# Mathématiques CPGE EC

Exercices de révision pour les colles.

**Contributeurs :** *Elsa Mayrand, Benjamin Ponge, Olivier Reynet*

– Document version :

# Table des matières

# Chapitre 1

# Calculs et raisonnements - bases

## 1.1. Programme

- Révisions de calcul : fractions, puissances, racine carrée, fonction trinôme. Valeur absolue. Manipulations d'inégalités.
- Raisonnement : assertions, conditions, implication et équivalence. Résolution d'équations et d'inéquations, analyse-synthèse. Quantificateurs et preuve d'une énoncé quantifié.

## 1.2. Remarques

NB — On peut donner une définition de l'implication à l'aide de la notion de condition ou à l'aide de la négation combinée à la disjonction : « non P ou Q» ou encore $\neg P \wedge Q$.

NB — Le principe de déduction s'énonce ainsi : si $P$ est vraie et que $P \Rightarrow Q$ alors $Q$ est vraie.

NB — Insister sur le fait qu'on peut démontrer l'équivalence par la démonstration des deux implications réciproques, parfois moins risqué que l'enchaînement d'équivalences non maîtrisées. Parfois le raisonnement direct par équivalence n'est tout simplement pas possible. . .

NB — Un exemple simple d'équivalence est l'usage d'une identité remarquable pour résoudre une équation par factorisation. $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

NB — Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode constructive qui permet parfois de prouver l'unicité en même temps que l'existence d'une solution, même si ce n'est pas généralement le cas.

NB — Faire remarquer que la phase d'analyse permet de trouver les conditions nécessaires pour caractériser les solutions d'une problème, alors que la phase de synthèse permet de vérifier que ces conditions obtenues sont également suffisantes.

NB — On peut faire remarquer qu'une prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend des variables quantifiées.

## 1.3. Questions de cours

**Exercice 1** Puissances *(cours)*

Soit $a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}^\star$ , $n \in \mathbb{N}^\star$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$. Quelles règles peut-on utiliser pour calculer les expressions suivantes :

a) $a^n \times a^m$ b) $\frac{a^n}{a^m}$ c) $(a^n)^m$

d) $a^n b^n$ e) $\frac{a^n}{b^n}$

**Exercice 2** Racines n-ièmes et rationnels *(cours)*

a) Donner la définition d'une racine n-ième.

b) Soit $r$ un nombre rationnel. Peut-on définir $x^r$ si pour tout $x$ ?

c) Pourquoi ? Donner un exemple.

**Exercice 3** Identités remarquables (cours)

a) Énoncer trois identités remarquables.

b) À quoi cela peut-il servir concrètement ? Donner un exemple.

**Exercice 4** Fonction trinôme (cours)

Soit $a$,$b$ et $c$ trois réels et l'équation $(E)$ : $ax^2 + bx + c = 0$

a) Cette équation a-t-elle toujours des solutions dans $\mathbb{R}$ ?

b) Donner la forme des solutions de cette équation ainsi que les factorisations résultant de la résolution. Sont-elles valables pour une inconnue $z \in \mathbb{C}$ ?

**Exercice 5** Signe de la fonction trinôme (cours)

Soit $a$,$b$ et $c$ trois réels et $a > 0$. On s'intéresse au signe de $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $x_1 < x_2$.

a) Discuter le signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de la valeur de $x$ lorsque $x$ est réel.

b) Peut-on généraliser une règle pour le signe ?

**Exercice 6** Définition de valeur absolue (cours)

Soit $a$ un nombre réel.

a) Donner la définition de la valeur absolue de $a$.

b) Donner une représentation graphique de $\mid b - a \mid$, si $a$ et $b$ sont des réels.

c) Discuter les propriétés de la valeur absolue en lien avec les opérateurs addition, multiplication et puissance.

d) Qu'est que l'inégalité triangulaire ?

**Exercice 7** Inégalité et valeur absolue (cours)

Soit $a$ un nombre réel positif et $x$ un nombre réel. Donner une formulation équivalente aux inégalités suivantes :

a) $\mid x \mid \leqslant a$

b) $\mid x \mid < a$

c) $\mid x \mid \geqslant a$

d) Qu'est que l'inégalité triangulaire ?

**Exercice 8** Assertion (proposition) et condition (cours)

a) Qu'est-ce qu'une assertion ou proposition ?

b) Donner un exemple.

c) L'expression mathématique $x^2 < x^3$ est-elle une assertion ?

d) Quelle est la différence entre une condition et une assertion ?

e) Donner un exemple de condition.

**Exercice 9** Implication (cours)

a) Donner la définition d'une implication.
b) Donner un exemple.
c) Comment peut-on démontrer une implication ?
d) Démontrer l'implication suivante : «si $x+1 \in \mathbb{Q}$, alors $x \in \mathbb{Q}$».

**Exercice 10** Equivalence (cours)

a) Donner la définition d'une équivalence, sa formulation en français et son écriture mathématique.
b) Donner un exemple.
c) Comment peut-on démontrer une équivalence ?
d) Démontrer l'équivalence suivante pour deux réels $x$ et $y$ : $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

**Exercice 11** Analyse-synthèse (cours)

a) Expliquer le principe du raisonnement par analyse- synthèse.
b) Détailler la phase d'analyse : à quoi sert-elle ?
c) Détailler la phase de synthèse : à quoi sert-elle ?
d) Trouver l'ensemble de solutions $\mathcal{S}$ de l'équation suivante :$(E)$ : $\sqrt{x+1} - x = 0$

**Exercice 12** Quantification (cours)

a) Donner le nom et la signification des différents quantificateurs.
b) Où doit-on placer le quantificateur par rapport à la variable qu'il quantifie ?
c) Une assertion quantifiée est-elle toujours vraie ?
d) Donner un exemple d'assertion quantifiée pour chaque quantificateur.

**Exercice 13** Ordre des quantificateurs (cours)

a) Donner le nom et la signification des différents quantificateurs.
b) Énoncer les règles qui permettent d'intervertir (ou pas) les quantificateurs dans un énoncé.
c) Donner un exemple et un contre-exemple pour chaque cas.

**Exercice 14** Preuve d'unicité et d'existence (cours)

Soit l'assertion $\mathcal{B}$ : $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$

a) En règle générale, comment doit-on procéder pour prouver cette assertion ?
b) Dans quels cas cela peut-il être plus simple ?
c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \exists! t \in \mathbb{R}, e^t = x$

---

## 1.4. Exercices

**Exercice 15 *** Simplifier les fractions

a) $\frac{7}{21} \times \frac{12}{42}$
b) $1 - \frac{a}{1+a}$ pour $a \neq -1$
c) $\frac{1}{a-1} - \frac{a}{1-a}$ pour $\mid a \mid \neq 1$
d) $\frac{a-1+\frac{2}{a}}{a+1} - \frac{1}{a}$ pour $a \neq -1$ et $a \neq 0$

**Exercice 16 *** Calculs et simplifications de puissances

a) $1-(-2)^3$

b) $5^2-4^3$

c) $a^n \times a^{1-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^\star$

d) $\frac{a^{1+n}}{a^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$

e) $\frac{1}{a^n}+(b^2)^n a^{-n}+\frac{2b^n}{a^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}$

**Exercice 17 *** Calculs et simplifications de racines

a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

b) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$ si $a>0$

c) $\frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{15}}$

d) $\frac{\sqrt{507}}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2304}}$

f) $\ln(9\sqrt{576})$

g) $\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}-b}-\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}+b}$ si $\sqrt{a}-b$ et $\sqrt{a}+b$ sont non nuls.

h) $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}} \times \sqrt{a-\sqrt{2a-1}}$ pour $a$ réel tel que : $a>1$.

**Exercice 18 *** Assertions vraies ou fausses ?

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x<2 \Rightarrow x^2<4$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2=4 \Rightarrow x=2$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est pair.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, 2^{n-1} \geqslant n+1$

**Exercice 19 *** Simplifier l'écriture des fonctions

Simplifier l'écriture des fonctions suivantes, en supposant qu'elles sont bien définies :

a) $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-2x-3}$

b) $f(x)=\frac{9x^2-9x+2}{(3x^2-16x+5)}$

c) $f(x)=\frac{1}{2x-6}-\frac{1}{x-3}$

d) $f(x)=\frac{x-1}{x-1-\frac{1}{x-1}}$

**Exercice 20 *** Encadrement de réels

Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres réels. Démontrer que :

a) $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

b) $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$

c) $3ab+3bc+3ac \leq (a+b+c)^2$

**Exercice 21 *** Équation racine et puissances

Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{x-2}=x$

b) $\sqrt{2x+3}=x$

c) $\sqrt{7x-10}=x$

d) $x^4-16x^2+64=0$

e) $x^3=-8$

f) $4x^2-20x+9=0$

**Exercice 22 *** Encadrements 1

Sachant que $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-3]$, encadrer :

a) $x+y$

b) $x-y$

c) $xy$

d) $x/y$

**Exercice 23 *** Encadrements 2

Sachant que $x \in [2,5]$ et $y \in [-3,-2]$, encadrer :

a) $x+y$

b) $x-y$

c) $xy$

d) $x/y$

**Exercice 24 *** Encadrements 3

Sachant que $x \in [-5,-1]$ et $y \in [-3,-2]$, encadrer :

a) $x+y$

b) $x-y$

c) $xy$

d) $x/y$

# Chapitre 2

# Calculs et raisonnements - Sommes

## 2.1. Programme

— Calcul : symbole $\sum$, sommes usuelles, changement d'indice, simplification téléscopique, inégalité triangulaire, résolution d'équations et d'inéquations,

— Raisonnement : assertions, conditions, implication et équivalence. analyse-synthèse. Ordre des quantificateurs et preuve d'une énoncé quantifié.

## 2.2. Remarques

NB — Attention au changement de variable du type $j = 2k - 1$. Si $k$ varie entre 1 et $n$, $j$ ne prend pas toutes les valeurs entre 1 et $2n - 1$.

NB — Pour les somme avec $1/k$, penser au téléscopage.

## 2.3. Questions de cours

**Exercice 25** Récurrences *(cours)*

a) Énoncer le principe de la méthode de démonstration par récurrence simple.

b) Préciser la différence avec les récurrences double et forte.

c) Démontrer par récurrence que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Exercice 26** Symbole $\sum$ *(cours)*

a) Donner le nom et expliquer le sens du symbole $\sum$ dans l'expression $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k$.

b) Comment appelle-t-on $k$ et $u_k$ ?

c) L'opérateur $\sum$ est-il linéaire ? Pourquoi ?

d) Démontrer par changement d'indice que $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

**Exercice 27** Relation de Chasles et identité triangulaire *(cours)*

a) Exprimer la relation de Chasles à l'aide de l'opérateur $\sum$.

b) Exprimer l'identité triangulaire à l'aide de l'opérateur $\sum$.

c) Démontrer par changement d'indice que $\sum\limits_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

---

## 2.4. Exercices

**Exercice 28 *** Sommes des impairs

Proposer deux manières différentes de démontrer que la somme des $n$ premiers nombres impairs est égale à $\frac{n}{3}(4n^2-1)$.

**Exercice 29 *** Sommes des produits des consécutifs

Proposer deux manières différentes de démontrer que la somme des $n$ premiers produits consécutifs, c'est à dire $S_{12} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n-1)$ est égale à $\frac{n}{3}(n-1)(n+1)$.

**Exercice 30 *** Inégalité et récurrence

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, 5^n + 5 < 5^{n+1}$.

b) Démontrer que $\forall n \geq 2, \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$

**Exercice 31 *** Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes :

a) $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{4k-1}{k(k^2-1)}$

b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3}{k+2}$

c) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (2^k + 4k + n - 3)$

d) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$

e) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (2^k - 1)^3$

f) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$

g) $\sum_{k=-5}^{15} k(10-k)$ ;

h) $\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$ ;

i) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$.

**Exercice 32 *** Changement d'indice

Calculer les sommes suivantes :

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$ (poser $j = k-1$)

b) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(\frac{k\pi}{2n})$ (poser $j = n-k$ puis faire apparaître $S_n$)

**Exercice 33 *** Démonstrations par récurrence

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.

b) Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

**Exercice 34 *** Annuité constante

Soit $c$, $a$, $i$ des réels positifs. On note $R_n = c(a-i)(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} R_n$

b) On suppose que $S_n = e$. Calculer $a$ en fonction de $i$.

**Exercice 35 *** Analyse synthèse - fonctions

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m+n) = f(n) + f(m)$

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$

**Exercice 36 **** Simplifier les sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $S_n$ suivante en fonction de $n$ :

a) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} 3 \times 4^{k+1}$

b) $S_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} k$

## Chapitre 3

# Calculs et raisonnements - Sommes et produits

---

## 3.1. Programme

- Calcul : symbole $\sum$, de produits $\prod$, sommes et produits usuels, changement d'indice, simplification téléscopique, inégalité triangulaire, résolution d'équations et d'inéquations,binôme de Newton
- Raisonnement : assertions, conditions, implication et équivalence. analyse-synthèse. Ordre des quantificateurs et preuve d'une énoncé quantifié.

---

## 3.2. Remarques

NB — Être très précis sur les indices !
NB — Connaître la petite relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

NB — Connaître la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

NB — Savoir appliquer la formule du binôme avec un entier $p$ et 1 pour trouver le résultat d'une somme d'une puissance multipliée par un binôme : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k = (p+1)^n$

NB — Maîtriser les règles de calcul avec l'opérateur produit $\prod$. Bien les distinguer de celles de l'opérateur $\sum$.

---

## 3.3. Questions de cours

**Exercice 37** Règles de calcul associées à l'opérateur $\prod$ *(cours)*

a) Donner la définition de l'expression $\prod\limits_{k=p}^{n} a_k$.

b) Que valent les expressions $\prod\limits_{k=p}^{n} 1$ et $\prod\limits_{k=p}^{n} a$ ?

c) Définir $n!$ à l'aide de l'opérateur $\prod$.

d) Donner la relation de Chasles dans le cas de l'opérateur $\prod$.

e) Que vaut l'expression $\prod\limits_{k=p}^{n} a_k b_k$ ?

f) Que vaut l'expression $\prod\limits_{k=p}^{n} \lambda a_k$ ?

**Exercice 38** Lien entre sommes et produits *(cours)*

a) Énoncer et démontrer la règle de calcul qui lie les opérateurs $\sum$ et $\prod$ et la fonction logarithme.

b) Énoncer et démontrer la règle de calcul qui lie les opérateurs $\sum$ et $\prod$ et la fonction exponentielle.

**Exercice 39** Simplication téléscopique *(cours)*

Dans cet exercice, les deux démonstrations se feront de deux manières différentes, *in extenso* et par changement d'indice.

a) Énoncer et démontrer le principe de simplification téléscopique dans le cas de la somme.

b) Énoncer démontrer le principe de simplification téléscopique dans le cas du produit.

**Exercice 40** Formule du binôme et preuve par récurrence *(cours)*

a) Énoncer la formule de Pascal et l'expliquer visuellement.

b) Énoncer la formule du binôme.

c) Démontrer la formule par récurrence. On procèdera avec un changement d'indice et en remarquant que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (formule de Pascal).

d) Donner un exemple d'utilisation de la formule du binôme pour simplifier une somme.

---

## 3.4. Exercices

**Exercice 41** ** Somme et disjonction des cas

Soit la somme $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} (-1)^k k$. Calculer $S_N$ en explicitant le type de raisonnement utilisé.

**Exercice 42** * Lien produit-somme

Soit $x$ un nombre réel non nul et le produit $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} x^{k^2}$. Calculer $P_n$ en explicitant les propriétés de calcul utilisées.

**Exercice 43** ** Lien produit-somme et propriétés des produits

Soit le produit $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} 2^{1-k^3}$. Calculer $P_n$ en explicitant les propriétés de calcul utilisées.

**Exercice 44** ** Simplifier les sommes et les produits

a) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

b) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

**Exercice 45** ** Simplification et factorielle

Simplifier les expressions :

a) $\prod_{j=3}^{n} (2j)$

b) $\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{n+k}\right)$

**Exercice 46 *** Binôme et somme

Soit $p$ un entier naturel différent de 0. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k$.

**Exercice 47 ♠♠** Binôme - sommes - récurrences

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Conseils :

a) Démonstration par récurrence.

b) Utiliser la formule de Pascal.

c) Faire apparaître l'hypothèse de la démonstration, l'autre partie va devoir être égale à $\frac{1}{n+1}$.

d) $\binom{n}{n+1} = 0$ car on ne peut pas choisir $n+1$ éléments parmi $n$.

e) $\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$

f) $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 0$

**Exercice 48 ♠♠** Formule de Van Der Monde

Démontrer que : $\forall n, m, q \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

. Dans un second temps, appliquer la formule aux sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Conseils :

a) Démonstration par récurrence.

b) $n$ est l'indice sur lequel porte la récurrence.

c) Initialisation avec $n = 0$. Se rappeler que $\binom{p}{q} = 0$ si $q > p$.

d) Pour l'hérédité, appliquer une première fois la formule de Pascal.

e) Faire un changement d'indice $j = k - 1$ et remarquer que pour $k = 0$ le terme est nul.

f) Appliquer l'hypothèse de récurrence à $p$ et $p + 1$.

g) Appliquer une deuxième fois la formule de Pascal.

**Exercice 49 ♠** Somme et télescopages

Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}.$$

En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

**Exercice 50** ♠ Produit et télescopages

Démontrer que : $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$. Conseils :

a) Réécrire $k^3-1$ et $k^3+1$ en mettant $k-1$ et $k+1$ en facteur.

b) Simplifier par télescopages.

c) Réécrire $k^2+k+1$ et $k^2-k+1$ en faisant apparaître $(k+1)^2$ et $(k-1)^2$.

d) Simplifer par télescopage.

**Exercice 51** ♠ Produit et binôme

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

a) Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-n)$ ?

b) Démontrer que pour tout réel non-nul $x$, on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

c) Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme, c'est à dire de la forme $\binom{a}{b}$ où $a$ et $b$ sont deux entiers positifs.

d) Calculer $P_n$.

**Exercice 52** ♠ Somme et factorielles

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$$

.

# Chapitre 4

# Fonctions usuelles

## 4.1. Programme

— Chapitre précédent
— Ensemble de définition, courbe représentative,
— Parité, périodicité, monotonie,
— Fonction majorée, minorée, bornée, extrema et extrema locaux,
— Fonctions usuelles : trinôme, racines, puissances, ln, exp, cos, sin, valeur absolue, puissance d'un réel et d'une fonction de réels.

## 4.2. Remarques

NB — Bien faire la différence entre majorant, minorant, bornes inférieure et supérieure et extrema.

## 4.3. Questions de cours

**Exercice 53** Parité et périodicité *(cours)*

a) Définir la parité d'une fonction sur un ensemble de définition.
b) Quel lien peut-on faire entre la symétrie d'une courbe et la nature de sa parité ?
c) Donner un exemple de fonction pour chaque type de parité.
d) Définir le concept de fonction périodique.
e) Donner un exemple de fonction périodique.
f) Quel lien peut-on faire entre la translation d'une courbe et la périodicité ?

**Exercice 54** Monotonie *(cours)*

a) Quand peut-on qualifier une fonction $f$ de (strictement) monotone ?
b) Donner un exemple de fonction monotone.
c) Donner la définition d'une fonction strictement croissante sur I.
d) Existe-t-il des fonctions croissantes et décroissantes sur I simultanément ?
e) La somme de deux fonctions croissantes sur I est-elle croissante sur I ? Peut-on le démontrer ?

**Exercice 55** Majorants et minorants *(cours)*

a) Définir le concept de fonction bornée.

b) Donner un exemple de fonction bornée.

c) Donner la définition d'un maximum et d'un maximum local.

d) Une fonction bornée possède-t-elle toujours un maximum et/ou un minimum ? Donner un exemple.

---

## 4.4. Exercices

**Exercice 56 *** Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(E) : \ln(x^2-1)+\ln(4)=\ln(4x-1)$

b) $(E) : 2^{x^2}=3^{x^3}$

c) $(E) : \ln\mid x-1\mid+\ln\mid x-2\mid=\ln\mid 4x^2+3x-7\mid$

d) $(E) : x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$

e) $(E) : 2^{x+1}+4^x=15$

f) $(E) : 4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

g) $(E) : \frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\ln a}{\ln x}$ où $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

h) $(E) : \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$

**Exercice 57 *** Étude de fonctions

Pour les fonctions $f$ suivantes, on suivra le protocole standard pour étudier une fonction, à savoir :

(i) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

(ii) Déterminer les symétries éventuelles de $f$ : parité et périodicité.

(iii) Déterminer la dérivabilité de $f$, zéros et infinis de $f$ pour les tangentes.

(iv) Compléter un tableau de variation de $f$ qui comporte : les bornes de $\mathcal{D}_f$, les coupures dans $\mathcal{D}_f$ où $f$ n'est pas définie, les points clefs de $f'$, le signe de $f'$ et les variations de $f$ avec les valeurs limites au bout des flèches.

(v) Déterminer quelques points marquant de $f$, les zéros par exemple.

(vi) Étudier les asymptotes de $f$.

(vii) Tracer l'allure du graphe de $f$ avec tous les éléments.

a) $f(x)=\ln\mid x\mid+x^2$

b) $f(x)=\ln\mid x\mid+x^3$

c) $f(x)=e^{|x|}+x^2$

d) $f(x)=\ln(x)-\sqrt{x}+1$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

f) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$

g) $f(x)=\frac{1}{1-e^x}$

h) $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$

i) $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}$

j) $f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$

k) $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$

l) $f(x)=\sin(3\pi x)$

m) $f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}-\cos(\pi x)}$

n) $f(x)=\frac{cos(\pi x)}{\frac{1}{2}-\cos(\pi x)}$

**Exercice 58 *** Extrema de fonctions

Pour chacun de ces ensembles, montrer :

— s'il est minoré, majoré,

— s'il possède une borne inférieure ou supérieure,

— s'il possède un extremum.

a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}$

c) $E = [0, 1[$

d) $E = \{x \in \mathbb{R}, \exists (n, m) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\}$

e) $E = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^\star\}$

f) $E = \{sin(\frac{n\pi}{3}), n \in \mathbb{N}^\star\}$

g) $E = [-1, +\infty[$

h) $E = \{x^2 - 2x - 1 < 0, x \in \mathbb{R}\}$

i) $E = \{(x - 1)^2 - 2, x \in \mathbb{R}\}$

j) $E = \{sin(\frac{\pi}{x}), x \in ]0, 2]\}$

k) $E = \{\frac{1}{1+x^2}, x \in [-1, 1]\}$

**Exercice 59** Études des bornes d'ensembles

a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}$

c) $E = [0, 1[$

d) $E = \{x \in \mathbb{R}, \exists (n, m) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\}$

e) $E = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^\star\}$

f) $E = \{sin(\frac{n\pi}{3}), n \in \mathbb{N}^\star\}$

g) $E = [-1, +\infty[$

h) $E = \{x^2 - 2x - 1 < 0, x \in \mathbb{R}\}$

i) $E = \{(x - 1)^2 - 2, x \in \mathbb{R}\}$

j) $E = \{sin(\frac{\pi}{x}), x \in ]0, 2]\}$

k) $E = \{\frac{1}{1+x^2}, x \in [-1, 1]\}$

**Exercice 60 *** Propriétés de la fonction partie entière

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

c) Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \lfloor nx \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor$. Conclure en prenant la négation.

**Exercice 61 *** Racine carrée et partie entière

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

**Exercice 62 *** Partie entière et disjonction des cas

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

# Chapitre 5

# Ensembles et raisonnements

## 5.1. Questions de cours

## 5.2. Exercices

**Exercice 63** Inclusion et intersection

Si $X, Y$ et $Z$ sont des parties quelconques d'un ensemble $E$. Montrer que $X \subset Y \Rightarrow X \cap Z \subset Y \cap Z$.

**Exercice 64** Inclusion et intersection

On pose $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $A = \{0, 1, 2, 5\}$ et $B = \{0, 3, 8\}$

a) Déterminer $\overline{A}$

b) Déterminer $\overline{B}$

c) Déterminer $A \cap B$

d) Déterminer $A \cup \overline{B}$

e) Déterminer $A \setminus B$

**Exercice 65** Absurde

a) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

c) Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

**Exercice 66** Contraposition

a) Montrer que si $n$ est impair alors $n + 1$ l'est aussi (directement et par contraposition).

b) Montrer que si $3n$ est impair, alors $n$ est impair.

c) Montrer que si le produit de deux entiers $nm$ est impar, alors $n$ et $m$ sont impairs.

d) Montrer que $(\forall \epsilon > 0, \mid a \mid < \epsilon) \Rightarrow a = 0)$

e) Soit $n_1, n_2, \ldots, n_9 \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{9} n_i = 90$. Montrer qu'il existe 3 entiers $n_i$ dont la somme est supérieur ou égale à 30. On supposera que ces entiers sont ordonnés par leur indice (i.e. $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_9$).

**Exercice 67** Disjonction des cas

a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \mid xy \mid = \mid x \mid \mid y \mid$.

**Exercice 68** Récurrence

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

b) Soit $x$ un réel tel que $x > -1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

c) On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \geqslant n$.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geqslant n+1$.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

f) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant n+1$.

# Chapitre 6

# Nombres complexes et trigonométrie

## 6.1. Programme

- Nombres complexes, opérations, interprétation géométrique.
- Conjugué et module,
- Trigonométrie : cos, sin et tan, formules d'addition, valeurs remarquables, résolution d'équations trigonométriques.
- Notation exponentielle : forme trigonométrique d'un nombre complexe.
- Condition d'égalité.
- Argument.
- Formules de Moivre et d'Euler.

## 6.2. Démonstrations à connaître

- inégalité triangulaire,
- formule tan(a + b) =
- formule de Moivre par récurrence

## 6.3. Remarques

## 6.4. Questions de cours

**Exercice 69** Formes d'un nombre complexe *(cours)*

a) Définir les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.

b) Définir en particulier le nombre $i$.

c) Comment peut-on spécifier que deux nombres complexes sont égaux ?

d) Comment peut-on dire qu'un nombre complexe est nul ?

**Exercice 70** Conjugué d'une nombre complexe *(cours)*

a) Définir le conjugué d'un nombre complexe.

b) Illustrer le concept de conjugué dans le plan complexe.

c) Énoncer les relations entre un nombre complexe et son conjugué d'une part et la partie réelle et imaginaire de ce nombre d'autre part.

d) Énoncer la relation entre un nombre complexe et son conjugué d'une part et le module de son nombre d'autre part.

**Exercice 71** Module d'un nombre complexe *(cours)*

a) Définir le module d'un nombre complexe

b) Illustrer graphiquement le concept de module sur le plan complexe.

c) Expliciter les liens entre le module d'une nombre complexe et ses différentes formes (algébrique et exponentielle).

d) Définir l'ensemble des nombres complexe de module égal à 1. Illustrer graphiquement cet ensemble.

**Exercice 72** Fonctions cosinus et sinus *(cours)*

a) Définir quelques valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus, numériquement et graphiquement.

b) Énoncer la formule fondamentale qui relie sinus et cosinus.

c) Quelle est la parité de ces fonctions ?

d) Quelle est la périodicité de ces fonctions ?

e) Tracer le graphique de ces fonctions.

**Exercice 73** Fonction tangente *(cours)*

a) Définir la fonction tangente.

b) Quelle est la parité de cette fonction ?

c) Quelle est la périodicité de cette fonction ?

d) Tracer la fonction.

e) Que vaut $tan(\frac{\pi}{2} - a)$ si l'expression est définie ?

**Exercice 74** Racines nièmes *(cours)*

a) Définir le cercle unité dans le plan complexe et sous la forme d'un ensemble.

b) Étabir le lien entre le cercle unité et la notation exponentielle complexe.

c) Placer $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sur le plan complexe.

## 6.5. Exercices

**Exercice 75 *** Assertions justes ou fausses ?

a) $i$ est égal à sa partie imaginaire.

b) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, (z + z' \in \mathbb{R} \wedge z.z' \in \mathbb{R} \Longrightarrow z, z' \in \mathbb{R})$

c) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, (z + iz' = 0 \Longrightarrow z = z' = 0)$

d) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = -1 \Longrightarrow z = i\pi$

**Exercice 76 *** Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$

b) $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$

c) $\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = -1$

d) $\cos(x) + \sin(x) = 1$

**Exercice 77 ***** Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $4z^2 + 4z + 5 = 0$

b) $2z^2 + 6z + 9 = 0$

c) $z^2 + z - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i = 0$

d) $2z^2 - (9i + 1)z - 7 + 11i = 0$

e) $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2ie^{i\alpha}\sin(\alpha) = 0$

f) $2z^3 - (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 2i = 0$ sachant qu'elle possède une racine imaginaire pure.

**Exercice 78 **** Déterminer les ensembles

a) $\{z \in \mathbb{C}, \mid z - 1 \mid = \mid z - i \mid\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}, \mid z \mid = \mid \frac{1}{z} \mid = \mid 1 - z \mid\}$

**Exercice 79 *** Transformer le nombre complexe sous une autre forme

a) $\sqrt{3} - i$

b) $1 - i$

c) (algébrique) $(\sqrt{2} - i)^4$

d) (algébrique) $(\sqrt{2} - i)^3$

e) $(1 + i)^6$

f) (trigonométrique) $(1 + i\tan\theta)^2, \theta \in [0, \pi/2[$.

**Exercice 80 *** Sommes et racines nièmes

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $\omega$ une racine nième de l'unité vérifiant $\omega^n = 1$. Calculer :

a) $\sum\limits_{i=0}^{n-1} w^i$

b) $\sum\limits_{i=0}^{n-1} w^{ip}, p \in \mathbb{Z}$

c) $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} w^i$

**Exercice 81 *** Somme de cosinus

Calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{5} \cos(\frac{(2k+1)}{13})$$

et

$$T = \sum_{k=0}^{5} \sin(\frac{(2k+1)}{13})$$

# Chapitre 7

# Dénombrement

## 7.1. Programme

— Cardinal, permutations, combinaisons

—

## 7.2. Exercices

**Exercice 82 *** Dé à 20 faces

On dispose de 3 dés identiques à vingt faces et on les lance simultanément dans le but de disposer de 3 notes de colle.

a) Combien y-a-t-il de lancers possibles ?

b) Combien y-a-t-il de lancers possibles tels que tous les dés présentent une valeur supérieure ou égale à 10 ?

c) Combien y-a-t-il de lancers possibles tels que deux dés exactement présentent une valeur identique ?

d) Combien y-a-t-il de lancers possibles tels que les dés présentent les valeurs 17, 9 et 3 ?

e) Déduire les probabilités associées aux évènements précédents.

f) Soit $p$ la probabilité de l'évènement $\mathcal{A}$ "tous les dés présentent une valeur supérieure ou égale à 10". Que vaut la probabilité qu'au moins un dé présente une valeur strictement inférieur à 10 ?

g) Combien de lancers de 3 dés faudrait-t-il réaliser pour avoir 9 chances sur 10 d'obtenir un évènement $\mathcal{A}$ (i.e. que tous les élèves aient la moyenne. . . ) ?