Exercices CPGE EC

Olivier Reynet

2020-2021

Table des matières

1 Calculs et raisonnements - bases **5**
1.1 Programme . . . 5
1.2 Remarques . . . 5
1.3 Questions de cours . . . 5
1.4 Exercices . . . 7

2 Calculs et raisonnements - Sommes **11**
2.1 Programme . . . 11
2.2 Remarques . . . 11
2.3 Questions de cours . . . 11
2.4 Exercices . . . 12

3 Calculs et raisonnements - Sommes et produits **15**
3.1 Programme . . . 15
3.2 Remarques . . . 15
3.3 Questions de cours . . . 15
3.4 Exercices . . . 16

4 Fonctions usuelles **19**
4.1 Programme . . . 19
4.2 Remarques . . . 19
4.3 Questions de cours . . . 19
4.4 Exercices . . . 20

5 Nombres complexes et trigonométrie **23**
5.1 Programme . . . 23
5.2 Démonstrations à connaître . . . 23
5.3 Remarques . . . 23
5.4 Questions de cours . . . 23
5.5 Exercices . . . 25

Chapitre 1

Calculs et raisonnements - bases

1.1. Programme

— Révisions de calcul : fractions, puissances, racine carrée, fonction trinôme. Valeur absolue. Manipulations d'inégalités.

— Raisonnement : assertions, conditions, implication et équivalence. Résolution d'équations et d'inéquations, analyse-synthèse. Quantificateurs et preuve d'une énoncé quantifié.

1.2. Remarques

NB — On peut donner une définition de l'implication à l'aide de la notion de condition ou à l'aide de la négation combinée à la disjonction : « non P ou Q» ou encore $\neg P \wedge Q$.

NB — Le principe de déduction s'énonce ainsi : si P est vraie et que $P \Rightarrow Q$ alors Q est vraie.

NB — Insister sur le fait qu'on peut démontrer l'équivalence par la démonstration des deux implications réciproques, parfois moins risqué que l'enchaînement d'équivalences non maîtrisées. Parfois le raisonnement direct par équivalence n'est tout simplement pas possible. . .

NB — Un exemple simple d'équivalence est l'usage d'une identité remarquable pour résoudre une équation par factorisation. $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

NB — Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode constructive qui permet parfois de prouver l'unicité en même temps que l'existence d'une solution, même si ce n'est pas généralement le cas.

NB — Faire remarquer que la phase d'analyse permet de trouver les conditions nécessaires pour caractériser les solutions d'une problème, alors que la phase de synthèse permet de vérifier que ces conditions obtenues sont également suffisantes.

NB — On peut faire remarquer qu'une prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend des variables quantifiées.

1.3. Questions de cours

Exercice 1 Puissances *(cours)*

Soit $a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}^\star$, $n \in \mathbb{N}^\star$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$. Quelles règles peut-on utiliser pour calculer les expressions suivantes :

a) $a^n \times a^m$ b) $\frac{a^n}{a^m}$ c) $(a^n)^m$

d) $a^n b^n$ e) $\frac{a^n}{b^n}$

Exercice 2 Racines n-ièmes et rationnels *(cours)*

a) Donner la définition d'une racine n-ième.

b) Soit r un nombre rationnel. Peut-on définir x^r si pour tout x ?

c) Pourquoi ? Donner un exemple.

Exercice 3 Identités remarquables (cours) *(cours)*

a) Énoncer trois identités remarquables.

b) À quoi cela peut-il servir concrètement ? Donner un exemple.

Exercice 4 * Fonction trinôme (cours) *(cours)*

Soit a,b et c trois réels et l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$

a) Cette équation a-t-elle toujours des solutions dans $\mathbb{R}$?

b) Donner la forme des solutions de cette équation ainsi que les factorisations résultant de la résolution. Sont-elles valables pour une inconnue $z \in \mathbb{C}$?

Exercice 5 Signe de la fonction trinôme (cours) *(cours)*

Soit a,b et c trois réels et $a > 0$. On s'intéresse au signe de $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $x_1 < x_2$.

a) Discuter le signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de la valeur de x lorsque x est réel.

b) Peut-on généraliser une règle pour le signe ?

Exercice 6 Définition de valeur absolue (cours) *(cours)*

Soit a un nombre réel.

a) Donner la définition de la valeur absolue de a.

b) Donner une représentation graphique de $\mid b - a \mid$, si a et b sont des réels.

c) Discuter les propriétés de la valeur absolue en lien avec les opérateurs addition, multiplication et puissance.

d) Qu'est que l'inégalité triangulaire ?

Exercice 7 * Inégalité et valeur absolue (cours)

Soit a un nombre réel positif et x un nombre réel. Donner une formulation équivalente aux inégalités suivantes :

a) $\mid x \mid \leqslant a$

b) $\mid x \mid < a$

c) $\mid x \mid \geqslant a$

d) Qu'est que l'inégalité triangulaire ?

Exercice 8 * Assertion (proposition) et condition (cours)

a) Qu'est-ce qu'une assertion ou proposition ?

b) Donner un exemple.

c) L'expression mathématique $x^2 < x^3$ est-elle une assertion ?

d) Quelle est la différence entre une condition et une assertion ?

e) Donner un exemple de condition.

Exercice 9 *** Implication (cours)

a) Donner la définition d'une implication.
b) Donner un exemple.
c) Comment peut-on démontrer une implication ?
d) Démontrer l'implication suivante : «si $x + 1 \in \mathbb{Q}$, alors $x \in \mathbb{Q}$».

Exercice 10 ** Equivalence (cours)

a) Donner la définition d'une équivalence, sa formulation en français et son écriture mathématique.
b) Donner un exemple.
c) Comment peut-on démontrer une équivalence ?
d) Démontrer l'équivalence suivante pour deux réels x et y : $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Exercice 11 * Analyse-synthèse (cours)

a) Expliquer le principe du raisonnement par analyse- synthèse.
b) Détailler la phase d'analyse : à quoi sert-elle ?
c) Détailler la phase de synthèse : à quoi sert-elle ?
d) Trouver l'ensemble de solutions $\mathcal{S}$ de l'équation suivante :(E) : $\sqrt{x+1} - x = 0$

Exercice 12 Quantification (cours)

a) Donner le nom et la signification des différents quantificateurs.
b) Où doit-on placer le quantificateur par rapport à la variable qu'il quantifie ?
c) Une assertion quantifiée est-elle toujours vraie ?
d) Donner un exemple d'assertion quantifiée pour chaque quantificateur.

Exercice 13 Ordre des quantificateurs (cours)

a) Donner le nom et la signification des différents quantificateurs.
b) Énoncer les règles qui permettent d'intervertir (ou pas) les quantificateurs dans un énoncé.
c) Donner un exemple et un contre-exemple pour chaque cas.

Exercice 14 Preuve d'unicité et d'existence (cours)

Soit l'assertion $\mathcal{B}$: $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$
a) En règle générale, comment doit-on procéder pour prouver cette assertion ?
b) Dans quels cas cela peut-il être plus simple ?
c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \exists! t \in \mathbb{R}, e^t = x$

1.4. Exercices

Exercice 15 * Simplifier les fractions

a) $\frac{7}{21} \times \frac{12}{42}$
b) $1 - \frac{a}{1+a}$ pour $a \neq -1$
c) $\frac{1}{a-1} - \frac{a}{1-a}$ pour $\mid a \mid \neq 1$
d) $\frac{a-1+\frac{2}{a}}{a+1} - \frac{1}{a}$ pour $a \neq -1$ et $a \neq 0$

Exercice 16 * Calculs et simplifications de puissances

a) $1-(-2)^3$

b) 5^2-4^3

c) $a^n \times a^{1-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^\star$

d) $\frac{a^{1+n}}{a^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$

e) $\frac{1}{a^n}+(b^2)^n a^{-n}+\frac{2b^n}{a^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}$

Exercice 17 * Calculs et simplifications de racines

a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

b) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$ si $a>0$

c) $\frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{15}}$

d) $\frac{\sqrt{507}}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2304}}$

f) $\ln(9\sqrt{576})$

g) $\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}-b}-\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}+b}$ si $\sqrt{a}-b$ et $\sqrt{a}+b$ sont non nuls.

h) $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}} \times \sqrt{a-\sqrt{2a-1}}$ pour a réel tel que : $a>1$.

Exercice 18 * Assertions vraies ou fausses ?

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x<2 \Rightarrow x^2<4$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2=4 \Rightarrow x=2$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est pair.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, 2^{n-1} \geqslant n+1$

Exercice 19 * Simplifier l'écriture des fonctions

Simplifier l'écriture des fonctions suivantes, en supposant qu'elles sont bien définies :

a) $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-2x-3}$

b) $f(x)=\frac{9x^2-9x+2}{(3x^2-16x+5)}$

c) $f(x)=\frac{1}{2x-6}-\frac{1}{x-3}$

d) $f(x)=\frac{x-1}{x-1-\frac{1}{x-1}}$

Exercice 20 * Encadrement de réels

Soit a, b, c trois nombres réels. Démontrer que :

a) $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

b) $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$

c) $3ab+3bc+3ac \leq (a+b+c)^2$

Exercice 21 * Équation racine et puissances

Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{x-2}=x$

b) $\sqrt{2x+3}=x$

c) $\sqrt{7x-10}=x$

d) $x^4-16x^2+64=0$

e) $x^3=-8$

f) $4x^2-20x+9=0$

Exercice 22 * Encadrements 1

Sachant que $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-3]$, encadrer :

a) $x+y$

b) $x-y$

c) xy

d) x/y

Exercice 23 * Encadrements 2

Sachant que $x \in [2, 5]$ et $y \in [-3, -2]$, encadrer :

a) $x + y$

b) $x - y$

c) xy

d) x/y

Exercice 24 * Encadrements 3

Sachant que $x \in [-5, -1]$ et $y \in [-3, -2]$, encadrer :

a) $x + y$

b) $x - y$

c) xy

d) x/y

Chapitre 2

Calculs et raisonnements - Sommes

2.1. Programme

— Calcul : symbole $\sum$, sommes usuelles, changement d'indice, simplification téléscopique, inégalité triangulaire, résolution d'équations et d'inéquations,

— Raisonnement : assertions, conditions, implication et équivalence. analyse-synthèse. Ordre des quantificateurs et preuve d'une énoncé quantifié.

2.2. Remarques

NB — Attention au changement de variable du type $j = 2k - 1$. Si k varie entre 1 et n, j ne prend pas toutes les valeurs entre 1 et $2n - 1$.

NB — Pour les somme avec $1/k$, penser au téléscopage.

2.3. Questions de cours

Exercice 25 Récurrences *(cours)*

a) Énoncer le principe de la méthode de démonstration par récurrence simple.

b) Préciser la différence avec les récurrences double et forte.

c) Démontrer par récurrence que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 26 Symbole $\sum$ *(cours)*

a) Donner le nom et expliquer le sens du symbole $\sum$ dans l'expression $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k$.

b) Comment appelle-t-on k et u_k ?

c) L'opérateur $\sum$ est-il linéaire ? Pourquoi ?

d) Démontrer par changement d'indice que $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 27 Relation de Chasles et identité triangulaire *(cours)*

a) Exprimer la relation de Chasles à l'aide de l'opérateur $\sum$.

b) Exprimer l'identité triangulaire à l'aide de l'opérateur $\sum$.

c) Démontrer par changement d'indice que $\sum\limits_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

2.4. Exercices

Exercice 28 * Sommes des impairs

Proposer deux manières différentes de démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est égale à $\frac{n}{3}(4n^2-1)$.

Exercice 29 * Sommes des produits des consécutifs

Proposer deux manières différentes de démontrer que la somme des n premiers produits consécutifs, c'est à dire $S_{12} = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n-1)$ est égale à $\frac{n}{3}(n-1)(n+1)$.

Exercice 30 * Inégalité et récurrence

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, 5^n + 5 < 5^{n+1}$.

b) Démontrer que $\forall n \geq 2, \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$

Exercice 31 * Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes :

a) $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{4k-1}{k(k^2-1)}$

b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3}{k+2}$

c) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (2^k + 4k + n - 3)$

d) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$

e) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (2^k - 1)^3$

f) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$

Exercice 32 * Changement d'indice

Calculer les sommes suivantes :

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$ (poser $j = k-1$)

b) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(\frac{k\pi}{2n})$ (poser $j = n-k$ puis faire apparaître S_n)

Exercice 33 * Démonstrations par récurrence

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.

b) Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 34 * Annuité constante

Soit c, a, i des réels positifs. On note $R_n = c(a-i)(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} R_n$

b) On suppose que $S_n = e$. Calculer a en fonction de i.

Exercice 35 * Analyse synthèse - fonctions

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m+n) = f(n) + f(m)$

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$

Chapitre 3

Calculs et raisonnements - Sommes et produits

3.1. Programme

— Calcul : symbole $\sum$, de produits $\prod$, sommes et produits usuels, changement d'indice, simplification téléscopique, inégalité triangulaire, résolution d'équations et d'inéquations,binôme de Newton

— Raisonnement : assertions, conditions, implication et équivalence. analyse-synthèse. Ordre des quantificateurs et preuve d'une énoncé quantifié.

3.2. Remarques

NB — Être très précis sur les indices !
NB — Connaître la petite relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

NB — Connaître la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

NB — Savoir appliquer la formule du binôme avec un entier p et 1 pour trouver le résultat d'une somme d'une puissance multipliée par un binôme : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k = (p+1)^n$

NB — Maîtriser les règles de calcul avec l'opérateur produit $\prod$. Bien les distinguer de celles de l'opérateur $\sum$.

3.3. Questions de cours

Exercice 36 Règles de calcul associées à l'opérateur $\prod$ *(cours)*

a) Donner la définition de l'expression $\prod\limits_{k=p}^{n} a_k$.

b) Que valent les expressions $\prod\limits_{k=p}^{n} 1$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} a$?

c) Définir $n!$ à l'aide de l'opérateur $\prod$.

d) Donner la relation de Chasles dans le cas de l'opérateur $\prod$.

e) Que vaut l'expression $\prod\limits_{k=p}^{n} a_k b_k$?

f) Que vaut l'expression $\prod\limits_{k=p}^{n} \lambda a_k$?

Exercice 37 Lien entre sommes et produits *(cours)*

a) Énoncer et démontrer la règle de calcul qui lie les opérateurs $\sum$ et $\prod$ et la fonction logarithme.

b) Énoncer et démontrer la règle de calcul qui lie les opérateurs $\sum$ et $\prod$ et la fonction exponentielle.

Exercice 38 Simplication téléscopique *(cours)*

Dans cet exercice, les deux démonstrations se feront de deux manières différentes, *in extenso* et par changement d'indice.

a) Énoncer et démontrer le principe de simplification téléscopique dans le cas de la somme.

b) Énoncer démontrer le principe de simplification téléscopique dans le cas du produit.

Exercice 39 Formule du binôme et preuve par récurrence *(cours)*

a) Énoncer la formule de Pascal et l'expliquer visuellement.

b) Énoncer la formule du binôme.

c) Démontrer la formule par récurrence. On procèdera avec un changement d'indice et en remarquant que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (formule de Pascal).

d) Donner un exemple d'utilisation de la formule du binôme pour simplifier une somme.

3.4. Exercices

Exercice 40 ** Somme et disjonction des cas

Soit la somme $S_N = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k k$. Calculer S_N en explicitant le type de raisonnement utilisé.

Exercice 41 * Lien produit-somme

Soit x un nombre réel non nul et le produit $P_n = \prod_{k=0}^{n} x^{k^2}$. Calculer P_n en explicitant les propriétés de calcul utilisées.

Exercice 42 ** Lien produit-somme et propriétés des produits

Soit le produit $P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{1-k^3}$. Calculer P_n en explicitant les propriétés de calcul utilisées.

Exercice 43 * Binôme et somme

Soit p un entier naturel différent de 0. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k$.

Exercice 44 ♠♠ Binôme - sommes - récurrences

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
Conseils :

a) Démonstration par récurrence.

b) Utiliser la formule de Pascal.

c) Faire apparaître l'hypothèse de la démonstration, l'autre partie va devoir être égale à $\frac{1}{n+1}$.

d) $\binom{n}{n+1} = 0$ car on ne peut pas choisir $n+1$ éléments parmi n.

e) $\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$

f) $\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = 0$

Exercice 45 ♠♠ Formule de Van Der Monde

Démontrer que : $\forall n, m, q \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$
. Dans un second temps, appliquer la formule aux sommes $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Conseils :

a) Démonstration par récurrence.

b) n est l'indice sur lequel porte la récurrence.

c) Initialisation avec $n = 0$. Se rappeler que $\binom{p}{q} = 0$ si $q > p$.

d) Pour l'hérédité, appliquer une première fois la formule de Pascal.

e) Faire un changement d'indice $j = k - 1$ et remarquer que pour $k = 0$ le terme est nul.

f) Appliquer l'hypothèse de récurrence à p et $p + 1$.

g) Appliquer une deuxième fois la formule de Pascal.

Exercice 46 ♠ Produit et téléscopages

Démontrer que : $P_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$. Conseils :

a) Réécrire $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$ en mettant $k - 1$ et $k + 1$ en facteur.

b) Simplifier par téléscopage.

c) Réécrire $k^2 + k + 1$ et $k^2 - k + 1$ en faisant apparaître $(k+1)^2$ et $(k-1)^2$.

d) Simplifer par téléscopage.

Chapitre 4

Fonctions usuelles

4.1. Programme

- Chapitre précédent
- Ensemble de définition, courbe représentative,
- Parité, périodicité, monotonie,
- Fonction majorée, minorée, bornée, extrema et extrema locaux,
- Fonctions usuelles : trinôme, racines, puissances, ln, exp, cos, sin, valeur absolue, puissance d'un réel et d'une fonction de réels.

4.2. Remarques

NB — Bien faire la différence entre majorant, minorant, bornes inférieure et supérieure et extrema.

4.3. Questions de cours

Exercice 47 Parité et périodicité *(cours)*

a) Définir la parité d'une fonction sur un ensemble de définition.

b) Quel lien peut-on faire entre la symétrie d'une courbe et la nature de sa parité ?

c) Donner un exemple de fonction pour chaque type de parité.

d) Définir le concept de fonction périodique.

e) Donner un exemple de fonction périodique.

f) Quel lien peut-on faire entre la translation d'une courbe et la périodicité ?

Exercice 48 Monotonie *(cours)*

a) Quand peut-on qualifier une fonction f de (strictement) monotone ?

b) Donner un exemple de fonction monotone.

c) Donner la définition d'une fonction strictement croissante sur I.

d) Existe-t-il des fonctions croissantes et décroissantes sur I simultanément ?

e) La somme de deux fonctions croissantes sur I est-elle croissante sur I ? Peut-on le démontrer ?

Exercice 49 Majorants et minorants *(cours)*

a) Définir le concept de fonction bornée.

b) Donner un exemple de fonction bornée.

c) Donner la définition d'un maximum et d'un maximum local.

d) Une fonction bornée possède-t-elle toujours un maximum et/ou un minimum ? Donner un exemple.

4.4. Exercices

Exercice 50 * Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(E) : \ln(x^2-1)+\ln(4)=\ln(4x-1)$

b) $(E) : 2^{x^2}=3^{x^3}$

c) $(E) : \ln \mid x-1 \mid + \ln \mid x-2 \mid = \ln \mid 4x^2+3x-7 \mid$

d) $(E) : x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$

e) $(E) : 2^{x+1}+4^x=15$

f) $(E) : 4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

g) $(E) : \frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\ln a}{\ln x}$ où $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

h) $(E) : \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$

Exercice 51 * Étude de fonctions

Pour les fonctions f suivantes, on suivra le protocole standard pour étudier une fonction, à savoir :

(i) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

(ii) Déterminer les symétries éventuelles de f : parité et périodicité.

(iii) Déterminer la dérivabilité de f, zéros et infinis de f pour les tangentes.

(iv) Compléter un tableau de variation de f qui comporte : les bornes de $\mathcal{D}_f$, les coupures dans $\mathcal{D}_f$ où f n'est pas définie, les points clefs de f', le signe de f' et les variations de f avec les valeurs limites au bout des flèches.

(v) Déterminer quelques points marquant de f, les zéros par exemple.

(vi) Étudier les asymptotes de f.

(vii) Tracer l'allure du graphe de f avec tous les éléments.

a) $f(x)=\frac{1}{1-e^x}$

b) $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$

c) $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}$

d) $f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$

e) $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$

f) $f(x)=\sin(3\pi x)$

g) $f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}-\cos(\pi x)}$

h) $f(x)=\frac{cos(\pi x)}{\frac{1}{2}-\cos(\pi x)}$

Exercice 52 * Extrema de fonctions

Pour chacun de ces ensembles, montrer :

— s'il est minoré, majoré,

— s'il possède une borne inférieure ou supérieure,

— s'il possède un extremum.

a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}$

c) $E = [0, 1[$

d) $E = \{x \in \mathbb{R}, \exists (n, m) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\}$

e) $E = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^\star\}$

f) $E = \{sin(\frac{n\pi}{3}), n \in \mathbb{N}^\star\}$

g) $E = [-1, +\infty[$

h) $E = \{x^2 - 2x - 1 < 0, x \in \mathbb{R}\}$

i) $E = \{(x-1)^2 - 2, x \in \mathbb{R}\}$

j) $E = \{sin(\frac{\pi}{x}), x \in]0, 2]\}$

k) $E = \{\frac{1}{1+x^2}, x \in [-1, 1]\}$

Chapitre 5

Nombres complexes et trigonométrie

5.1. Programme

— Nombres complexes, opérations, interprétation géométrique.

— Conjugué et module,

— Trigonométrie : cos, sin et tan, formules d'addition, valeurs remarquables, résolution d'équations trigonométriques.

— Notation exponentielle : forme trigonométrique d'un nombre complexe.

— Condition d'égalité.

— Argument.

— Formules de Moivre et d'Euler.

5.2. Démonstrations à connaître

— inégalité triangulaire,

— formule tan(a + b) =

— formule de Moivre par récurrence

5.3. Remarques

5.4. Questions de cours

Exercice 53 * Formes d'un nombre complexe *(cours)*

a) Définir les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.

b) Définir en particulier le nombre i.

c) Comment peut-on spécifier que deux nombres complexes sont égaux ?

d) Comment peut-on dire qu'un nombre complexe est nul ?

Exercice 54 Conjugué d'une nombre complexe *(cours)*

a) Définir le conjugué d'un nombre complexe.

b) Illustrer le concept de conjugué dans le plan complexe.

c) Énoncer les relations entre un nombre complexe et son conjugué d'une part et la partie réelle et imaginaire de ce nombre d'autre part.

d) Énoncer la relation entre un nombre complexe et son conjugué d'une part et le module de son nombre d'autre part.

Exercice 55 Module d'un nombre complexe *(cours)*

a) Définir le module d'un nombre complexe

b) Illustrer graphiquement le concept de module sur le plan complexe.

c) Expliciter les liens entre le module d'une nombre complexe et ses différentes formes (algébrique et exponentielle).

d) Définir l'ensemble des nombres complexe de module égal à 1. Illustrer graphiquement cet ensemble.

Exercice 56 Fonctions cosinus et sinus *(cours)*

a) Définir quelques valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus, numériquement et graphiquement.

b) Énoncer la formule fondamentale qui relie sinus et cosinus.

c) Quelle est la parité de ces fonctions ?

d) Quelle est la périodicité de ces fonctions ?

e) Tracer le graphique de ces fonctions.

Exercice 57 Fonction tangente *(cours)*

a) Définir la fonction tangente.

b) Quelle est la parité de cette fonction ?

c) Quelle est la périodicité de cette fonction ?

d) Tracer la fonction.

e) Que vaut $tan(\frac{\pi}{2} - a)$ si l'expression est définie ?

Exercice 58 Racines nièmes *(cours)*

a) Définir le cercle unité dans le plan complexe et sous la forme d'un ensemble.

b) Étabir le lien entre le cercle unité et la notation exponentielle complexe.

c) Placer $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sur le plan complexe.

5.5. Exercices

Exercice 59 * Assertions justes ou fausses ? *(cours)*

a) i est égal à sa partie imaginaire.

b) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, (z + z' \in \mathbb{R} \wedge z.z' \in \mathbb{R} \Longrightarrow z, z' \in \mathbb{R})$

c) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, (z + iz' = 0 \Longrightarrow z = z' = 0)$

d) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = -1 \Longrightarrow z = i\pi$

Exercice 60 * Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$

b) $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$

c) $\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = -1$

d) $\cos(x) + \sin(x) = 1$

Exercice 61 *** Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $4z^2 + 4z + 5 = 0$

b) $2z^2 + 6z + 9 = 0$

c) $z^2 + z - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i = 0$

d) $2z^2 - (9i + 1)z - 7 + 11i = 0$

Exercice 62 ** Déterminer les ensembles

a) $\{z \in \mathbb{C}, \mid z - 1 \mid = \mid z - i \mid\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}, \mid z \mid = \mid \frac{1}{z} \mid = \mid 1 - z \mid\}$

Exercice 63 * Transformer le nombre complexe sous une autre forme

a) $\sqrt{3} - i$

b) $1 - i$

c) (algébrique) $(\sqrt{2} - i)^4$

d) (algébrique) $(\sqrt{2} - i)^3$

e) $(1 + i)^6$

f) (trigonométrique) $(1 + \tan\theta)^2, \theta \in \mathbb{R}$.