CAPÍTULO 11

MODELOS DE SIMULACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora nos hemos ocupado de la formulación de modelos que se resolvieron en forma analítica, y en casi todos ellos nuestra finalidad fue encontrar soluciones óptimas.

Para utilizar estos modelos matemáticos tuvimos que incluir, en cada caso, supuestos o hipótesis simplificadoras. Por ejemplo en algunos modelos de stock supusimos que el costo de almacenamiento era proporcional a las unidades almacenadas.

Sin embargo, y por diversas razones, no todos los problemas de la vida real pueden ser representados a través de un modelo analítico. En estos casos, un decisor racional deberá hacer uso de otro tipo de modelos, llamados *modelos de simulación*, que le permiten representar y estudiar a estos problemas.

2. CONCEPTO DE SIMULACIÓN

Si buscamos en el diccionario la palabra simular, nos encontraremos que: "*simular es representar una cosa, fingiendo o imitando lo que no es*".

Justamente, la *simulación* es un método que le permite al decisor estudiar el comportamiento de un sistema real experimentando con un modelo que lo representa, llamado *modelo de simulación*. Este modelo está formado por las expresiones matemáticas y las relaciones lógicas entre los componentes fundamentales del sistema y que permiten calcular el valor de las salidas de interés dadas las entradas controlables del sistema.

El objetivo del proceso de simulación es la ejecución del modelo a través del tiempo, en general en una computadora, para generar mediciones de determinados valores de eficiencia del sistema.

A diferencia de los modelos de optimización, en los cuales las entradas son parámetros y las salidas son decisiones óptimas, en los modelos de simulación las entradas son decisiones o parámetros y las salidas son medidas de eficiencia del sistema.

En el siguiente esquema podemos observar la diferencia entre ambos tipos de modelos.

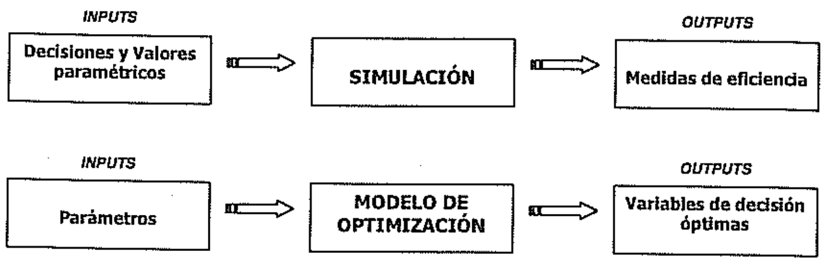

Gráfico 1

La simulación *no es una técnica de optimización,* se utiliza generalmente para responder preguntas del tipo "¿qué sucede si...?".

Es especialmente útil cuando se trata de modelos muy complicados, que no pueden ser resueltos aplicando métodos analíticos, debido a su complejidad o a la aparición de variables cualitativas y relaciones y funciones no expresadas analíticamente.

En muchas situaciones nos encontramos también con la presencia de variables aleatorias. En estos casos debemos previamente solucionar el problema de cómo asignar valores a dichas variables aleatorias. Para ello, se utilizan procedimientos aleatorios para generar muestras artificiales de variables aleatorias con distribución conocida.

3. VENTAJAS DE LA SIMULACIÓN

Los modelos de simulación de un sistema mejoran el proceso decisorio, debido a que permiten:

- ✓ Analizar los efectos que se producen en el comportamiento de un sistema ante cambios internos o externos.
- ✓ Entender el comportamiento de un sistema y por consiguiente sugerir estrategias que mejoren su operación y eficiencia.
- ✓ Comprender mejor la operación de sistemas complejos, detectar las variables más importantes y entender la relación entre ellas.
- ✓ Experimentar con nuevas situaciones sobre las cuales se tiene poca información. A través de esta experimentación se pueden anticipar resultados no previstos.
- ✓ Anticipar problemas que puedan surgir en el comportamiento del sistema, cuando se introducen nuevos elementos.

4. ETAPAS PARA REALIZAR UN ESTUDIO DE SIMULACIÓN

- ➢ *Definición del sistema:* realizar un análisis preliminar del mismo para identificar relaciones con otros sistemas, variables y sus relaciones, medidas de efectividad y resultados que se esperan obtener del estudio.
- ➢ *Formulación del modelo:* definir y construir el modelo con el cual se obtendrán los resultados deseados. Es necesario definir todas las variables y sus relaciones lógicas.
- ➢ *Recolección de datos:* definir con claridad y exactitud los datos que el modelo va a requerir para producir los resultados deseados.
- ➢ *Implementación del modelo en la computadora.*
- ➢ *Validación:* detallar deficiencias en la formulación del modelo o en los datos que lo alimentan. Se deberá considerar aspectos tales como:
    - Opinión de expertos sobre los resultados
    - Exactitud con que se predicen datos históricos
    - Comprobación de fallas del modelo al utilizar datos que hacen fallar al sistema real
- ➢ *Experimentación*
- ➢ *Interpretación*

5. EJEMPLO: ANÁLISIS DE RIESGO

El análisis de riesgo es un procedimiento muy utilizado para predecir resultados en casos de incertidumbre.

Supongamos que nos interesa analizar la utilidad que proporcionará un nuevo producto, durante el primer año luego de su entrada al mercado. Los costos de desarrollo y publicidad son de $325.000 y $150.000 respectivamente. El precio de venta está fijado en $150 por unidad. El costo de la mano de obra directa y de los materiales no se conocen con certeza, las mejores estimaciones para ellos son:

Costo promedio de la mano de obra directa $30/unidad.
Costo promedio de los materiales $70/unidad.
La demanda para el primer año se ha estimado en 20.000 unidades.

Con estos datos podemos realizar un análisis del tipo: "que pasa si".

Este tipo de análisis implica generar valores para las entradas probabilísticas y calcular el valor resultante para la salida.

El modelo que representa la utilidad para el primer año es:

$$\text{Utilidad} = (150 - c_1 - c_2)\ x - 475.000$$

Donde:

c_1 = costo de la mano de obra directa por unidad
c_2 = costo de los materiales por unidad
x = demanda para el primer año

Con estos datos podemos plantear un escenario base:

Utilidad = (150 – 30 – 70) 20.000 – 475.000

Utilidad del primer año = $525.000

Con un poco más de información, se ha estimado que:

El costo de la mano de obra directa es aleatorio y varía desde un mínimo de $23 a un máximo de $40 por unidad y que el costo de los materiales, el que también es aleatorio, puede variar de $60 a $90 por unidad. Se estima también que la demanda del primer año puede ser de 5.000 a 30.000 unidades.

Con estos datos podemos plantear un escenario del peor caso, utilizando las estimaciones de costos más alta y la demanda más baja.

La utilidad del primer año en este caso será:

Utilidad del primer año = (150 – 35 – 90) 5.000 – 475.000
Utilidad del primer año = - $ 350.000

También podemos sugerir un escenario del mejor caso con los costos más bajos y la demanda más alta:

Utilidad del primer año = (150 – 25 – 60) 30.000 – 475.000
Utilidad del primer año = $ 1.475.000

De esta manera y con la información anterior, hemos podido presentar tres escenarios. La simulación nos permite representar muchos escenarios generando valores en forma aleatoria para las entradas probabilísticas. Luego, es posible realizar un análisis estadístico de los datos obtenidos.

Para la generación de las observaciones de cada variable aleatoria, es necesario conocer cuál es la distribución de probabilidad de cada una de ellas.

6. GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS NO-UNIFORMES

En los modelo de simulación, es usual que una o varias de las variables que interactúan sean aleatorias. Generalmente, estas variables siguen distribuciones de probabilidad teórica o empíricas. Para simular valores

de estas variables aleatorias, vamos a necesitar un generador de números aleatorios uniformes y una función que a través de un método específico, transforme estos números en valores de la distribución de probabilidad deseada. Por supuesto que para generar estos valores es necesario que conozcamos cual es la distribución de probabilidad de cada entrada aleatoria. Existen varios procedimientos para lograr este objetivo. Entre los procedimientos más comunes se encuentra el método de transformación inversa.

MÉTODO DE TRANSFORMACIÓN INVERSA

En este procedimiento se necesita una función de distribución acumulada y consiste en los pasos siguientes:

1. Se genera un número aleatorio (o Random, en nuestra notación: Rn), con la computadora, empleando las sentencias o funciones que tienen todos los sistemas o se extrae de una tabla de números aleatorios. Estos números Rn tienen distribución uniforme entre 0 y 1, es decir en un rango equivalente al de la probabilidad.

2. Se adopta el Rn como una probabilidad acumulada, es decir: F(x) = Rn.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = Rn$$

3. Finalmente se despeja de la función F(x) el valor de x correspondiente, siendo este el dato generado.

El método se puede representar gráficamente, para una variable aleatoria continua, del siguiente modo:

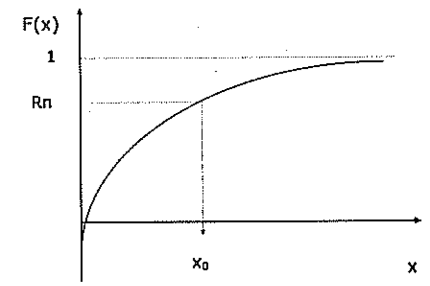

Gráfico 2

Para una variable aleatoria discreta:

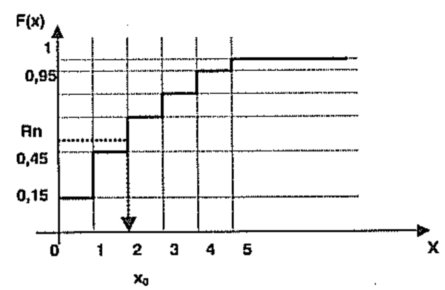

Gráfico 3

Para nuestro ejemplo supongamos que:

Costo de la mano de obra directa sigue la siguiente distribución:

Costo/unid	Probabilidad
25	0,02
26	0,03
27	0,05
28	0,10
29	0,15
30	0,17
31	0,20
32	0,12
33	0,08
34	0,05
35	0,03

Tabla 1

Costo de los materiales puede aproximarse con una distribución uniforme en el intervalo [60,90]

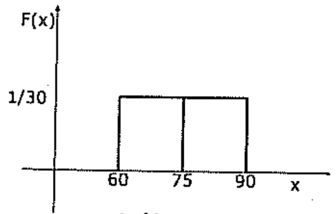

Gráfico 4

Demanda del primer año puede aproximarse con una distribución normal con media de 20.000 unidades y una desviación estándar de 5.000 unidades

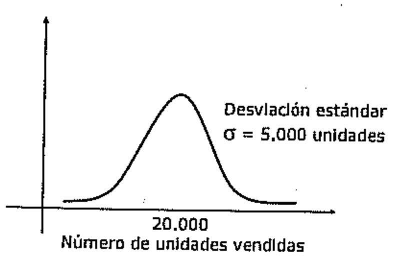

Gráfico 5

Para simular nuestro problema debemos generar valores para las tres entradas probabilísticas, que sean representativos de los que pudiéramos observar en la realidad, y calcular la utilidad resultante. Luego, generamos otro conjunto de valores para las entradas probabilísticas y calculamos un segundo valor para la utilidad, etc.

El cálculo de la utilidad, completa un ensayo de la simulación.

Continuamos con este proceso hasta estar seguros de tener suficientes ensayos para describir la distribución de probabilidad para la utilidad.

Debido a que la simulación implica generar muestras aleatorias, los resultados de la simulación están sujetos a errores muestrales igual que para cualquier experimento muestral. Podemos minimizar el error muestral realizando un número grande de ensayos, sin embargo para algunos modelos de simulación complejos es deseable determinar el tamaño muestral para evitar costos innecesarios en tiempo computacional.

Nuestro modelo es:

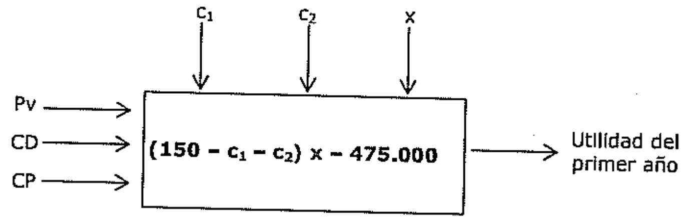

Gráfico 6

Parámetros del modelo:
Precio de venta (Pv) = \$150
Costos de desarrollo (CD) = \$325.000
Costos de publicidad (CP) = \$ 150.000

Entradas probabilísticas:
c1 = costo de la mano de obra directa por unidad
c2 = costo de los materiales por unidad
x = demanda para el primer año

El proceso de generación de las entradas probabilísticas y de calcular el valor del resultado, se conoce como simulación. La secuencia de las operaciones lógicas y matemáticas requeridas para describir esta simulación se representan en el correspondiente diagrama de flujos del modelo.

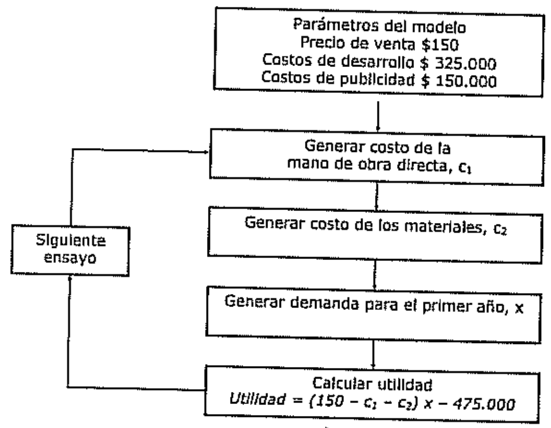

Gráfico 7

Para ejecutar nuestro modelo colocamos los datos en una planilla, luego podemos usar Excel por ejemplo. En cada fila de la planilla resumimos un ensayo, entonces ésta podría tener la siguiente estructura:

Ensayo	Rn	Costo de MO directa	Rn	Costo de Materiales	Rn	Demanda del primer año	Utilidad del primer año

Tabla 2

Primer ensayo:
- Generar el costo de la Mano de Obra directa (MO directa) utilizando el método de la transformación inversa:

1.- Generar un nº aleatorio

2.- Ubicar el primer valor de probabilidad acumulada que lo supera, éste es el costo simulado

Costo/unid	Probabilidad	Probabilidad Acumulada
25	0,02	0,02
26	0,03	0,05
27	0,05	0,10
28	0,10	0,20
29	0,15	0,35
30	0,17	0,52
31	0,20	0,72
32	0,12	0.84
33	0,08	0,92
34	0,05	0,97
35	0,03	1

Tabla 3

Supongamos que generamos nº Rn 0,58
Entonces el *costo simulado será de $31*

- Generar costo de los materiales usando el método de la transformación inversa para la distribución uniforme:

1.- Generar un nº aleatorio

2.- $Rn = F(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-60}{90-60}$

3.- Despejar el valor de x, siendo éste el costo de los materiales.

Si el número aleatorio generado es 0,75
X = a + Rn (b-a) = 60 + Rn(90 – 60) = 60 + 0,75 (30)
Entonces el *costo simulado será de $82,5*

- Generar la demanda para el primer año, de igual manera pero con distribución normal:

1.- Generar un nº aleatorio

2.- Usar este valor Rn para encontrar un valor x para el que:

$F(x) = P(D \leq x) = Rn$

3.- Es decir, encontrar el valor de x para el que el área bajo la curva normal a la izquierda, es Rn. Para hacer esto usar la tabla normal estándar y luego calcular x de la siguiente manera:

$$x = \mu + (\sigma * z)$$

Supongamos que generamos nº Rn 0,1515

$z_{0,1515}$ es aproximadamente -1,03

La demanda simulada será:

$$-1{,}03 = \frac{x - 20.000}{5000}$$

X = 20.000+ [5.000 *(-1,03)] = 14.850 unidades

- Cálculo de la utilidad para un ensayo:

Utilidad = (150 – 31 – 82,5) 14850 – 475.000

Utilidad simulada = $67.025

Resumimos el primer ensayo en la planilla y realizamos otro:

Ensayo	Rn	Costo de MO directa	Rn	Costo de Materiales	Rn	Demanda del primer año	Utilidad del primer año
1	0,58	31	0,75	82,50	0,1515	14.850	67.025
2	0,25	29	0,56	76,80	0,8550	25.300	643.260

Tabla 4

Se repiten los ensayos un número grande de veces, para luego llevar a cabo un análisis estadístico de los resultados obtenidos por simulación.

A continuación se muestra una planilla, creada con Excel para 20 ensayos. En ella se generaron los números aleatorios con las distintas distribuciones utilizando las funciones que ya tiene incluidas Excel. Para acceder a ellas se debe ir al menú Herramientas/análisis de datos/generación de números aleatorios, allí se pueden generar números con distintas distribuciones como por ejemplo discreta, uniforme, normal, etc.

Costo de la Mano de Obra Directa	Costo de Materiales	Demanda del primer año	Utilidad del primer año
27	84.77858821	15170	104823.2894
30	64.99893185	12336	203474.7739
31	63.3005768	23115	812467.9161
26	60.29297769	34333	1712224.217
26	82.24524674	24715	556955.5368
34	86.75160985	21430	151795.6177
27	89.71068453	20136	195300.7182
35	83.71196631	17816	82439.76323
25	71.1487167	31326	1211951.732
34	71.29703665	15267	207497.4627
29	76.11194189	14325	168043.5185
30	82.96304209	17671	179469.1384
31	82.30201117	17508	167503.4396
30	88.2842494	26351	360754.051
33	62.30994598	16041	402284.6007
30	77.40012818	17086	252857.1242
34	76.35364849	23369	451494.2931
29	64.64461196	22737	806369.0735
30	75.8619953	14246	153795.6312
30	64.29212317	17622	506683.6304
		Utilidad Promedio	**434409.2764**

Tabla 5

El número de ensayos debería ser muy superior para que la información sea de utilidad, sin embargo y a título de ejemplo insertamos el análisis estadístico descriptivo que provee Excel. En la práctica se realizan las simulaciones para un gran número de ensayos, para obtener una mejor imagen de la distribución de los resultados.

Utilidad del primer año	
Media	434409.2764
Error típico	93736.99978
Mediana	230177.2935
Desviación estándar	419204.607
Varianza de la muestra	1.75733E+11
Curtosis	3.795025845
Coeficiente de asimetría	1.938197907
Rango	1629784.454
Mínimo	82439.76323
Máximo	1712224.217
Suma	8688185.528
Cuenta	20
Nivel de confianza (95.0%)	196193.8563

Tabla 6

Distribución de Frecuencias

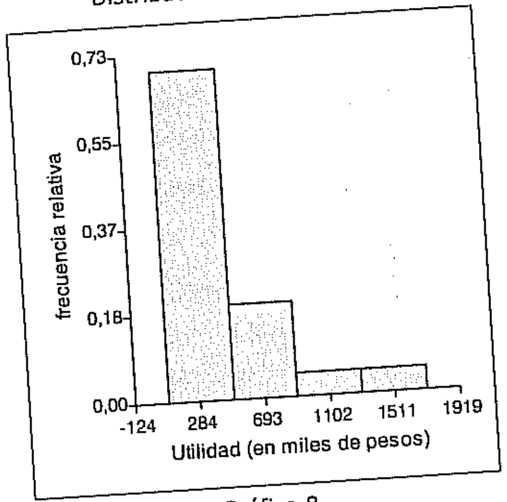

Gráfico 8

Clase	*Frecuencia*	*% acumulado*
250000	10	50,00%
500000	4	70,00%
750000	2	80,00%
1000000	2	90,00%
1250000	1	95,00%
y mayor...	1	100,00%

Tabla 7

EJEMPLO DE GENERACIÓN DE UNA VARIABLE CON DISTRIBUCIÓN POISSON

Suponga que la variable aleatoria x: *número de clientes que llegan a una cabina telefónica*, tiene distribución Poisson con media (μ) igual a 2 llegadas por minuto.

Como Poisson es una distribución discreta, se obtienen las probabilidades para $\mu=2$ de la tabla estadística y luego se calcula la función de probabilidad acumulada.

Llegadas	Probabilidad	Probabilidad Acumulada
0	0.135	0.135
1	0.271	0.406
2	0.271	0.677
3	0.180	0.857
4	0.090	0.947
5	0.036	0.983
6	0.012	0.995
7	0.003	0.998
8	0.002	1

Tabla 8

Por ejemplo, si el número aleatorio generado es Rn = 0.843, entonces se producen tres llegadas, o sea x = 3.

Costo de la Mano de Obra Directa	Costo de Materiales	Demanda del primer año	Utilidad del primer año
27	84.77858821	15170	104823.2894
30	64.99893185	12336	203474.7739
31	63.3005768	23115	812467.9161
26	60.29297769	34333	1712224.217
26	82.24524674	24715	556955.5368
34	86.75160985	21430	151795.6177
27	89.71068453	20136	195300.7182
35	83.71196631	17816	82439.76323
25	71.1487167	31326	1211951.732
34	71.29703665	15267	207497.4627
29	76.11194189	14325	168043.5185
30	82.96304209	17671	179469.1384
31	82.30201117	17508	167503.4396
30	88.2842494	26351	360754.051
33	62.30994598	16041	402284.6007
30	77.40012818	17086	252857.1242
34	76.35364849	23369	451494.2931
29	64.64461196	22737	806369.0735
30	75.8619953	14246	153795.6312
30	64.29212317	17622	506683.6304
		Utilidad Promedio	**434409.2764**

Tabla 5

El número de ensayos debería ser muy superior para que la información sea de utilidad, sin embargo y a título de ejemplo insertamos el análisis estadístico descriptivo que provee Excel. En la práctica se realizan las simulaciones para un gran número de ensayos, para obtener una mejor imagen de la distribución de los resultados.

Utilidad del primer año	
Media	434409.2764
Error típico	93736.99978
Mediana	230177.2935
Desviación estándar	419204.607
Varianza de la muestra	1.75733E+11
Curtosis	3.795025845
Coeficiente de asimetría	1.938197907
Rango	1629784.454
Mínimo	82439.76323
Máximo	1712224.217
Suma	8688185.528
Cuenta	20
Nivel de confianza (95.0%)	196193.8563

Tabla 6

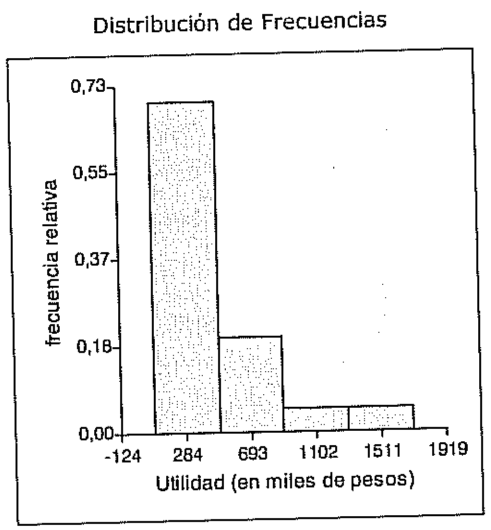

Gráfico 8

Clase	*Frecuencia*	*% acumulado*
250000	10	50,00%
500000	4	70,00%
750000	2	80,00%
1000000	2	90,00%
1250000	1	95,00%
y mayor...	1	100,00%

Tabla 7

EJEMPLO DE GENERACIÓN DE UNA VARIABLE CON DISTRIBUCIÓN POISSON

Suponga que la variable aleatoria x: *número de clientes que llegan a una cabina telefónica,* tiene distribución Poisson con media (μ) igual a 2 llegadas por minuto.

Como Poisson es una distribución discreta, se obtienen las probabilidades para μ=2 de la tabla estadística y luego se calcula la función de probabilidad acumulada.

Llegadas	Probabilidad	Probabilidad Acumulada
0	0.135	0.135
1	0.271	0.406
2	0.271	0.677
3	0.180	0.857
4	0.090	0.947
5	0.036	0.983
6	0.012	0.995
7	0.003	0.998
8	0.002	1

Tabla 8

Por ejemplo, si el número aleatorio generado es Rn = 0.843, entonces se producen tres llegadas, o sea x = 3.

EJEMPLO DE GENERACIÓN DE UNA VARIABLE CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Suponga que la variable aleatoria x: *tiempo entre las llegadas de dos clientes a un teléfono público* tiene distribución exponencial con media ($1/\mu$) igual a 2 minutos. Asumiendo que acaba de llegar un cliente, se desea generar el tiempo que pasará hasta la llegada del siguiente.

La distribución acumulada de la Exponencial es:

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

Donde μ, parámetro de la distribución, representa al número de personas que utilizan el teléfono por minuto.

Entonces: $1/\mu$ = tiempo promedio que cada persona utiliza el teléfono público.

Para este ejemplo: $1/\mu = 2$ minutos y $\mu = 0,5$ personas por minuto.

Si de la función acumulada de probabilidades se explicita x se obtiene:

$$e^{-\mu x} = 1 - F(x)$$

aplicamos ln en ambos miembros,

$$-\mu x \ln e = \ln[1 - F(x)]$$

$$-\mu x = \ln[1 - F(x)]$$

$$x = -\frac{1}{\mu}\ln[1 - F(x)]$$

Como F(x) = Rn

$$x = -\frac{1}{\mu}\ln[1 - Rn]$$

Si al generar el Random se obtiene: Rn = 0.845 entonces el siguiente cliente llegará después de:

$$x = -2 \ \ln[1 - 0.845] = 3.73 \text{ minutos}$$

Observación: como (1 - Rn) también es un número aleatorio, entonces puede generarse el tiempo de la siguiente manera.

$$x = -2 \ln Rn$$

EJEMPLO CON DISTRIBUCIÓN NORMAL

Otra forma de generar una muestra artificial de una variable aleatoria con distribución normal, además de la mostrada con el ejemplo de análisis de riesgo, es trabajando con k variables aleatorias independientes con distribución uniforme [0,1). Estas variables tendrán media igual a 1/2 y varianza igual a 1/12, recordemos que en la

distribución Uniforme la media es igual a (b +a) / 2 y la varianza es $(b-a)^2 / 12$.

El método propone definir una variable *n* que resulta de sumar las k variables uniformes. Por aplicación del Teorema Central del Límite, esta nueva variable *n* tendrá distribución aproximadamente normal con media igual a k/2 (suma de las k medias) y varianza k/12 (suma de las k varianzas).

Es decir:

$$n \quad N\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{12}\right)$$

Por lo tanto la variable:

$$Z = \frac{n - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}$$

Tendrá una distribución normal (0,1), de donde si deseamos valores de una variable normal x, con media μ y desviación típica σ, calculamos:

$$x = \mu + \sigma \ \frac{n - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}$$

Cuanto mayor sea el valor de k, mayor será la aproximación de la distribución de x a la deseada. Desde el punto de vista práctico trabajando con k =12 se obtienen buenas aproximaciones, quedando la relación anterior igual a:

$$x = \mu + \sigma \ (n - 6)$$

Supongamos que la demanda de un determinado producto se distribuye normal con media igual a 750 unidades y desvío igual a 100 unidades. Para aplicar este método, calculamos:

1) Doce números aleatorios uniformes [0,1):

0,5743	0,8893
0,6444	0,0329
0,6734	0,0908
0,6771	0,1679
0,7211	0,5122
0,1362	0,4157

Tabla 9

2) Se obtiene la variable aleatoria n, que se distribuye normal (6,1), como la suma de estos 12 números aleatorios.

$$n = 5.5350$$

3) Se obtiene el valor de la variable aleatoria x con distribución normal (750,100) :

$$x = 750 + 100\ (5.5350 - 6) = 703.50$$

7. ALGUNOS EJEMPLOS DE APLICACIÓN

EL PROBLEMA DEL DIARIERO

El dueño de un kiosco ubicado en un centro comercial desea elegir la política adecuada de compras del periódico de mayor demanda. Para ello analiza dos políticas posibles:

a) Comprar cada día una cantidad igual a la demanda del día anterior.
b) Comprar diariamente una cantidad fija de 53 unidades.

Se ha analizado durante 300 días la demanda del periódico obteniendo los siguientes datos:

Demanda por día	Frecuencia
50	15
51	30
52	45
53	90
54	75
55	45

Tabla 10

Cada periódico le cuesta \$ 1,20. Los que no se venden en el día se devuelven obteniendo un reembolso del 50%. Por otra parte, si le solicitan un periódico y no está disponible, calcula un costo de utilidad perdida de \$ 0,80.

Para analizar por simulación este problema se sugiere simular cada política 200 días con el objeto de determinar el costo promedio diario proveniente de la comercialización de periódicos. Suponga que la venta anterior al primer día fue de 50 periódicos y que se perdieron de vender 3 unidades.

Definición de variables y parámetros del modelo

i = día simulado

q_i = cantidad de periódicos ordenados el día i

N_i = variable aleatoria cantidad de periódicos demandados el día i

CTD_i = costo total del día i

CTP = costo total promedio Planteamiento del modelo

Política a)

$q_i = N_{i-1}$

$N_0 = 53$

$$CTD = \begin{cases} 0,80\,(N_i - q_i), & \text{si } N_i > q_i \\ 0,60\,(q_i - N_i), & \text{si } q_i > N_i \end{cases}$$

$$CTP = \frac{\sum_{i=1}^{n} CTD_i}{n}, \text{ siendo n el número de días simulados}$$

Política b)

$q_i = 53$

$N_0 = 53$

$$CTD = \begin{cases} 0,80\,(N_i - q_i), & \text{si } N_i > q_i \\ 0,60\,(q_i - N_i), & \text{si } q_i > N_i \end{cases}$$

$$CTP = \frac{\sum_{i=1}^{n} CTD_i}{n}, \text{ siendo n el número de días simulados}$$

Para generar la demanda aleatoria tenemos en cuenta la función de probabilidad acumulada:

Demanda por día	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Acumulada
50	15	0.05	0.05
51	30	0.10	0.15
52	45	0.15	0.30
53	90	0.30	0.60
54	75	0.25	0.85
55	45	0.15	1

Tabla 11

En la figura siguiente se observa el diagrama de flujo para este problema:

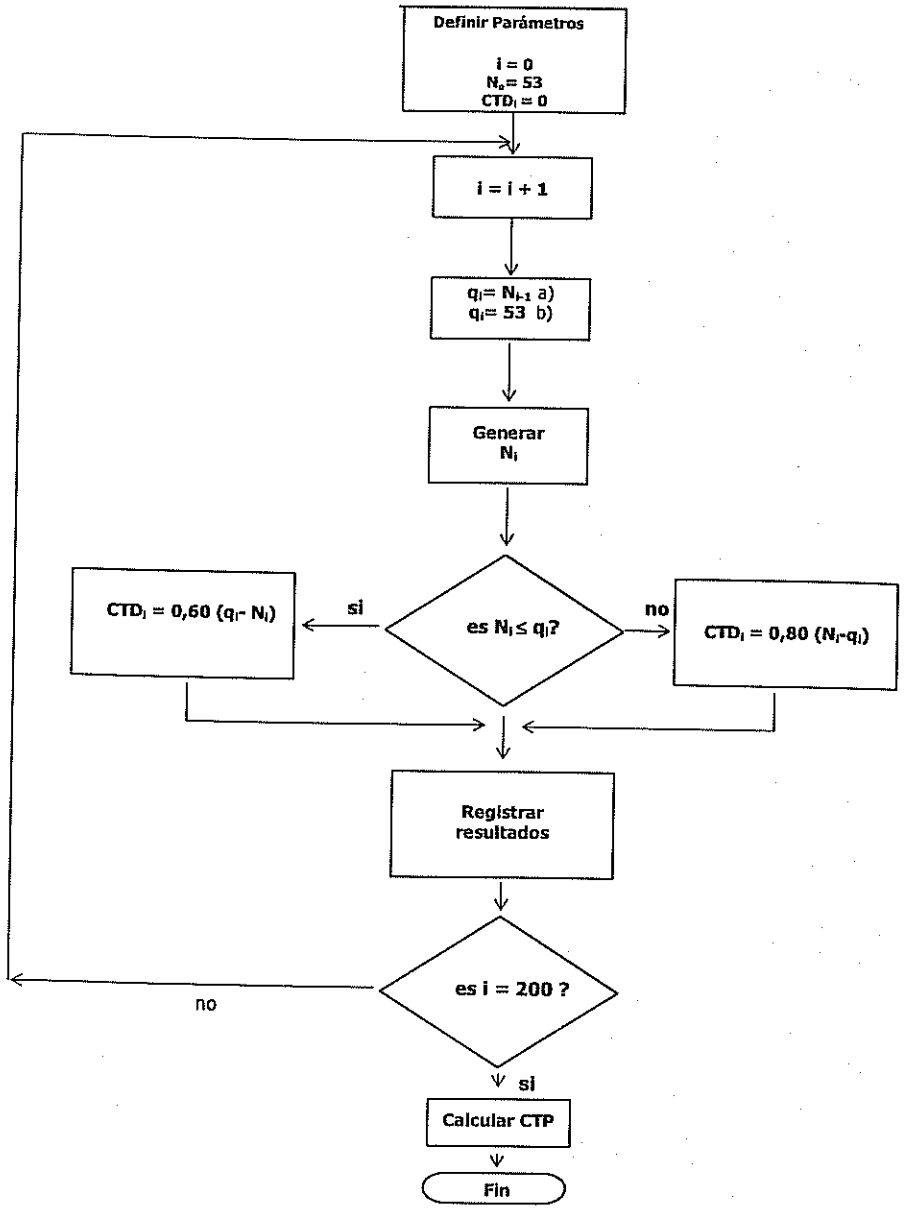

Gráfico 9

Las tablas siguientes muestran la simulación de 20 días de cada política. No obstante debe tenerse en cuenta que, para poder comparar resultados con el fin de seleccionar la mejor política, debería simularse cada una de ellas un número grande de veces.

Política a)

Día i	Rn	Ni	qi	Ni-qi	CTD_i
0		53			
1	0,88	55	53	2	1,6
2	0,91	55	55	0	0
3	0,5	53	50	3	2,4
4	0,53	53	53	0	0
5	0,09	51	53	-2	1,2
6	0,21	52	51	1	0,8
7	0,79	54	52	2	1,6
8	0,94	55	54	1	0,8
9	0,73	54	55	-1	0,6
10	0,81	54	54	0	0
11	0,75	54	54	0	0
12	0,52	53	54	-1	0,6
13	0,03	50	53	-3	1,8
14	0,83	54	50	4	3,2
15	0,88	55	54	1	0,8
16	0,55	53	55	-2	1,2
17	0,85	55	53	2	1,6
18	0,15	52	55	-3	1,8
19	0,73	54	52	2	1,6
20	0,24	52	54	-2	1,2
			Costo Promedio		$ 1,14

Tabla 12

Política b)

dia i	Rn	Ni	qi	Ni-qi	CTD_i
0		53			
1	0,88	55	53	2	1,6
2	0,91	55	53	2	1,6
3	0,5	53	53	0	0
4	0,53	53	53	0	0
5	0,09	51	53	-2	1,2
6	0,21	52	53	-1	0,6
7	0,79	54	53	1	0,8
8	0,94	55	53	2	1,6
9	0,73	54	53	1	0,8
10	0,81	54	53	1	0,8
11	0,75	54	53	1	0,8
12	0,52	53	53	0	0
13	0,03	50	53	-3	1,8
14	0,83	54	53	1	0,8
15	0,88	55	53	2	1,6
16	0,55	53	53	0	0
17	0,85	55	53	2	1,6
18	0,15	52	53	-1	0,6
19	0,73	54	53	1	0,8
20	0,24	52	53	-1	0,6
			costo promedio		$ 0,88

Tabla 13

EL PROBLEMA DEL VENDEDOR DE GASEOSAS

Juan vende gaseosas en el estadio Córdoba durantes los partidos de fútbol de los domingos. Compra cada gaseosa a $0,80 y la vende a $1,50. La demanda es aleatoria y depende de las condiciones climáticas, es decir si hay sol o está nublado. La probabilidad de que haya sol durante los domingos del mes de Junio es de 0,70.
Si el día está soleado entonces la demanda tiene un comportamiento uniforme en el intervalo [150,200], pero si está nublado su comportamiento es uniforme en el intervalo [100,150].
Juan tiene la política de llevar 180 gaseosas y no considera el costo por faltantes ni por sobrantes.

Para generar el clima:

Día	Probabilidad	Prob. Acumulada
soleado	0,7	0,7
nublado	0,3	1

Tabla 14

Para generar la demanda en día soleado:

$$\text{Dem. soleado} = 150 + 50\,Rn$$

Para generar la demanda en día nublado:

$$\text{Dem. nublado} = 100 + 50\,Rn$$

A continuación se muestra un diagrama de flujo para este problema.

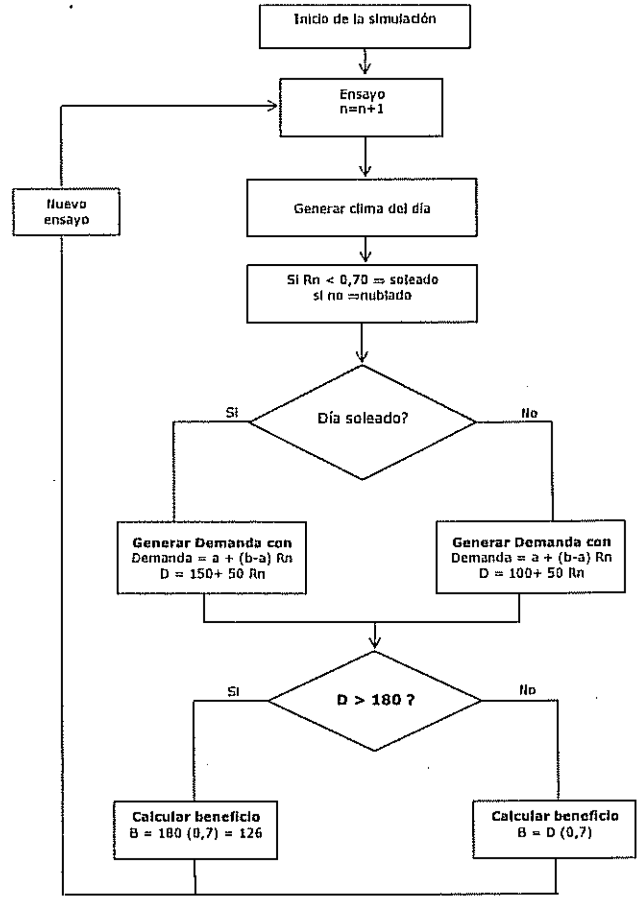

Gráfico 10

La tabla que se inserta a continuación fue realizada usando la planilla Excel. Por esta razón, si usted realiza los cálculos puede encontrar algunas diferencias.

Ensayo	*Rn Clima*	*Día*	*Demanda*	*Beneficio*
1	0.87	nublado	110	76.94
2	0.20	soleado	151	105.64
3	0.77	nublado	107	74.68
4	0.82	nublado	113	79.28
5	0.00	soleado	187	126.00
6	0.93	nublado	106	74.13
7	0.72	nublado	117	81.79
8	0.71	nublado	142	99.43
9	0.78	nublado	122	85.68
10	0.02	soleado	152	106.35
11	0.35	soleado	162	113.11
12	0.49	soleado	166	115.93
13	0.83	nublado	103	72.06
14	0.12	soleado	168	117.88
15	0.01	soleado	166	116.05

16	0.22	soleado	189	126.00
17	0.32	soleado	165	115.43
18	0.74	nublado	134	93.76
19	0.74	nublado	119	82.99
20	0.70	nublado	143	100.38
			Utilidad promedio	$98

Tabla 15

Realizamos algunos ensayos de la tabla anterior, aclarando que las diferencias de decimales se deben a redondeos.

Ensayo	Rn Clima	Día	Rn Demanda	Dem. soleado	Dem. nublado	Beneficio
1	0,87	nublado	0,20		100+50(0,2)=110	77
2	0,20	soleado	0,02	150+50(0,02)=151		105,7
16	0,22	soleado	0,78	150+50(0,78)=189		126

Tabla 16

8. SIMULACIÓN DE FENÓMENOS DE ESPERA EN FILA

CARACTERIZACIÓN DEL PROBLEMA

Todos, en algún momento hemos formado parte de un sistema de espera en fila, por ejemplo, cuando vamos al banco y nos unimos a una fila esperando que el cajero nos atienda, en las cajas del supermercado o cuando esperamos un cambio de luz frente a un semáforo.
También las máquinas pueden formar parte de una cola cuando esperan ser reparadas por un técnico. Los aviones que esperan autorización para despegar o aterrizar en un aeropuerto, los barcos que esperan ser descargados, o las cartas que esperan ser elaboradas y enviadas por una secretaria.

Podríamos seguir así, enumerando un sinfín de ejemplos, pero lo importante es identificar la característica que tienen en común todas estas situaciones, y ella es la espera.

Una situación de línea de espera se produce cuando un "cliente" (hombre o máquina) llega a una instalación para recibir un "servicio", espera en una fila hasta ser atendido y luego se retira.

Algunos de los sistemas más comunes de líneas de espera pueden verse en las siguientes figuras:

Una fila y un servidor

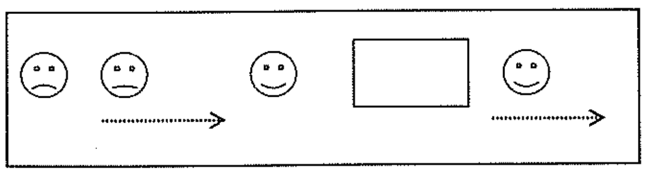

Gráfico 11

Varias filas y varios servidores

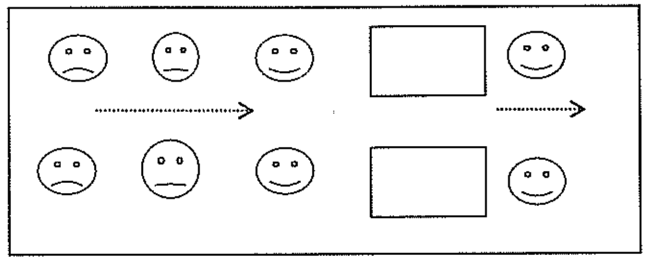

Gráfico 12

Una fila y varios servidores

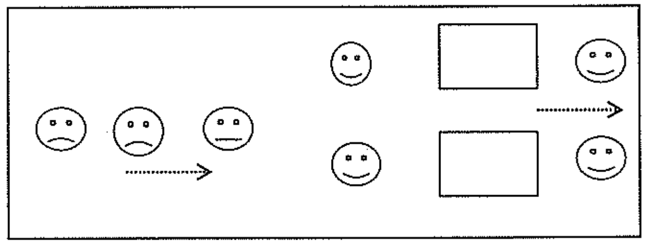

Gráfico 13

Una fila y varios servidores en serie

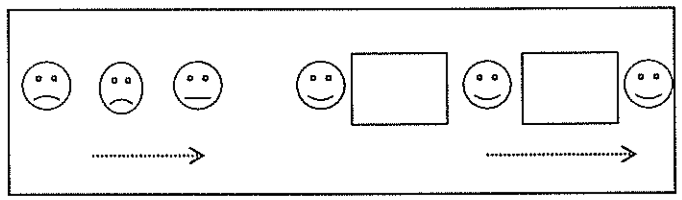

Gráfico 14

La cola se forma cuando la demanda de un servicio es mayor que la capacidad del servicio.

La teoría de las colas comprende a un grupo muy grande de modelos, en donde cada uno se refiere a un tipo diferente de situación de línea de espera. Sin embargo, todos ellos tienen algunas cosas en común.

Los componentes que caracterizan a las líneas de espera son:

- Población de clientes o fuente de clientes, que pueden ser finita o infinita
- Proceso de llegada, que es la forma en que llegan los clientes al sistema y que está especificado por el tiempo entre llegadas
- Proceso de servicio, que está especificado por el tiempo que dura el servicio.
- Disciplina de la cola, es decir el orden en el que son atendidos los clientes.

En general los sistemas de colas pasan por dos fases:

Fase transitoria: este periodo inicial tiene muchas características transitorias que no son similares a los valores promedios a largo plazo o de estado estacionario.

Fase estable: es la condición del sistema luego de haberse eliminado las condiciones iniciales, esto es, cuando el sistema alcanza el estado estacionario.

Los modelos de colas son de tipo descriptivos. Es decir que no *solucionan* directamente el problema, pero aportan información fundamental al momento de tomar decisiones describiendo las características de operación del sistema como son la longitud de la cola o el tiempo de espera en el sistema, entre otras.

Existen numerosas situaciones para las cuales no pueden ser utilizados ninguno de los modelos matemáticos ya desarrollados; en estas situaciones la alternativa es realizar un análisis por simulación para así determinar las características de operación del sistema de espera en fila.

PROCEDIMIENTO DE SIMULACIÓN DE UN FENÓMENO DE ESPERA

La operación física del sistema es:

1.- El cliente llega:

- Si el servidor está desocupado, es atendido
- Si el servidor está ocupado, se suma a la cola de espera, hasta que el servidor se desocupa, recibiendo a continuación el servicio.

2.- Una vez atendido, se retira del sistema.

Para el modelo de simulación es necesario describir y sincronizar la llegada de los clientes y el suministro del servicio.

Existen dos enfoques para la lógica y el seguimiento de los registros del modelo.

Incremento de tiempo fijo e *incremento según el evento siguiente.*

Incremento de tiempo fijo: todos los periodos son de igual duración y se actualiza el estado del sistema al principio o al final de cada lapso o intervalo de tiempo.

Incremento según el evento siguiente: consiste en generar aleatoriamente el tiempo que transcurre entre llegadas y el tiempo que se requiere para cumplir el servicio de un cliente. Se actualizará el sistema en cada momento en que llegue un cliente o en el que se termina de atender a uno. De modo que es variable el tiempo entre actualizaciones del sistema.

9. EJEMPLOS DE SIMULACION DE COLAS

EL PROBLEMA DEL BANCO

El gerente de la sucursal de un banco ha recopilado datos acerca de la entrada de clientes al banco y del servicio que se les da. Opina que el tiempo entre llegadas puede describirse a través de una distribución Uniforme en el intervalo [5,7]. También piensa que es posible describir el tiempo de servicio a través de una distribución exponencial con un tiempo promedio de servicio de 4 minutos por cliente.

El gerente quisiera poder determinar el tiempo promedio de espera de los clientes en estas circunstancias.

Resumiendo, los datos que se poseen sobre la operación del banco con una ventanilla son:

- El tiempo entre llegadas se distribuye uniformemente en el intervalo [5,7]
- El tiempo de servicio se distribuye exponencial con $1/\mu = 4$ minutos por cliente.

Para simular este proceso, vamos a generar el tiempo entre llegadas y el tiempo de servicio con el generador uniforme y exponencial respectivamente. Recordemos que podemos determinarlo a través del método de la transformación inversa, de la siguiente manera:

Tiempo entre llegadas:

$$TL = a + (b - a)\ Rn$$

$$TL = 5 + (7 - 5)\ Rn$$

Tiempos de servicio:

$$TS = -\ 1/\mu \ \ln Rn$$

$$TS = -\ 4 \ln Rn \qquad \mu = 1/4$$

En la página siguiente, se muestra una tabla con la simulación de 15 clientes.

Ejemplo de Cálculo del la primera fila de la tabla

1) Generar Rn para el tiempo entre llegadas

$Rn1 = 0.1634$

2) Generar el tiempo entre llegadas

$TL = a + (b\text{-}a)\ Rn$

$TL1 = 5 + (7\text{-}5)\ 0.1634 = 5.33$

3) Estimar la hora de llegada (HL)

$HLn = HLn\text{-}1 + TLn$

$HL1 = 0 + 5.33 = 5.33$

4) Determinar las unidades en la fila

5) Generar Rn para duración del servicio

Rn1 = 0.2396

6) Duración del tiempo de Servicio

TS = - 4 ln Rn

TS1 = - 4 ln 0.2396 = 5.71

7) Inicio del Servicio (IS)

- Para el cliente 1:

IS1 = HL1

- Para el cliente n:

ISn= Max (FSn-1, HLn),   Donde, FS = fin del servicio

8) Fin del Servicio:

FSn = ISn + TSn

9) Tiempo de espera en la fila (TE):

si HLn > FSn-1 , entonces, TEn = 0

si HLn < FSn-1 , entonces, TEn = FSn-1 – HLn

NºCliente	Nº Random	Tiempo entre llegadas	Hora llegada	Unidades. en la fila	Nº Random	Duración servicio	Inicio servicio	Fin servicio	Tiempo espera en la fila
1	0.1634	5.33	5.33	0	0.2396	5.71	5.33	11.04	0
2	0.7344	6.47	11.8	0	0.5582	2.33	11.8	14.13	0
3	0.2809	5.56	17.36	0	0.7556	1.12	17.36	18.48	0
4	0.0746	5.15	22.51	0	0.7468	1.17	22.51	23.68	0
5	0.3049	5.61	28.12	0	0.0858	9.83	28.12	37.95	0
6	0.6203	6.24	34.36	1	0.4840	2.9	37.95	40.85	3.59
7	0.2923	5.58	39.94	1	0.0382	13.06	40.85	53.91	0.91
8	0.6696	6.34	46.28	1	0.1011	9.17	53.91	63.08	7.63
9	0.4031	5.81	52.09	2	0.8934	0.45	63.08	63.53	10.99
10	0.2875	5.75	57.84	2	0.9525	0.19	63.53	63.72	5.69
11	0.3496	5.70	63.54	1	0.4466	3.22	63.72	66.94	0.18
12	0.8306	6.66	70.20	0	0.6117	1.97	70.20	72.17	0
13	0.4229	5.84	76.04	0	0.0579	11.40	76.04	87.44	0
14	0.9751	6.95	82.99	1	0.8758	0.53	87.44	87.97	4.45
15	0.8950	6.79	89.78	0	0.5867	2.13	89.78	91.91	0

Tabla 17

Tiempo promedio de espera:

TPE = (3.59 + 0.91 + 7.63 + 10.99 + 5.69 + 0.18 + 4.45) / 15 = 2.23 min.

Ejemplo de Cálculo de la sexta fila de la tabla

1) Generar Rn para el tiempo entre llegadas

Rn 6 = 0.6203

2) Generar el tiempo entre llegadas

TL = a + (b-a) Rn

TL1 = 5 + (7-5) 0.6203 = 6.24

3) Estimar la hora de llegada (HL)

HL6 = HL5 + TL6

HL6=28.12 + 6.24 = 34.36

4) Determinar las unidades en la fila

Como el servidor todavía está ocupado ya que fin del servicio del cliente 5 es 37.95, entonces el cliente 6 pasa formar una cola y se suma 1.

5) Generar Rn para duración del servicio

Rn6 = 0.4840

6) Duración del tiempo de Servicio

TS = - 4 ln Rn

TS6 = - 4 ln 0.4840 = 2.9

7) Inicio del Servicio (IS)

IS6= Max (FS5, HL6)

IS6 = Max (37.95, 34.36) = 37.95

8) Fin del Servicio:

FS6 = IS6 + TS6

FS6 = 37.95 + 2.9 = 40.85

9) Tiempo de espera en la fila (TE):

si HLn > FSn-1 , entonces, TEn = 0

si HLn < FSn-1 , entonces, TEn = FSn-1 - HLn

Como HL6 < FS5

TE6 = 37.95 – 34.36 = 3.59

El siguiente diagrama de flujo es el utilizado para simular este problema:

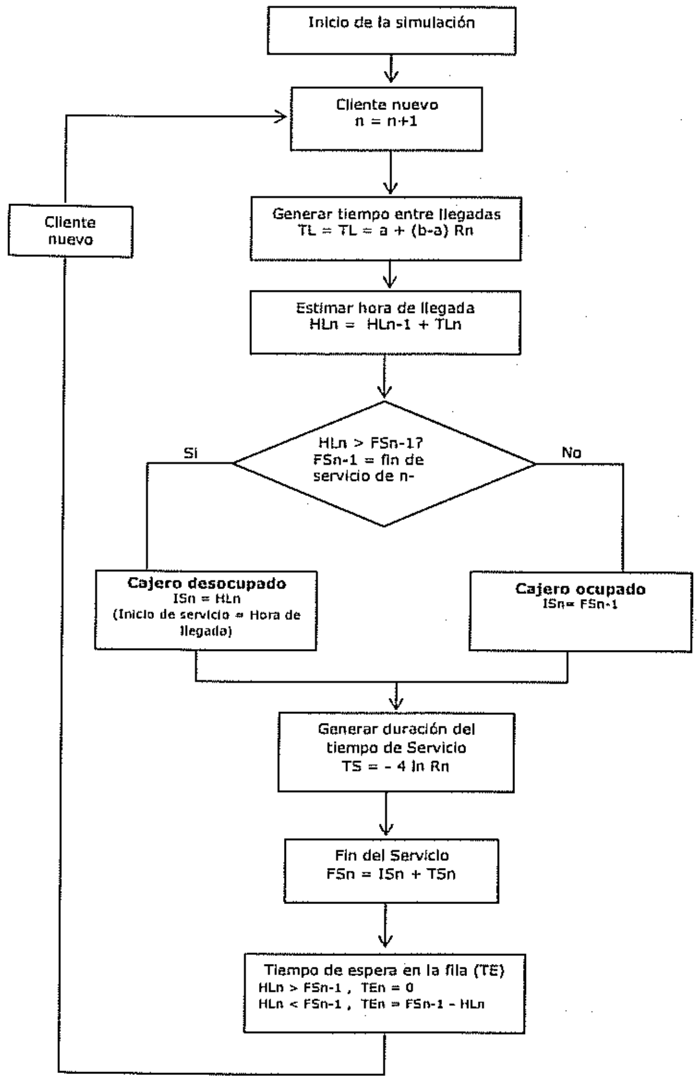

Gráfico 15

CASO EMPRESA DE ÓMNIBUS "SANTA ANA SA"

Santa Ana SA es una empresa que presta servicios de transporte urbano en varios recorridos de la ciudad de Córdoba. Es consciente que desde hace algún tiempo los usuarios se quejan del servicio. Específicamente, dicen que en la parada de la universidad tienen que esperar demasiado durante las horas pico de la tarde de 18 a 20 hrs. y que no hay suficiente espacio en la parada cubierta para que los pasajeros esperen los días de lluvia.

Para responder a estas demandas, los directivos están considerando incrementar la frecuencia en esa ruta. Piensan modificar la actual frecuencia del servicio cada 20 minutos a uno cada 15 minutos. Para analizar los resultados de esta nueva política en la satisfacción de los usuarios, se implementará un estudio de simulación que permita evaluar

la cantidad de tiempo promedio que un cliente tiene que esperar un ómnibus, el número promedio de clientes que esperan en la parada y el número máximo de clientes que esperan.

A tal fin se ha realizado un estudio de tiempos en la parada de la universidad, el cual ha determinado que aproximadamente llegan a la parada durante las horas pico de la tarde, 30 clientes por hora. Los datos también muestran que el tiempo entre dos clientes que llegan puede aproximarse mediante una distribución exponencial con una tasa promedio de μ = 0,5 clientes por minuto. Se observó además que, por lo general, los ómnibus llegan tarde a las paradas programadas, en una cantidad de tiempo que sigue una distribución normal con una media de 4 minutos y una desviación estándar de 1 minuto.

Además, dado que la parada en cuestión esta cercana al inicio del recorrido, el estudio indicó que nunca la cantidad de personas en la fila supera la capacidad del ómnibus.

NOTA: Para realizar las simulaciones, suponga que inicia en el momento en que un ómnibus acaba de irse. En este caso, no hay nadie esperando en la parada, y el siguiente ómnibus está programado llegar en 15 minutos.

Definición de variables y parámetros del modelo

i = Nº de cliente que llega a la parada

j = Nº de ómnibus que llega a la parada

MC_i = momento que el cliente i llega a la parada y se agrega a la fila de espera

MO_j = momento que el ómnibus j llega a la parada

D_j = desviación en el tiempo programado del ómnibus j

LF_i = longitud de la fila de espera (una vez sumado el cliente i)

TE_i = tiempo de espera en la parada del cliente i

IT_i = intervalo de tiempo entre la llegada a la parada del cliente i-1 y el cliente i

Análisis del problema:

Se desea evaluar la política de incrementar la frecuencia de 20´ a 15´, en las horas pico (18 a 20 hs.).

- ✓ Llegan 30 pasajeros por hora con una distribución Poisson (μ=0.5 pasajeros por minuto) ⇒ distribución Exponencial (1/μ=2 minutos entre cada pasajero).
- ✓ Retrasos de los ómnibus ⇒ distribución Normal (4,1)
- ✓ Generación del momento de llegada de un cliente a la fila (MCi):
  - Generar Rn;
  - Generar IT_i = -(1/0.5) ln(1-Rn)
  - Calcular MCI = MCi-1 + ITi
- ✓ Generación del momento de llegada de un autobús (MOj):

- Generar Rn;
- Usar este valor Rn para encontrar un valor x para el que:

$F(x) = P(D \leq D_j) = Rn$

Es decir, encontrar el valor de la variable para el cual el área bajo la curva normal a la izquierda, es Rn. Para hacer esto usar la tabla normal estándar; luego calcular la variable aleatoria Dj, de la siguiente manera:

1) $D_j = \mu + z\,\sigma = 4 + z\,(1)$

2) Generar $MO_j = 15\,j + D_j$

Simulación para 1 hora considerando una frecuencia de ómnibus de 15 minutos

Tiempo minutos)	Evento	No. de clientes en la fila	Momento de llegada de los clientes MCi	Momento de llegada de los ómnibus MOj
0.00	-	0	4.49	19.07
4.49	Cliente	1	5.37	19.07
5.37	Cliente	2	10.91	19.07
10.91	Cliente	3	12.38	19.07
12.38	Cliente	4	13.58	19.07
13.58	Cliente	5	15.06	19.07
15.06	Cliente	6	16.62	19.07
16.62	Cliente	7	19.86	19.07
18.57	Autobus	0	19.86	32.56
19.86	Cliente	1	21.90	32.56
21.90	Cliente	2	23.43	32.56
23.43	Cliente	3	26.42	32.56
26.42	Cliente	4	30.49	32.56
30.49	Cliente	5	32.00	32.56
32.00	Cliente	6	36.35	32.56
33.44	Autobus	0	36.35	50.83
36.35	Cliente	1	39.29	50.21
39.29	Cliente	2	40.92	50.21
40.92	Cliente	3	40.98	50.21
40.98	Cliente	4	41.14	50.21
41.14	Cliente	5	42.45	50.21
42.45	Cliente	6	43.29	50.21
43.29	Cliente	7	45.95	50.21
45.95	Cliente	8	49.68	50.21
49.68	Cliente	9	51.82	50.21
50.83	Autobus	0	51.82	62.53
51.82	Cliente	1	52.16	62.53
52.16	Cliente	2	52.22	62.53
52.22	Cliente	3	59.21	62.53
59.21	Cliente	4	60.06	62.53

Tabla 18

El diagrama de flujo del modelo se muestra en el siguiente gráfico.

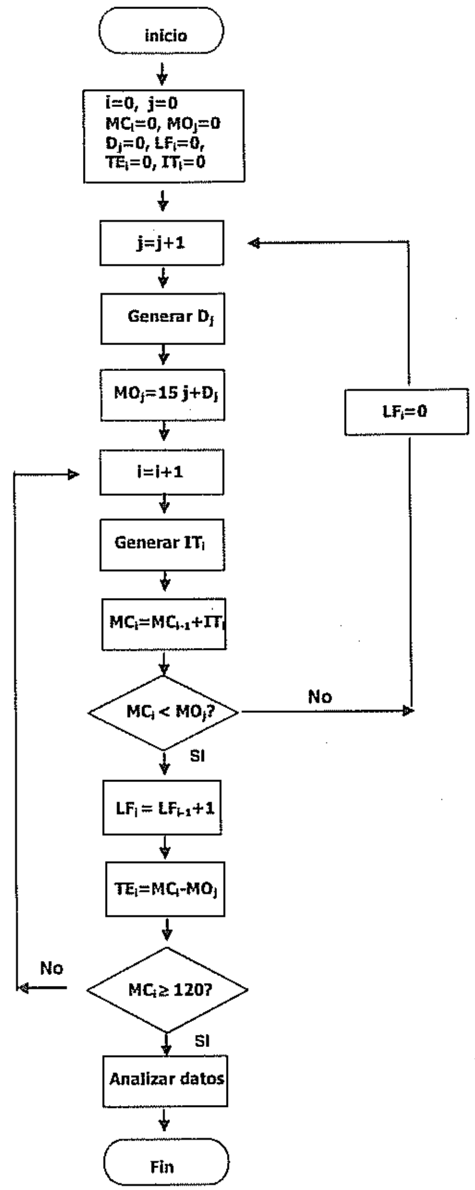

Gráfico 16

Análisis estadístico de los resultados para una simulación

Personas en la fila	Tiempo total (frec. Absoluta)	Frecuencia relativa
0	9.69	0.1615
1	6.20	0.1034
2	8.76	0.1460
3	8.50	0.1417
4	7.28	0.1213
5	6.25	0.1042
6	3.83	0.0639
7	4.60	0.0767
8	3.74	0.0623
9	1.15	0.0191

Tabla 19

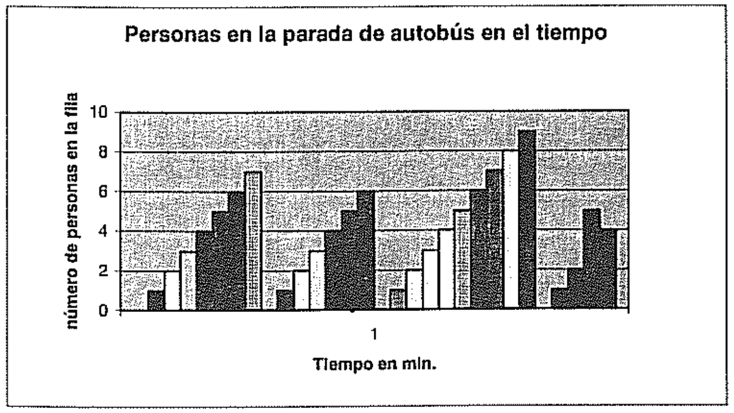

Gráfico 17

- ✓ Tiempo Promedio de Espera = tiempo de espera de todos los clientes/número total de clientes = 205.3 / 26 = 7.9 minutos
- ✓ Número promedio de clientes en la parada: 3.25 (este valor se calcula como el promedio ponderado entre los elementos de las columnas 1 y 3 de la tabla 18)
- ✓ Número máximo de clientes que esperan en la parada = 9

Recordemos que, para realizar un análisis de resultados que sea útil para la toma de decisiones, se deberá ejecutar una cantidad grande de simulaciones de dos horas cada una, tanto con frecuencia de 15 minutos como de la que actualmente está dando quejas de los clientes (cada 20 minutos). A partir del estudio de estos resultados evaluar la política de cambiar la frecuencia.

CASO DEL LAVADERO DE AUTOMÓVILES

"*LavaCar*" es una pequeña empresa dedicada al lavado automático de automóviles en el centro de la ciudad. Actualmente cuenta con solamente un empleado que se encarga del manejo de la maquinaria y de los detalles finales de secado. Como últimamente se observa mayor demanda del servicio, el propietario de la empresa está analizando la posibilidad de contratar un empleado más. Por su experiencia sabe que si hay más de dos autos esperando el servicio el cliente se va en busca de otros lavaderos de la zona.

Para realizar un estudio de simulación de este caso, se ha obtenido una muestra de 100 casos que demostró la siguiente la distribución de la llegada de los clientes:

Minutos entre llegadas	Frecuencia
5	9
10	24
15	20
20	31
30	16

Tabla 20

El propietario aportó algunas estimaciones del tiempo que lleva lavar un automóvil, llegando a la conclusión que tiene una distribución uniforme con un tiempo mínimo de 30 minutos y uno máximo de 45.

A cada empleado se le paga $ 5,00 por hora más $ 1,00 por cada auto que lave. Actualmente se cobra $ 12,00 el lavado.

Mediante simulaciones de ocho horas diarias de trabajo se desea determinar la conveniencia o no de contratar un empleado adicional.

Definición de Variables

i: número de autos llegados al lavadero

j: número de autos que no se atiende por que hay más de 2 esperando.

K: número de autos atendidos

$TELL_i$: Tiempo entre llegadas del auto i (variable aleatoria)

TLL_n : momento de llegada del auto i

DS_i : duración del servicio del auto i (variable aleatoria)

MIS_i : momento de inicio del servicio del auto i

MFS_i : momento de finalización del servicio del auto i

Generación de variables aleatorias

1) Duración del Servicio (DS_i): distribución Uniforme en el intervalo [30,45]

$$DS_i = 30 + 15\,Rn$$

2) Tiempo entre llegadas ($TELL_i$):

Observemos en este caso que la variable aleatoria $TELL_i$ es una variable continua, no sería en este caso correcto simularla como una distribución discreta, ya que en realidad su presentación es en un intervalo como se muestra en la primer columna de la siguiente tabla:

Minutos entre llegadas ($TELL_i$)	Frec. Absoluta	Frecuencia relativa	Frec. Acumulada F(x)
(0, 5]	9	0.09	0.09
(5, 10]	24	0.24	0.33
(10, 15]	20	0.20	0.53
(15, 20]	31	0.31	0.84
(20, 30]	16	0.16	1

Tabla 21

Gráficamente podemos observar el comportamiento de la función de acumulación y a partir de ella, deducir la manera de calcular el valor de la variable por el Método de la Transformada Inversa:

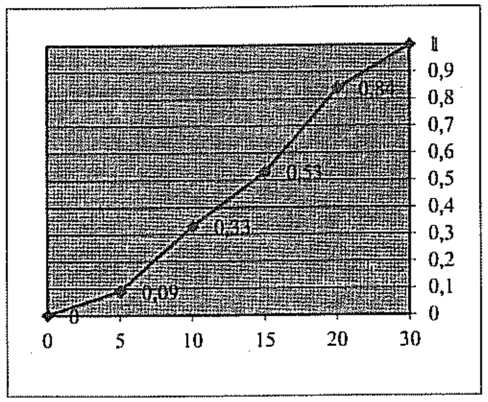

Gráfico 18

$$F(x)=\begin{cases} =0 & x\leq 0 \\ =\dfrac{0,09}{5}\,x & 0\leq x\leq 5 \\ =0,09+\dfrac{0,33-0,09}{10-5}\,(x-5) & 5\leq x\leq 10 \end{cases}$$

$$F(x)=F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\,(x-a) \qquad a\leq x\leq b$$

de donde si despejamos x:

$$x=[F(x)-F(a)]\frac{(b-a)}{F(b)-F(a)}+a$$

A partir de la función anterior, podemos generar los tiempos entre llegadas de la siguiente manera:

Supongamos que Rn = 0.78, buscamos en la tabla de frecuencia acumuladas los valores de F(a) y F(b) para este valor Rn. El tiempo generado es:

$$x=(0,78-0,53)\frac{(20-15)}{0,84-0,53}+15=19,03$$

Con estos datos, realice 10 simulaciones de 480 minutos cada una considerando, en un caso que el lavadero tiene solamente 1 empleado, y en el segundo caso, que contrata un empleado adicional. Luego promedie los resultados de ambas situaciones y analice si es conveniente o no contratar un empleado más.

En el siguiente esquema se muestra el diagrama de simulación correspondiente a este problema.

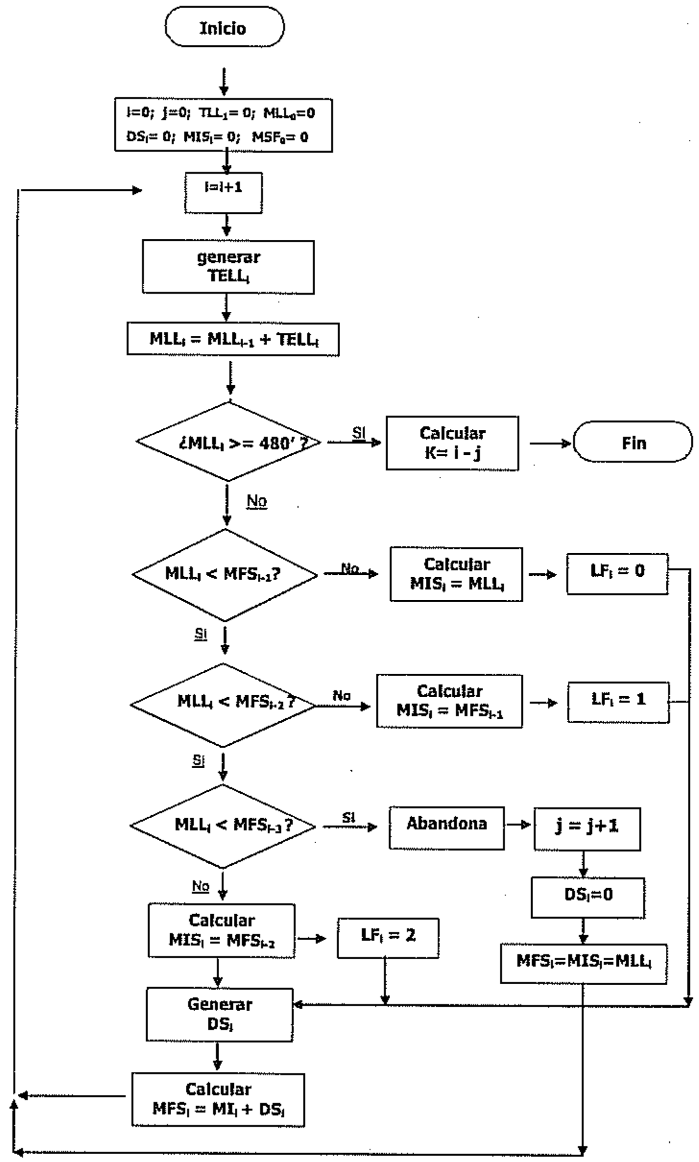

Gráfico 18

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

El conjunto de datos de la tabla 22, representa la demanda diaria de un artículo de perfumería en particular. Simule 15 días de demanda utilizando los números aleatorios de la tabla 23.

Demanda diaria	*Frecuencia*
15	25
16	30
17	50
18	80
19	25
20	40

Tabla 22

Nro Aleatorio
0.508
0.935
0.486
0.263
0.510
0.460
0.386
0.779
0.972
0.763
0.157
0.979
0.532
0.361
0.896

Tabla 23

ACTIVIDAD 2

Utilizando los números aleatorios de la tabla 23, simule 15 días de demanda de un producto en particular, suponiendo que:

a) La demanda de este artículo se puede aproximar con una distribución uniforme en el intervalo [20, 30].

b) La demanda de este artículo se puede aproximar con una distribución normal de media 40 y desviación estándar 5.

ACTIVIDAD 3

La empresa *ConstruCor* SA está preparando su oferta para presentarse en la licitación de reparación de la avenida Sabatini de nuestra ciudad. Otros dos contratistas presentarán ofertas para el mismo proyecto. Con base en el análisis de licitaciones anteriores, *ConstruCor* estima que las ofertas de los otros contratistas pueden describirse con las siguientes distribuciones de probabilidad:

Contratista	*Distribución de probabilidad de la oferta*
A	Uniforme entre $500.000 y $580.000.
B	Normal con una oferta media de $550.000 y una desviación estándar de $50.000.

Tabla 24

Si *CosntruCor* presenta una oferta de $520.000

Realice una simulación para determinar cuál es la probabilidad de obtener el proyecto.

Utilice los números aleatorios que se dan a continuación.

Nros. Aleatorio	
0.476	0.316
0.975	0.679
0.444	0.228
0.333	0.386
0.864	0.023
0.410	0.592
0.057	0.143
0.025	0.681
0.935	0.306
0.774	0.594

Tabla 25

ACTIVIDAD 4

ARG Líneas Aéreas opera un vuelo diario entre Córdoba y Mendoza con un avión que tiene capacidad para 50 pasajeros. *ARG* obtiene un margen de utilidad de $120 con cada pasajero en el vuelo. El análisis de los vuelos del último año ha demostrado que, en promedio, dos pasajeros reprograman su vuelo. Como resultado de esto, con 50 reservaciones la empresa está promediando una utilidad de $5760 por vuelo. *ARG* quiere analizar que resultado se obtendría con una política de reservaciones en exceso en la que se aceptarían hasta 52 reservas.
El costo por cualquier pasajero al que se le niegue un asiento en el vuelo, debe cubrir los gastos de reprogramación del pasajero más un importe estimado por pérdida del cliente, este total fue calculado en $150 por pasajero.
La distribución de probabilidad para la cantidad de pasajeros que se presentan puede aproximarse con una distribución normal de media 50 y desviación estándar de 2.
Utilice un modelo de simulación para evaluar esta política.

ACTIVIDAD 5

El hotel *Zona Sur* se encuentra en la provincia de La Pampa, en el cruce de las rutas provincial Nº 20 y nacional Nº 151. Este cruce se constituye un paso casi obligado para los que viajan a la zona de los parques nacionales Nahuel Huapi y Lanín. El hotel tiene 100 habitaciones y cada noche de la temporada de vacaciones de verano, se reciben hasta 105 reservaciones, debido a la posibilidad de que no todos se presenten. Los registros indican que el número de reservaciones diarias se puede aproximar con una distribución uniforme en el intervalo [96, 105]. Los que no llegan se representan mediante la distribución de la Tabla que se presenta a continuación:

Nº de los que no se presentan	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	0,10	0,15	0,20	0,30	0,15	0,10

Tabla 26

Simule 10 noches utilizando los números aleatorios que se dan en la tabla y calcule el porcentaje de ocupación del hotel.

	Número aleatorio de reservas	Número aleatorio de ausencias
Noche 1	0,5521	0,6318
Noche 2	0,2189	0,8432
Noche 3	0,3812	0,1831
Noche 4	0,4678	0,2569
Noche 5	0,5602	0,3071
Noche 6	0,3356	0,4809
Noche 7	0,7395	0,9354
Noche 8	0,2830	0,0008
Noche 9	0,9431	0,1478
Noche 10	0,8049	0,0270

Tabla 27

ACTIVIDAD 6

K&C SA compra cada semana 80 unidades de un determinado producto, sabiendo que los que no se pueden vender deben desecharse al finalizar la semana.

El gerente de comercialización opina que una política de compras de 100 unidades por semana será más beneficiosa para la empresa, tanto desde el punto de vista de la utilidad obtenida como del nivel de servicio ofrecido.

Al gerente le interesa saber si es conveniente cambiar la política actual, y en ese caso a cuánto ascendería la utilidad promedio y el nivel de servicio ofrecido.

Estudios realizados sobre la demanda del producto, indican que se puede aproximar con una distribución normal de media 100 unidades y desviación estándar 20 unidades.

En la tabla 28 se dan los datos económicos relativos a este producto y en la tabla 29 los números aleatorios necesarios para realizar 20 ensayos.

Margen Bruto unitario	**$50**
Costo de almacenamiento unitario	**$15**
Costo de escasez unitario	**$30**

Tabla 28

Nros. Aleatorio			
0.028	0.005	0.214	0.377
0.076	0.687	0.432	0.011
0.286	0.108	0.769	0.957
0.025	0.132	0.506	0.923
0.294	0.163	0.023	0.171
0.842	0.615	0.746	0.748
0.208	0.903	0.412	0.684
0.605	0.673	0.955	0.677
0.292	0.711	0.188	0.144
0.444	0.993	0.298	0.339

Tabla 29

ACTIVIDAD 7

Los autos que llegan a la playa de un supermercado presentan una distribución Poisson con media de 50 autos/hora. El tiempo de demora dentro del supermercado sigue una distribución uniforme en el intervalo [15, 25]. En la playa existe un techo que proporciona sombra para 15 autos.

a) Simule la llegada de 20 automóviles a la playa, utilice los números aleatorios que se dan en la tabla 30.
b) Defina las variables y parámetros que utiliza en el modelo.
c) Indique cuál es la probabilidad de que al ingresar un auto a la playa encuentre un lugar con sombra.

Nros. Aleatorios	
0.4226	0.2485
0.3833	0.9373
0.2330	0.0181
0.8542	0.7318
0.8220	0.5335
0.3455	0.1124
0.4618	0.9564
0.7612	0.9546
0.0215	0.1326
0.3846	0.7435

Tabla 30