CAPÍTULO 10

ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS

1. INTRODUCCIÓN

Electryka SA., es una empresa dedicada a la venta de aparatos electrónicos, computadoras, reproductores de videos, cámaras de foto, etc. Roberto gerente de Electryka SA, recientemente ha implementado un plan de reducción de costos y con este fin solicita una reunión con Juan, el encargado de compras.

Roberto dijo: *"Juan hemos implementado un plan de reducción de costos, en este sentido te pido que revises las políticas de inventario".*

Con esta consigna Juan, está analizando la política de compras de un reproductor de videos portátil; de este producto siempre ha solicitado cinco aparatos por pedido ya que el fabricante entrega la mercadería en forma inmediata.

Sin embargo y considerando el hecho de que procesar una orden de pedido cuesta $40, Juan decide cambiar su política de compras. Basándose en una demanda anual proyectada de aproximadamente 500 aparatos, planea ordenar diez unidades cada vez. *"De esta manera realizaré menos pedidos en el año, en realidad la mitad, y esto debe traducirse en un ahorro en los costos de pedidos"*, pensó.

Roberto, gerente de la empresa, revisó el informe de Juan y le señaló que la decisión de comprar diez aparatos por pedido no era la mejor.

Roberto dijo: *"Hemos proyectado que el costo anual de mantener un reproductor portátil en inventario, es de aproximadamente el 20% y su precio de compra es de $500,00. Esto significa que la empresa gastaría $100 por cada aparato que conserva en inventario durante un año. Si duplicamos la cantidad de aparatos que se piden cada vez, estaremos incrementando en la misma proporción el costo de conservación de los mismos. Me parece que la decisión de comprar diez aparatos por pedido no es la mejor, por lo que me gustaría que justificara más ampliamente su decisión, rectificándola o ratificándola".*

Con la observación de Roberto, Juan se dispuso a analizar más detalladamente el problema para realizar su informe.

¿Es erróneo el análisis de Juan? ¿Debería cambiar la política de compras?

Problemas de este tipo pueden ser analizados utilizando modelos de administración de inventarios.

El objetivo de la administración de inventarios, es determinar reglas que puedan aplicarse para reducir al mínimo los costos relacionados con el mantenimiento de existencias de mercadería y al mismo tiempo poder cumplir con la demanda.

A través de los años se han desarrollado varios modelos que permiten determinar estas reglas ante diferentes situaciones.

Estos modelos responden a las siguientes preguntas:

¿Cuánto se debe pedir de un producto?
¿Cuándo se debe hacer el pedido?

Como cada modelo de inventario contempla una realidad diferente, al momento de analizar un determinado problema, en primer lugar se lo debe caracterizar adecuadamente para así poder seleccionar el modelo correcto.

Fundamentalmente se debe identificar la política de administración de inventarios y los elementos más importantes que la componen, como por ejemplo:

- ✓ Características de la demanda.
- ✓ Costos relevantes.
- ✓ Posibilidad de admitir faltantes en almacén.
- ✓ Retrasos en el ingreso de los pedidos.
- ✓ Precio del producto.
- ✓ Posibilidad de aceptar pedidos pendientes.
- ✓ Modalidad de ingreso del pedido.

Para analizar las políticas de administración de inventarios, usaremos algunos gráficos que representan el comportamiento del stock.

Por ejemplo, observemos la siguiente figura:

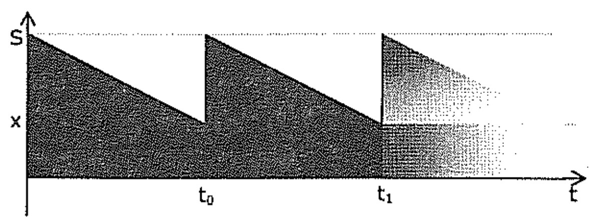


Gráfico 1

En el eje de abcisa se representa el tiempo y en el de las ordenadas la cantidad de unidades almacenadas.

En los momentos 0, t_0, t_1, se tienen S unidades almacenadas, luego a medida que pasa el tiempo esa cantidad va disminuyendo. La oportunidad en que deben realizarse los pedidos está determinada por un nivel mínimo de inventario x, llamado punto de renovación de pedido

o nivel de reorden. Este nivel de inventario nos indica el momento de realización del pedido, lo que hace que la periodicidad sea variable.

La cantidad fija que se repone q estará dada por S - x, la cual ingresa en forma instantánea. Este es un sistema de administración de pedidos con cantidades fijas por periodos variables; tiene la ventaja de evitar que se produzcan faltantes de stock, pero es difícil prever el momento en que se debe efectuar el pedido.

Otra de las políticas típicas, es la representada en la siguiente figura:

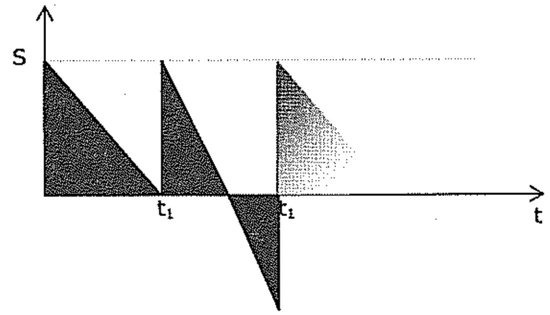


Gráfico 2

En este caso, sabemos exactamente el momento en el que hay que hacer un pedido (t_1, $2t_1$), sin embargo la cantidad a pedir dependerá del stock existente en ese momento. Es decir que se realizan pedidos en periodo de tiempo fijos, pero con cantidades variables.

El inconveniente de este método es que pueden presentarse rupturas o faltantes en el inventario, que pueden no ser convenientes, tal como ocurre entre los momentos t_1 y $2t_1$.

Por supuesto entre estas dos formas de administrar un inventario existen muchas otras que surgen de la combinación de ambas.

Con respectos a los elementos a considerar al momento de seleccionar el modelo adecuado, además de la política de inventario, debemos contemplar:

✓ *Características de la demanda.* La demanda puede ser determinista o aleatoria. Al considerar que la demanda es determinista, implícitamente se está suponiendo que ella es perfectamente conocida y que se da a una tasa constante en el tiempo. En el caso de ser aleatoria podrá corresponder a una variable discreta o continua.

✓ *Costos relevantes.* cuando se realiza un análisis de inventarios deben tenerse en cuenta diversos costos, algunos de ellos son:

- *Costo de pedido:* al emitir una orden de pedido se incurre en diversos gastos, fundamentalmente administrativos. De la misma manera también se tienen gastos al iniciar un lote de producción, por ejemplo al poner en marcha una línea de producción o al preparar una máquina para una corrida de producción. Se trata de un costo fijo, es decir independiente del número de unidades pedidas o fabricadas.

- *Costo de almacenamiento:* el hecho de tener mercadería almacenada produce un costo que comúnmente se llama costo de conservación o de almacenamiento, y que generalmente se expresa por unidad de producto y para el periodo total de análisis o por unidad de producto y por unidad de tiempo. Este costo incluye ítems tales como alquileres de los depósitos destinados a almacén, seguros, requerimientos de manejo especial - como refrigeración-, robo, objetos rotos, etc. y el más importante de todos, el costo del capital inmovilizado en inventarios.
- *Costo de ruptura o agotamiento:* se produce una ruptura de stock cuando la demanda supera la cantidad de mercadería en inventario. Cuando se produce una ruptura, puede ocurrir que ésta quede como pedido pendiente, en cuyo caso la mercadería se entregará cuando se disponga nuevamente de stock, o puede suceder que la venta se pierda. En cualquier caso una ruptura produce un costo, llamado costo de agotamiento o de ruptura. Este costo, que puede incluir tanto componentes explícitos como implícitos, suele medirse por unidad de producto y para el periodo total de análisis o al igual que el de almacenamiento, por unidad de producto y por unidad de tiempo.

✓ *Retrasos en el ingreso de los pedidos:* debe tenerse en cuenta el periodo que transcurre entre el momento de hacer el pedido - o iniciar un lote de producción- y aquel en el cual está disponible la mercadería. La mercadería puede ingresar en forma instantánea, en cuyo caso se dice que el periodo de adelanto (τ) es cero. De lo contrario, puede ocurrir que este periodo sea distinto de cero pero perfectamente conocido -determinista- o que sea aleatorio.

✓ *Modalidad de ingreso del pedido:* puede suceder que el pedido ingrese al almacén en un solo lote o en forma parcial a lo largo de un periodo de tiempo.

✓ *Precio del producto:* se deben tener en cuenta aquellos casos en los que el precio del producto varía según el tamaño del pedido.

2. CLASIFICACIÓN ABC

Uno de los primeros pasos para la administración y análisis de un sistema de inventarios es realizar un análisis ABC. Este sistema permite determinar qué artículos representan la mayor parte de la inversión y si se justifica mantener invertidos estos recursos.

Ford Dickie en 1951 aplica el principio de Pareto a la administración de inventarios y lo llama análisis ABC.

El *Sistema ABC* ordena los artículos que componen el inventario, en base al porcentaje que su valor monetario representan en el total, de manera que se puedan tomar decisiones eficientes que permitan optimizar la administración de los recursos asignados. Clasifica los artículos en tres grupos:

Vilfredo Pareto, en 1897 afirmó que el 20% de las personas ostentaban el 80% del poder político y la abundancia económica, mientras que el 80% restante de la población se repartía el 20% restante de la riqueza y de la influencia política.

Grupo A: Se incluyen los artículos más importantes para efectos de control. Aquellos que contribuyen al 80% del valor monetario acumulado y generalmente constituyen alrededor del 20% de los ítems. En general representan pequeñas cantidades de artículos costosos, los cuales deben estar sujetos a un estricto control y se utilizan procedimientos complejos de pronóstico. Se debe tener cuidado al estimar los diversos parámetros de costo para establecer las políticas de operación.

Grupo B: Corresponde a aquellos artículos de importancia secundaria, que verifican valores monetarios porcentuales entre el 10% y el 15%, y comprende alrededor del 25% de todos los ítems. A estos artículos se les aplica un control moderado, los artículos se pueden revisar en forma periódica, se solicitan por grupos y no de forma individual y se utilizan métodos de pronóstico menos complicados.

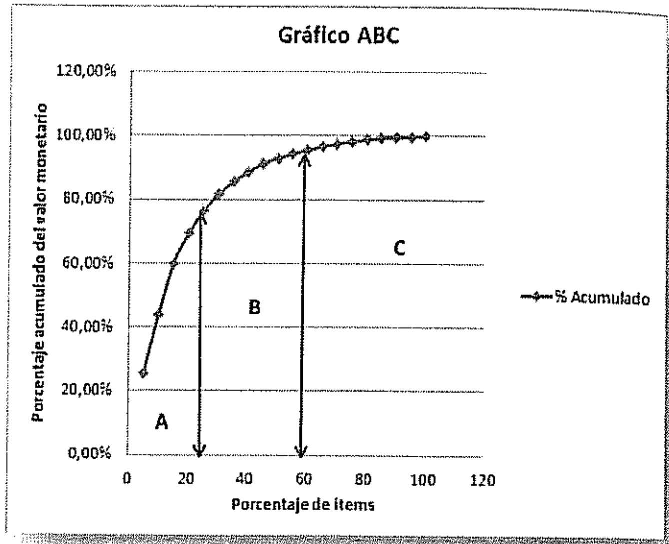
Grupo C: Son artículos de importancia reducida, corresponden entonces al 5% del valor monetario porcentual y comprenden más o menos el 55% de los ítems. Sobre ellos se efectúa un grado mínimo de control, se deben realizar pedidos de gran tamaño con el fin de minimizar la frecuencia de pedidos.

Esta clasificación es arbitraria pudiendo diferir los porcentajes asignados a cada grupo e incluso existir un número diferente de grupos.

El procedimiento práctico a seguir para el sistema de clasificación de inventarios ABC es el siguiente:

1°. Determinar la participación monetaria de cada artículo en el valor total del inventario.
2°. Tabular los artículos del inventario en orden descendente según el porcentaje de dinero invertido en cada ítem del inventario y calcular el acumulado.
3°. Calcular el porcentaje que cada ítem representa en el total y luego el acumulado.
4°. Graficar la curva ABC del porcentaje acumulado del uso del dinero en función del porcentaje acumulado de ítems.

En el gráfico siguiente se muestra un esquema de clasificación ABC donde la curva representa el del porcentaje acumulado del uso del dinero en función del porcentaje acumulado de artículos.



De esta manera se espera que una cantidad reducida de ítems que se encuentran en la parte superior de la clasificación serán parte del grupo A, y requerirán la mayor atención por parte de la gerencia; la mayor cantidad de ítems que se encuentran en la parte inferior de la clasificación son asignados al grupo C y requerirán una mínima atención de la gerencia y la cantidad restante de ítems hará parte del grupo B y requieren mediana atención.

Dado que mantener un nivel de inventario implica un capital inactivo, es natural que se ejerza un control sobre aquellos artículos que representen una mayor inversión en capital, por otro lado aquellos artículos que contribuyen muy poco en la inversión en capital merecen poca atención.

3. DEFINICIÓN DE LA SIMBOLOGÍA A UTILIZAR

Convenimos utilizar la siguiente simbología en todos los desarrollos que realizaremos en el presente capítulo:

T: período de análisis.
N: demanda total en el período de análisis.
t: unidad de tiempo.
h: demanda en la unidad de tiempo o tasa de demanda.
S: nivel máximo de stock.
q: cantidad a pedir o tamaño del lote (de producción o compra).
t_1: periodicidad de efectuar los pedidos.
τ: tiempo que transcurre entre el momento de realización del pedido y su ingreso al almacén. También conocido como período de adelanto o de reaprovisionamiento.

v: cantidad de pedidos a efectuar en el período de análisis T.
Cs: costo de almacenar una unidad de producto en la unidad de tiempo.
Cp: costo de efectuar un pedido o iniciar un lote de producción.
Cr: costo de ruptura por unidad de producto y por unidad de tiempo.
Cf: costo por unidad de producto faltante al final del período de análisis.
Ce: costo por unidad de producto excedente o sobrante al final del período.
CT: costo total variable de la política de inventarios.

4. MODELO 1 DE UNIVERSO CIERTO O MODELO SIN RUPTURA

Vamos a comenzar con el modelo más simple y clásico, también llamado modelo de la Cantidad Económica de Pedido (CEP). Es un modelo encuadrado dentro de los modelo de universo cierto o determinístico, esta caracterización se realiza a partir de que se considera la demanda como una cantidad conocida.

SUPUESTOS DEL MODELO

Es muy importante, al momento de utilizar un modelo de inventarios en particular, conocer las hipótesis o supuestos que lo sustentan, ya que si alguno de estos variara, el modelo ya no sería válido.

Las consideraciones o supuestos que lo caracterizan son:

1. La demanda es conocida y se produce a una tasa constante en el tiempo.
2. No se permiten rupturas de stock.
3. El volumen del pedido es constante.
4. Se emite una orden de pedido cuando el nivel del inventario llega a cero.
5. El pedido se recibe instantáneamente, es decir que el periodo de adelanto es cero.
6. La mercadería se recibe en un solo lote.
7. El horizonte de tiempo es infinito y continuo.
8. El costo del producto es constante, no importa la cantidad que se pida.
9. Los costos se consideran constantes en el horizonte de tiempo.

Los costos relevantes en este modelo son: el *costo de emisión de la orden de pedido* (Cp) y el *costo de mantener almacenado* el producto (Cs).

GRÁFICA DEL COMPORTAMIENTO DEL INVENTARIO EN EL MODELO CEP

A partir de los supuestos enunciados, podemos graficar el comportamiento del inventario para este modelo de la siguiente manera:

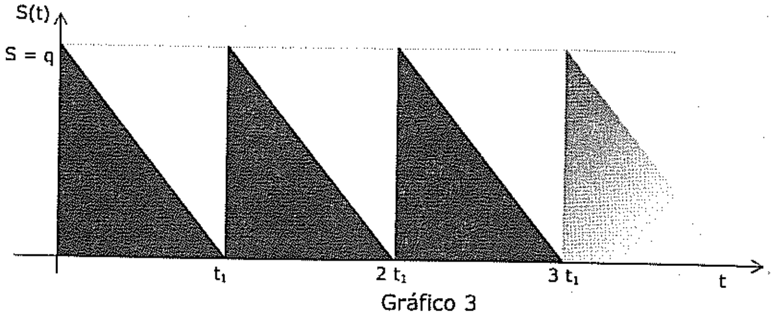


Gráfico 3

DESARROLLO DEL MODELO

El objetivo de este modelo es determinar la cantidad óptima de pedido (q*), de manera que se minimicen los costos totales (CT) y se cumpla con la demanda del producto (N).

Las variables, cuyo valor nos interesa determinar son:

q = cantidad a pedir o tamaño del lote

t_1 = periodicidad de los pedidos

v = cantidad de pedidos a realizar en el período de análisis T

Dado que la tasa de demanda (h) es constante por unidad de tiempo, podemos establecer las siguientes relaciones entre las variables:

$$h=\frac{N}{T}=\frac{q}{t_1}; \qquad t_1=\frac{Tq}{N}; \qquad v=\frac{N}{q} \qquad (1)$$

El costo total variable puede expresarse como la suma del costo total variable de hacer los pedidos y del costo total variable de almacenamiento.

$$(\text{Costo Total variable})=(\text{Costo Total de Pedidos})+(\text{Costo Total de Almacenamiento})$$

Donde:

$$(\text{Costo Total de Pedidos})=(\text{Costo de hacer un pedido})(\text{n}^{\text{o}}\text{ de pedidos a realizar en el periodo total})$$

$$\begin{pmatrix}\text{Costo Total del}\\ \text{Almacenamiento}\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}\text{Costo de conservacion}\\ \text{por unidad de producto}\\ \text{y unidad de tiempo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Inventario promedio}\\ \text{en un periodo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{subperiodo}\\ \text{de analisis}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\text{numero de}\\ \text{periodos}\end{pmatrix}$$

De acuerdo a lo expresado, para la construcción del modelo teórico, procedemos de la siguiente forma:

1°) Se construye la función objetivo que queremos minimizar, esta es una función de costo total variable (CT), teniendo en cuenta que los costos relevantes son Cs y Cp.

$$CT=CTs + CTp \qquad (2)$$

donde:

$$CTs=(Cs\ \frac{q}{2}\ t_1)\ v$$

$$CTp=Cp\ v$$

Reemplazando a v y t_1 por sus iguales según (1)

$$CTs=Cs\ \frac{\cancel{q}}{2}\ \frac{Tq}{\cancel{N}}\ \frac{\cancel{N}}{\cancel{q}}=Cs\ \frac{q}{2}\ T$$

$$CTp = Cp\ v = Cp\ \frac{N}{q}$$

Reemplazando en (2) obtenemos el CT en función de la variable q:

$$CT=Cs\frac{Tq}{2}+Cp\frac{N}{q} \qquad (3)$$

2º) Se calcula el valor de q*, es decir la cantidad a pedir que minimice la función de CT. Como CT es una función continua y derivable, aplicamos las condiciones de máximos y mínimos relativos para funciones de una variable.

$$\frac{\partial CT}{\partial q}=0$$

$$\frac{\partial CT}{\partial q}=\frac{Cs\ T}{2}-\frac{Cp\ N}{q^2}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{Cs\ T}{2}=\frac{Cp\ N}{q^2};$$

$$q^2=\frac{2\ Cp\ N}{Cs\ T}, \quad \text{despejando q se obtiene:} \quad q^*=\sqrt{\frac{2\ Cp\ N}{Cs\ T}}$$

Para determinar si el valor obtenido de q* corresponde a un mínimo o máximo de la función CT, calculamos la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 CT}{\partial q}=\frac{2\ Cp\ N}{q^3} \qquad (5)$$

Observando (5), podemos afirmar que para valores positivos de q, la derivada segunda será positiva y corresponde a un mínimo de la función. Además el hecho que sea positiva para cualquier valor positivo de q, implica que la función es convexa y esto nos garantiza que el mínimo encontrado es a su vez un mínimo absoluto.

Conociendo el valor óptimo de q, podemos reemplazarlo en (3) y obtener el CT(q*):

Observe que esta es una fórmula que sólo permite encontrar el valor del CT para la cantidad óptima.

$$CT(q^*) = Cs\,T\,\frac{\sqrt{\frac{2CpN}{CsT}}}{2} + \frac{Cp\,N}{\sqrt{\frac{2CpN}{CsT}}} = \sqrt{2\,Cp\,N\,T\,Cs}$$

RELACIÓN ENTRE CTS Y CTP

A partir de (4), podemos deducir que: *"en el valor óptimo de q, se verifica que el costo total de almacenamiento se iguala al costo total de hacer pedidos"*. Situación que podemos observar en el gráfico 4.

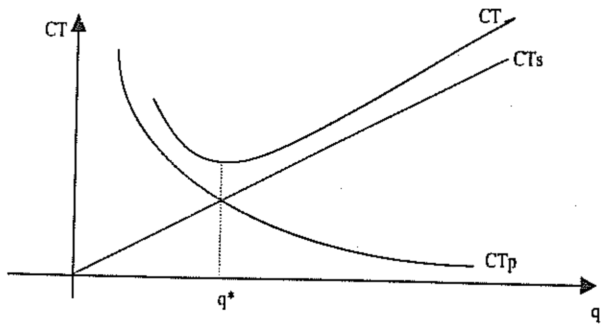


Gráfico 4

Analizando el gráfico, podemos observar una de las características de la función de costo total variable de este modelo, que es la de ser relativamente poco sensible para variaciones cercanas al tamaño del lote óptimo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

La empresa Metalúrgica SA es un fabricante de autopartes, que debe cumplir un contrato por el cual se establece proveer a una automotriz 10.950 amortiguadores por año, a razón de 30 por día. Teniendo en cuenta que cada lote de producción se inicia y termina en el día, que el costo de iniciar la producción es de $500.- y el mantenimiento del inventario se estima en 0,5% diario del valor del producto. Determine la política óptima de inventarios para el autopartista, sabiendo que cada amortiguador tiene un costo de $600.-

Los datos del problema son:

T= 1 año = 365 días; h= 30 por día; N= 10950;

Cp= $500 por pedido; Cs= $3 por amortiguador y por día

$$q^* = \sqrt{\frac{2\ Cp\ N}{Cs\ T}} = \sqrt{\frac{2\ (500)\,10950}{3\,(365)}} \approx 100 \text{ amortiguadores}$$

$$t_1 = \frac{Tq}{N} = \frac{(365)\ 100}{10950} = 3{,}33 \text{ días };$$

$$v = \frac{N}{q} = \frac{10950}{100} = 109{,}50 \text{ pedidos en el período T}$$

$$CT(q^*) = \sqrt{2\ Cp\ N\ T\ Cs} = \sqrt{2\,(500)\,10950\,(365)\,3} = \$109.500.-$$

Se puede redondear el valor de q* al entero más próximo, dada la poca sensibilidad de la función de CT alrededor del óptimo.

Podemos observar que la política óptima de inventario es producir 100 amortiguadores cada 3,33 días. Esta política generará un costo total variable mínimo de $109.500.-

5. MODELO 2 DE UNIVERSO CIERTO O MODELO CON RUPTURA

En muchas situaciones puede ser redituable permitir faltantes o rupturas de stocks, ya que en estos casos, el periodo de tiempo que transcurre entre pedidos se alarga. Esto hace que el número de pedidos en el periodo total sea menor, con lo cual el costo total de pedidos se reduce. Además, el costo total del almacenamiento también disminuye, ya que el nivel de inventario es menor al permitir faltantes o rupturas. No obstante, se produce en estos casos un costo por la falta de mercadería, que debe ser considerado. Lo que se pretende es equilibrar los costos de ruptura, que son crecientes, con los costos decrecientes de pedidos y almacenamiento.

SUPUESTOS DEL MODELO

1. La demanda es conocida y se produce a una tasa constante en el tiempo.
2. Se permiten rupturas o faltantes de stock.
3. El volumen del pedido es constante.
4. El pedido se recibe instantáneamente, es decir que el periodo de adelanto es cero.
5. La mercadería se recibe en un solo lote.
6. El horizonte de tiempo es infinito y continuo.
7. El costo del producto es constante, no importa la cantidad que se pida.
8. Los costos se consideran constantes en el horizonte de tiempo.

9. La demanda que se produce cuando no hay stock no se pierde, se lo toma como pedidos pendientes que se satisfacen al llegar el reabastecimiento.
10. Las q unidades que llegan con cada pedido se tratan de la siguiente manera: se destinan (q-S) unidades a satisfacer los pedidos pendientes y las S unidades restantes se destinan al nuevo ciclo.
11. El ciclo t_1 se divide en dos partes t_2 y t_3. Durante el tiempo t_2 se dispone de mercadería para atender la demanda y durante t_3 se anotan los requerimientos para satisfacerlos cuando llegue el próximo pedido.

Los costos que se consideran relevantes en este modelo son:

Cs = costo de mantener una unidad en inventario por unidad de tiempo.

Cp = costo de pedido.

Cr = costo de tener una unidad como pedido pendiente por unidad de tiempo

GRÁFICA DEL COMPORTAMIENTO DEL INVENTARIO

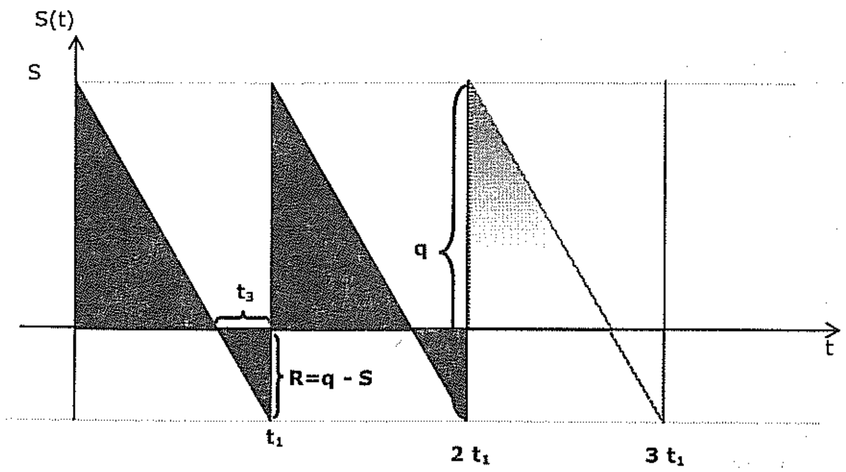


Gráfico 5

DESARROLLO DEL MODELO

Las variables, cuyo valor nos interesa determinar son:

q = cantidad a pedir o tamaño del lote

t_1 = periodicidad de los pedidos

v = cantidad de pedidos a realizar en el período de análisis T

t_2 = tiempo durante el cual existe mercadería en el almacén

t_3 = tiempo en el cual no existe mercadería en el almacén o lo que es lo mismo, hay rupturas de stock.

Nuevamente, a fin de realizar el desarrollo, establecemos algunas relaciones entre las variables:

$$v = \frac{N}{q}; \qquad h = \frac{N}{T} = \frac{q}{t_1} = \frac{S}{t_2} = \frac{q-S}{t_3};$$

de donde: (1)

$$t_1 = \frac{T\,q}{N}; \qquad t_2 = \frac{T\,S}{N}; \qquad t_3 = \frac{T\,(q-S)}{N}$$

En la construcción del modelo teórico, procedemos de la siguiente forma:

1º) Se construye la función de costo total variable (CT) teniendo en cuenta que los costos relevantes son Cs, Cp y Cr

$$CT = CTs + CTp + CTr \qquad (2)$$

Las funciones de costos anteriores se construyen de manera análoga a las del modelo CEP, considerando que ahora el subperíodo de análisis se divide en un período durante el cual existe mercadería para atender la demanda y un período donde la demanda se mantiene como pedidos pendientes.

donde:

$$CTs = \left[\left(Cs\ \frac{S}{2}\ t_2\right)\right] v$$

$$CTp = Cp\ v$$

$$CTr = \left[Cr\ \frac{(q-S)}{2} t_3\right] v$$

Observe en el gráfico 5, que la mercadería almacenada es la superficie de un triángulo de base t_2 y altura S. Es decir, $\frac{S\,t_2}{2}$.
Igual razonamiento se utiliza para la mercadería pendiente de entrega.

reemplazando a v, t_1, t_2 y t_3 por sus iguales según las relaciones establecidas en (1)

$$CTs = Cs\ \frac{S}{2}\ \frac{T\,S}{N}\ \frac{N}{q} = Cs\ \frac{T\,S^2}{2q}$$

$$CTp = Cp\ v = Cp\ \frac{N}{q}$$

$$CTr = \left[Cr \frac{(q-S)}{2}\ \frac{T(q-S)}{N}\right]\frac{N}{q} = Cr\ \frac{T(q-S)^2}{2q}$$

Reemplazando en (2) obtenemos el CT en función de las variables q y S:

$$CT = Cs\ \frac{T\,S^2}{2q} + Cp\frac{N}{q} + Cr\,\frac{T\,(q-S)^2}{2q}$$

2º) Para obtener el valor de q y S que hagan óptima a CT se procede de la misma forma que lo hicimos en el modelo anterior, sólo que en este caso hay que tener en cuenta que CT es una función de dos variables, por lo que se deberán aplicar las condiciones de máximos y mínimos relativos para este tipo de funciones, es decir:

$$\frac{\partial CT}{\partial q}=0; \qquad \frac{\partial CT}{\partial S}=0$$

El valor de q y S, obtenidos al despejar, verifican un mínimo si:

$$\frac{\partial^2 CT}{\partial q''}>0; \qquad \frac{\partial^2 CT}{\partial S''}>0 \quad y \quad |H|=\left(\frac{\partial^2 CT}{\partial q''}\ \frac{\partial^2 CT}{\partial S''}\right)-\left(\frac{\partial^2 CT}{\partial q\,\partial S}\right)^2>0$$

Los valores óptimos que se obtienen al realizar este proceso de cálculo son:

$$q^*=\sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{Cs\,T}}\sqrt{\frac{Cs+Cr}{Cr}} \qquad y \qquad S^*=\sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{Cs\,T}}\sqrt{\frac{Cr}{Cs+Cr}}$$

Observemos que la cantidad óptima de pedido se obtiene ahora, de la misma manera que en el modelo CEP, pero multiplicada por un factor que depende de la magnitud relativa Cr y Cs.

Cuanto mayor sea el costo de mantenimiento de inventario con respecto al costo de los pedidos pendientes, conviene mantener un nivel de inventario más bajo y por el contrario, cuanto mayor importancia tenga el costo por faltantes, el nivel de inventarios será más alto y menor la ruptura.

De acuerdo a esto, a medida que aumenta el costo de ruptura el lote óptimo de este modelo se acerca al valor calculado con el modelo CEP.

También puede observarse que, siempre que la situación lo permita, es conveniente utilizar el modelo con agotamientos planeados, ya que este produce un costo total menor que usando el modelo CEP.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Con los datos de Metalúrgica SA, supongamos que en el contrato con la automotriz se establece que si no puede cumplir con los envíos diarios (30 amortiguadores por día), deberá pagar una multa de \$1.- por pieza no entregada y por día de retraso en la entrega.

Los datos ahora son:

T= 1 año = 365 días; h= 30 unidades por día; N= 10950;

Cp= \$ 500 por pedido; Cs= \$ 3 por amortiguador y por día;

Cr= \$1 por unidad y por día

Comparar estos resultados con los del modelo I y sacar conclusiones sobre cómo se modifica la política óptima cuando se admiten rupturas de stock.

$$q^*=\sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{Cs\,T}}\sqrt{\frac{Cs+Cr}{Cr}}=\sqrt{\frac{2\,(500)\,10950}{3\,(365)}}\sqrt{\frac{3+1}{1}}=100\,(2)=200 \text{ amortiguadores}$$

$$S^*=\sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{Cs\,T}}\sqrt{\frac{Cr}{Cs+Cr}}=\sqrt{\frac{2\,(500)\,10950}{3\,(365)}}\sqrt{\frac{1}{3+1}}=100\,(0,5)=50 \text{ amortiguadores}$$

$$t_1=\frac{Tq}{N}=\frac{365(200)}{10950}=6,67 \text{ días}; \qquad t_2=\frac{TS}{N}=\frac{365(50)}{10950}=1,67 \text{ días};$$

$$t_3=t_1-t_2=5 \text{ días}$$

Plantear diferentes escenarios asignando diferentes valores a Cr y comparar los resultados obtenidos en cada situación. Particularmente observar lo que ocurre cuando Cr asume un valor muy grande.

$$v=\frac{N}{q}=\frac{10950}{200}=54,75 \text{ pedidos en el período T}$$

$$CT=Cs\frac{T\,S^2}{2q}+Cp\frac{N}{q}+Cr\frac{T\,(q-S)^2}{2q}=3\frac{365(50)^2}{2(200)}+500\frac{10950}{200}+1\frac{365(200-50)^2}{2(200)}=\$54.750.-$$

6. RELACIÓN ENTRE EL MODELO 1 Y EL MODELO 2 DE UNIVERSO CIERTO

Si observamos los valores óptimos de ambos modelos, podemos ver que:

- ✓ En el Modelo 1 $\Rightarrow$ q = S
- ✓ En el Modelo 2 $\Rightarrow$ q $\neq$ S

En S del segundo modelo, aparece el término $\sqrt{\frac{Cr}{Cr+Cs}}$, el cociente bajo el signo de radicación se llama tasa de ruptura (ρ), y es justamente este término el que hace la diferencia entre el inventario máximo en ambos modelos. Vamos a analizar qué ocurre con la tasa de ruptura a medida que el costo de ruptura aumenta, para ello tomamos límite para Cr$\to\infty$:

$$\lim_{Cr\to\infty}\frac{Cr}{Cr+Cs}$$

Esto es una indeterminación, para resolverla aplicamos la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{Cr\to\infty}\frac{Cr}{Cr+Cs}=1$$

Con lo cual podemos afirmar que la relación que existe entre ambos modelos es la siguiente *"el modelo 1 es un caso particular del modelo 2, cuando el costo de ruptura es inmensamente alto"*. Es decir que, cuando el costo de ruptura es muy grande (Cr$\to\infty$), el modelo 2 se transforma en el modelo 1, que justamente no admite rupturas porque tienen un costo imposible de afrontar.

7. NIVEL DE REORDEN Y STOCK DE SEGURIDAD

En los modelos analizados hasta el momento hemos considerado que:

- ✓ Se emite una orden de pedido cuando el nivel del inventario llega a cero.
- ✓ El pedido se recibe instantáneamente, es decir que el periodo de adelanto (τ) es cero.

Sin embargo, en la mayoría de los casos transcurre un lapso de tiempo entre el momento de realizar el pedido y el momento en que éste ingresa al almacén, llamado periodo de adelanto o de reabastecimiento. Esto trae como consecuencia la necesidad de fijar un nivel de reorden distinto de cero.

Si recordamos que definimos como *nivel de reorden* al nivel de inventario que indica el momento de realizar el pedido, estaremos de acuerdo en que este nivel de inventario debe ser suficiente para atender a la demanda en el periodo τ, dado que la mercadería no ingresa instantáneamente.

Se pueden presentarse dos situaciones, que τ sea determinista o que τ sea una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida.

Caso 1. Analizaremos cómo proceder a calcular el nivel de reorden según el modelo que estemos trabajando cuando el período de reabastecimiento es un tiempo determinista.

MODELO CEP: En este caso será suficiente que fijemos un nivel de reorden igual a la demanda (m) en el período τ. Como hemos supuesto que la tasa de demanda (h) es conocida y constante, entonces el nivel de reorden (x) será:

$$x_0 = m = h.\tau$$

Gráficamente:

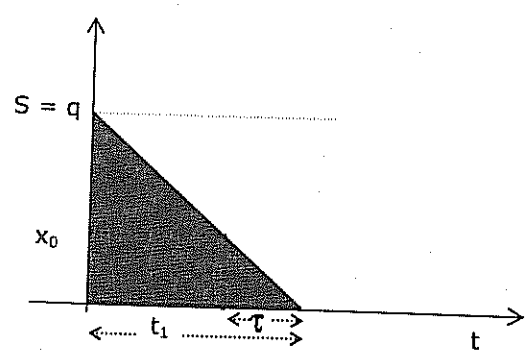


Gráfico 6

MODELO CON RUPTURAS: en este modelo podríamos analizar si el período de reabastecimiento se produce mientras hay mercadería en almacén o cuando el stock esta en falla.

a) Caso en que el momento de realizar el pedido (t_1-τ) se encuentra dentro del período que hay stock (t_2)

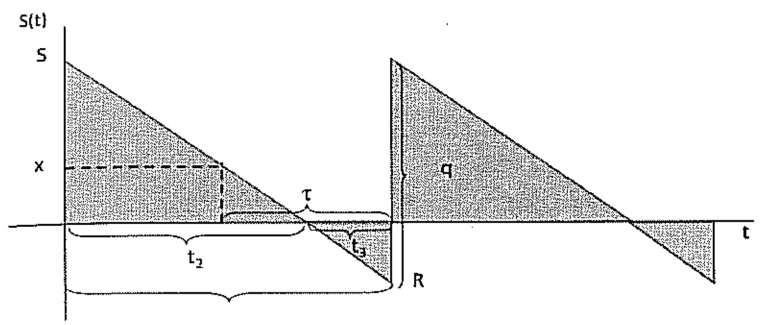


Gráfico 7

El nivel de reorden se calcula como:

$$x = m - R = (h\,\tau) - (h\,t_3);$$

$$\mathbf{x = h\,(\tau - t_3)}$$

b) Caso en que el momento de realizar el pedido (t_1-τ) se encuentra en el período en que no hay stock (t_3)

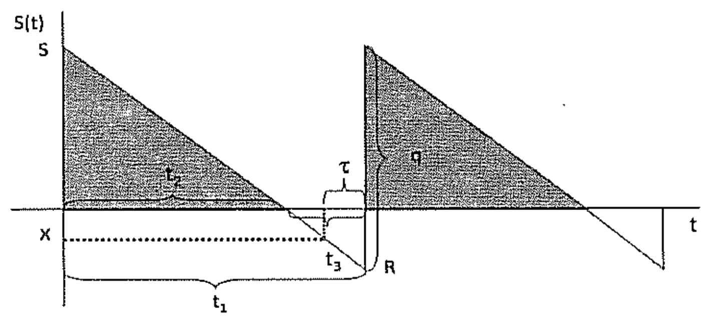


Gráfico 8

No obstante, el nivel de reorden se calcula igual que en la situacion anterior:

$$x = m - R = (h\,\tau) - (h\,t_3);$$

$$\mathbf{x = h\,(\tau - t_3)}$$

MODELO CON REABASTECIMIENTO UNIFORME: En este modelo debemos analizar si el período de reaprovisionamiento se produce mientras esta ingresando mercadería o en el período de solo consumo.

a) Caso en que el momento de realizar el pedido (t_1-τ) se encuentra durante el período de demanda (t_5)

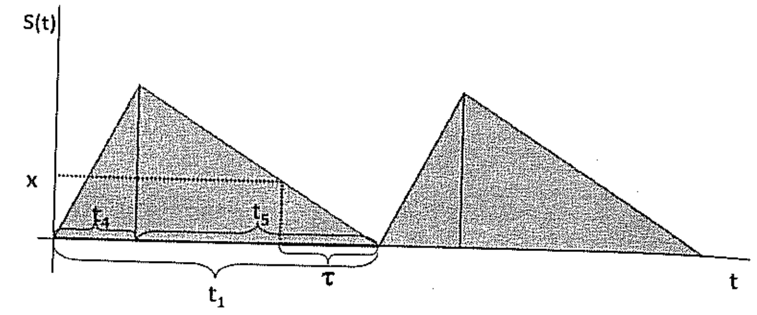


Gráfico 9

El nivel de reorden en este caso lo calculamos como:

$$\mathbf{x = h\,\tau}$$

b) Caso en que el momento de realizar el pedido (t_1-τ) se encuentra durante el período de ingreso de mercadería (t_4)

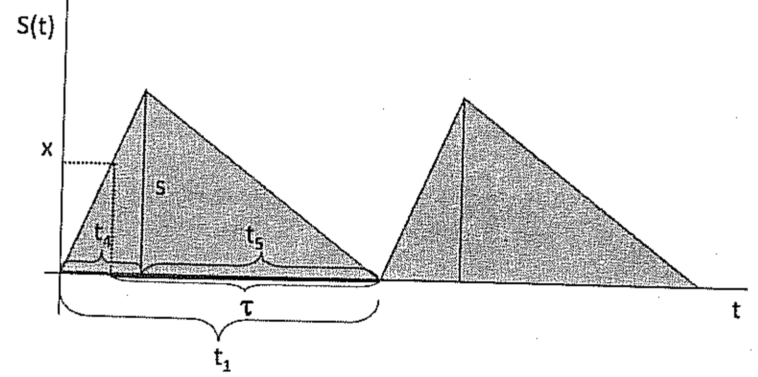


Gráfico 10

El nivel de reorden en este caso será:

$$\mathbf{x = (a-h)\,(t_1-\tau\,)}$$

Caso 2. En situaciones en que τ es una variable aleatoria, no podremos fijar como nivel de reorden a la demanda en τ, ya que como a este período lo hemos supuesto aleatorio, entonces la demanda también lo será.

Si trabajamos con el supuesto de que τ se distribuye normal con media igual a $\bar{\tau}$ y desviación estándar igual a σ_τ, tendremos que m también tendrá una distribución normal, con una media igual a $\bar{m}$ y un desvío igual a σ_m.

Es decir que si fijáramos como nivel de reorden a la demanda media en τ, el 50% de las veces nos quedaríamos sin stock.

Lo que a nosotros nos interesa, es establecer un nivel de reorden (x) que nos proporcione una cierta confianza de que, durante el periodo τ, este nivel x de inventario no será excedido por la demanda. Esto es:

$$P(m > x) = \alpha$$

donde α es un nivel de probabilidad que nosotros fijamos y que debe ser suficientemente pequeño, esto es lo mismo que decir que:

$$P(m \le x) = 1-\alpha$$

Siendo $1-\alpha$ el nivel de confianza.

Gráficamente el nivel de reorden *x* que permite un nivel de confianza de $1-\alpha$ es el siguiente:

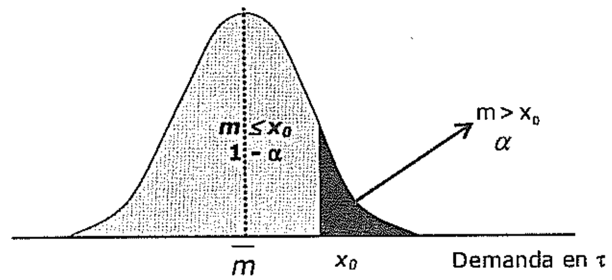


Gráfico 7

Como hemos supuesto que τ y por lo tanto m siguen una distribución normal, entonces, dado un nivel de confianza $1-\alpha$, podremos determinar el nivel de reorden como sigue:

$$z_{1-\alpha} = \frac{x-\bar{m}}{\sigma_m}$$

En consecuencia:

$$x_0 = \bar{m} + z_{1-\alpha}.\sigma_m$$

Donde:

$$\bar{m} = h.\bar{\tau}$$

$$\sigma_m = h.\sigma_\tau$$

Podemos observar que ahora el nivel *x* está formado por $\bar{m}$, más una cierta cantidad representada por $z_{1-\alpha}.\sigma_m$. Esta cantidad se llama *stock de seguridad*, y tiene como función cubrir los excesos de la demanda real, por encima de la demanda media, en el periodo de retardo.

Ejemplo de Aplicación

Con los datos de Metalúrgica SA para el modelo CEP, supongamos que el período que transcurre entre el inicio y fin del lote de producción es de 1 día, determinar el nivel de reorden.

Recordemos que la política óptima para este caso es fabricar 100 amortiguadores cada 3,3334 días.

Entonces: $h = \frac{q^*}{t_1} = \frac{100}{3,3334} = 30$ amortiguadores por día

y $\tau = 1$ día

$$x_0 = m = h\tau = 30(1) = 30 \text{ amortiguadores}$$

Es decir que la empresa Metalúrgica SA deberá iniciar un nuevo lote de producción cada vez que el inventario llegue a 30 amortiguadores.

Supongamos ahora que el tiempo para producir cada lote es una variable aleatoria normal con media 2 días y desvío 0,5. Es decir:

$\tau \sim N(2\ ;\ 0,5)$

$\bar{m} = h\bar{\tau} = 30(2) = 60$ amortiguadores

$\sigma_m = h\sigma_\tau = 30(0,5) = 15$ amortiguadores

Entonces:

$m \sim N(60\ ;\ 15)$

Fijando un nivel de confianza de 0,95 de donde $z_{0,95} = 1,645$

Buscamos:

$$\text{Prob}\ (m \leq x_0) = 0,95$$

$$\text{Prob}\left(z_{0,95} \leq \frac{x_0 - \bar{m}}{\sigma_m}\right) = 0,95$$

$$\text{Prob}\left(1,645 \leq \frac{x_0 - 60}{15}\right) = 0,95$$

$$x_0 = 60 + 1,645(15) = 84,67 \text{ amortiguadores}$$

En este caso el nivel de reorden se fija en 85 amortiguadores, siendo el stock de seguridad igual a:

$$x_0 - \bar{m} = 84,67 - 60 \cong 25 \text{ amortiguadores}.$$

8. Modelo con reabastecimiento uniforme

Cuando analizamos los modelos 1 y 2 de universo cierto, hemos supuesto que cada orden de producción ingresa al almacén en un solo lote. Relajaremos ahora esta hipótesis y consideraremos que al colocar una orden, las piezas van ingresando al inventario a una tasa constante durante un cierto periodo de tiempo. Esta tasa, a la cual se fabrica el producto, debe ser mayor que la tasa de demanda; de lo contrario no se podría cumplir con la demanda.

Supuestos del modelo

1. La demanda es conocida y se produce a una tasa constante en el tiempo llamada h.
2. El lote se produce a una tasa de producción conocida de a unidades por unidad de tiempo.
3. Los bienes ingresan al almacén a una tasa constante a que debe ser mayor a la tasa de demanda h, de otra manera no existiría inventario, es decir $a > h$.
4. No se permiten rupturas de stock.
5. El volumen del lote de producción (q) es constante.
6. Se emite una orden de pedido cuando el nivel del inventario llega a cero.
7. El costo de producción es constante y no depende del número de unidades del lote.

Los costos relevantes son: el costo de emisión de la orden de producción (Cp) y el costo de mantener almacenada una unidad de producto en una unidad de tiempo (Cs). Estos costos se consideran constantes en el horizonte de tiempo.

Observemos que la periodicidad de efectuar los pedidos (t_1) se divide en dos tiempos, el tiempo durante el cual ingresa y se consume mercadería (t_4) y el tiempo durante el cual solamente se consume (t_5), es decir :

$$t_4 + t_5 = t_1$$

Durante el periodo de reabastecimiento (t_4), el inventario crece con una tasa igual a la diferencia entre las tasas de demanda y abastecimiento

Gráfica del comportamiento del inventario

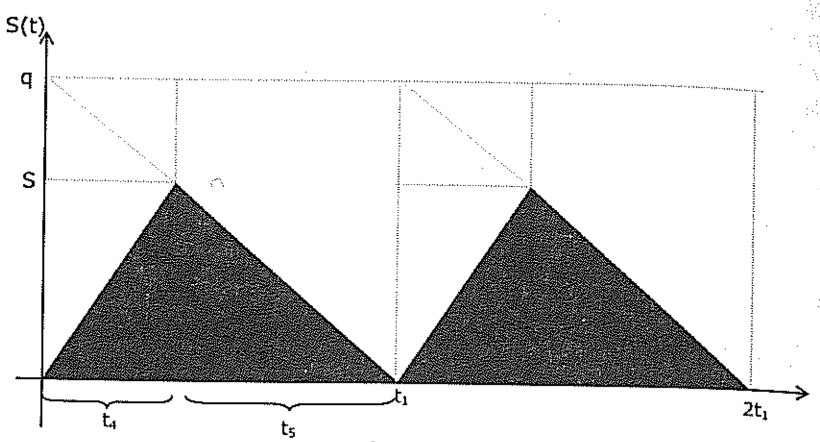


Gráfico 8

Desarrollo del modelo

Teniendo en cuenta las características anteriores, se desarrolla el modelo del lote de producción a partir de una función de costo total que contempla el costo total de almacenamiento, más el costo total de preparación de la producción, de manera similar a la desarrollada en el primer modelo.

Considerando que:

Durante t_4 la mercadería se produce a una tasa *a*, por lo que al final de este periodo se habrá completado la producción del lote completo q, es decir:

$q = a\, t_4$; despejando $t_4 = q/a$;

$t_1 = t_4 + t_5$; $t_5 = t_1 - t_4$

Debido a que durante el período t_4 ingresa y sale mercadería, la tasa a la cual se acumula el inventario es (a - h) por lo que el stock máximo será, que se da al final del periodo t_4:

$S = (a - h)\, t_4$; reemplazando a t_4 $S = (a-h)\left(\frac{q}{a}\right)$; $S = q\left(1 - \frac{h}{a}\right)$

Recordando que la función de costo total es igual al costo total de pedir más el costo total de almacenar, para este modelo será:

$$CT = Cp\,\frac{N}{q} + \left(Cs\,\frac{S}{2}\,t_4 + Cs\,\frac{S}{2}\,t_5\right)\frac{N}{q};$$

$$CT = Cp\,\frac{N}{q} + Cs\,\frac{S\,N}{2\,q}\,(t_4 + t_5) = Cp\,\frac{N}{q} + Cs\,\frac{S}{2}\,\frac{N}{q}\,t_1\ ;$$

$$CT = Cp\,\frac{N}{q} + Cs\,\frac{S}{2}\,\frac{N}{q}\,\frac{Tq}{N} = Cp\,\frac{N}{q} + Cs\,\frac{q\left(1 - \frac{h}{a}\right)}{2}\,\frac{N}{q}\,\frac{Tq}{N};$$

$$CT\,(q) = Cp\,\frac{N}{q} + Cs\,\frac{q}{2}\,T\left(1 - \frac{h}{a}\right)$$

Aplicando las condiciones de máximos y mínimos para funciones de una variable, obtenemos que el tamaño del lote de producción óptimo será:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{Cs\,T\left(1 - \frac{h}{a}\right)}} = \sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{Cs\,T}}\,\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{h}{a}}}$$

Si comparamos este modelo con reabastecimiento uniforme con el primer modelo, podemos observar que se realizan pedidos más grandes y los costos son menores. Esto es así, porque durante el periodo t_4 algunas unidades que se reciben se distribuyen inmediatamente, lo cual reduce los costos de almacenamiento.

Ejemplo de aplicación

Supongamos que una fábrica de jabón en polvo produce en una línea con capacidad de 5000 cajas mensuales. La demanda anual se estima en 30000 cajas, manteniéndose la tasa de demanda prácticamente constante durante todo el año.

La limpieza, preparación y puesta en marcha de la línea de producción cuesta aproximadamente \$140.- El costo de producción es de \$2,00 por caja. El costo anual de almacenamiento se calcula en un 24%.

Determinar el tamaño del lote de producción y el costo total asociado.

T = 12 meses t = mes

a = 5000 unidades por mes; h = 2500 unidades por mes

N = 30000 unidades por año; Cp = \$140; C_s = \$ 0.04 por unidad y por mes

$$q^* = \sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{Cs\,T\left(1 - \frac{h}{a}\right)}} = \sqrt{\frac{2\ (140)\ 30000}{0{,}04\,(12)\left(1 - \frac{2500}{5000}\right)}} = 5916 \text{ unidades}$$

$$CT\ (q) = Cp\,\frac{N}{q} + Cs\,\frac{q}{2}\,T\left(1-\frac{h}{a}\right) = 709.93 + 709.92 = \$1419.85$$

Obsérvese que, al igual que en el primer modelo, para el tamaño óptimo del lote de producción, los costos totales se igualan.

9. MODELO CON DESCUENTOS POR COMPRAS EN CANTIDADES

En los modelos 1 y 2 de universo cierto, hemos trabajado bajo el supuesto que el precio de producción o adquisición del producto era constante e independiente del tamaño del lote. En la práctica, ocurre frecuentemente que los proveedores ofrecen descuentos si los pedidos son suficientemente grandes. Por ejemplo, supongamos que:

Si el pedido es entre 0 y q_1 unidades, el precio unitario es p_1
Si el pedido es entre q_1 y q_2 unidades, el precio unitario es p_2 (1)
Si el pedido es entre q_2 y q_3 unidades, el precio unitario es p_3

Donde el precio unitario va disminuyendo a medida que se incrementa el tamaño del lote.

Es decir:

$$q_1 < q_2 < q_3 \qquad y \qquad p_1 > p_2 > p_3$$

El precio del producto dependerá de la decisión del tamaño del lote

Esta condición, obliga a que se incorpore el precio del producto en la función de costo total variable. Además, al ser el precio discontinuo, el CT también lo será, por lo tanto no podremos utilizar el cálculo diferencial para encontrar el punto óptimo de la función.

En estos casos, también suele ocurrir que el costo de almacenamiento deja de ser constante, porque generalmente una parte de este costo está en relación directa con el precio del producto, como por ejemplo el valor del seguro de la mercadería almacenada y el costo del capital inmovilizado, es decir que:

$$Cs = a + b\,p_i$$

La función de costo total variable en este modelo se calcula de la siguiente forma:

CT = CTp + CTs + demanda total valuada según el precio del producto

$$CT_{(q,\,pi)} = \left[Cp + Cs\,\frac{q}{2}\,t_1 + q\,p_i\right]v$$

$$CT_{(q,\,pi)} = Cp\,\frac{N}{q} + (a+b\,p_i)\,\frac{q}{2}\,t_1\,\frac{N}{q} + q\,p_i\,\frac{N}{q}$$

Reemplazando a $t_1 = \frac{T\,q}{N}$ y operando:

$$CT_{(q,\,pi)} = Cp\,\frac{N}{q} + (a+b\,p_i)\,\frac{T\,q}{2} + p_i\,N$$

Esta función no es continua porque p_i no lo es. Para cada valor de p_i existirá una función de costo total, la que dependerá sólo de q. Así para el caso de tres precios:

$$CT_{(q,\,p_i)} = Cp\,\frac{N}{q} + (a+b\,p_1)\,\frac{T\,q}{2} + p_1\,N \qquad si\ 0 \le q < q_1$$

$$CT_{(q,\,p_i)} = Cp\,\frac{N}{q} + (a+b\,p_2)\,\frac{T\,q}{2} + p_2\,N \qquad si\ q_1 \le q < q_2$$

$$CT_{(q,\,p_i)} = Cp\,\frac{N}{q} + (a+b\,p_3)\,\frac{T\,q}{2} + p_3\,N \qquad si\ q_2 \le q < q_3$$

En cada función de costo total variable podremos calcular:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2\,Cp\,N}{(a+b\,p_i)\,T}}$$

Observemos gráficamente como puede modificarse el valor óptimo de acuerdo al intervalo de precios y a la estructura de la función de CT:

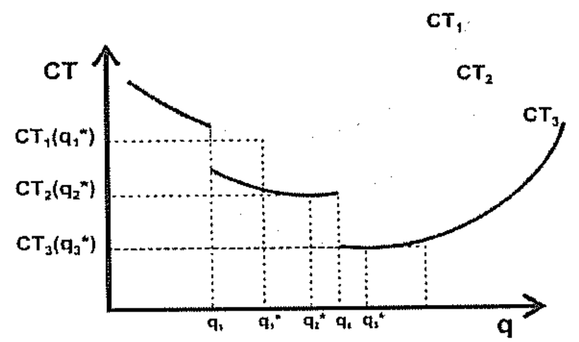


Gráfico 9

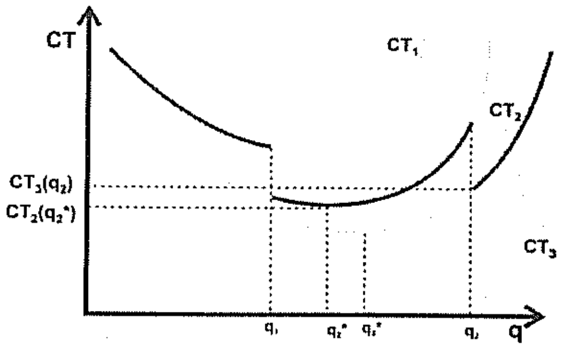


Gráfico 10

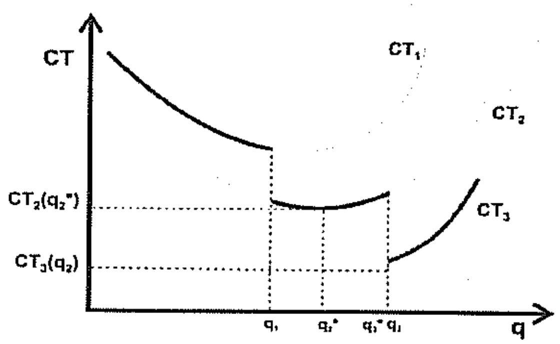


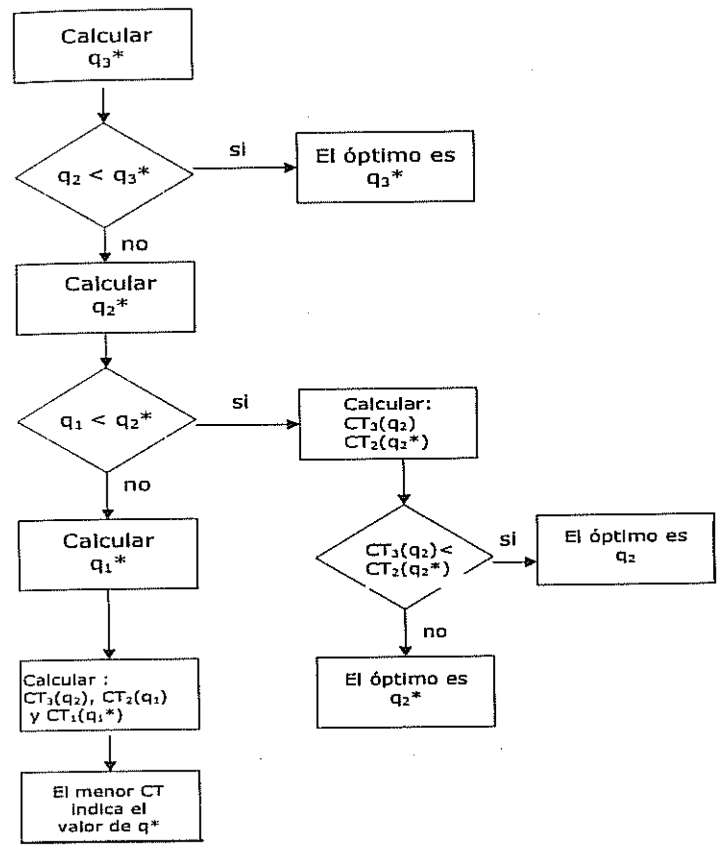
Gráfico 11

Vemos que en el primer gráfico la cantidad óptima es q_3^*, la que se adquiere al precio más bajo p_3.

En el gráfico 10 la cantidad q_2^* es la que verifica el menor costo total variable, por lo cual, la decisión óptima en este caso es comprar esa cantidad al precio p_2.

En el último gráfico, la cantidad más conveniente a pedir es q_3, menor cantidad que se puede comprar al precio más barato.

En el siguiente diagrama se muestra la metodología de cálculo del lote óptimo, para el caso de tres precios.



Es importante destacar que, si bien el desarrollo de esta metodología se realizó considerando tres precios diferentes, la misma se utiliza cualquiera sea el número de intervalos de precios.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

De una empresa dedicada a la venta de equipamiento industrial, se conocen los siguientes datos respecto al mantenimiento del inventario de heladeras comerciales:

$T = 365$ días; $N = 15.900$ unidades al año;

$Cp = \$50$ por pedido; $Cs = \$1 + 0{,}035 p_i$ por día y por producto

$P_1 = \$\,600$, si $0 \leq q < 25$

$P_2 = \$\,500$, si $25 \leq q < 35$

$P_3 = \$\,400$, si $35 \leq q$

Primero calculamos :

$$q_3^* = \sqrt{\frac{2\,(50)\,15900}{[1+0{,}035\ (400)]\,365}} = 17{,}04 \text{ unidades}$$

Como $q_3^* < q_2$ (límite inferior del último intervalo), calculamos :

$$q_2^* = \sqrt{\frac{2\,(50)\,15900}{[1+0{,}035\,(500)]\,365}} = 15{,}34 \text{ unidades}$$

Como $q_2^* < q_1$ (límite inferior del segundo intervalo), calculamos :

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2\,(50)\,15900}{[1+0{,}035\,(600)]\,365}} = 14{,}07 \text{ unidades}$$

Ahora debemos calcular las funciones de CT según (2) y compararlas :

$$CT_{q_2,\,p_3} = CT_{35,\,400} = 50\,\frac{15900}{35} + [1+0{,}035\,(400)]\,\frac{365\,(35)}{2} + $$
$$+(400)\,15900 = \$\,6.478.526{,}79$$

$$CT_{q_1,\,p_2} = CT_{25,\,500} = 50\,\frac{15900}{25} + [1+0{,}035\,(500)]\,\frac{365\,(25)}{2} + $$
$$+\ (500)\,15900 = \$\,8.066.206{,}25$$

$$CT_{q_1^*,\,p_1} = CT_{14{,}07;\,600} = 50\,\frac{15900}{14{,}07} + [1+0{,}035\,(600)]\,\frac{365\,(14{,}07)}{2} + $$
$$+(600)\,15900 = \$9.652.994{,}25$$

El menor CT corresponde al precio p_3 y la cantidad óptima a pedir será $q^* = q_2 = 35$ unidades.

El costo total variable asociado a esa política es $6.478.526,79

10. Primer modelo de universo aleatorio

Todos los modelos de inventario que tratamos hasta ahora requieren que la demanda se conozca con certeza. Sin embargo, en muchas situaciones nos enfrentamos a problemas en los cuales la demanda se describe mejor a través de una variable aleatoria.

En el modelo que analizaremos ahora, se considera un único periodo de análisis con una demanda probabilística. Esta situación se da generalmente cuando los productos son perecederos o de temporada. El

caso más típico es el del "vendedor de diarios", que debe decidir cada día cuántos periódicos comprar.

Según la naturaleza del artículo a considerar, la demanda puede calificarse de continua o discreta. Sin embargo el tratamiento conceptual es el mismo, por esta razón frecuentemente se resuelven en forma discreta problemas que tienen una demanda continua.

Supuestos del modelo

En este modelo suponemos que se debe hacer una compra, al inicio de un periodo predeterminado, para satisfacer una demanda aleatoria que se presentará durante dicho periodo. Es por eso que decimos que para este modelo: $T = t_1$

Supondremos además que la demanda acumulada al momento t es lineal.

Los costos a considerar en este modelo son:

C_e = costo por cada unidad de producto excedente al final del periodo.

C_f = costo por cada unidad de producto faltante al final del periodo.

El costo de pedido no se considera ya que se pide una única vez en el periodo.

El criterio de optimización que se utiliza es el de minimizar el valor esperado del costo total.

Gráfica del comportamiento del stock

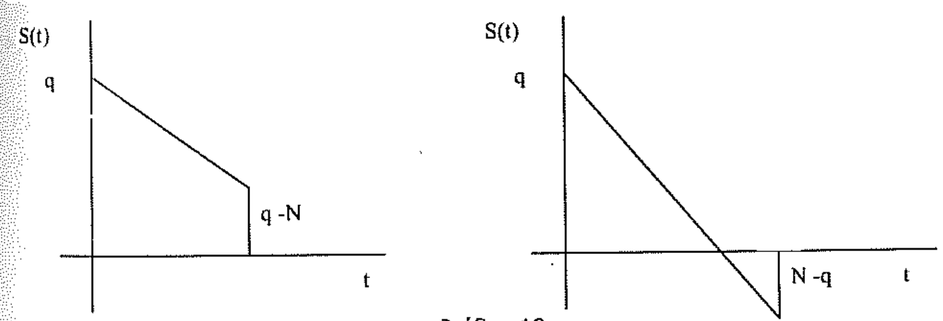


Gráfico 10

Desarrollo del modelo

Al final del período T, la función de costo total variable del modelo se calcularía como:

$$CT = \begin{cases} Ce\,(q-N), & \text{si } N < q \\ 0, & \text{si } N = q \\ Cf\,(N-q), & \text{si } N > q \end{cases} \qquad (1)$$

Al comienzo del período T, como N es una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad conocida (a la que llamaremos PN), para calcular el costo total variable del modelo, deberemos trabajar con la esperanza matemática:

$$\overline{CT}(q,N) = Ce\sum_{N=0}^{q}(q-N)\,PN + Cf\sum_{N=q+1}^{\infty}(N-q)\,PN \qquad (2)$$

A esta función de costo total variable esperado no podremos aplicar el cálculo diferencial para encontrar el valor de q que la minimice, ya que N es una variable aleatoria discreta. Sin embargo, por tratarse de una función de costos, sabemos que tendrá un mínimo. Para encontrar el mínimo planteamos:

$$\overline{CT}(q-1) > \overline{CT}(q) < \overline{CT}(q+1) \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \overline{CT}(q-1) - \overline{CT}(q) > 0 \\ \overline{CT}(q+1) - \overline{CT}(q) > 0 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

A partir de (2) buscaremos las funciones de costo total variable esperado para (q-1) y para (q+1). Aclaramos que lo realizaremos solamente para (q-1), dado que para (q+1) se procede de misma similar.

$$\overline{CT}(q-1,N) = Ce\sum_{N=0}^{q-1}(q-1-N)\,PN + Cf\sum_{N=q}^{\infty}(N-q+1)\,PN$$

$$\overline{CT}(q-1,N) = Ce\underbrace{\sum_{N=0}^{q-1}(q-N)\,PN}_{I} - Ce\underbrace{\sum_{N=0}^{q-1}PN}_{II} + Cf\underbrace{\sum_{N=q}^{\infty}(N-q)\,PN}_{III} + Cf\underbrace{\sum_{N=q}^{\infty}PN}_{IV} \qquad (4)$$

De acuerdo a lo expresado en (1), podemos enunciar a I y III de la forma:

$$I = \sum_{N=0}^{q-1}(q-N)\,PN = \sum_{N=0}^{q}(q-N)\,PN$$

$$III = \sum_{N=q}^{\infty}(N-q)\,PN = \sum_{N=q+1}^{\infty}(N-q)\,PN$$

A II y IV también lo podemos escribir como:

$$II = \sum_{N=0}^{q-1}PN = P(N \le q-1)$$

$$IV = \sum_{N=q}^{\infty}PN = 1 - P(N \le q-1)$$

Reemplazando en (4):

$$\overline{CT}(q-1,N) = Ce\sum_{N=0}^{q}(q-N)\,PN - Ce\;P(N \le q-1) + Cf\sum_{N=q+1}^{\infty}(N-q)\,PN + Cf\left[1-P(N \le q-1)\right]$$

$$\overline{CT}(q-1,N) = Ce\sum_{N=0}^{q}(q-N)\,PN + Cf\sum_{N=q+1}^{\infty}(N-q)\,PN - Ce\;P(N \le q-1) + Cf - Cf\,P(N \le q-1)$$

Reemplazando los dos primeros sumandos del lado derecho por su igual en (2):

$$\overline{CT}(q-1,N) = \overline{CT}(q,N) - Ce\;P(N \le q-1) + Cf - Cf\,P(N \le q-1)$$

Operando y de acuerdo a lo planteado en (3), podemos escribir:

$$\overline{CT}(q-1,N) - \overline{CT}(q,N) = Cf - (Ce+Cf)\;P(N \le q-1) > 0$$

De donde:

$$P(N \le q-1) < \frac{Cf}{Ce+Cf}$$

De la misma manera, si calculamos la función de costo total variable esperado para (q+1), obtendremos la relación:

$$P(N \le q) \ge \frac{Cf}{Ce+Cf}$$

Por lo que podemos afirmar que el valor de q que minimiza el costo total variable esperado del modelo, será aquel para el cual se verifique:

$$P(N \le q-1) < \frac{Cf}{Ce+Cf} \le P(N \le q)$$

En resumen, las características del modelo son:

Para determinar la cantidad óptima a pedir en cada periodo se deben estimar:

1.- La distribución de probabilidad de la demanda.

2.- C_e = costo por unidad excedente y C_f = costo por unidad faltante.

3.- Identificar la cantidad óptima de pedido (q*) de manera tal que:

☞ Si la demanda es una variable discreta:

$$P(N \le q-1) < \frac{Cf}{Ce+Cf} \le P(N \le q^*)$$

☞ Si la demanda es una variable continua:

$$P(N \le q^*) = \frac{Cf}{Ce+Cf}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Analicemos un ejemplo con demanda discreta.

Al inicio de cada día, un vendedor de periódicos debe decidir cuántos ejemplares de "La voz de Córdoba" comprar. Paga cada uno $1.- y lo vende a $1,50.- Por cada ejemplar que le sobra le reintegran $0,70.- De acuerdo a su experiencia cree que el número de periódicos que puede vender cada día, presenta la siguiente distribución:

Demanda	Probabilidad
50	0,25
55	0,20
60	0,25
65	0,10
70	0,20

¿Cuántos periódicos debe comprar cada día?

Definimos: q^* = número de periódicos a comprar

N = número de periódicos necesarios

1° Paso: Identificamos Ce, Cf y calculamos $\frac{Cf}{Ce+Cf}$

Si nos sobran periódicos recibimos un reintegro de 0,70 por cada uno, por lo tanto el costo es:

Ce = 1 - 0,70 = $0,30.-

Si nos faltan, "perdemos" la ganancia, entonces:

Cf = 1,50 - 1 = $0,50.-

$$\frac{Cf}{Ce+Cf} = \frac{0,50}{0,30+0,50} = 0,625$$

2° Paso: Determinamos la probabilidad acumulada de la demanda:

Demanda	Probabilidad Acumulada
50	0,25
55	0,45
60	0,70
65	0,80
70	1

→ 0,625

3° Paso: Identificamos q^* como aquel valor para el cual:

$$P(\text{demanda} \le q^*) \ge 0,625$$

Entonces q^* = 60 periódicos.

Si queremos calcular el costo esperado de tomar la decisión de comprar cada día 60 periódicos, lo hacemos utilizando la fórmula:

$$\overline{CT}(q,N) = Ce \sum_{N=0}^{q} (q-N)\,PN + Cf \sum_{N=q+1}^{\infty} (N-q)\,PN$$

N	PN	Ce (q-N)PN	Cf(N-q)PN
50	0,25	0,75	
55	0,20	0,30	
60	0,25		
65	0,10		0,25
70	0,20		1,00
TOTAL:		**1,05**	**1,25**

El costo total es de $ 2,30

Supongamos ahora que la demanda de periódicos, aunque es discreta, se puede aproximar con una distribución normal de media 62 periódicos y desviación estándar 8.

En forma análoga al caso discreto identificamos Ce, Cf y calculamos

$$\frac{Cf}{Ce+Cf}$$

Para este ejemplo $\frac{0,50}{0,30+0,50} = 0,625$

Sabemos que el número óptimo de periódicos a comprar será aquel que satisfaga:

$$P(N \le q^*) = \frac{Cf}{Ce+Cf}$$

☞ Si la demanda es una variable continua:

$$P(N \leq q^*) = \frac{Cf}{Ce+Cf}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Analicemos un ejemplo con demanda discreta.

Al inicio de cada día, un vendedor de periódicos debe decidir cuántos ejemplares de "La voz de Córdoba" comprar. Paga cada uno $1.- y lo vende a $1,50.- Por cada ejemplar que le sobra le reintegran $0,70.- De acuerdo a su experiencia cree que el número de periódicos que puede vender cada día, presenta la siguiente distribución:

Demanda	Probabilidad
50	0,25
55	0,20
60	0,25
65	0,10
70	0,20

¿Cuántos periódicos debe comprar cada día?

Definimos: q^* = número de periódicos a comprar

N = número de periódicos necesarios

1° Paso: Identificamos Ce, Cf y calculamos $\frac{Cf}{Ce+Cf}$

Sí nos sobran periódicos recibimos un reintegro de 0,70 por cada uno, por lo tanto el costo es:

Ce = 1 - 0,70 = $0,30.-

Si nos faltan, "perdemos" la ganancia, entonces:

Cf = 1,50 - 1 = $0,50.-

$$\frac{Cf}{Ce+Cf} = \frac{0,50}{0,30+0,50} = 0,625$$

2° Paso: Determinamos la probabilidad acumulada de la demanda:

Demanda	Probabilidad Acumulada
50	0,25
55	0,45
60	0,70
65	0,80
70	1

$\rightarrow$ 0,625

3° Paso: Identificamos q^* como aquel valor para el cual:

$$P(\text{demanda} \leq q^*) \geq 0,625$$

Entonces q^* = 60 periódicos.

Si queremos calcular el costo esperado de tomar la decisión de comprar cada día 60 periódicos, lo hacemos utilizando la fórmula:

$$\overline{CT}(q,N) = Ce \sum_{N=0}^{q} (q-N)\,PN + Cf \sum_{N=q+1}^{\infty} (N-q)\,PN$$

N	PN	Ce (q-N)PN	Cf(N-q)PN
50	0,25	0,75	
55	0,20	0,30	
60	0,25		
65	0,10		0,25
70	0,20		1,00
TOTAL:		**1,05**	**1,25**

El costo total es de $ 2,30

Supongamos ahora que la demanda de periódicos, aunque es discreta, se puede aproximar con una distribución normal de media 62 periódicos y desviación estándar 8.

En forma análoga al caso discreto identificamos Ce, Cf y calculamos

$$\frac{Cf}{Ce+Cf}$$

Para este ejemplo $\frac{0,50}{0,30+0,50} = 0,625$

Sabemos que el número óptimo de periódicos a comprar será aquel que satisfaga:

$$P(N \leq q^*) = \frac{Cf}{Ce+Cf}$$

$$P(N \le q^*) \;=\; 0{,}625$$

Como N se distribuye normal (62, 8), podemos expresar la ecuación anterior, teniendo en cuenta que

$$z = \frac{N-\mu}{\sigma}$$

$$P\left\{ z \le \frac{q^* - 62}{8} \right\} = 0{,}625$$

Con este valor de probabilidad entramos a la tabla normal estándar y buscamos el valor q* de la siguiente manera:

$$q^* = 62 + z_{0,625}.8 = 64{,}55$$

Como en realidad la demanda es discreta, entonces la cantidad de periódicos a comprar será de 65.

Si en lugar de aproximar la demanda con una distribución normal, lo pudiéramos hacer con una uniforme en el intervalo [60, 70], por ejemplo, entonces la determinación de q* la haremos de la siguiente manera:

$$P(N \le q^*) = \frac{q^* - 60}{70-60} = 0{,}625$$

$$q^* = 60 + 10(0{,}625) = 66{,}25$$

Es decir que bajo este supuesto la cantidad de periódicos a comprar al inicio de cada día es de 66.

11. SEGUNDO MODELO ALEATORIO

SUPUESTOS DEL MODELO

1. Demanda (N) es una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad (PN) conocida.
2. Costos relevantes: Cs – costo de mantener una unidad en el inventario por unidad de tiempo- y Cr – costo por unidad de ruptura y por unidad de tiempo
3. Periodo único de análisis $T = t_1$
4. El comportamiento de la demanda acumulada hasta el momento t (y en consecuencia del inventario) es lineal.

GRÁFICA DEL COMPORTAMIENTO DEL STOCK

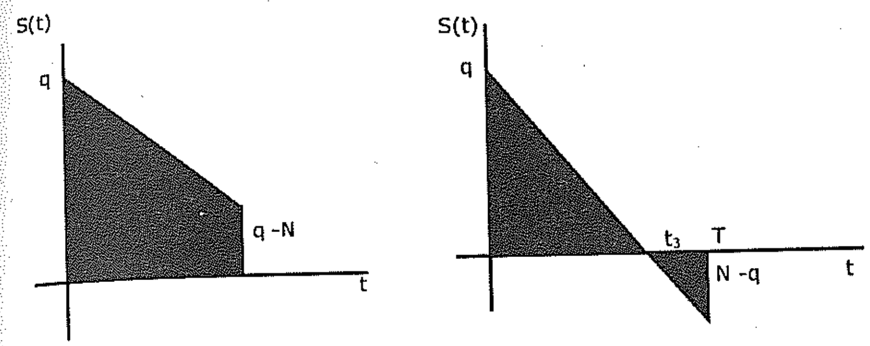


Gráfico 11

Donde:

S(t): mercadería almacenada en el momento t

q = S(0): volumen del pedido

t_2 = periodo de tiempo durante el cual existe inventario

t_3 = periodo de ruptura

La función de costo total variable al final del período (CT) será:

$$CT(q) = \begin{cases} C_S \dfrac{\left[q + (q-N)\right]}{2} T = C_S\left(q - \dfrac{N}{2}\right)T & ; \quad \text{si } N \le q \\[2ex] C_S \dfrac{q}{2} t_2 + C_r\left(\dfrac{N-q}{2}\right)t_3 & ; \quad \text{si } N > q \end{cases}$$

Recordando que

$$h = \frac{N}{T} = \frac{q}{t_2} = \frac{N-q}{t_3}$$

De donde:

$$t_2 = \frac{Tq}{N}; \qquad t_3 = \frac{T(N-q)}{N}$$

Al comienzo del período debemos trabajar con el valor esperado de CT como función de decisión:

$$\overline{CT}(q)=\sum_{N=0}^{q}Cs\left(q-\frac{N}{2}\right)T\,PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_S\frac{q}{2}t_2\,PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_r\left(\frac{N-q}{2}\right)t_3\,PN$$

Reemplazando a t_2 y t_3

$$\overline{CT}(q)=\sum_{N=0}^{q}Cs\left(q-\frac{N}{2}\right)T\,PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_S\frac{q}{2}\frac{Tq}{N}PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_r\frac{(N-q)}{2}\frac{T(N-q)}{N}PN$$

$$\overline{CT}(q)=\sum_{N=0}^{q}Cs\left(q-\frac{N}{2}\right)T\,PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_S\frac{q^2}{2}\frac{T}{N}PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_r\frac{(N-q)^2}{2N}T\,PN$$

$$\overline{CT}(q)=T\left[\sum_{N=0}^{q}Cs\left(q-\frac{N}{2}\right)PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_S\frac{q^2}{2N}PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_r\frac{(N-q)^2}{2N}PN\right] \qquad (1)$$

Considerando que la función de costo total posee un único mínimo relativo, que al mismo tiempo es un mínimo absoluto, encontrar el óptimo consistirá en determinar el valor de q tal que verifique:

$$\overline{CT}(q-1)>\overline{CT}(q)<\overline{CT}(q+1)\therefore\begin{cases}\overline{CT}(q-1)-\overline{CT}(q)>0\\ \overline{CT}(q+1)-\overline{CT}(q)>0\end{cases}$$

A partir de las relaciones anteriores y operando con el costo total esperado para (q-1) y (q+1), se obtiene la siguiente relación que permite calcular el volumen óptimo de pedido.

$$L(q-1)<\frac{C_r}{C_r+C_s}\le L(q)$$

siendo

$$L(q)=P(N\le q)+\left(q+\frac{1}{2}\right)\sum_{N=q+1}^{\infty}\frac{PN}{N}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

De una empresa se conocen los siguientes datos respecto a un determinado producto.

Costo de ruptura: \$20 por día; costo de almacenamiento por unidad: \$8 por día; período de análisis: 30 días. La demanda es aleatoria según la siguiente distribución:

Demanda	Probabilidad
0	0,15
1	0,11
2	0,23
3	0,26
4	0,17
5	0,08

$$\frac{C_r}{C_s+C_r}=\frac{20}{20+8}=0{,}7142$$

N=q	PN	$\sum_{N=0}^{q} PN$	$\frac{PN}{N}$	$\sum_{N=q+1}^{\infty}\frac{PN}{N}$	$(q+\frac{1}{2})\sum_{N=q+1}^{\infty}\frac{PN}{N}$	L(q)	
0	0,15	0,15	-	0,370	0,185	0,335	
1	0,11	0,26	0,110	0,260	0,390	0,650	→ 0,7142
2	0,23	0,49	0,115	0,145	0,363	0,853	
3	0,26	0,75	0,087	0,059	0,205	0,955	
4	0,17	0,92	0,043	0,016	0,072	0,992	
5	0,08	1,00	0,016	0	0	1,000	

El tamaño de lote óptimo es de 2 unidades.

Para el cálculo del costo total esta política, debemos aplicar la siguiente fórmula para lo cual armamos una tabla como se muestra en la página siguiente:

$$\overline{CT}(q)=T\left[\sum_{N=0}^{q}Cs\left(q-\frac{N}{2}\right)PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_S\frac{q^2}{2N}PN+\sum_{N=q+1}^{\infty}C_r\frac{(N-q)^2}{2N}PN\right]$$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
N	T	Cs	$q-\frac{N}{2}$	PN	Cs	$\frac{q^2}{2N}$	PN	Cr	$\frac{(N-q)^2}{2N}$	PN	CT
0	30	8	2	0,15							72,00
1	30	8	1,50	0,11							39,60
2	30										
3	30				8	0,67	0,26	20	2	0,26	275,60
4	30				8	0,50	0,17	20	8	0,17	836,40
5	30				8	0,40	0,08	20	23	0,08	1087,68

CT = (1) {[(2) (3) (4)] + [(5) (6) (7)] + [(8) (9) (10)]} = \$ 2.311,28

Es importante destacar que, al momento de calcular el lote óptimo, debe tenerse en cuenta que siempre la demanda (N) deberá variar en valores discretos consecutivos a partir del cero (porque el modelo teórico considera esta variación de N). Por lo tanto, cuando en el enunciado original del ejercicio, la variación sea en otra escala, deberá previamente hacerse un cambio de escala para trabajar con la fórmula tal como se ha visto.

12. CASO CON DEMANDA ALEATORIA Y NIVEL DE REORDEN

Una situación muy común en la realidad, es que se den todos los supuestos del modelo CEP pero que la demanda para el período total de análisis sea una variable aleatoria. En estos casos, es posible obtener una buena política de manejo de inventarios a través de un sistema de revisión periódica, fijando un nivel de reorden que nos permita tener una adecuada cobertura contra las rupturas.

Si suponemos que la demanda N es aleatoria con distribución normal, siendo τ determinista y manteniéndose el resto de los supuestos del modelo CEP, puede obtenerse una política de inventarios mediante el siguiente procedimiento[1]:

1) Trabajar con el modelo CEP utilizando la demanda media para el período ($\bar{N}$), para determinar el tamaño del lote óptimo, el número de pedidos y su periodicidad.
2) Como N es aleatoria, entonces la demanda en τ también lo será y podemos determinar un nivel de reorden de la manera analizada en el apartado 6.

Teniendo en cuenta que en el modelo CEP la función de costo total es relativamente insensible a cantidad cercanas al óptimo, es de esperar que el tamaño del lote determinado sea una buena aproximación de la cantidad óptima a ordenar.

13. JUSTO A TIEMPO (JIT)[2]

El enfoque JIT o *Just in Time*, supone una forma de gestión formada por un conjunto de técnicas y prácticas de organización de la producción, que pretende que el cliente sea servido cuando lo precise (justo a tiempo) y en la cantidad y calidad requeridas. Las dos estrategias básicas de este enfoque consisten en:

[1] El modelo matemático de esta situación excede los alcances de este texto.
[2] Extraído de DOMÍNGUEZ MACHUCA, J. Y LUNA HUERTAS, P.: "La Filosofía Just In Time. Objetivos e Instrumentos". Publicación: Alta Dirección, Nº 155, 1991.

1. La eliminación de todas las funciones innecesarias de las operaciones industriales
2. Producir los diferentes productos en el momento que se necesiten, en la cantidad que se precise y con la máxima calidad.

Mediante la aplicación de estas dos estrategias básicas, se pretende llegar a eliminar los costos originados por la utilización de los recursos productivos innecesarios, como por ejemplo: excedentes de mano de obra, de materiales y fundamentalmente de stocks innecesarios, lo cual perjudica enormemente a la empresa, ya que además de generar costos, pueden ocultar problemas de producción y calidad. El enfoque JIT se fundamenta en el principio de descubrir los problemas y enfrentarse a ellos, resolviendo las causas que los originan.

La filosofía JIT es aplicable en industrias que producen bienes con las siguientes características:

- ✓ Demanda estable (no para demanda a saltos irregulares)
- ✓ Gama de productos reducida
- ✓ Rutas de fabricación fijas
- ✓ Procesos de fabricación simples
- ✓ Estructura de productos simple

Tiene por objetivo llegar a producir a flujo continuo y a mínimo costo.

14. PLANIFICACIÓN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES (MRP)[3]

A diferencia de los métodos clásicos de gestión de inventario que se aplican a bienes con demanda independiente, no relacionada con otros artículos de nivel superior en la producción y sujeta a condiciones de mercado, M.R.P. es utilizado para programar la producción de bienes con demanda dependiente, frecuentemente discontinua y a saltos irregulares (con lo cual las técnicas clásicas que trabajan con valores medios, resultan ineficaces), estos bienes generalmente están relacionados con otros ítems de un grado de complejidad superior, es decir, no están sujetos a condiciones de mercado.

Es aplicable en contextos de producción en que el producto final esta compuesto por una cantidad grande de componentes y éstos a su vez por subcomponentes, donde las interrelaciones entre ellos son de enorme complejidad. En estos casos no es necesario prever la demanda, sino que esta puede ser calculada casi con certeza a través del *programa maestro de producción*, en el que se indica la cantidad a producir de cada producto y las fechas en que deben estar disponibles.

Además, mediante la *lista de materiales* se pueden conocer cuáles y cuántos son los componentes que integran el producto final, es decir la

[3] Extraído de DOMÍNGUEZ MACHUCA: "M.R.P. Planificación de las Necesidades de Materiales". Publicación: Alta Dirección, Nº 118, 1984.

estructura del mismo, de forma tal que cuando se necesita de un conjunto de componentes, no puede hacerse de forma aislada el control de cada uno de ellos, sino de manera coordinada con el resto de la producción.

En este contexto, la demanda de los distintos componentes es irregular, discontinua, pero conocida con certeza, tanto en cantidad como en tiempo. El objetivo es disponer del stock necesario, en el momento en que va a ser utilizado. Por eso que en M.R.P. se pone énfasis en el *cuándo pedir*, más que en el cuánto pedir. Sus ventajas toman gran significación cuando la cantidad de ítems y componentes que integran el producto final son grandes.

Se dice que M.R.P. más que una técnica de programación es un método de gestión de inventarios.

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

a) Cuáles son los supuestos básicos que diferencian a los distintos modelos con demanda determinista:
   I. Modelo sin ruptura vs Modelo con ruptura
   II. Modelo sin ruptura vs Reabastecimiento uniforme
   III. Modelo sin ruptura vs Modelo con función de costo total discontinua

b) Cuáles son los costos relevantes en el modelo con demanda determinista con ruptura y cómo se expresan.

c) ¿Por qué no se incluye el costo de hacer pedidos en los modelos aleatorios?

d) Indique cuales son los supuestos comunes a ambos modelos y cuales los que los diferencian

RESPONDA SI LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON VERDADERAS O FALSAS

A. En el modelo con demanda determinista y sin ruptura, el costo total de pedir es directamente proporcional al tamaño del pedido.

B. El stock de seguridad es igual a la diferencia entre el nivel de reorden y la demanda verdadera en el periodo de retardo del pedido.

ACTIVIDAD 2

Para el siguiente conjunto de ítems de un inventario, realice una clasificación ABC.

Artículo	***Consumo anual (unidades)***	***Costo unitario ($)***
1	5000	1,5
2	1500	8
3	10000	10,5
4	6000	2
5	3500	0,5
6	6000	13,6
7	5000	0,75

costo (de producción o compra). El costo de pedido por la adquisición externa de las unidades es de $100 por pedido. El costo de preparación de la producción asociado con la fabricación de los detectores es de $150. *SEGURIDAD* S.A. tiene capacidad de producción suficiente para fabricar 5.000 detectores por mes, a tasa constante.
Teniendo en cuenta que los detectores que le demandan, en parte la produce y en parte la compra:

a) Calcule la cantidad óptima de pedido que debe adquirirse al proveedor externo.
b) Determine el tamaño óptimo del lote de producción interno.
c) Determine el número óptimo de pedidos por mes.
d) Determine el número óptimo de corridas de producción por mes.
e) ¿Cuál es el costo total anual de esta política combinada de inventario?

ACTIVIDAD 8

La imprenta de la Facultad, trata de determinar cómo minimizar los costos anuales relacionados con la compra del papel para imprimir los exámenes y parciales. Cada vez que se hace un pedido, se incurre en un costo de $20.- El precio por caja de papel depende del número de cajas pedidas (ver tabla). El costo anual de almacenamiento es del 20% del valor del inventario. Cada mes, la Facultad utiliza 80 cajas de papel. Considere el año de 250 días hábiles.

NÚMERO DE CAJAS PEDIDAS	PRECIO POR CAJA (en pesos)
$q < 300$	10
$300 \leq q < 500$	9,80
$q \geq 500$	9,70

a) Determine la cantidad óptima por pedido y el número de pedidos que se hacen cada año.
b) Si la imprenta decide realizar los pedidos cada 90 días, ¿cuál será el tamaño del lote óptimo de compra y a cuánto ascenderá el costo total de esta política?

ACTIVIDAD 9

Considere el modelo de inventario con demanda cierta, sin ruptura, con puntos de discontinuidad (variaciones por saltos) en la función de costo total variable (CT), originados en la existencia de tres precios diferentes del producto, p_1, p_2 y p_3, tales que $p_3 < p_2 < p_1$, donde los precios p_2 y p_3 son válidos a partir de determinadas cantidades de q_1 y q_2, respectivamente. Es decir:

- Si el pedido es entre q_1 y q_2 unidades, el precio unitario es p_2
- Si el pedido es entre q_2 y q_3 unidades, el precio unitario es p_3

Indicando como q_1^*, q_2^*, q_3^* las cantidades óptimas correspondientes a los precios dados. Se solicita:

a) Graficar, en forma completa, el problema anterior, considerando a q_1 y q_2 menores que la cantidad óptima correspondiente a la función de costo total correspondiente al mayor precio. Indique para cada curva y cantidad óptima respectiva, a qué precio se refieren.
b) Para el gráfico que realizó en el punto a), señale cuál es la cantidad óptima de pedido y porqué.

ACTIVIDAD 10

La florería "*CLAVELES* S.A." debe decidir cuántas orquídeas ordenar para el día de la secretaria. La demanda de este tipo de flores en los días especiales, como el de la secretaria o el de la madre, es una variable aleatoria (D). Si la demanda excede el número de flores disponibles, el faltante se satisface colocando una orden urgente. En este caso, el costo de cada flor será $5 más caro que el costo normal. Si la demanda es menor que el inventario que se tiene, las flores que sobran se pueden vender con posterioridad. El precio de venta de las flores que sobren, será $3 menos que su costo original, ya que no se encontrarán igualmente frescas.

a) Suponiendo que D sigue la distribución mostrada en la tabla: ¿Qué cantidad de orquídeas debe ordenar para minimizar el costo esperado? ¿Cuál será el costo esperado?

Demanda	10	15	20	25	30
Probabilidad	0,10	0,25	0,30	0,20	0,15

b) Suponiendo que D se puede aproximar con una distribución uniforme en el intervalo [15, 50]: ¿Qué cantidad de orquídeas debe ordenar para minimizar el costo esperado?

c) Suponiendo que D se puede aproximar con una distribución normal con media 30 y desviación estándar 5: ¿Qué cantidad de orquídeas debe ordenar para minimizar el costo esperado?