COS3101 วิธีเชิงตัวเลข (NUMERICAL METHOD)

อ.สราวุธ มีศรี

อีเมล: sarawut.meesri@ru.ac.th
sarawut.meesri@rumail.ru.ac.th

รากของสมการ
Roots of Equation

รากของสมการ (Roots of Equation)

- ในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ คณิตศาสตร์ สิ่งที่พบอยู่บ่อย ๆ ก็คือ การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ตัวอย่าง เช่น $f(x) = x^2 - 7x - 8$
- คำตอบ (solution) ของสมการ $f(x) = 0$ คือ ค่า x ที่สอดคลองกับสมการ คือ เมื่อแทนค่า x ในสมการแล้วจะได้ $f(x) = 0$ เรียกว่าเป็น ***ค่าราก*** (root) หรือ ***ผลเฉลย*** ของสมการ

รากของสมการ (Roots of Equation)

- รากของสมการ คือ การหาค่าของตัวแปรที่ใส่ในสมการแล้วทำให้สมการมีค่าเท่ากับศูนย์ $f(x) = 0$ เช่น

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

x คืออะไรที่ทำให้ $f(x) = 0$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- จากบทเรียนคณิตศาสตร์ที่ผ่านจะคุ้นเคยกับการแก้สมการหาค่ารากของพหุนามกำลัง โดยเฉพาะพหุนามกำลังที่ 2 การแก้สมการสามารถ ดำเนินการโดยใช้สูตรสมการต่อไปนี้

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- จาก $f(x) = x^2 - 6x + 9$
- จะได้ $a = 1, b = -6$ และ $c = 9$
- นำ $a = 1, b = -6$ และ $c = 9$ ไปแทนค่าในสูตรเพื่อหาค่า x จะได้

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- การแก้สมการพหุนามกำลังสามารถดำเนินการในรูปแบบการแยกองค์ประกอบได้ถ้าผลเฉลยเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)(x-3) = 0$$

$$x = 3$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- การแก้สมการพหุนามกำลังสามารถดำเนินการในรูปแบบการแยกองค์ประกอบได้ถ้าผลเฉลยเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

$$x = -6,2$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- กรณีพหุนาม**กำลังสูง**และค่ารากของสมการเป็น**จำนวนจริง**ที่มีค่าทศนิยมหลายตำแหน่ง หรือสมการที่ถูกนิยามรูปแบบฟังก์ชันอดิศัย (transcendental functions) เช่น ตรีโกณมิติ ลอการิทึม และสมการเลขชี้กำลัง การแก้โจทย์สมการหาค่าผลเฉลยไม่สามารถดำเนินการด้วยวิธีการข้างต้น
- ตัวอย่าง
  - $e^x - 5x + 1 = 0$
  - $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
  - $e^x + \sin x = 5$
- ฟังก์ชันเหล่านี้ไม่มีวิธีหาคำตอบโดยตรง ดังนั้นจึงจำเป็น ต้องใช้**ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข**มาใช้ในการหาคำตอบซึ่งจะเป็นเพียงค่าประมาณของคำตอบเท่านั้น

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับประมาณรากของสมการ

- วิธีเชิงตัวเลข คือ อัลกอริทึมที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบ ซึ่งวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับประมาณค่ารากของสมการไม่เชิงเส้นจะถูกจำแนกออกเป็น 2 กลุ่ม

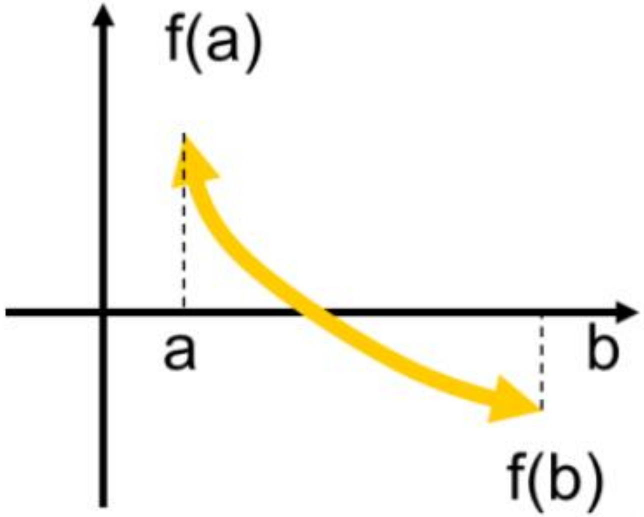
1. **Bracketing Method (แบบตะกร้า) คือ** วิธีการที่ต้องกำหนดช่วงค่าสำหรับการหาผลเฉลย
    - วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
    - วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)
2. **Open Method (แบบเปิด) คือ** ไม่มีการกำหนดช่วงค่า แต่ต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นของการดำเนินการ
    - วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method)
    - วิธีซีแคน (Secant method)

กลุ่มวิธีการแบบกำหนดช่วงค่าสำหรับหาผลเฉลย หรือ Bracketing Method (แบบตะกร้า)

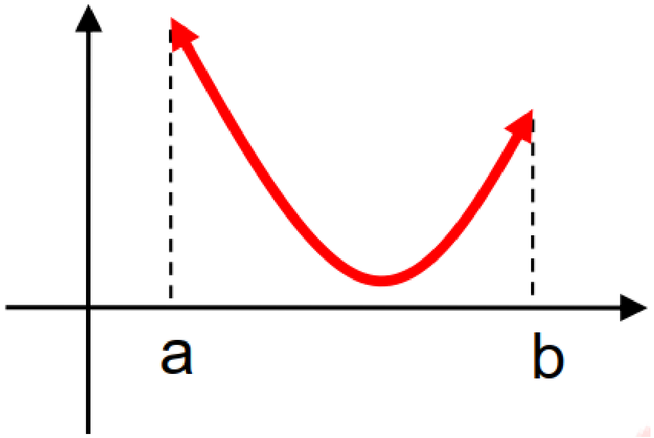
- การกำหนดช่วง $[a,b]$ เป็นข้อบังคับสำหรับทุกวิธีการในกลุ่มนี้ คือ การหารากของสมการในช่วงค่าที่กำหนด $[a,b]$ อีกนัยยะ คือ การหา ที่ $c \in [a,b]$ และ $f(c) = 0$ และวิธีการในกลุ่มนี้ต้องอยู่บน**หลักการของทฤษฎีค่ากลาง**

ทฤษฎีค่ากลาง

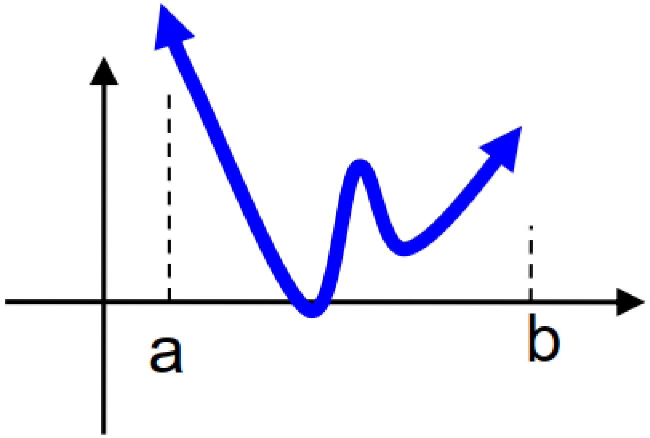
- กำหนดให้ $f(x)$ เป็นสมการไม่เชิงเส้นที่มีความต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ โดยที่ a เป็นค่าขอบเขตล่าง bเป็นค่าขอบเขตบน ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีค่าเครื่องหมายต่างกัน คือ $f(a) \times f(b) < 0$ แสดงว่าสมการไม่เชิงเส้นจะมีอย่างน้อย 1 ตำแหน่งในช่วง $[a,b]$ คือ c ที่ $f(c) = 0$ ดังรูปต่อไปนี้



ทฤษฎีค่ากลาง

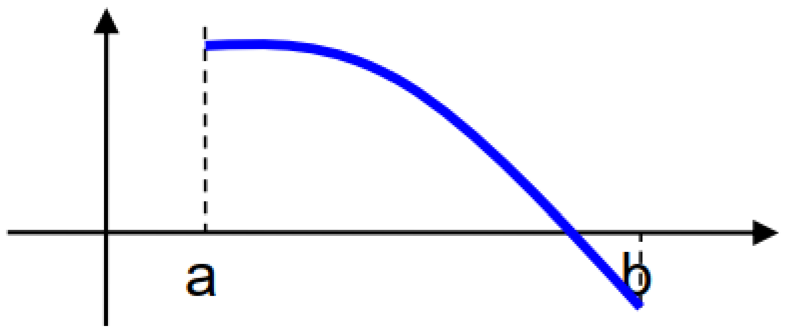


ก

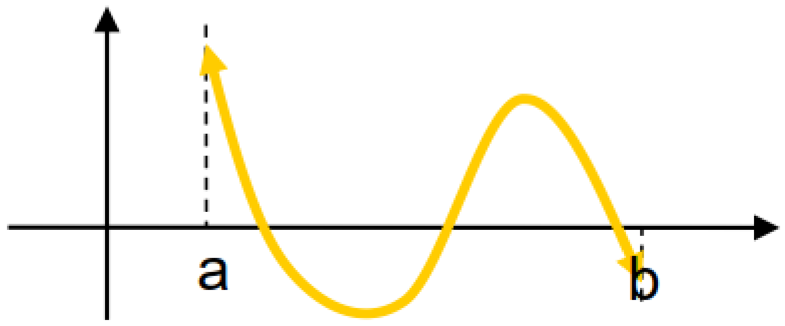


ข

ทฤษฎีค่ากลาง



(ค)



(ง)

วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

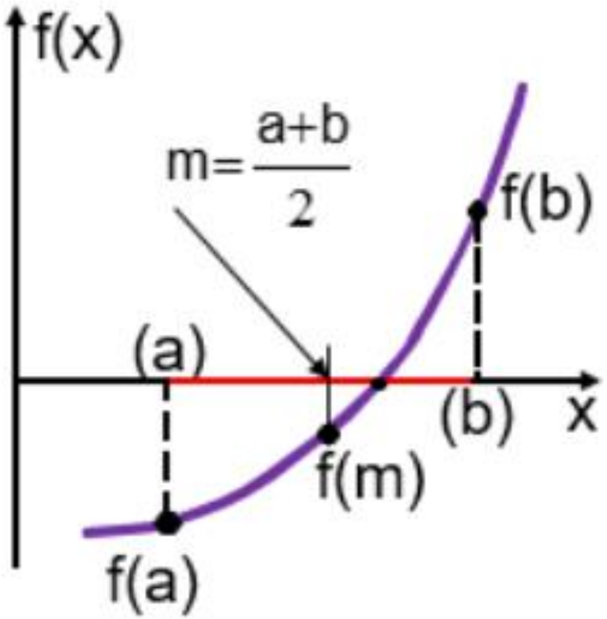
- วิธีการแรกนี้เป็นการหารากของสมการไม่เชิงเส้นในช่วงค่าที่กำหนด $[a, b]$ และการดำเนินการอยู่บนหลักการของทฤษฎีค่ากลางที่ $f(x)$ มีความต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ และ $f(a) \times f(b) < 0$
- วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่ามีรูปแบบดำเนินการแบบการวนซ้ำโดยมีรายละเอียดของขั้นตอนดังนี้

1. แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน คือ $[a, m]$ และ $[m, b]$ โดย

$$m = \frac{a+b}{2}$$

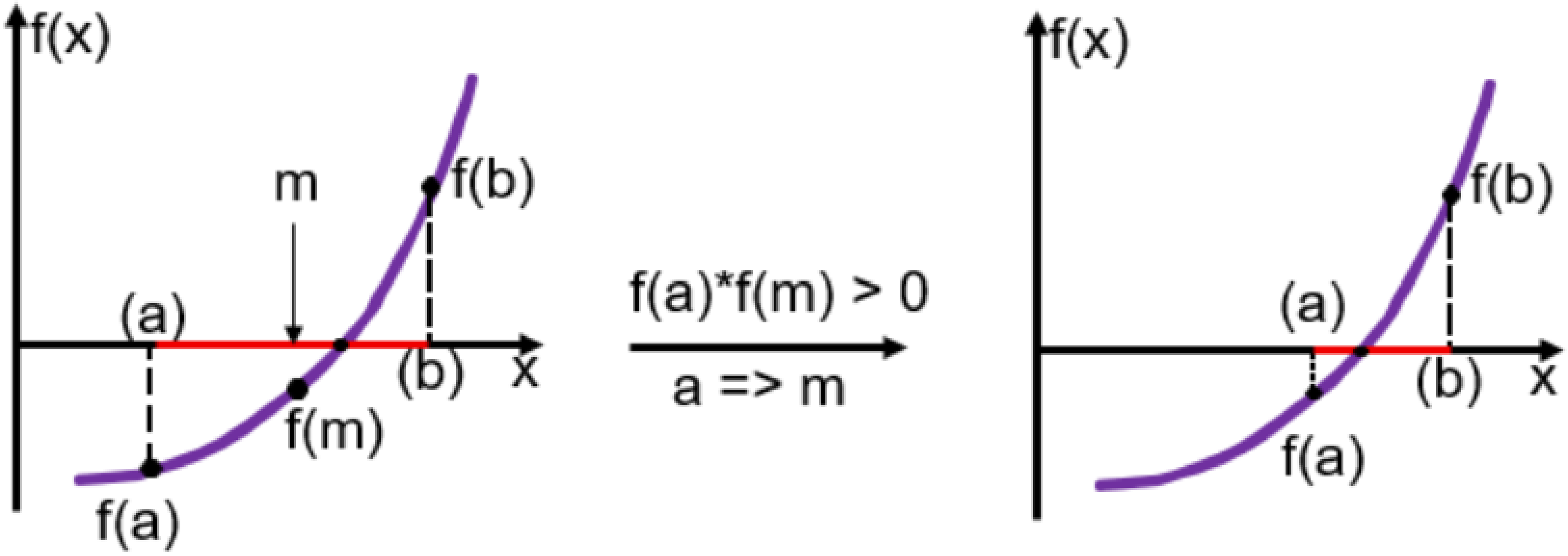
วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

- ทำการประเมินคุณสมบัติความเป็นรากของ m
- โดยตรวจสอบค่า $f(m)$
  - ถ้า $f(m)$=0 แสดงว่า m เป็นรากของสมการ
  - มิฉะนั้นแล้วจะดำเนินการปรับหาช่วงค่า $[a, b]$ใหม่ที่เหมาะสมในขั้นตอนถัดไป



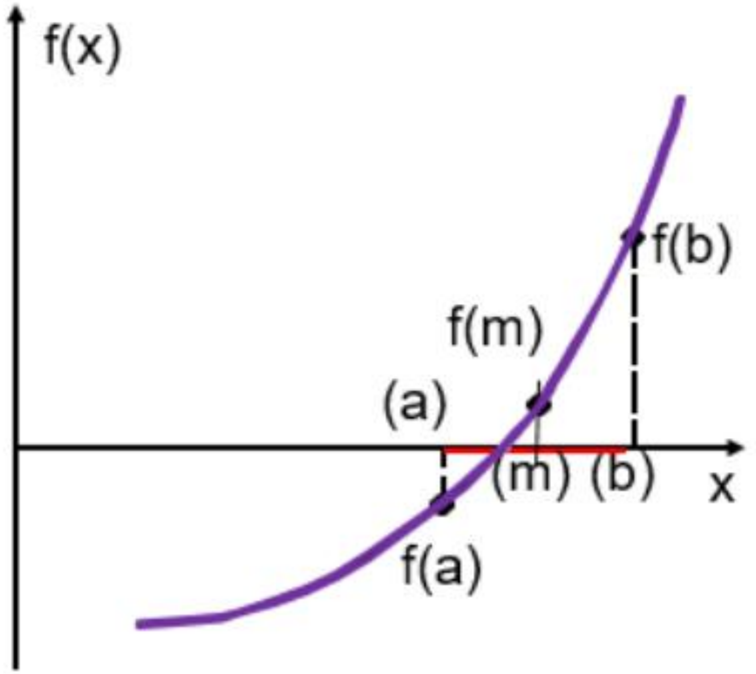
วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

2. พิจารณาช่วงค่า $[a, m]$และ $[m, b]$ หาช่วงค่าที่สอดคล้องกับหลักของทฤษฎีค่ากลาง และตัดช่วงค่าไม่เหมาะสมออกจากการดำเนินการวนซ้ำถัดไป
   - ถ้า $f(a) \times f(m) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
   - ถ้า $f(a) \times f(m) > 0$ จะเลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$ ดังรูป



วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

3. วนกลับในขั้นตอนที่ 1 ทำขั้นตอนซ้ำจนเจอค่ารากของสมการ หรือตรงเกณฑ์การหยุดวนซ้ำ



เกณฑ์การหยุดการวนซ้ำหาค่ากลางของช่วงค่า

- การหยุดวนรอบเมื่อเจอค่ารากจริงของสมการไม่เชิงเส้น $f(m) = 0$
- การหยุดวนรอบเมื่อเจอค่ารากโดยประมาณของสมการ ตามเงื่อนไขที่กำหนด คือ ร้อยละการเปลี่ยนแปลงเชิงสัมพัทธ์ของค่ากลางมีค่าน้อยกว่าค่าเธรดโชลด์ที่กำหนดไว้

$$|\varepsilon| = \left|\frac{m_{new} - m_{old}}{m_{new}}\right| \times 100$$

ตัวอย่าง

1. จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

กำหนดให้ $f(x) = e^x - 3x \quad ; a = 0, b = 1$

จะได้ $f(0) = e^0 - 3(0) = 1$

และ $f\,(1) = e^1 - 3(1) = -0.28171817154$

ดังนั้น $f(0)\ \times f(1) < 0$ แสดงว่าสมการนี้มีคำตอบ

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

รอบที่ 1

1. แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน คือ $[a,m]$ และ $[m,b]$ โดย

$$m = \frac{a+b}{2}$$

ดังนั้น $$m = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

- ทำการประเมินคุณสมบัติความเป็นรากของ m
- โดยตรวจสอบค่า $f(m)$
  - ถ้า $f(m)$=0 แสดงว่า m เป็นรากของสมการ
  - $m = 0.5$
  - ดังนั้น $f(0.5) = e^{0.5} - 3(0.5) = 0.148721271$
  - มิฉะนั้นแล้วจะดำเนินการปรับหาช่วงค่า $[a, b]$ใหม่ที่เหมาะสมในขั้นตอนถัดไป

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

2. พิจารณาช่วงค่า $[a, m]$และ $[m, b]$ หาช่วงค่าที่สอดคล้องกับหลักของทฤษฎีค่ากลาง และตัดช่วงค่าไม่เหมาะสมออกจากการดำเนินการวนซ้ำถัดไป
   - ถ้า $f(a) \times f(m) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
   - ถ้า $f(a) \times f(m) > 0$ จะเลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$
   - จาก $a = 0,$ จะได้ $f(0) = e^0 - 3(0) = 1$
   - จาก $m = 0.5$ จะได้ $f(0.5) = e^{0.5} - 3(0.5) = 0.148721271$
   - ดังนั้น เลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$
   - จะได้ช่วง $[0.5, 1]$

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

รอบที่ 2

1. ค่า $a = 0.5, b = 1$ คำนวณค่า m ได้ดังนี้

$$m = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$

และได้ค่า $f(m) = f(0.75) = e^{0.75} - 3(0.75) = -0.132999983$

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

2. พิจารณาช่วงค่า $[a, m]$ และ $[m, b]$ หาช่วงค่าที่สอดคล้องกับหลักของทฤษฎีค่ากลาง และตัดช่วงค่าไม่เหมาะสมออกจากการดำเนินการวนซ้ำถัดไป
    - ถ้า $f(a) \times f(m) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
    - ถ้า $f(a) \times f(m) > 0$ จะเลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$

เนื่องจาก $f(0.5) \times f(0.75) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$ จะได้ช่วง $[0.5, 0.75]$

ตัวอย่าง

ในรอบต่อๆ ไปหาได้โดยแทนค่าในทำนองเดียวกันนี้ ได้ผลลัพธ์ดังตาราง

รอบที่	a	b	m	f(m)
1	0	1	0.5	0.148721271
2	0.5	1	0.75	-0.13299998
3	0.5	0.75	0.625	-0.00675404
4	0.5	0.625	0.5625	0.067554657
5	0.5625	0.625	0.5938	0.029516072
6	0.5938	0.625	0.6094	0.011156489
7	0.6094	0.625	0.6172	0.002144652
8	0.6172	0.625	0.6211	-0.00231889
9	0.6172	0.6211	0.6191	-9.0663E-05
10	0.6172	0.6191	0.6182	0.00102611
11	0.6182	0.6191	0.6187	0.000467502
12	0.6187	0.6191	0.6189	0.000188364
13	0.6189	0.6191	0.619	0.0000488
14	0.619	0.6191	0.6191	-0.0000209
15	0.619	0.6191	0.619	0.0000140
16	0.619	0.6191	0.6191	-0.0000035
17	0.619	0.6191	0.6191	0.0000052
18	0.6191	0.6191	0.6191	0.0000009

ตัวอย่าง

1. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 9$ ในช่วง $[-1,7]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

แบบฝึกหัด

1. สมการไม่เชิงเส้น $f(x) = x^2$ และ $f(x) = \cos(x) + 1$ เป็นสมการที่มีความต่อเนื่องและมีค่าราก จงบอกเหตุผลว่าทำไมวิธีการ Bisection ถึงไม่สามารถหาค่ารากของสมการดังกล่าวได้

2. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
   - $2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[1, 1.5]$
   - $e^x - 3x^2 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[3, 4]$

ที่มา

- เอกสารคำสอน วิชา cos3101 ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ ผู้สอน ผศ.ดร. อัณณ์นุพันธ์ รอดทุกข์