Estymacja kowariancji szumów, strojenie filtru Kalmana, zadania

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

19 grudnia 2022

Rozważamy układ z czasem dyskretnym

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k, y_k = Cx_k + v_k, \tag{1}$$

w którym,

$$w_k \sim N(0, \sigma_w^2 I_{n_w}), v_k \sim N(0, \sigma_v^2 I_{n_v}). \tag{2}$$

Parametr $\theta = (\sigma_w^2, \sigma_v^2)^T$, jest nieznany i należy go oszacować na podstawie danych $y_1, ..., y_N$, $u_0, ..., u_{N-1}$.

Gęstość parametru $\theta = (\sigma_w^2, \sigma_v^2)^T$, ma postać

$$p(\theta | Y_N) = c_N e^{-\mathcal{L}(\theta, Y_N)}, \tag{3}$$

gdzie $c_N > 0$, jest stałą normalizacyjną, $Y_N = \mathrm{col}(y_1, ..., y_N)$ oraz

$$\mathcal{L}(\theta, Y_N) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (|y_k - C m_k^-(\theta)|^2_{W_k^{-1}(\theta)} + \ln |W_k(\theta)|), \tag{4}$$

$$m_k^- = Am_{k-1} + Bu_{k-1}, m_0 = 0, \tag{5}$$

$$S_k^- = AS_{k-1}A^T + \sigma_w^2 GG^T, S_0 = 0, \tag{6}$$

$$W_k = \sigma_v^2 I_{n_v} + CS_k^- C^T, \tag{7}$$

$$S_k = S_k^- - S_k^- C^T W_k^{-1} S_k^- C^T, \tag{8}$$

$$m_k = m_k^- + S_k C^T \sigma_v^{-2}(y_k - Cm_k^-). \tag{9}$$

Minimalizacja wyrażenia (4) ze względu na θ, pozwala znaleźć oszacowanie parametrów opisujących kowariancje szumów. Minimum funkcji $\mathcal{L}$ będziemy oznaczać przez $\hat{\theta}(Y_N)$.

Aby znaleźć błąd oszacowania, funkcję (4) rozwijamy w szereg, w otoczeniu punktu $\hat{\theta}$. Stąd

$$\mathcal{L}(\theta, Y_N) = \mathcal{L}(\hat{\theta}_N, Y_N) + \tfrac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}_N)^T H(\theta - \hat{\theta}_N) + ..., \qquad (10)$$

gdzie

$$H = \nabla^2_\theta \mathcal{L}(\hat{\theta}, Y_N), \qquad (11)$$

oznacza hesjan funkcji $\mathcal{L}(\theta, Y_N)$ obliczony w punkcie $\hat{\theta}$. Bezpośrednio ze wzorów (3) oraz (10) wynika, że

$$p(\theta|Y_N) = \bar{c}_N e^{-\frac{1}{2}(\theta-\hat{\theta}_N)^T H(\theta-\hat{\theta}_N)+\cdots} \approx N(\theta, \hat{\theta}_N, H^{-1}), \qquad (12)$$

gdzie $\bar{c}_N$ jest stałą normalizacyjną. A zatem, jako przybliżenie macierzy kowariancji estymatora $\hat{\theta}_N$, możemy przyjąć

$$\hat{S}_\theta \approx H^{-1}. \qquad (13)$$

Funkcja *fmincon* Matlaba, zwraca hesjan funkcji minimalizowanej w punkcie optymalnym.

W zadaniach 1-7, dane są macierze A, B, C, G oraz pomiary $y_0, ...y_{N-1}$. Sterowanie jest zawsze zerowe, a układ jest pobudzany przez szum. Warunki początkowe są zawsze zerowe. Należy znaleźć parametry σ_w, σ_v oraz narysować wykres poziomicowy funkcji $\mathcal{L}$ w otoczeniu jej minimum oraz oszacować błąd estymacji parametrów. Następnie należy obliczyć estymatę stanu za pomocą już nastrojonego filtru Kalmana lub filtru wygładzającego tzw. Kalman Smoother. Cała grupa dzieli się na 7 w miarę równolicznych zespołów. Każdy zespół rozwiązuje jedno zadanie. Jeżeli znalezione parametry będą zgadzać się z prawdziwymi wartościami z dokładnością do 10%, to dana grupa zalicza ćwiczenia. Dane do obliczeń można pobrać pod tym **linkiem**.

- Särkä S. (2013). Bayesian Filtering and Smoothing. *Cambridge University Press*.
- Bania P., Baranowski J. (2017). Approximation of optimal filter for Ornstein-Uhlenbeck process with quantised discrete-time observation. *International Journal of Control, Vol. 91, Issue 2, pp, 411-419*.
- Baranowski J., Bania P., Prasad I., Cong T. (2017). Bayesian fault detection and isolation using Field Kalman Filter. *EURASIP J. on Advances in Signal Processing 2017:79*.
- Bania P., Baranowski J. (2016). Field Kalman Filter and its approximation. *Proc. of 55th IEEE Conf. on Decision and Control December 12-14, Las Vegas, USA, pp. 2875-2880*.
- B. J. Odelson, M. R. Rajamani, and J. B. Rawlings (2016). *A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances*, Automatica, vol. 42, no. 2, pp. 303 – 308.

Życzę powodzenia!