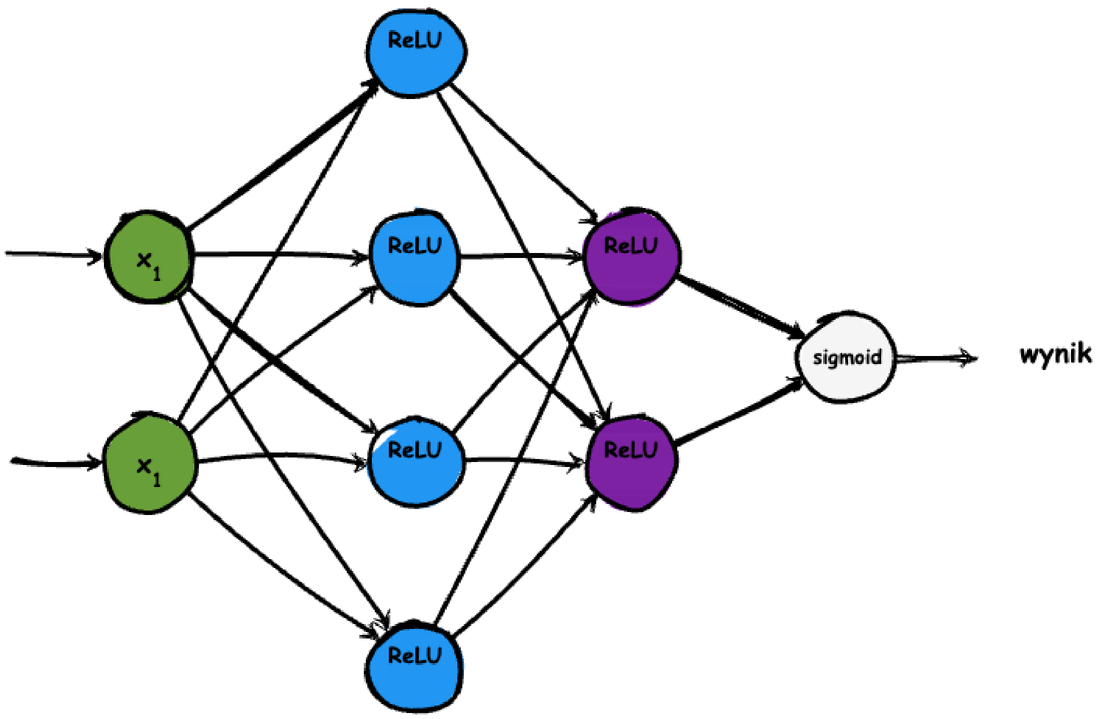
Prosta sieć MLP

Równania Matematyczne Sieci Neuronowej (tylko przebieg do przodu, inferencja)



Założenia:

Załóżmy następujące wagi i biasy (wartości są zmyślone):

1. **Pierwsza warstwa ukryta:**
   - Wagi $\mathbf{W}_1$ (pierwsza macierz pomiędzy 2 sygnałami wejściowym i 4 neuronami ReLU):

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & -0.5 \\ -0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

   - Biasy $\mathbf{b}_1$:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

2. **Druga warstwa ukryta:**
   - Wagi $\mathbf{W}_2$:

$$\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.4 & 0.3 & 0.1 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

   - Biasy $\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

3. **Warstwa wyjściowa:**
   - Wagi $\mathbf{W}_3$:

$$\mathbf{W}_3 = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.6 \end{pmatrix}$$

   - Bias b_3:

$$b_3 = 0.1$$

Obliczenia propagacji w przód:

1. **Pierwsza warstwa ukryta:**

   - Wejście: $\mathbf{x} = [1, 1]$ -- taki wektor na wejściu oznacza, że mamy dwie prawdy w wektorze wejściowym:
   - Oblicz $\mathbf{z}_1 = \mathbf{W}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$:

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & -0.5 \\ -0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \\ -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \cdot 1 + 0.8 \cdot 1 + 0.1 \\ 0.6 \cdot 1 + (-0.5) \cdot 1 - 0.2 \\ (-0.3) \cdot 1 + 0.1 \cdot 1 + 0.3 \\ 0.4 \cdot 1 + 0.7 \cdot 1 - 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

   - Zastosuj funkcję aktywacji ReLU: $\mathbf{a}_1 = \mathrm{ReLU}(\mathbf{z}_1)$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{ReLU}(1.1) \\ \mathrm{ReLU}(-0.1) \\ \mathrm{ReLU}(0.1) \\ \mathrm{ReLU}(0.7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

   Czyli wszystkie obliczenia w pierwszej warstwie kończą się wynikiem $\mathbf{a}_1$.

2. **Druga warstwa ukryta:**
   - Oblicz $\mathbf{z}_2 = \mathbf{W}_2\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.4 & 0.3 & 0.1 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 1.1 + (-0.4) \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.7 + 0.2 \\ -0.2 \cdot 1.1 + 0.7 \cdot 0 + (-0.1) \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.7 - 0.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 1.1 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.7 + 0.2 \\ -0.2 \cdot 1.1 + (-0.1) \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.7 - 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 + 0.03 + 0.07 + 0.2 \\ -0.22 - 0.01 + 0.42 - 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.09 \end{pmatrix}$$

- Zastosuj funkcję aktywacji ReLU: $\mathbf{a}_2 = \mathrm{ReLU}(\mathbf{z}_2)$:

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{ReLU}(0.85) \\ \mathrm{ReLU}(0.09) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.09 \end{pmatrix}$$

3. **Warstwa wyjściowa:**
   - Oblicz $z_3 = \mathbf{W}_3 \mathbf{a}_2 + b_3$:

$$z_3 = 0.3 \cdot 0.85 + (-0.6) \cdot 0.09 + 0.1 = 0.255 - 0.054 + 0.1 = 0.301$$

   - Zastosuj funkcję aktywacji sigmoid: $\hat{y} = \sigma(z_3)$:

$$\hat{y} = \sigma(0.301) = \frac{1}{1 + e^{-0.301}} \approx 0.5747$$

Podsumowanie obliczeń:

- **Pierwsza warstwa ukryta:**
  - $\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$
  - $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$
- **Druga warstwa ukryta:**
  - $\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.09 \end{pmatrix}$
  - $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.09 \end{pmatrix}$
- **Warstwa wyjściowa:**
  - $z_3 = 0.301$
  - $\hat{y} = 0.5747$

Ten wynik $\hat{y} \approx 0.5747$ jest wyjściem sieci neuronowej dla wektora wejściowego $[1, 1]$ z podanymi losowymi wagami i biasami.
Zwróćcie uwagę jak te obliczenia szybko eskalują. Mama na myśli to, że nawet przy tak prostej sieci ilość małych kroków obliczeniowych prowadzących do wyniku (wyjścia z sieci) jest duża. Współczesne sieci, stojące za dużymi modelami językowymi, są miliardy razy bardziej złożone. Zasoby obliczeniowe potrzebne do ich wytrenowania muszą być

gargantuiczne. W tej nowej perspektywie obliczeniowej zależny nam na równoległym wykonywaniu miliardów niezbyt precyzyjnych obliczeń.

Równanie sieci bez podstawień

- Tym razem nie podstawiam konkretnych wartości za wyrażenia w macierzach;
- Bardziej abstrakcyjne i uniwersalne ujęcie wielowarstwowego perceptronu

Definicje:

- Niech $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ będzie wektorem wejściowym.
- Niech $\mathbf{W_1}$ będzie macierzą wag pomiędzy warstwą wejściową a pierwszą warstwą ukrytą.
- Niech $\mathbf{b_1}$ będzie wektorem biasów dla pierwszej warstwy ukrytej.
- Niech $\mathbf{h_1}$ będzie aktywacjami pierwszej warstwy ukrytej.
- Niech $\mathbf{W_2}$ będzie macierzą wag pomiędzy pierwszą a drugą warstwą ukrytą.
- Niech $\mathbf{b_2}$ będzie wektorem biasów dla drugiej warstwy ukrytej.
- Niech $\mathbf{h_2}$ będzie aktywacjami drugiej warstwy ukrytej.
- Niech $\mathbf{W_3}$ będzie macierzą wag pomiędzy drugą warstwą ukrytą a warstwą wyjściową.
- Niech $\mathbf{b_3}$ będzie biasem dla warstwy wyjściowej.
- Niech $\mathbf{y}$ będzie wyjściem sieci neuronowej.

1. Warstwa wejściowa do pierwszej warstwy ukrytej:

Wyjście pierwszej warstwy ukrytej oblicza się za pomocą funkcji aktywacji ReLU:

$$\mathbf{h_1} = \mathrm{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1})$$

gdzie:

$$\mathrm{ReLU}(z) = \max(0, z)$$

2. Pierwsza warstwa ukryta do drugiej warstwy ukrytej:

Wyjście drugiej warstwy ukrytej oblicza się za pomocą funkcji aktywacji ReLU:

$$\mathbf{h_2} = \mathrm{ReLU}(\mathbf{W_2}\mathbf{h_1} + \mathbf{b_2})$$

3. Druga warstwa ukryta do warstwy wyjściowej:

Ostateczne wyjście sieci neuronowej oblicza się za pomocą funkcji aktywacji Sigmoid:

$$\mathbf{y} = \text{Sigmoid}(\mathbf{W_3}\mathbf{h_2} + \mathbf{b_3})$$

gdzie:

$$\text{Sigmoid}(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Macierze i wektory:

- $\mathbf{W_1}$ jest macierzą 2×4:

$$\mathbf{W_1} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{b_1}$ jest wektorem 4×1:

$$\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{W_2}$ jest macierzą 4×2:

$$\mathbf{W_2} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \\ w_{41} & w_{42} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{b_2}$ jest wektorem 2×1:

$$\mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{W_3}$ jest macierzą 2×1:

$$\mathbf{W_3} = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{b_3}$ jest skalarem:

$$\mathbf{b_3} = b_3$$

Zagnieżdżone równanie:

Aby zagnieździć te równania, zastępujemy krok po kroku wewnętrzne równania w zewnętrznych:

1. Zastąpmy $\mathbf{h_1}$ w $\mathbf{h_2}$:

$$\mathbf{h_2} = \text{ReLU}(\mathbf{W_2}\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}) + \mathbf{b_2})$$

2. Zastąpmy $\mathbf{h_2}$ w $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \text{Sigmoid}(\mathbf{W_3}\text{ReLU}(\mathbf{W_2}\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}) + \mathbf{b_2}) + \mathbf{b_3})$$

To pojedyncze zagnieżdżone równanie reprezentuje cały przepływ obliczeń w sieci neuronowej:

$$\mathbf{y} = \text{Sigmoid}(\mathbf{W_3}\text{ReLU}(\mathbf{W_2}\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}) + \mathbf{b_2}) + \mathbf{b_3})$$

Wyjaśnienie:

- **Najbardziej wewnętrzna część**: $\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}$ oblicza liniową kombinację wejść i wag plus bias dla pierwszej warstwy ukrytej.
- **Pierwsza ReLU**: $\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1})$ stosuje funkcję aktywacji ReLU do wyjścia pierwszej warstwy ukrytej.
- **Obliczenie drugiej warstwy**: $\mathbf{W_2}\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}) + \mathbf{b_2}$ oblicza liniową kombinację dla drugiej warstwy ukrytej.
- **Druga ReLU**: $\text{ReLU}(\mathbf{W_2}\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}) + \mathbf{b_2})$ stosuje funkcję aktywacji ReLU do wyjścia drugiej warstwy ukrytej.
- **Obliczenie warstwy wyjściowej**: $\mathbf{W_3}\text{ReLU}(\mathbf{W_2}\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}) + \mathbf{b_2}) + \mathbf{b_3}$ oblicza liniową kombinację dla warstwy wyjściowej.
- **Sigmoid**: $\text{Sigmoid}(\mathbf{W_3}\text{ReLU}(\mathbf{W_2}\text{ReLU}(\mathbf{W_1}\mathbf{x} + \mathbf{b_1}) + \mathbf{b_2}) + \mathbf{b_3})$ stosuje funkcję aktywacji Sigmoid do wyniku warstwy wyjściowej, dając ostateczne wyjście.