COS3101 วิธีเชิงตัวเลข (NUMERICAL METHOD)

อ.สราวุธ มีศรี

อีเมล: sarawut.meesri@ru.ac.th
sarawut.meesri@rumail.ru.ac.th

รากของสมการ
Roots of Equation

รากของสมการ (Roots of Equation)

- ในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ คณิตศาสตร์ สิ่งที่พบอยู่บ่อย ๆ ก็คือ การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ตัวอย่าง เช่น $f(x) = x^2 - 7x - 8$
- คำตอบ (solution) ของสมการ $f(x) = 0$ คือ ค่า x ที่สอดคลองกับสมการ คือ เมื่อแทนค่า x ในสมการแล้วจะได้ $f(x) = 0$ เรียกว่าเป็น ***ค่าราก*** (root) หรือ ***ผลเฉลย*** ของสมการ

รากของสมการ (Roots of Equation)

- รากของสมการ คือ การหาค่าของตัวแปรที่ใส่ในสมการแล้วทำให้สมการมีค่าเท่ากับศูนย์ $f(x) = 0$ เช่น

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

x คืออะไรที่ทำให้ $f(x) = 0$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- จากบทเรียนคณิตศาสตร์ที่ผ่านจะคุ้นเคยกับการแก้สมการหาค่ารากของพหุนามกำลัง โดยเฉพาะพหุนามกำลังที่ 2 การแก้สมการสามารถ ดำเนินการโดยใช้สูตรสมการต่อไปนี้

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- จาก $f(x) = x^2 - 6x + 9$
- จะได้ $a = 1, b = -6$ และ $c = 9$
- นำ $a = 1, b = -6$ และ $c = 9$ ไปแทนค่าในสูตรเพื่อหาค่า x จะได้

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- การแก้สมการพหุนามกำลังสามารถดำเนินการในรูปแบบการแยกองค์ประกอบได้ถ้าผลเฉลยเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)(x-3) = 0$$

$$x = 3$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- การแก้สมการพหุนามกำลังสามารถดำเนินการในรูปแบบการแยกองค์ประกอบได้ ถ้าผลเฉลยเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$x = -6, 2$$

รากของสมการ (Roots of Equation)

- กรณีพหุนาม**กำลังสูง**และค่ารากของสมการเป็น**จำนวนจริง**ที่มีค่าทศนิยมหลายตำแหน่ง หรือสมการที่ถูกนิยามรูปแบบฟังก์ชันอดิศัย (transcendental functions) เช่น ตรีโกณมิติ ลอการิทึม และสมการเลขชี้กำลัง การแก้โจทย์สมการหาค่าผลเฉลยไม่สามารถดำเนินการด้วยวิธีการข้างต้น
- ตัวอย่าง
  - $e^x - 5x + 1 = 0$
  - $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
  - $e^x + \sin x = 5$
- ฟังก์ชันเหล่านี้ไม่มีวิธีหาคำตอบโดยตรง ดังนั้นจึงจำเป็น ต้องใช้**ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข**มาใช้ในการหาคำตอบซึ่งจะเป็นเพียงค่าประมาณของคำตอบเท่านั้น

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับประมาณรากของสมการ

- วิธีเชิงตัวเลข คือ อัลกอริทึมที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบ ซึ่งวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับประมาณค่ารากของสมการไม่เชิงเส้นจะถูกจำแนกออกเป็น 2 กลุ่ม

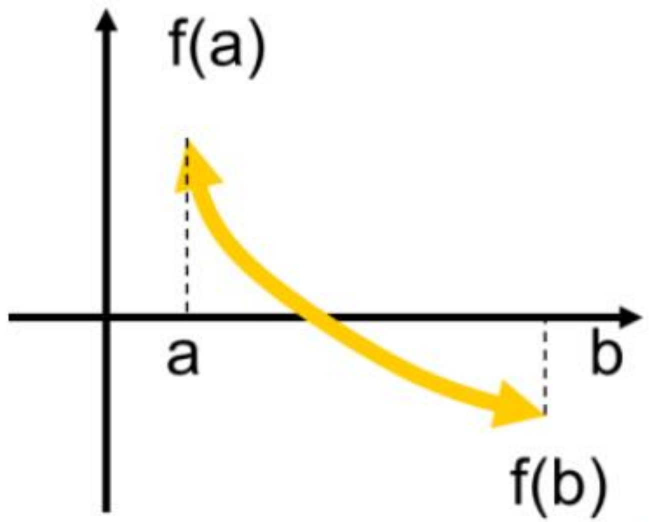
1. **Bracketing Method (แบบตะกร้า) คือ** วิธีการที่ต้องกำหนดช่วงค่าสำหรับการหาผลเฉลย
    - วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
    - วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)
2. **Open Method (แบบเปิด) คือ** ไม่มีการกำหนดช่วงค่า แต่ต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นของการดำเนินการ
    - วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method)
    - วิธีซีแคน (Secant method)

กลุ่มวิธีการแบบกำหนดช่วงค่าสำหรับหาผลเฉลย หรือ Bracketing Method (แบบตะกร้า)

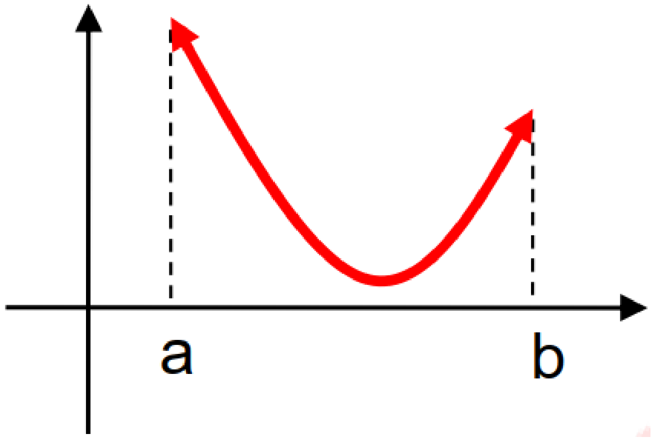
- การกำหนดช่วง $[a, b]$ เป็นข้อบังคับสำหรับทุกวิธีการในกลุ่มนี้ คือ การหารากของสมการในช่วงค่าที่กำหนด $[a, b]$ อีกนัยยะ คือ การหา ที่ $c \in [a, b]$ และ $f(c) = 0$ และวิธีการในกลุ่มนี้ต้องอยู่บน**หลักการของทฤษฎีค่ากลาง**

ทฤษฎีค่ากลาง

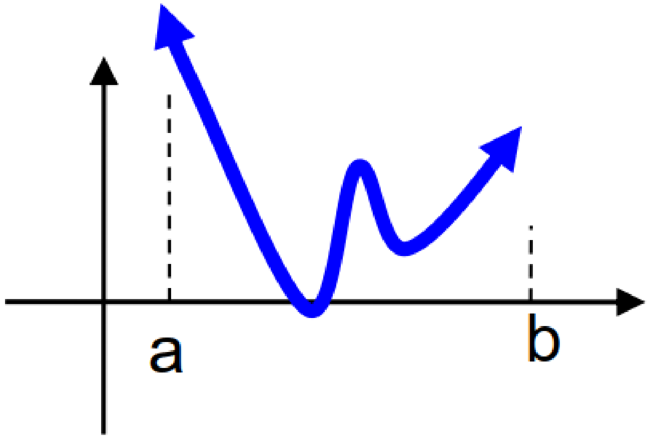
- กำหนดให้ $f(x)$ เป็นสมการไม่เชิงเส้นที่มีความต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ โดยที่ a เป็นค่าขอบเขตล่าง bเป็นค่าขอบเขตบน ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีค่าเครื่องหมายต่างกัน คือ $f(a) \times f(b) < 0$ แสดงว่าสมการไม่เชิงเส้นจะมีอย่างน้อย 1 ตำแหน่งในช่วง $[a, b]$ คือ c ที่ $f(c) = 0$ ดังรูปต่อไปนี้



ทฤษฎีค่ากลาง

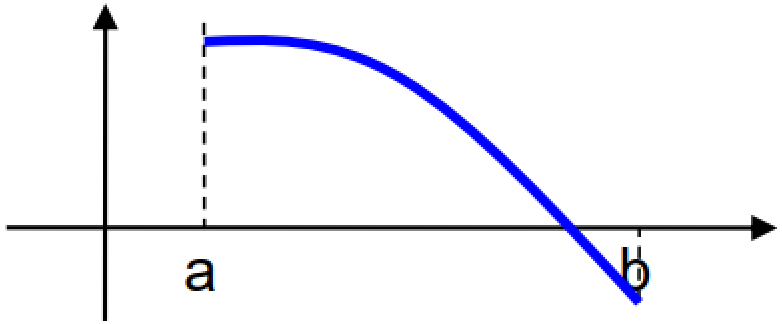


ก

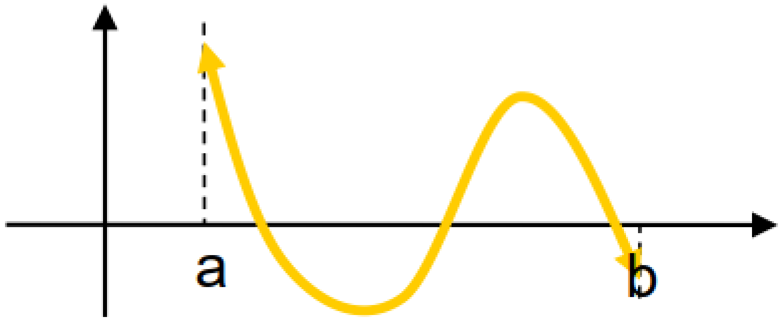


ข

ทฤษฎีค่ากลาง



(ค)



(ง)

วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

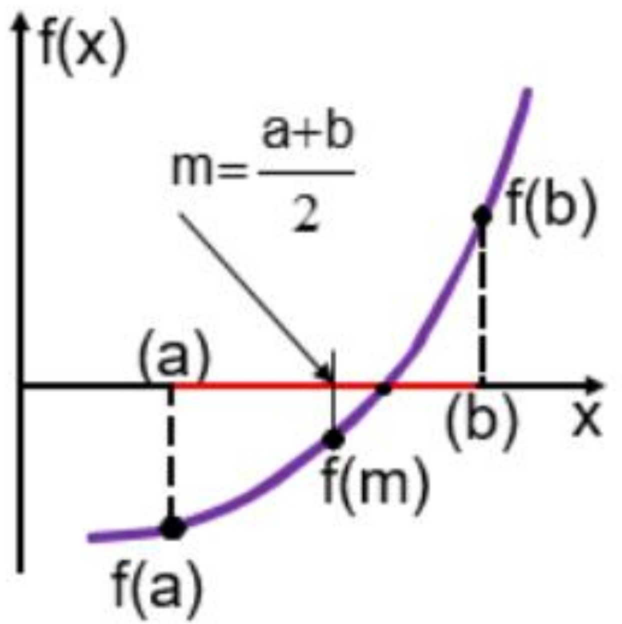
- วิธีการแรกนี้เป็นการหารากของสมการไม่เชิงเส้นในช่วงค่าที่กำหนด $[a, b]$ และการดำเนินการอยู่บนหลักการของทฤษฎีค่ากลางที่ $f(x)$ มีความต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ และ $f(a) \times f(b) < 0$
- วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่ามีรูปแบบดำเนินการแบบการวนซ้ำโดยมีรายละเอียดของขั้นตอนดังนี้

1. แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน คือ $[a, m]$ และ $[m, b]$ โดย

$$m = \frac{a+b}{2}$$

วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

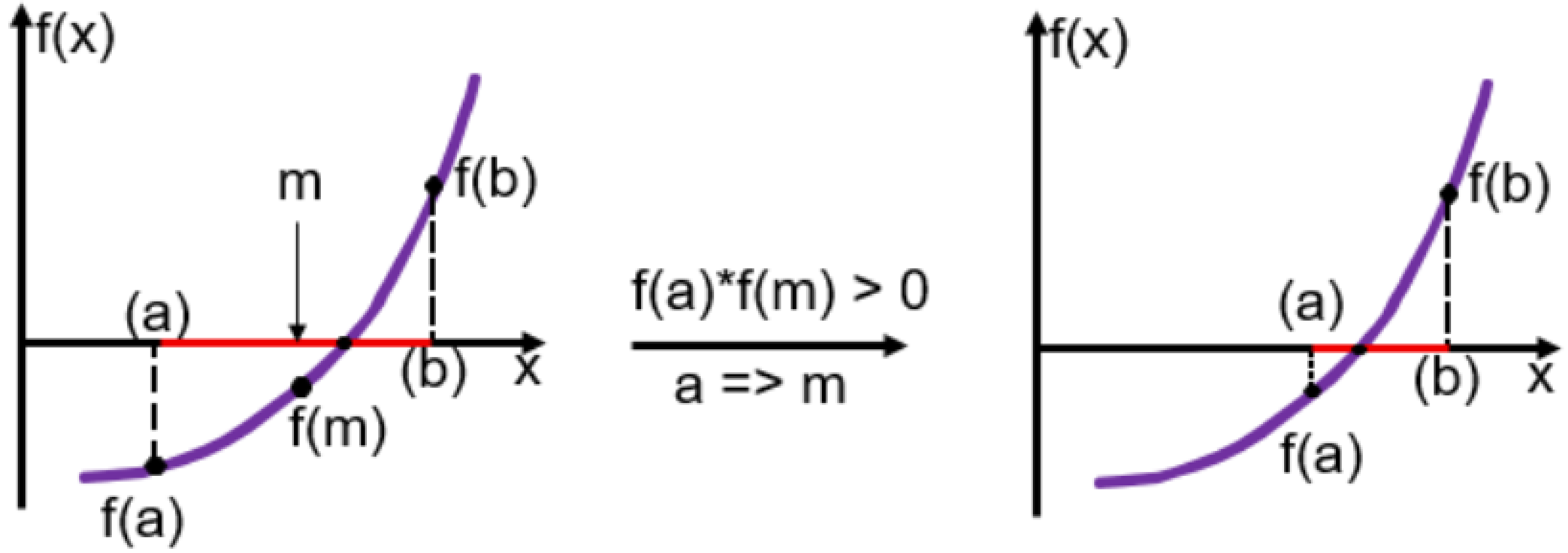
- ทำการประเมินคุณสมบัติความเป็นรากของ m
- โดยตรวจสอบค่า $f(m)$
  - ถ้า $f(m)$=0 แสดงว่า m เป็นรากของสมการ
  - มิฉะนั้นแล้วจะดำเนินการปรับหาช่วงค่า $[a, b]$ใหม่ที่เหมาะสมในขั้นตอนถัดไป



วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

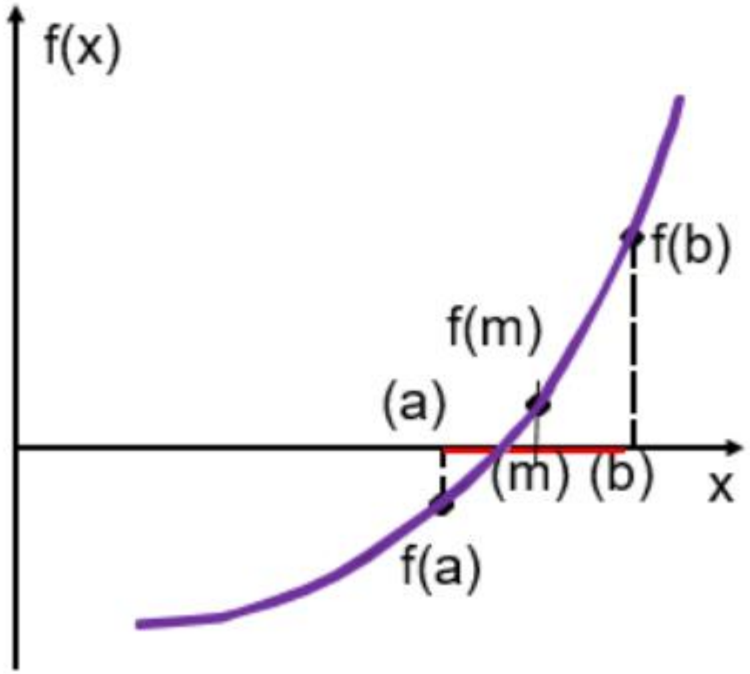
2. พิจารณาช่วงค่า $[a, m]$และ $[m, b]$ หาช่วงค่าที่สอดคล้องกับหลักของทฤษฎีค่ากลาง และตัดช่วงค่าไม่เหมาะสมออกจากการดำเนินการวนซ้ำถัดไป

- ถ้า $f(a) \times f(m) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
- ถ้า $f(a) \times f(m) > 0$ จะเลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$ ดังรูป



วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

3. วนกลับในขั้นตอนที่ 1 ทำขั้นตอนซ้ำจนเจอค่ารากของสมการ หรือตรงเกณฑ์การหยุดวนซ้ำ



เกณฑ์การหยุดการวนซ้ำหาค่ากลางของช่วงค่า

- การหยุดวนรอบเมื่อเจอค่ารากจริงของสมการไม่เชิงเส้น $f(m) = 0$
- การหยุดวนรอบเมื่อเจอค่ารากโดยประมาณของสมการ ตามเงื่อนไขที่กำหนด คือ ร้อยละการเปลี่ยนแปลงเชิงสัมพัทธ์ของค่ากลางมีค่าน้อยกว่าค่าเธรดโชลด์ที่กำหนดไว้

$$|\varepsilon| = \left|\frac{m_{new} - m_{old}}{m_{new}}\right| \times 100$$

ตัวอย่าง

1. จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

กำหนดให้ $f(x) = e^x - 3x \quad ; a = 0, b = 1$

จะได้ $f(0) = e^0 - 3(0) = 1$

และ $f\ (1) = e^1 - 3(1) = -0.28171817154$

ดังนั้น $f(0)\ \times f(1) < 0$ แสดงว่าสมการนี้มีคำตอบ

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

รอบที่ 1

1. แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน คือ $[a, m]$ และ $[m, b]$ โดย

$$m = \frac{a+b}{2}$$

ดังนั้น

$$m = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

- ทำการประเมินคุณสมบัติความเป็นรากของ m
- โดยตรวจสอบค่า $f(m)$
  - ถ้า $f(m)$=0 แสดงว่า m เป็นรากของสมการ
  - $m = 0.5$
  - ดังนั้น $f(0.5) = e^{0.5} - 3(0.5) = 0.148721271$
  - มิฉะนั้นแล้วจะดำเนินการปรับหาช่วงค่า $[a, b]$ใหม่ที่เหมาะสมในขั้นตอนถัดไป

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

2. พิจารณาช่วงค่า $[a, m]$และ $[m, b]$ หาช่วงค่าที่สอดคล้องกับหลักของทฤษฎีค่ากลางและตัดช่วงค่าไม่เหมาะสมออกจากการดำเนินการวนซ้ำถัดไป
    - ถ้า $f(a) \times f(m) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
    - ถ้า $f(a) \times f(m) > 0$ จะเลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$
    - จาก $a = 0,$ จะได้ $f(0) = e^0 - 3(0) = 1$
    - จาก $m = 0.5$ จะได้ $f(0.5) = e^{0.5} - 3(0.5) = 0.148721271$
    - ดังนั้น เลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$
    - จะได้ช่วง $[0.5, 1]$

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

รอบที่ 2

1. ค่า $a = 0.5, b = 1$ คำนวณค่า m ได้ดังนี้

$$m = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$

และได้ค่า $f(m) = f(0.75) = e^{0.75} - 3(0.75) = -0.132999983$

ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $e^x - 3x = 0$ ในช่วง $[0,1]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

2. พิจารณาช่วงค่า $[a, m]$ และ $[m, b]$ หาช่วงค่าที่สอดคล้องกับหลักของทฤษฎีค่ากลางและตัดช่วงค่าไม่เหมาะสมออกจากการดำเนินการวนซ้ำถัดไป
    - ถ้า $f(a) \times f(m) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
    - ถ้า $f(a) \times f(m) > 0$ จะเลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$

เนื่องจาก $f(0.5) \times f(0.75) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$ จะได้ช่วง $[0.5, 0.75]$

ตัวอย่าง

ในรอบต่อๆ ไปหาได้โดยแทนค่าในทำนองเดียวกันนี้ ได้ผลลัพธ์ดังตาราง

รอบที่	a	b	m	f(m)
1	0	1	0.5	0.148721271
2	0.5	1	0.75	-0.13299998
3	0.5	0.75	0.625	-0.00675404
4	0.5	0.625	0.5625	0.067554657
5	0.5625	0.625	0.5938	0.029516072
6	0.5938	0.625	0.6094	0.011156489
7	0.6094	0.625	0.6172	0.002144652
8	0.6172	0.625	0.6211	-0.00231889
9	0.6172	0.6211	0.6191	-9.0663E-05
10	0.6172	0.6191	0.6182	0.00102611
11	0.6182	0.6191	0.6187	0.000467502
12	0.6187	0.6191	0.6189	0.000188364
13	0.6189	0.6191	0.619	0.0000488
14	0.619	0.6191	0.6191	-0.0000209
15	0.619	0.6191	0.619	0.0000140
16	0.619	0.6191	0.6191	-0.0000035
17	0.619	0.6191	0.6191	0.0000052
18	0.6191	0.6191	0.6191	0.0000009

ตัวอย่าง

1. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 9$ ในช่วง $[-1,7]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

รอบที่ 1

1. แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน คือ $[a, m]$ และ $[m, b]$ โดย

$$m = \frac{a+b}{2}$$

ดังนั้น

$$m = \frac{-1+7}{2} = 3$$

ตัวอย่าง

1. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 9$ ในช่วง $[-1,7]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

- ทำการประเมินคุณสมบัติความเป็นรากของ m
- โดยตรวจสอบค่า $f(m)$
  - ถ้า $f(m)$=0 แสดงว่า m เป็นรากของสมการ
  - $m = 3$
  - ดังนั้น $f(3) = 3^2 + 3(3) - 9 = 9$
  - มิฉะนั้นแล้วจะดำเนินการปรับหาช่วงค่า $[a, b]$ใหม่ที่เหมาะสมในขั้นตอนถัดไป

ตัวอย่าง

1. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 9$ ในช่วง $[-1,7]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

วิธีทำ

2. พิจารณาช่วงค่า $[a, m]$และ $[m, b]$ หาช่วงค่าที่สอดคล้องกับหลักของทฤษฎีค่ากลาง และตัดช่วงค่าไม่เหมาะสมออกจากการดำเนินการวนซ้ำถัดไป
   - ถ้า $f(a) \times f(m) < 0$ จะเลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
   - ถ้า $f(a) \times f(m) > 0$ จะเลือกช่วง $[m, b]$ โดยปรับค่า $a = m$
   - จาก $a = -1,$ จะได้ $f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 9 = -11$
   - จาก $m = 3$ จะได้ $f(3) = 3^2 + 3(3) - 9 = 9$
   - ดังนั้น เลือกช่วง $[a, m]$ โดยปรับค่า $b = m$
   - จะได้ช่วง $[-1, 3]$

ตัวอย่าง

1. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 9$ ในช่วง $[-1,7]$ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)

รอบที่	a	b	f(a)	f(b)	m	f(m)
1	-1	7	-11	61	3	9
2	-1	3	-11	9	1	-5
3	1	3	-5	9	2	1
4	1	2	-5	1	1.5	-2.25
5	1.5	2	-2.25	1	1.75	-0.6875
6	1.75	2	-0.688	1	1.875	0.140625
7	1.75	1.875	-0.688	0.1406	1.8125	-0.27734375
8	1.8125	1.875	-0.277	0.1406	1.8438	-0.069335938
9	1.8438	1.875	-0.069	0.1406	1.8594	0.035400391
10	1.8438	1.8594	-0.069	0.0354	1.8516	-0.017028809

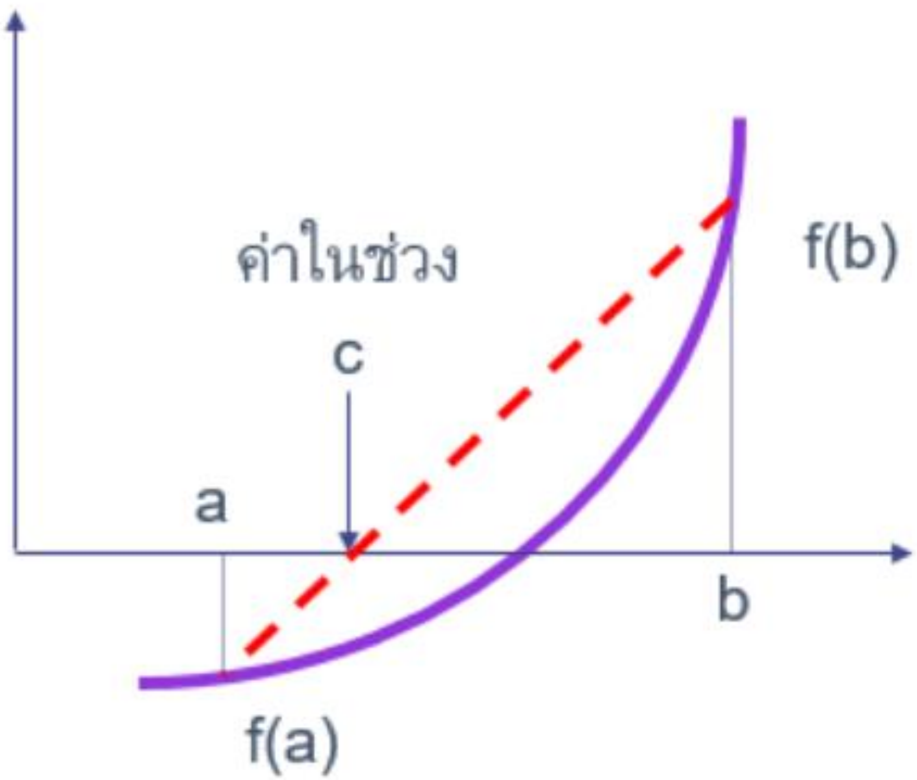
วิธีเชิงตัวเลขสำหรับประมาณรากของสมการ

- วิธีเชิงตัวเลข คือ อัลกอริทึมที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบ ซึ่งวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับประมาณค่ารากของสมการไม่เชิงเส้นจะถูกจำแนกออกเป็น 2 กลุ่ม

1. Bracketing Method **(แบบตะกร้า) คือ** วิธีการที่ต้องกำหนดช่วงค่าสำหรับการหาผลเฉลย
   - วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
   - วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)
2. Open Method **(แบบเปิด) คือ** ไม่มีการกำหนดช่วงค่า แต่ต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นของการดำเนินการ
   - วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method)
   - วิธีซีแคน (Secant method)

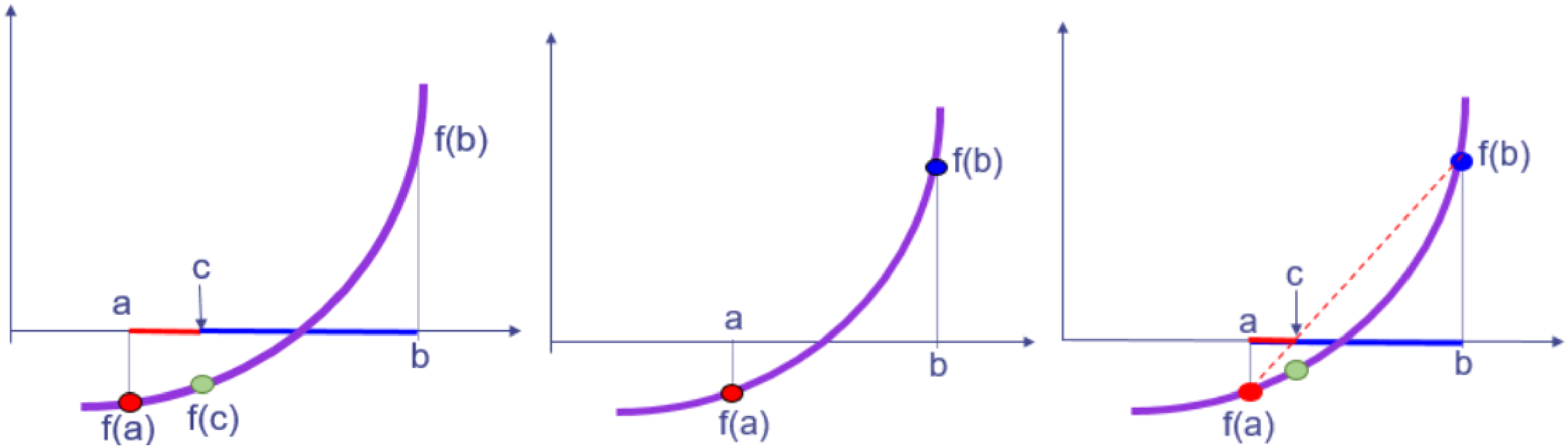
วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

รูปแบบการหาค่าภายในช่วงค่า $[a, b]$จะถูกปรับปรุงเพื่อลู่เข้าหาค่ารากของสมการไม่เชิงเส้นได้รวดเร็วขึ้น แนวคิดของวิธีการนี้คือ การสร้างเส้นตรงแทนโค้ง (curve) ของสมการ แสดงดังรูป



วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

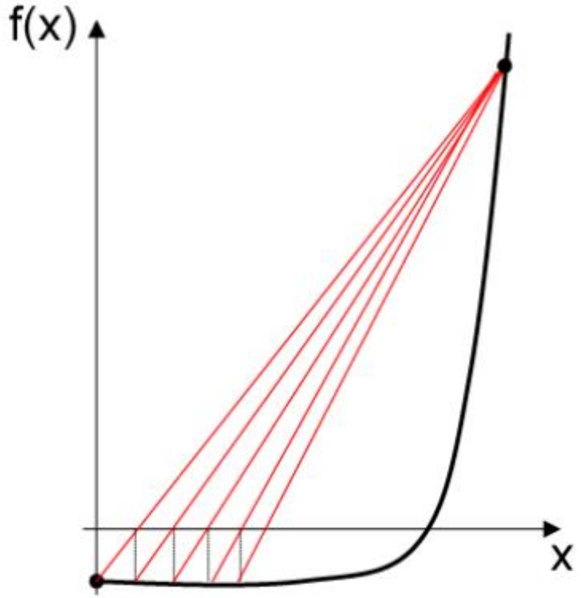
ช่วงค่า $[a, b]$ ถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ $[a, c]$ และ $[c, b]$ พิจารณาหาช่วงค่าที่สมการมีคุณสมบัติตามหลักของทฤษฎีค่ากลาง การปรับช่วงค่าจะถูกดำเนินการโดยใช้เกณฑ์เดียวกับวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า จากรูปที่พบว่า $f(a) \times f(c) > 0$ ดังนั้นเลือกปรับ $a = c$



การปรับช่วงค่าและวนซ้ำการทำงาน

วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

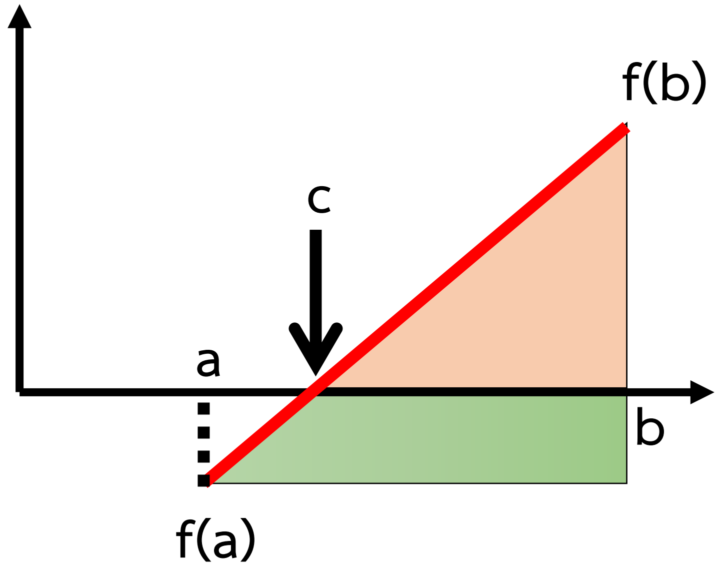
การปรับช่วงค่าจะถูกดำเนินการแบบวนซ้ำจนคำนวณ c ที่ $f(c) = 0$ หรือเข้าเงื่อนไขของค่าราก โดยการประมาณ ในกรณีเส้นโค้งลาดเอนเข้าหาแกน x ดังรูป การคำนวณค่าอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ของสมการในบริเวณดังกล่าวจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ กระบวนการหารากของสมการด้วยวิธีแบ่งครึ่งช่วงค่าจะลู่เข้าหาค่าผลเฉลยได้รวดเร็วกว่าวิธีการวางตัวผิดที่



ข้อจำกัดของวิธีการวางตัวผิดที่

วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

เส้นตรงถูกสร้างโดยการเชื่อมระหว่างจุด 2 จุดบนเส้นโค้ง ที่ตำแหน่ง $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ โดยที่ $f(a) \times f(b) < 0$ ซึ่งเส้นตรงจะลากตัดแกน x ที่ตำแหน่ง c และ c จะถูกนำมาใช้แทนค่า m (ที่คำนวณจากวิธีการแบ่งครึ่งช่วง) หลักการของสามเหลี่ยมคล้ายถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณค่าตำแหน่ง c



วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

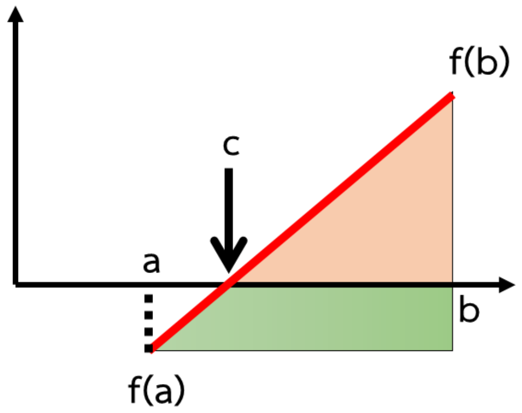
การคำนวณค่าตำแหน่ง c

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

$$-f(b)(a-b)=(f(a)-f(b))(c-b)$$

$$c-b=\frac{-f(b)(a-b)}{f(a)-f(b)}$$

$$c=b-\frac{f(b)(a-b)}{f(a)-f(b)}$$



วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

การคำนวณค่าตำแหน่ง c

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c}=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

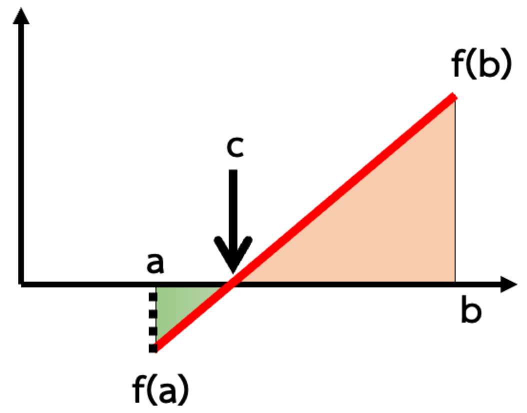
$$f(a)(c-b)=-f(b)(a-c)$$

$$f(a)\times c-f(a)\times b=-f(b)\times a+f(b)\times c$$

$$f(a)\times c-f(b)\times c=-f(b)\times a+f(a)\times b$$

$$c(f(a)-f(b))=-f(b)\times a+f(a)\times b$$

$$c=\frac{f(a)\times b-f(b)\times a}{f(a)-f(b)}$$



แบบฝึกหัด

1. จงหารากของ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ ในช่วง $[-1, 5]$ โดยวิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

สูตรคำนวณ

$$c = b - \frac{f(b)(a-b)}{f(a) - f(b)}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหารากของ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ ในช่วง $[-1, 5]$ โดยวิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)

- พิจารณาขอบเขต $a = -1$ และ $b = 5$
  - $f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 9 = -11$; $f(-1) < 0$
  - $f(5) = 5^2 + 3(5) - 9 = 31$; $f(5) > 0$
- รอบที่ 1 :

$$c = b - \frac{f(b)(a-b)}{f(a) - f(b)}$$

$$c = 5 - \frac{31(-1-5)}{-11-31} = 0.57143$$

แบบฝึกหัด

- ดังนั้นจะได้ $f(a) = -11\,;\ f(c) = -6.95918$
- เพราะฉะนั้น $f(a) * f(c) > 0$ ขอบเขตใหม่ คือ $[0.57143, 5]$
- รอบที่ 2 :

$$c = b - \frac{f(b)(a-b)}{f(a)-f(b)}$$

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับประมาณรากของสมการ

- วิธีเชิงตัวเลข คือ อัลกอริทึมที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบ ซึ่งวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับประมาณค่ารากของสมการไม่เชิงเส้นจะถูกจำแนกออกเป็น 2 กลุ่ม

1. **Bracketing Method (แบบตะกร้า) คือ** วิธีการที่ต้องกำหนดช่วงค่าสำหรับการหาผลเฉลย
    - วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
    - วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)
2. **Open Method (แบบเปิด) คือ** ไม่มีการกำหนดช่วงค่า แต่ต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นของการดำเนินการ
    - วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method)
    - วิธีซีแคน (Secant method)

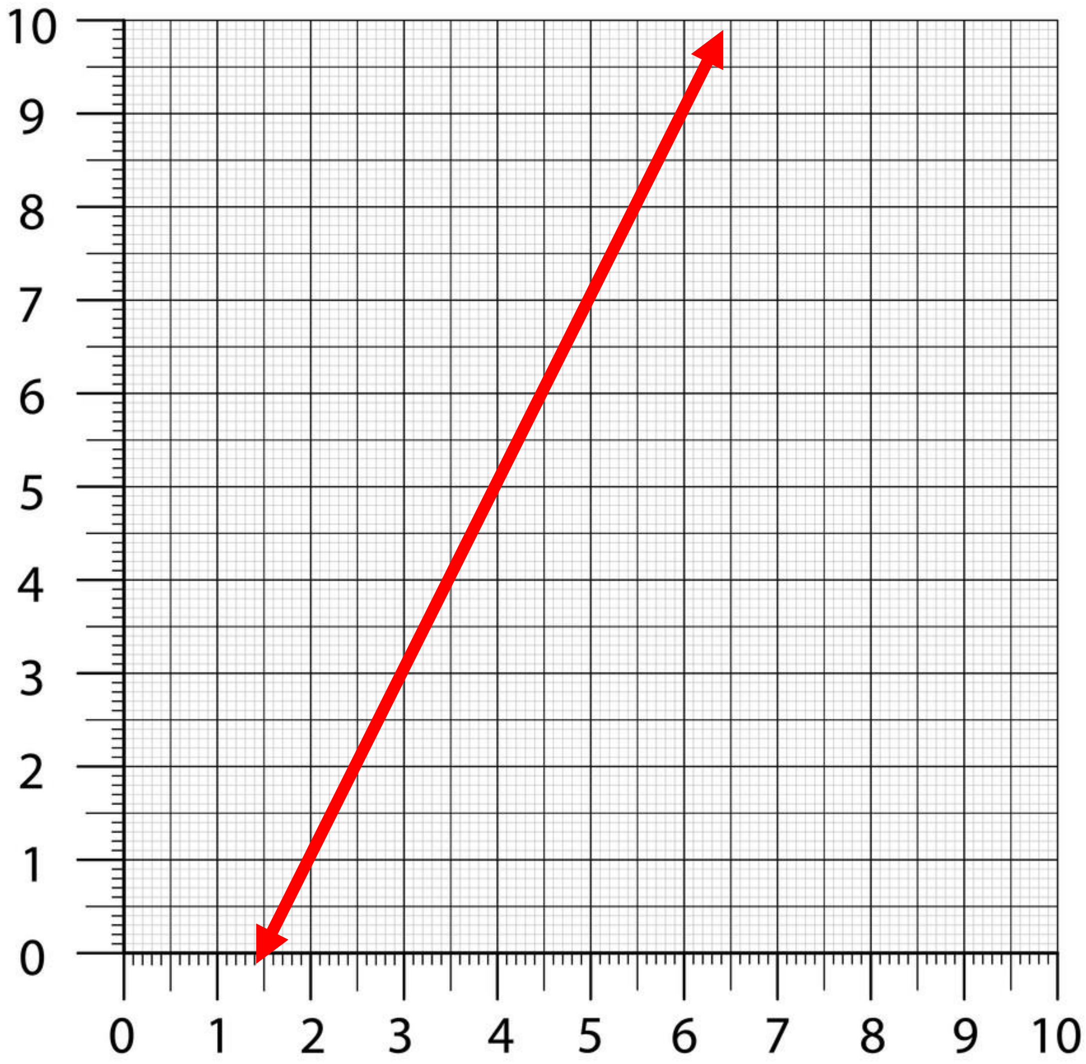
กลุ่มวิธีการแบบเปิด (Open Method)

วิธีการในกลุ่มนี้ไม่มีการกำหนดช่วง $[a, b]$ สำหรับการหาค่ารากของสมการ แต่ต้องกำหนดค่าเริ่มต้น และประยุกต์วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการปรับปรุงค่าเป็นลำดับเพื่อลู่เข้าหาค่ารากที่แท้จริงของสมการ ในบทเรียนนี้จำนำเสนอ 2 วิธีการ ที่อยู่ในกลุ่มแบบเปิด คือ

1. วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method) ต้องกำหนดค่าเริ่มต้น 1 จำนวน คือ x_0
2. วิธีซีแคน (Secant method) มีการกำหนดค่าเริ่มต้น 2 จำนวน คือ x_0 และ x_1

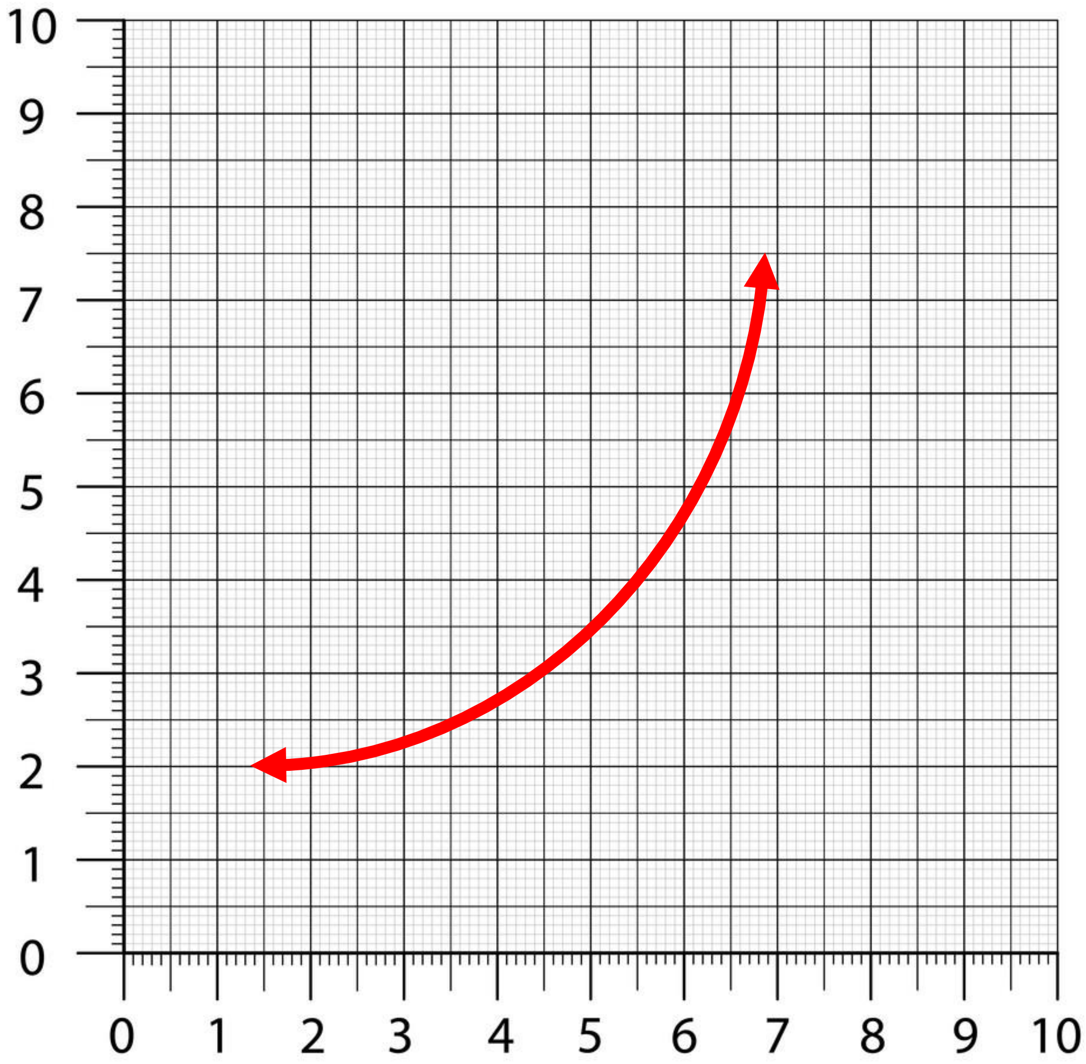
วิธีการในกลุ่มนี้ดำเนินการโดยใช้แนวคิดการสร้างเส้นตรงมาประมาณเส้นโค้งของสมการไม่เชิงเส้น ลำดับของการปรับค่าตัวเลข คือ ลำดับของตำแหน่งที่เส้นตรงที่ลากตัดแกน x วิธีการในกลุ่มนี้จะดำเนินการแบบวนซ้ำจนเส้นตรงกับบางส่วนของเส้นโค้งที่บริเวณรากมีความใกล้เคียงกัน ตำแหน่งที่เส้นตรงลากตัดแกน x จะถูกใช้ในการประมาณรากของสมการไม่เชิงเส้น

ทบทวนความชันเส้นตรง



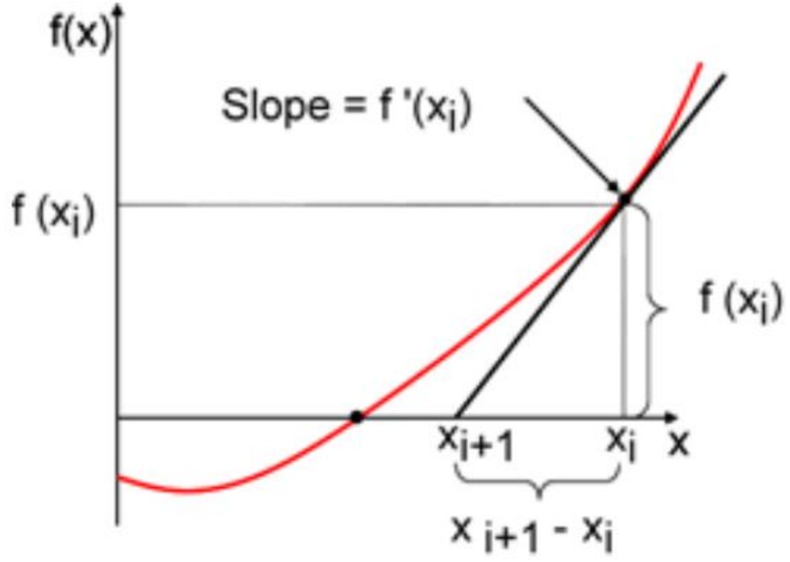
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ทบทวนความชันเส้นโค้ง



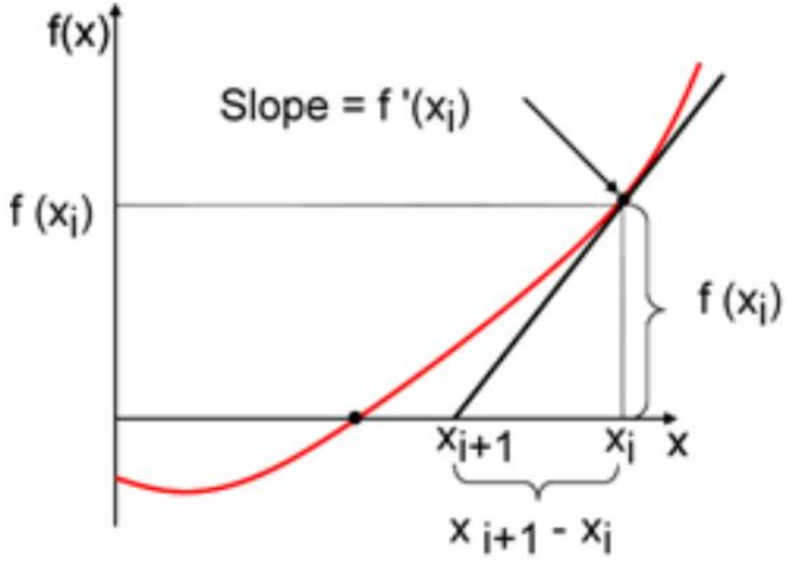
วิธีการนิวตันราฟสัน

แนวคิดของวิธีการนี้ คือการประยุกต์วิธีเชิงตัวเลขกับค่าเริ่มต้น x_0 และปรับปรุงค่าดังกล่าวเป็นลำดับ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ เพื่อลู่เข้าหารากของสมการ $f(x_n) \rightarrow 0$ หลักการ คือ การใช้ข้อมูลของสมการที่ตำแหน่ง x_i คือ $f(x_i), f'(x_i)$ มาสร้างเส้นตรง (tangent line) ที่สัมผัสกับเส้นโค้งที่ตำแหน่ง $f(x_i)$ เป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $f'(x_i)$ และเส้นตรงนี้ลากตัดแกน x ที่ (x_{i+1}) ดังรูป



การสร้างเส้นตรงสำหรับประมาณเส้นโค้ง

วิธีการนิวตันราฟสัน



การสร้างเส้นตรงสำหรับประมาณเส้นโค้ง

ความชันของโค้ง ณ จุด $\left(x_i, f(x_i)\right)$ คือ $f'(x_i)$

ความชันของเส้นตรง คือ $\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$ โดย $f(x_{i+1}) = 0$

วิธีการนิวตันราฟสัน

ค่าความชันของเส้นตรงจะสมนัยกับสมการต่อไปนี้

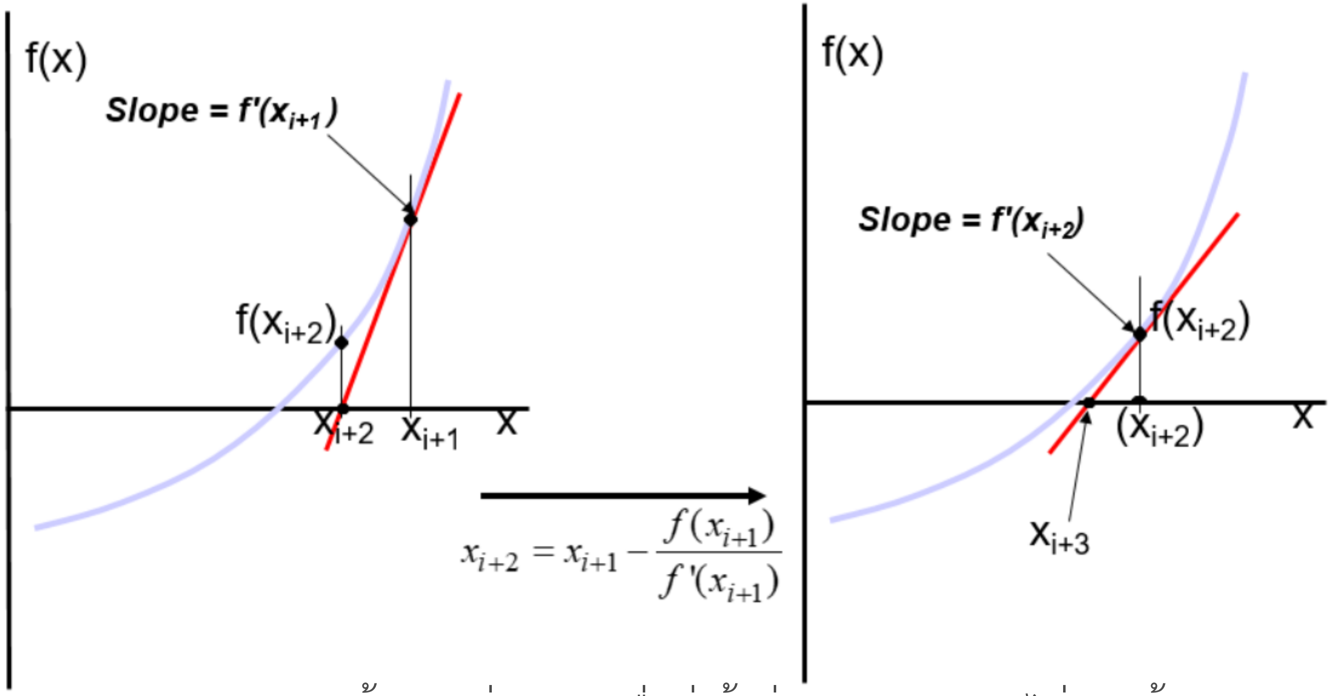
$$f'(x_i) = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

ดังนั้น

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

วิธีการนิวตันราฟสัน

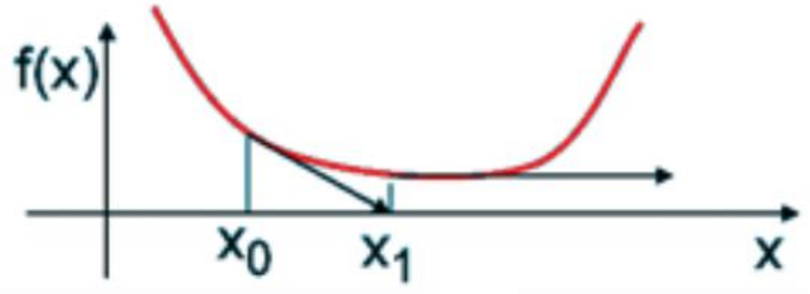
กรณี x_{i+1} ไม่ใช่รากของสมการ ซึ่งค่า $f(x_{i+1}) \neq 0$ ข้อมูล $f(x_{i+1}), f'(x_{i+1})$ จะถูกนำมาใช้สร้างเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งลำดับถัดไป โดยเส้นตรงนี้ลากตัดแกน x ที่ x_{i+2} การปรับค่าจะเป็นรูปแบบของการวนทำซ้ำเพื่อลู่เข้าหารากของสมการไม่เชิงเส้น (ดังรูป) สำหรับเกณฑ์การหยุดการวนซ้ำจะเป็นเกณฑ์เดียวกับวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า และวิธีวางตัวผิดที่



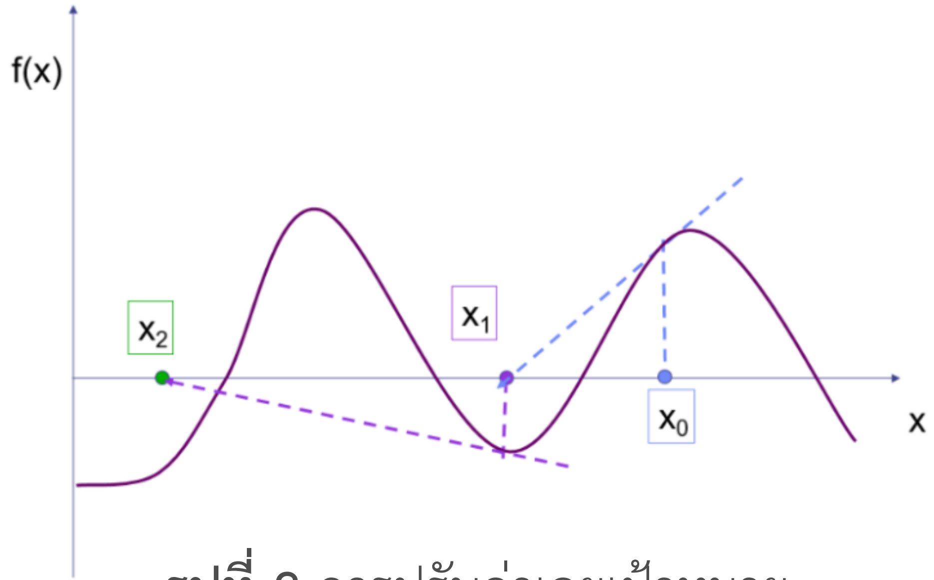
การวนซ้ำปรับค่า x_i เพื่อลู่เข้าสู่รากของสมการไม่เชิงเส้น

วิธีการนิวตันราฟสัน

ข้อสังเกต สิ่งสำคัญในการดำเนินการ คือ $f'(x_i) \neq 0$ มิฉะนั้นแล้วเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง จะเป็นเส้นแนวนอน ซึ่งไม่สามารถลากตัดแกน x ดังรูป 1 และรูปที่ 2 แสดงเหตุการณ์การปรับค่าเลยเป้าหมาย ซึ่งลำดับตัวเลขจากการปรับค่าจะลู่ออกจากค่ารากที่ต้องการของสมการ



รูปที่ 1 เส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งไม่ตัดแกน x



รูปที่ 2 การปรับค่าเลยเป้าหมาย

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับประมาณรากของสมการ

1. **Bracketing Method (แบบตะกร้า) คือ** วิธีการที่ต้องกำหนดช่วงค่าสำหรับการหาผลเฉลย
    - วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
    - วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)
2. **Open Method (แบบเปิด) คือ** ไม่มีการกำหนดช่วงค่า แต่ต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นของการดำเนินการ
    - วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method)
    - วิธีซีแคน (Secant method)

วิธีการซีแคนซ์

วิธีการนี้ในแนวคิดหรือหรือหลักการเดียวกับวิธีการนิวตันราฟสัน คือ การใช้เส้นตรงประมาณเส้นโค้ง เส้นตรงที่เกิดขึ้นในวิธีการนี้เกิดจากเชื่อมจุดสองจุด ๆ ใดบนเส้นโค้ง หรือสามารถอธิบายอีกนัยหนึ่ง ก็คือ ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นลำดับที่หนึ่ง $f'(x_i)$ ของนิวตันราฟสันจะถูกประมาณด้วย $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ คือ อัตราส่วนระหว่างการเปลี่ยนแปลงตัวแปรตามกับการเปลี่ยนแปลงตัวแปรต้น โดย $\Delta f = f(x_i) - f'(x_{i-1})$ และ $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ โดยสมการของซีแคนมีรูปแบบดังนี้

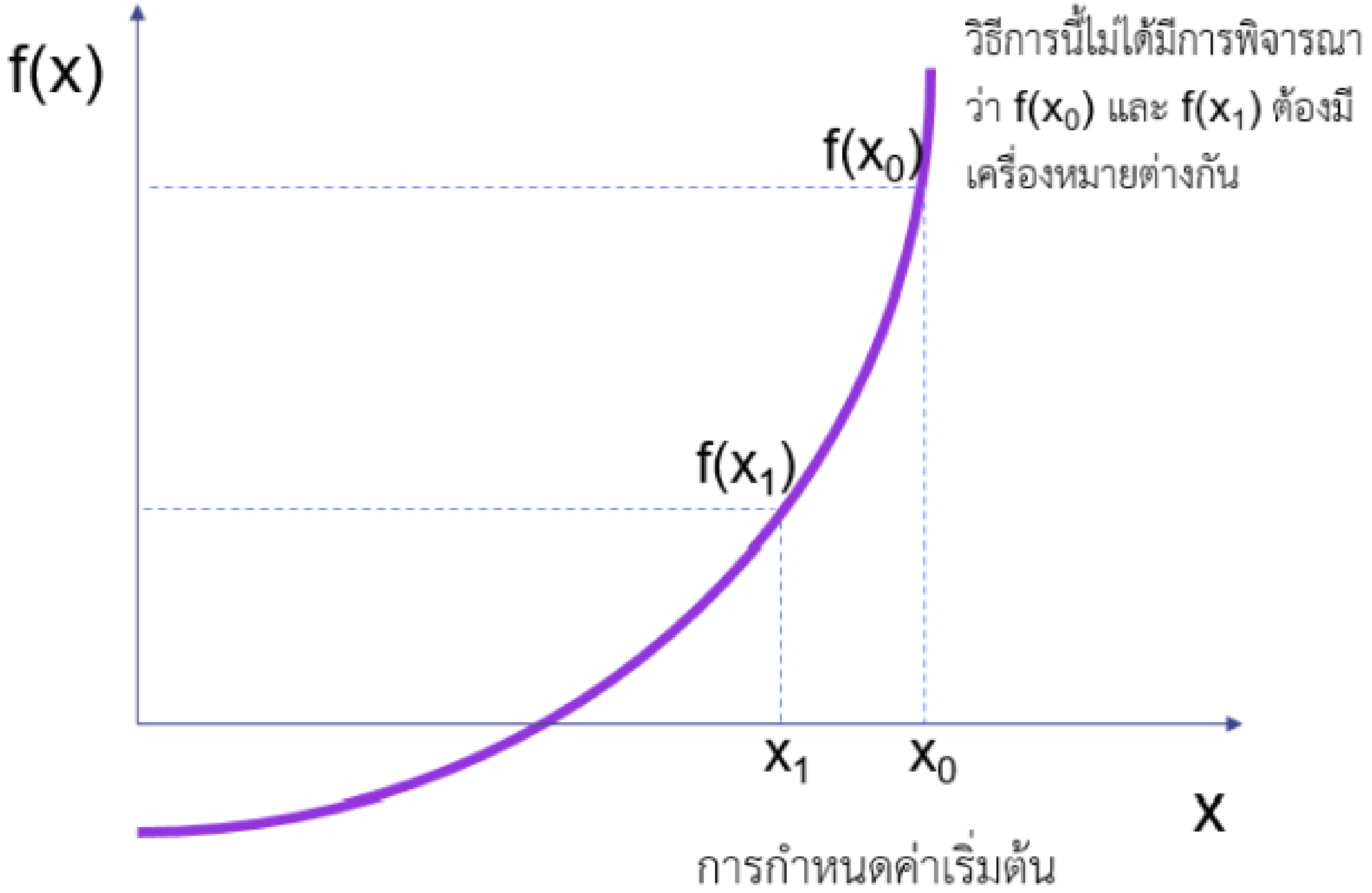
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

วิธีการซีแคนซ์

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

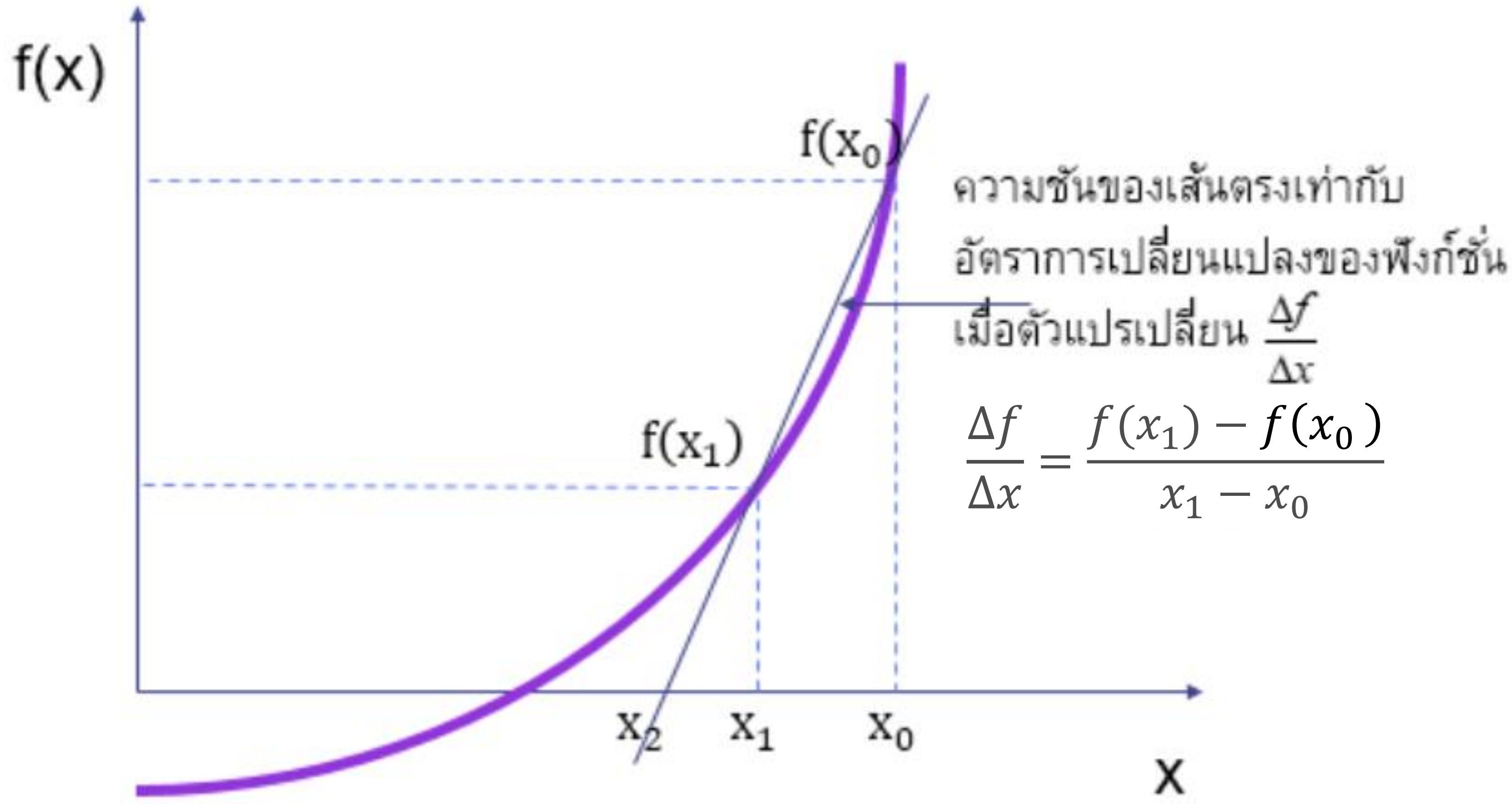
วิธีการซีแคนซ์ต้องกำหนดค่าเริ่มต้น 2 จำนวน คือ ค่า x_0 และ x_1 สำหรับคำนวณค่า x_2 ในสมการข้างบนและปรับค่า x_{i+1} เป็นลำดับจนลู่เข้าหารากของสมการไม่เชิงเส้น และวิธีการนี้ไม่ได้จัดอยู่ในกลุ่มที่ต้องกำหนดช่วงค่า $[a, b]$ ดังนั้นจึงไม่ใช่สิ่งจำเป็นที่ค่า x_0 และ x_1 จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไข $f(x_0) \times f(x_1) < 0$ ตามหลักของทฤษฎีค่ากลาง

วิธีการซีแคนซ์



การกำหนดค่าเริ่มต้นของวิธีการซีแคนซ์

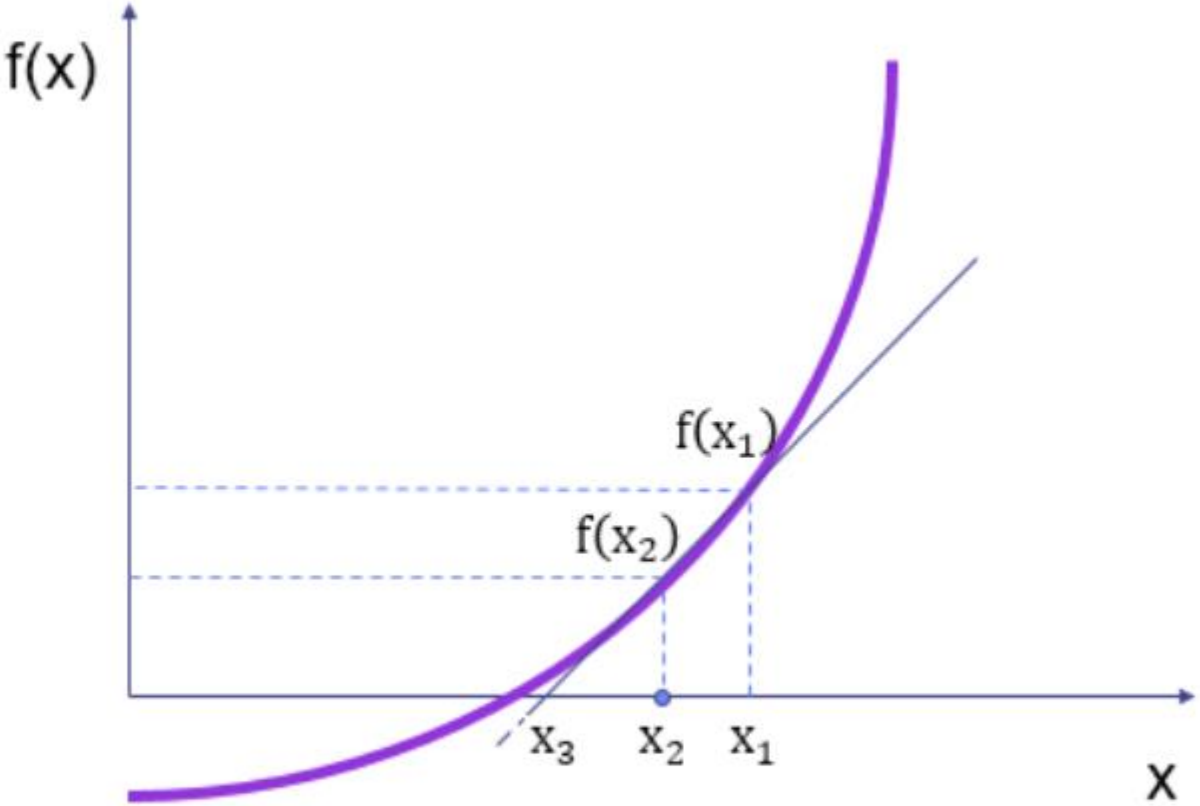
วิธีการซีแคนซ์



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

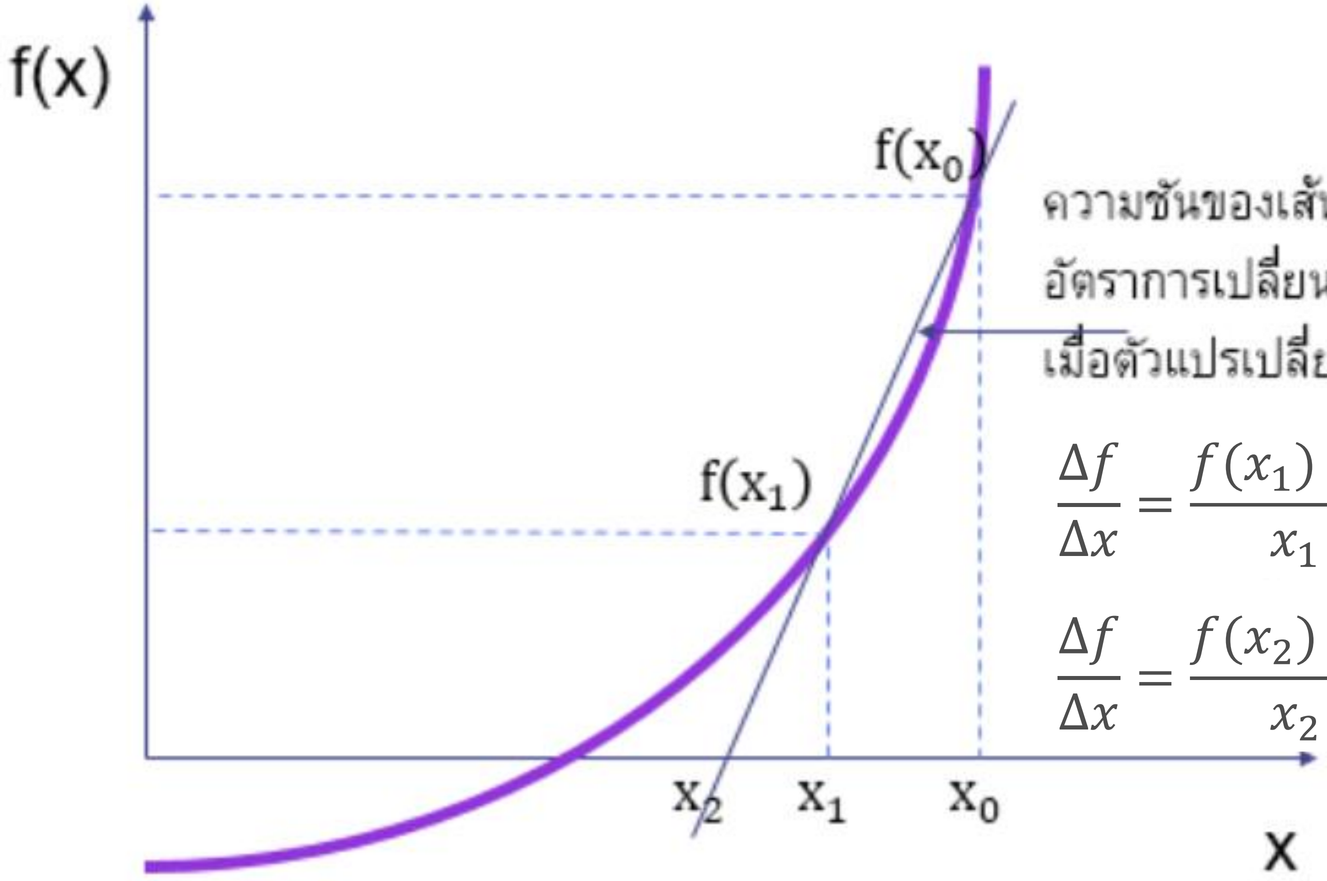
การสร้างเส้นตรงประมาณเส้นโค้งด้วยวิธีการซีแคนซ์

วิธีการซีแคนซ์



การวนซ้ำปรับค่า x_{i+1} เพื่อลู่เข้าสู่รากของสมการไม่เชิงเส้น

วิธีการซีแคนซ์



ความชันของเส้นตรงเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชั่นเมื่อตัวแปรเปลี่ยน $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

การสร้างเส้นตรงประมาณเส้นโค้งด้วยวิธีการซีแคนซ์

วิธีการซีแคนซ์

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{0-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$(f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_1) = -f(x_1)(x_1 - x_0)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{-f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

ลองทำ

1. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 4$ และต้องการหาค่าของ x ที่ทำให้ $f(x) = 0$ (ค่า root) โดยใช้วิธี False Position Method ด้วยการเริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $x_0 = 4$ และ $x_1 = 3$

2. พิจารณาสมการ $f(x) = x^2 - 5$ คำนวณหาค่า root ของสมการนี้โดยใช้วิธี Newton-Raphson Method โดยมีจุดเริ่มต้น $x_0 = 2$

3. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 4$ คำนวณหาค่า root ของสมการนี้โดยใช้วิธี Secant Method โดยเริ่มต้นจาก $x_0 = 3$ และ $x_1 = 2$

ที่มา

เอกสารคำสอน วิชา cos3101 ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ ผู้สอน ผศ.ดร. อัณณ์นุพันธ์ รอดทุกข์

แบบฝึกหัด

1. สมการไม่เชิงเส้น $f(x) = x^2$ และ $f(x) = \cos(x) + 1$ เป็นสมการที่มีความต่อเนื่องและมีค่าราก จงบอกเหตุผลว่าทำไมวิธีการ Bisection ถึงไม่สามารถหาค่ารากของสมการดังกล่าวได้

2. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
   - $2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[1, 1.5]$
   - $e^x - 3x^2 = 0$ คำตอบอยู่ในช่วง $[3, 4]$

แบบฝึกหัด

1. จงประยุกต์วิธีการนิวตันราฟสันสำหรับการหารากของสมการ $f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4}$ โดยกำหนด $x_0 = 0.05$

2. จงประยุกต์วิธีการซีแคนซ์สำหรับการหารากของสมการ $f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4}$ โดยกำหนด $x_0 = 0.02$ และ $x_1 = 0.05$

หมายเหตุ ทั้ง 2 ข้อให้ทำอย่างน้อย 3 รอบ