$$\begin{aligned} &\text{Min } 1x_1 + 3x_2 \\ &\text{sa} \\ &1x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ &1x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{aligned}$$

b)

ACTIVIDAD 8

Considere el siguiente programa lineal entero mixto.

$$\begin{aligned} &\text{Max } 4x_1 + 6x_2 \\ &\text{sa} \\ &8x_1 + 18x_2 \leq 72 \\ &14x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \text{ y } x_1 \text{ entera} \end{aligned}$$

a) En una gráfica de las restricciones, indique todas las soluciones enteras mixtas.
b) Encuentre la solución óptima de la relajación de PL y redondee el valor de x_1 hacia abajo. ¿Esta solución es óptima?
c) Encuentre la solución óptima.

CAPÍTULO 7

PROGRAMACIÓN DINÁMICA

1. INTRODUCCIÓN

En muchas oportunidades nos enfrentamos a situaciones en las cuales debemos tomar una sucesión de decisiones interrelacionadas; esto es, que la decisión que se adopte en un momento afectará a la que se toma a continuación.

Se trata generalmente de problemas complejos, que pueden dividirse en subproblemas de menor tamaño.

Veamos los siguientes ejemplos:

1. Se desea implementar una política de inversiones a lo largo de seis meses, para ello es necesario determinar cuánto debe invertirse cada mes. En este caso los meses pueden entenderse como etapas en las cuales debe decidirse la inversión a realizar.

2. El Banco Nación cuenta con un importante monto para entregar créditos destinados a fomentar la incorporación de la computadora en las escuelas primarias provinciales. ¿Cuánto conviene entregar a cada una? En este caso, cada provincia constituye una etapa del problema general, en la cual es necesario tomar una decisión.

En situaciones de este tipo podemos utilizar un modelo de optimización llamado Programación Dinámica (PD).

En realidad la PD es un enfoque que nos permite encontrar la solución de problemas complejos, descomponiéndolos en una secuencia de problemas más pequeños y de esta manera encontrar la combinación de decisiones que optimice la efectividad global.

En este capítulo trataremos problemas de PD en los cuales las condiciones iniciales en cada subproblema pueden representarse por un conjunto discreto y los resultados de cada decisión están completamente determinados por la condición inicial y la decisión adoptada.

Los problemas con estas características corresponden a la Programación Dinámica Discreta Determinista.

2. METODOLOGÍA

Suponga que usted dispone de 4 mil pesos que puede destinar a tres opciones de inversión diferentes. Las utilidades que se obtienen en cada opción dependen de la cantidad invertida (tabla 1).

Si se supone que la cantidad invertida en cada opción debe ser múltiplo exacto de mil pesos; ¿cuál será la política de inversión que eleve al máximo las utilidades ganadas?

	Utilidades en miles de $		
$ invertidos (miles)	***Inversión 1***	***Inversión 2***	***Inversión 3***
0	0	0	0
1	7	6	7
2	8	10	8
3	9	12	13
4	11	14	15

Tabla 1

Nuestro objetivo consiste en encontrar una combinación de inversiones que nos proporcione las máximas ganancias, sabiendo que la cantidad invertida en cada proyecto determinará el rendimiento global. Esto es, determinar la cantidad a invertir en cada opción, si es que se invierte, para obtener el máximo rendimiento posible.

Un enfoque posible para resolver el problema sería por enumeración exhaustiva, sin embargo el número de combinaciones posibles es grande y tener que calcular el rendimiento total para cada una de ellas, no constituye una tarea muy atrayente.

La PD nos permite encontrar la solución con un poco menos de esfuerzo, para lo cual descompone el problema fraccionándolo en subproblemas o **etapas**. Entonces la PD parte de una pequeña porción del problema, encuentra la solución para esta etapa y luego gradualmente agranda el problema encontrando la solución óptima actual, pero enlazada con la anterior y así hasta encontrar la solución óptima del problema original.

Nuestro problema requiere tomar tres decisiones interrelacionadas, cuánto invertir en cada alternativa, de esta manera cada proyecto puede ser considerado como un subproblema y cada uno de ellos define una etapa del problema.

Si bien no existe una secuencia fija entre ellas vamos a considerar, para una mejor comprensión, un orden cronológico. De esta manera:

$$\longrightarrow \qquad \longrightarrow$$

Etapa 1 Inversión 1 ***Etapa 2 Inversión 2*** ***Etapa 3 Inversión 3***

$$\longleftarrow \qquad \longleftarrow$$

En este problema resulta indistinto comenzar a resolver el problema desde la primera etapa hasta la última o hacerlo desde la última hacia la primera. Sin embargo, vamos a comenzar en reversa para adoptar una metodología aplicable también a aquellos casos en los cuales existe un orden.

Describamos el objetivo para comenzar con la resolución de nuestro problema de Programación Dinámica Determinista:

Objetivo: Maximizar la rentabilidad

x_i: cantidad de dinero que disponemos en miles de $ para esta opción de inversión (etapa) y las que siguen en etapas posteriores. Corresponde a los estados al inicio de la etapa i.

d_j: cantidad de dinero en miles de $ que invertiremos en esta opción o etapa. Corresponde a las decisiones posibles de la etapa i.

f_i: rendimiento a obtener si disponemos de x_i $ para esta opción de inversión (etapa) y las que siguen en etapas posteriores, sabiendo que se decide invertir d_j $ en esta opción.

Le añadiremos un * a las decisiones y las rentabilidades que representen los mejores valores para esta etapa y las que le siguen.

Comenzando entonces con la etapa tres, tendremos:

Etapa 3:

x_3	d_3^*	$f_3^*(x_3)$
$ disponibles para invertir	**Decisión óptima**	**Rendimiento**
0	0	0
1	1	7
2	2	8
3	3	13
4	4	15

Tabla 2

Nótese que en la columna correspondiente a x_3 hemos colocado todas las alternativas posibles de dinero disponible para invertir; es decir los diferentes **estados** en los que podríamos encontrarnos al inicio de la etapa.

En la columna correspondiente a d_3^* identificamos la mejor decisión frente a cada estado. En este caso, por ser la ultima etapa o último proyecto, se decidirá invertir la totalidad del dinero disponible y para cada una de ellas identificamos su resultado como f_3 (x_3), esto es el rendimiento obtenido.

Etapa 2:

Recuerde que los valores de x_2 ó estados representan el dinero disponible para invertir en la Inversión 2 ó etapa 2 y las que le siguen y los valores para d_2 ó decisión expresan los diferentes montos que podemos destinar a inversión en la alternativa 2. Es lógico pensar que de lo disponible menos lo invertido surgirá lo disponible para las etapas que le sigues, léase etapa 3 en este caso.

d_2 / x_2	0	1	2	3	4	$f_2^*(x_2)$	d_2^*
0	0					0	0
1	0+7=7	6+0=6				7	0
2	0+8=8	6+7=13	10			13	1
3	13	14	17	12		17	2
4	15	19	18	19	14	19	1 - 3

Tabla 3

Analicemos los valores que figuran en la fila que corresponde a una cantidad de dinero disponible de $ 1 mil.

Si tenemos $ 1 mil disponibles, existen dos alternativas de decisión posibles a saber:

1. No invertimos nada en esta opción ($d_2 = 0$). Si no invertimos nada en esta etapa, entonces dejamos los $1 mil para invertir en la etapa 3. Para este caso, el rendimiento será de $7, formados por $0 de rendimiento en la Inversión 2 no invertimos nada ya que (ver tabla Tabla1), más $7 que representan el rendimiento de invertir $1 en la alternativa de Inversión 1. (ver tabla Tabla 2)

2. Si decidimos invertir $ 1 mil, nuestro rendimiento está formado por $6 por haber invertido $1 en la Inversión2, más $0 porque no dejamos nada para la Inversión 1

Para este estado, es decir esta cantidad de dinero disponible, la mejor alternativa de decisión es $d_2 = 0$ con un rendimiento total de $ 7 mil.

Si entramos a la etapa 2 con $ 2 mil vamos a tener 3 decisiones posibles con sus correspondientes rendimientos.

1. No invertir nada en esta etapa ($d_2 = 0$); si es así vamos a entrar a la etapa 3 con 2$ de dinero disponible. ($x_2 - d_2 = 2 - 0 = 2$)

2. Invertir $1 ($d_2 = 1$), entonces el dinero disponible para la alternativa o etapa 3 será $1 mil. ($x_2 - d_2 = 2 - 1 = 1$).

3. Invertir $2 ($d_2 = 2$), con lo cual el dinero disponible para la etapa 3 será $0 ($x_2 - d_2 = 2-2 = 0$)

Compruebe usted que los rendimientos obtenidos en cada caso coincidan con los que se incluyen en la tabla.

En el caso de entrar a la segunda etapa con $ 2 mil de dinero disponible para inversión, la mejor decisión será destinar para esta alternativa $ 1 mil, lo que nos dará un rendimiento de $ 13 mil.

Siguiendo el mismo razonamiento anterior compruebe los cálculos de las filas que corresponden a los estados $x_2=3$ y $x_2=4$.

Etapa 1:

Al considerar la etapa 1 tengamos en cuenta que, como estamos al inicio del proceso de decisión, el único estado posible es 4, es decir que en este momento tenemos $ 4 mil disponibles para inversión.

d_1 / x_1	0	1	2	3	4	$f_1^*(x_1)$	d_1^*
4	19	7+17=**24**	21	16	11	**24**	1

Tabla 4

Rendimiento máximo

Analicemos el rendimiento correspondiente al estado 4 y la decisión 1.

Si tenemos $ 4 mil disponibles y decidimos invertir en esta etapa $ 1 mil, el rendimiento que vamos a obtener va a estar compuesto por $ 7 mil por haber invertido $ 1 mil en la alternativa 1, más $ 17 mil que se obtienen de destinar los $ 3 mil restantes a las otras dos. Este valor se obtiene entrando en la tabla de la etapa 2 en el estado $x_2=3$.

Debemos determinar ahora la política óptima, es decir la sucesión de decisiones que nos llevarán a obtener el máximo rendimiento posible.

En la tabla de la etapa 1 vemos que la decisión óptima invertir $ 1 mil. Como teníamos $ 4 mil, nos quedan disponibles $ 3 mil. Entramos en la tabla de la etapa 2 en el estado $x_2=3$ y vemos que la decisión óptima es invertir $ 2 mil en esta opción; despúés de esto nos quedan $ 1 mil que los destinamos a la alternativa 1.

Una secuencia de decisiones determinada de antemano y que satisface las condiciones del problema, se llama una política.

Resumiendo:

Alternativa de Inversión	*Inversión ($)*	*Rendimiento*
1	1	7
2	2	10
3	1	7
Total	$ 4	$ 24

Tabla 5

Sintetizando, la metodología seguida consistió en:

- Identificar el objetivo y variables que intervienen en el problema, en este caso:

  Objetivo: maximizar el rendimiento total.

  Etapas: las distintas inversiones.

  Estados: dinero disponible para inversión al inicio de cada etapa.

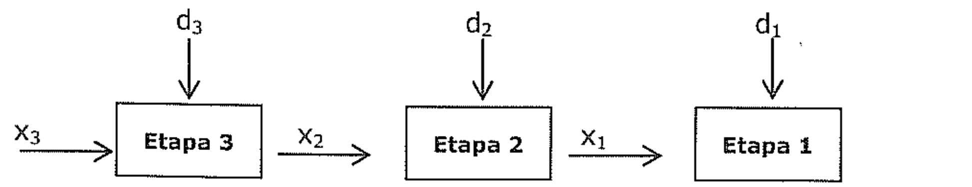
  Decisiones: dinero invertido en cada etapa.

- Identificar al inicio de cada etapa cuáles son los estados posibles, en este caso el dinero disponible para realizar la inversión.
- Calcular para cada combinación de un estado y una decisión el rendimiento obtenido, que es igual al rendimiento de invertir $\$d_n$ en esta etapa más el rendimiento óptimo de invertir $\$(x_n- d_n)$ en las etapas siguientes. La función aquí utilizada se denomina función recursiva. Observe que existen combinaciones de un estado y una decisión que no serán posibles o compatibles por sus características.
- Para cada estado identificar cuál es la decisión óptima (d^*) según el objetivo del problema, en este caso maximizar el rendimiento total.

Podemos observar en cada etapa tenemos como entradas el dinero disponible y las alternativas de cuánto invertir, y como salida el dinero disponible para la próxima etapa. Es decir que en cada etapa los estados al inicio se determinaron como:

$$x_3 = x_2-d_2$$
$$x_2 = x_1-d_1$$
$$x_1 = 4$$

A manera de esquema la metodología fue:



$f_3(x_3) = r_3(d_3)$ $\quad$ $f_2(x_2) = r_2(d_2)+f_3^*(x_2-d_2)$ $\quad$ $f_1(x_1) =r_1(d_1)+f_2^*(x_1-d_1)$

Dónde:

$f_n (x_n)$ = rendimiento en la etapa **n** para el estado x_n

$r_n (d_n)$ = rendimiento de la alternativa de inversión **n**, si decide invertir d_n

$f^*_{n+1}(x_n)$ = $f^*_{n+1} (x_n - d_n)$ = rendimiento óptimo para la etapa **n**, dado el estado x_n

Analicemos por ejemplo el rendimiento en la etapa 1 para el estado x_1= 4 y la decisión d_1= 3

$$f_1 (x_1) = r_1 (d_1) + f_2^* (x_1 - d_1)$$

$$f_1 (4) = r_1 (3) + f_2^* (4 -3) = 9 + 7 = 16$$

En general:

$$f_n (x_n) = r_n (d_n) + f^*_{n+1} (x_n - d_n)$$

Y el rendimiento óptimo para la etapa **n** dado el estado x_n será:

$$f_n^* (x_n) = \text{máx.} \{ r_n (d_n) + f_{n+1}^* (x_n - d_n) \}$$

$$\begin{array}{c}\text{Rendimiento óptimo}\\ \text{para la etapa } n\\ \text{dado el estado } x_n\\ \text{en adelante}\end{array} = \text{máx} \left\{ \begin{array}{c}\text{Rendimiento}\\ \text{para la}\\ \text{decisión } d_n\end{array} + \begin{array}{c}\text{Rendimiento}\\ \text{óptimo de la}\\ \text{etapa } n+1\end{array} \right\}$$

Procesos como el que hemos analizado se encuentran en numerosos problemas deterministas de decisión.

Con este ejemplo se ilustró cómo, si se avanza en retroceso, se puede transformar un problema aparentemente difícil en uno fácil de resolver.

La programación dinámica es una técnica que se puede aplicar para resolver muchos problemas de optimización de este tipo.

La mayor parte de las veces, la programación dinámica obtiene soluciones con un avance en reversa, desde el final de un problema hacia el principio con lo que un problema grande y complejo se convierte en una serie de problemas más pequeños y más fáciles de resolver.

3. CARACTERÍSTICAS COMUNES

Existen una serie de características que son comunes a la mayor parte de las aplicaciones de programación dinámica, las que enumeramos y analizamos en base al ejemplo presentado anteriormente.

- El problema se puede dividir en **etapas** que requieren una **política de decisión** en cada una de ellas. En el ejemplo las etapas estaban dadas por las diferentes alternativas de inversión. La política de decisión fue elegir en cada una, aquella que ofreciera mayor rendimiento.
- Cada etapa tiene un cierto número de estados asociados a ella. En nuestro ejemplo los estados asociados a cada etapa era el dinero disponible para invertir.

- El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el ***estado actual en un estado asociado con la siguiente etapa***. La decisión de cuánto invertir en la opción actual determina el dinero disponible para inversión en la siguiente alternativa analizada.
- El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una **política óptima** para el problema completo. En el problema de inversión, en el procedimiento de solución se construyó una tabla para cada etapa (n) que prescribe la decisión óptima (d_n*) para cada estado posible (x_n).Además de identificar la política óptima, el procedimiento indica qué decisiones tomar si en algún momento nos apartamos de ella. Es decir que nos muestra qué hacer en cada una de las circunstancias posibles.
- Dado el estado actual, una **política óptima para las etapas restantes** es **independiente** de la política adoptada en **estados anteriores**. Este es el ***principio de optimidad:*** Dado el dinero disponible en esta etapa, la política de inversión óptima desde aquí en adelante, es independiente de cómo se llegó a este estado. Este principio es el marco teórico que fundamenta la metodología de la PD.
- El procedimiento de solución se inicia al encontrar la **política óptima para la última etapa.**
- Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa $n+1$

  Para el ejemplo fue: $f_n(x_n) = r_n\, d_n + f^*_{n+1}\,(x_n - d_n)$

  Y el rendimiento óptimo para la etapa **n** dado el estado x_n

  $f_n^*(x_n) = \text{máx}\ \{ r_n\, d_n + f^*_{n+1}\,(x_n - d_n)\}$
- Cuando se usa esta relación recursiva, el procedimiento de solución se mueve **hacia atrás** etapa por etapa - encontrando cada vez la política óptima para esa etapa - hasta que encuentra la política óptima desde la **etapa inicial.**

4. CONCEPTOS IMPORTANTES

En los modelos de PD existen tres tipos de variables a saber:

Variable de etapa: Se trata de una variable ordenadora que representa cada uno de los subproblemas en los cuales se divide un problema de PD.

Variables de decisión (d_n): representan a las acciones posibles a tomar en la etapa n.

Variables de estado (x_n): sirven de enlace entre las etapas, describiendo la condición en que se encuentra el proceso al inicio de cada una de ellas. Estas variables son las más difíciles de identificar, para facilitar este proceso, hágase preguntas tales como: ¿Qué es lo

cambia de una etapa a otra? ¿Qué información se necesita para identificar la política óptima de aquí en adelante? ¿Cómo se puede describir la situación actual?

Función de transformación por etapas:

Las variables de estado de las sucesivas etapas se encuentran relacionadas a través de una relación recursiva. El tipo de relación recursiva que existe entre dichas variables es la responsable de que no exista un algoritmo de optimización único, como el simplex por ejemplo, sino que en realidad se trate de un enfoque para resolver problemas de este tipo.

En esta relación recursiva es de fundamental importancia la función de transformación por etapas, que enlaza a las variables de estado de etapas sucesivas (x_n, x_{n-1}) permitiendo identificar a la variable de estado x_{n-1} utilizando el valor de x_n y la decisión d_n.

Principio de optimidad de Bellman:

La principal consideración de la PD es que un problema grande y complejo puede ser descompuesto en problemas más pequeños que está relacionados entre sí y que son de más fácil resolución. En la descomposición del problema en subproblemas se encuentra implícito del principio de optimidad de Bellman, que puede enunciarse como sigue:

Una política óptima tiene la propiedad de que, independientemente de las decisiones tomadas para llegar a un estado particular en una etapa particular, las decisiones restantes que dependen de ésta, deben también ser óptimas.

5. OTRAS APLICACIONES

5.1 Distribución de Recursos

El ministerio de Salud Pública está planeando una campaña de vacunación contra la varicela para los meses de Mayo, Junio y Julio. Antes del periodo de vacunación, debe planificar su campaña de publicidad televisiva. Cuenta con un presupuesto de 9 millones de pesos para todo el período publicitario, que abarca el primer cuatrimestre del año.

El objetivo de la campaña es lograr un incremento significativo en la cantidad de personas que conocen la enfermedad y la importancia de la vacunación. Con datos de campañas anteriores se elaboró una tabla que refleja el número de personas dispuestas a vacunarse, de acuerdo a lo invertido en publicidad relativa a difundir información sobre la enfermedad.

Se ha impuesto la condición de que se invierta en publicidad por lo menos 1 millón de pesos en cada mes.

Gasto en publicidad	Enero	Febrero	Marzo	Abril
1	40	60	50	50
2	100	120	80	110
3	150	130	150	140
4	180	150	170	200
5	220	190	200	230
6	250	230	270	260

Tabla 6

¿Cómo deberá invertirse el presupuesto para maximizar el número de personas dispuestas a vacunarse?

Resolución del problema

La característica particular de este problema es que deben asignarse como mínimo $1 millón para publicidad en cada mes del periodo. Esto hace que el monto máximo que puede destinarse a un mes en particular es de $6 millones.

Las características fundamentales son:

1. El problema se puede dividir en subproblemas, en cada uno de ellos debe tomarse una decisión. Cada subproblema corresponde a una etapa en el proceso de resolución, en nuestro caso un mes.
2. El número de personas dispuestas a vacunarse no es proporcional a la cantidad dinero invertido en publicidad.
3. Al principio de cada mes el dinero disponible para invertir en publicidad, dependerá de lo invertido en los meses anteriores.
4. En cada mes se debe invertir por lo menos $1 millón. Como consecuencia el dinero disponible al inicio de cada mes debe ser suficiente para invertir $1 millón en ese mes y $1 millón en cada uno de los meses subsiguientes.
5. En cada mes como máximo se puede invertir en publicidad hasta $6 millones.

Corresponde ahora definir el objetivo y variables del problema.

Objetivo: maximizar el número de personas dispuestas a vacunarse.

Variables de etapa: cada uno de los próximos cuatro meses del primer cuatrimestre del año.

Variables de decisión: las alternativas de decisión en la etapa i (d_i) estarán representadas por el dinero destinado a publicidad en cada mes.

Variables de estado: para definir estas variables nos preguntamos ¿qué información necesitamos para tomar decisiones factibles en la etapa actual, sin reexaminar las decisiones que se tomaron en las etapas anteriores? En otras palabras, ¿que información necesito al inicio de cada mes para decidir cuánto invertir en publicidad en ese mes?

Respondiendo esta pregunta podemos decir que los estados en la etapa i (x_i) estarán representados por el dinero disponible al inicio del mes.

Es conveniente, antes de construir los cuadros para cada etapa, analizar cuáles pueden ser los estados posibles al inicio de cada una de ellas, considerando las restricciones identificadas con respecto al mínimo y máximo a invertir en cada mes. Debemos tener cuenta también que los estados al inicio de una etapa son iguales a los estados al final de la etapa anterior.

Enero (etapa 1)

Dinero disponible $9 millones

Febrero (etapa 2)

Como mínimo debe haber $3 millones, es decir uno para cada uno de los meses: Febrero, Marzo y Abril.

Como máximo pueden haber quedado $8 millones, dado que por lo menos se invirtió $1 millón en Enero.

Los estados se determinan como: $x_2 = x_1 - d_1$

Marzo (etapa 3)

Como mínimo $2 millones, es decir $1 millón para Marzo y otro para Abril.

Como máximo puede haber $7 millones disponibles, que surgen de $9 millones iniciales menos $1 millón de Enero y $1 millón de Febrero.

Estados posibles: $x_3 = x_2 - d_2$

Abril (etapa 4)

Como mínimo debe haber $1 millón.
Como máximo puede haber $6 millones disponibles.

Con la información anterior podemos comenzar el análisis en reversa, es decir comenzando desde Abril.

Estados posibles: $x_4 = x_3 - d_3$

Etapa 4 (Abril)

En esta última etapa del proceso, las decisiones están completamente determinadas por el objetivo, con lo cual la solución resulta ser trivial.

Así, como el objetivo es maximizar el número de personas que se vacunarán, siempre se invertirá en publicidad todo el dinero disponible.

x_4 $ disponibles para invertir (millones)	d_4^* Decisión óptima	$f^*_4(x_4)$ Rendimiento (pers. vacunadas)
1	1	50
2	2	110
3	3	140
4	4	200
5	5	230
6	6	260

Tabla 7

Etapa 3 (Marzo)

Debido a la restricción de invertir al menos $1 millón en cada mes, el dinero disponible al inicio de Marzo deberá ser por lo menos $2 millones y como máximo $7 millones.

En el caso de tener $2 millones disponibles, la única decisión factible es invertir $1 millón en Marzo, ya que debemos dejar $1 millón para Abril.

El rendimiento Marzo para el estado x_3= 2 y la decisión d_3= 1, estará formado por el número de personas dispuesta a vacunarse por haber invertido en Marzo $1 millón más el número de personas dispuestas a vacunarse por invertir en publicidad $1 millón en Abril.

En fórmulas

$$f_3(2) = r_3(1) + f_4^*(2-1) = 50 + 50 = 100$$

$$f_3(x_3) = r(d_3) + f_4(x_3 - d_3)$$

Asimismo, para el estado x_3= 4 y la decisión d_3= 2 el rendimiento, en número de personas será:

$$f_3(4) = r_3(2) + f_4^*(4-2) = 80 + 110 = 190$$

x_3 \ d_3	1	2	3	4	5	6	d_3^*	$f^*_3(x_3)$
2	50+50=100						1	100
3	50+110=160	80+50=130					1	160
4	50+140=190	80+110=190	150+50=200				3	200
5	50+200=250	80+140=220	150+110=260	170+50=220			3	260
6	50+230=280	80+200=280	150+140=290	170+110=280	200+50=250		3	290
7	50+260=310	80+230=310	150+200=350	170+140=310	200+110=310	270+50=320	3	350

Tabla 8

Etapa 2 (Febrero)

En Febrero, el dinero disponible para inversión podrá estar entre $3 a $8 millones.

Para el estado x_2=5 las decisiones posibles serán d_2=1, 2 o 3 ya que al menos deberán quedar $2 millones para los meses siguientes.

El rendimiento, para x_2=5 y d_2=1 por ejemplo, se obtiene sumando el rendimiento de invertir $1 millón en esta etapa más el óptimo si

dejamos 5 – 1= 4 millones para las etapas siguientes. Este último valor se obtiene de la tabla de la etapa 3, entrando con el estado 4 e identificando el óptimo.

x_2 \ d_2	1	2	3	4	5	6	d_2^*	$f^*_2(x_2)$
3	60+100=160						1	160
4	60+160=220	120+100=220					1-2	220
5	60+200=260	120+160=280	130+100=230				2	280
6	60+260=320	120+200=320	130+160=290	150+100=250			1-2	320
7	60+290=350	120+260=380	130+200=330	150+160=310	190+100=290		2	380
8	60+350=410	120+290=410	130+260=390	150+200=350	190+160=350	230+100=330	1-2	410

Tabla 9

Etapa 1 (Enero)

En enero como estamos al inicio del periodo, el dinero disponible es el total de $9 millones.

x_1 \ d_1	1	2	3	4	5	6	d_1^*	$f^*_1(x_1)$
9	40+410=450	100+380=480	150+320=470	180+280=460	220+220=440	250+160=410	2	480

Tabla 10

En esta tabla podemos observar que el máximo número de personas dispuestas a vacunarse será de 480 (en miles).

La política óptima de inversión en publicidad es: invertir $2 millones en Enero, $2 millones en Febrero, $3 en Marzo y finalmente $2 millones en Abril.

En resumen:

Mes	*Inversión (millones de $)*	*Rendimiento (personas)*
Enero	2	100
Febrero	2	120
Marzo	3	150
Abril	2	110
Total	$ 9	$ 480

Tabla 11

La fórmula recursiva utilizada en este problema fue:

$f_n(x_n) = r_n(d_n) + f^*_{n+1}(x_n - d_n)$

Y el rendimiento óptimo para la etapa **n** dado el estado x_n se identificó como:

$f_n^*(x_n) = \text{máx}\ \{ r_n d_n + f^*_{n+1}(x_n - d_n) \}$

5. 2 Reemplazo de equipos

Muchas empresas enfrentan el problema de determinar hasta cuándo usar una máquina antes de comprar una nueva, por lo que necesitan especificar una política de reemplazo para sus equipos.

Problemas de este tipo, llamados comúnmente problemas de reemplazo de equipos se resuelven mediante la PD.

Veamos el ejemplo siguiente:

Un fabricante de autopartes, posee un torno con dos años de uso. En la tabla se dan las estimaciones de mantenimiento, costo de reemplazo e ingresos producidos para un torno de iguales características, en función de la edad del mismo.

	Edad del torno					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Ingreso	10000	9000	8500	8000	7500	6500
Mantenimiento	100	500	800	1200	2000	2500
Reemplazo	---	3000	4200	5000	5500	5900

Tabla 12

El fabricante no desea conservar ningún torno después que cumple seis años y solamente se reemplazan por máquinas nuevas.

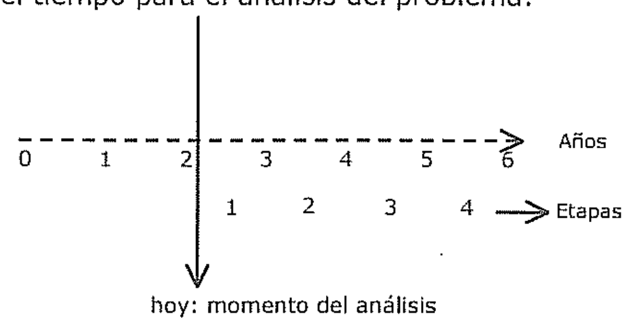
Se quiere determinar una política de reemplazo que maximice el beneficio total que proporciona el torno, durante los próximos cuatro años.

Resolución del problema

Objetivo: determinar una política de reemplazo para esta máquina de dos años, considerando los gastos de mantenimiento y los costos de en los que se incurre al comprar una nueva.

La máquina tiene actualmente dos años y no puede conservarse una vez que haya cumplido seis años.

El horizonte en el tiempo para el análisis del problema:



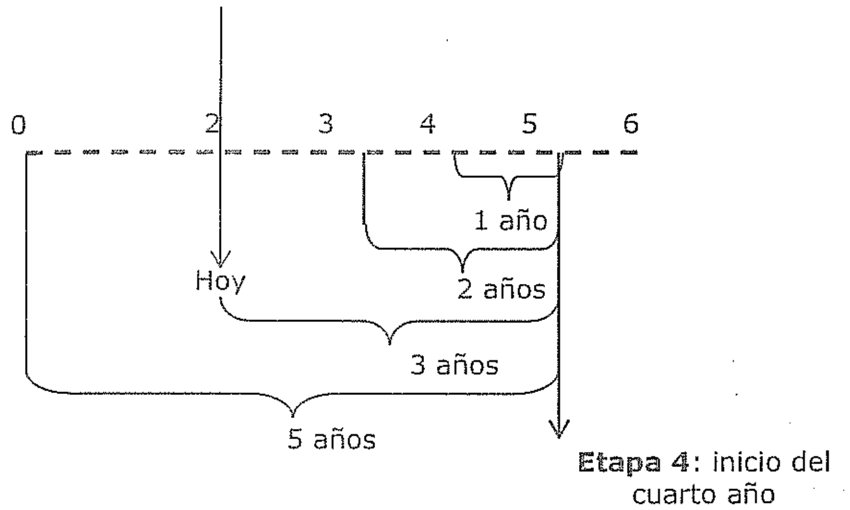
Analizando el gráfico anterior podemos decir que:

1. Las **etapas** del problema son cada uno de los próximos cuatro años.

2. Los **estados** en cada etapa son las posibles edades de la máquina al inicio de cada año.

3. Las **variables de decisión** en cada etapa pueden definirse como las alternativas de CONSERVAR o REEMPLAZAR el torno.

Comenzamos el análisis en la **etapa 4**; en esta las posibles edades son:



Estudiando la gráfica podemos advertir que al inicio de la etapa 4 la máquina puede tener 1, 2, 3 ó 5 años. Cuatro años no puede tener, ya que si no la reemplazamos cuando tenía 2 años, entonces se trata de la máquina con la cual iniciamos el análisis.

La tabla correspondiente a esta etapa se muestra a continuación:

x_4	CONSERVAR	REEMPLAZAR	d^*_4	$f^*(x_4)$
1	9000-500= 8500	10000-100-3000= 6900	Conservar	8500
2	8500 – 800= 8300	10000-100-4200=5700	Conservar	8300
3	8000-1200=6800	10000-100-5000= 4900	Conservar	6800
5	6500-2500=4000	10000-100-5900= 4000	Conservar o Reemplazar	4000

Tabla 13

Analicemos los resultados correspondientes al estado $x_4 = 1$

Si la máquina tiene 1 año y decidimos conservarla, tendremos un ingreso de $9000 y como gastos de mantenimiento tendremos $500, lo que arroja un beneficio de $8500.

Si nuestra decisión es reemplazarla por una nueva, entonces vamos a comenzar el año con una máquina de 0 años, la que nos dará un ingreso de $10000 con un gasto de mantenimiento de $100; pero además debemos contar con el costo del reemplazo que es de $ 3000. Esto resulta en un beneficio neto, de $ 6900, siendo en este caso la decisión óptima conservar la máquina.

Con una lógica similar se determinan los restantes resultados de la tabla.

Etapa 3: con el mismo razonamiento que en la etapa anterior, las edades posibles de la máquina son 1, 2 ó 4 años.

Veamos cómo se calculan los resultados de conservar o reemplazar para el caso de que la máquina tenga 1 año al inicio de la etapa 3.

Si la máquina tiene 1 año al inicio de la etapa y decidimos conservarla, tendremos un ingreso de $9000 con un gasto de mantenimiento de $ 500, a esto debemos sumarle el beneficio óptimo de entrar al año siguiente (etapa 4) con una máquina de 2 años de antigüedad –que es $8300- . El beneficio que tendremos si tomamos esta decisión será de $16800.

Si nuestra decisión es cambiarla, tendremos un ingreso de $10000 con un gasto de mantenimiento de $100 y con costo por el reemplazo de $3000; como vamos a comenzar el año siguiente con una máquina de 1 año, le sumamos el beneficio óptimo correspondiente a este estado para la etapa 4, es decir $8500. Obtenemos en este caso un beneficio de $15400.

Los restantes resultados se presentan en la tabla siguiente:

x_3	CONSERVAR	REEMPLAZAR	d^*_3	$f^*(x_3)$
1	9000-500 + 8300= 16800	10000 -100 – 3000 +8500 = 15400	CONSERVAR	15400
2	8500-800 + 6800= 14500	10000 – 100 – 4200 + 8500= 14200	CONSERVAR	14200
4	7500 – 2000 + 4000 = 9500	10000 – 100 – 5500 + 8500 =12900	REEMPLAZAR	12900

Tabla 14

Observe que siempre que conserva la máquina entra en la otra etapa con una máquina que tiene 1 año más. Igualmente, siempre que la decisión es reemplazar entra a la siguiente etapa con una máquina de 1 año de edad.

Etapa 2:

x_2	CONSERVAR	REEMPLAZAR	d^*_2	$f^*(x_2)$
1	9000 – 500 + 14200 = 22700	10000 – 100 – 3000 + 15400 = 22300	CONSERVAR	22700
3	8000 – 1200 + 12900 = 19700	10000 – 100 - 5000 + 15400 = 20300	REEMPLAZAR	20300

Tabla 15

Compruebe los resultados que corresponden a las etapas 2 y 1.

Etapa 1:

x_1	CONSERVAR	REEMPLAZAR	d^*_1	$f^*(x_1)$
2	8500- 800 + 20300 = 28000	10000-100 - 4200 + 22700 = 28400	REEMPLAZAR	**28400**

Tabla 16

Beneficio total máximo

De acuerdo a los resultados que muestran las tablas, para lograr el beneficio de $28400 en los próximos 4 años, comenzando con una máquina de 2 años, la empresa deberá remplazarla en este momento y luego conservarla por el resto del período de análisis.

Adoptando la siguiente simbología:

Ingreso = I(t)

Mantenimiento = M(t)

Costo de reemplazo = C(t)

Donde t representa a la edad del torno, la decisión óptima en la etapa *n* se encuentra recursivamente como:

$$f^*_n(t_n) = \text{máx}\ \{I(t_n) - M(t_n) + f^*_{n+1}(t+1)\ ;\ I(0) - M(0) - R(t_n) + f^*_{n+1}(1)\}$$

5. 3 Planificación de producción e inventario

Córdoba Autopartes S.A. quiere determinar la mejor política de producción y almacenamiento, de uno de sus productos, para los próximos tres meses. Los datos disponibles para el trimestre se muestran en la siguiente tabla:

Mes	Demanda mensual	Capacidad de Producción	Costo de Producción unitario	Costo de almacenamiento por unidad
1	50	50	$2,00	$0,30
2	30	40	$1,50	$0,30
3	40	50	$2,00	$0,20

Tabla 17

Los productos que se fabrican durante un mes pueden servir para abastecer la demanda de ese mes o de alguno futuro.

El costo de almacenamiento se calcula sobre la mercadería en inventario al inicio de cada mes, actualmente existe un inventario de 10 unidades y la empresa desea que no exista inventario al final del trimestre. La capacidad de almacenamiento es de 30 unidades.

Las corridas de producción se llevan a cabo en múltiplos de 10 unidades (es decir 10, 20 o 30 unid.)

Resolución del problema

En este problema se revisa el inventario al inicio de cada periodo de producción –mes- y a continuación se decide cuánto producir ese mes.

Las características fundamentales son:

1. El problema se puede dividir en subproblemas, en cada uno de ellos debe tomarse una decisión. Cada subproblema corresponde a una etapa en el proceso de resolución, en nuestro caso un mes.
2. Al principio de cada mes la empresa conoce la demanda durante ese periodo y debe determinar cuántas unidades producir.
3. La capacidad de producción en cada mes es limitada.
4. Se debe cumplir con la demanda de cada mes, y esto puede hacerse con las unidades que se produzcan durante el periodo y/o con las que están en inventario.
5. Existe una capacidad limitada de almacenamiento.
6. Las unidades que quedan en almacén al final de un periodo, generan un costo, que se carga por las existencias de mercadería en inventario al inicio de cada mes. No se considerarán almacenadas en cada etapa las unidades que se produjeran en esa etapa.
7. Los costos de producción y almacenamiento son diferentes en cada periodo.

Luego de este análisis definimos el objetivo y las variables del problema.

Objetivo: minimizar los costos totales –producción más almacenamiento- de satisfacer a tiempo la demanda.

Variables de etapa: cada uno de los próximos tres meses.

Variables de decisión: las alternativas de decisión en la etapa *i* (d_i) estarán representadas por el número de unidades a producir en cada mes.

Variables de estado: para definir estas variables nos preguntamos ¿qué información necesitamos para tomar decisiones factibles en la etapa actual, sin reexaminar las decisiones que se tomaron en las etapas anteriores?

Respondiendo esta pregunta podemos decir que los estados en la etapa *i* (x_i) estarán representados por el número de unidades en inventario.

Antes de construir los cuadros para cada etapa, analizamos cuáles pueden ser los estados posibles al inicio de cada una de ellas, recordando que los estados al inicio de una etapa representan a los estados al final de la etapa anterior. En nuestro caso el inventario al inicio de un mes en particular será igual al inventario al final del mes anterior. Al inicio de cada mes establecemos, cuál es la cantidad mínima y máxima que puede haber en almacén teniendo en cuenta la capacidad de inventario, la capacidad de producción y la demanda del mes anterior. Así:

Mes 1 (etapa 1)

- Inventario al inicio = 10 unidades
- Capacidad máxima de producción = 50 unidades
- Demanda = 50 unidades

Teniendo en cuenta estas tres restricciones podemos decir que, partiendo de un inventario inicial de 10 unidades, produciendo a la capacidad máxima y con una demanda de 50 unidades, **el número máximo de unidades que pueden quedar al final del mes es 10.**

Mes 2 (etapa 2)

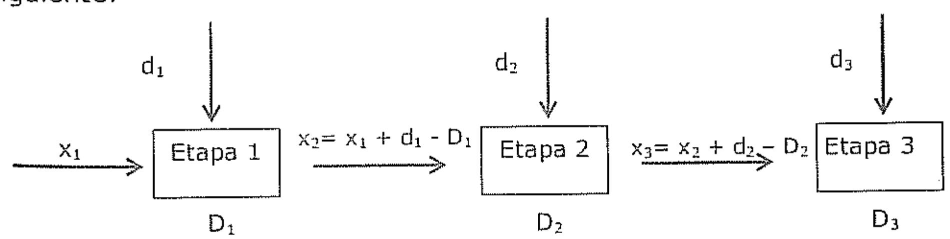
- Inventario máximo al inicio = 10 unidades
- Capacidad máxima de producción = 40 unidades
- Demanda = 30 unidades

Analizando las condiciones de la etapa notamos que si comenzamos el mes con el máximo posible de unidades en inventario (10) y producimos a máxima capacidad (40), dado que la demanda es de 30 unidades, como máximo nos pueden quedar **20 unidades al final del mes.**

Mes 3 (etapa 3)

En este mes iniciamos con 20 unidades en inventario como máximo y debemos tener presente que la empresa no quiere inventarios al final del trimestre, es decir que **Inventario Final = 0.**

El análisis anterior puede observarse gráficamente en la figura siguiente:



A continuación elaboramos las tablas para cada etapa comenzando desde la última, es decir el mes 3.

Etapa 3

En esta etapa debemos considerar:

- Demanda (D_3) = 40 unidades
- Capacidad de Producción = 50 unid.
- Máximo inventario al inicio = 20
- Inventario al Final = 0 unid.
- $x_3 = x_2 + d_2 - D_2$
- $f^*_3(x_3) = 0{,}20\ (x_3) + 2\ (d_3)$

x_3	d_3^*	$f^*_3(x_3)$
0	40	80
10	30	62
20	20	44

Etapa 2

Consideraciones:

- Demanda (D_2) = 30 unid.
- Capacidad de Producción = 40 unid.
- Máximo inventario al inicio = 10
- $x_2 = x_1 + d_1 - D_1$
- $f_2(x_2, d_2) = 0{,}30\ (x_2) + 1{,}5\ (d_2) + f^*_3(x_2 + d_2 - D_2)$
- $f^*_2(x_2) = \min f_2(x_2, d_2)$

x_2 \ d_2	20	30	40	d^*_2	$f^*_2(x_2)$
0	NO FACTIBLE	45+80 =125	60+62 =122	40	122
10	3+30+80 =113	3+45+62 =110	3+60+44 =107	40	107

Tabla 18

Etapa 1

Consideraciones:

- Demanda (D_1) = 50 unid.
- Capacidad de Producción = 50 unid.
- Inventario Inicial (x_1) = 10 unid.
- $f_1(x_1, d_1) = 0{,}30\ (10) + 2\ (d_1) + f^*_2(10 + d_1 - D_1)$
- $f^*_1(x_1) = \min f_1(x_1, d_1)$

Recuerde que: Inventario Inicial $x_n = x_{n-1} + d_{n-1} - D_{n-1}$

x_1 \ d_1	40	50	d^*_1	$f^*_1(x_1)$
10	3+80+122 = 205	3+100+107 = 210	40	205

Tabla 19

Observamos que el **costo total mínimo es de $205.**

Esto se consigue de la siguiente manera:

Mes	Inventario Inicial	Producción	Demanda	Inventario Final
1	10	40	50	0
2	0	40	30	10
3	10	30	40	0

Tabla 20

5. 4 Un problema con recursiones no aditivas

María está estudiando para tres exámenes, que debe presentar el mismo día. Debido a problemas laborales, le quedan 4 días adicionales para preparar estos exámenes y prefiere no estudiar más de una asignatura por día. Para cada una de ellas ha estimado cuál es la probabilidad de reprobarla si le asigna 0, 1, 2, 3, o 4 días adicionales, la que se muestra en la siguiente tabla:

Días	Probabilidad de reprobar		
	Álgebra	Economía	Sociología
0	0,60	0,45	0,30
1	0,50	0,40	0,25
2	0,40	0,35	0,15
3	0,35	0,20	0,10
4	0,15	0,15	0,05

Tabla 21

¿Cómo deberá María distribuir estos días adicionales si quiere minimizar la probabilidad de reprobar los tres exámenes?

Resolución del problema

Objetivo: minimizar la probabilidad de reprobar los tres exámenes.

Variables de etapa: cada uno de los exámenes.

Variables de decisión: cuántos días adicionales asignar a cada examen.

Variables de estado: días disponibles para asignar.

Observe que en este caso la diferencia con los casos anteriores, radica en la función recursiva. La probabilidad de que María falle en los tres exámenes es una probabilidad conjunta y se calcula como el producto de las probabilidades individuales. Así, la probabilidad actual de reprobar las tres asignaturas es de (0,60) x (0,45) x (0,30) = 0,081

Sin embargo, La función de transformación de etapas no ha variado. Los estados al inicio de una etapa en particular, que son los estados al final de la etapa anterior, se determinan como los estado al inicio de la etapa anterior menos los días asignados a esa etapa. En símbolos:

$$x_{n+1} = x_n - d_n$$

También en este problema, al igual que en el de inversiones, se admite la posibilidad de no asignar días adicionales a alguno de los exámenes que está preparando.

A continuación se presenta las tablas correspondientes a las tres etapas.

Verifique los cálculos para las tres etapas.

Etapa 3 (Sociología)

x_3	d_3^*	$f_3^*(x_3)$
0	0	0,30
1	1	0,25
2	2	0,15
3	3	0,10
4	4	0,05

Tabla 22

Etapa 2 (Economía)

x_2 \ d_2	0	1	2	3	4	d_2^*	$f_2^*(x_2)$
0	0,45(0.3)= 0,135					0	0,135
1	0,45(0,25)= 0,1125	0,4(0,3)= 0,12				0	0,12
2	0,45(0,15)= 0,0675	0,4(0,25)= 0,10	0,35(0,3)= 0,105			0	0,0675
3	0,45(0,1)= 0,045	0,4(0,15)= 0,06	0,35(0,25)= 0,0875	0,2(0,3)= 0,06		0	0,045
4	0,45(0,05)= 0,0225	0,4(0,1)= 0,04	0,35(0,15)= 0,0525	0,20(0,25)= 0,05	0,15(0,3)= 0,045	0	0,0224

Tabla 23

Etapa 1 (Álgebra)

x_1 \ d_1	0	1	2	3	4	d_1^*	$f_1^*(x_1)$
4	0,6(0,0225)= 0,0135	0,5(0,045)= 0,0225	0,4(0,0675)= 0,027	0,35(0,1125)= 0,0394	0,15(0,135)= 0,02025	0	0,0135

Tabla 24

Mínima probabilidad de falla en los tres exámenes

De acuerdo a lo anterior, podemos decir que María deberá dedicarlo los 4 días adicionales a Sociología. De esta manera la probabilidad de ser reprobada en los tres exámenes es de 0,0135 y es la mínima posible.

En todos los ejemplos analizados, las variables de estados fueron discretas. Además el estado en la etapa *n* estaba completamente determinado por el estado y la decisión en la etapa *n-1*. Este tipo de problemas corresponde a la Programación Dinámica Discreta Determinista.

En general podemos decir para este tipo de problemas que, en la etapa *n* el proceso se encontrará en algún estado x_n, se selecciona decisión d_n para esa etapa y como consecuencia se llega a algún estado, x_{n+1}, al final de la misma. El valor de la función objetivo para la política óptima desde le etapa *n+1* en adelante se calculó como $f^*_{n+1}(x_{n+1})$. La etapa *n* hará una contribución al objetivo r_n. Luego, de la combinación apropiada de estos dos valores se obtiene un valor para la función objetivo $f_n(x_n,d_n)$ en la etapa *n*. La optimización respecto a x_n, nos permite identificar a $f^*_n(x_n)$. De esta manera, el procedimiento se mueve hacia atrás etapa por etapa hasta llegar a la primera, momento en el cual se tendrá la solución óptima del problema completo.

RECOMENDACIONES ÚTILES:

- Defina primero las variables de decisión, teniendo presente el logro del objetivo.
- Defina ahora las etapas, considerando que debe tomar una decisión para cada etapa, esto le permitirá identificar a cada uno de los subproblemas.
- Para identificar a las variables de estado, hágase preguntas tales como: ¿Qué es lo cambia de una etapa a otra? ¿Qué información se necesita para identificar la política óptima de aquí en adelante? ¿Cómo se puede describir la situación actual?
- Quizás esta sea la recomendación más importante: dividir el problema en subproblemas es sólo una estrategia de solución, si usted no los enlaza, no logrará la optimización global.

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

Emergencias Córdoba ha adquirido 6 nuevas ambulancias, con el objetivo de reducir sus tiempos de llegadas al momento de producirse una urgencia médica. Debe distribuirlas entre tres de sus bases, entregándole por lo menos una a cada una.

Con el fin de tomar la mejor decisión posible se ha hecho una estimación de los tiempos promedio de llegada para cada asignación posible de las nuevas unidades, la que se presenta en la siguiente tabla.

	Número de ambulancias nuevas			
	1	**2**	**3**	**4**
Base 1	5	4	2	1
Base 2	4	3	2	1
Base 3	5	4	3	1

¿Cómo deberán distribuirse las nuevas ambulancias y cuál será el tiempo promedio de llegada ante una emergencia? Identifique la fórmula recursiva utilizada.

ACTIVIDAD 2

Para mejorar sus ingresos Tomás ha decido destinar parte del terreno de su granja para sembrar vegetales. Planea plantar tres tipos de ajíes: verdes, rojos y amarillos. El huerto, que mide 10 x 20, esta dividido en hileras de 20 metros de largo cada una. Las hileras de ajíes verdes y rojos tienen dos metros de ancho cada una y las de pimientos amarillos deben ser de tres metros de ancho. Debido a la diferente productividad de las plantas, Tomás ha estimado que cada hilera de ajíes verdes le producirá un ingreso de $100 y el ingreso de cada hilera de ajíes rojos y amarillos será de $70 y $50 respectivamente. Ha decidido además que deberá plantar por lo menos una hilera de ajíes verdes y no más de tres de los amarillos.

a) Utilice la programación dinámica para determinar cuántas hileras de cada tipo de ají debe plantar Tomás para maximizar sus ingresos.
b) Identifique la fórmula recursiva utilizada.

ACTIVIDAD 3

Una estudiante universitaria tiene siete días para preparar los exámenes parciales de cuatro cursos y quiere asignar el tiempo que tiene para estudiar de la manera más eficiente posible. Necesita por lo menos un día para cada curso y quiere concentrarse sólo en un curso cada día.

Como hace poco tomó un curso de IO, ha decidido aplicar programación dinámica para hacer estas asignaciones que maximicen el total de puntos obtenidos en los cuatro cursos. Estima que las distintas opciones en días de estudio le redituarán puntos de calificación según la siguiente tabla:

Número de días	*Puntos de calificación estimados*			
	Curso			
	1	2	3	4
1	3	5	2	6
2	5	5	4	7
3	6	6	7	9
4	7	9	8	9

a) Resuelva este problema con programación dinámica, definiendo objetivo, etapas, variables de estado y de decisión.
b) Identifique la fórmula recursiva utilizada.

ACTIVIDAD 4

Una empresa de aparatos electrónicos tiene un contrato para entregar el siguiente número de placas de video durante los tres meses siguientes:

MES	1	2	3
N° de Unidades	400	300	200

Por cada placa que se produce en los meses 1 y 2 se incurre en un costo variable de $30, por cada placa que se produce en el mes 3 se incurre en un costo variable de $35. El costo de almacenamiento mensual, es de $2 por cada placa de video. Las placas que se fabrican durante un mes pueden servir para abastecer la demanda de ese mes o de alguno futuro. Suponga que la producción durante un mes debe hacerse en múltiplos de 100 y con un máximo de 500 unidades, con una capacidad de almacenamiento de 200 unidades. El nivel actual de inventarios es de 100 unidades y que no se quieren unidades en inventario al final del trimestre.

a. Utilice programación dinámica para determinar una política óptima de producción e inventario.
b. Identifique la función recursiva utilizada.

ACTIVIDAD 5

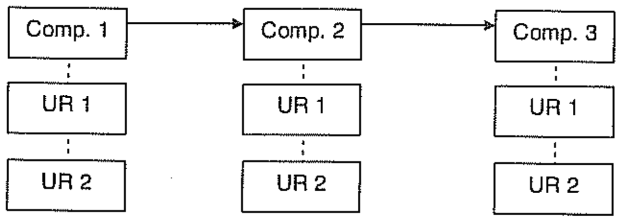
La empresa CompuTar SA, fabricante de procesadores para computadoras, quiere determinar el programa anual de producción e inventario, que maximice su contribución total. La información relevante del problema, se da en la siguiente tabla:

TRIMESTRE	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN (UNIDADES)	DEMANDA (UNIDADES)	COSTO DE PRODUCCIÓN (UNITARIO)	PRECIO DE VENTA (UNITARIO)	COSTO DE INVENTARIO (UNITARIO)
1	600	400	20	50	10
2	400	500	25	50	10
3	700	400	30	60	10
4	500	500	30	60	10

El inventario al inicio del trimestre 1 es de 100 unidades y la empresa quiere tener por lo menos 150 unidades en inventario al final del año, con el objetivo de hacer frente a las necesidades de inicio del año siguiente.

ACTIVIDAD 6

Julián debe armar un dispositivo electrónico de control. El dispositivo está formado por tres componentes en serie, de manera que la falla en uno alguno de los componentes origina la falla en el dispositivo. Se puede mejorar la confiabilidad del dispositivo de control instalando, en paralelo, una o dos unidades de reserva para cada una de los componentes. De esta manera, ante la falla de uno de los componentes entra en funcionamiento la unidad de reserva. En la figura se muestra esta situación.



En la tabla se proporciona la confiabilidad de cada componente, es decir la probabilidad de que no fallen.

Nº Unidades en paralelo	Componente 1	Componente 2	Componente 3
1	0,7	0,8	0,6
2	0,8	0,85	0,7
3	0,9	0,95	0,9

a) Utilice la programación dinámica para indicarle a Julián como construir el dispositivo para lograr la mínima probabilidad de falla y cuál es esta probabilidad.

b) Defina el objetivo y las variables del problema.

c) Identifique la función recursiva utilizada.

CAPÍTULO 8

PROGRAMACIÓN NO LINEAL

1. INTRODUCCIÓN

En numerosos problemas, las funciones o relaciones matemáticas que intervienen no son necesariamente lineales. De hecho, tal vez se puede decir que los problemas del mundo económico y empresario que se ajustan totalmente a la linealidad son la excepción y no la regla.

Entre los supuestos del modelo de PL que comúnmente no se cumplen y originan programas no lineales (PNL), se pueden mencionar:

- *Aditividad.* Es decir que, las contribuciones de dos o más variables al objetivo o a las restricciones funcionales no son independientes entre sí. En forma general podríamos decir que el total no es igual a la suma de las partes, y esto se da cuando existe una interacción entre las variables, por ejemplo cuando se mezclan sustancias químicas en la elaboración de un producto.
- *Proporcionalidad.* Este supuesto no se cumple en problemas en los cuales, por ejemplo, el ingreso obtenido por la venta de un producto no es proporcional a las unidades vendidas, ya que esta cantidad está en función del precio, el que será en estos casos una variable de decisión. Otro ejemplo del no cumplimiento de esta hipótesis se da cuando demasiados operarios son asignados para realizar una tarea, el rendimiento de cada trabajador puede disminuir en lugar de mantenerse constante, es decir que existen deseconomías o economías de escala.

En resumen, la existencia de diferentes tipos de relaciones, sean de carácter económico, lógicas, físicas, estructurales, etc., pueden dar lugar a la aparición de características de no linealidad en un modelo matemático.

Es importante destacar que, aunque los fenómenos no lineales son comunes, la posibilidad de lograr la optimización de estos modelos es mucho más difícil que en los modelos lineales y que los algoritmos desarrollados para su resolución son menos eficientes. Así, a diferencia de la PL, no se puede asegurar que un algoritmo de resolución de PNL logrará siempre encontrar la solución óptima para cualquier problema.