

Colle de mathématiques

Olivier Reynet

18 novembre 2020

Exercice 1 Propriétés de la fonction partie entière

- a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- b) Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$. Conclure en prenant la négation.

Exercice 2 Étude d'une fonction

Pour la fonction f suivante, on suivra le protocole standard pour étudier une fonction, à savoir :

- (i) Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f .
- (ii) Déterminer les symétries éventuelles de f : parité et périodicité.
- (iii) Déterminer la dérivabilité de f , zéros et infinis de f pour les tangentes.
- (iv) Compléter un tableau de variation de f qui comporte : les bornes de \mathcal{D}_f , les coupures dans \mathcal{D}_f où f n'est pas définie, les points clefs de f' , le signe de f' et les variations de f avec les valeurs limites au bout des flèches.
- (v) Déterminer quelques points marquant de f , les zéros par exemple.
- (vi) Étudier les asymptotes de f .
- (vii) Tracer l'allure du graphe de f avec tous les éléments.

$$f(x) = \ln |x| + x^3$$

Exercice 3 Dé à 20 faces

On dispose de 3 dés identiques à vingt faces et on les lance simultanément dans le but de disposer de 3 notes de colle.

- a) Combien y-a-t-il de lancers possibles ?
- b) Combien y-a-t-il de lancers possibles tels que tous les dés présentent une valeur supérieure ou égale à 10 ?
- c) Combien y-a-t-il de lancers possibles tels que deux dés exactement présentent une valeur identique ?
- d) Combien y-a-t-il de lancers possibles tels que les dés présentent les valeurs 17, 9 et 3 ?