

Colle de mathématiques

Olivier Reynet

18 novembre 2020

Exercice 1 Sommes et racines nièmes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et ω une racine nième de l'unité vérifiant $\omega^n = 1$. Calculer :

- a) $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i$
- b) $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ip}, p \in \mathbb{Z}$
- c) $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \omega^i$

Exercice 2 Résolution d'équation dans \mathbb{C}

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2ie^{i\alpha} \sin(\alpha) = 0$$

Exercice 3 Propriétés de la fonction partie entière

- a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n$.
- b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- c) Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$. Conclure en prenant la négation.