COS3101 วิธีเชิงตัวเลข (NUMERICAL METHOD)

อ.สราวุธ มีศรี

อีเมล: sarawut.meesri@rumail.ru.ac.th

คำอธิบายรายวิชา

- COS3101 วิธีเชิงตัวเลข (NUMERICAL METHOD) 3(3-0-6)
- วิชาบังคับก่อน (PRE-REQUISITE) : COS1102
- ความแม่นยำและความเที่ยงของวิธีการเชิงตัวเลข การหาค่าผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น การประมาณสมการพหุนามเทย์เลอร์และแมคคลอริน การประมาณค่าในช่วง การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุดสำหรับเส้นโค้งที่เหมาะสม การหาผลเฉลยขอระบบสมการเชิงเส้น
- recision and accuracy of numerical method, root finding of nonlinear equations, Taylor and Maclaurin polynomials approximation, interpolation, least-square regression of curve fitting, solution of linear equations system

ตำรา / เอกสารประกอบการเรียน

- เอกสารคำสอน วิชา cos3101 ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง ผู้สอน ผศ.ดร. อัณณ์นุพันธ์ รอดทุกข์
- สไลด์ประกอบการบรรยายวิชา Numerical Analysis and Applications ผู้สอน รศ.ดร. ศุภกานต์ พิมลธเรศ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- เอกสารประกอบคำสอนรายวิชา การวิเคราะห์เชิงตัวเลข ดร.วิฑูรย์ พึ่งรัตนา
- ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขม ดร. ธนาวุฒิ ประกอบผล
- การวิเคราะห์เชิงตัวเลข ดร.พรทรัพย์ พรสวัสดิ์
- Presentation Slide

การวัดผล/การตัดเกรด

- สอบ 80%
  - สอบกลางภาค 40%
  - สอบปลายภาค 40%
- ส่งงาน 20%
- กรณี
  - น.ศ. ที่ส่งการบ้าน และสอบปลายภาค เกรดจะคิดจากการบ้าน 20% และสอบปลายภาค 80%
  - น.ศ. ที่สอบปลายภาคเพียงอย่างเดียว เกรดจะคิดจากการสอบปลายภาค 100%

คะแนน	เกรด
80-100	A
75-79	B+
70-74	B
65-69	C+
60-64	C
55-59	D+
50-54	D
00-49	F

วัน เวลา สถานที่เรียน

- ทุกวันศุกร์
- เวลา 13.30-15.20 น.
- ห้อง SCL205
- Google classroom
  - https://classroom.google.com/c/ODIwNzY0MDc3MTE1?cjc=w5okfsbd
  - นักศึกษาต้องมี Email ของ @rumail.ru.ac.th

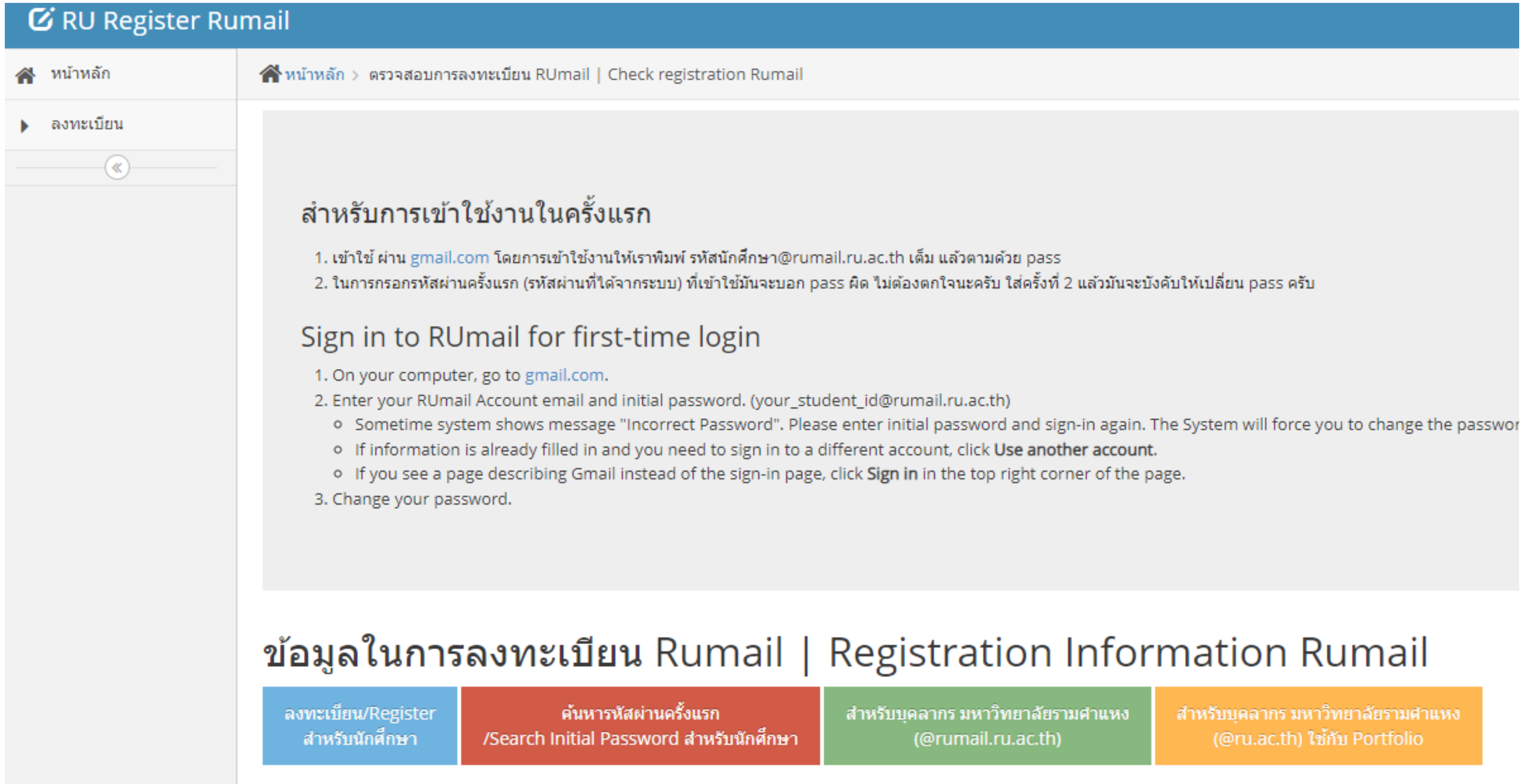
Google classroom

bitly

รหัสชั้นเรียน w5okfsbd

ไม่มีเมล์ @rumail.ru.ac.th ทำอย่างไร

➢ นักศึกษาสามารถเข้าดูวิธีสมัครได้ที่ https://bit.ly/2SWNpQC



ช่องทางในการติดต่อกับอาจารย์ผู้สอน

- กลุ่มไลน์: https://line.me/ti/g/vswJByvrrE
- อีเมล:
  - sarawut.meesri@ru.ac.th
  - sarawut.meesri@rumail.ru.ac.th

เนื้อหา

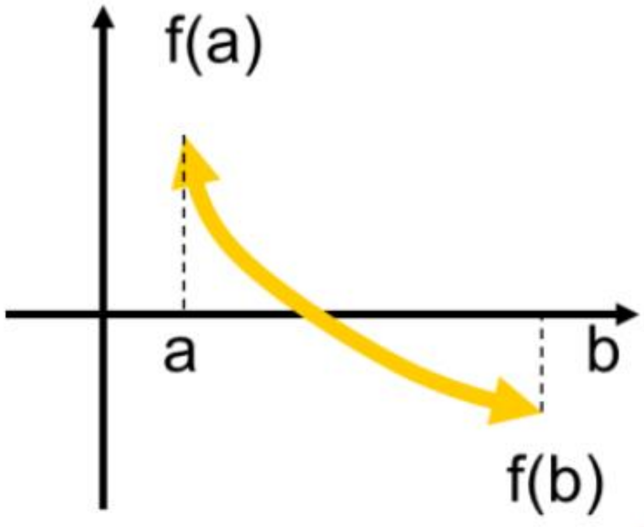
ครั้งที่	วันที่	หัวข้อ	หมายเหตุ
1	21 พฤศจิกายน 68	แนะนำรายวิชา บทนำ ค่าคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	
	28 พฤศจิกายน 68	(งดบรรยาย) ติดราชการ	
	5 ธันวาคม 68	(วันคล้ายวันพระบรมราชสมภพ) ปีใหม่	
2	12 ธันวาคม 68	การหารากของสมการแบบไม่เชิงเส้น 1	สอน RAM1131
3	19 ธันวาคม 68	การหารากของสมการแบบไม่เชิงเส้น 2	
4	26 ธันวาคม 68	การหาคำตอบของชุดสมการเชิงเส้น 1	
	2 มกราคม 69	(งดบรรยาย) ปีใหม่	
5	9 มกราคม 69	การหาคำตอบของชุดสมการเชิงเส้น 2	
6	16 มกราคม 69	สอบกลางภาค	
	23 มกราคม 69	(งดบรรยาย) สอบซ่อมของภาค 1/68	
7	30 มกราคม 69	Polynomial approximation Taylor Series	
8	6 กุมภาพันธ์ 69	Polynomial approximation Maclaurin Series	
9	13 กุมภาพันธ์ 69	การประมาณค่าในช่วง (interpolation) 1	
10	20 กุมภาพันธ์ 69	การประมาณค่าในช่วง (interpolation) 2	
11	27 กุมภาพันธ์ 69	การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด	สอน RAM1131
12	6 มีนาคม 69	สอบปลายภาค	

บทนำ

- **รากของสมการ (Roots of Equation)**
  - **Bracketing Method (แบบตะกร้า)**
    - วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)
    - วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)
  - **Open Method (แบบเปิด) คือ**
    - วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method)
    - วิธีซีแคน (Secant method)

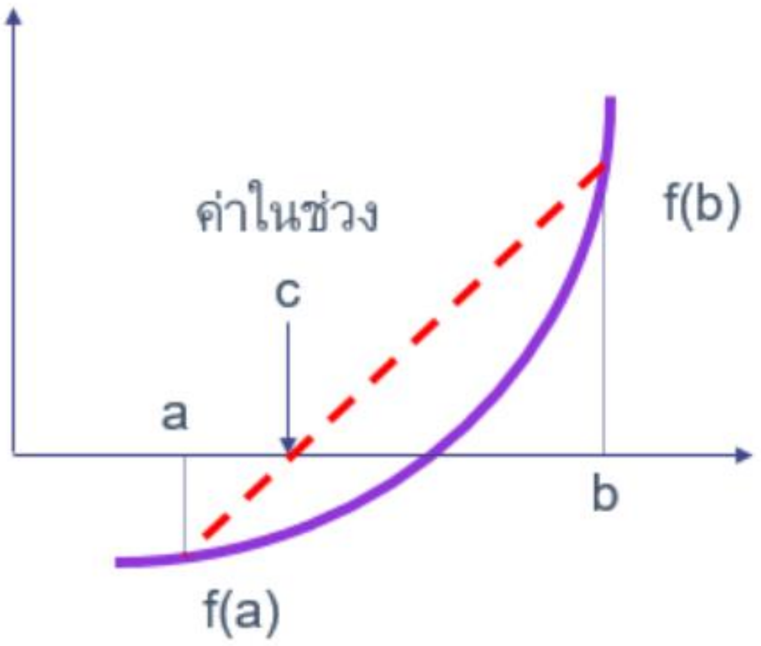
บทนำ

- รากของสมการ (Roots of Equation)
  - Bracketing Method (แบบตะกร้ำ)
    - วิธีการแบ่งครึ่งช่วงค่า (Bisection Method)



บทนำ

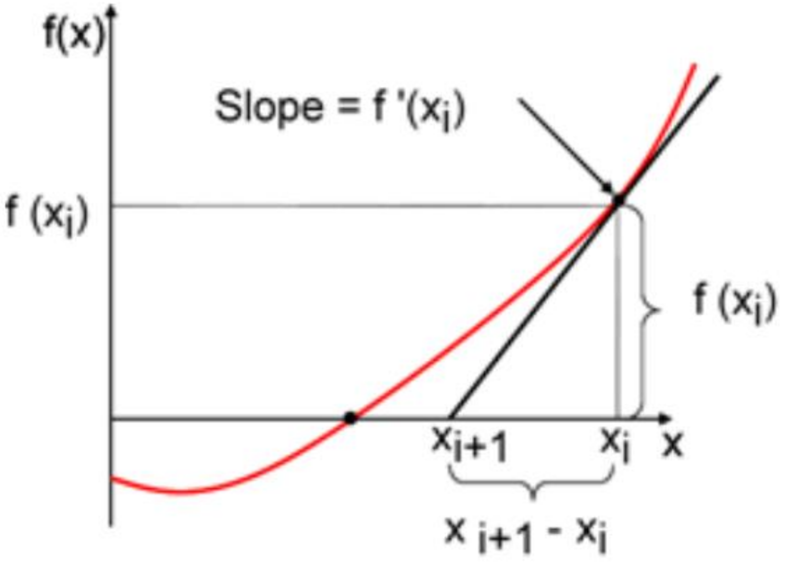
- รากของสมการ (Roots of Equation)
  - Bracketing Method (แบบตะกร้า)
    - วิธีการวางตัวผิดที่ (False Position Method)



$$c = b - \frac{f(b)(a-b)}{f(a)-f(b)}$$

บทนำ

- รากของสมการ (Roots of Equation)
  - Open Method (แบบเปิด) คือ
    - วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson method)

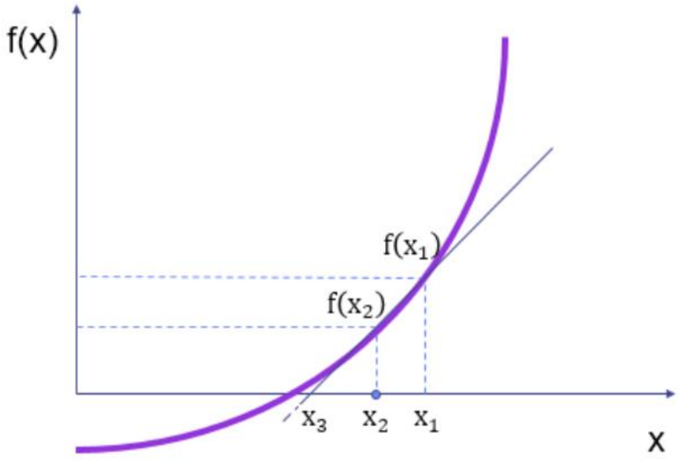


การสร้างเส้นตรงสำหรับประมาณเส้นโค้ง

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

บทนำ

- ราากของสมการ (Roots of Equation)
  - Open Method (แบบเปิด) คือ
    - วิธีซีแคน (Secant method)



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

การวนซ้ำปรับค่า x_{i+1} เพื่อลู่เข้าสู่รากของสมการไม่เชิงเส้น

บทนำ

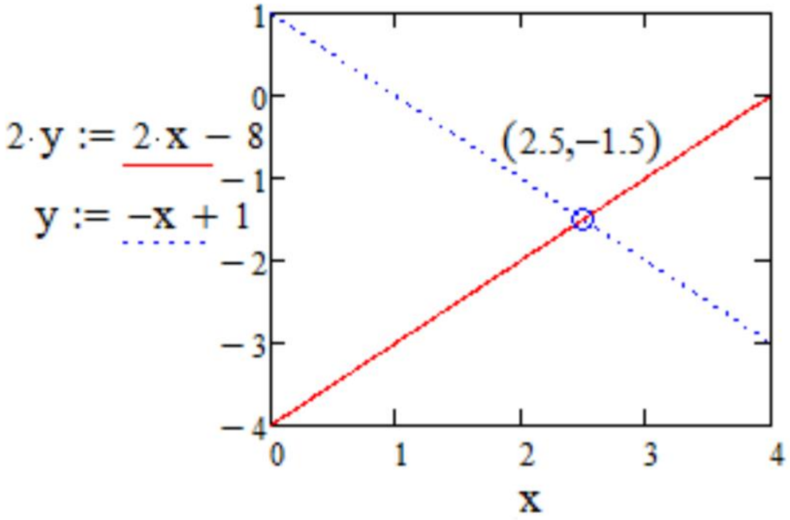
- **ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)**
  - การกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination)
  - การกำจัดแบบเกาส์เซียนจอร์แดน (Gaussian Jordan Elimination)
    - ประยุกต์ใช้หาเมตริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

ตัวอย่าง

- จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรสองของสมการต่อไปนี้

$$2x - 2y = 8 \qquad eq.1$$
$$2x + 2y = 2 \qquad eq.2$$

- การแก้ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรข้างต้นถูกนำเสนอในมุมมองทางเรขาคณิตดังกราฟต่อไปนี้



ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นบนการตัดกันของ 2 เส้นตรง

บทนำ

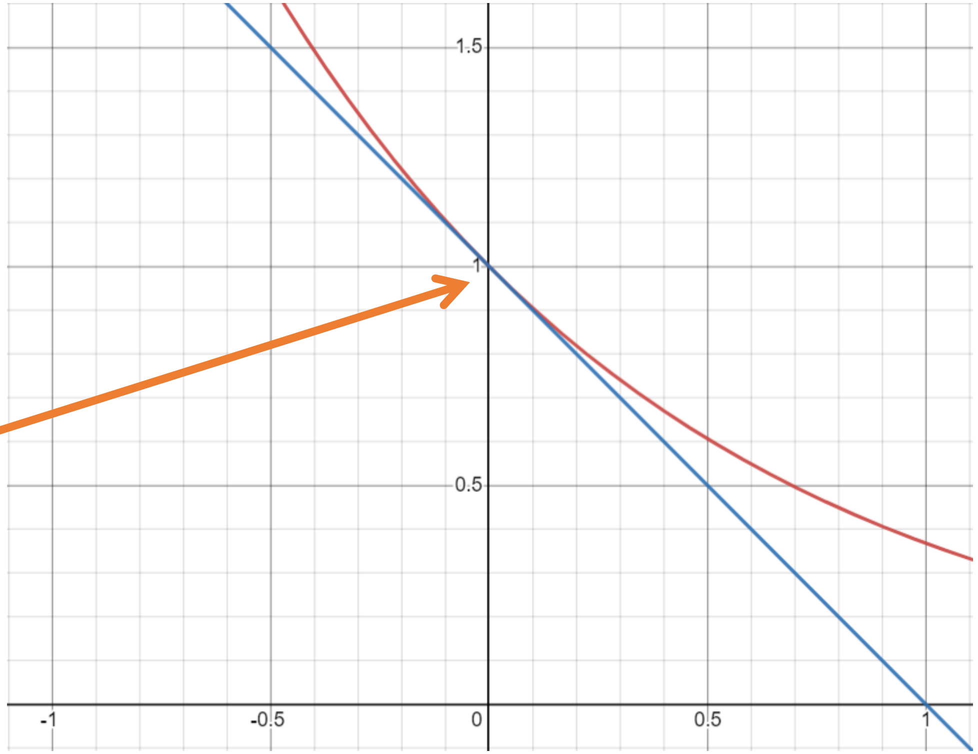
- **การประมาณค่าฟังก์ชัน (Approximation of functions)**
  - Polynomial approximation Taylor Series
  - Polynomial approximation Maclaurin Series

ตัวอย่าง การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยพหุนาม

พิจารณาฟังก์ชันสองฟังก์ชันต่อไปนี้

$f(x) = e^{-x}$

$g(x) = 1 - x$



$x = 0$

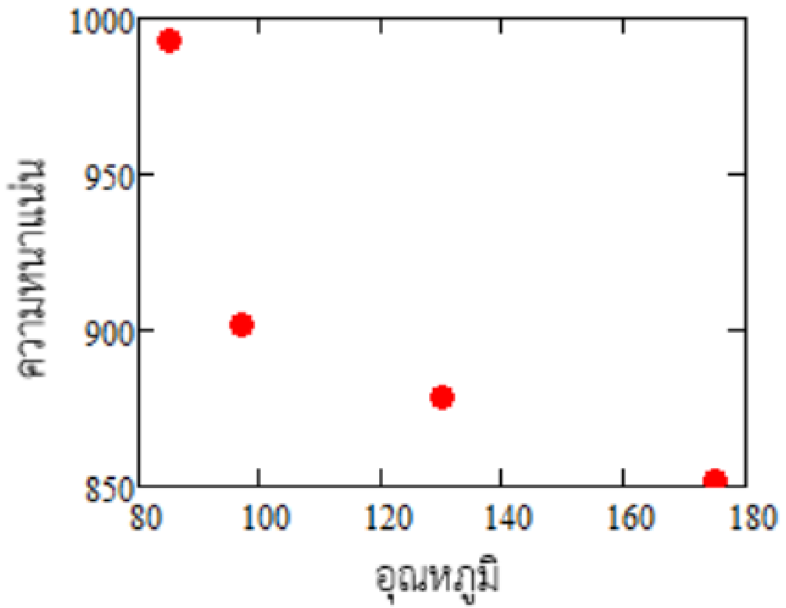
$f(x) \approx g(x)$

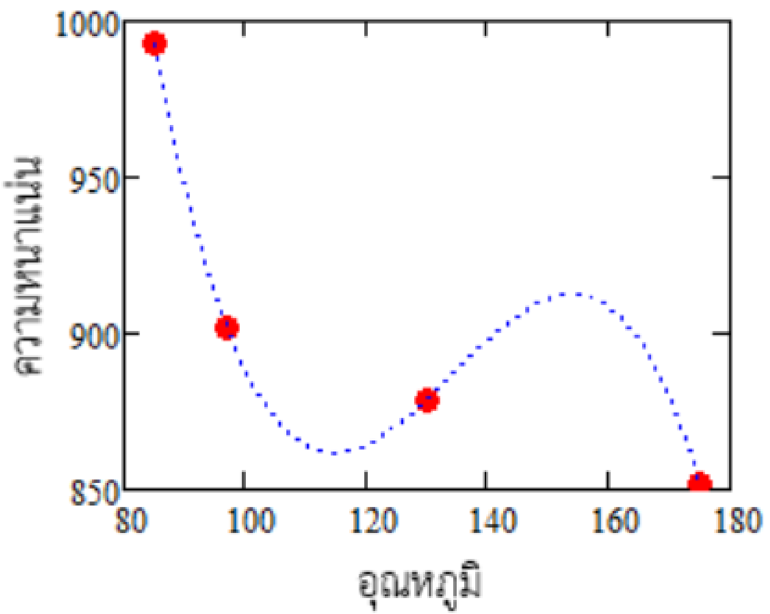
บทนำ

- **การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)**
  - พหุนามลากรองจ์ (Lagrange Polynomial)
  - พหุนามนิวตันแบบผลต่างด้านหน้า (Newton forward difference)
    - กรณีช่วงห่างระหว่างจุดข้อมูลไม่เท่ากัน
    - กรณีช่วงห่างระหว่างจุดข้อมูลเท่ากัน

การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

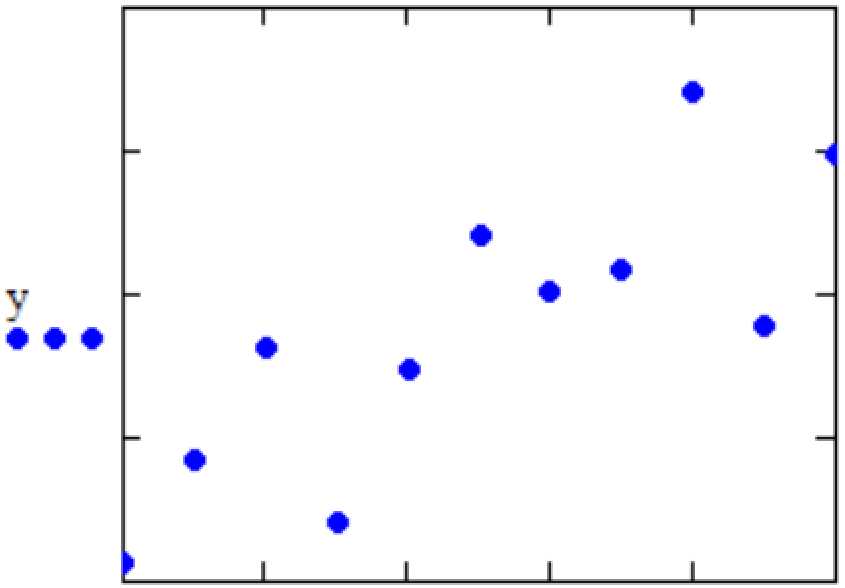
กราฟของสมการพหุนามจะผ่านจุดต่าง ๆ ของเซตข้อมูลที่กำหนด





สมการพหุนามที่ผ่านข้อมูลค่าความหนาแน่นของสารโซเดียมที่อุณหภูมิต่างๆ

การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด
(Least squares regression)



x_i คือ ค่าความสูง และ y_i คือ ค่าความเร็วของลม

บทนำ

- Mathematical problems can be solved in two ways.
  - Analytical methods directly solve the problems with actual solution.
  - Numerical methods are mathematical techniques used for solving mathematical problems that cannot be solved or are difficult to solve analytically.

บทนำ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวิธีเชิงตัวเลข

- วิธีเชิงตัวเลข คือ แบบแผนการคำนวณที่ดำเนินการในรูปแบบพีชคณิตที่ง่ายและสะดวกโดยใช้หลักการบวกลบคูณหารและยกกำลัง
- วิธีเชิงตัวเลขสามารถลดความยุ่งยากสำหรับการคำนวณในหลากหลายโมเดลทางคณิตศาสตร์ เช่น
  - การหารากของสมการ
  - การประมาณฟังก์ชันอดิศัยด้วยพหุนามกำลัง หรือการประมาณฟังก์ชันที่ไม่ทราบรูปแบบสมการที่แน่นอน โดยเก็บบันทึกเฉพาะข้อมูลบางช่วงของฟังก์ชันไว้
- วิธีเชิงตัวเลขสามารถนำข้อมูลเหล่านั้นมานิยามสมการพหุนามเพื่อใช้ประมาณค่าในช่วงของฟังก์ชัน

ความคลาดเคลื่อน

- ค่าที่คลาดเคลื่อนซึ่งเกิดขึ้นในกระบวนการคำนวณเชิงตัวเลข
- ความคลาดเคลื่อนสามารถเกิดขึ้นได้ในหลากหลายขั้นตอน และอาจการสะสมจนก่อให้เกิดความผิดพลาดในผลลัพธ์สุดท้าย
- การคำนวณค่าระหว่างจำนวนเต็ม (Integer) อาจไม่ก่อผลกระทบด้านความคลาดเคลื่อน เนื่องจากรูปแบบการเก็บค่าของคอมพิวเตอร์และผลลัพธ์ไม่เกินค่าสูงสุดที่คอมพิวเตอร์จะเก็บได้
- แต่ถ้าผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีขนาดมากกว่าเกณฑ์สูงสุด คอมพิวเตอร์จะเปลี่ยนรูปแบบการเก็บมาเป็นจำนวนจุดลอยแทน (Floating Point)

ความคลาดเคลื่อน

- นอกจากนี้คอมพิวเตอร์จะเก็บค่าจำนวนจริงในรูปแบบจำนวนจุดลอยฐานสองเช่นเดียวกัน และบ่อยครั้งที่การคำนวณค่าด้วยจุดลอยจะได้ผลลัพธ์เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้นซึ่งเป็นสาเหตุหนึ่งของค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

ตัวอย่าง

กรณี $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$

- การคำนวณจะมีการประมาณค่า $\frac{1}{3}$ และ $\sqrt{2}$ แล้วนำค่าประมาณทั้งสองจำนวนมารวมกัน
- ค่าที่คลาดเคลื่อนมีสาเหตุมาจากการปัดเศษค่า $\frac{1}{3}$ และ $\sqrt{2}$
  - การปัดเศษทศนิยมไม่รู้จบ ของ $\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$
  - การปัดเศษที่ไม่ซ้ำ ของ $\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots$

ตัวอย่าง

- $(\sqrt{19})^{2}$

```python
import math
print((math.sqrt(19))**2)
```

```
19.000000000000004
```

- ค่าคลาดเคลื่อนเกิดจากการปัดเศษของเลขฐานสองในรูปแบบที่จัดเก็บในระบบคอมพิวเตอร์

เลขทศนิยมในระบบเลขฐานสิบ

- รูปแบบของจำนวนจุดลอยในระบบเลขฐานสิบมีรูปแบบดังนี้

$$\pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_k \times 10^n$$

โดยที่ d_i เป็นตัวเลขที่อยู่ในระบบเลขเศษส่วนหรือแมนทิสซา

ซึ่ง $1 \leq d_1 \leq 9$ และ $0 \leq d_i \leq 9$

ส่วน n คือเลขยกกำลังของเลขฐานสิบ

เลขทศนิยมในระบบเลขฐานสิบ

ตัวอย่าง

186.74 เขียนอยู่ในรูปมาตรฐานจำนวนจุดลอยในระบบฐานสิบ คือ

$$0.18674 \times 10^{3}$$

0.00005647 เขียนอยู่ในรูปมาตรฐานจำนวนจุดลอยในระบบฐานสิบ คือ

$$0.5647 \times 10^{-4}$$

เลขทศนิยมในระบบเลขฐานสิบ

วิธีการปัดเศษ (rounding) และการตัดทิ้ง (chopping) จะถูกนำมาใช้ในการประมาณจำนวนจริงในกรณีที่การคำนวณเชิงตัวเลขมีการกำหนดเลขนัยสำคัญ (เลขนัยสำคัญตัวเลขหลังจุดทศนิยมในจำนวนจุดลอย) เช่น

ถ้ามีการกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 จำนวน สำหรับ $\pi = 0.314159265\ldots \times 10^1$
การประมาณค่าด้วยวิธีการตัดทิ้งจะเท่ากับ $\pi = 0.31415 \times 10^1$

ส่วนวิธีการปัดเศษจะเท่ากับ $\pi = 0.31416 \times 10^1$

เลขทศนิยมในระบบเลขฐานสิบ

หลักของการปัดเศษให้เหลือจำนวนแมนทิสซาเพียง p ตำแหน่ง $\left(\pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_p \times 10^n\right)$ คือ

ถ้า $d_{p+1} < 5$ แล้ว ให้ตัดแมนทิสซา $d_{p+1}, d_{p+2} \ldots$ ทิ้งไป

แต่ถ้า $d_{p+1} \geq 5$ แล้ว $d_p = d_p + 1$ และตัดแมนทิสซา $d_{p+1}, d_{p+2} \ldots$ ทิ้งไป

ดังนั้นการประมาณค่าจำนวนจริงจะเป็นสาเหตุหนึ่งของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการคำนวณ

ลองทำ

- แปลงเลขทศนิยมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบจำนวนจุดลอยในระบบฐานสิบ โดยกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 ตำแหน่ง ด้วยวิธีการปัดเศษ (Rounding) และด้วย การตัดทิ้ง (chopping)
- 1.1.) $-\frac{3}{13}$
- 1.2.) $\sqrt{23}$
- 1.3.) $914754.7315 \times 10^{-8}$
- 1.4.) 9π กำหนดให้ π = 3.14159
- 1.5.) $-0.000000014762594 \times 10^{10}$

ความคลาดเคลื่อน

- ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเนื่องจากรูปแบบการจัดเก็บตามมาตราฐาน IEEE-754
- ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดทิ้ง (chopping) เพื่อกำหนดเลขนัยสำคัญ
- ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (rounding) เพื่อกำหนดเลขนัยสำคัญ
- ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)
- ค่าความความเคลื่อนจากแผ่ขยาย

ความคลาดเคลื่อน

ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเนื่องจากรูปแบบการจัดเก็บตามมาตราฐาน IEEE-754

- ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดจากคอมพิวเตอร์ใช้จำนวนบิตคงที่ (52 บิต) ในการเก็บข้อมูลเศษส่วนในระบบเลขฐานสอง
- ถ้ามีจำนวนบิตของเศษส่วนเกินกว่าที่เกณฑ์กำหนดไว้ จะเกิดการปัดเศษและตัดบิตที่เกินทิ้งไป
- ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษอาจเป็นข้อผิดพลาดที่เล็กน้อยมาก แต่การสะสมความผิดพลาดเพิ่มเติมในการคำนวณต่อเนื่องอาจส่งผลให้ผลลัพธ์สุดท้ายมีค่าเปลี่ยนแปลงไปจากผลลัพธ์จริง

ความคลาดเคลื่อน

ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดทิ้ง (chopping) เพื่อกำหนดเลขนัยสำคัญ

- กรณีกำหนดเลขนัยสำคัญ 4 จำนวน
- เลขนัยสำคัญสำหรับ 72.32451 คือ 0.7232×10^{2} ซึ่ง 451 ถูกตัดทิ้ง
- ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ 0.451×10^{-2} คำนวณได้จาก

$$
\begin{aligned}
72.32451 &= 0.7232451 \times 10^{2} \\
&= (0.7232 + 0.0000451) \times 10^{2} \\
&= (0.7232 + (0.451 \times 10^{-4})) \times 10^{2}
\end{aligned}
$$

ความคลาดเคลื่อน

ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (rounding) เพื่อกำหนดเลขนัยสำคัญ

- กรณีกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 จำนวนด้วยวิธีการปัดเศษ
- เลขนัยสำคัญสำหรับ 72.91867 คือ 0.72919×10^{2}
- ค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ $(0.67 - 1) \times 10^{-3}$
- เลขนัยสำคัญสำหรับ 18.63421 คือ 0.18634×10^{2}
- ค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ $(0.21) \times 10^{-3}$

ความคลาดเคลื่อน

ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)

- ความคลาดเคลื่อนประเภทนี้จะเกิดขึ้นในการคำนวณของวิธีเชิงตัวเลข เช่น การคำนวณอนุกรมแมคคลอรินของฟังก์ชัน $\sin x$ ซึ่งในกระบวนการไม่สามารถหาผลรวมได้ถึงเทอมอนันต์ ดังนั้นการคำนวณจึงอยู่ในรูปแบบของการประมาณค่าโดยกำหนดจำนวนของการบวก t เทอม และตัดเทอมบวกที่ t+1 ทิ้งไป ผลรวมของเทอมที่ตัดทิ้งจะเป็นเศษเหลือหรือค่าคลาดเคลื่อนของอนุกรม

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

ความคลาดเคลื่อน

ค่าความความเคลื่อนจากแผ่ขยาย

- ค่าคลาดเคลื่อนสามารถเกิดได้หลากหลายปัจจัย ทั้งกรณีการปัดเศษ การตัดทิ้ง และการตัดปลาย กรณีที่การคำนวณเชิงตัวเลขมีความซับซ้อน หลากหลายขั้นตอน ค่าคลาดเคลื่อนเดิมจะถูกขยายเพิ่ม หรือสะสมมากจากการดำเนินการทางพีชคณิตในคอมพิวเตอร์ บ่อยครั้งความคลาดเคลื่อนจะถูกขยายต่อเนื่องจนผลลัพธ์สุดท้ายมีความผิดพลาดโดยสิ้นเชิง

การวัดความคลาดเคลื่อน

- ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute error) สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E_{abs} และมีรูปแบบการคำนวณดังนี้

$$E_{abs} = |v - v'|$$

  - v คือ ค่าจริง
  - v' คือ ค่าประมาณที่ใช้ในการคำนวณ

การวัดความคลาดเคลื่อน

- ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute error)
- ตัวอย่าง จงคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากการคำนวณ $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}$ โดยกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 จำนวน ด้วยวิธีการตัดทิ้ง (chopping)
- ค่า $\frac{5}{7}$ และ $\frac{1}{3}$ จะถูกจัดเก็บในรูปแบบจุดลอยด้วยเลขนัยสำคัญ 5 จำนวน ดังนี้
- $\frac{5}{7}=0.71428\times 10^{0}$
- $\frac{1}{3}=0.33333\times 10^{0}$

การวัดความคลาดเคลื่อน

- ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute error)
- ตัวอย่าง จงคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากการคำนวณ $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}$ โดยกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 จำนวน ด้วยวิธีการตัดทิ้ง (chopping)
- ดังนั้น $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}$ ในรูปแบบเลขนัยสำคัญ 5 จำนวน เท่ากับ

$$= 0.71428 \times 10^0 + 0.33333 \times 10^0$$

$$= 0.71428 \times 10^0 + 0.33333 \times 10^0$$

$$= 1.04761 \times 10^0$$

$$= 0.10476 \times 10^1$$

การวัดความคลาดเคลื่อน

- ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute error)
- ตัวอย่าง จงคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากการคำนวณ $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}$ โดยกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 จำนวน ด้วยวิธีการตัดทิ้ง (chopping)
- ค่าจริงของ $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}=\frac{22}{21}$
- คำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ เท่ากับ

$$E_{abs}=\left|\frac{22}{21}-0.10476\times 10^{1}\right|$$

$$E_{abs}=0.190\times 10^{-4}$$

การวัดความคลาดเคลื่อน

- ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error) สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E_{rel} และมีรูปแบบการคำนวณดังนี้

$$E_{rel} = \left|\frac{v - v'}{v}\right|$$

  - v คือ ค่าจริง
  - v' คือ ค่าประมาณที่ใช้ในการคำนวณ

การวัดความคลาดเคลื่อน

- ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error)
- ตัวอย่าง จงคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จากการคำนวณ $\frac{5}{7} + \frac{1}{3}$ โดยกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 จำนวน ด้วยวิธีการตัดทิ้ง (chopping)

$$E_{rel} = \left| \frac{0.190 \times 10^{-4}}{\frac{22}{21}} \right|$$

$$E_{rel} = 0.182 \times 10^{-4}$$

การวัดความคลาดเคลื่อน

- ร้อยละความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error) สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E_{per} และมีรูปแบบการคำนวณดังนี้

$$E_{per} = \left|\frac{v - v'}{v}\right| \times 100$$

  - v คือ ค่าจริง
  - v' คือ ค่าประมาณที่ใช้ในการคำนวณ

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.1.1 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ของ 11.5528 (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

วิธีทำ จากค่า 11.5528 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.115528×10^2 เนื่องจากคอมพิวเตอร์นี้มีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง ดังนั้นค่าจากการทำงาน คือ 0.1155×10^2

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ

$$\begin{aligned} E_{abs} &= \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right| \\ &= \left|0.1155 \times 10^2 - 11.5528\right| \\ &= 0.0028 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ

$$E_{rel} = \left| \frac{\text{ค่าจากการทำงาน} \ - \ \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}} \right|$$

$$= \frac{0.0028}{11.5528}$$

$$= 2.4236 \times 10^{-4}$$

ตัวอย่าง

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
E_{per} &= E_{\text{rel}} \times 100 \\
&= 2.4236 \times 10^{-4} \times 100 \\
&= 2.4236 \times 10^{-2}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.1.2 สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้ระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่ง จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ของค่าจากการคำนวณ $47.5581 - 15.89$ (โดยใช้วิธีการปัดเศษ)

วิธีทำ ค่าจริง คือ $47.5581 - 15.89 = 31.6681$

พิจารณาหาค่าจากการทำงาน จากค่า 47.5581 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.475581×10^2 เครื่องจะเก็บเป็น 0.4756×10^2 และค่า 15.89 เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยคือ 0.1589×10^2 เครื่องจะเก็บเป็น 0.1589×10^2

พิจารณาค่า $0.4756 \times 10^2 - 0.1589 \times 10^2 = 47.56 - 15.89 = 31.67$ เขียนอยู่ในรูปจำนวนจุดลอยได้เป็น 0.3167×10^2 ดังนั้นค่าจากการทำงานคือ 0.3167×10^2 เพราะฉะนั้น

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เท่ากับ

$$
\begin{aligned}
E_{abs} &= \left|\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}\right| \\
&= \left|0.3167 \times 10^2 - 31.6681\right| \\
&= 0.0019
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ

$$E_{rel} = \left| \frac{\text{ค่าจากการทำงาน} - \text{ค่าจริง}}{\text{ค่าจริง}} \right|$$

$$= \frac{0.0019}{31.6681}$$

$$= 5.9997 \times 10^{-5}$$

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเท่ากับ

$$E_{per} = E_{\text{rel}} \times 100$$

$$= 5.9997 \times 10^{-5} \times 100$$

$$= 5.9997 \times 10^{-3}$$

โจทย์

จงแปลงเลขทศนิยมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบจำนวนจุดลอยในระบบฐานสิบ โดยกำหนดเลขนัยสำคัญ 4 ตำแหน่ง ด้วยวิธีการปัดเศษ (Rounding)

- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{7}$
- $\sqrt{19}$
- 6π กำหนดให้ π = 3.14159
- 85.476327×10^{-4}
- -3.52265×10^{-3}

โจทย์

จงคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จากการกระบวนการเชิงตัวเลข โดยกำหนดเลขนัยสำคัญ 3 ตำแหน่ง ด้วยวิธีการตั้งทิ้ง (chopping) และค่าจริงกำหนดเลขนัยสำคัญ 5 ตำแหน่งด้วยวิธีการตั้งทิ้ง (chopping)

- $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$
- 145.73×20.627
- $24853 + 1.4825$

ที่มา

- เอกสารคำสอน วิชา cos3101 ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
  ผู้สอน ผศ.ดร. อัณณ์นุพันธ์ รอดทุกข์
- สไลด์ประกอบการบรรยายวิชา Numerical Analysis and Applications
  ผู้สอน รศ.ดร. ศุภกานต์ พิมลธเรศ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
  คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- เอกสารประกอบคำสอนรายวิชา การวิเคราะห์เชิงตัวเลข ดร.วิฑูรย์ พึ่งรัตนา
- ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขม ดร. ธนาวุฒิ ประกอบผล
- การวิเคราะห์เชิงตัวเลข ดร.พรทรัพย์ พรสวัสดิ์