1997	9,28	3,12	1,4
1998	7,1	2,75	1,26
1999	7,9	2,51	1,1
2000	6,85	1,45	0,49
2001	2,95	0,64	0,18
2002	3,9	0,83	0,97
2003	8,5	3,3	1,51
2004	7,03	3,69	0

Fuente: www.bolsar.com

Suponga que el inversionista desea que:

- La participación de Minetti no debe superar el 60 % de la cartera
- Si invierte en automotrices, no invertirá en financieras.
- Un rendimiento esperado de por lo menos 11% anual.

Trabajando con una planilla de cálculo:

1) Calcule la rentabilidad promedio anual de cada acción.

2) Calcule la varianza y matriz de covarianza de la rentabilidad promedio anual.

3) Obtenga la cartera de inversión óptima para estas tres acciones.

CAPÍTULO 9

OPTIMIZACIÓN Y PLANIFICACIÓN CON GRAFOS

1. INTRODUCCIÓN

Frecuentemente, los tomadores de decisiones tienen bajo su responsabilidad la realización de proyectos compuestos por una gran cantidad de tareas o actividades, en las cuales se involucra a diferentes personas o departamentos de la organización. Cuando estos proyectos son de envergadura, se hace necesario realizar una adecuada planificación, programación y control de los mismos.

Un ejemplo de este tipo de problemas es el que enunciamos a continuación.

SYLKEN SA fabrica una línea completa de productos para afeitar. Recientemente, un competidor presentó una nueva afeitadora con hoja triple y banda lubricante, que durante los últimos meses ha capturado una parte significativa del mercado de la empresa. Los administradores han decidido que deben introducir un producto que compita con esta nueva afeitadora y les permita recuperar la parte del mercado perdida. Gustavo, gerente de planificación y desarrollo, ha identificado las actividades que se necesitan para diseñar, desarrollar y comercializar un nuevo producto y el tiempo esperado de cada una de estas actividades. Gustavo le pidió a Pablo, su asesor, revisar las tareas y entregarle un informe resumido que indique:

- ✓ El tiempo total que se requiere desde el principio del proyecto hasta que el producto nuevo se encuentre en manos del distribuidor.
- ✓ Las fechas específicas de inicio y finalización de cada actividad.
- ✓ Las tareas que deban ser cuidadosamente controladas para que el proyecto se concluya en una fecha específica.
- ✓ La posibilidad de acelerar ciertas actividades para terminar el proyecto más pronto asignándole mayores recursos y si es así cuáles serían estas tareas y a cuánto ascendería el costo adicional.

La Teoría de Redes o Grafos nos proporciona herramientas útiles y ampliamente difundidas para este propósito, de las cuales estudiaremos las conocidas con el nombre de PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) y CPM (*Critical Path Method*), desarrolladas simultáneamente a finales de la década de 1950 en Estados Unidos. Dada la similitud en el proceso de cálculo de ambos algoritmos, en todo lo que sigue, los denominaremos en forma genérica técnicas PERT/CPM.

Estas técnicas se utilizan en la planificación, administración y control de una diversidad de proyectos, tales como:

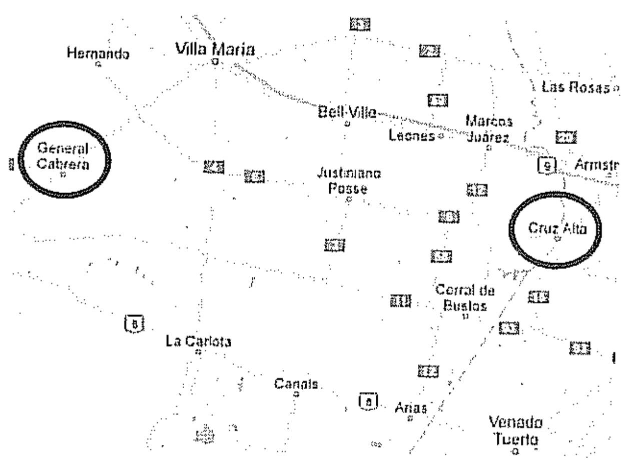
- ✓ Obras de ingeniería como construcción de puentes, autopistas, edificios, etc.
- ✓ Investigación y desarrollo de nuevos productos.
- ✓ Programación de una auditoría contable.
- ✓ Elaboración de un balance general.
- ✓ Planificación de campañas publicitarias, políticas, etc.
- ✓ Diseño e implementación de sistemas informáticos.

Su aplicación, aporta al decisor información de gran utilidad, que le permite conocer, según la situación en que se encuentra:

- El tiempo mínimo de finalización del proyecto.
- Las actividades que pueden convertirse en cuellos de botella, señalando aquellas sobre las que debe hacerse un estricto control para no tener retrasos.
- La posibilidad de acelerar la ejecución del proyecto, acortando el tiempo de realización de algunas actividades y cuál sería su costo.
- La asignación de recursos a las actividades.

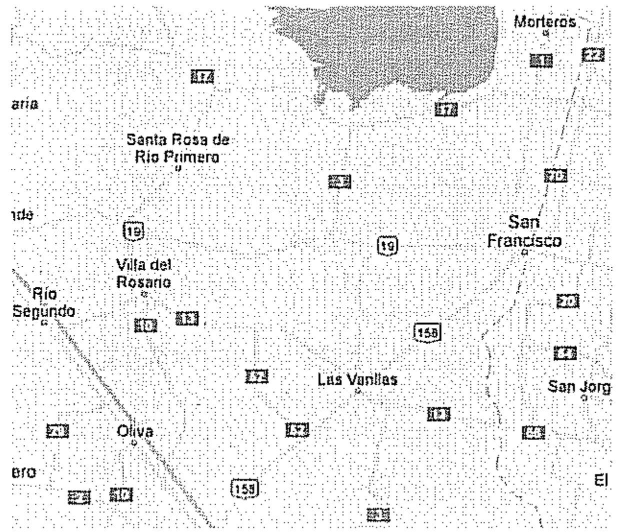
Existen otros tipos de problemas en los cuales la teoría de redes puede ser muy útil al decisor, valgan como ejemplo las dos situaciones que mostramos a continuación.

Damián se encuentra en General Cabrera, necesita enviar un camión con mercadería a Cruz Alta y quiere seleccionar una ruta cuyo kilometraje total sea el mínimo posible.



En una zona del interior de la provincia, se llevará a cabo una obra de autovías en rutas que actualmente son de tierra o pavimentadas.

Al gobierno de la provincia le interesa seleccionar los tramos a construir de manera que todas las ciudades estén conectadas por una autovía, por supuesto a un costo mínimo.



2. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE GRAFOS

GRAFO O RED

Definiremos grafo o red a un par ordenado del tipo (X,U), donde X es un conjunto finito a cuyos elementos llamaremos vértices o nodos de la red, y U representa una relación binaria entre los elementos del conjunto X, es decir,

$$U \subseteq X^2 = \{(x_i, x_j) / x_i \in X \wedge x_j \in X\}$$

Los pares ordenados de elementos de X que pertenecen a U, se denominan *arcos* de la red. Por ejemplo:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \qquad (1)$$

$U = \{(x_1,x_3), (x_1,x_5), (x_1,x_7), (x_2,x_4), (x_3,x_1), (x_3,x_2), (x_4,x_3), (x_5,x_1), (x_7,x_4), (x_7,x_6)\}$

Dado un arco $(x_i,x_j) \in U$, llamaremos a su vértice inicial x_i y a su vértice final x_j. Los arcos cuyo vértice inicial es x_i se conocen como *arcos incidentes hacia el exterior* (U^{+}_{xi}) de dicho vértice. Siendo los *arcos incidentes hacia el interior* (U^{-}_{xj}) de un vértice x_j todos aquellos que tengan ese vértice como vértice final. Simbólicamente:

$$U^{+}_{x_i} = \{x_j / (x_i, x_j) \in U\}$$

$$U^{-}_{x_j} = \{x_i / (x_i, x_j) \in U\}$$

Otra forma de definir una red es mediante el par ordenado (X, Γ), donde Γ es una aplicación del conjunto X en el conjunto $\wp(X)$ llamado "partes de X".

El conjunto partes de X está compuesto por todos los subconjuntos que se pueden formar a partir de X. incluyendo al conjunto vacío y el propio conjunto X, al que denominaremos conjunto A

$$\Gamma : X \rightarrow \wp(X)$$

$$\wp(X) = \{A / A \subseteq X\}$$

Así, para un elemento cualquiera $x_i \in X$, esta aplicación relaciona a dicho elemento con un único conjunto de vértices que es su imagen. Este conjunto está integrado por los vértices finales de todos los arcos que tienen como vértice inicial a x_i:

$x_j \in \Gamma(x_i) \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in U$

En la red del ejemplo, tendríamos:

$\Gamma(x_1) = \{x_3, x_5, x_7\}$

Γ (x2) = {x4}

Γ (x3) = {x1, x2}

Γ (x4) = {x3}

Γ (x5) = {x1}

Γ (x6) = ∅

Γ (x7) = {x4, x6}

En forma similar, $\Gamma^{-1}(x_j)$ estará integrado por los vértices iniciales de todos los arcos que tienen como vértice final a x_j

$$x_i \in \Gamma^{-1}(x_j) \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in U$$

Aclaremos que la función $\Gamma^{-1}(x_j)$ no es la inversa de $\Gamma(x_i)$

Así:

$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_3, x_5\}$

Γ -1(x2) = {x3}

Γ -1(x3) = {x1, x4}

Γ -1(x4) = {x2, x7}

Γ -1(x5) = {x1}

Γ -1(x6) = {x7}

Γ -1(x7) = {x1}

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA RED

Una red puede representarse gráficamente, asociando a cada elemento del conjunto X un punto en el plano que representará un nodo o vértice

de la red y cada elemento del conjunto U estará graficado como una flecha o arco que va desde el vértice inicial al vértice final y representa la relación entre los nodos correspondientes. La gráfica de la red definida en (1), sería la siguiente:

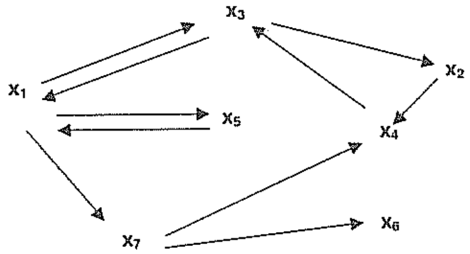


Gráfico 1

En principio, no hay una regla para ubicar los vértices en el plano. Sin embargo en redes de gran tamaño se utiliza una técnica de ordenación de vértices por niveles para ayudar a graficar más ordenadamente.

CAMINO POR LOS ARCOS

Dado un grafo, llamaremos camino a una sucesión o secuencia de arcos del grafo, con la condición que, para cualquier arco del camino su vértice final debe coincidir con el vértice inicial del siguiente.

Un camino de la red enunciada en (1) sería, por ejemplo:

$$\mu = \langle (x_3,x_2), (x_2,x_4), (x_4,x_3), (x_3,x_1) \rangle \qquad (2)$$

Llamaremos *longitud de un camino* al número de arcos que lo forman, así el camino μ definido en (2) es de longitud 4, lo que se suele simbolizar $\ell(\mu) = 4$. En este sentido, un solo arco será un camino de longitud uno. Si un arco está repetido, se lo cuenta tantas veces como aparece en el camino.

Designaremos como *vértice inicial de un camino* al vértice inicial de su primer arco y *vértice final de un camino* al vértice final del último arco. Asimismo diremos que un camino "pasa" por un cierto vértice x_h, si existe en él por lo menos un arco que sea incidente a dicho vértice (hacia el interior o el exterior).

Cuando el vértice inicial y final de un camino coinciden, diremos que el camino forma un *circuito*. Un circuito es un caso particular de camino.

Un *subcamino*, de un camino dado, es una secuencia cualquiera de arcos consecutivos del mismo. Por ejemplo, un subcamino del camino μ definido en (2), sería:

$$\mu^o = \langle (x_2, x_4), (x_4, x_3), (x_3, x_1) \rangle$$

VALOR DE UN CAMINO POR LOS ARCOS

Suele asociarse a cada arco de un grafo un número real, que representa, según la naturaleza del problema, costo, tiempo, distancia, etc; este número real se conoce como *valor de un arco* y lo simbolizaremos como: $v(x_i, x_j)$ o $v_{i,j}$.

Será posible entonces, definir el concepto de *valor de un camino* como la suma de los valores de todos los arcos que lo componen. Para el caso del camino μ, definido en (2), tendríamos:

$$v(\mu) = v_{3,2} + v_{2,4} + v_{4,3} + v_{3,1}$$

Resulta evidente que, teniendo la adición entre números reales la propiedad asociativa, si tenemos un camino expresado como una secuencia de subcaminos, el valor del camino será igual a la suma de los valores de los subcaminos que lo integran. Por ejemplo, si $\mu = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$, siendo μ_1, μ_2 y μ_3 tres subcaminos resultantes de una partición del camino μ, tendremos,

$$v(\mu) = v(\mu_1) + v(\mu_2) + v(\mu_3)$$

CAMINO POR LOS VÉRTICES

Cuando definimos un camino como una secuencia de arcos, queda automáticamente definida una única secuencia de vértices: la de los vértices por los cuales "pasa" ese camino.

Al calcular la longitud, los vértices repetidos se cuentan tantas veces como aparecen en el camino.

Por lo tanto, dada una red G =(X,U), podemos también dar el concepto de *camino* como una secuencia o *sucesión de vértices.*

Indudablemente a cada camino por los arcos le corresponderá un único camino por los vértices y viceversa.

Finalmente, teniendo en cuenta todo lo expresado, destacamos que:

La *longitud* de un camino definido como secuencia de vértices es igual al número de vértices que lo integran, menos uno.

Cuando consideramos caminos como secuencias de vértices, también podemos particionar el mismo en subsecuencias o *subcaminos.*

Definir un camino por los arcos o por los vértices, dependerá de la naturaleza del problema a analizar.

VALOR DE UN CAMINO POR LOS VÉRTICES

En ciertas aplicaciones se suele asociar a cada vértice x_i un número real, al cual se lo llama *valor del vértice* y se lo simboliza por $v_i = v(x_i)$

Podremos definir el valor de un camino por los vértices como la suma de los valores de todos los vértices que forman la secuencia correspondiente. Por ejemplo en el camino μ definido en (2), tendríamos:

$$v(\mu) = v_3 + v_2 + v_4 + v_3 + v_1$$

TEOREMA DE LA OPTIMIDAD

Este teorema tiene su origen en la Programación Dinámica, propuesto por Richard Bellman, bajo el nombre de principio de optimidad. Con posterioridad se adaptó el mismo a la teoría de redes. Es importante destacar que en él se basan la mayoría de los métodos utilizados en la

determinación de caminos de valuación óptima (mínima o máxima), como los que analizaremos en este capítulo.

El teorema se enuncia como:

"Todo subcamino de un camino de valuación óptima, es también de valuación óptima, comparado con todos los otros caminos que unen sus mismos vértices extremos".

3. CAMINOS DE VALOR MÍNIMO

EL PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

El problema puede representarse a través de un grafo *conexo* y *no dirigido* con dos nodos especiales, un nodo que llamaremos *Origen* y un nodo *Destino*.

Grafo conexo: todos los nodos están conectados.

A cada ligadura del grafo (arco no dirigido) se asocia una distancia no negativa.

El objetivo, consiste en encontrar el camino de valor mínimo que une un nodo origen y un nodo destino.

Una propiedad importante es que la ligadura seleccionada debe proporcionar una trayectoria o camino entre el nodo O y el D.

ALGORITMO DE DIJKSTRA

El algoritmo está diseñado para identificar los caminos de valor mínimo que unen el vértice origen con cada uno de los nodos del grafo.

Consiste en establecer una etiqueta a cada nodo de la red, la que luego de sucesivas actualizaciones, contendrá el valor del camino de valor mínimo que une el nodo inicio del grafo con el nodo considerado y el vértice precedente en dicho camino.

Para etiquetar cada uno de los nodos se procede de la siguiente forma:

Paso 1: Considere todos los vértices que estén conectados con el origen por un camino de longitud 1. A cada uno de ellos se le colocará una etiqueta de la siguiente forma: ***[j , d]***

El componente ***d*** de la etiqueta mide la distancia desde el origen al nodo considerado (***i***). El otro componente (***j***) es el nodo precedente, el origen en este caso. Estas etiquetas serán temporales.

Paso 2: De ***todos*** los nodos con etiqueta temporal, se elige uno cuya componente de distancia sea la menor y se lo etiqueta como permanente. Los empates se rompen arbitrariamente. Cuando todos los nodos son permanentes se pasa al Paso 4.

Paso 3: Si **i** es el último etiquetado permanente considere todos los vértices que estén conectados directamente con éste a través de un camino de longitud 1, siempre y cuando no estén etiquetados como permanentes. Para cada uno de ellos calcular la suma de su distancia a *i* más la distancia de la etiqueta de *i*.

Si el vértice no está etiquetado darle una etiqueta temporal, Si ya tiene etiqueta temporal, cambiarla sólo si la distancia recién calculada es menor que la componente de distancia de la etiqueta actual. Si la distancia recién calculada es igual a la que tiene la etiqueta anterior, conservar ambas. Regresar al Paso 2.

Paso 4: Las etiquetas permanentes indican la menor distancia desde el origen a cada vértice de la red. También indican el vértice precedente en la ruta de valor mínimo hacia cada vértice.

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

Suponga que el siguiete grafo representa las rutas posibles entre dos localidades, la ciudad 1 y la 6. Nuestro objetivo es identificar el camino de valor mínimo que une la localidad 1 con la 6. El valor de cada arco representa la distancia entre las diferentes ciudades.

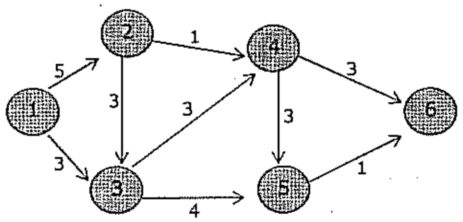


Gráfico 2

Los empates se resuelven arbitrariamente

El primer paso del método consiste en identificar a todos los nodos que estén conectados con el origen por un camino de longitud 1. En este caso son los vértices 2 y 3. A ellos les colocamos una etiqueta temporal.

Luego, siguiendo con el paso 2 de todos los nodos con etiqueta temporal, se selecciona el que tiene menor componente de distancia y se lo etiqueta como permanente. En el gráfico 3 el nodo permanente está marcado más oscuro.

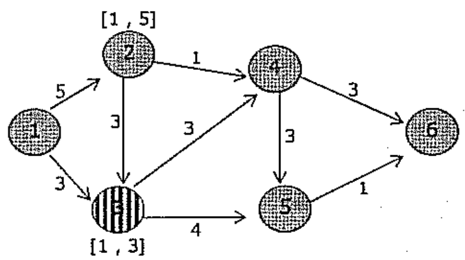


Gráfico 3

A continuación, del último nodo etiquetado como permanente, en este caso el vértice 3, identificamos todos los vértices conectados con él por un camino de longitud 1 y que no estén etiquetados como permanentes. Calculamos la distancia del nodo 3 a dicho vértice más la distancia de la etiqueta del nodo 3 y le asignamos una etiqueta temporal. Por ejemplo para el vértice 5 la etiqueta será [3, 7]. Si el nodo ya tiene etiqueta, esta

se cambiará sólo en el caso de que la componente de distancia sea menor, si la distancia es igual se dejan ambas etiquetas. Este paso puede observarse en gráfico 4.

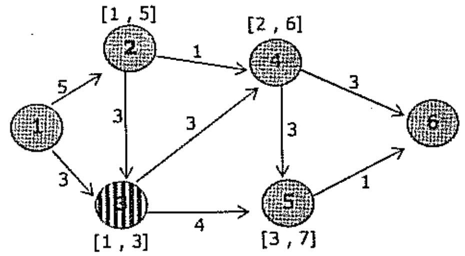


Gráfico 4

Seguidamente, de todos los vértices que tienen etiqueta temporal, seleccionamos el tenga la menor componente de distancia y lo marcamos como permanente. Esto puede observarse en el gráfico 5.

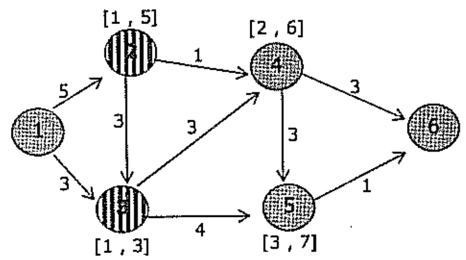


Gráfico 5

Repitiendo el paso 3 y luego el 2 nos queda como permanente el vértice 4, con dos etiquetas, como se muestra en el gráfico 6.

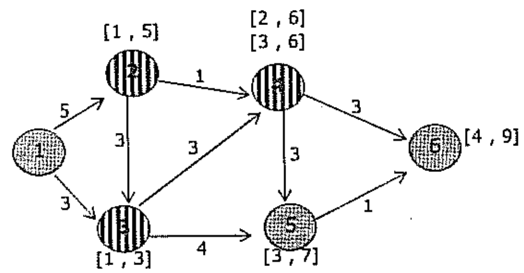


Gráfico 6

Repitiendo los pasos 2 y 3 llegamos a la gráfico 7.

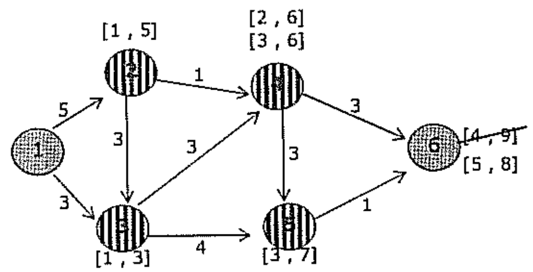


Gráfico 7

Cuando ya no quedan nodos por investigar, procedemos a identificar el camino de valor mínimo a través del análisis de las etiquetas de cada vértice como lo indica el paso 4. Esto se muestra en el gráfico 8.

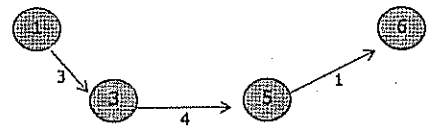


Gráfico 8

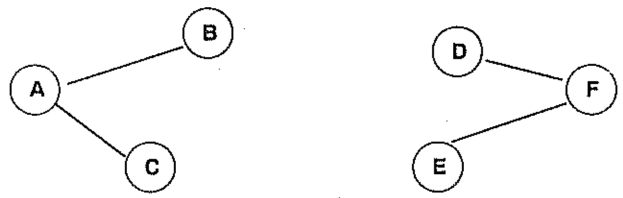
Para este grafo el camino de valor mínimo por los arcos es:

$\mu = \{(1, 3), (3, 5), (5, 6)\}$ y el valor del camino es $v(\mu) = 8$

4. ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

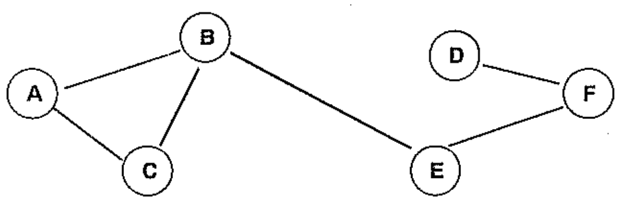
Ciclo: secuencia de arcos que tiene el mismo nodo inicio y fin

Un grafo que tiene n nodos, conexo y que no contiene ciclos no dirigidos es *Árbol de Expansión.* Todo árbol de expansión tiene exactamente *n-1* arcos, ya que este es el número mínimo de arcos necesarios para tener un grafo conexo y el máximo número posible para que no haya ciclos no dirigidos.



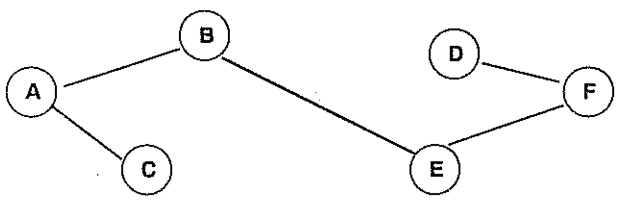
No es un árbol de expansión ya que no hay conexión entre todos los nodos

Gráfico 9



Hay conexión pero tiene ciclos, entonces no es un árbol.

Gráfico 10



Es un árbol de expansión porque tiene n-1 aristas y ningún ciclo.

Gráfico 11

En el problema del **árbol de expansión mínima**, se consideran grafos no dirigidos y conexos, con valores en las ligaduras de los nodos (arcos no dirigidos o aristas) que representan distancia, costo, tiempo, etc.

El objetivo es seleccionar un conjunto de aristas de valor mínimo entre todo el conjunto de ligaduras que satisfacen la propiedad de proporcionar un camino o trayectoria entre cada par de nodos.

El problema se puede resumir como sigue:

1. Se tienen n nodos con sus correspondientes ligaduras y valores para las mismas.
2. Se desea diseñar una red de manera tal que haya un camino entre cada par de nodos.
3. El objetivo es satisfacer este requisito de manera tal que se minimice el valor total de las ligaduras incluidas en la red.

Una red con *n* nodos requiere sólo de *n-1* ligaduras para proporcionar un camino entre cada par de nodos. No deben usarse más aristas ya que esto aumentaría sin necesidad el valor total de las aristas consideradas. Las *n-1* ligaduras deben elegirse de manera tal que la red resultante forme un árbol de expansión.

Por lo tanto, el problema es encontrar el árbol de expansión con el valor total mínimo de sus aristas.

ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA.

1. Seleccionar de manera arbitraria cualquier nodo como inicio, de todos los nodos conectados al inicio a través de una arista, seleccionar el de menor valor.

Quedan ahora dos conjuntos, el de nodos Conectados (C), cuyas aristas estarán en el árbol de expansión mínima y el conjunto de nodos No Conectados (NC).

2. Identificar del conjunto NC el nodo que se conecte con algún nodo del conjunto C a través de la arista de menor valor y se lo conecta con este. Los empates se resuelven arbitrariamente.

3. Se procede de esta manera hasta que todos los nodos estén conectados.

En cada paso el algoritmo elige la arista de menor valor que se puede usar para expandir C.

Son numerosas las aplicaciones de este tipo de problemas, fundamentalmente en el diseño de redes de comunicaciones, transmisiones eléctricas, carreteras, etc.

Ejemplo:

Encontrar el árbol de expansión mínima del siguiente grafo.

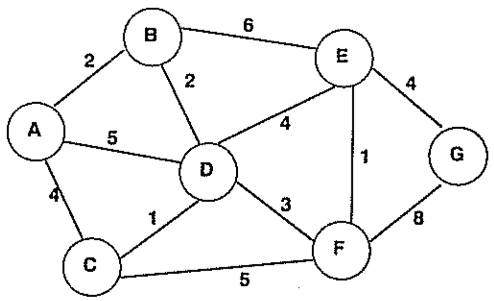


Gráfico 12

Elegimos como nodo inicio a B, luego elegimos A para conectar co B

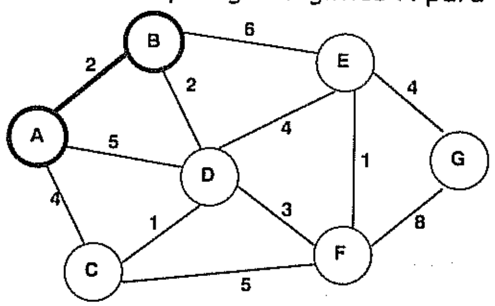


Gráfico 13

El nodo conectado a A o B, con arista de menor valor es D (con respecto a B), entonces lo conectamos a B

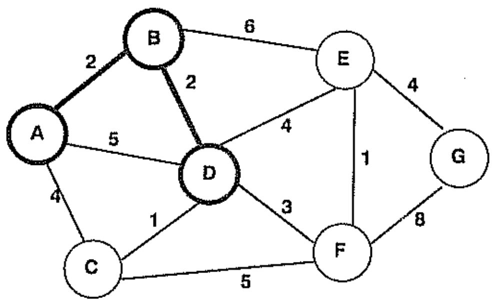


Gráfico 14

El nodo conectado a A, B o D con arista de menor valor es C (con respecto a D), lo conectamos a D

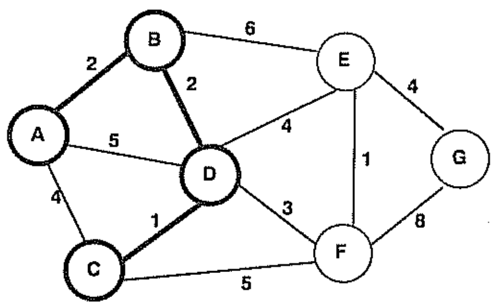


Gráfico 15

El nodo conectado a A, B, D o C con arista de menor valor es F(con respecto a D), lo conectamos a D

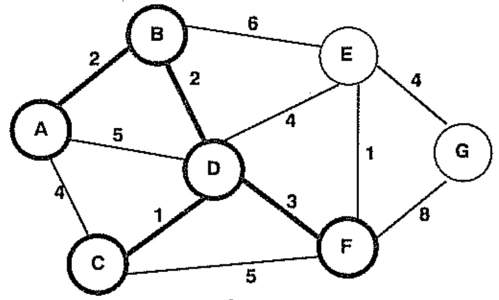


Gráfico 16

El nodo conectado a A, B, D, C o F con arista de menor valor es E (con respecto a F), lo conectamos a F.

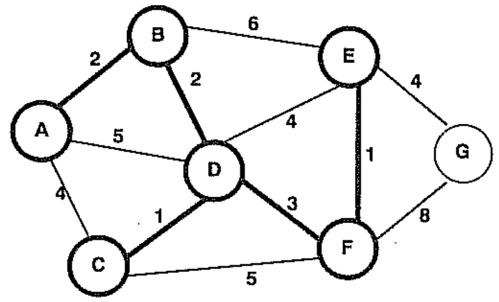


Gráfico 17

El único nodo no conectado es G con la arista de menor valor respecto a E. Conectamos el nodo G al E.

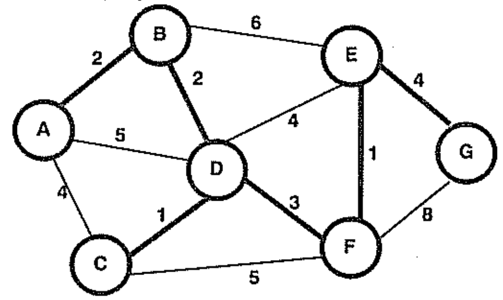


Gráfico 18

Todos los nodos quedaron conectados, por lo que hemos encontrado la solución óptima, el valor mínimo del árbol es de 13.

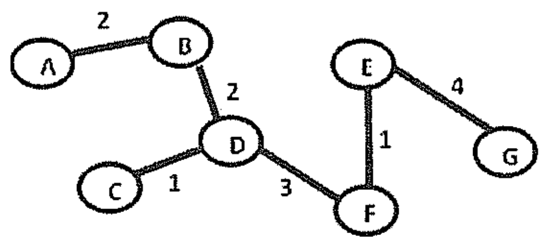


Gráfico Nº 19

5. PROGRAMACIÓN Y CONTROL DE PROYECTOS

DEFINICIÓN DE PROYECTO COMPLEJO

Diremos que un proyecto complejo se caracteriza por:

- ✓ Estar formado por un número, frecuentemente grande, de actividades o tareas.
- ✓ Cada una de esas tareas puede tener otra u otras que son sus precedentes.
- ✓ Para cada una de las actividades se conocen sus precedentes.
- ✓ Cada actividad tiene asociada una duración o tiempo de ejecución.
- ✓ Diremos que el Proyecto está terminado cuando se han ejecutado todas las actividades que lo integran.

Decimos que una tarea A es precedente de otra actividad B, si la finalización de la A es condición necesaria para que sea posible iniciar la ejecución de B.

REPRESENTACIÓN DE PROYECTOS COMPLEJOS COMO UNA RED

Podemos decir que un proyecto complejo está caracterizado por un conjunto de elementos -las actividades- y una relación binaria entre ellas -la relación de precedencia-. Surge así como idea inmediata la posibilidad de representarlo como un grafo, donde el conjunto X será el conjunto de las actividades y la relación binaria U será la relación de precedencia entre ellas. Esta forma de representar a las actividades de un proyecto en los vértices, fue planteada por el Francés Bernard Roy en el año 1960 y es conocida como "Método de Roy", "Método de Actividades en los Vértice", "Método Francés" o "Método de los Potenciales".

Otra forma de representar un proyecto complejo en un grafo, es mediante el Método de los Arcos Actividades o Método Americano, en el cual las actividades se grafican en los arcos de la red, representando los vértices situaciones o etapas del proyecto.

El gráfico 9 del siguiente ejemplo corresponde al método de Actividades en los Vértices y el gráfico 10 muestra el método Americano.

Actividades	Precedencias
A	-
B	A
C	A
D	B
E	C
F	D y E

Tabla 1

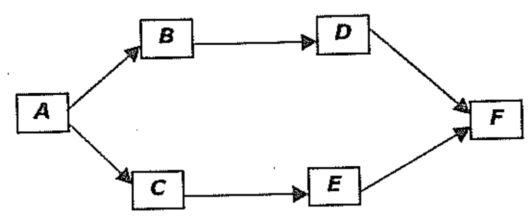


Gráfico N° 19

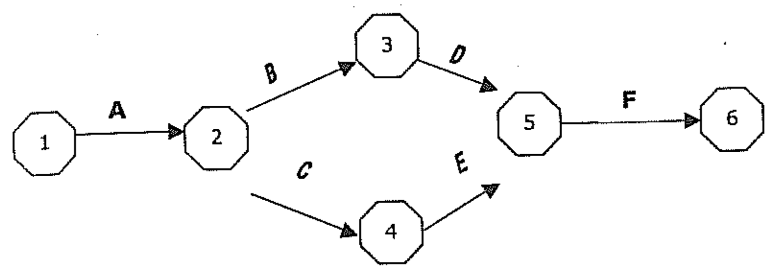


Gráfico N° 20

En todo lo que sigue trabajaremos con la representación por el método francés o de actividades en los vértices[1].

6. MÉTODO DE CAMINO CRÍTICO

Las técnicas desarrolladas para encontrar información relacionada con el tiempo mínimo necesario para la terminación de un proyecto complejo, son conocidas como Métodos de Camino Critico. Este algoritmo basa su desarrollo en el teorema de la Optimidad de Bellman.

Los sistemas de planeamiento, programación y control por este método, se desarrollaron a partir de 1957, como una tarea conjunta de equipos de trabajo de las compañías Du Pont Nemours y Remington Rand, labor que dio origen al método CPM. En forma casi simultánea, otro equipo compuesto por miembros de la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina de los EEUU y de la compañía Lockheed Aircraft, desarrolló el método PERT. Este fue aplicado con éxito al proyecto Polaris, que consistió en la construcción de un submarino nuclear capaz de lanzar proyectiles balísticos intercontinentales.

El desarrollo de este método lo realizaremos a partir de los tiempos de duración de las actividades que forman el proyecto, esto es, si los mismos son tiempos conocidos o aleatorios. En el primer caso, es aplicable por ejemplo, en proyectos de construcción o lanzamientos de

[1] Para el desarrollo de CPM/PERT por el método de arcos actividades, puede consultarse en Giuliodori R. (1999)

nuevos productos; mientras que proyectos con duraciones de actividades aleatorias son, por ejemplo, los proyectos de investigación y desarrollo.

7. CASO EN QUE LA DURACIÓN DE LAS ACTIVIDADES ES UN TIEMPO CIERTO

Las hipótesis de trabajo aceptadas en la aplicación del Método de Camino Crítico en este caso son:

Hipótesis 1: Es posible efectuar un listado de todas las actividades que forman el Proyecto, conociendo para cada una de ellas cuál o cuáles son sus precedentes (cuando existan). Por lo tanto podemos, una vez listadas las mismas numerarlas y referirnos a ellas, en general, como actividad i o actividad i-ésima (i = 1, 2, etc.).

Hipótesis 2: El tiempo de realización de cada actividad es un número exactamente conocido (expresado en alguna unidad de tiempo adecuada -hora, día, semana, etc.-) al que llamaremos su duración. A la duración de la actividad i-ésima la simbolizaremos por D(i) o D_i.

Hipótesis 3: El objetivo del administrador del proyecto es terminarlo en el tiempo más corto posible. Es decir se impone la condición de que se desea minimizar la duración total del proyecto.

Conociendo el listado de todas las actividades y las relaciones de precedencia, será posible construir la red asociada al mismo, en la que cada vértice representará una actividad, y las relaciones de precedencia serán representadas por los arcos. Convendremos, aunque esto no es imprescindible, en agregar dos vértices adicionales (que no representan actividades), a los que llamaremos vértice Inicio y vértice Fin. Del vértice Inicio partirán arcos dirigidos a todos los vértices asociados a actividades que no tienen precedentes (actividades iniciales); al vértice Fin llegarán arcos que parten de todos los vértices asociados con actividades que no son precedentes de ninguna otra (actividades finales). A estos dos vértices adicionales les asociaremos una duración nula.

$D_0 = 0$
$D_n = 0$

Con la finalidad de simplificar la notación, definimos en símbolos para la actividad i-ésima:

i: código asociado a la actividad
D_i: duración de la actividad
MI_i: momento de inicio más temprano posible de la actividad
MF_i: momento de finalización más temprano posible de la actividad
MI_i*: momento de inicio más tardío permisible de la actividad

MF_i*: momento de finalización más tardío permisible de la actividad

Cuando hablamos de "momento más temprano posible", nos referimos a que resulta materialmente imposible comenzar la actividad antes de ese momento, considerando las relaciones de precedencia y las duraciones de las actividades.
Cuando decimos "momento más tardío permisible", tenemos en cuenta las relaciones de precedencia y la condición que nos hemos impuesto de finalizar el proyecto en el menor tiempo posible (hipótesis 3).
Gráficamente representaremos a cada actividad del proyecto y sus tiempos, en un nodo o vértice de la red, con la siguiente estructura:

i	**D_i**
MI_i	**MF_i**
MI_i*	**MF_i***

CÁLCULO DEL TIEMPO MÍNIMO DE FINALIZACIÓN DEL PROYECTO

Sobre el particular, y en base a las hipótesis admitidas, es indudable que podemos considerar que cualquier camino que una los vértices Inicio y Fin, representará una secuencia de actividades consecutivas. Como todas las actividades deben estar realizadas para que se considere que el proyecto ha sido concluido, el mismo no podrá estar terminado mientras no se ejecuten todas las secuencias de actividades representadas por los caminos que unen el vértice Inicio con el Fin. Si simbolizamos por $\hat{C}$ al conjunto de todos los caminos que unen dichos vértices, tendremos que la duración total del proyecto tendrá como cotas inferiores a:

$$DT \geq \sum_{i \in \mu} D_i \qquad \forall\, \mu \in \hat{C}$$

En consecuencia, existirán tantas cotas inferiores para DT como caminos incluidos en $\hat{C}$. Por lo tanto, el menor valor posible para DT será la mayor de esas cotas inferiores, es decir:

$$DT = \max_{\mu \in \hat{C}} \sum_{i \in \mu} D_i$$

Al camino que determina dicho máximo se lo denomina *Camino Crítico* (μ*), siendo muy importante su identificación, pues sobre las actividades que lo forman, las que llamaremos *actividades críticas*, deberemos establecer un estricto control, ya que cualquier demora que se produzca en las mismas afectará la duración total del proyecto.

Por todo lo expresado podremos, con la finalidad de determinar la duración total mínima del proyecto (DT) y las actividades críticas, utilizar el Teorema de la Optimidad. Para ello, y con el objetivo de calcular información importante para la planificación, administración y control del proyecto, definimos los siguientes conceptos y fórmulas de cálculo:

- **Momento de Inicio más Temprano Posible**

Comenzamos asignando al momento de inicio del proyecto (vértice Inicio) el valor cero.

$$MI_0 = 0$$

El momento de inicio más temprano de las actividades siguientes, se calcula recurrentemente, como el *máximo* de los momentos más tempranos de terminación de todas sus predecesoras inmediatas.

$$MI_i = \text{máx } MF_k \qquad k \in \Gamma^{-1}(i)$$

Donde, el máximo se lo toma para todos los valores de *k* que representen a las actividades precedentes inmediatas de la *i*

- **Momento de Finalización más Temprano Posible**

$$MF_i = MI_i + D_i$$

Siendo para la actividad inicial:

$$MF_0 = 0$$

Si consideramos que el vértice Fin tiene asociado un número "n" y dado que su duración es cero ($D_n = 0$), la duración total mínima (DT) del proyecto será:

$$DT = MI_n = MF_n$$

Obtenida la duración total mínima del proyecto y mediante un procedimiento similar al realizado, pero comenzando desde la actividad Fin hacia la Inicio, deberemos hacer una revisión desde la última actividad, hacia el comienzo de la red.

- **Momento de Finalización más Tardío Permisible**

Como el objetivo es minimizar la duración total del proyecto, el momento más temprano de finalización del proyecto coincide con el momento más tardío de finalización.

$$MF_n{}^* = MI_n = MF_n = DT$$

Partiendo del vértice final, se calculan recurrentemente, los momentos de inicio y finalización más tardíos, de cada actividad.
El momento de finalización más tardío de una actividad es el *mínimo* de los momentos más tardíos de inicio de todas las actividades que le siguen inmediatamente:

$$MF_i{}^* = \min MI_r{}^* \qquad r \in \Gamma(i)$$

Donde, el mínimo se lo toma para todos los valores de *r* que representen a las actividades inmediatas siguientes a la *i*

- **Momento de Inicio más Tardío**

$$MI_i{}^* = MF_i{}^* - D_i$$

Asimismo podemos expresar, por todo lo analizado con anterioridad que:

$$MI_0 = MF_0 = MI_0{}^* = MF_0{}^* = 0$$
$$MI_n = MF_n = MI_n{}^* = MF_n{}^* = DT$$

ACTIVIDADES CRÍTICAS

Las actividades que no admiten demoras en su ejecución, son llamadas *actividades críticas.*
Observemos que las actividades críticas son aquellas que cumplan con la condición:

$$MI_i = MIi^* \wedge MFi = MFi^*$$

Al camino formado por estas tareas se lo conoce como camino crítico, lo simbolizamos por μ^* y es el *camino de valor máximo* que une el vértice Inicio con el vértice Fin.

HOLGURAS O MÁRGENES DE LAS ACTIVIDADES

Es aconsejable, una vez determinado el plazo de finalización de un proyecto, calcular las holguras de cada actividad como medio de obtener mayor información sobre cada una de ellas y ver la influencia que, una modificación en sus tiempos tiene sobre la duración total del proyecto o sobre las actividades siguientes.

- **Holgura o Margen Total**

Es el tiempo en que se puede retrasar una actividad sin modificar el momento de finalización del proyecto. Se calcula como:

$$MT_i = MF_i{}^* - MF_i = MI_i{}^* - MI_i$$

- **Holgura o Margen Libre**

Es el tiempo en que se puede retrasar una actividad sin afectar el momento de inicio más temprano de las actividades siguientes. Se calcula como:

$$ML_i = \min (MI_r - MF_i) \qquad r \in \Gamma(i)$$

Donde *r* representa a todas las actividades inmediatas siguientes a la actividad i.
Además podemos observar que, para toda actividad i, se verificará:

$$MT_i \geq ML_i \geq 0$$

Como propiedades importantes de estos márgenes, con relación a que una actividad sea o no crítica, podemos mencionar:

$$i \text{ es una actividad crítica} \Leftrightarrow MT_i = 0$$

$$i \text{ es una actividad crítica} \Rightarrow ML_i = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$MT_i = 0 \Leftrightarrow i \text{ es una actividad crítica} \Rightarrow ML_i = 0$$

Observemos que estas propiedades no excluyen la posibilidad que una actividad no crítica tenga ML=0

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Supongamos que el siguiente proyecto simplificado, muestra la operación de lanzamiento al mercado de un nuevo producto:

Código	Nombre	Descripción	Precedencias	Duración en días
1	A	Investigación del Mercado	INICIO	15
2	B	Desarrollo del Producto	A	30
3	C	Estimación del Equipamiento	A	8
4	D	Desarrollo de los Envases	B, C	10
5	E	Fabricación del Envase I	D	7
6	F	Fabricación del Envase II	D	5
7	G	Fabricación del Producto	C	5
8	H	Envasado	E, F, G	2
9	I	Etiquetado	H	1
10	J	Preparación de Cajas	I	1

Tabla 2

Para calcular los momentos MI_i, MI_i^*, MF_i y MF_i^* de cada actividad se puede trabajar sobre la gráfica de la red:

El primer paso consiste en representar el proyecto en un grafo, para luego calcular, para cada nodo, los momentos de inicio y fin más tempranos y más tardíos.

Vamos a adoptar como convención colocar siempre un nodo Inicio y un nodo Fin.

Asimismo nombraremos como actividades iniciales a aquellas que no tienen ninguna precedente, y se conectarán directamente con el nodo Inicio.

Llamaremos tareas finales a las que no preceden a ninguna otra, es decir tienen ninguna siguiente y éstas se conectarán directamente con el nodo Fin.

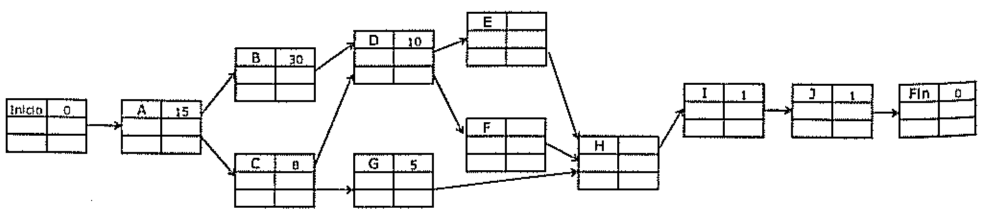


Gráfico N° 21

A continuación recorremos el grafo desde el nodo Inicio hasta el nodo Fin calculando para cada actividad el MI y MF.

En el nodo Inicio, el MI = MF = 0.

Para las actividades que tienen como precedente a Inicio, en este caso solo la A, el MI = 0.

Luego calculamos el momento más temprano de finalización, para la actividad A el $MF_A = 0 + 15 = 15$

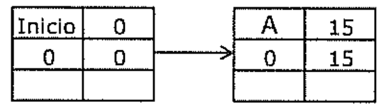


Gráfico N° 22

El MF, en todos los casos, es igual al momento más temprano de inicio más la duración de la actividad.

Para las actividades que no son iniciales, el MI será igual al MF de la actividad precedente, si solamente tiene una, como es el caso de las actividades B y C.

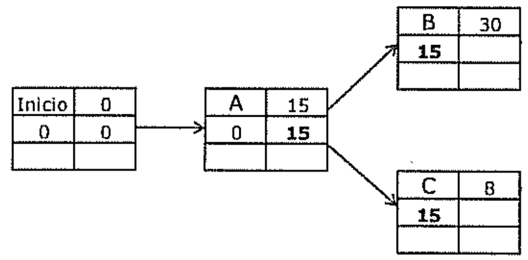


Gráfico N° 23

Calculamos $MF_i = MI_i + D_i$

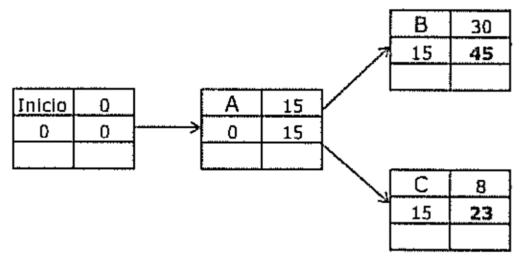


Gráfico N° 24

Para calcular el MI_D, cmo tiene más de una precedente, comparamos MF_B y MF_C, el máximo de ellos será el MI_D.

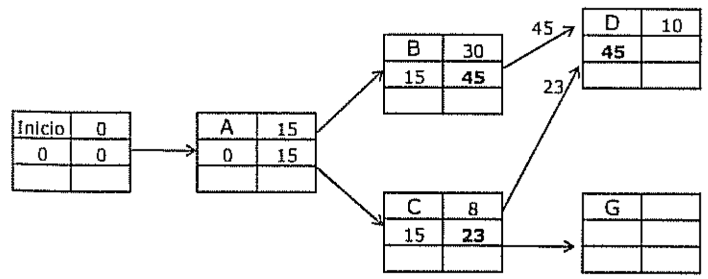


Gráfico N° 25

Es decir que MI_D = máx { MF_B, MF_C}, recordemos que para que una actividad pueda iniciarse deben estar finalizadas todas sus precedentes.

Continuamos de esta manera hasta llegar al nodo Fin, donde tendremos que:

$$MI_{Fin} = MF_{Fin} = MI_{Fin}^* = MF_{Fin}^* = DT$$

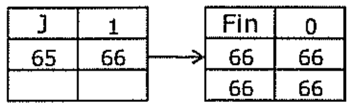


Gráfico N° 26

Ahora vamos a recorrer la red desde el Fin al nodo Inicio calculando para cada actividad los momentos MF* y MI*.

Para las actividades que poseen una única actividad siguiente el momento más tarde de finalización permitido es igual al momento más tarde de inicio de la tarea siguiente.

Así para la actividad I el MF_I^* = 65 ya que J es la única actividad siguiente a I.

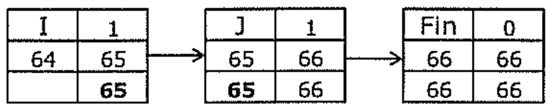


Gráfico N° 27

Al MI_I^* lo calculamos como MF_I^*- D_I

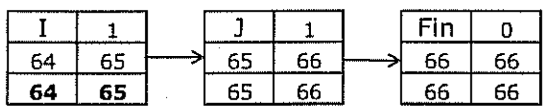


Gráfico N° 28

Para las actividades que tienen más de una tarea siguiente, el momento más tarde en que debe estar finalizada es igual mínimo de los momentos más tardes de inicio de las actividades siguientes.

Así vemos que:

$$MF_C^* = \text{mín } \{ MI_D^*, MI_G^* \}$$

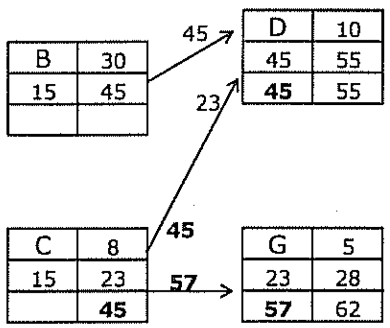


Gráfico N°29

Igualmente para A el MF_A^* = mín { MI_B^*, MI_C^*} y su MI_A^*= MF_A^*- D_A

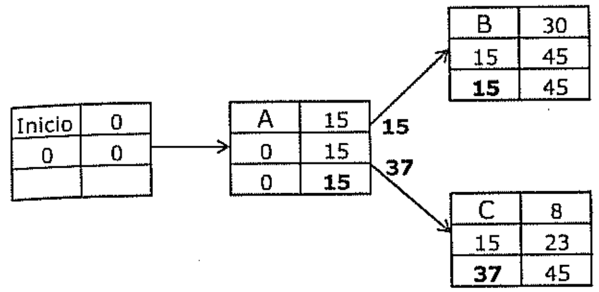


Gráfico N° 30

Al llegar al nodo Inicio nos deberá quedar:

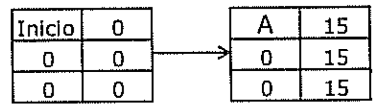


Gráfico N° 31

Observando la red completa

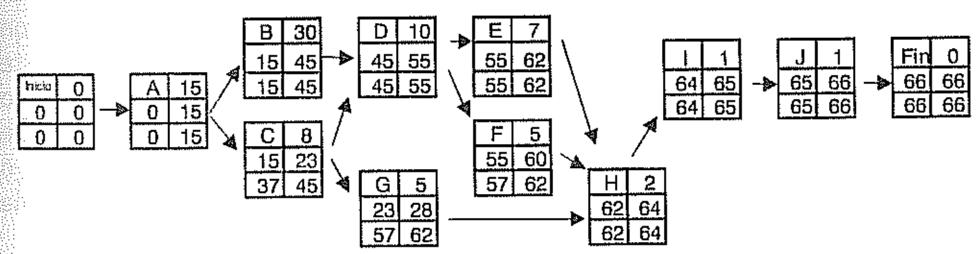


Gráfico 32

Podemos afirmar que el plazo de finalización del proyecto es de 66 días

$$DT = 66 \text{ días}$$

Las actividades que forman el camino crítico son:

$$\mu^* = \{A, B, D, E, H, I, J\}$$

Ya que son las que poseen Margen u Holgura Total nula

Otra forma de trabajar para calcular el tiempo mínimo de finalización del proyecto es mediante la utilización de una planilla de cálculo, tal como se muestra en la tabla siguiente:

Act	Preced.	Duración D_i	Momento de Inicio Temprano MI	Momento de Inicio Tardío MI*	Momento de Fin Temprano MF	Momento de Fin Tardío MF*	Margen Total MT_i	Act. Crítica
Inicio		0	0	0	0	0	0	
A	Inicio	15	0	0	15	15	0	X
B	A	30	15	15	45	45	0	X
C	A	8	15	38	23	45	22	
D	B, C	10	45	45	55	55	0	X
E	D	7	55	55	62	62	0	X
F	D	5	55	57	60	62	2	
G	C	5	23	57	28	62	34	
H	E, F, G	2	62	62	64	64	0	X
I	H	1	64	64	65	65	0	X
J	I	1	65	65	66	66	0	X
Fin	J	0	66	66	66	66		

Tabla 3

8. CASO EN QUE LA DURACIÓN DE LAS ACTIVIDADES SON VARIABLES ALEATORIAS

Hasta aquí hemos trabajado considerando que se pueden obtener estimaciones del tiempo requerido para cada actividad del proyecto con razonable exactitud. En la realidad, ocurre con frecuencia que existe bastante incertidumbre sobre cuáles serán estos tiempos. En este caso supondremos que la duración de cada actividad (D_i) es una variable aleatoria, la cual sigue alguna distribución de probabilidad, conocida o no. Como consecuencia, la duración total del proyecto será también una variable aleatoria.

En la teoría se han propuesto fórmulas para el cálculo de las medias y varianzas de las D_i cuando no se conoce su distribución de probabilidad, como así también para determinar la distribución de probabilidad de *DT*, mediante un conjunto de hipótesis simplificadoras que frecuentemente no se explicitan ni se fundamentan adecuadamente.

Hipótesis 1: Es posible efectuar un listado de todas las actividades que constituyen el Proyecto, indicando con claridad para cada una de ellas cuál o cuales son sus precedentes (cuando existan). Por lo tanto podremos, una vez listadas las mismas, numerarlas y referirnos a ellas en general como actividad i o actividad i-ésima (i = 1, 2, 3, ... , n).

Hipótesis 2: El tiempo de realización de cada actividad es una variable aleatoria, a la que simbolizamos por D_i (i = 1, 2, . . . , n).

Hipótesis 3: Cada variable aleatoria D_i tiene como dominio de variación un intervalo cerrado $[a_i, b_i]$.

Hipótesis 4: Las variable aleatorias D_i son unimodales, pudiendo estimarse tanto la moda m_i, como así también los valores mínimos y máximos que las variables pueden asumir, es decir pueden estimarse a_i y b_i (para i = 1, 2 . . , n).

Hipótesis 5: De las variables aleatorias D_i que se desconocen su distribución de probabilidad, se considerará que la misma es tal que su media o Esperanza Matemática $E(D_i)$ y su Varianza $V(D_i)$ se pueden calcular mediante las siguientes formulas:

Estas fórmulas corresponden a la media y la varianza de una distribución Beta con parámetros p+q=6

$$E(D_i) = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} \qquad V(D_i) = \left(\frac{b_i - a_i}{6}\right)^2$$

Hipótesis 6: Que el camino crítico, calculado a partir de las $E(D_i)$, considerando a estos tiempos medios como si fueran tiempos constantes exactamente conocidos, es el camino crítico que se presentará en toda realización particular del proyecto, independientemente de los valores que en cada caso puedan asumir las variables aleatorias D_i. Esta hipótesis permite afirmar que el tiempo total del proyecto es la variable aleatoria $DT = \Sigma D_i$, donde el sumatorio se extiende a todos los valores i asociados con las "actividades críticas". Esta hipótesis ha sido la más criticada y es evidentemente falsa en la mayoría de los proyectos[2].

Hipótesis 7: Las variables aleatorias D_i son independientes entre sí. Esto, conjuntamente con la hipótesis anterior y bajo las condiciones establecidas en el Teorema Central del Límite, permiten afirmar que *DT* es una variable aleatoria normal, con media igual a la suma de las medias de las D_i asociadas a las "actividades críticas" y con varianza igual a la suma de las varianzas de esas mismas actividades.

$$DT \sim N\left[\sum_{i\in\mu^*} E(D_i)\,;\sum_{i\in\mu^*} V(D_i)\right]$$

DETERMINACIÓN DEL TIEMPO MÍNIMO ESPERADO DE FINALIZACIÓN DEL PROYECTO

Cuando trabajamos con tiempos de ejecución aleatorios, debemos calcular para cada tarea, su duración esperada $E(D_i)$ y su $V(D_i)$, ya sea a partir del conocimiento de su distribución de probabilidad o de aceptar la hipótesis 5.

Si desconocemos la distribución de probabilidad de estas variables aleatorias (hipótesis 5), lo cual ocurre en la mayoría de los proyectos

[2] Para más información sobre esta discusión consultar a Pérez Mackeprang *et al* 1996.

nuevos, se define para cada actividad, un tiempo de realización optimista (a_i), un tiempo normal (m_i) y uno pesimista (b_i).

Luego trabajamos sobre la red de la misma forma a lo explicado en el caso de duraciones conocidas, aclarando que, lo que determinaremos será, en lugar de la duración total mínima del proyecto, la *duración total mínima esperada* (en el sentido de Esperanza Matemática y la Varianza correspondiente).

$$\overline{DT} = \max_{\mu \in C} \sum_{i \in \mu} E(D_i) = \sum_{i \in \mu^*} E(D_i)$$

$$V(DT) = \sum_{i \in \mu^*} V(D_i)$$

Una vez calculado $\overline{DT}$ y V(DT), es necesario realizar un análisis posterior, con el fin de evaluar probabilísticamente el tiempo de terminación del proyecto. Para ello se trabaja con el supuesto establecido en la hipótesis 7, calculando por ejemplo, la probabilidad que el proyecto se retrase cierto plazo establecido previamente, con respecto al valor medio, o bien determinar el tiempo de finalización para un nivel de confianza dado.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

De un proyecto complejo se desconoce la distribución de probabilidad de la duración de sus actividades, no obstante se pueden estimar los tiempos optimista, normal y pesimista, los cuales se muestran en la siguiente tabla.

Se desea calcular el tiempo mínimo esperado de finalización del proyecto.

Obsérvese que en la tabla siguiente, se calculó la media, varianza y desviación estándar de la duración de cada actividad (Di) a partir de las fórmulas propuestas en la Hipótesis 5.

Activ	Pred	Tiempo Optimista	Tiempo Normal	Tiempo Pesimista	E(Di)	V(Di)	σ_{Di}
A	-	1	1	7	2	1,00	1,00
B	-	1	4	7	4	1,00	1,00
C	A	2	2	8	3	1,00	1,00
D	B	2	5	14	6	4,00	2,00
E	B	2	5	8	5	1,00	1,00
F	A	3	6	15	7	4,00	2,00
G	C,D	4	4	4	4	0,00	0,00
H	E	2	6,5	8	6	1,00	1,00
I	F	4	10	16	10	4,00	2,00

Tabla 4

Para calcular el tiempo mínimo esperado de finalización de este proyecto, aplicamos el método de Camino Crítico, trabajando sobre la red con las duraciones medias E(Di).

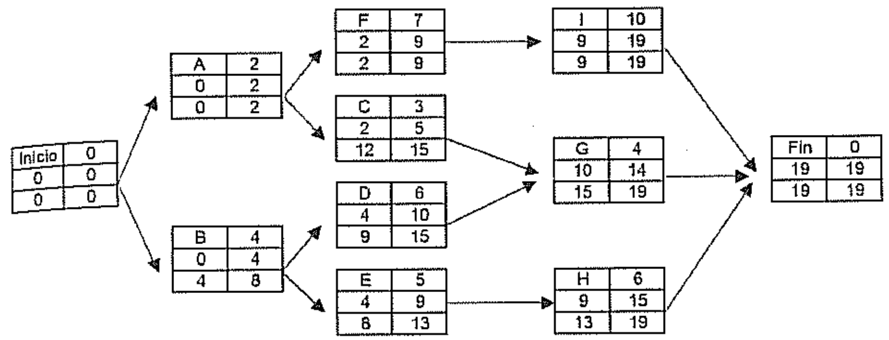


Gráfico 33

Observamos que $\overline{DT}$ = 19 días y las actividades críticas son A, F e I. Esta duración total mínima esperada de 19 días indica que sólo tenemos 0,5 de probabilidad de terminar el proyecto en ese plazo o menos. Por lo cual, se aconseja realizar un análisis posterior de la variable *DT* para lo cual debemos averiguar la varianza y desviación estándar de esta variable:

$$V(DT) = \sum_{i \in \mu^*} \sigma_i^2 = 1 + 4 + 4 = 9 \qquad \sigma_{DT} = \sqrt{\sum_{i \in \mu^*} \sigma_i^2} = \sqrt{9} = 3$$

Observemos que en el caso de duraciones aleatorias, el método PERT/CPM no da un plazo cierto de finalización del proyecto, sino una distribución de probabilidad del mismo, que para nuestro ejemplo es:

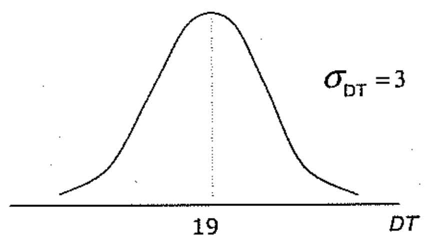


Gráfico 34

Calculemos la probabilidad de que el proyecto se demore 5 días más del tiempo esperado.

Prob $(DT \leq 24) = ?$;

estandarizando la variable *DT* :

$$\text{Prob}\left(z \leq \frac{DT_0 - \overline{DT}}{\sigma_{DT}}\right) = \text{Prob}\left(z \leq \frac{24 - 19}{3}\right) = \text{Prob}\,(z \leq 1{,}67) = 0{,}9525$$

Vemos que al dar más plazo de finalización, aumenta la probabilidad de cumplir con el proyecto.

Supongamos ahora que queremos averiguar la fecha de finalización del proyecto tal que la probabilidad de cumplir con el mismo sea de 0,9990:

$\text{Prob}\,(DT \le DT_0) = 0,9990;$

estandarizando la variable DT:

$\text{Prob}\left(Z \le \dfrac{DT_0 - \overline{DT}}{\sigma_{DT}}\right) = 0,9990;$

$\text{Prob}\left(Z \le \dfrac{DT_0 - 19}{3}\right) = 0,9990;$

$\text{Prob}\,(Z \le Z_0) = 0,9990;$

de donde:

$Z_0 = 3,09;$

luego, buscando el valor de la variable original DT:

$DT_0 = 19 + (3,09 * 3) = 28,27$ dias

9. CASO EN QUE LA DURACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DEPENDE DE LOS RECURSOS ASIGNADOS

En los modelos analizados en los puntos anteriores hemos estado trabajando con proyectos en los cuales la duración de cada actividad era una constante o una variable aleatoria.

Ahora pasaremos a considerar el caso donde la duración de cada actividad es una variable que depende de los recursos asignados. Asimismo supondremos que esos recursos pueden ser medidos monetariamente, y por lo tanto consideraremos que la duración (D_i) de cada actividad es una función de los fondos que le asignemos, de tal manera que cuanto más recursos dispongamos para una tarea, menor será su duración.

Llamaremos costo directo de la actividad a los fondos destinados para su ejecución y supondremos que la duración es una función lineal decreciente de dicho costo, o lo que es equivalente, que el costo directo de cada actividad será una función lineal decreciente de la duración que planifiquemos para la misma. Esto será cierto para valores de D_i comprendidos dentro del intervalo formado por un tiempo mínimo posible (al que se lo suele denominar duración acelerada o de quiebre y simbolizaremos por DA_i) y un tiempo máximo admisible por encima del cual una mayor duración no disminuye su costo (al que denominaremos duración normal y que simbolizaremos por DN_i), es decir:

$$DA_i \le D_i \le DN_i$$

Observemos que ahora D_i -duración de la actividad i-ésima- es una *variable*, mientras que en los casos anteriores D_i representaba un parámetro conocido o la Esperanza Matemática, respectivamente.

Podemos graficar la relación Costo Directo-Duración de una actividad i cualquiera, de la forma establecida en el gráfico siguiente:

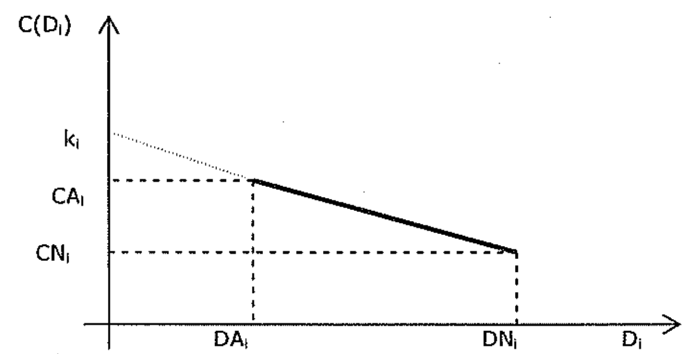


Gráfico 35

Donde, la función de costo directo es válida sólo entre la duración normal y la duración acelerada.

De esta forma, podemos expresar analíticamente el costo directo de una actividad $C(D_i)$ como función de su duración programada (D_i):

$$C(D_i) = k_i - c_i \,.\, D_i$$
$$\forall\, D_i \in [\, DA_i \,,\, DN_i \,]$$

Simbolizaremos por CA_i el costo total directo de la actividad i, cuando D_i adopta su valor mínimo DA_i (y al que llamaremos costo acelerado o de quiebre) y por CN_i al costo total directo de la actividad i, cuando D_i asume su mayor valor posible DN_i (al que denominaremos costo normal de la actividad i). Por lo tanto, podemos expresar:

$$CA_i = k_i - c_i \,.\, DA_i$$

$$CN_i = k_i - c_i \,.\, DN_i$$

Despejando de estas dos ecuaciones c_i (costo de reducción de la actividad i por unidad de tiempo) tenemos que:

$$c_i = \frac{CA_i - CN_i}{DN_i - DA_i}$$

El problema que se plantea es, dado un plazo de terminación del proyecto (T), determinar cuál es la duración de cada actividad, que minimice el costo total directo del mismo.

Existen dos formas para trabajar esta problemática:

- Método de Grafos
- Utilizando la Programación Lineal

9.1. MÉTODO DE GRAFOS PARA REALIZAR LA REDUCCIÓN TIEMPO-COSTO DE UN PROYECTO

Cuando se desea acelerar la finalización de un proyecto a partir de asignar más fondos a la ejecución de las actividades que lo forman, se puede trabajar directamente sobre el grafo del proyecto.

Para ello, se parte del grafo del proyecto calculando la DTN (considerando para cada actividad su duración normal). *La reducción debe realizarse por etapas, reduciendo la duración total (DT) de a una unidad de tiempo por vez y analizando cuál actividad crítica conviene reducir teniendo en cuenta su costo de reducción*. El proceso se detiene cuando se llega a la DT deseada o bien cuando algún camino crítico llega a su máximo acortamiento, esto es, ya no existen en él actividades que puedan ser reducidas.

Para seleccionar la/las actividades que conviene reducir en cada etapa deben considerarse los siguientes criterios:

1°) Que la actividad sea crítica

2°) De ellas, la de menor costo unitario de reducción (c_i)

3°) En caso que existan dos caminos críticos, comparar el costo de reducción entre, disminuir una actividad crítica en cada camino o reducir una actividad crítica común a ambos. Seleccionar la opción de menor costo. Para redes con más de dos caminos críticos se utiliza el mismo criterio.

Resulta claro que esta forma de operar resulta sumamente lenta para proyectos con gran cantidad de actividades.

A continuación se presenta un ejemplo de esta metodología:

Se desea disminuir la duración total de un proyecto complejo, desde su duración total normal (DTN) hasta la duración total acelerada (DTA), con el mínimo incremento posible del costo directo.

Datos:

De un proyecto complejo se conocen los datos que se detallan en la tabla siguiente:

ACT.	PREC	DNi	CNi	DAi	CAi	Reduc. Máx.	Ci
A*	-	3	$ 70	2	$ 130	1	$ 60
B*	A	4	$ 500	2	$ 900	2	$ 200
C*	B	6	$ 1000	3	$ 1600	3	$ 200
D*	C, H	4	$ 500	3	$ 550	1	$ 50
E	B	5	$ 1000	2	$ 1300	3	$ 100
F	E	3	$ 500	3	$ 500	0	$ 0
G	A	6	$ 800	5	$ 1050	1	$ 250
H	G	3	$ 600	2	$ 900	1	$ 300

Tabla 5

* actividades críticas del programa con duración normal

Etapa 1: Con los datos de las actividades, sus predecesoras inmediatas y los tiempos normales de cada actividad, armamos la red del proyecto y calculamos el tiempo en que puede estar terminado el proyecto en el tiempo normal (DTN).

La red resultante es la de la Figura I. El tiempo mínimo de terminación del proyecto en un tiempo normal es de 17 días con un costo de ejecución de $ 4.970.- (sumatoria del costo normal de ejecución de todas las actividades del proyecto)

Las actividades críticas para este proyecto son: A, B, C y D.

Etapa 2: Para realizar el proceso de reducción debemos calcular la reducción máxima por actividad (DNi) y el costo de reducción por unidad de tiempo (c_i). Los cálculos se encuentran en las dos últimas columnas de la Tabla 5.

Etapa 3: El procedimiento de reducción consiste en analizar las actividades críticas y seleccionar aquella tarea que tenga el mínimo costo de reducción por unidad de tiempo. Se aconseja reducir la actividad seleccionada de a una unidad de tiempo por vez y en cada caso revisar la red para identificar si hubo modificaciones en la ruta crítica. Tener en cuenta que si en este proceso aparecen rutas críticas paralelas, el criterio de reducción será el de menor costo de las siguientes alternativas: a) reducir una actividad de cada ruta crítica en forma simultánea, b) reducir una actividad en común a todas las rutas.

Para nuestro ejemplo:

1. Si observamos los datos (Tabla 5), la actividad crítica con mínimo costo de reducción por unidad de tiempo es D, con un costo de $ 50.- y pude reducirse hasta un día. Reduciendo D en un día obtenemos la red del Grafico 36. El tiempo mínimo de terminación del proyecto es ahora de 16 días y el costo de ejecución de $ 5.020 el cual surge de (4.970+50). Las actividades críticas siguen siendo A, B, C y D.

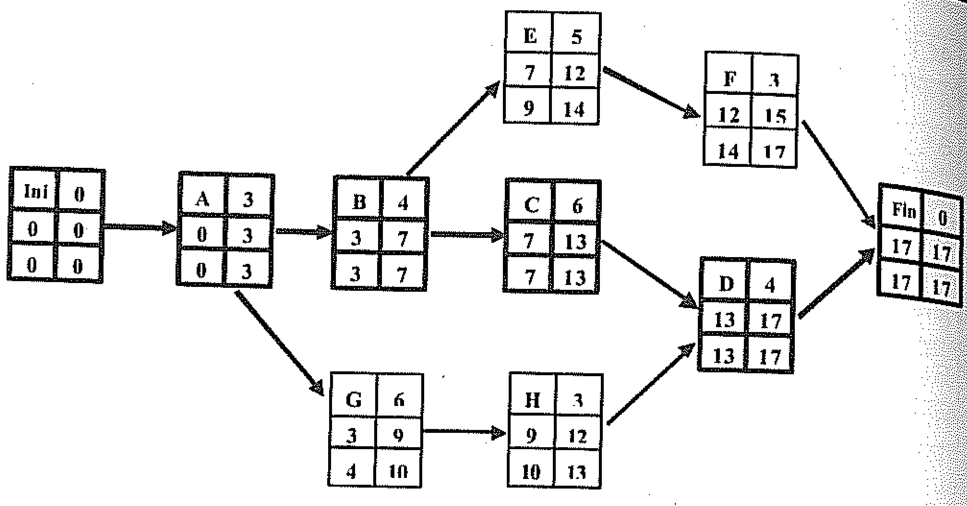


Gráfico 36

2. Analizamos nuevamente las actividades críticas y elegiremos para su reducción la que tenga menor c_i. En este caso es A con un costo de \$ 60, pudiendo reducirse en 1 día. Con la reducción de A obtenemos la red del Grafico 37. El tiempo mínimo de terminación del proyecto (T) es de 15 días y el costo de ejecución asciende a \$ 5.080 (5.020+60). Las actividades críticas continúan siendo A, B, C y D.

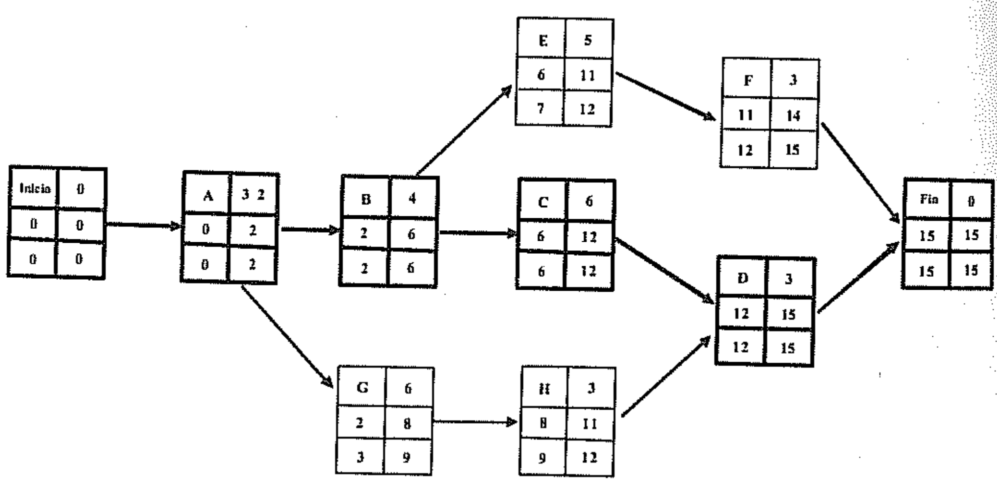


Gráfico 37

3. A y D se redujeron en su totalidad. B y C tienen el mismo costo de reducción por unidad de tiempo, ambas pueden reducirse en 2 y 3 días respectivamente. Pero reduciendo B se reduce la longitud de dos rutas. Es por eso que B es preferible a C. Procedemos a reducir B en un día con un costo de \$ 200 por día. Obtenemos la red del Grafico 38. Para esta red T = 14 días y el costo de ejecución es ahora de \$ 5.280.- (5.080 + 200). Con un tiempo de terminación del proyecto de 14 días, tenemos dos rutas críticas. Una dada por las actividades A, B, C y D; la otra, por las actividades A, G, H y D.

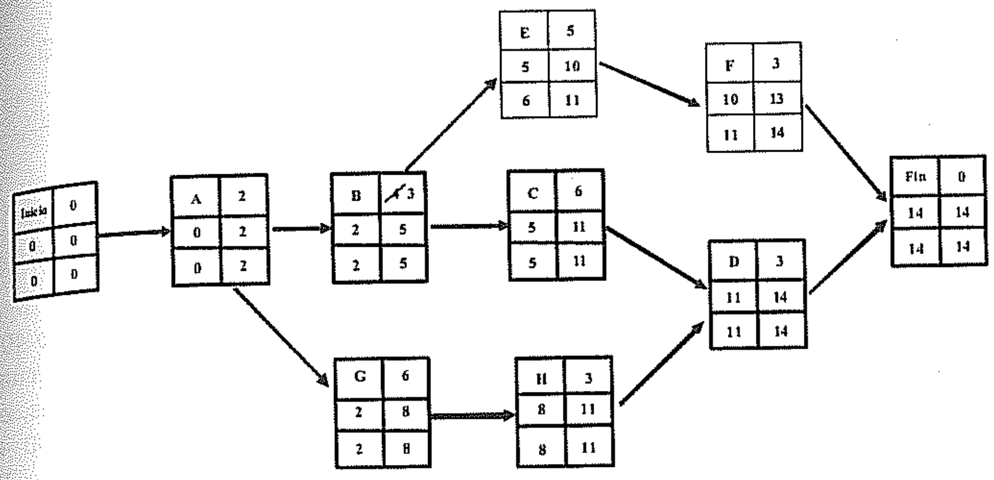


Gráfico 38

4. En la primera ruta crítica (A, B, C y D), podemos reducir B o C con un costo de \$ 200 por día, (mencionamos anteriormente que B era preferible a C). En la segunda ruta crítica (A, G, H y D), G tiene un costo de reducción de \$ 250 por día y H tiene un costo de reducción de \$ 300 por día, ambas pueden reducirse en un día. Para lograr acortar el proyecto en un día deberemos reducir las actividades B y G simultáneamente. La red que resulta de esta etapa es la del Grafico 39. T = 13 días y el costo para terminar el proyecto en ese tiempo es de \$ 5.730.- (5.280 + 200 + 250). Las rutas críticas son 1) A, B, C y D y 2) A, G, H y D.

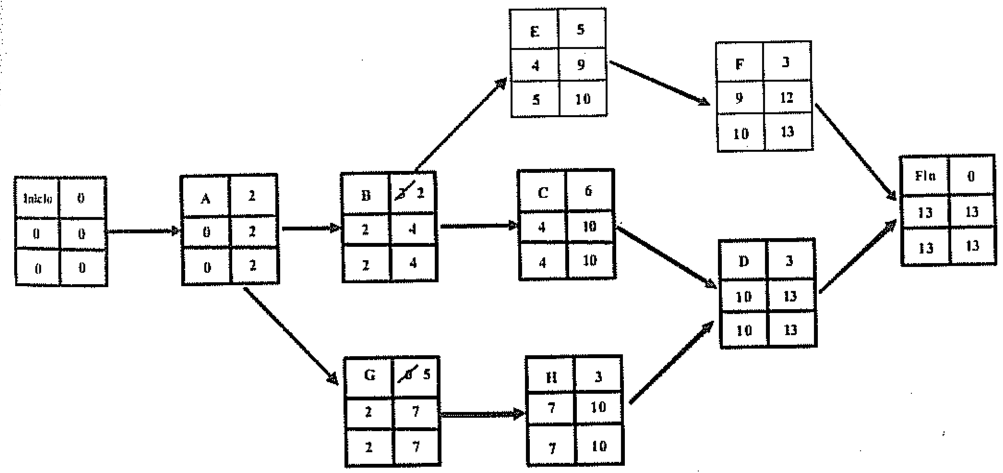


Gráfico 39

5. Para reducir el tiempo de terminación en un día más deberemos reducir una actividad en cada ruta crítica. Analicemos:

1)

Act.	Reducción Posible	Ci
A	-	-
B	-	-
C	3	200
D	-	-

2)

Act.	Reducción Posible	Ci
A	-	-
G	-	-
H	1	300
D	-	-

Tabla 6

Reduciendo C y H en forma simultánea obtenemos la red del Grafico 40. Observemos que ya no se puede continuar reduciendo, con lo cual decimos que la duración acelerada del proyecto (DTA) es de 12 días, el costo de ejecución para ese tiempo es de \$ 6.230.- (5.730 + 200 + 300) y tenemos tres rutas críticas: 1) A, B, C y D; 2) A, G, H y D y 3) A, B, E y F.

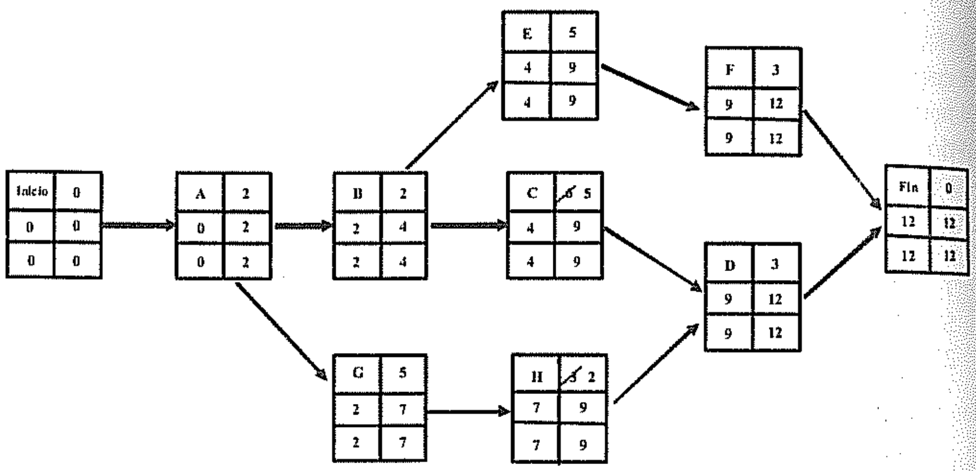


Gráfico 40

9.2. MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PARA CALCULAR LA DURACIÓN ÓPTIMA DE LAS ACTIVIDADES DADO EL PLAZO DE FINALIZACIÓN DEL PROYECTO

Cuando el proyecto esta formado por muchas actividades es aconsejable utilizar la técnica de PL para realizar la reducción tiempo - costo.

Este modelo, permitirá calcular la duración de cada actividad cuando se fija un plazo de finalización (T), teniendo en cuenta el costo de reducción asociado a cada una, de forma de lograr realizar el proyecto al mínimo costo total directo.

En primer lugar consideremos la función objetivo:

$$\text{Min } Z = \Sigma\, C(D_i) = \Sigma\,(k_i - c_i \,.\, D_i) = \Sigma k_i - \Sigma\, c_i \,.\, D_i$$

Esto es equivalente a:

$$\text{Max } Z = \Sigma\, c_i \,.\, D_i$$

A fin de plantear las restricciones del modelo, recordemos que según lo expresado al describir las técnicas PERT/CPM:

$$MI_i = \text{máx } MF_k \qquad \forall\, k \in \Gamma^{(-1)}(i)$$

por lo tanto,

$$MI_i \geq MF_k \qquad \forall\, k \in \Gamma^{(-1)}(i) \qquad (3)$$

Como:

$$MF_i = MI_i + D_i \quad \therefore \quad MI_i = MF_i - D_i$$

remplazando en (3) a MI_i por su igual:

$$MF_i - D_i \geq MF_k \qquad \forall\, k \in \Gamma^{(-1)}(i)$$

lo que también puede expresarse como:

$$MF_k + D_i - MF_i \leq 0 \qquad \forall\, k \in \Gamma^{(-1)}(i)$$

Por todo lo expuesto, podemos plantear nuestro modelo de programación lineal, de la forma:

$$\text{Max } z = \Sigma\, c_i\, D_i$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} & MF_k + D_i - MF_i \leq 0 && \forall\, k \in \Gamma^{(-1)}(i) \\ & DA_i \leq D_i \leq DN_i && i = 1, 2, ..n \qquad (4) \\ & MF_n \leq T && \\ & MF_i \geq 0 && \end{aligned}$$

T será un número comprendido entre la duración total mínima del proyecto (DTA), y la duración total normal (DTN), es decir que:

$$DTA \leq T \leq DTN$$

Aclaremos que DTA se determina calculando el valor del camino crítico considerando que todas las actividades se realizan en su tiempo acelerado (DA_i). Mientras que, para calcular la duración total normal del proyecto, se asume que todas las actividades se realizan en el tiempo DN_i.

El valor de T en general es fijado por el sujeto de las decisiones o impuesto por las características del problema, como por ejemplo, en los casos en que el plazo de finalización del proyecto esté fijado en las condiciones de una licitación o contrato.

Cuando el proyecto no tiene una fecha de finalización establecida, el valor de T a asignar dependerá del mejor intercambio entre el costo total directo y el tiempo de finalización del proyecto. La información necesaria para tomar la decisión está referida a cómo cambia el costo mínimo total directo al cambiar el valor de T en el PL formulado.

Se aconseja para ello, calcular el PL partiendo de T = DTN, o bien, T = DTA y luego determinar el valor mínimo (o máximo) de T que no altera la base óptima -dato que se obtiene del análisis de sensibilidad -. Se calcula nuevamente el PL para este valor de T y así sucesivamente hasta llegar a T=DTA (o T=DTN). Gráficamente, los valores de T determinados y el correspondiente CT son los vértices de la poligonal correspondiente, sabiendo que entre cada par de vértices, el comportamiento es lineal.

El siguiente gráfico muestra la relación entre el tiempo de finalización del proyecto (T) y los costos mínimos totales directos de las actividades, el cual representa una curva de costos óptimos asociados a cada duración total del proyecto.

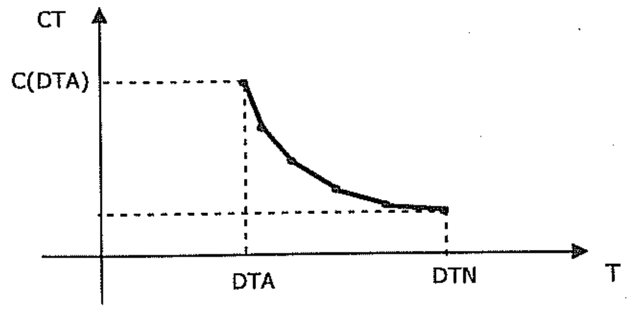


Gráfico 41

MODELO LINEAL EQUIVALENTE

Podemos expresar el modelo (4) en una forma equivalente. En este caso, en lugar de definir como variables las duraciones de cada actividad (D_i), las variables representarán cuánto se reduce cada actividad. Para ello definimos:

y_i: unidades de tiempo que disminuye la duración normal de la actividad i-ésima.

Recordando que, $D_i \leq DN_i$, podemos escribir:

$$D_i = DN_i - y_i$$

o lo que es lo mismo:

$$D_i + y_i = DN_i$$

En consecuencia, sustituyendo en (4) a D_i por su igual, planteamos el modelo lineal:

$$\text{Min } z' = \Sigma\, c_i\, y_i$$

Sujeto a:

$$MF_i - MF_k + y_i \geq DN_i \qquad \forall\, k \in \Gamma^{(-1)}(i)$$

$$MF_n \leq T \qquad (5)$$

$$y_i \leq DN_i - DA_i$$

$$MF_i \geq 0 \quad y_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

Creemos conveniente recordar además que, tanto en el programa (4) como en el (5) al plantear un caso particular, consideraremos que:

$$MF_0 = 0$$

Siguiendo un procedimiento similar al desarrollado hasta aquí, se puede encontrar otra formulación lineal equivalente del programa (4), trabajando con los momentos más tempranos de inicio (MI_i).

EJEMPLO DE APLICACIÓN

A fin de mostrar una aplicación de este tema, trabajaremos con el proyecto enunciado en la tabla 2, del cual suponemos que conocemos los siguientes datos respecto a la aceleración de sus actividades:

Act.	Preced	Duración Normal en días DN_i	Duración Acelerada en días DA_i	Costo Normal CN_i	Costo Acelerado CA_i	Aceleración máxima en días $DN_i - DA_i$	Costo de Aceleración por día $c_i = \frac{CAi - CNi}{DNi - DAi}$
A	Inicio	15	13	100	150	2	25
B	A	30	25	500	800	5	60
C	A	8	6	80	120	2	20
D	B, C	10	8	100	130	2	15
E	D	7	6	150	200	1	50
F	D	5	4	180	200	1	20
G	C	5	5	1000	1000	0	0
H	E, F, G	2	1	110	140	1	30
I	H	1	1	50	50	0	0
J	I	1	1	40	40	0	0

Tabla 7

La red representativa del proyecto es la siguiente:

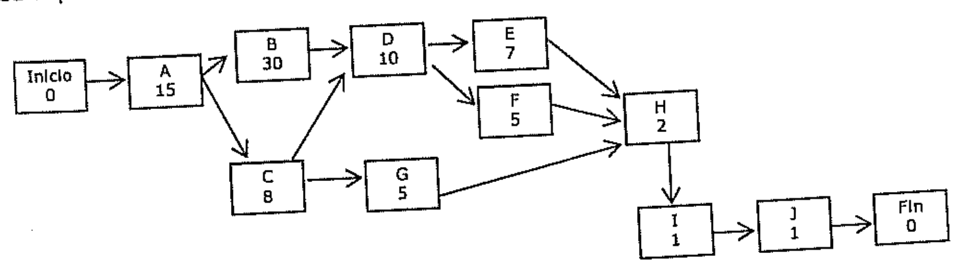


Gráfico 42

Utilizaremos para este ejemplo, el modelo lineal plantado en (5), para ello definimos a las variables como:

MF_i = momento de finalización más temprana de la actividad i (i = A, B, ..., J) necesaria para tomar la decisión está referida a cómo cambia el costo mínimo total directo al cambiar el valor de T en el PL formulado.

Se aconseja para ello, calcular el PL partiendo de T = DTN, o bien, T = DTA y luego determinar el valor mínimo (o máximo) de T que no altera la base óptima -dato que se obtiene del análisis de sensibilidad -. Se calcula nuevamente el PL para este valor de T y así sucesivamente hasta llegar a T=DTA (o T=DTN). Gráficamente, los valores de T determinados y el correspondiente CT son los vértices de la poligonal correspondiente, sabiendo que entre cada par de vértices, el comportamiento es lineal.

El siguiente gráfico muestra la relación entre el tiempo de finalización del proyecto (T) y los costos mínimos totales directos de las actividades, el cual representa una curva de costos óptimos asociados a cada duración total del proyecto.

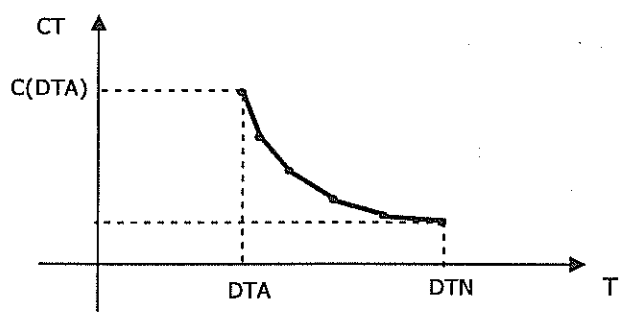


Gráfico 41

MODELO LINEAL EQUIVALENTE

Podemos expresar el modelo (4) en una forma equivalente. En este caso, en lugar de definir como variables las duraciones de cada actividad (D_i), las variables representarán cuánto se reduce cada actividad. Para ello definimos:

y_i: unidades de tiempo que disminuye la duración normal de la actividad i-ésima.

Recordando que, $D_i \leq DN_i$, podemos escribir:

$$D_i = DN_i - y_i$$

o lo que es lo mismo:

$$D_i + y_i = DN_i$$

En consecuencia, sustituyendo en (4) a D_i por su igual, planteamos el modelo lineal:

$$\text{Min } z' = \Sigma\, c_i\, y_i$$

Sujeto a:

$$MF_i - MF_k + y_i \geq DN_i \qquad \forall\, k \in \Gamma^{(-1)}(i)$$

$$MF_n \leq T \qquad (5)$$

$$y_i \leq DN_i - DA_i$$

$$MF_i \geq 0 \quad y_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

Creemos conveniente recordar además que, tanto en el programa (4) como en el (5) al plantear un caso particular, consideraremos que:

$$MF_0 = 0$$

Siguiendo un procedimiento similar al desarrollado hasta aquí, se puede encontrar otra formulación lineal equivalente del programa (4), trabajando con los momentos más tempranos de inicio (MI_i).

EJEMPLO DE APLICACIÓN

A fin de mostrar una aplicación de este tema, trabajaremos con el proyecto enunciado en la tabla 2, del cual suponemos que conocemos los siguientes datos respecto a la aceleración de sus actividades:

Act.	Preced	Duración Normal en días DN_i	Duración Acelerada en días DA_i	Costo Normal CN_i	Costo Acelerado CA_i	Aceleración máxima en días $DN_i - DA_i$	Costo de Aceleración por día $c_i = \frac{CAi - CNi}{DNi - DAi}$
A	Inicio	15	13	100	150	2	25
B	A	30	25	500	800	5	60
C	A	8	6	80	120	2	20
D	B, C	10	8	100	130	2	15
E	D	7	6	150	200	1	50
F	D	5	4	180	200	1	20
G	C	5	5	1000	1000	0	0
H	E, F, G	2	1	110	140	1	30
I	H	1	1	50	50	0	0
J	I	1	1	40	40	0	0

Tabla 7

La red representativa del proyecto es la siguiente:

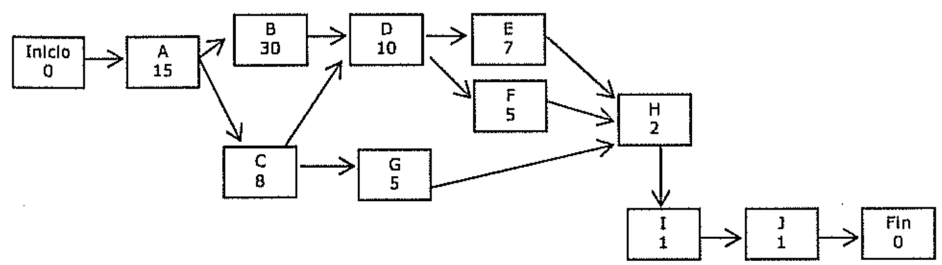


Gráfico 42

Utilizaremos para este ejemplo, el modelo lineal plantado en (5), para ello definimos a las variables como:

MF_i = momento de finalización más temprana de la actividad i (i = A, B, ..., J)

y_i = cantidad de unidades de tiempo que se acelera la actividad i (i = A, B.., J)

El objetivo es minimizar el costo total de la reducción, por lo que la función objetivo queda:

$$\text{Min } Z = 25\, y_A + 60\, y_B + 20\, y_C + 15\, y_D + 50\, y_E + 20\, y_F + 0 y_G + 30 y_H + 0\, y_I + 0\, y_J$$

A las restricciones del modelo podemos agruparlas en tres conjuntos:

1.- Conjunto de restricciones que describen la red usando los momentos de finalización más temprana. Esto es que, para cada actividad, el momento de finalización más temprano no debe ser inferior al momento más temprano de finalización de la/s precedente más la duración normal de la actividad, menos los días que se reducirán.

Por ejemplo para la actividad A:

$$MF_A \geq MF_{Inicio} + 15 - y_A$$

Como MF_{Inicio} es igual a cero, la restricción queda:

$$MF_A \geq 0 + 15 - y_A$$

Para la B:

$$MF_B \geq MF_A + 30 - y_B$$

En el caso de tener más de una precedente, como por ejemplo la actividad D, se debe plantear una restricción para cada una, es decir:

$$MF_D \geq MF_B + 10 - y_D$$

$$MF_D \geq MF_C + 10 - y_D$$

Para la actividad Fin se plantea una restricción como la que se da a continuación, para cada una de sus precedentes:

A la actividad Fin se la trata de la misma manera que a las restantes.

$$MF_{Fin} \geq MF_J$$

2.- Este conjunto está formado por una sola restricción, la que limita la duración total del proyecto. Si simbolizamos con T a la duración requerida:

$$MF_{Fin} \leq T$$

3.- Por último, el conjunto de restricciones que limitan la reducción máxima de cada actividad.

$y_A \leq 2$; $y_B \leq 5$; $y_C \leq 2$; $y_D \leq 2$; $y_E \leq 1$

$y_F \leq 1$; $y_G \leq 0$; $y_H \leq 1$; $y_I \leq 0$; $y_J \leq 0$

Agrupando lo obtenido y agregando las restricciones de no negatividad, el modelo lineal resulta:

$$\text{Min } Z = 25\, y_A + 60\, y_B + 20\, y_C + 15\, y_D + 50\, y_E + 20\, y_F + 0 y_G + 30 y_H + 0\, y_I + 0\, y_J$$

Sujeto a:

Observe que a las actividades que no pueden reducirse se las agregó en la función objetivo con costo de reducción cero y se limitó la reducción máxima también a cero.

$$\begin{aligned}
MF_A + y_A &\geq 15 \\
MF_B + y_B - MF_A &\geq 30 \\
MF_C + y_C - MF_A &\geq 8 \\
MF_D + y_D - MF_B &\geq 10 \\
MF_D + y_D - MF_C &\geq 10 \\
MF_E + y_E - MF_D &\geq 7 \\
MF_F + y_F - MF_D &\geq 5 \\
MF_G + y_G - MF_C &\geq 5 \\
MF_H + y_H - MF_E &\geq 2 \\
MF_H + y_H - MF_F &\geq 2 \\
MF_H + y_H - MF_G &\geq 2 \\
MF_I + y_I - MF_H &\geq 1 \\
MF_J + y_J - MF_I &\geq 1
\end{aligned}$$

$$MF_{Fin} \geq MF_J$$

$$MF_J \leq T$$

Se recomienda plantear este problema utilizando el PL (4). Posteriormente, resolver ambos modelos y comparar los resultados obtenidos.

$$\begin{array}{ll}
y_A \leq 2 & y_F \leq 1 \\
y_B \leq 5 & y_G \leq 0 \\
y_C \leq 2 & y_H \leq 1 \\
y_D \leq 2 & y_I \leq 0 \\
y_E \leq 1 & y_J \leq 0
\end{array}$$

$$MFi \geq 0$$

$$yi \geq 0$$

$$i = A, , C, D, E, F, G, H, I, J$$

En la tabla 8 se resumen los resultados obtenidos, para cada posible valor de T comprendido entre la DTN y la DTA del proyecto. Es decir,

$$55 \leq T \leq 66$$

Como lo expresáramos anteriormente, DTA se determina calculando el valor del camino crítico considerando que todas las actividades se realizan en su tiempo acelerado (DA_i). Mientras que, para calcular la duración total normal del proyecto, se asume que todas las actividades se realizan en el tiempo DN_i.

En la tabla 7 se observa claramente cómo aumenta el costo total directo mínimo a medida que reducimos la duración total del proyecto, así, para el tiempo de finalización del proyecto de 55 días, el costo total directo se incrementó en $460.-

Para valores de finalización inferiores a 55 días, se comprobó empíricamente que el programa es no factible, lo cual indica que uno o varios de los caminos críticos tienen actividades que ya no pueden acelerarse y por lo tanto, no es posible realizar el proyecto en un tiempo menor a ese plazo.

Por otra parte, tampoco resulta conveniente analizar duraciones totales del proyecto superiores a 66 días, ya que en base a los supuestos con que trabajamos, la función de costo directo de cada actividad deja de tener validez para valores de $D_i \geq DN_i$. En realidad, si se deseara prolongar la duración de la actividad i, más allá de DN_i, la función de costo directo a partir de este valor, debería ser constante o creciente, no produciendo ninguna ventaja económica considerar tiempos superiores a los normales.

Es importante además recordar que a los fines de la toma de decisiones, que una vez calculados los costos directos de aceleración del proyecto, debemos relacionarlos con los costos indirectos (tales como multas, intereses, instalaciones) asociados a los distintos tiempos de finalización, si estos existieran. La suma de estos costos, proporcionará el costo total mínimo del proyecto para los diferentes valores de T, siendo, la duración óptima del proyecto, aquella que minimice dicha función de costo total. Para ello se deberá adicionar a la tabla 8 una columna para los costos indirectos. Esta situación se muestra en el gráfico siguiente.

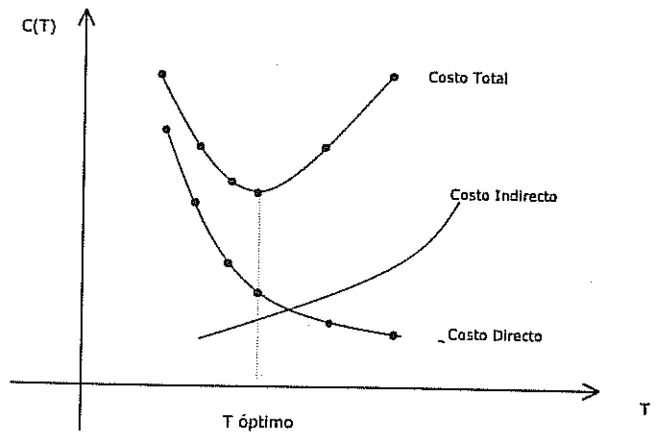


Gráfico 43

Duración total del Proyecto en días	Actividades que reducen su duración	Cantidad de días que se reducen	Incremento en el Costo Total Directo	Costo Total Directo
66				2310
65	D	1	15	2325
64	D	2	30	2340
63	D A	2 1	55	2365
62	D A	2 2	80	2390
61	D A H	2 2 1	110	2420
60	D A H E	2 2 1 1	160	2470
59	D A H E B	2 2 1 1 1	220	2530
58	D A H E B	2 2 1 1 2	280	2590
57	D A H E B	2 2 1 1 3	340	2650
56	D A H E B	2 2 1 1 4	400	2710
55	D A H E B	2 2 1 1 5	460	2770

Tabla 8

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

RESPONDA SI LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON VERDADERAS O FALSAS

A. Si una actividad no crítica se retrasa más allá de su tiempo de holgura, sin cambiar alguno de los demás factores, la duración total del proyecto se extenderá.

B. Para todas las actividades del camino crítico, el momento de finalización más tardío es igual al momento de inicio más temprano.

C. En un diagrama de grafo PERT/CPM que utiliza el método americano, cada actividad está representada por un nodo de la red.

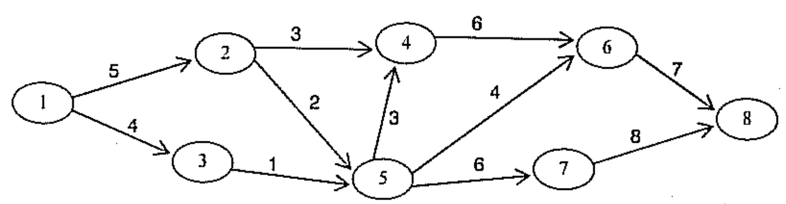
RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

1. Si los tiempos de realización de las actividades de un proyecto son variables aleatorias, ¿cuál es la probabilidad de que el proyecto esté concluido en el tiempo mínimo esperado y por qué?
2. Cuando es necesario reducir el tiempo de realización de un proyecto, ¿sobré cuáles actividades debemos concentrar nuestros esfuerzos y por qué?
3. ¿Cuántas restricciones tiene el modelo lineal de acortamiento para un grafo con 8 actividades (dos sin predecesoras inmediatas) y 15 relaciones de precedencia?

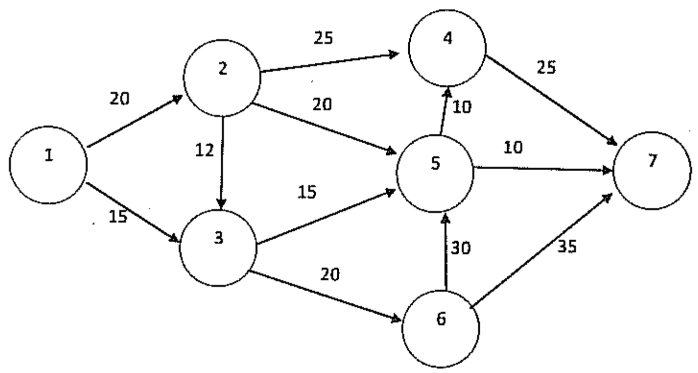
ACTIVIDAD 2

Para cada uno de los siguientes grafos, encuentre el camino de valor mínimo usando el método de Dijkstra

1)



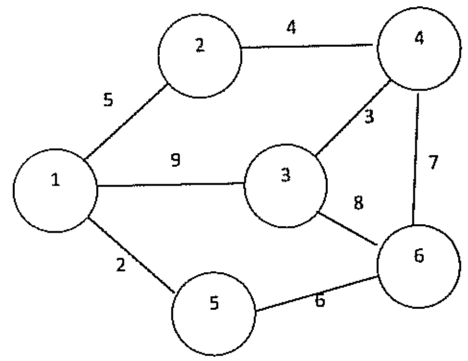
2)



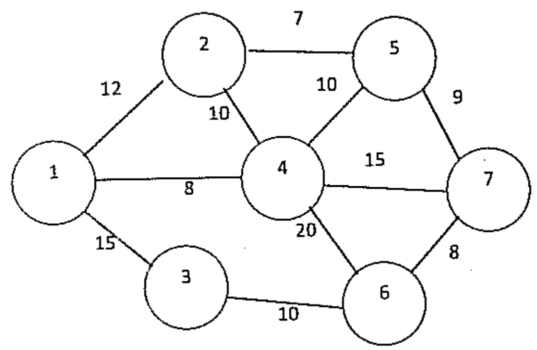
ACTIVIDAD 3

Para cada uno de los siguientes grafos, encuentre el árbol de expansión mínima

1)



2)



ACTIVIDAD 4

Fresh S.A. fabrica heladeras del tipo frigobar. La compañía adquiere con proveedores externos todos los componentes que utiliza en su fabricación. A continuación se presentan las actividades y sus relaciones. Los tiempos asociados con el proceso de fabricación se muestran en la tabla.

Las primeras actividades pueden ejecutarse en forma simultánea:

(1) Comprar el plástico para los anaqueles.
(2) Comprar las láminas de chapa enlozada y el aislante térmico.
(3) Comprar el motor.

Cuando se ha recibido el plástico,

(4) se deben moldear los anaqueles.

Después que se recibe la chapa y el aislante,

(5) se fabrican las estructuras y, después
(6) se les coloca el aislante.

Luego de haber terminado las actividades (4), (3) y (6),

(7) se ensamblan las tres unidades en una sola.

Una vez concluida la actividad (7), se puede

(8) inspeccionar la unidad,
(9) empacar la unidad, y
(10) enviar la unidad.

Activid.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tpo. semanas	4	2	10	3	2	4	3	1	1	1

a) Elabore el grafo representativo del proyecto de fabricación.
b) Identifique a las actividades críticas del proyecto.
c) Identifique la ruta crítica del proyecto.
d) Suponga que la actividad 4 se retrasa 1 semana, ¿se afecta la fecha límite de terminación del proyecto?

ACTIVIDAD 5

Los datos que se detallan a continuación corresponden a las actividades necesarias para llevar a cabo una campaña política:

Actividad	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tiempo esperado	3	8	5	2	4	3	6	7	9	3
Desviación	0,33	0,25	1	2	0,55	1	2	0,16	1	1

Al realizar la planificación con P.E.R.T., se identificaron los siguientes caminos:

⇒ A, E, G, I y J
⇒ A, B, D, F, G y J
⇒ A, C, E, G, H y J
⇒ A, C, D, E, F, H y J

Con esta información y <u>sin realizar el dibujo de la red</u> responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el tiempo esperado de finalización de la campaña política y con qué probabilidad se terminará en ese tiempo?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté terminada en 35 días?

ACTIVIDAD 6

De un proyecto complejo formado por 9 actividades, al aplicar el Método P.E.R.T. se obtiene:

$$\mu^* = \{a, b, d, g, i\};$$

Tiempo mínimo esperado de finalización: 40 días

$\sigma_a = 2$ $\sigma_b = 2{,}1$ $\sigma_c = 1{,}5$ $\sigma_d = 1{,}1$ $\sigma_e = 1{,}2$

$\sigma_f = 1{,}2$ $\sigma_g = 0{,}5$ $\sigma_h = 0{,}5$ $\sigma_i = 2{,}5$

Calcular el plazo de finalización del proyecto tal que la probabilidad de cumplir con el mismo sea de 0,999
Sabiendo que: $P(Z \le 3{,}09 = 0{,}999)$

ACTIVIDAD 7

La siguiente tabla indica las actividades de un proyecto de investigación de mercado y sus datos sobre tiempos y costos.

Actividad	Precedente	Tiempo normal (días)	Tiempo acelerado (días)	Costo de reducción ($/día)
A	--	8	6	15
B	A	9	5	25
C	A	10	5	25
D	C	15	10	15
E	B - D	10	6	10
F	E	2	1	30

Suponga que la empresa debe reducir 3 días la duración total del proyecto.
Se solicita:

a) Aplicar el método de grafos para indicar la forma de reducir el proyecto al menor costo.
b) Escriba un programa lineal para realizar la reducción. Defina las variables y parámetros que utiliza en el modelo.