Estudio de los autovalores de las matrices (23/07/2021)

Para obtener los autovalores debemos resolver la siguiente ecuación para λ:

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b & -a-b+3c \\ -2a-b+4c & c-\lambda & 2a+b-2c \\ a+b-c & -b+2c & -a+2c-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Calculando obtenemos que:

$$-\lambda^3 + 3c\lambda^2 + 3*(2ac-3c^2-2ab-b^2+4bc)*\lambda + 9 * (-2ac^2+2abc+b^2c-4bc^2+3c^3) = 0$$

Y las soluciones de esta ecuación son:

$$\lambda = 3c$$

$$\lambda = \pm\left(i*\sqrt{3}*\sqrt{b-c}*\sqrt{2*a+b-3c}\right) = \pm\left(i*6\sqrt{3}*\sqrt{M+3m}*\sqrt{M+m}\right)$$

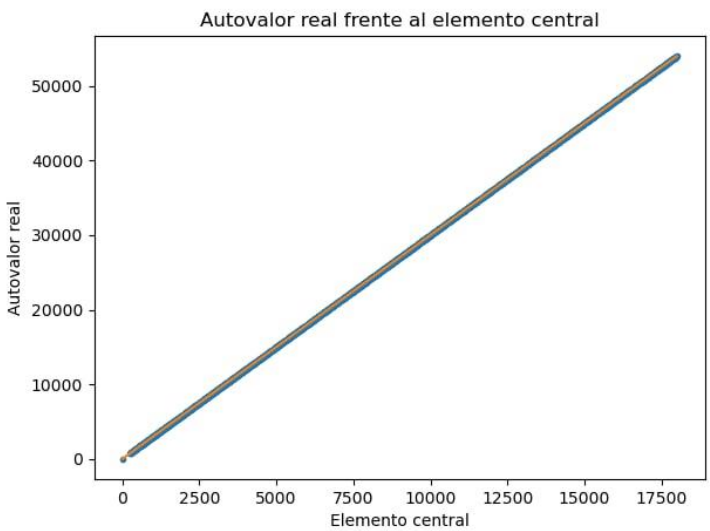
Siendo

$6m = c - a$ (Diferencia menor)

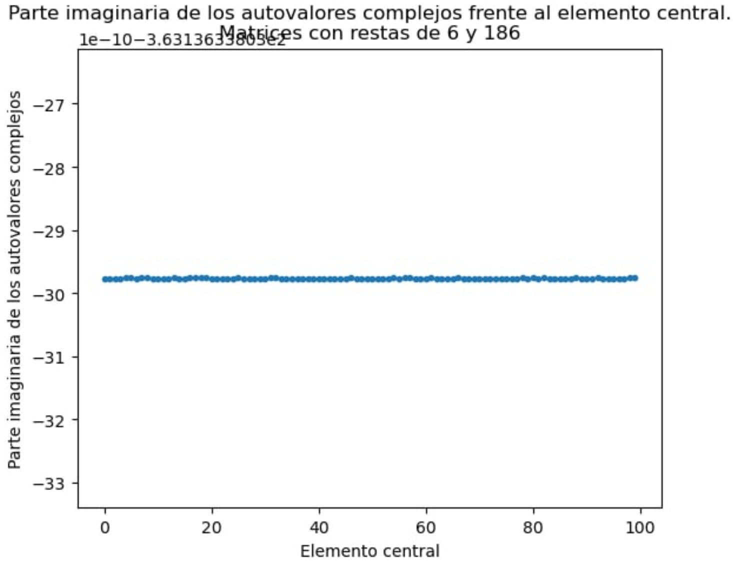
$6M = 3a + b - 4c$ (Diferencia mayor)

Vemos que tenemos tres autovalores distintos:

- Un autovalor real que depende exclusivamente del valor central de la matriz y que es igual a la suma de los elementos. Podemos verlo en la siguiente gráfica:

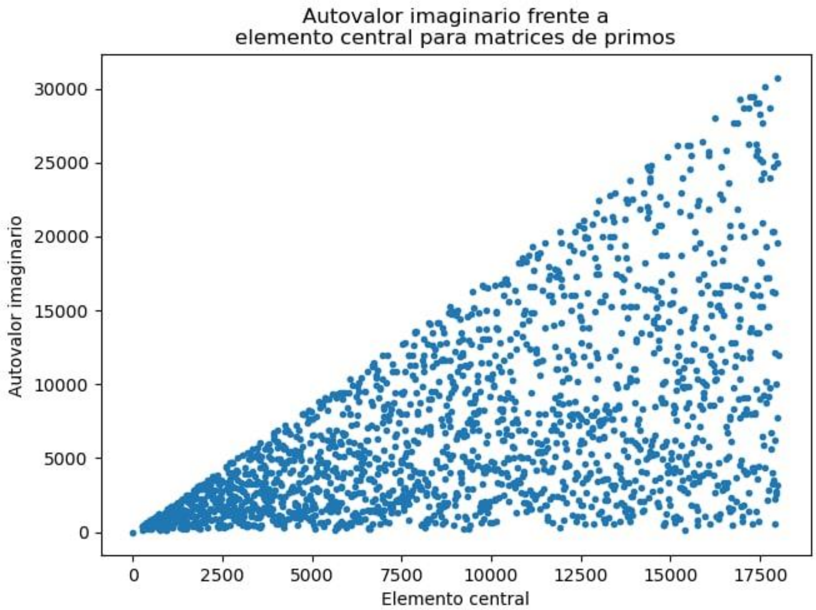


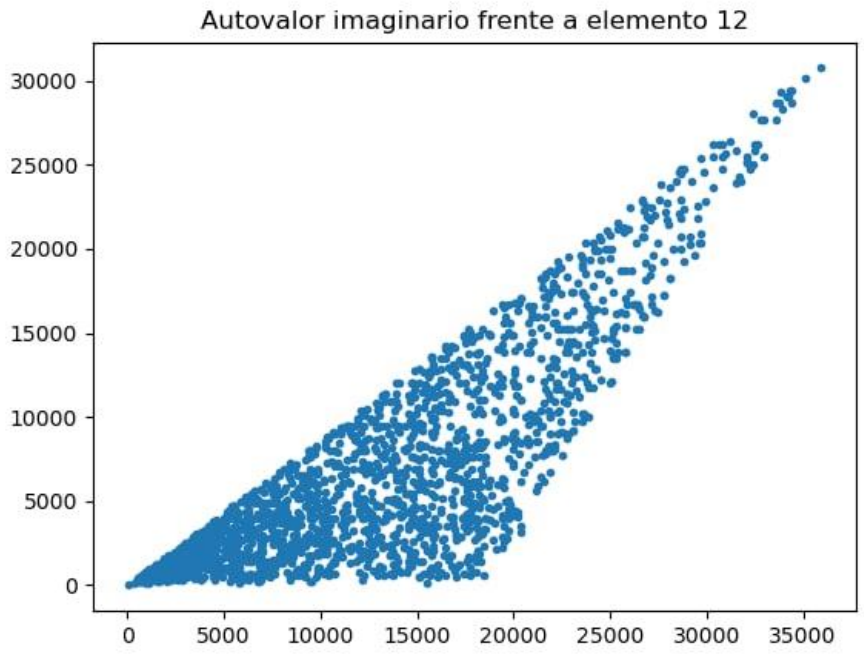
- Dos autovalores imaginarios conjugados entre sí que dependen exclusivamente del valor de las diferencias de los elementos. Por tanto, podríamos utilizar este valor para identificar todas las matrices que poseen las mismas diferencias.



Sin embargo, no existe diferencia ninguna entre los autovalores de las matrices de números primos y las que no son de primos.

También hemos representado el valor de los autovalores imaginarios frente al valor de cada uno de los elementos de las matrices de primos del Excel que nos mandó Rubén. Los valores parecen estar confinados a ciertas regiones de las gráficas, aunque no sabemos si tiene algún significado de los primos o es un efecto simplemente de la construcción de la matriz. Adjuntamos un par de ejemplos (elemento central y elemento (1,2)) pero todas tienen distribuciones similares.




Autovalor imaginario frente a elemento 12
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000