## 2）坐标系介绍

        有两个基本坐标系：“地理”坐标系（Earth Frame）和“载体”坐标系(Body Frame)。”地理”坐标系指的就是地球上的“东北天（ENU）”坐标系，而“载体”坐标系值的就是四轴自己的坐标系。当我们在实际控制当中，我们关心的显然是载体坐标系相对于地理坐标系之间的变化，所以我们通常使用的旋转矩阵是把“地理”坐标系转到“载体”坐标系的矩阵，两者之间的转换关系自行百度吧，讲的很详细。转化的方法就是坐标系的转换，目前有三种方式：四元数（q0123）、欧拉角（yaw（Z轴）、pitch（Y轴）、roll（X轴）属于其中一种旋转顺序Z-Y-Xà航空次序欧拉角）、方向余弦矩阵（9个系数）。其中使用四元数运算比较快，但是它没有实际的物理含义，纯数学推到。

## 3）姿态数据

        姿态的数据来源有5个：重力、地磁、陀螺仪、加速度计、电子罗盘。其中前两个来自“地理”坐标系，后三个来自“载体”坐标系。。在“地理”坐标系中，重力的值始终是（0，0，1g），地磁的值始终是（0，1，x）。这些值就是由放置在四轴上的传感器测量出来的。在单位时间内的位移被定义为速度，速度有线速度和角速度之分，分别对应两种传感器测量这两种不同的速度：线速度传感器（加速度计）、角速度传感器（陀螺仪）。

## 4）导航的基本原则

        导航的基本原则就是保证两个基本坐标系的正确转化，没有误差。只有实现了这个原则，载体才可以在自己的坐标系中完成一系列动作而被转换到地理坐标系中看起来是正确的。为了达到这个目标，需要对两个坐标系进行实时的标定和修正。因为坐标系有三个轴，偏航yaw修正由电子罗盘（基于载体）、地磁（基于地理）对比修正误差补偿得到。俯仰pitch和横滚roll上的修正由加速度计（基于载体）、重力（基于地理）对比修正误差得到。在完成了基本原则的基础之后，即保证两个坐标系的正确转化后，利用基于载体上的陀螺仪进行积分运算，得到基于载体坐标系的姿态数据，经过一系列PID控制，给出控制量，完成基于载体坐标系上的稳定控制后，反应到地理坐标系上的稳定控制，从而达到我们观察到的定高、偏航、翻滚、倾仰等动作。下一篇博客会给出具体的PID回路控制框图，这篇博客就不添加了。

        加速度计在地球上测量的是重力加速度，如果载体沿着z轴旋转，加速度计是无法感知他的运动的；类似的，电子罗盘测量的是地球上的磁场方向，如果载体沿着y轴旋转，电子罗盘同样也是无法感知他的运动的。综上所述，加速度计和电子罗盘只能得到2维的角度关系，通过某种方式的融合，可以得到正确的三维姿态信息。

        对于上述论述可以看出，导航姿态从理论上讲只用陀螺仪是可以完成任务的。但是由于陀螺仪在积分过程中会产生误差累计，加上白噪声、温度偏差等会造成导航姿态的解算随着时间的流逝而逐渐增加。所以就需要用加速度计在水平面对重力进行比对和补偿，用来修正陀螺仪的误差。但是对于竖直轴上的旋转，加速度计是无能为力的，此时用的是电子罗盘。也可以测量出水平面内的地磁方向用来修正陀螺仪的水平误差。通过这两个器件的修正补偿，使得陀螺仪更加稳定、可靠的工作。

## 5）AHRS和IMU的差异

        AHRS由加速度计、磁场计、陀螺仪构成，AHRS的真正参考来自于地球的重力场和地球的磁场，它的静态精度取决于对磁场的测量精度和对重力的测量精度，而陀螺仪决定了他的动态性能。在这种前提下，说明AHRS离开了地球这种有重力和磁场环境的时候是没法正常工作的。而且特别注意，磁场和重力场越正交，航姿测量效果越好；也就是说如果磁场和重力场平行了，比如在地磁南北极。这里的磁场是向下的，即和重量场方向相同了。这个时候航线交是没法测出的，这是航姿系统的缺陷所在；在高纬度的地方航线角误差会越来越大。

        IMU（Inertial measurement unit）学名惯性测量单元，大学的理论力学告诉我们，所有的运动都可以分解为一个直线运动和一个旋转运动，故这个惯性测量单元就是测量这两种运动，直线运动通过加速度计可以测量，旋转运动则通过陀螺。假设IMU的陀螺和加速度计的测量是没有任何误差的，那么通过陀螺则可以精确的测量物体的姿态。通过加速度计可以二次积分得出位移，实现完整的6DOF，也就是说你带着一台这种理论型的IMU在宇宙任何位置运动。我们都可以知道它当前的姿态和相对位移，这将不局限于任何场。

　　从上面的描述何以看出。实际上AHRS比IMU还多一个磁场传感器，而为什么AHRS的级别却低于IMU而需要依赖于重力场和磁场呢？这是由传感器器件架构所决定的。AHRS的传感器通常是成本低廉的mems传感器。这种传感器的陀螺仪和加速度计的噪声相对来说很大。以平面陀螺为例：用ADI的陀螺仪进行积分一分钟会漂移2度左右，这种前提下如果没有磁场和重力场来修正三轴陀螺的话。那么基本上3分钟以后物体的实际姿态和测量输出姿态就完全变样了，所以在这种低价陀螺仪和加速度计的架构下必须运用场向量来进行修正，而IMU实际上也是这样的。因为我们知道没有绝对精确的传感器，只有相对精确的传感器，IMU的陀螺仪用的是光纤陀螺或者机械陀螺，这种陀螺的成本很高。精度相对mems陀螺也很高，精度高不代表准确，IMU的姿态精度参数通常是一小时飘多少度。

　　而用加速度计积分做位置的话。AHRS是不现实的（1分钟就能飘出几十米，而且是成二次方的速度递增）。AHRS通常要结合GPS和气压计做位置，IMU积分做位置的是一天多少海里。这样的一个参数数量级。也许在海上还能用的到，这就是AHRS和IMU在我的理解里的一个差异。

## 欧拉角、DCM、四元数、gyro误差、矫正、正交化

一个无人机系统的算法主要有两类：姿态检测算法、姿态控制算法。姿态控制、被控对象、姿态检测三个部分构成一个闭环控制系统。

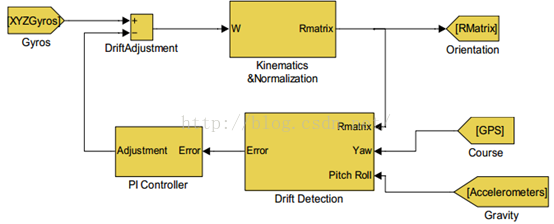
1. 姿态检测算法：姿态的表示可以用欧拉角，也可以用四元数。姿态检测算法的作用就是将加速度计、陀螺仪等传感器的测量值解算成姿态，进而作为系统的反馈量。在获取sensors值之前需要对数据进行滤波，滤波算法主要是将获取到的陀螺仪和加速度计的数据进行去噪声及融合，得出正确的角度数据（欧拉角或四元数），主要采用互补滤波或者高大上的卡尔曼滤波。
2. 姿态控制算法：控制无人机姿态的三个自由度，用给定姿态与姿态检测算法得出的姿态偏差作为输入，被控对象模型的输入量作为输出（例如姿态增量），从而达到控制无人机姿态的作用。最常用的就是PID控制及其各种PID扩展（分段、模糊等，我的毕设就是模糊PID控制算法，惨了，啥都不懂，还能毕业不，哎~~~），高端点的有自适应控制（自动壁障应该就用这个）。当然，姿态控制算法里面比较常用角速度、角度双闭环控制（所谓的两级PID控制），所以常常有PID外环+PID内环等等，懂我搞懂了再细说吧。PID算法就是控制四个电机的转速来纠正欧拉角，从而使机身保持平稳。

相关论文

Direction Cosine Matrix IMU: Theory

这两个作者看Mahony的和Paul的

关于上面的这个Normalize the DCM matrix（ 归一化处理）很有深度，值得了解一下其原理，在使用DCM控制和导航时，肯定存在积累数值的舍入误差、陀螺漂移误差、偏移误差、增益误差。它主要就是补偿抵消这几种误差（注意这几种误差 error）的；使用PI负反馈控制器检测这些误差，并在下一次产生之前就抵消这些误差（GPS检测yaw error，加速度计检测pitch和roll error）。在ardupilot源码中使用的Normalize算法就是来自2009年Paul的研究成果--**Direction Cosine Matrix IMU: Theory**。首先了解一下几个比较关键的概念。用下图先有个感性认识吧



1、陀螺漂移（Gyro drift）

        由于外干扰力矩（机械摩擦、振动等因素）引起的陀螺自转轴的缓慢进动：陀螺漂移。通常，干扰力矩分为两类，与之对应的陀螺漂移也分为两类：一类干扰力矩是系统性的，规律已知，它引起规律性漂移，因而是可以通过计算机加以补偿的；另一类是随机因素造成的，它引起随机漂移。在实际应用中，除了要尽可能减小随机因素的影响外，对实验结果还要进行统计处理，以期对随机漂移作出标定，并通过系统来进行补偿。但由于它是无规律的，很难达到。

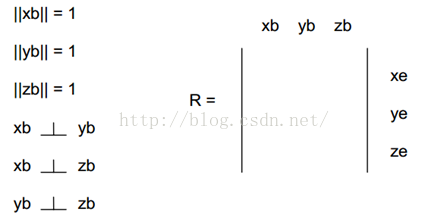
        平时所说的用加速计（静态特性好）修正陀螺仪的漂移，其实这个修正是利用加速度计修正陀螺仪计（动态特性好）算出的姿态，并估计出陀螺仪的漂移，在下一次做姿态解算时，陀螺仪的输出减去估计出的漂移后再做捷联姿态解算，以此不断循环。融合的方法一般用EKF，KF也是基于最优估计的。

2、误差来源

        在进行数值积分的过程中一定会引入数值误差，数值误差分为两类；一类是积分误差（来自于我们假设旋转速率在短时间内不变引起的），另一类是量化误差（主要来自于模数转换过程中引起的）。关于gyro误差产生的详细分析见：[http://www.crazepony.com/wiki/mpu6050.html](http://www.crazepony.com/wiki/mpu6050.html" \t "_blank)

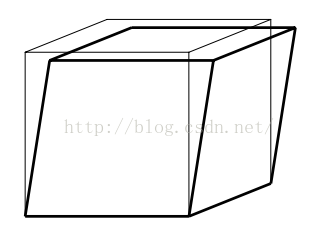
3、旋转矩阵的约束

        旋转矩阵就是改变方向不改变大小；旋转矩阵有9个元素，实际上是只有三个是独立的。由于旋转矩阵的正交性，意味着任何一对行或者列都是相互垂直的，并且每个行或者列的元素的平方和为1。所以在9个元素中有6个限制条件。



4、误差导致的结果

        旋转矩阵的关键性能之一就是正交性，即在某个参考坐标系下的三个方向的向量两两垂直，且向量长度在每个参考系下都是等长的。数值误差会违背该性能，比如旋转矩阵的行和列都是单位向量，其长度都是1，但是由于数值误差的原因导致其长度边长或变短；最终致使它们缩小到0或者增长到无穷大，最后的结果就是导致原本相互正交的现在变的倾斜了。如下图所示。

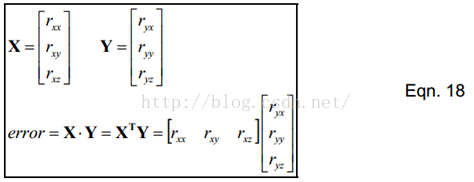


        那么问题来了，如何修正这个问题呢？可以使用如下方法（ Ardupilot源码中就是利用如下算法处理的errors）。

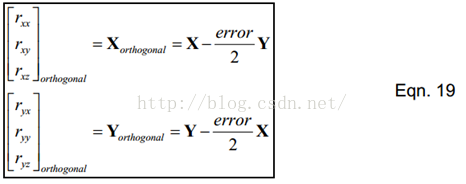
5、如何消除各种误差（积累数值的舍入误差、陀螺漂移误差、偏移误差、增益误差）

        其方法就是采样DCMIMU:Theory中提出的理论—强制正交化（也称为Renormalization）。

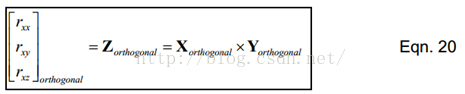
        首先计算矩阵中X、Y行的点积（dotproduct），理论上应该是0，但是由于各种errors的影响，所以点积的值不是0，而表示为error。



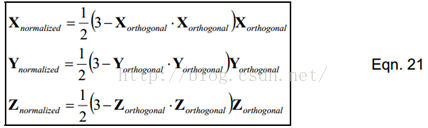
        然后把这个误差项分半交叉耦合到X、Y行上，如下公式。



        通过上述两个公式处理过以后，正交误差明显减小了很多，即R旋转矩阵的每个行和列的长度都非常接近1。接下来就是调整旋转矩阵的Z行，使其与X、Y正交，方法比较简单，直接使用X、Y的叉积（cross product）即可。



        最后一步就是放缩旋转矩阵的每一行使其长度等于1，现在用一种比较简单的方法实现，即使用泰勒展开。



**白噪声**

白噪声是指在较宽的[频率范围](https://baike.so.com/doc/5175266-5406117.html)内，各等带宽的[频带](https://baike.so.com/doc/5249691-5482878.html)所含的噪声能量。

1、 陀螺仪和加速计（特性分析）

1）陀螺仪

         Gyro sensitivity、 operating range、offset、drift、calibrationandsaturation must be taken into account in the implementation of DCM。

灵敏度

        测量角速度，具有高动态特性，它是一个间接测量角度的器件其中一个关键参数就是gyro sensitivity（其单位是millivolts per degree persecond，把转速转换到电压值），测量范围越小气灵敏度越好。也就是说测量的是角度的导数，即角速度，要将角速度对时间积分才能得到角度。陀螺仪就是内部有一个陀螺，它的轴由于陀螺效应始终与初始方向平行，这样就可以通过与初始方向的偏差计算出旋转方向和角度。

偏移

        偏移就是在陀螺没有转动的时候却又输出，这个输出量的大小和供电电压以及温度有关，该偏移可以在陀螺仪上电时通过一小段时间的测量来修正。

漂移  
        它是由于在时间的积累下偏移和噪声相互影响的结果，例如有一个偏置（offset）0.1dps加在上面，于是测量出来是0.1dps，积分一秒之后，得到的角度是0.1度，1分钟之后是6度，还能忍受，一小时之后是360度，转了一圈，也就是说，陀螺仪在短时间内有很大的参考价值。  
白噪声  
        电信号的测量中，一定会带有白噪声，陀螺仪数据的测量也不例外。所以获得的陀螺仪数据中也会带有白噪声，而且这种白噪声会随着积分而累加。  
积分误差  
        对陀螺仪角速度的积分是离散的，长时间的积分会出现漂移的情况。所以要考虑积分误差的问题。

溢出

        就是转速超过了其测量的最大转速范围。关于这个问题的解决办法，在DCM IMU:Theory中给出来三种解决办法，不写了。

2）加速度计  
         加速度计的低频特性好，可以测量低速的静态加速度。在无人机上就是对重力加速度g的测量和分析。当把加速度计拿在手上随意转动时，看的是重力加速度在三个轴上的分量值。加速度计在自由落体时，其输出为0。为什么会这样呢？这里涉及到加速度计的设计原理：加速度计测量加速度是通过比力来测量(比力方程，秦永元的书中有介绍)，而不是通过加速度。加速度计仅仅测量的是重力加速度,而重力加速度与刚才所说的R坐标系（EarthFrame）是固连的,通过这种关系,可以得到加速度计所在平面与地面的角度关系。

        加速度计仅仅测量的是重力加速度，3轴加速度计输出重力加速度在加速度计所在机体坐标系3个轴上的分量大小。重力加速度的方向和大小是固定的。通过这种关系，可以得到加速度计所在平面与地面的角度关系。加速度计若是绕着重力加速度的轴转动，则测量值不会改变，也就是说加速度计无法感知这种水平旋转。

3）磁传感器

        可以测量磁场，在没有其他磁场的情况下，仅仅测量的是地球的磁场，而地磁也是和R坐标系固连的，通过这种关系，可以得到平面A和地平面的关系。(平面A：和磁场方向垂直的平面)，同样的，若是沿着磁场方向的轴旋转，测量值不会改变，无法感知这种旋转。

        综合考虑，加速度计和磁传感器都是极易受外部干扰的传感器，都只能得到2维的角度关系，但是测量值随时间的变化相对较小，结合加速度计和磁传感器可以得到3维的角度关系。陀螺仪可以积分得到三维的角度关系，动态性能好，受外部干扰小，但测量值随时间变化比较大。可以看出，它们优缺点互补，结合起来才能有好的效果。

**数学期望**

离散型随机变量的一切可能的取值 https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D12/sign=8199c13efd03918fd3d139c8533d9cde/a6efce1b9d16fdfa4def5030be8f8c5495ee7b69.jpg 与对应的概率 https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D34/sign=8e97df37871001e94a3c120bb90e2f78/dcc451da81cb39db9ba6f188da160924aa18308d.jpg 乘积之和称为该离散型随机变量的数学期望。

**公式**

离散型随机变量X的取值为

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D114/sign=edaa99835ffbb2fb302b5c137b4b2043/342ac65c103853434fb616ff9913b07ecb8088f7.jpg

，

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D195/sign=89f2f115b8fb43161e1f7e7315a64642/342ac65c103853434f6d16ff9913b07ecb80884a.jpg

为X对应取值的概率，可理解为数据

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D114/sign=edaa99835ffbb2fb302b5c137b4b2043/342ac65c103853434fb616ff9913b07ecb8088f7.jpg

出现的频率

https://gss1.bdstatic.com/9vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D38/sign=8b76889d81d4b31cf43c92b385d6b8c3/5882b2b7d0a20cf4f0366d017c094b36adaf994e.jpg

，则：

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D572/sign=c97a20aae1f81a4c2232eccee52b6029/caef76094b36acafeb94042276d98d1000e99cfc.jpg

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D111/sign=cdc6e7624ded2e73f8e9822db603a16d/08f790529822720ef74fea1c7ccb0a46f31fab57.jpg

**例子**

某城市有10万个家庭，没有孩子的家庭有1000个，有一个孩子的家庭有9万个，有两个孩子的家庭有6000个，有3个孩子的家庭有3000个。

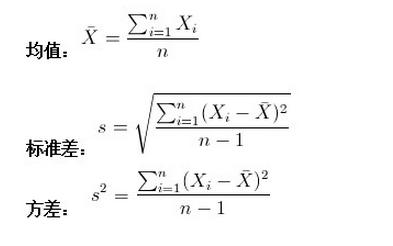
则此城市中任一个家庭中孩子的数目是一个随机变量，记为X。它可取值0，1，2，3。

其中，X取0的概率为0.01，取1的概率为0.9，取2的概率为0.06，取3的概率为0.03。

则，它的数学期望

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D363/sign=e91339cd9ddda144de096ab481b5d009/95eef01f3a292df5053a31cbb6315c6035a87377.jpg

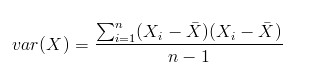
，即此城市一个家庭平均有小孩1.11个。



很显然，均值描述的是样本集合的中间点，它告诉我们的信息是很有限的，而标准差给我们描述的则是样本集合的各个样本点到均值的距离之平均。以这两个集合为例，[0，8，12，20]和[8，9，11，12]，两个集合的均值都是10，但显然两个集合差别是很大的，计算两者的标准差，前者是8.3，后者是1.8，显然后者较为集中，故其标准差小一些，标准差描述的就是这种“散布度”。之所以除以n-1而不是除以n，是因为这样能使我们以较小的样本集更好的逼近总体的标准差，即统计上所谓的“无偏估计”。而方差则仅仅是标准差的平方。

## 为什么需要协方差？

上面几个统计量看似已经描述的差不多了，但我们应该注意到，标准差和方差一般是用来描述一维数据的，但现实生活我们常常遇到含有多维数据的数据集，最简单的大家上学时免不了要统计多个学科的考试成绩。面对这样的数据集，我们当然可以按照每一维独立的计算其方差，但是通常我们还想了解更多，比如，一个男孩子的猥琐程度跟他受女孩子欢迎程度是否存在一些联系啊，嘿嘿~协方差就是这样一种用来度量两个随机变量关系的统计量，我们可以仿照方差的定义：



来度量各个维度偏离其均值的程度，标准差可以这么来定义：

协方差的结果有什么意义呢？如果结果为正值，则说明两者是正相关的(从协方差可以引出“相关系数”的定义)，也就是说一个人越猥琐就越受女孩子欢迎，嘿嘿，那必须的~结果为负值就说明负相关的，越猥琐女孩子越讨厌，可能吗？如果为0，也是就是统计上说的“相互独立”。

**8.6.2  矩阵的运算**

把一组数字记录成矩阵形式是没有意义的，学习矩阵的关键在于掌握矩阵之间的运算。

**1．矩阵加法运算**

矩阵之间也可以相加。把两个矩阵对应位置的单个元素相加，得到的新矩阵就是矩阵加法的结果。由其运算法则可知，只有行数和列数完全相同的矩阵才能进行加法运算。

矩阵之间相加没有顺序，假设A、B都是矩阵，则A+B=B+A。通常认为矩阵没有减法，若要与一个矩阵相减，在概念上是引入一个该矩阵的负矩阵，然后相加。A-B是A+(-B)的简写。两个三行三列矩阵的加法如图8-27所示。

|  |
| --- |
| <http://new.51cto.com/files/uploadimg/20080716/213559621.jpg> |
| 图8-26  矩阵的行和列 |

|  |
| --- |
| <http://new.51cto.com/files/uploadimg/20080716/213622424.jpg> |
| 图8-27  矩阵的加法 |

矩阵加法在图像位移运算时经常用到。

2．矩阵乘法运算

矩阵之间也可以进行乘法运算，但其运算过程相对复杂得多。与算术乘法不同，矩阵乘法并不是多个矩阵之和，它有自己的逻辑。其具体的算法描述为：假设m行n列的矩阵A和r行v列的矩阵B相乘得到矩阵C，则首先矩阵A和矩阵B必须满足n=r，也就是说，第一个矩阵的列数必须和第二个矩阵的行数相同。在运算时，第一个矩阵A的第i行的所有元素同第二个矩阵B第j列的元素对应相乘，并把相乘的结果相加，最终得到的值就是矩阵C的第i行第j列的值。

这个过程用数学公式描述如下。

|  |
| --- |
| C(i，j)=A(i1，i2，i3……in)×B(j1，j2，j3……jv) |

进而推出。

|  |
| --- |
| C(i，j)= i1×j1+i2 ×j2+i3×j3……+in×jv |

从矩阵的乘法运算过程可以看出，矩阵A和矩阵B相乘的产生的矩阵C，必然是m行v列的。例如，一个5×3的矩阵同一个3×7的矩阵相乘，结果必然是产生一个5×7的矩阵。而一个5×3的矩阵同一个5×7的矩阵，则无法相乘。两组矩阵的乘法运算如图8-28所示。

|  |
| --- |
| <http://new.51cto.com/files/uploadimg/20080716/213900370.jpg> |
| 图8-28  矩阵的乘法 |

在图形变换时，经常用到多次变换，这会造成多个矩阵相乘。如果多个矩阵相乘，则等价于前两个矩阵相乘的结果再乘以第三个矩阵，以此向后类推。例如，假设A、B、C、D都是矩阵，则A×B×C×D=((A×B)×C)×D。矩阵乘法同数字乘法不同，其运算的先后顺序十分敏感，矩阵A乘矩阵B的结果可能完全不同于矩阵B乘矩阵A的结果，有时甚至根本无法相乘。

矩阵相乘要求矩阵之间列与行前后对应相等。为了方便操作，在图形学的实际应用中变换矩阵都是行数和列数相等的方阵。对于行和列不相等的矩阵，甚至要人为补足。

协方差