Polinom s realnim koeficijentima

Polinom u jednoj varijabli x s realnim koeficijentima je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zovemo stupanj polinoma f i označavamo ga s $\deg f$ ili $\mathrm{st}\, f$.

Nadalje, koeficijent a_n zovemo vodeći koeficijent polinoma f, a koeficijent a_0 zovemo slobodni član polinoma f.

Sigma zapis polinoma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Polinom s kompleksnim koeficijentima

Polinom u jednoj varijabli x s kompleksnim koeficijentima je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zovemo stupanj polinoma f i označavamo ga s $\deg f$ ili $\operatorname{st} f$.

Nadalje, koeficijent a_n zovemo vodeći koeficijent polinoma f, a koeficijent a_0 zovemo slobodni član polinoma f.

Polinom s koeficijentima iz nekog polja

Polinom u jednoj varijabli x s koeficijentima iz polja F je funkcija $f : F \to F$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in F$, $a_n \neq 0$. Broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zovemo stupanj polinoma f i označavamo ga s $\deg f$ ili $\mathrm{st}\, f$. Pritom, operacije zbrajanja i množenja su operacije iz polja F.

Nadalje, koeficijent a_n zovemo vodeći koeficijent polinoma f, a koeficijent a_0 zovemo slobodni član polinoma f.

Oznake

$\mathbb{R}[x]$ je oznaka za skup svih polinoma u jednoj varijabli x s realnim koeficijentima.

$\mathbb{C}[x]$ je oznaka za skup svih polinoma u jednoj varijabli x s kompleksnim koeficijentima.

$F[x]$ je oznaka za skup svih polinoma u jednoj varijabli x s koeficijentima iz polja F.

Normirani polinom

Normirani polinom je polinom čiji je vodeći koeficijent jednak 1.

Nulpolinom

Nulpolinom je polinom čiji su svi koeficijenti jednaki 0. Stupanj nulpolinoma se ne definira. Ovisno o potrebama ponekad se definira da je stupanj nulpolinoma jednak -1 ili ∞.

Polinomi nultog stupnja

Polinomi nultog stupnja su konstante različite od nule.

Jednakost polinoma

Teorem 5.1 (Teorem o nulpolinomu).

Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

s realnim ili kompleksnim koeficijentima je nulfunkcija ako i samo ako je f nulpolinom.

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da je f nulpolinom. Tada je $a_i = 0$ za svaki $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ pa je očito f nulfunkcija, tj. preslikava sve realne ili kompleksne brojeve u nulu.

Teorem 5.2 (Teorem o jednakosti polinoma).

Polinomi s realnim ili kompleksnim koeficijentima

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0$$

su funkcijski jednaki akko vrijedi

$$n = m \ \text{ i } \ a_i = b_i, \ \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Ako je $m = n$ i $a_i = b_i$, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n$, onda očito vrijedi $f(x) = g(x)$ za svaki realni ili kompleksni broj x pa su polinomi f i g funkcijski jednaki jer po definiciji imaju jednake domene i kodomene.

Iz dokaza teorema o nulpolinomu dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 5.3.

Neka je F polje i $P \in F[x]$ polinom n-tog stupnja za koji postoji $n+1$ različitih brojeva $x_i \in F$ takvih da je $P(x_i) = 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$. Tada je P nulpolinom.

Nultočka polinoma

Neka je F polje. Kažemo da je $x_0 \in F$ nultočka polinoma $P \in F[x]$ ako je $P(x_0) = 0$.

Korolar 5.3.

Neka je F polje. Svaki polinom n-tog stupnja iz $F[x]$ ima najviše n nultočaka.

Određenost polinoma

Teorem 5.4.

Neka je u ravnini zadano $n+1$ različitih točaka (x_i, y_i) pri čemu je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$. Tada postoji jedinstveni polinom $P \in \mathbb{R}[x]$ stupnja $\leqslant n$ takav da je $P(x_i) = y_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$.

Dokaz.

jedinstvenost

Pretpostavimo da postoje dva polinoma $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ stupnja $\leqslant n$ za koje vrijedi $P(x_i) = Q(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, n+1$.

Definiramo polinom $R(x) = P(x) - Q(x)$. Kako je $R(x_i) = 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ i $\deg R \leqslant n$, iz prethodnog korolara slijedi da je R nulpolinom pa je $P = Q$.

Dijeljenje polinoma

Teorem 5.5.

Neka je F polje. Tada za svaka dva polinoma $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi $q, r \in F[x]$ takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

pri čemu je $\deg r < \deg g$.

Dokaz.

$\boxed{\textit{jedinstvenost}}$

Pretpostavimo da za zadane polinome f i g, osim polinoma q i r, postoje polinomi q' i r' takvi da je

$$f = gq + r, \quad \deg r < \deg g,$$
$$f = gq' + r', \quad \deg r' < \deg g.$$

Teorem 5.6 (Descartesov teorem).

Neka je F polje. $a \in F$ je nultočka polinoma $f \in F[x]$ ako i samo ako je f djeljiv s polinomom $x - a$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je a nultočka polinoma f. Tada je $f(a) = 0$. Prema teoremu o dijeljenju polinoma vrijedi

$$f(x) = (x - a)q(x) + r$$

za neki $q \in F[x]$ i $r \in F$. Uvrstimo li u posljednju jednakost $x = a$, zbog $f(a) = 0$ dobivamo $r = 0$ pa je polinom f djeljiv s polinomom $x - a$.

Najveća zajednička mjera polinoma

Zajednička mjera polinoma

Svaki polinom koji dijeli polinome f i g zovemo zajednička mjera polinoma f i g.

Najveća zajednička mjera polinoma

Najveća zajednička mjera polinoma f i g je normirani polinom najvećeg stupnja koji dijeli polinome f i g. Najveću zajedničku mjeru polinoma f i g označavamo s $M(f, g)$.

Najveću zajedničku mjeru dva polinoma možemo pronaći pomoću Euklidovog algoritma. Euklidov algoritam se temelji na uzastopnoj primjeni teorema o dijeljenju polinoma tako dugo dok ne dobijemo ostatak jednak 0. Tada je najveća zajednička mjera jednaka normiranom prethodnom ostatku.

Euklidov algoritam

Za pronalaženje najveće zajedničke mjere polinoma f i g, nakon konačno mnogo primjena teorema o dijeljenju polinoma dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$
\begin{aligned}
f &= gq_1 + r_1, \quad \deg r_1 < \deg g \\
g &= r_1 q_2 + r_2, \quad \deg r_2 < \deg r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \quad \deg r_3 < \deg r_2 \\
&\vdots \\
r_{k-4} &= r_{k-3} q_{k-2} + r_{k-2}, \quad \deg r_{k-2} < \deg r_{k-3} \\
r_{k-3} &= r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1}, \quad \deg r_{k-1} < \deg r_{k-2} \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_k
\end{aligned}
$$

Tada je $M(f,g) = n(r_{k-1})$ pri čemu $n(r_{k-1})$ označava normiranje polinoma r_{k-1}.

Kompleksni brojevi

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Realni i imaginarni dio kompleksnog broja

$$z = x + yi, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$$

Konjugirano kompleksni broj kompleksnog broja

$$z = x + yi, \quad \overline{z} = x - yi$$

Apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja

$$z = x + yi, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propozicija 5.6.

Ako je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *tada vrijedi*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big).$$

Dokaz.

Koristeći poznate formule

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

odmah dobivamo

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &\qquad + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big) \end{aligned}$$

♡

Propozicija 5.7.

Ako je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *tada vrijedi*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Dokaz.

Koristeći poznate formule

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

odmah dobivamo

Za $r = 1$ dobivamo

Moivreova formula

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Nadalje, također vrijedi

Eulerova formula

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Propozicija 5.9.

Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *tada vrijedi*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}$ *i* $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dokaz.

Kako $\sqrt[n]{z}$ mora biti kompleksni broj, možemo ga zapisati u trigonometrijskom obliku.

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Dignemo li posljednju jednakost na n-tu potenciju, dobivamo

$$z = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

pri čemu smo koristili formulu za potenciranje kompleksnog broja.

Kratnost nultočke

Kažemo da je $x_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma $P(x)$ kratnosti k ako je $P(x)$ djeljiv s $(x - x_0)^k$ i nije djeljiv s $(x - x_0)^{k+1}$.

Ako je $k = 1$, kažemo da je x_0 jednostruka nultočka. Ako je $k > 1$, kažemo da je x_0 višestruka nultočka (dvostruka, trostruka, ...).

Teorem 5.7 (Osnovni teorem algebre).

Svaki polinom $P \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $\geqslant 1$ ima barem jednu nultočku u polju $\mathbb{C}$, tj. $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno polje.

Zadatak 5.4.

Objasnite zašto $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno polje.

Korolar 5.5 (Faktorizacija polinoma).

Polinom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *iz* $\mathbb{C}[x]$ *može se napisati u obliku*

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_s)^{n_s}$$

gdje su $x_1, \ldots, x_s$ *različite nultočke polinoma* P*, a* n_i *je kratnost nultočke* x_i *i vrijedi* $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$.

Teorem 5.10 (Vièteove formule).

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *polinom s kompleksnim koeficijentima, a* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *njegove nultočke. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Cjelobrojna kompleksna nultočka

Cjelobrojna kompleksna nultočka polinoma je nultočka $\alpha+\beta i$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \ \beta \neq 0$.

Teorem 5.15.

Ako je $\alpha + \beta i$ cjelobrojna kompleksna nultočka polinoma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je $\alpha^2 + \beta^2$ djelitelj slobodnog člana.

Simetrične jednadžbe

Simetrični polinom

Za polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kažemo da je simetrični ako vrijedi

$$a_k = a_{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Simetričnom polinomu $f(x)$ pridružena jednadžba $f(x) = 0$ zove se **simetrična jednadžba**.

Zadatak 5.5.

Dokažite da je polinom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-tog stupnja simetričan akko vrijedi

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

U Cardanovoj formuli javlja se izraz

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

koji zovemo diskriminanta jednadžbe $x^3 + px + q = 0$.

Teorem 5.16.

Neka je Δ diskriminanta jednadžbe $x^3 + px + q = 0$ s realnim koeficijentima. Tada vrijedi:

- *Ako je $\Delta > 0$, onda zadana jednadžba ima jedan realni i dva konjugirano kompleksna korijena.*
- *Ako je $\Delta = 0$, onda su svi korijeni zadane jednadžbe realni i barem jedan od njih je višestruki.*
- *Ako je $\Delta < 0$, onda su svi korijeni zadane jednadžbe realni i različiti.*