製程能力指標的廣義置信區間

Thomas Mathew[1,*,†], G. Sebastian[2] 和 K. M. Kurian[2]

October 12, 2024

Abstract

本文使用廣義置信區間的概念來推導一些常用製程能力指標的下限置信區間。對於已有近似下限置信區間的情況,我們對現有近似方法和廣義下限置信區間進行了數值比較。數值結果表明,廣義置信區間提供了非常接近名義置信水平的覆蓋概率。文中給出了兩個例子來說明這些結果。

1 引言

製程能力指標(PCIs)是用來衡量所考慮的製程特性X滿足規格要求程度的統計工具。能力指標通常是製程參數的函數,如均值μ、標準差σ、目標值T、下規格限L和上規格限U。在迄今爲止提出的眾多指標中,一些常用的PCIs是:

$$C_{pk} = \frac{\min\{U-\mu, \mu-L\}}{3\sigma} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sigma} \tag{1}$$

$$C_{pmk} = \frac{\min\{U-\mu, \mu-L\}}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2}$$

$$C''_{pk} = \frac{d^*-A^*}{3\sigma} \tag{3}$$

其中

$$d^* = \min\{U-T, T-L\},$$
$$A^* = \max\left[\frac{d^*(\mu-T)}{U-T}, \frac{d^*(T-\mu)}{T-L}\right]$$

且 $d=(U-L)/2$, $M=(U+L)/2$。

2 續

值得注意的是，當 $\mu=T$ 時，$C_{pmk}=C''_{pk}=C_{pk}$。通常 $T=M$，若 $T\neq M$，則稱之爲「非對稱公差」。在上述三個指標中，第一個是「第二代」指標，後兩個是「第三代」PCIs。C_{pk} 指標源自日本，被視爲經過時間考驗的能力指標，而 C_{pmk} 是由 Pearn 等人引入的。C''_{pk} 是 Pearn 和 Chen 爲非對稱公差製程提出的 C_{pk} 推廣。在這三個指標中，後兩個扮演著獨特的角色，因爲它們在衡量製程能力時對目標值的偏差非常敏感。

3 廣義置信區間

廣義置信區間的概念在那些難以獲得「標準」樞軸量的情況下變得重要。爲引入這一概念，令 X 爲具有概率分布 $f(x;\theta,\delta)$ 的隨機變量，其中 θ 是感興趣的參數，δ 是干擾參數。假設我們要爲 θ 獲得一個置信區間。令 $T(X;x,\theta,\delta)$ 爲一個廣義樞軸量，它依賴於隨機變量 X、其觀測值 x 和參數，且假設 $T(X;x,\theta,\delta)$ 滿足以下條件：

(A1) $T(X;x,\theta,\delta)$ 的觀測值，即 $T(x;x,\theta,\delta)$，不依賴於干擾參數 δ。

(A2) $T(X;x,\theta,\delta)$ 的概率分布不依賴於任何未知參數。

則 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 廣義置信區域由 $[\theta : T(x;x,\theta,\delta) \in C_{1-\alpha}]$ 給出，其中 $C_{1-\alpha}$ 滿足 $P[T(X;x,\theta,\delta) \in C_{1-\alpha}] = 1-\alpha$。

4 C_{pk}、C_{pmk} 和 C''_{pk} 的置信區間

本文使用廣義置信區間的概念爲上述三個指標建立置信區間。我們假設感興趣的特性 X 遵循正態分布，均值爲 μ，標準差爲 σ。設 X 的上下規格限分別爲 U 和 L，目標值爲 T，其中 $L<T<U$。讓我們從 C_{pk} 的情況開始。因此，我們假設製程監控和糾正措施是基於方程式 (1) 中定義的 C_{pk} 值。考慮充分統計量

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$$

其中 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是來自生產過程的隨機樣本。設 $\bar{x}$ 和 s^2 分別爲 $\bar{X}$ 和 S^2 的觀察值。爲了推導 C_{pk} 的廣義置信區間，我們現在定義一個廣義樞軸量 T_1，它是 $\bar{X}$、S^2、$\bar{x}$、s^2 的函數，可能還包括其他參數，並滿足第 2 節中的條件 (A1) 和 (A2)。爲此，令

$$T_\mu = \bar{x} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}\frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{(n-1)S^2/\sigma^2}}s = \bar{x} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}\frac{Z}{U}s$$
$$T_{\sigma^2} = \frac{s^2\sigma^2}{S^2} = \frac{(n-1)s^2}{U^2}$$

其中 $Z=(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$ 和 $U^2=(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$ 是統計獨立的。這裡，χ^2_m 表示自由度爲 m 的中心卡方分布。很容易驗證，T_μ 和 T_{σ^2} 的觀察值（通過將 $\bar{X}$ 和 S^2 替換爲其觀察值 $\bar{x}$ 和 s^2 得到）分別是 μ 和 σ^2。此外，(T_μ, T_{σ^2}) 的分布不依賴於任何未知參數。現在定義

$$T_1 = \frac{d-|T_\mu - M|}{3\sqrt{T_{\sigma^2}}}$$

顯然，T_1 的觀察值是我們感興趣的參數 C_{pk}，且 T_1 的分布不依賴於任何未知參數。換句話說，T_1 滿足第 2 節中的條件 (A1) 和 (A2)，C_{pk} 的 $100(1-\alpha)\%$ 廣義下限置信界由 $T_1(\alpha)$ 給出，其中 $T_1(\alpha)$ 滿足 $P[T_1 < T_1(\alpha)] = \alpha$。

下限置信界 $T_1(\alpha)$ 顯然可用於檢驗關於 C_{pk} 的假設。因此，假設我們要檢驗 C_{pk} 超過指定值 c_0 的聲明。我們需要檢驗

$$H_0 : C_{pk} \le c_0, \quad H_1 : C_{pk} > c_0$$

基於下限置信界 $T_1(\alpha)$，當 $T_1(\alpha) > c_0$ 時我們拒絕 H_0。

其他兩個指標 C_{pmk} 和 C''_{pk} 的廣義下限置信界推導可以按照與 C_{pk} 相同的方式進行。通過在指標表達式中將 μ 和 σ^2 替換爲 T_μ 和 T_{σ^2}，可以得到廣義樞軸統計量。

5 模擬結果

通過模擬研究，我們現在檢驗不同 PCIs 的下限置信界的表現。如果估計的覆蓋概率接近名義值，則區間估計將是準確的。

1　模擬設置與結果

在模擬中，我們使用 $L = 7, U = 14, \mu = 10$ 以及能提供 $C_{pk} = 1, 1.33, 1.5, 2, 2.5$ 和 3 的各種 σ 值。我們計算了廣義置信限的期望值及其覆蓋概率，樣本量 $n = 10(10)50$。廣義置信限是使用 10000 個模擬的 (Z, U^2) 值計算得出，保持觀察值 $\bar{x}$ 和 s^2 固定。這些觀察值生成了 10000 次，得到 10000 個廣義下限置信限值。估計的覆蓋概率是 C_{pk} 的眞實值超過廣義下限置信限的比例。廣義下限置信限的期望值就是這 10000 個值的平均。對於每對 (n, C_{pk})，計算了 $1 - \alpha = 0.90$ 和 0.95 的覆蓋概率和期望值。結果列在表1中，我們使用符號 G_{pk} 表示 C_{pk} 的廣義下限置信限。

C_{pk} 指數被認爲是經過時間考驗的能力指標，在生產圈廣泛使用。C_{pk} 的常用估計量是

$$\hat{C}_{pk} = \frac{\min\{U - \bar{X}, \bar{X} - L\}}{3S} = \frac{d - |\bar{X} - M|}{3S} \tag{1}$$

由於估計量 $\hat{C}_{pk}$ 是兩個非中心Student's t 隨機變量的最小值，其實際概率分布很複雜；此外，文獻中只有近似置信區間可用。Kotz 和 Lovelace 報告了四個重要的近似下限置信限。對於置信水平 $1 - \alpha$，這些近似限爲：

1. Bissell's 近似
$$B_{pk} = \hat{C}_{pk} - Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)}} \tag{2}$$

2. Heavlin's 近似
$$H_{pk} = \hat{C}_{pk} - Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{n-1}{9n(n-3)} + \hat{C}_{pk}^2 \frac{1}{2(n-3)}\left(1 + \frac{6}{n-1}\right)} \tag{3}$$

3. Kushler 和 Hurley's 近似
$$KH_{pk} = \hat{C}_{pk}\left[1 - \frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{2(n-1)}}\right] \tag{4}$$

4. Nagata 和 Nagahata's 近似
$$N_{pk} = \sqrt{1 - \frac{2}{5(n-1)}}\hat{C}_{pk} - Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}} \tag{5}$$

其中 $Z_{1-\alpha}$ 是標準正態分布的 $(1 - \alpha)$ 百分位數。爲了便於比較上述近似置信限和廣義置信限 G_{pk}，覆蓋概率和期望值列於表1中。上述近似置信限的覆蓋概率和期望值也是基於 10000 次模擬計算得出的。

從表I可以清楚看出，廣義置信限的覆蓋概率始終接近名義值。就覆蓋概率而言，唯一表現始終良好的近似是Nagata和Nagahata的方法。我們還注意到，對於較小的C_{pk}值，G_{pk}的覆蓋概率略低於N_{pk}，而對於較大的C_{pk}值則相反。

此外，我們注意到這些置信限的期望值之間存在相應的排序。然而，差異並不顯著，我們可以得出結論，G_{pk}和N_{pk}都是令人滿意的下限置信限。我們還注意到，除了Heavlin的近似限H_{pk}外，表I中考慮的所有限都表現得相當好。數值結果表明H_{pk}可能過於保守。

我們還進行了模擬研究，以研究C_{pmk}的廣義下限置信限G_{pmk}的行爲，設置與C_{pk}相同，另外選擇$T = 10.3$。對於C_{pmk}，Chen和Hsu得到了一個漸近下限置信限。他們發現，在某些正則性條件下，自然估計量$\hat{C}_{pmk}$的分佈，即$\hat{C}_{pmk} = (d - |\bar{X}_n - M|)/[3\sqrt{S_n^2 + (\bar{X}_n - T)^2}]$，是正態的。他們得到的$100(1-\alpha)\%$漸近下限置信限，稱爲$CH_{pmk}$，如下：

$$CH_{pmk} = \hat{C}_{pmk} - Z_{1-\alpha}\frac{\hat{\sigma}_{pmk}}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

其中

$$\hat{\sigma}^2_{pmk} = \frac{1}{9(1+\lambda^2)} + \frac{2\lambda}{3(1+\lambda^2)^{3/2}}\hat{C}_{pmk} + \frac{144\lambda^2 + (U-L)(m_4/S^4 - 1)}{144(1+\lambda^2)^2}\hat{C}^2_{pmk}$$

$$m_4 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^4}{n}, \quad \lambda = \frac{\bar{X} - T}{S}$$

且$Z_{1-\alpha}$是標準正態分佈的$(1-\alpha)$百分位數。我們計算了與G_{pmk}和CH_{pmk}相關的覆蓋概率和期望值；這些結果列在表II中。很明顯，與CH_{pmk}相關的覆蓋率低於名義水平。然而，G_{pmk}的表現非常令人滿意。

C''_{pk}的性能也在相同的設置下進行了評估。廣義下限置信限現在用G''_{pk}表示。G''_{pk}的覆蓋概率和期望值列於表III。覆蓋概率表明G''_{pk}的性能相當令人滿意。據我們所知，目前還沒有C''_{pk}的置信限可用。

2 例子

我們首先基於Montgomery（例5.3）給出的活塞環數據計算C_{pk}的下限置信限。感興趣的品質特性是活塞環的內徑測量。有125個以毫米爲單位的觀測值，$L = 73.95$且$U = 74.05$。數據由25個樣本組成，每個樣本有5個觀測值。Montgomery（第226頁）給出的這些數據的$\bar{x}$和s圖表顯示製程處於控制狀態。因此，我們假設這125個觀測值來自單一正態分佈。

廣義下限置信限以及各種近似置信限是爲置信水平$1-\alpha = 0.90$和0.95，以及$n = 10, 20, 30, \ldots, 120$和125的值計算的。$n = 10$的計算基於Montgomery（例5.3）給出的活塞環數據的前十個觀測值，其他n值的計算也類似。表IV顯示了結果。表中還包括了C_{pk}的眞實值。我們注意到，除了下限置信限H_{pk}外，其餘限值幾乎相同。考慮到表I中顯示的數值結果，這是可以預期的。

爲了説明在非對稱公差的情況下C_{pmk}和C''_{pk}的下限置信限的計算，我們使用Pearn等人考慮的電子放大器的增益（增益）數據。如果增益在7.75和12.25 dB之間，放大器就被認爲是可接受的；目標值爲10 dB。由於原始數據不遵循正態分布，它們經過適當變換得到表V中的數據，取自Pearn等人。

變換後，規格限和目標值爲$L = -2.31$，$U = 5.06$和$T = 1$。G_{pmk}的90%和95%廣義下限置信限以及Chen和Hsu的漸近限CH_{pmk}，對於不同的n值，列於表VI。

表VII顯示了指數C''_{pk}的廣義下限置信限G''_{pk}的值。同樣，$n = 10$的計算基於表V中給出的前十個觀測值，其他n值的計算也類似。

如預期的那樣，CH_{pmk}限顯著大於G_{pmk}，因爲如前所述，與CH_{pmk}相關的覆蓋概率低於名義水平。CH_{pmk}限顯然不能推薦用於實際應用。

3 結論

本文採用的廣義置信區間方法爲計算各種PCIs的置信限提供了一個統一的方法。在品質控制應用的背景下，Hamada和Weerahandi以及Burdick等人已經將這種方法用於量規重複性和再現性研究。我們的數值結果表明，廣義置信區間方法提供的置信區間表現良好，提供了接近名義水平的覆蓋概率。數值結果還表明，文獻中可用的並非所有近似置信限都表現令人滿意。我們研究了三個PCIs（即C_{pk}、C_{pmk}和C''_{pk}）的廣義下限置信限的計算，但在正態性假設下，廣義置信區間的思想可以輕易地應用於計算其他PCIs的置信限。