

Image Segmentation

Jayanta Mukhopadhyay

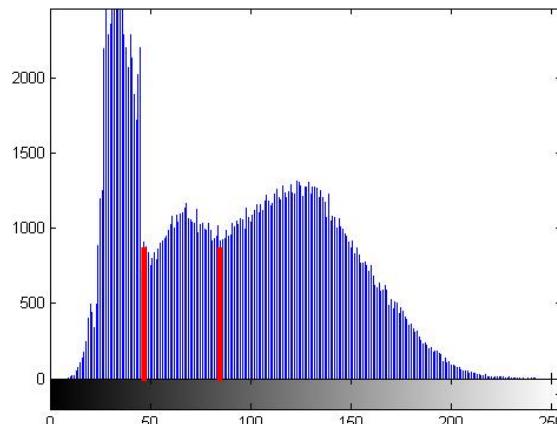
Dept. of CSE,

IIT Kharagpur



Segmentation

- Partitioning image pixels into meaningful non-overlapping sets.
 - Binarization: A special case.
 - Can be extended to group pixels in more than two labels.
 - Expectation-Maximization technique following Bayesian approach.



Binarization (Thresholding)

- Separation of foreground from background.
 - Foreground: Dark pixels (text)
 - Background: Bright pixels (white region)
- Pixels in a binarized image set to one of the two values (e.g. 255 or 0).
 - 255 for background.
 - 0 for foreground.
- $f: R$ (or Z) $\rightarrow \{0, 1\}$ (Or $\{0, 255\}$, etc.)
 - A pixel mapping function



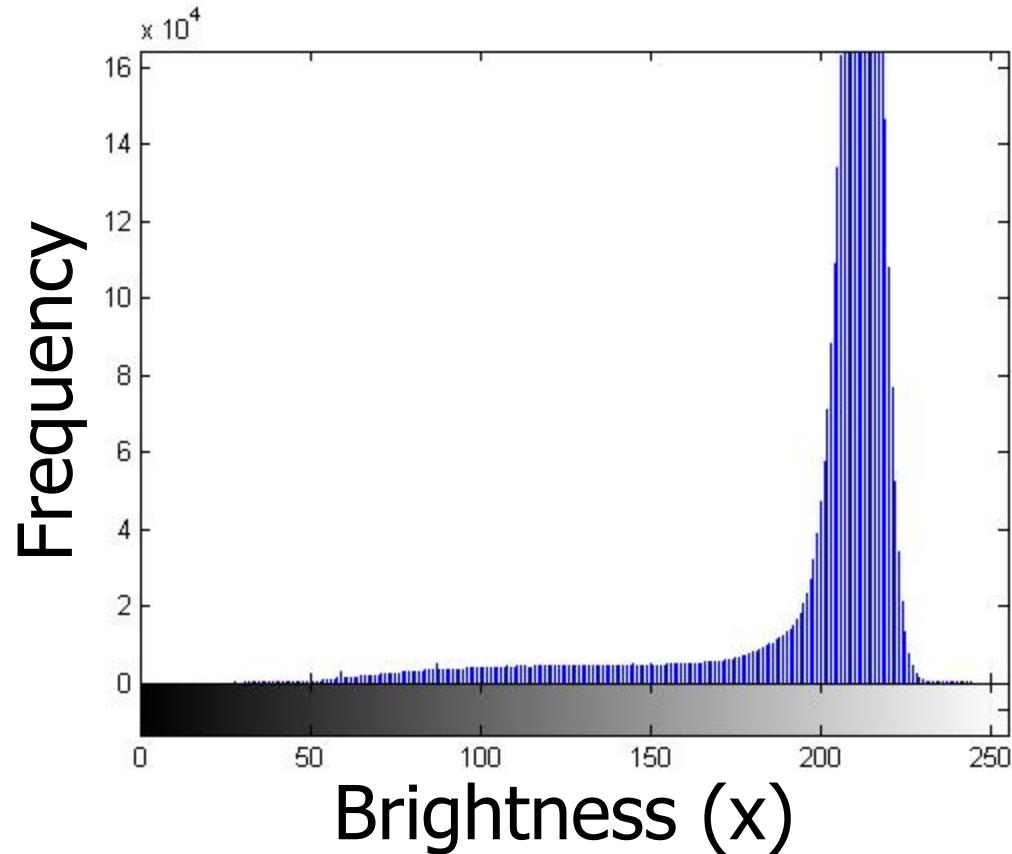
Binarization (Thresholding)

- A simple algorithm
 - Choose a threshold value T .
 - A pixel greater than T is set to 255 (background), otherwise to 0 (foreground).



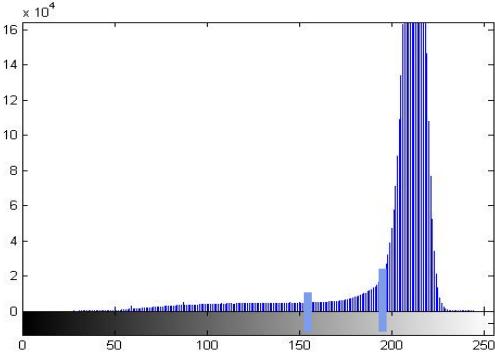
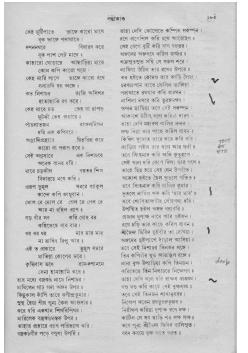
Image histogram

কেহই পুষ্পাতে ভাঙ্গে কারো মাথে
 বৃক্ষ ভাঙ্গে পদাঘাতে।
 দশমনথরে বিদায় করে
 বৃক্ষ পাশ পেট মাঝে॥
 কাহারে দোড়ারে আছাড়িয়া মারে
 কেন কলি কারো গাজ।
 কেহ মারে লাখে ভাঙ্গে কারো রথে
 সন্দৰিয় হয় ধৰে॥
 কত নিখাচৰ তজি অসিশৰ
 হাতাহাতি রং করে।
 কেহ মারে চড় কেহ বা চাপড়
 ঘৃষ্টকী কেহ প্রাহাৰ।
 পাঁচাদিতজন রাঙ্গসমিলন
 ধৰি এক কপিবৰে।
 অঙ্গাদিপ্রাহারে ছিভিলি করে
 কারো বা পৰাণ হৈবে॥
 মেই অসামৰে এক মিলাচৰে
 অকে বানৰ ধৰি।
 মারে ঢুকীল বৃক্ষত শিল
 বিদায়য়ে নথে করিব॥
 একপুর তুমুল সন্মারে ব্যাকুল
 কাদে কপি জাগুৰান।
 মোল রে মোল রে গেল রে গেল রে
 আৱ না রহিল প্রাপ॥
 বড় সৰ সৰ করি ঘোৰ ঘোৰ
 কষিতেহে ঘোৰ ঘোৰ।
 ধৰ ধৰ ধৰ মার মার মার
 না বাখিৰ বিৰু আৰ আৰ॥
 এই ত প্ৰকারে তুমুল সন্মারে
 মাত্ৰিয়া কোপেৰ ভৱে।
 কৃতিবাস তথে রাম-দশমনমে
 দেনা হান-হানি কৰে॥
 তাৰ মধ্যে জৰুৰী নামে বিচৰ।
 মারিলৰেন গাঁথ গাঁথ অৱৰেন উপৰ।
 কিছুকলৰ কিপি তাহে কলিপুৰুষীমার।
 সুষ হৈয়া শীঘ্ৰ পুঁজ দেলে আ ফৰার॥
 কৰে ধৰি মিলিখিৰখৰ।
 মারিলেক বজ্জকষ্ঠমুক্ত উপৰ।
 তাহার অহারে আগ পৰিয়াগ কৰি।
 বজ্জকষ্ঠীৰ পড়ে বন্ধু উপৰি॥



Normalized Histogram $\rightarrow p(x)$

Thresholding



କେହ ମୁଣ୍ଡିପାତେ ଭାଙ୍ଗେ କାରୋ ମାଥେ
ସବୁ ଭାଙ୍ଗେ ପଦାଯାତେ ।

ଦଶନରଥରେ ବିଦାରଣ କରେ
ସବୁ ପାଶ ପେଟ ମାତେ ॥

କାହାରେ ମୋଡ଼ାରେ ଆଜାଡିଆ ମାରେ
କୋନ କପି କାରୋ ଗାନ୍ଧେ ।

କେହ ମାରି ଲାଖେ ଭାଙ୍ଗେ କାରୋ ରଥେ
ସମାରାଯି ହୁଁ କରେ ॥

କତ ନିଶାର ତ୍ୱରି ଅସିଥର
ହାତାହାତି ରଥ କରେ ।

କେହ ମାରେ ଚଢ଼ ଦେଖ ବା ଚାପଡ଼
ମୁଟ୍ଟକୀ କେହ ପଥାରେ ॥

ପାଚଶାତଜନ ରାକ୍ଷସମିନ
ଧରେ ଏକ କନ୍ଧିଗରେ ।

ଆଜ୍ଞାନିପ୍ରାଣର ଛିତ୍ତିନ କରେ
କାରୋ ବା ପରାଶ ହରେ ।

ମେହ ଅମ୍ବାରେ ଏକ ବିଶାଚରେ
ଅନେକ ବାରର ଧରି ।

ମାରେ ଚକ୍ରକାଳ ବର୍ଷତ ଶିଳ
ବିଦାରଣ ନଥେ କରି ॥

ଏକପ ତୁମ୍ଭ ସମରେ ବାକ୍ରାନ
କାଲେ ଜୀବନ ଧରି ।

ମୋଳ ମୋଳ ରେ ମୋଳ ରେ ଗେଲ ରେ
ଆର ନା ହରିଲ ପ୍ରାଣ ॥

ବଢ଼ ବୀର ସବ କରି ଦୋର ରର
କହିତେହେ ବାର ବାର ।

ଧର ଧର ଧର ମାର ମାର
ନା ରାଖିବ ବିପୁ ଆର ॥

ଏହ ତ ପ୍ରକାରେ ତୁମ୍ଭ ସମରେ
ମାରିବା କୋପେ ଭାର ।

କୃତିବାସ ଭାନେ
ଦେବା ହାନାହାନି କରେ ॥

ତାର ମଧ୍ୟେ ବର୍ଜକ୍ତ ନାମେ ନିଶାଚର ।

ମାରିଲେନ ଗାଟ ଗାଟ ଅନ୍ଦ ଉପର ॥

କିନ୍ତୁକାଳ ଝାପି ତାହେ କଣ୍ଠିମୁଖର ।

ମୁହଁ ଦୈଯା ଶୀଘ୍ର ପୂର୍ବ ତୈଲ ଆଫର ॥

କର ଧର ଏକଥାର ଶିଥିରିଶିଥର ।

ମାରିଲେନ ପଞ୍ଚକ୍ତ ଉପର ॥

ଭାବର ପ୍ରହାରେ ଆଖ ପରିଭାଗ କରି ।

ବର୍ଜକ୍ତରୀର ପଡ଼େ ସୁଧ୍ୟ ଉପରି ॥

Can you
automate
this
operation?

Th=156

କେହ ମୁଣ୍ଡିପାତେ ଭାଙ୍ଗେ କାରୋ ମାଥେ
ସବୁ ଭାଙ୍ଗେ ପଦାଯାତେ ।

ଦଶନରଥରେ ବିଦାରଣ କରେ
ସବୁ ପାଶ ପେଟ ମାତେ ॥

କାହାରେ ମୋଡ଼ାରେ ଆଜାଡିଆ ମାରେ
କୋନ କପି କାରୋ ଗାନ୍ଧେ ।

କେହ ମାରି ଲାଖେ ଭାଙ୍ଗେ କାରୋ ରଥେ
ସମାରାଯି ହୁଁ କରେ ॥

କତ ନିଶାର ତ୍ୱରି ଅସିଥର
ହାତାହାତି ରଥ କରେ ।

କେହ ମାରେ ଚଢ଼ ଦେଖ ବା ଚାପଡ଼
ମୁଟ୍ଟକୀ କେହ ପଥାରେ ॥

ପାଚଶାତଜନ ରାକ୍ଷସମିନ
ଧରେ ଏକ କନ୍ଧିଗରେ ।

ଆଜ୍ଞାନିପ୍ରାଣର ଛିତ୍ତିନ କରେ
କାରୋ ବା ପରାଶ ହରେ ।

ମେହ ଅମ୍ବାରେ ଏକ ବିଶାଚରେ
ଅନେକ ବାରର ଧରି ।

ମାରେ ଚକ୍ରକାଳ ବର୍ଷତ ଶିଳ
ବିଦାରଣ ନଥେ କରି ॥

ଓରପ ତୁମ୍ଭ ସମରେ ବାକ୍ରାନ
କାଲେ କପି ଜୀବନ ।

ମୋଳ ମୋଳ ରେ ମୋଳ ରେ ଗେଲ ରେ
ଆର ନା ହରିଲ ପ୍ରାଣ ॥

ବଢ଼ ବୀର ସବ କରି ଦୋର ରର
କହିତେହେ ବାର ବାର ।

ଧର ଧର ଧର ମାର ମାର
ନା ରାଖିବ ବିପୁ ଆର ॥

ଏହ ତ ପ୍ରକାରେ ତୁମ୍ଭ ସମରେ
ମାରିବା କୋପେ ଭାର ।

କୃତିବାସ ଭାନେ
ଦେବା ହାନାହାନି କରେ ॥

ତାର ସମ୍ରେ ବର୍ଜକ୍ତ ନାମେ ନିଶାଚର ।

ମାରିଲେନ ଗାଟ ଗାଟ ଅନ୍ଦ ଉପର ॥

କିନ୍ତୁକାଳ ଝାପି ତାହେ କଣ୍ଠିମୁଖର ।

ମୁହଁ ଦୈଯା ଶୀଘ୍ର ପୂର୍ବ ତୈଲ ଆଫର ॥

କର ଧର ଏକଥାର ଶିଥିରିଶିଥର ।

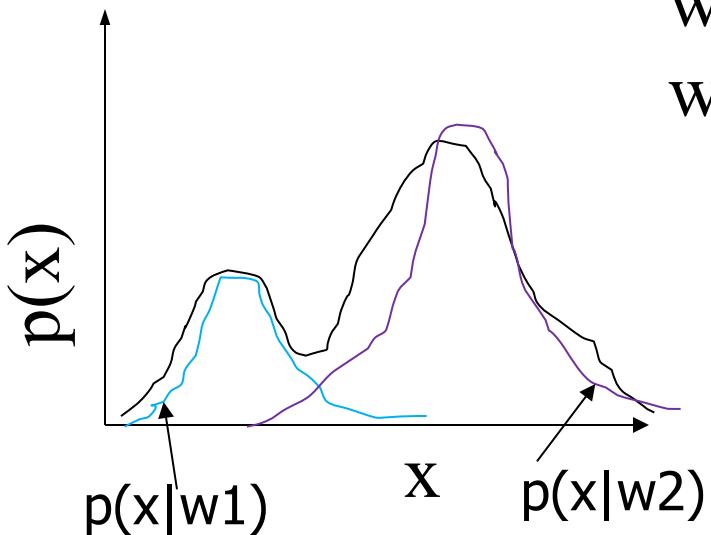
ମାରିଲେନ ପଞ୍ଚକ୍ତ ଉପର ॥

ଭାବର ପ୍ରହାରେ ଆଖ ପରିଭାଗ କରି ।

ବର୍ଜକ୍ତରୀର ପଡ଼େ ସୁଧ୍ୟ ଉପରି ॥

Th=192

Bayesian Classification of foreground and background pixels



Pixels belonging to two classes:

w1: Foreground

w2: Background

Compute $p(w_1|x)$ and $p(w_2|x)$.

Bayes' theorem:

$$p(\omega|x) = \frac{p(\omega)p(x|\omega)}{p(x)}$$

Bayes' classification rule:

Assign x to w_1 if $p(w_1|x) > p(w_2|x)$, else to w_2 .



To check whether $p(w_1)p(x|w_1) > p(w_2)p(x|w_2)$

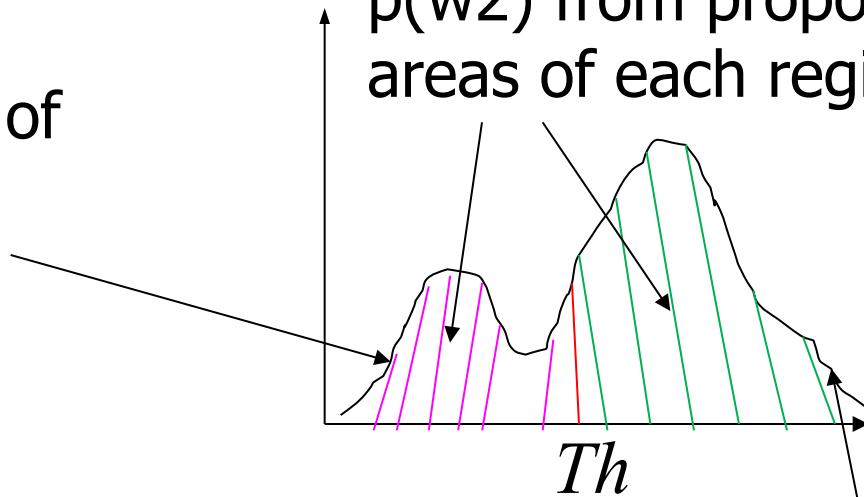


Expectation-Maximization Algorithm

2. Compute parameters of $p(x|w_1)$ by assuming it Gaussian.

$$\mu_1, \sigma_1$$

1. Compute $p(w_1)$ and $p(w_2)$ from proportional areas of each region.

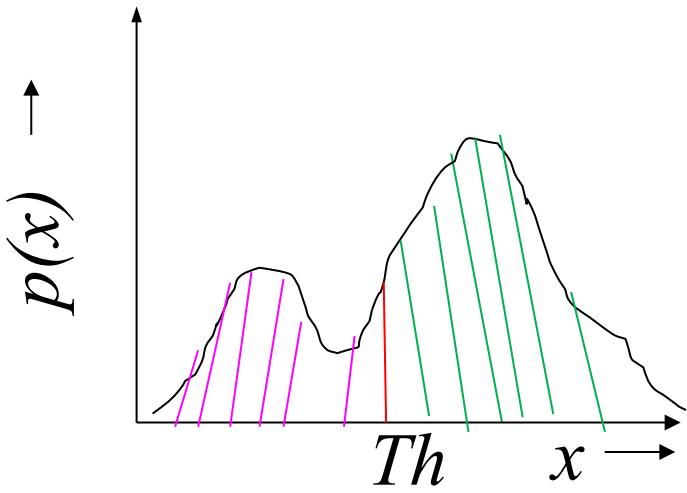


3. Compute parameters of $p(x|w_2)$ by assuming it Gaussian. $\rightarrow \mu_2, \sigma_2$

$$N(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Expectation-Maximization Algorithm



4. Compute new threshold value so that for $x < Th$, $p(w1|x) > p(w2|x)$, and vice versa.
5. Iterate till the value of Th converges.

$$p(w1) = \sum_{x=0}^{Th} p(x)$$

$$p(w2) = 1 - p(w1)$$

$$\mu_1 = \sum_{x=0}^{Th} x.p(x)$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{x=0}^{Th} x^2.p(x) - \mu_1^2$$

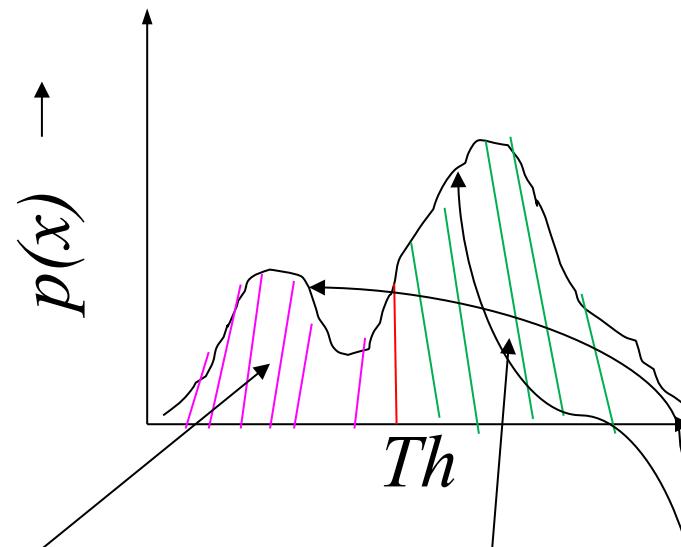
$$\mu_2 = \sum_{x=Th+1}^{255} x.p(x)$$

$$\sigma_2^2 = \sum_{x=Th+1}^{255} x^2.p(x) - \mu_2^2$$



Otsu Thresholding

- Choose a threshold value, which maximizes between class variance (σ^2_B).



$$\sigma_B^2 = p(w1)p(w2)(\mu_2 - \mu_1)^2$$



An example

Otsu:157

সন্দাকাণ্ড

২৮৩

কেই মুষ্টিপাতে ভাঙ্গে কারো মাথে
বৃক ভাঙ্গে পদাঘাতে।
দশমনথরে বিদ্যারণ করে
বৃক পাখ শেট মাথে॥
কাহারো মোড়ারে আচাড়িয়া মারে
কোন কপি কারো গজে।
কেহ মারি লাখে ভাঙ্গে কারো রথে
সন্মারণি হয় বজে॥
কত নিশ্চার ত্যজি অসিধৰ
হাতাহাতি রথ করে।
কেহ মারে ঢড় কেহ বা চাপড়
মুক্তী কেহ প্রথার॥
পাচমাতজন রাঙ্গসমিলন
ধরি এক কপিবরে।
অঙ্গলিপ্রাহারে ছিন্নভর করে
কারো বা প্রাণ হয়ে॥
সেই অহুনারে এক নিশ্চারে
অনেক বানর ধরি।
মারে ঢড়কীল বস্তুত শিল
বিদ্যারয়ে নথে করি॥
একপ তুরুল সহরে ব্যাকুল
কামে কপি জাহুবান।
মোল রে মোল রে গেল রে
আর না রাইল প্রাণ॥
বড় বীর সব করি ঘোর রূৰ
কহিতেছে বার বার।
ধৰ ধৰ ধৰ মার মার
না রাখিব রিপু আর॥
এই তুকারে তুরুল সহরে
মাতিয়া কোপের ভার।
কুক্ষিবাস ভাণে রামনশামনে
সেনা হানাহানি করে॥
তার মধ্যে বজ্রাঠ নামে নিখারি।
মারিলেন গাঢ় গাঢ় অঙ্গেন উপর॥
বিছুকাল কালি তাহে কলীপুরুমার।
সুষ্ঠ হৈয়া শীঘ পুঁকেল আ গুনার॥
করে ধরি একখন শিখরিশিখর।
মারিলেকে বজ্রাঠমঙ্গল উপর॥
তাহার প্রাহারে আগ পরিত্যাগ করি।
বজ্রকঠীর পড়ে ব্যুৎ উপর॥

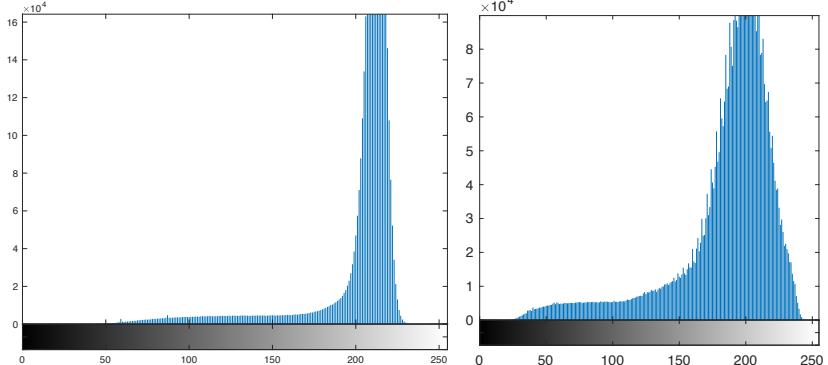
তাহা দেখি কোপেতে কল্পিত সকল্পন।
রণে প্রত্যেকি করি রাখ আরোহণ॥
সেহ বেগে বৃষ্টি করি বাধ বহুতর।
অঙ্গদের অঙ্গগমে করিল জর্জর॥
শক্রমুক্তিত মহি সে সকল শরে।
লাক্ষিয়া উঠিল তার রথের উভয়ে॥
কর হইতে কোদণ্ড তার কাড়ি লৈয়া।
চৱগাচাপমে তারে ফেলিল ভাঙ্গিয়া।
পদাঘাতে রথখান করি প্রথম।
নাখিলা মন্তে করি ভুবনগং।
স্ফদন ছাড়িয়া তবে মেষ সকল্পন।
আকাশে উঠিল খঙ্গা করিয়া ধৰণ
তাহা দেখি মহাবল বালির নন্দন।
লক্ষ দিয়া তার পাহে করিল ধাবন॥
কি কিং দুর্বেতে তারে করে করি ধৰি।
কাড়িয়া লাইল তার খঙ্গ আর কৰী॥
তবে সিংহমাদ করি অতি কৃতুলে।
সেই খঙ্গ ধৰি কোপ লিল তার গলে॥
তাহে ছিম হয়ে সেই যেন উপর্যুক্ত।
আকাশ হইতে হৈল ভুলে পতিত॥
তবে সিংহমাদ করি বালির কুমার।
ভুলে নামিল শৰ করি ‘মার মার’॥
তবে শোণিতকীর লৌহগান ধরি।
উপর্যুক্ত হইল অঙ্গে বৰাবৰি॥
প্রজ্ঞয় যুশ্ম নামে আর দৃষ্টিজন।
রথে চড়ি তার কাছে করিল ধাবন॥
আইমেদ দিবিদ হুইবীর তা দেখ্যা।
অঙ্গদের ছইপাশে দোড়ল আসিয়া॥
তবে সেই নিশ্চারে ভিজন সঙ্গে।
নিক কপিবীর যুক্ত আরঙ্গিল রাজে॥
নানা বৃক্ষ উপাড়িয়া কপি ভিনজন।
কহিতেছে তিনি নিশ্চারে নিকেপ॥
তাহা দেখি খঙ্গ ধৰি রাঙ্গম প্রজ্ঞয়।
বাণ ধণ্ড করি কাটে সেই বৃক্ষসংগ্ৰহ॥
তবে সেই নিশ্চারে শাখায়মুগব।
নিকেপ করেন রথখুরস্তুঞ্জে।
নিরীক্ষণ করিয়া ধূপাক রথে দক্ষ।
কাটিল সে সব ছাড়ি শৰ লক্ষ।
তবে পুনঃ শৈতানে দ্বিধার বালিস্বুত।
বর্ধণ করয়ে বৃক্ষ বহুত বহুত॥

Bayesia
n:157

সন্দাকাণ্ড

২৮৪

কেই মুষ্টিপাতে ভাঙ্গে কারো মাথে
বৃক ভাঙ্গে পদাঘাতে।
দশমনথরে বিদ্যারণ করে
বৃক পাখ শেট মাথে॥
কাহারো মোড়ারে আচাড়িয়া মারে
কোন কপি কারো গজে।
কেহ মারি লাখে ভাঙ্গে কারো রথে
সন্মারণি হয় বজে॥
কত নিশ্চার ত্যজি অসিধৰ
হাতাহাতি রথ করে।
কেহ মারে ঢড় কেহ বা চাপড়
মুক্তী কেহ প্রথার॥
পাচমাতজন রাঙ্গসমিলন
ধরি এক কপিবরে।
অঙ্গলিপ্রাহারে ছিন্নভর করে
কারো বা প্রাণ হয়ে॥
সেই অহুনারে এক নিশ্চারে
অনেক বানর ধরি।
মারে ঢড়কীল বস্তুত শিল
বিদ্যারয়ে নথে করি॥
একপ তুরুল সহরে ব্যাকুল
কামে কপি জাহুবান।
মোল রে মোল রে গেল রে
আর না রাইল প্রাণ॥
বড় বীর সব করি ঘোর রূৰ
কহিতেছে বার বার।
ধৰ ধৰ ধৰ মার মার
না রাখিব রিপু আর॥
এই তুকারে তুরুল সহরে
মাতিয়া কোপের ভার।
কুক্ষিবাস ভাণে রামনশামনে
সেনা হানাহানি করে॥
তার মধ্যে বজ্রাঠ নামে নিখারি।
মারিলেন গাঢ় গাঢ় অঙ্গেন উপর॥
বিছুকাল কালি তাহে কলীপুরুমার।
সুষ্ঠ হৈয়া শীঘ পুঁকেল আ গুনার॥
করে ধরি একখন শিখরিশিখর।
মারিলেকে বজ্রাঠমঙ্গল উপর॥
তাহার প্রাহারে আগ পরিত্যাগ করি।
বজ্রকঠীর পড়ে ব্যুৎ উপর॥



Probabilistic modeling with mixture of densities

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K P(\mathbf{x}|G_i)P(G_i)$$

Number of components → K

Component density ←

Component proportion ←

- G_i defines the i th segment or cluster.
- K is a hyper-parameter and should be known.
- For multivariate Gaussian distribution:

- $P(\mathbf{x}|G_i) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

- To estimate $\boldsymbol{\mu}_i$, Σ_i , and $P(G_i)$ for all i . from the set of iid . input samples: $X=\{\mathbf{x}^t\}$, $t=1,2,\dots,N$



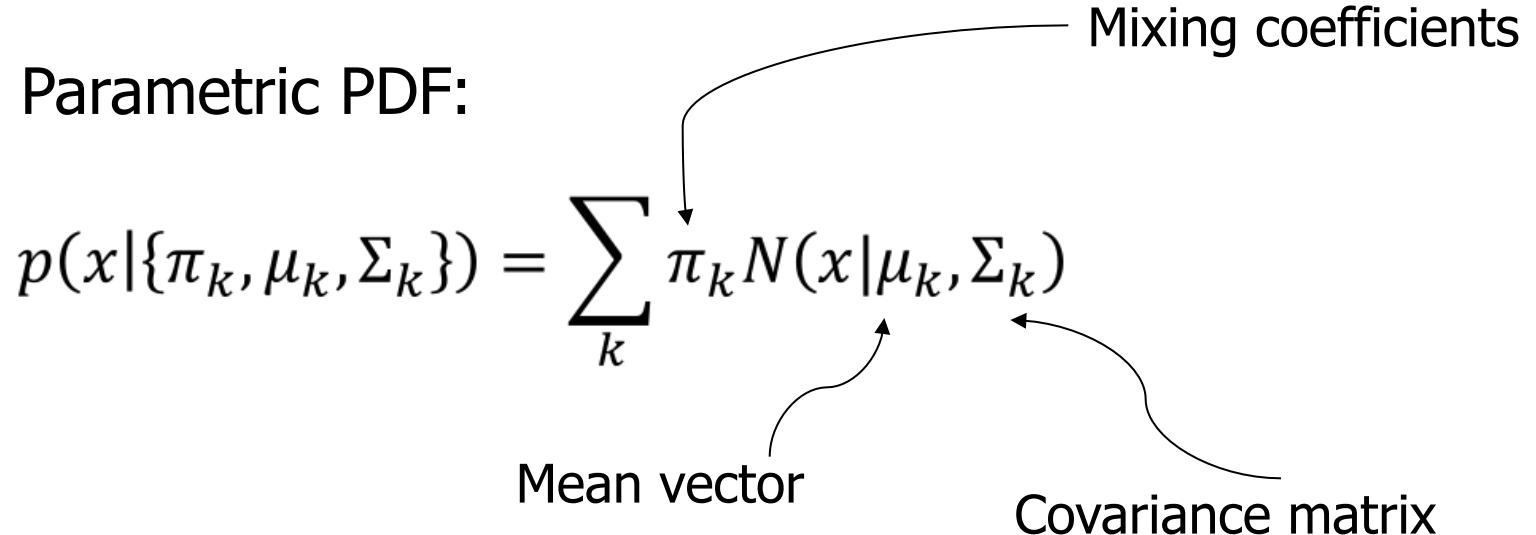
Mixture of Gaussians: Probabilistic inference

- Technique could be refined by computing probabilities of belongingness to a segments.

Parametric PDF:

$$p(x|\{\pi_k, \mu_k, \Sigma_k\}) = \sum_k \pi_k N(x|\mu_k, \Sigma_k)$$

Mixing coefficients
Mean vector
Covariance matrix





Expectation Maximization (EM) Algorithm

$$z_{ik} = \frac{1}{Z_i} \pi_k N(x_i | \mu_k, \Sigma_k)$$

↗
Normalizing factor

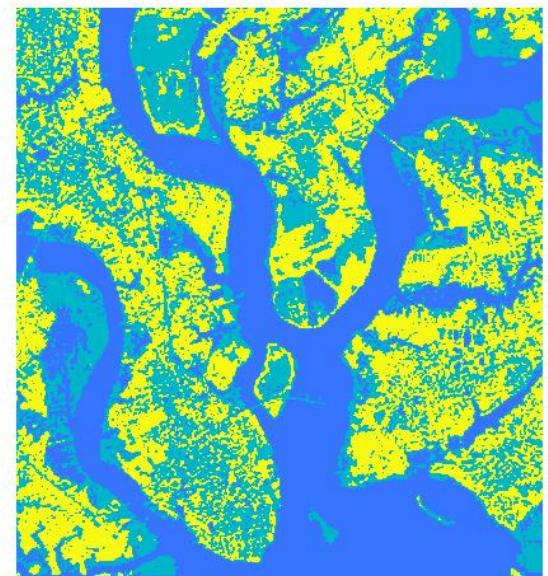
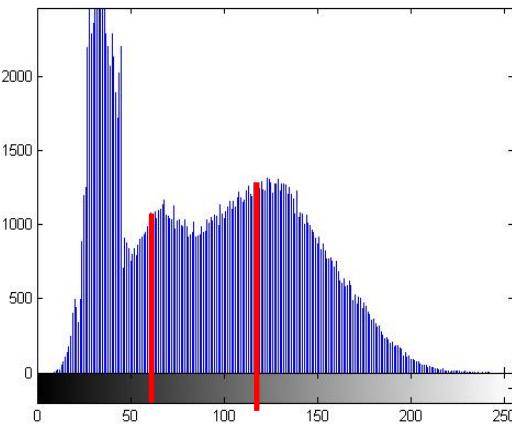
$$Z_i = \sum_k \pi_k N(x_i | \mu_k, \Sigma_k)$$

- Start with initial set : $\{\pi_k, \mu_k, \Sigma_k\}$.
- E-Step (Expectation stage)
 - Compute probability (z_{ik}) of x belonging to k th Gaussian cluster.
 - Assign x to the m th cluster whose probability is maximum.
- M-Step (Maximization Stage)
 - Re-estimate parameters ($\{\pi_k, \mu_k, \Sigma_k\}$) from class distribution
- Iterate above two steps till it converges.

Optional step.
Decision to be
taken at the end.



EM thresholding: An example



Intervals: [0,60], [61, 119], [120,255]

Blue

Green

Yellow



K-means clustering: Segmentation through estimating means

- Given N d -dimensional data points,
 - compute K partitions (clusters) in them
 - so that it minimizes the sum of square of distances between a data point and the center of its respective partition (cluster).

Optimization problem

Minimization of Sum of Squared Errors (SSE)

$$E = \sum_k \sum_{\forall x \in C_k} \|x - c_k\|^2$$

where

$$c_k = \frac{1}{|C_k|} \sum_{\forall x \in C_k} x$$

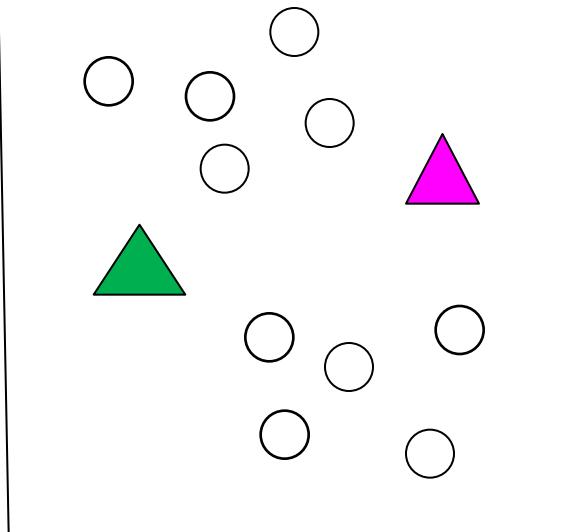


The Lloyd algorithm (1957) (Batch K-Means)

- Given K initial centers, assign a point to the cluster represented by its center, if it is the closest among them.
- Update the centers.
- Iterate above two steps, till the centers do not change their positions.



K-means: example (k=2)

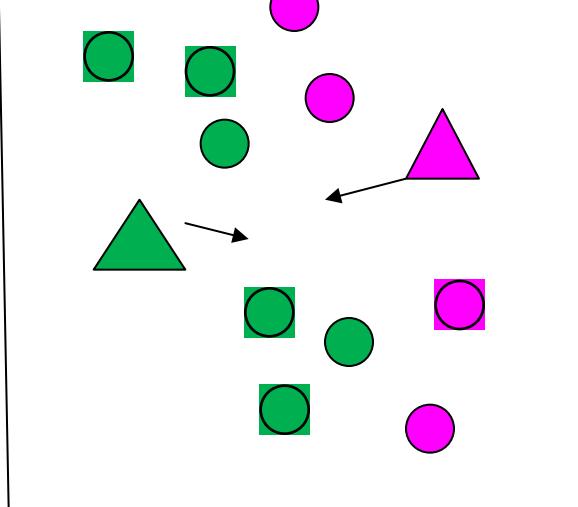


Choose initial centers.

Compute partitions.



K-means: example (k=2)

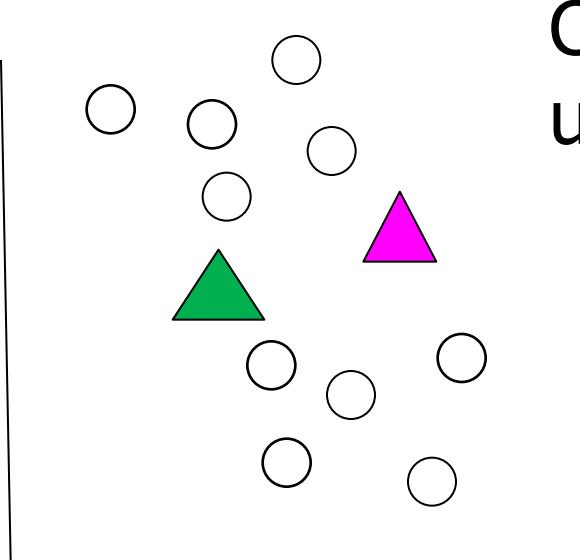


Compute partitions.

Update centers.



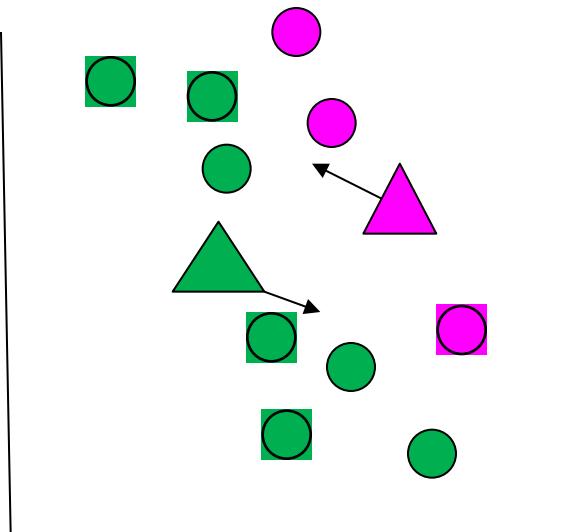
K-means: example (k=2)



Compute new partitions with updated centers.



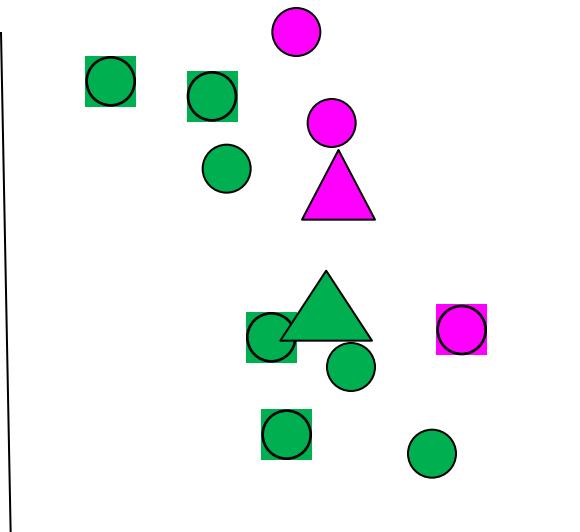
K-means: example (k=2)



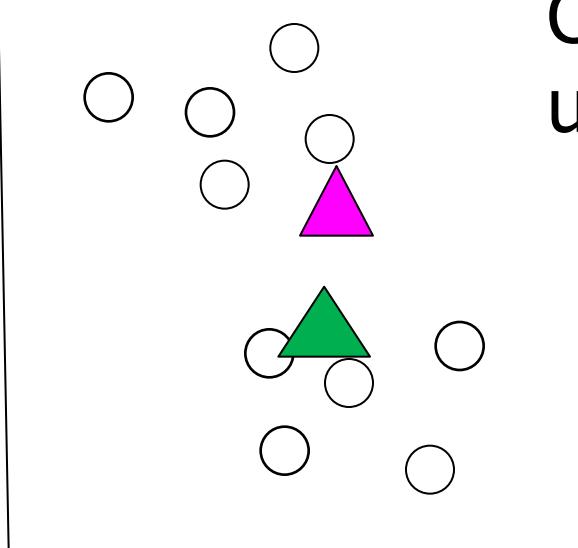
Update centers.



K-means: example (k=2)



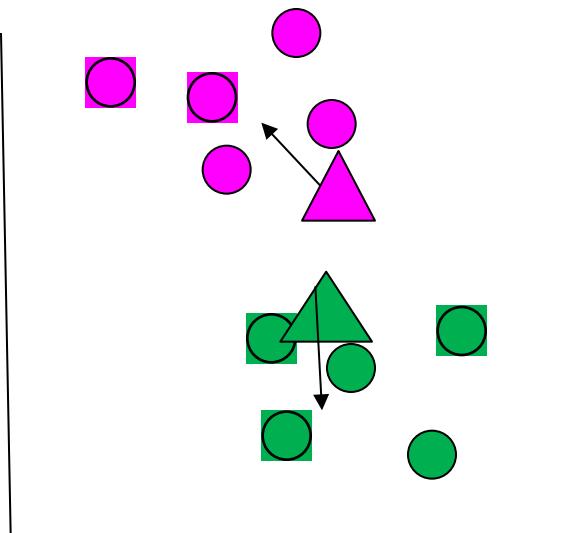
K-means: example (k=2)



Compute new partitions with updated centers.



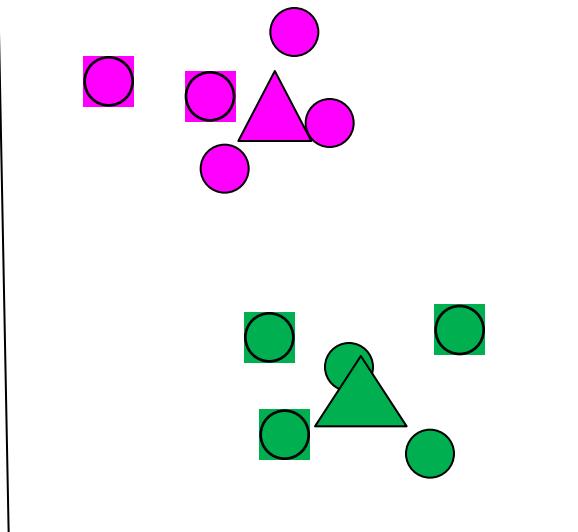
K-means: example (k=2)



Update centers.



K-means: example (k=2)



Stop at no change
(or a very little
change in cluster
centers).



Histogram analysis using K-Means clustering

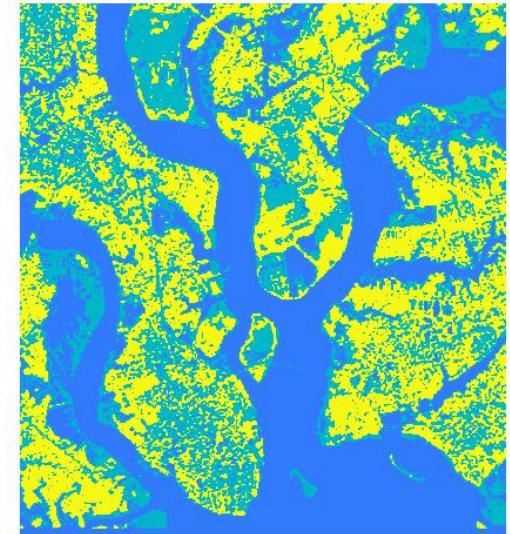
- Compute the histogram $h(x)$, $x=0,1,2,..N$
- Choose initial k brightness levels for the set of means, say m_1, m_2, \dots, m_k , such that $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k < N$
- Update the i th means, for all i

$$m_i = \frac{\sum_{(m_{i-1}+m_i)/2}^{(m_i+m_{i+1})/2} x h(x)}{\sum_{(m_{i-1}+m_i)/2}^{(m_i+m_{i+1})/2} h(x)}$$

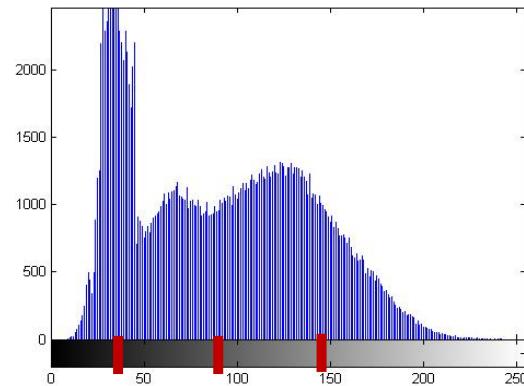


- Iterate till convergence

K-Means Segmentation: An example



k-means for
k=3
 $m_1=39$,
 $m_2=90$,
 $m_3=147$



Blue: 0-65
green: 66-119
yellow: 120-255



Mean Shift Algorithm: Segmentation through estimating modes (peaks)

- A probability density estimation method
 - Non-parametric
 - Does not require the number of components (K) as in K-Means.
- Identify peaks of distribution.
- Each peak defines a cluster / segment.
 - Pixels / elements having shortest path to a peak defines a segment



Probability density estimation

- Probability distribution using Parzen Windows
 - A function of some finite number of data points $x_1 \dots x_n$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

- Kernel Properties:

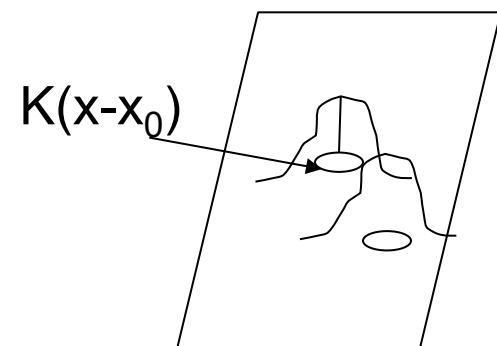
- Normalized
- Symmetric

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{x} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

- Exponential weight Decay

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|^d K(\mathbf{x}) = 0$$



Examples of kernels

- Epanechnikov

$$K_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} c(1 - \|\mathbf{x}\|^2) & \|\mathbf{x}\| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Uniform

$$K_u(\mathbf{x}) = \begin{cases} c & \|\mathbf{x}\| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Gaussian

$$K_g(\mathbf{x}) = ce^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2}$$



Mode selection

- Compute the gradient of distribution

$$\nabla P(\mathbf{x}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$$K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = ck \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2}{h} \right)$$

$$\nabla P(\mathbf{x}) = \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \nabla k_i = \frac{c}{n} \left[\sum_{i=1}^n g_i \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g_i}{\sum_{i=1}^n g_i} - \mathbf{x} \\ \sum_{i=1}^n g_i \end{bmatrix}$$

Size of window

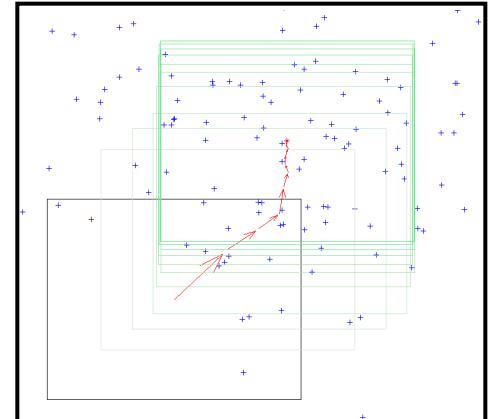
$$g(\mathbf{x}) = -k'(\mathbf{x})$$

$$\nabla P(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2}{h}\right) \\ \sum_{i=1}^n g\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2}{h}\right) \end{bmatrix} = 0 \implies \mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{m}(\mathbf{x}^{(i)})$$



Mean shift algorithm

- Searches a *mode* or local maximum of density of a given distribution from a point
 - Choose a search window (width and location)
 - Compute the mean of the data in the search window
 - Center the search window at the new mean location
 - Repeat until convergence
 - Converged point is a mode.
 - From every point do the same.
 - Set of points arriving at the same mode forms a segment

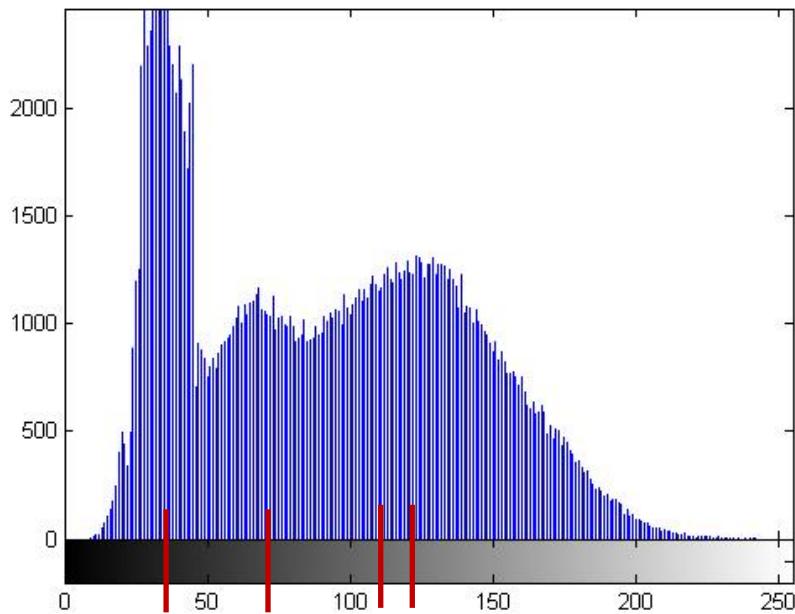


Mean shift analysis of histogram

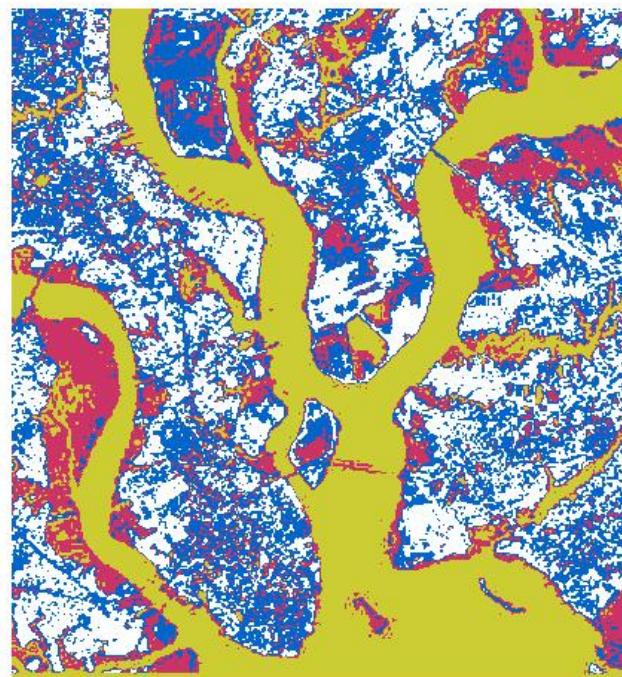
- Compute the histogram $h(x)$, $x=0,1,2,..N$
- For each x determine the mode $m(x)$ in the histogram.
- Ensure monotonicity in $m(x)=0,1,2,...,N$
 - $m(x_1) \leq m(x_2)$, for $x_1 < x_2$
- Prune spurious modes
 - sufficient support (brightness interval),
 - sufficient gap between adjacent distinct pair, and
 - sufficient strength (number of pixels).
- Get brightness interval for each mode



Mean shift analysis of histogram and segmentation



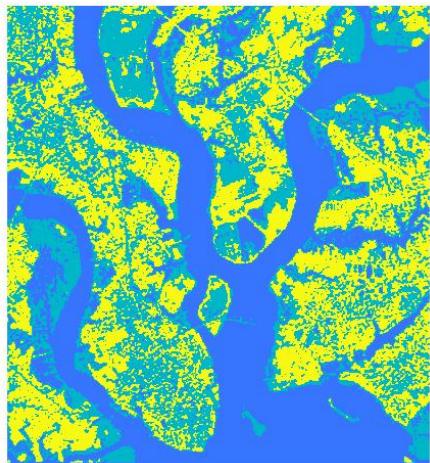
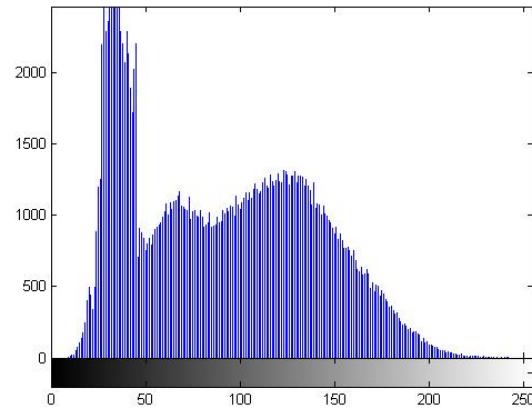
modes:
32, 67, 117, 130



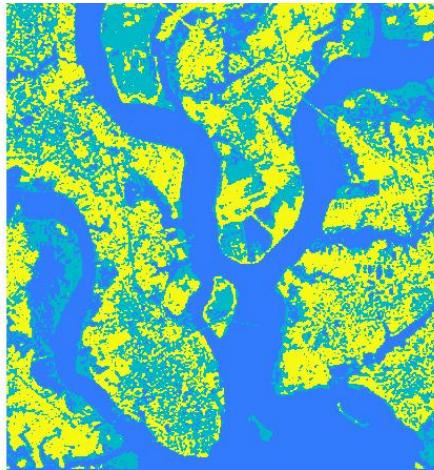
yellow:[1,51]
red:[52,82]
blue:[83,128]
white:[129,256]



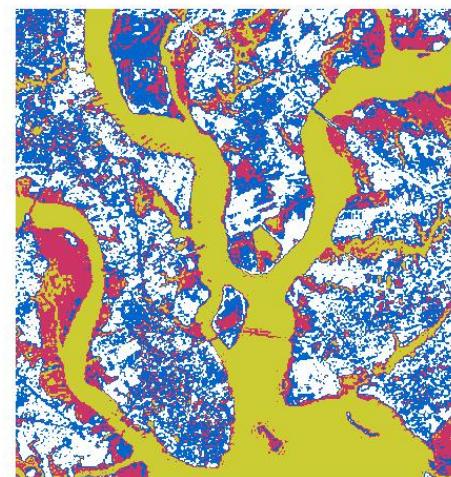
Segmentation results from various approaches



GMM



K-Means



Mean Shift

Component Labeling

- Partitioning **connected** image pixels into meaningful non-overlapping sets.
 - Neighborhood definition.
 - 4-neighbor, 8-neighbor

	o	
o	o	o
	o	

4-neighbors

o	o	o
o	o	o
o	o	o

8-neighbors

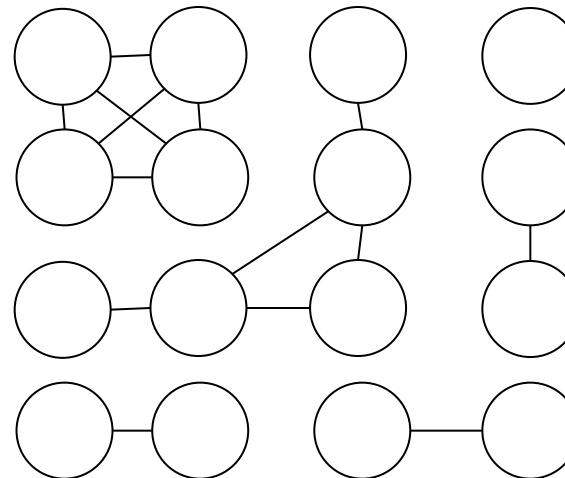


o	o	o
o	o	o
o	o	o

Component Labeling

- Form a graph with edges between neighboring pixels having same labels.
- Compute connected components.
 - Graph traversal algorithms

20	20	50	20
20	20	50	100
50	50	50	100
100	100	20	20

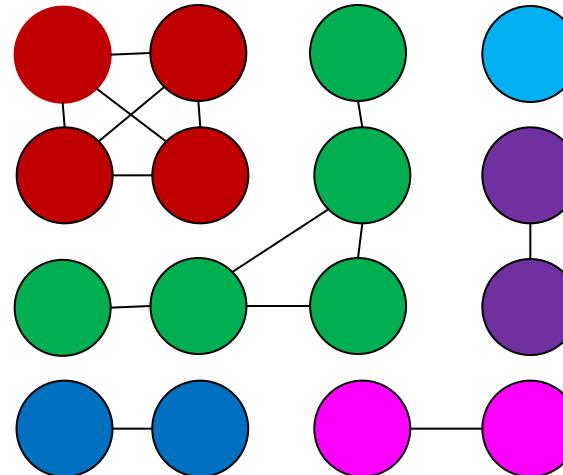


o	o	o
o	o	o
o	o	o

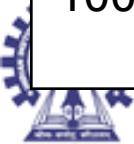
Component Labeling

- Form graph with edges between neighboring pixels having same labels.
- Compute connected components.
 - Graph traversal algorithms

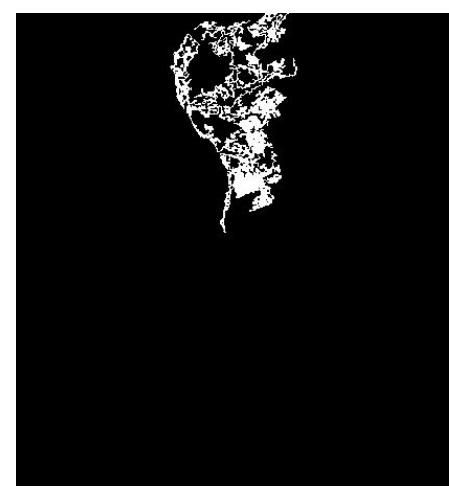
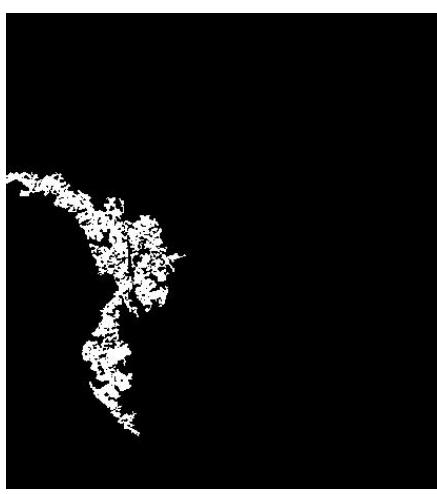
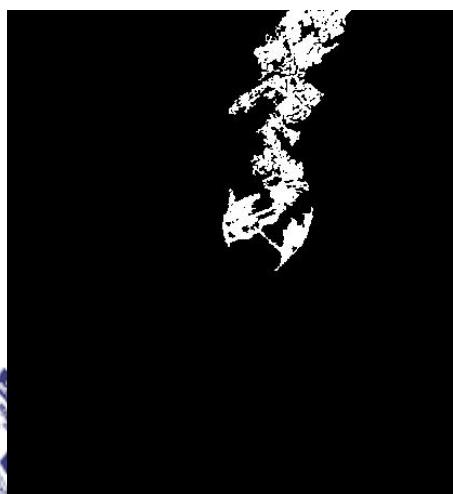
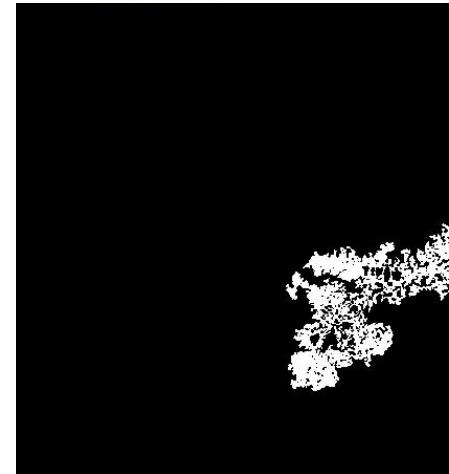
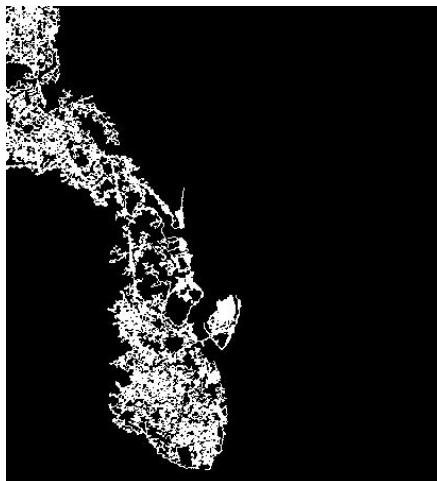
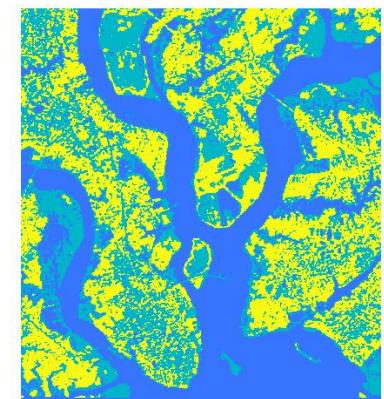
20	20	50	20
20	20	50	100
50	50	50	100
100	100	20	20



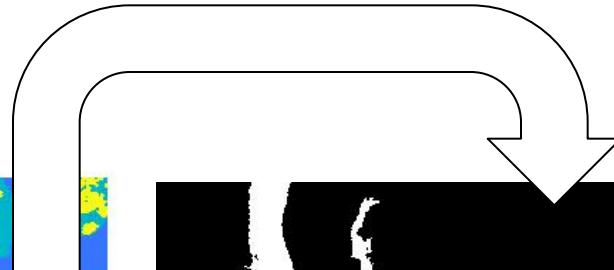
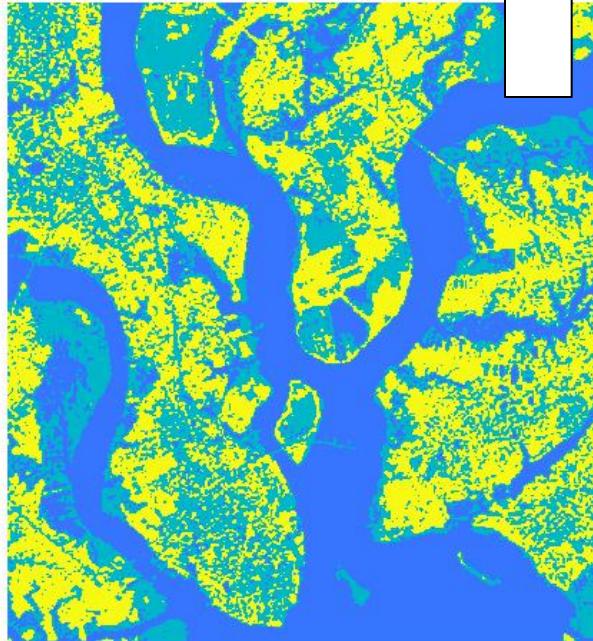
Do you require
an explicit
graph
representation?
Can you
compute using
only the image
array?



Examples of components



?



Why a part of river channel is missing?



Color image segmentation

- How?



Summary

- Meaningful partitioning of image pixels
- Analysis of histogram
 - Binarization through classification
 - Bayes' classification rule applied
 - Binarization through maximizin interclass variances.
 - Otsu thresholding
 - By finding peaks / valleys and declare intervals of brightness value for a segment.
 - Gaussian mixture model
 - Mean shift algrithm
- K-means clustering in the feature space, if the cluster number known.
- Component labeling for connected components.



Thank You

