Branko Radoš
0036481316

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA
SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

Digitalna obrada i analiza slike

2: Laboratorisjka vježba - Frekvencijske transformacije

9.4.2018

Sadržaj

1. - Diskretna Fourieova transformacija

Jednodimenzionalna diskretna Fourierova transformacija (DFT) dana je parom jednadžbom , a njen inverz jednadžbom

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad k = 0, ..., N-1 \tag{1-1}$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad n = 0, ..., N-1 \tag{1-2}$$

$$X = \mathbf{W}x \tag{1-3}$$

$$x = \mathbf{W}^{-1}X \tag{1-4}$$

ako definiramo matricu **W** kao:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_N^{0\cdot 0} & \omega_N^{0\cdot 1} & \cdots & \omega_N^{0\cdot (N-1)} \\ \omega_N^{1\cdot 0} & \omega_N^{1\cdot 1} & \cdots & \omega_N^{1\cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N^{(N-1)\cdot (N-1)} & \omega_N^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & \omega_N^{(N-1)\cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

gdje je $\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$

Dvodimenzionalna DFT je dana izrazom:

$$X_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x_{m,n} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} e^{-\frac{2\pi i}{M}km} \qquad k \in [0, N-1], l \in [0, M-1] \tag{1-5}$$

Lako se pokaže da je to separabilna transformacija:

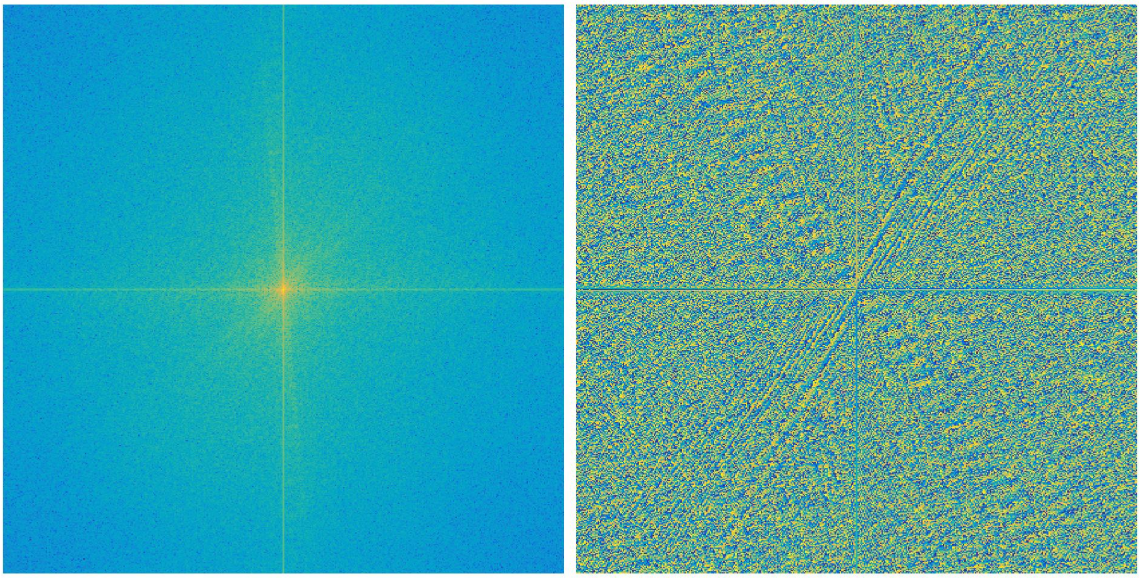
$$X_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \sum_{m=0}^{M-1} x_{m,n} e^{-\frac{2\pi i}{M}km} \qquad k \in [0, N-1], l \in [0, M-1] \tag{1-6}$$

Iz čega je vidljivo da se može zapisati kao dvije jednodimenzionalne DFT. Kako se DFT najčešće računa korištenjem algoritma za brzu Fourierovu transformaciju (FFT), tako i 2D DFT obično računamo prvo 1D FFT po redcima te 1D FFT po stupcima. Stoga je složenost 2D FFT algoritma O(N2log2N). 2D FFT računamo korištenjem funkcije *fft2*.

Funkcije *fft()* i *fft2()* računaju spektar čiji centar nije u sredini dobivene matrice, već se nalazi u gornjem lijevom kutu. To je napravljeno zbog konvencije da se ishodište nalazi u gornjem lijevom kutu. Ako rezultat želimo prikazati tako da je ishodište smješteno u središtu slike, potrebno je primijeniti funkciju *fftshift()*. Ako nakon pomaka ishodišta još i skaliramo dobivenu diskretnu Fourierovu transformaciju s brojem elemenata ulazne matrice (dijeljenje spektra s *prod(size(imgFT)))*, dobit ćemo izgled spektra kako ga uobičajeno prikazujemo u domeni transformacije. Važno je primijetiti da funkcije *ifft()* i *ifft2()* koje ra˘cunaju inverznu transformaciju očekuju spektar koji nije pomaknut i skaliran.

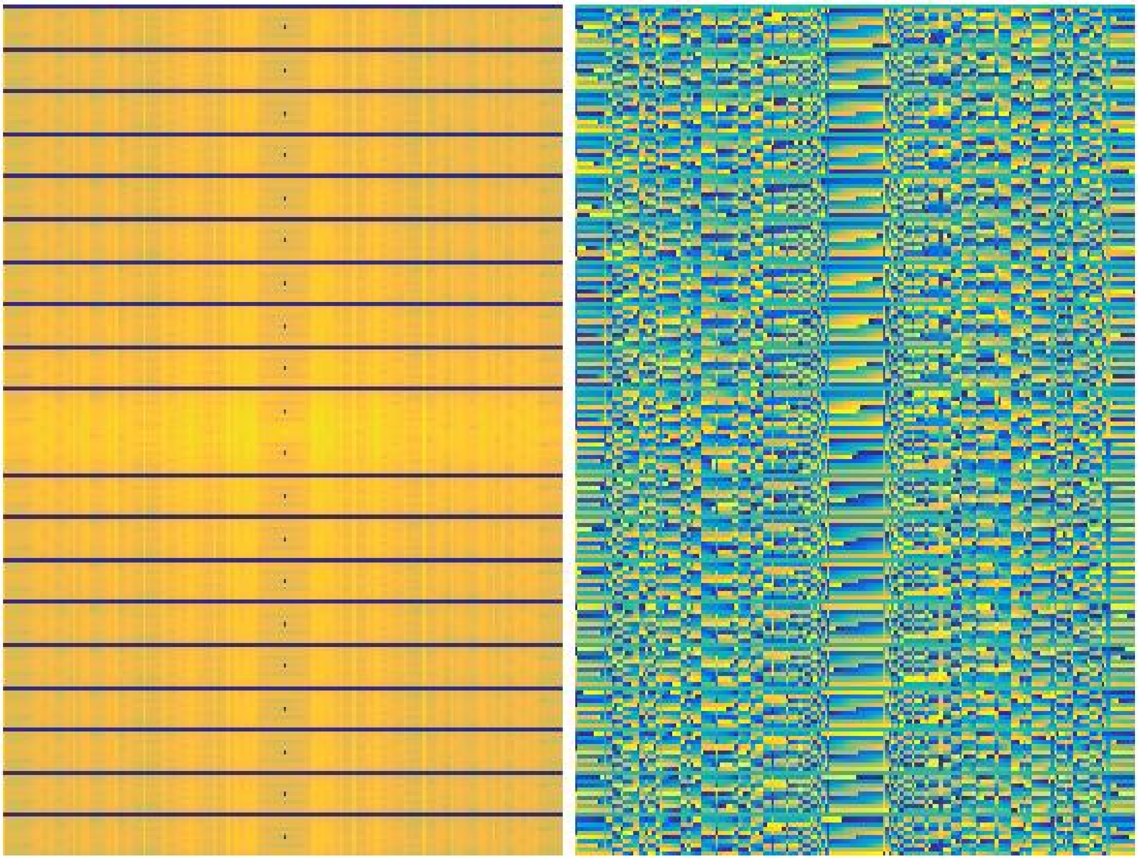
Ako transformirate neke od slika kojoj dimenzije nisu potencija broja dva koristi se običan algoritam računanja diskretne Fourierove transformacije. Ako su dimenzije potencije broja dva koristi se izuzetno brzi radix-2 algoritam. Ponekad se slika nadopuni s nulama dok dimenzije ne dosegnu potencije broja dva da bi se mogla primijeniti radix-2 metoda.

1.1 - Zadaci - Diskretna Fourierova transformacija



Slika 1-1: Prirodna scena lijevo amplituda desno je faza.

Kod prirodne scene zastupljene su niske frekvencije jer je blaži prijelaz između susjednih piksela.

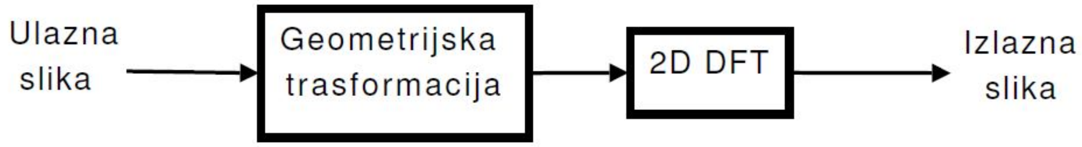


Slika 1-2: Scena teksture lijevo amplituda desno je faza.

Kod scene teksture koja je umjetno generirana, zastupljene su visoke frekvencije jer imamo naglije(dinamičnije) prijelaze između piksela.

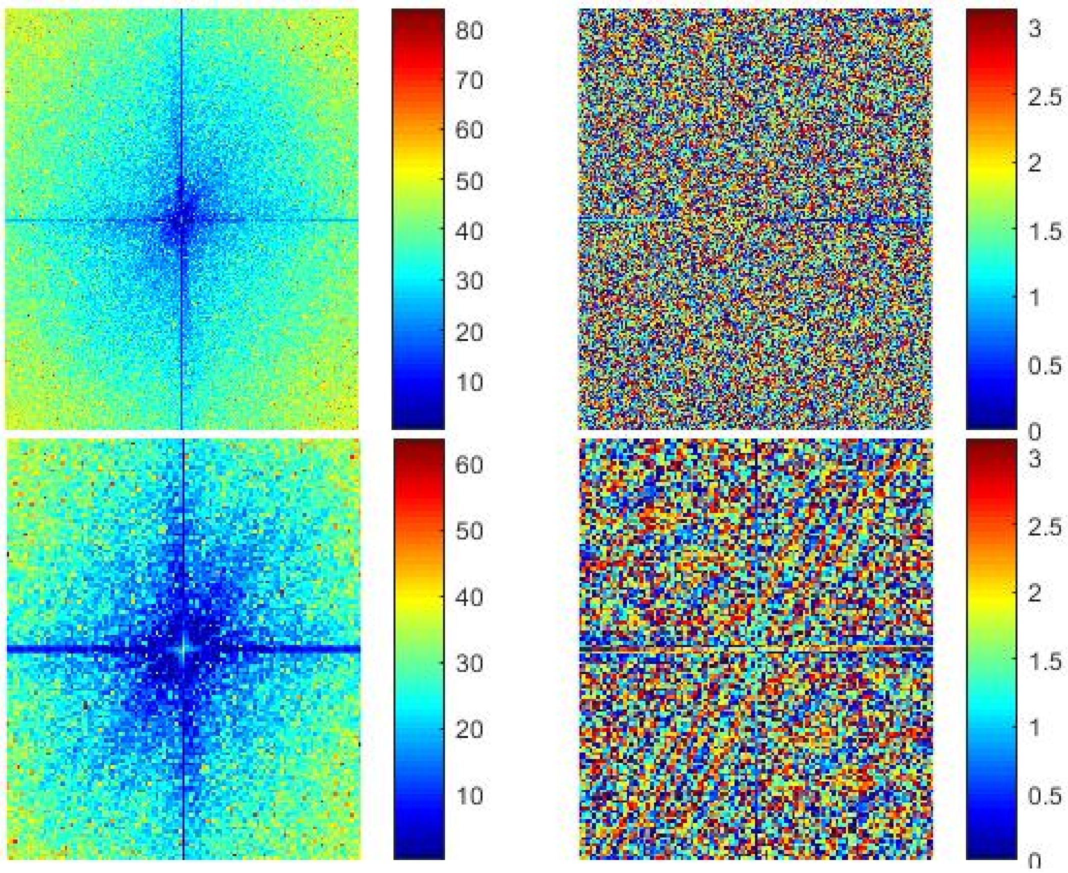
2. - DFT i geometrijske transformacije slike

Sliku deformiramo nekim osnovnim geometrijskim transformacijama poput skaliranja, rotacije ili translacije. Blok shema eksperimenta prikazana je na slici. Veličinu slike mijenjamo naredbom *imresize()*. Ako sliku želimo zakrenuti za kut ϕ tada koristimo naredbu *imrotate()*. Translaciju slike ćemo izvesti tako da definiramo dvije velike matrice popunjene nulama u kojima sliku postavljamo na različita mjesta. Tako smo efektivno translatirali sliku unutar matrice za pomak (dx, dy), gdje dx i dy definiraju pomak (odnosno razmak) po x i y osi između centara dviju slika.



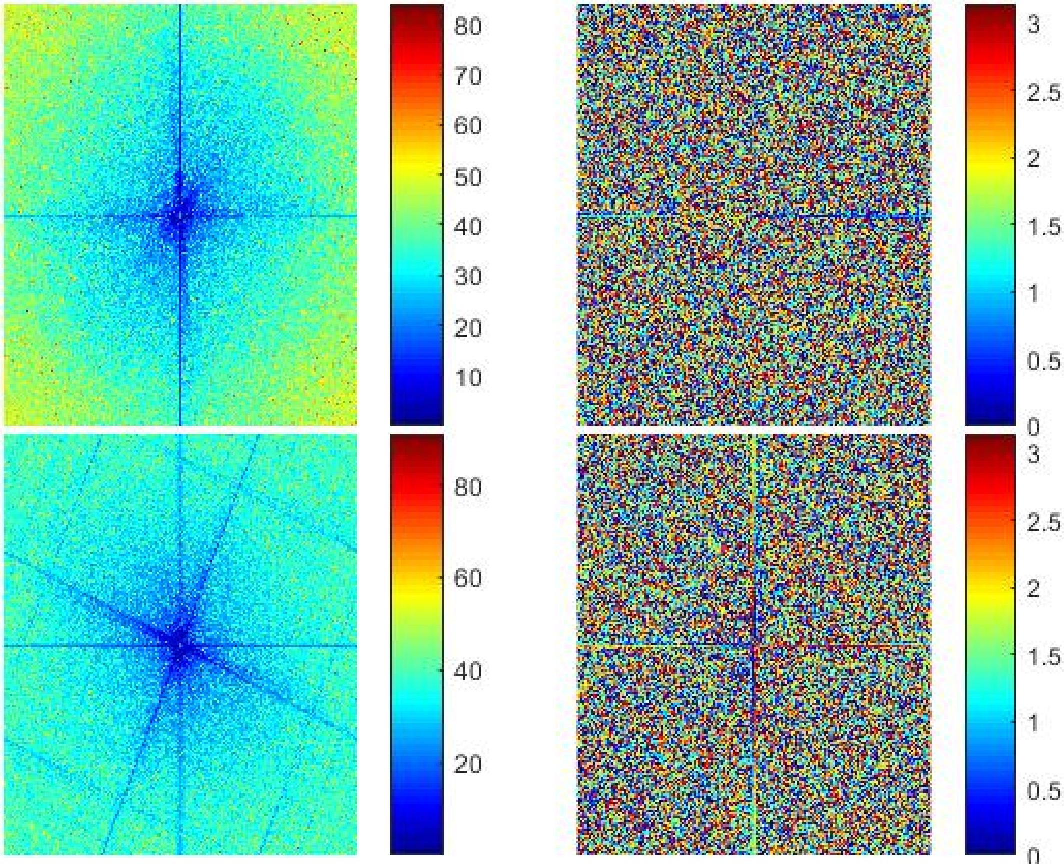
Slika 2-1: Blok shema eksperimenta.

2.1 - Zadaci - DFT i geometrijske transformacije slike



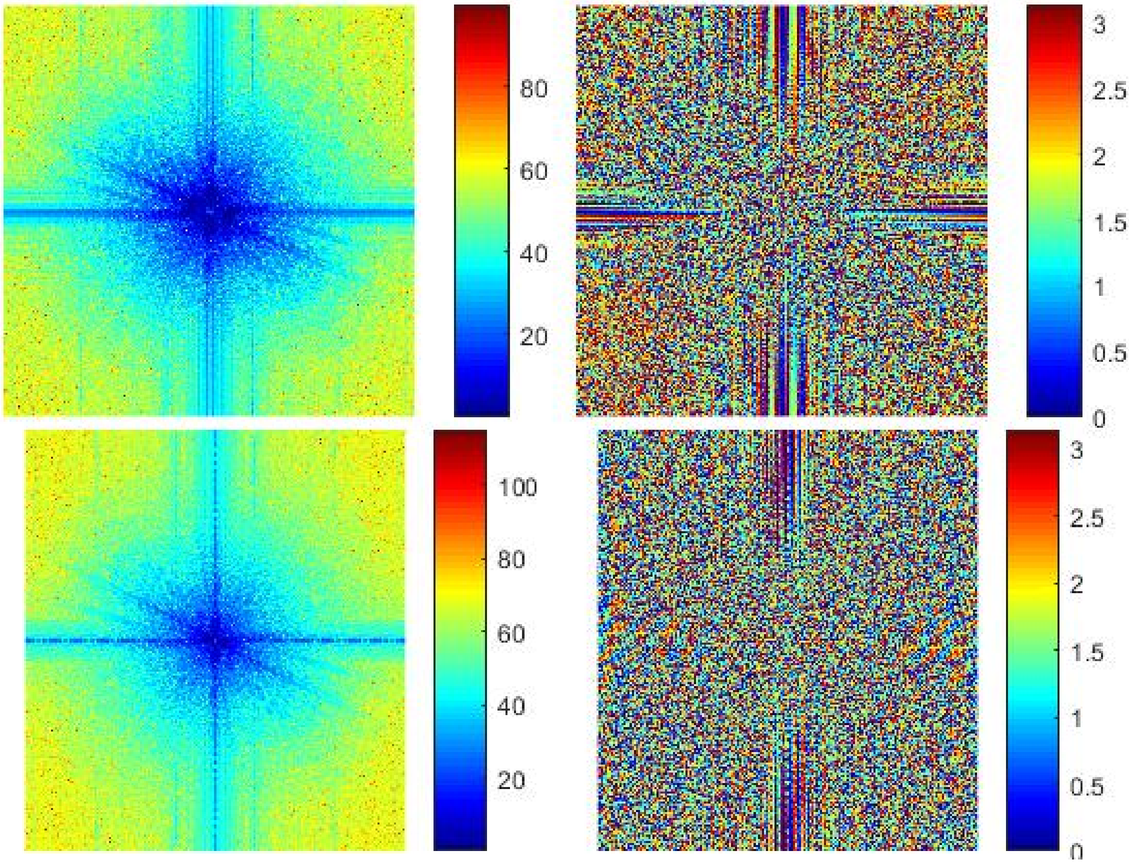
Slika 2-2: Originalna gore(amplituda i faza), a smanjena dolje

Razlika je vidljiva u amplitudi i u fazi. U amplitudi smanjene slike se povećao broj niskih amplituda dok je faza postala zrnatija odnosno vise malih regija se spojilo u jednu veću.



Slika 2-3: Originalna gore(amplituda i faza), a rotirana dolje

Razlika je vidljiva u amplitudi i u fazi. U amplitudi zarotirane slike je također zarotirana u odnosu na original izgubio se udio visokih amplituda(žuto po rubovima) dok je faza po sredini ima nagle skokove(križ po sredini fazne karakteristike).

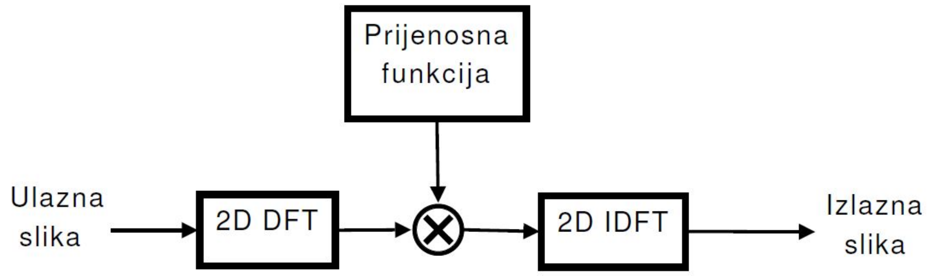


Slika 2-4: Originalna gore(amplituda i faza), a translatirana dolje

Razlika je vidljiva u amplitudi i u fazi. U amplitudi se smanjio broj niskih amplituda dok je faza izgubila horizontalne nagle prijelaze (očekivano jer smo je proširili s nulama, a slika zauzima samo jedan dio cijele slike) u odnosu an original koji u fazi ima nagle prijelaze.
Iz fazne karakteristike en možemo zaključiti gdje se originalna slika nalazi na proširenoj slici.

3. - Filtriranje slike

Pod filtriranjem slike obično podrazumijevamo propuštanje slike kroz neki LSI(Linear Space Invariant) sustav. Takvu operaciju možemo računati preko 2D konvolucije ili u domeni transformacije. Filtriranje u domeni transformacije izvodi se množenjem Fourierove transformacije slike s Fourierovom transformacijom impulsnog odziva filtra.



Slika 3-1: Filtriranje slike u frekvencijskoj domeni

Prijenosna funkcija LSI sustava je transformacija impulsnog odziva sustava. Za konstrukciju prijenosne funkcije idealnog filtra koristite naredbu *frqflt()*. Filtriranje u frekvencijskoj domeni je jednostavno množenje.

Prilikom računanja diskretne Fourierove transformacije pretpostavljamo periodičnost signala, stoga prikazani postupak množenja u DFT domeni odgovara upravo kružnoj (cirkularnoj) konvoluciji koju u 1D definiramo na sljedeći način:

$$x_N[n] \textcircled{\scriptsize N} h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot x_N[n-m] \tag{3-1}$$

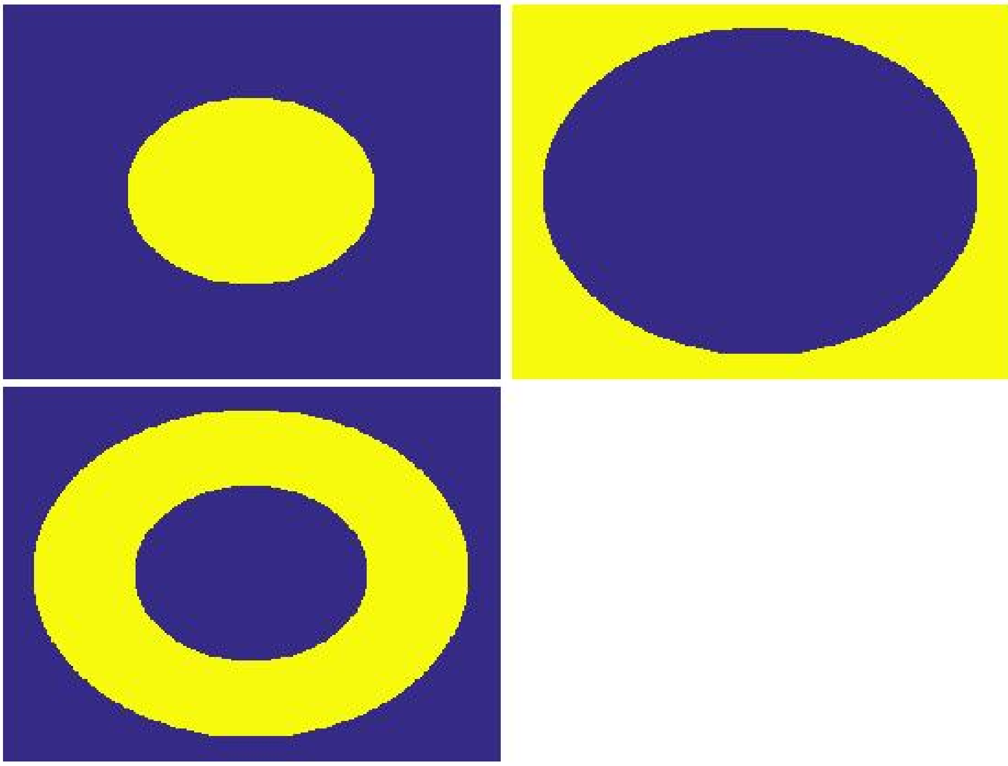
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_N[n-m-kN] \tag{3-2}$$

primijetimo kako je definicija kružne konvolucije jednaka jednoj periodi periodične konvolucije. U 2D ova definicija poprima oblik:

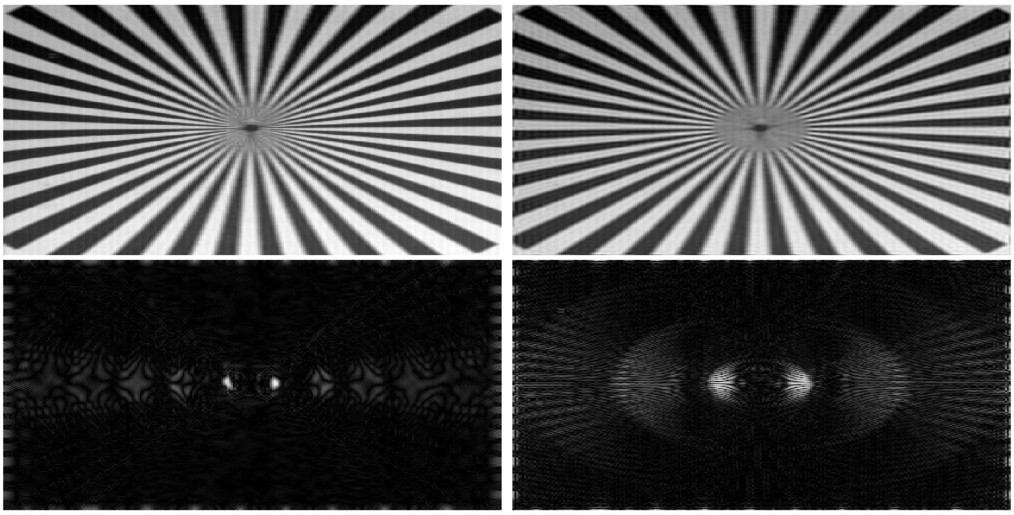
$$y[m,n] = \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{N_x-1} x[i,j]h[(m-i) \tag{3-3}$$

gdje % označava operator modulo dijeljenja, a Mx i Nx su dimenzije slike x[i, j] uz Mx $\geq$ Mh i Nx $\geq$ Nh. Ako želimo pomoću diskretne Fourierove transformacije izračunati linearnu konvoluciju potrebno je proširiti signale x[i, j] i h[i, j] s nulama tako da dimenzije oba signala budu barem Mx + Mh $-$ 1 $\times$ Nx + Nh $-$ 1. Za tako proširene signale množenje u domeni diskretne Fourierove transformacije odgovara linearnoj konvoluciji signala. Uobičajeno se signal proširuje s nulama do prve veće potencije broja dva zbog ubrzanja postupka (korištenje FFT algoritma). Sada je nakon množena signala u domeni transformacije rezultat inverzne transformacije dimenzija većih od rezultata linearne konvolucije (veći od Mx +Mh $-$ 1 $\times$ Nx + Nh $-$ 1). Rezultat linearne konvolucije koji tražimo se nalazi unutar izračunate inverzne Fourierove transformacije te je samo potrebno odbaciti višak koji ne nosi informaciju. Točan položaj rezultata će ovisiti o načinu na koji smo signal h[i, j] proširili s nulama.

3.1 - Zadaci - Filtriranje slike



Slika 3-2: Korišteni filtri lijevo gore niskopropusni, desno gore je visokopropusni, lijevo dolje je pojasnopropusni (žuta boja je pojas propuštanja).



Slika 3-3: lijevo gore original , desno gore je slika propuštena kroz niskopropusni , lijevo dolje je slika propuštena kroz pojasnopropusni i desno dolje je slika propuštena kroz visokopropusni

Niskopropusni filtar kao što mu i samo ime kaže propušta na slici niske frekvencije, pojasnopropusni zavisno od definiranja donje i gornje granične frekvencija propušta taj dio spektra, dok visokopropusni propušta visoke frekvencije na slici odnosno guši niske i srednje frekvencije.

4. - Diskretna kosinusna transformacija

Diskretna Fourierova transformacija nije prikladna za razne primjene upravo jer je po svojoj naravi kompleksna. Umjesto kompleksne diskretne Fourierove transformacije najčešće se koristi realna diskretna kosinusna transformacija (DCT). Kako je DCT realna transformacija ne postoji fazni dio spektra, već samo amplitudni dio. Iako postoji više verzija DCT (DCT-I − DCT-VIII) kada govorimo o DCT obiˇcno podrazumijevamo DCT-II. U 1D prostoru ona je dana izrazom:

$$X[k] = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \tag{4-1}$$

gdje je $\alpha(k)$ normalizacijski koeficijent koji poprima vrijednosti:

$$\alpha(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{if } k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{if } 1 \leq k < N \end{cases}$$

možemo zapisati jednim izrazom u obliku:

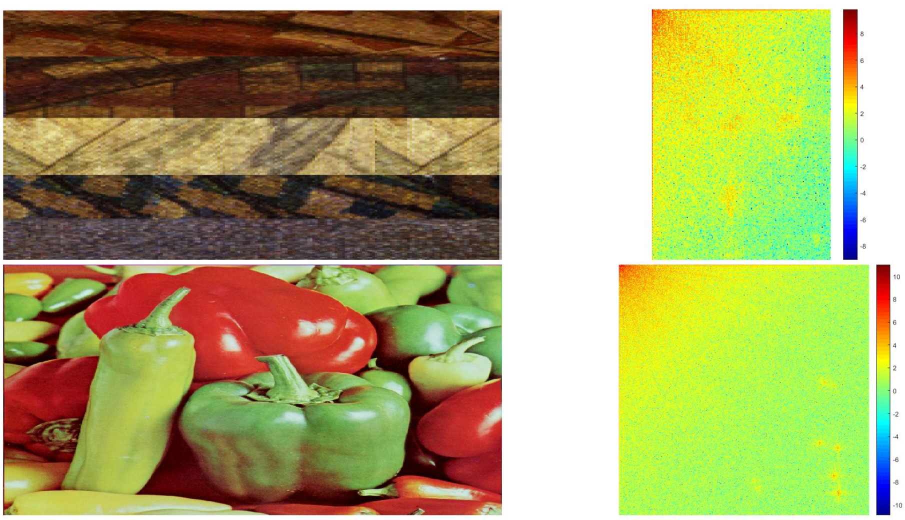
$$X[k] = \sqrt{\frac{[2-\delta[k]]}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \tag{4-2}$$

Ako želimo zapisati DCT u 2D, tada koristimo izraz:

$$X_{k_1,k_2} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{n_1,n_2} \cdot cos\left[\frac{\pi}{N_1} \cdot (n_1 + \frac{1}{2}) \cdot k_1)\right] \cdot cos\left[\frac{\pi}{N_2} \cdot (n_2 + \frac{1}{2}) \cdot k_2)\right] \tag{4-3}$$

Normalizirani oblik se dobije kao i u 1D sluˇcaju, dodajući normalizacijski koeficijent $\alpha(k1, k2)$.

4.1 - Zadaci - Diskretna kosinusna transformacija



Slika 4-1: originalne slike s lijeve strane i njihove diskretne kosinusne transformacije s lijeve

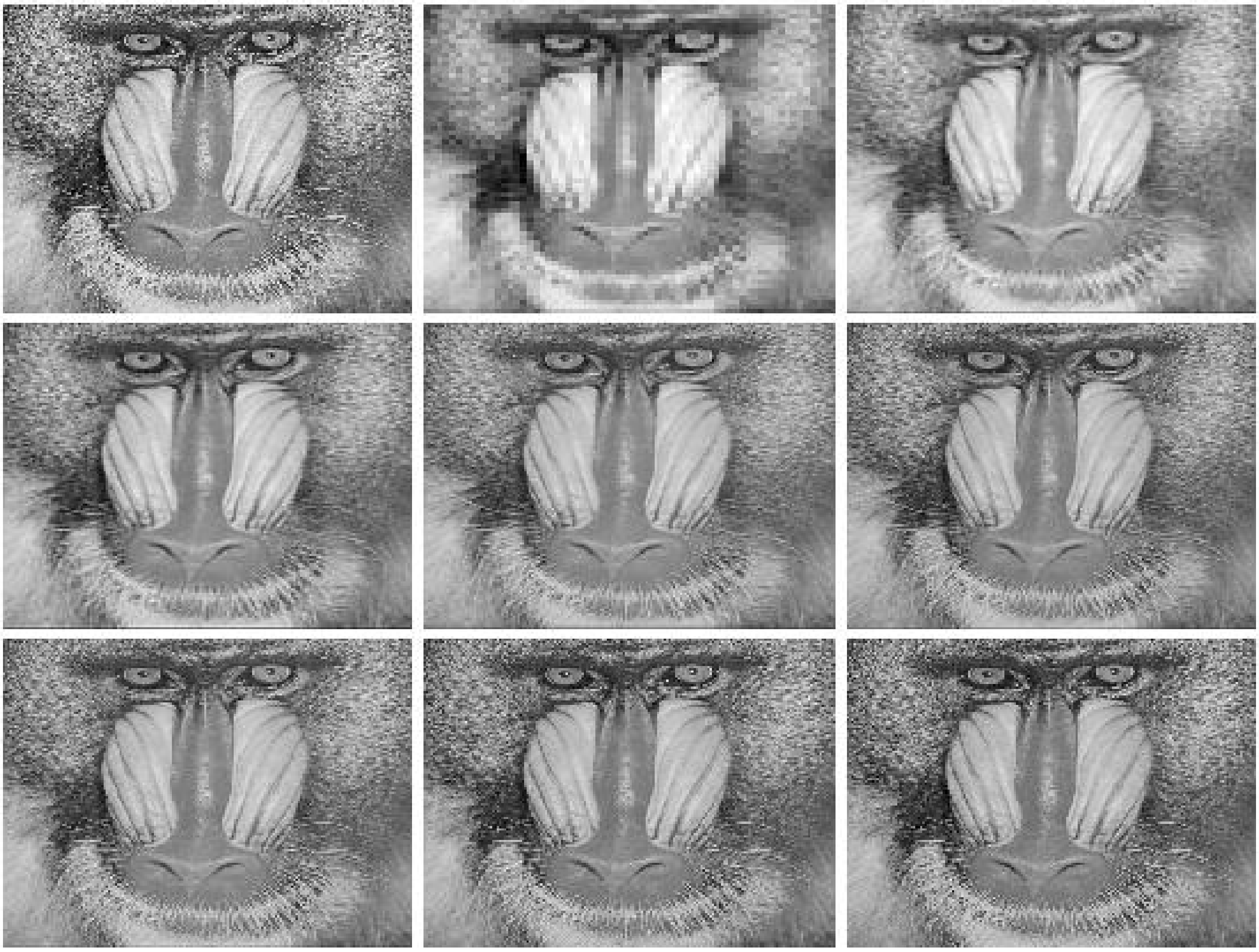
Istosmjerna komponenta nalazi u gornjem lijevom kutu za oba amplitudna spektra. Kod DCT transformacije je više energije raspoređeno u niskofrekvencijski dio spektra. DCT transformacija je bliska KL transformaciji stacionarnog Markovljevog niza prvog reda za jako korelirane slike kod scena prirode susjedni pikseli su jako korelirani. Upravo to svojstvo DCT možemo iskoristiti za kompresiju slike koja se sastoji od DCT transformacije, restrikcije baze i kvantizacije koeficijenata.

5. - DCT i kompresija slike

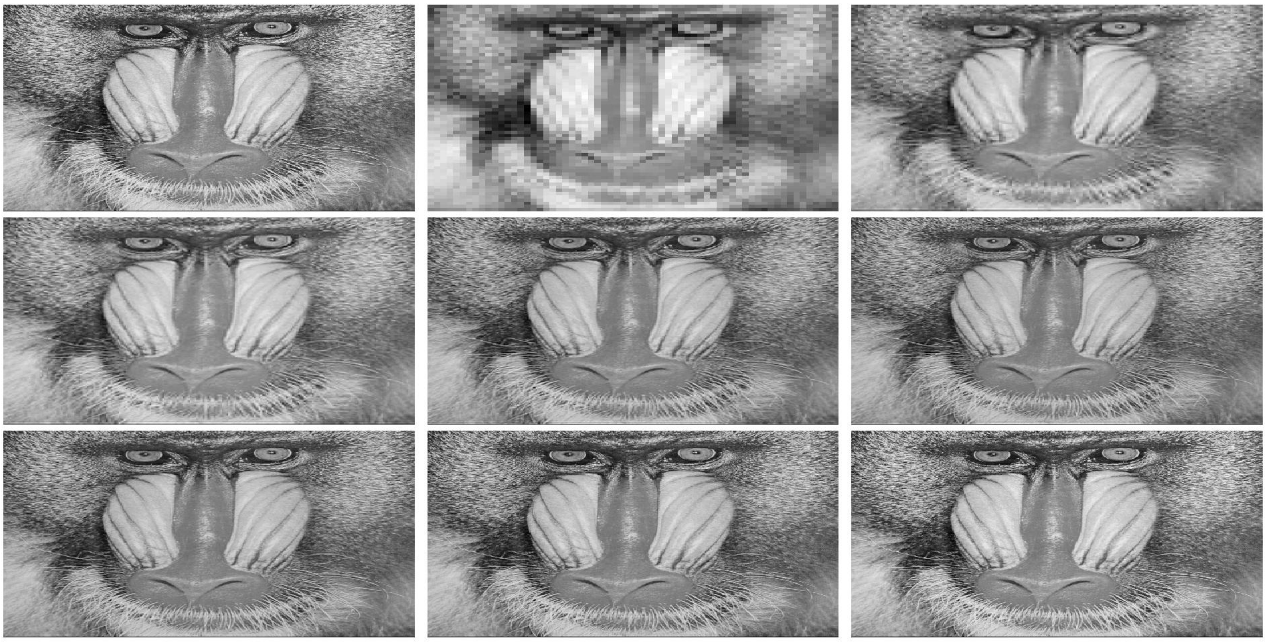
Kao što smo primijetili u prethodnom poglavlju većina energije je sadržana u niskofrekvencijskim komponentama spektra. To uvijek vrijedi ako je riječ o prirodnim slikama. Upravo to svojstvo DCT možemo iskoristiti za kompresiju slike koja se sastoji od DCT transformacije, restrikcije baze i kvantizacije koeficijenata. Transformacija ne vrši na cijeloj slici, već se slika rastavlja u blokove veličine 8×8 ili 16×16. Tada se na svaki pojedini blok primjenjuje DCT te se vrši restrikcija baze i kvantizacija koeficijenata. Na primjer, osnovni JPEG algoritam dijeli sliku na blokove veličine 8×8. Za svaki blok se tada računa diskretna kosinusna transformacija te se kvantiziraju koeficijenti. Kvantizirani koeficijenti se tada redom kodiraju Huffmanovim algoritmom. U MATLABU postoji nekoliko naredbi koje omogućuju rad na blokovima slike. To su *blkproc()*, *colfilt()* i *nlfilt()*.

5.1 - Zadaci - DCT i kompresija slike

Slika 5-1: Slika lijevo je original , a slika desno restrikciju baze(maska je kvadratna veličine 4) i kvadratno odstupanje 44.5360



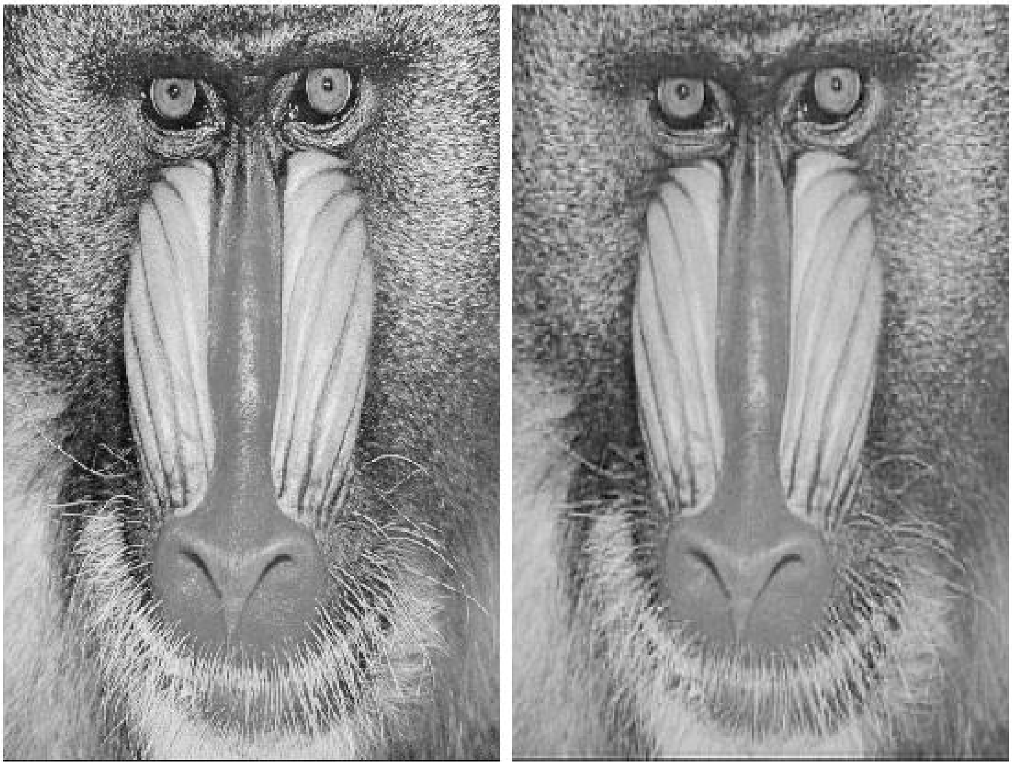
Slika 5-2: Gore lijevo je originalna slika , a dalje redom s lijev ana desno su slika nad kojima su upotrebljene trokut maske veličine od 1 do 8



Slika 5-3: Gore lijevo je originalna slika , a dalje redom s lijev ana desno su slika nad kojima su upotrebljene kvadratne maske veličine od 1 do 8

Veličina maske	kvadratno odstupanje(trokut maska)	kvadratno odstupanje(kvadrat maska)
1	696.3959	696.3959
2	547.0051	509.7953
3	435.6358	369.1697
4	338.3289	253.4741
5	253.8571	160.3190
6	182.9335	91.1280
7	123.7357	38.9596
8	78.1324	0.0000

Povećavanjem veličine maske kvaliteta rekonstruirane slike raste, a opada srednje kvadratno odstupanje (kvaliteta slike i srednje kvadratno odstupanje su obrnuto proporcionalni). Maska u obliku trokuta producira veće kvadratno odstupanje odnosno lošiju kvalitetu slike (maska je manja od kvadratne). Iz srednjeg kvadratnog odstupanja je moguće odrediti kvalitetu slike



Slika 5-4: Slika lijevo je original , a slika desno ima kvantizaciju koeficijenata(32 razine) i restrikciju baze(maska je trokutasta veličine 4)

Kvadratno odstupanje = 344.8328. Iz slike i odstupanja je vidljivo kako kvantizacija ima zanemariv utjecaj.