow

ESPACE DE MINK.

$$\mathbb{R}^{3,1} = \Big(\mathbb{R}^4 + \text{forme quadratique } \underset{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2}{g} \Big)$$

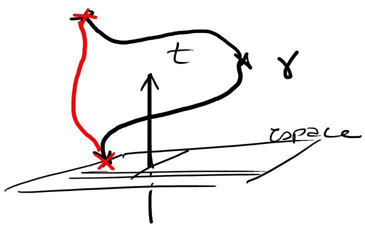
signature (1,3)

On a une isométrie

$$\mathbb{R}^{3,1} \xrightarrow{\ \sim\ } \{\text{Matrices } 2\times 2 \text{ hermitiennes}\} + \det$$

$$(x,y,z,t) \longmapsto \begin{pmatrix} t-z & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix} \qquad \det = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

espace-temps



Si $(x,y,z) = \gamma(t)$ chemin de l'espace temps.

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$
$$= \sqrt{dt^2 - |\dot{\gamma}|^2 dt^2} = \sqrt{1 - |\dot{\gamma}|^2}\, dt$$

→ Vous en avez marre de cet exposé, vous vous levez prendre un café → vous comptez 5 min avant de revenir ds la salle.
→ 5 min se sont écoulées

→ Vous partez en courant aux toilettes à la vitesse de la lumière! → vous comptez 5 min avant de revenir ds la salle.
→ moins de 5 min se sont écoulées ! $d\tau = \sqrt{1 - \text{vitesse}^2}\, dt$

Onde et bilan

Soit $\gamma \subseteq \mathbb{P}^1$ et f holomorphe sur $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathbb{T}$

mettons $\mathcal{U} = (Z_0 \neq 0)$ $\quad f\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, \frac{Z_3}{Z_0}\right) = f(u,v,w)$

Alors pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3,1}$

on pose $L_{x,y,z,t}$ la sphère image $\subseteq \mathcal{N}$. $\quad L_{x,y,z,t} = \left\{\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = M_{x,y,z,t}\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}\right\} \simeq \mathbb{P}^1$

$$[Z:] \overset{h}{\longmapsto} [Z_0 : Z_1]$$

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_{h^*\gamma} f$$

$$= \int_{\gamma \subseteq \mathbb{P}^1} f\left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{(t-z)Z_0 + (x-iy)Z_1}{Z_0}, \frac{(x+iy)Z_0 + (t+z)Z_1}{Z_0}\right)$$

$$\zeta = \frac{Z_1}{Z_0}$$

$$= \int_0^\infty f(\zeta, (t-z) + (x-iy)\zeta, (x+iy) + (t+z)\zeta)\, d\zeta \qquad \gamma = \zeta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

On calcule (dérivation sous $\int d\zeta$)

$\partial/\partial x\, \Phi$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi$, $\frac{\partial}{\partial y}\Phi$ ...

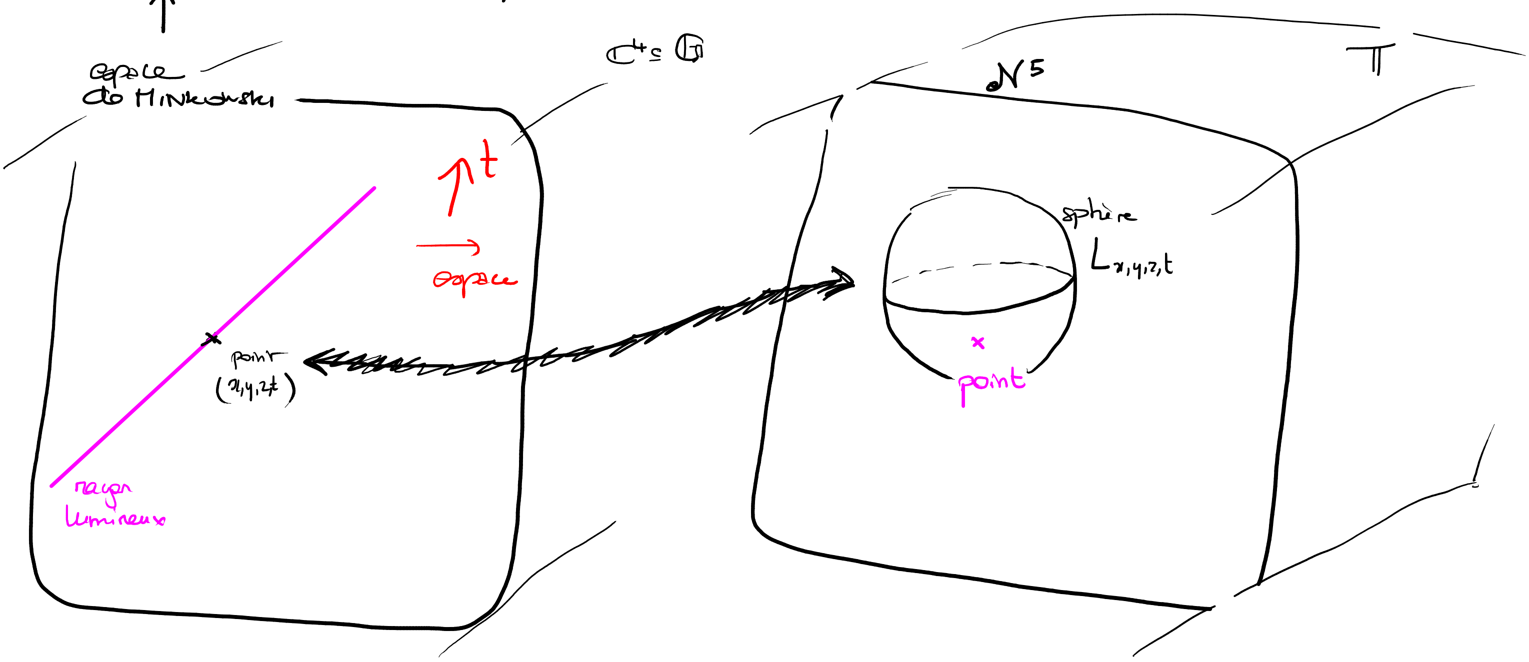
$$[\ldots] \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

Φ <u>onde</u> !

$$\mathbb{M} = Gr_2(\mathbb{C}^4) \longleftrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$$

$$\cup$$

$\mathbb{R}^{3,1} \simeq \left\{\begin{array}{c}\text{matrices} \\ \text{hermitiennes} \\ 2\times 2\end{array}\right\} \longleftrightarrow \mathcal{N}^5$ quadrique réelle.



Onde (vitesse $= c = 1$) : $\Phi(x,y,z,t)$, $\Box\Phi = 0$ $\longleftrightarrow$ fonction holo f sur un voisinage de γ ds L_{xyzt}

$(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{3+1}$

CALCUL

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_{\mathbb{R}} f(\zeta,\ (t-z)+(x-iy)\zeta,\ (x+iy)+(t+z)\zeta)\, d\zeta$$

$$\partial_x \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f \cdot \zeta + \partial_3 f)\, d\zeta$$

$$\partial_x^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2^2 f \times \zeta^2 + 2\zeta \partial_{2,3}^2 f + \partial_3^2 f)\, d\zeta$$

$$\partial_y \Phi = i \int_{\mathbb{R}} (-\partial_2 f \cdot \zeta + \partial_3 f)\, d\zeta \qquad \partial_y^2 \Phi = i \int_{\mathbb{R}} (i\, \partial_2^2 f \times \zeta^2 - 2i \partial_{2,3}^2 f \times \zeta + i \partial_3^2 f)\, d\zeta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (-\partial_2^2 f \cdot \zeta^2 + 2\zeta \partial_{2,3}^2 f - \partial_3^2 f)\, d\zeta$$

$$\partial_z \Phi = \int_{\mathbb{R}} (-\partial_2 f + \zeta \partial_3 f)\, d\zeta \qquad \partial_z^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f - 2\zeta \partial_{2,3} f + \zeta^2 \partial_3 f$$

$$\partial_t \Phi = \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 f + \zeta \partial_3 f)\, d\zeta \qquad \partial_t^2 \Phi = \int_{\mathbb{R}} \partial_2^2 f + 2\zeta \partial_{2,3} f + \zeta^2 \partial_3 f$$

$$(-\partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 + \partial_t^2)\Phi = \int_{\mathbb{R}} 4\zeta \partial_{2,3} f - 4\zeta \partial_{2,3} f = 0$$

Remarque : On utilise $f(u,v,w)$ holo

quand on dit $\quad \partial_x \Phi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) \times \frac{\partial v}{\partial x}\, d\zeta$

car $\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u,v,w)\right) = \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \times \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdots + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}$

or $\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = 0 \end{cases}$