La tabla que se presenta a continuación contiene las valoraciones de cada una de las alternativas respecto a cada criterio y los pesos de los criterios

	Max VAN	*Max* NE	*Max* PE	*Min* II
A1	100	7	B	1800
A2	200	8	B	1600
A3	100	4	MB	1200
A4	200	6	E	2500
A5	250	9	MB	3000
Pesos w_j	0,365	0,185	0,2	0,25

Escala Lingüística utilizada en la evaluación del criterio Posibilidades de Expansión.

Excelente	*Muy Bueno*	*Bueno*	*Regular*	*Malo*
10	8	6	4	2

CAPÍTULO 13

Conocimientos Básicos Previos

1. CONOCIMIENTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA

1.1. VECTORES

Definición

Sean p_1, p_2, ..., p_n, *n* números reales, un *vector fila o renglón* se define como un conjunto ordenado de dichos números escritos de la siguiente manera:

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & .. & .. & p_n \end{bmatrix}$$

Entonces P se llama vector fila y la componente i-ésima es p_i.

Análogamente, un vector columna se define como un conjunto de *n* números reales escritos de la siguiente manera:

$$P=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{bmatrix}$$

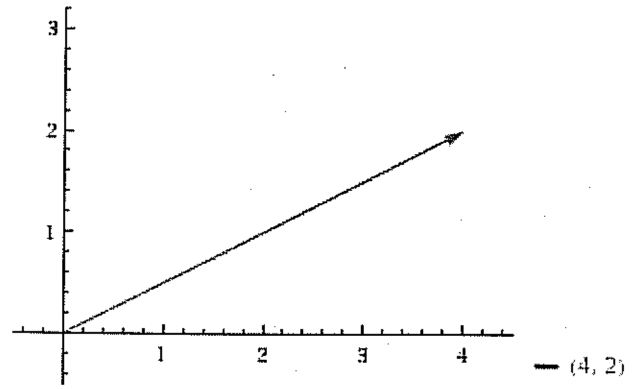
Dimensión de un vector: es el número de componentes que tiene el vector.

Representación gráfica de un vector: geométricamente todo vector se puede representar en un espacio de tantas dimensiones como sea el orden del mismo y consiste en un segmento orientado que une el origen del sistema con el punto representativo de las componentes del vector en el espacio considerado, siendo las componentes del vector las coordenadas de dicho punto. Gráficamente, se podrán representar hasta vectores de orden 3.

Por ejemplo, *en el espacio bidimensional* un vector es una parte de una recta en el que se identifican su origen y su extremo.

Un *vector v* se representa por el par ordenado v = (x_1, x_2). Los valores x_1, x_2 se denominan *componentes del vector.*

El vector v = (4,2) se representa con el segmento de recta que une el origen (0,0) y el punto (4, 2).



Vector unidad

Es un vector cuya i-ésima componente es igual a la unidad y todos los demás elementos son nulos.
Ejemplo:

$$[0 \quad 1] \quad [1 \quad 0] \quad [1 \quad 0 \quad 0] \quad [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Vector nulo

Es aquel vector cuyas componentes son todas iguales a cero.

Ejemplo: $\varnothing = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Igualdad de vectores

Dos vectores V y P son iguales, y se escribe V=P, si todas sus componentes correspondientes son iguales.

$$V = P \quad \Rightarrow \quad v_i = p_i \quad \forall i$$

Dos vectores no pueden ser iguales a menos que tengan el mismo número de componentes.
Notar que si V=P $\Rightarrow$ P=V

Producto interno de vectores

El producto interno de vectores X e Y, se define como la suma de los productos de los elementos del primer vector por los elementos correspondientes del segundo vector.

$$X\ Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = escalar$$

Ejemplo:

$$X = [1 \quad -2 \quad 0 \quad 2] \qquad Y = [-1 \quad 3 \quad 2 \quad 6]$$

$$X.Y = 1(-1) + (-2)3 + 0(2) + 2(6) = 5$$

Observar que el resultado es un *número real.*

Propiedades

1. X Y = Y X
2. (αX) Y = α(X Y)
3. (X + Y) Z = X Z + Y Z
4. X X $\geq$ 0 X X = 0 $\Leftrightarrow$ X = $\varnothing$

Valor absoluto, módulo o longitud de un vector

Dado un vector $P = [p_1 \quad p_2 \quad .. \quad .. \quad p_n]$ su valor absoluto, módulo o longitud queda definido por:

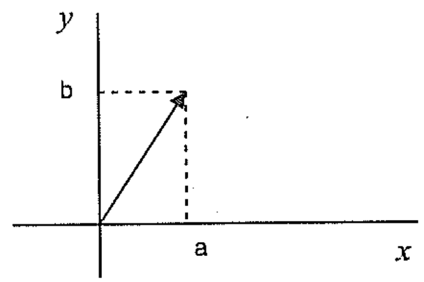
$$|P| = +\sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2} + ... + p_n^{\,2}}$$

$$|P| = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^{\,2}}$$

$$|P| = +\sqrt{P.P}$$

Supongamos un vector de dos componentes
X = (a , b)

Gráficamente



Si queremos calcular la longitud podemos usar el teorema de Pitágoras, entonces:

$$|X| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que generalizando el cálculo a vectores de más de dos componentes nos queda la definición antes dada.

Suma o adición de vectores

Sean $P=[p_1 \;\; p_2 \;\; .. \;\; .. \;\; p_n]$ y $Q=[q_1 \;\; q_2 \;\; .. \;\; .. \;\; q_n]$ dos vectores en el espacio n-dimensional. La suma de P y Q, que escribimos P + Q se describe como el vector

$$P+Q=[(p_1+q_1) \;\; (p_2+q_2) \;\; .. \;\; .. \;\; (p_n+q_n)]$$

Es un vector del mismo número de elementos que se obtiene sumando los elementos correspondientes de los vectores dados.
Notar que para que esta operación sea posible es necesario que los vectores tengan el mismo número de componentes.
Propiedades:

1. P + Q = Q + P
2. P+ (Q +S) = (P + Q) + S
3. P + (-P) = ∅

Producto de un vector por un número real (escalar)

Dado un vector $P=[p_1 \;\; p_2 \;\; .. \;\; .. \;\; p_n]$ y dado un escalar c, el producto del escalar c por el vector P será igual un vector del mismo orden (número de componentes) que el dado en el que cada una de sus componentes se obtiene multiplicando cada p_i por c.

$$Q=cP=[cp_1 \;\; cp_2 \;\; .. \;\; .. \;\; cp_n]$$

Propiedades

1. *c*(P+S) = *c*P + *c*S
2. (*c* + *d*)P = *c*P + *d*P
3. *c*(*d*P) = (cd) P
4. 1P = P
5. 0P = ∅

Combinación Lineal de vectores

Sean V_1, V_2, ..., V_n un conjunto de vectores y α_1, α_2, ... α_n un conjunto de escalares. El vector V que resulta de la suma de los productos década escalar por un vector, definido de la siguiente manera:

$$V=\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+.....+\alpha_n V_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i V_i$$

se dice que es una combinación lineal de los vectores V_1, V_2, ..., V_n siendo los α_i los coeficientes de esa combinación lineal.
Ejemplo:

$$V_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \qquad V_2=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} \qquad \alpha_1=2 \;\; y \;\; \alpha_2=-1$$

El vector V será:

$$V=2\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

Observaciones:

1. El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores. Para ello es suficiente con elegir los escalares todos iguales a cero.

$$\varnothing=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad V_1=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \qquad V_2=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$ es suficiente con que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

2. Todo vector es combinación lineal de sí mismo y en general de todo conjunto que lo contiene.
   a) Dado V, su combinación lineal sería V = 1V donde α=1
   En todos los casos podemos expresar a un vector como combinación lineal de sí mismo.
   b) Dado un conjunto de vectores, cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal del conjunto que lo contiene.
   Dados V_1 , V_2 , ..., V_n
   En general:
   $$V_1 = 1V_1 + 0V_2 + ... + 0V_n$$

Combinación Lineal convexa de vectores

Sean V_1, V_2, ..., V_n un conjunto de vectores y α_1, α_2, ... α_n un conjunto de escalares que cumplen con las siguientes condiciones:

$$\alpha_i \geq 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

El vector W que resulta de la suma de los productos de los escalares con los vectores:

$$W = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$$

se dice que es una combinación lineal convexa de los vectores $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Independencia lineal de vectores

Los vectores de un conjunto, todos de la misma dimensión, son linealmente independientes si ninguno de ellos puede ser expresado como combinación lineal de los restantes.
Una condición necesaria y suficiente para que los vectores $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sean linealmente independientes es que la igualdad

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n = \varnothing$$

se cumpla únicamente para todos los $\alpha_i = 0$
O sea, tiene que cumplirse:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$$

De esta manera, ningún vector podrá ser expresado en función de los restantes.

Dependencia lineal de vectores

Un conjunto de vectores es linealmente dependiente, cuando por lo menos uno de los vectores que lo componen, pueda ser expresado como combinación lineal de los restantes.
Para que un conjunto de vectores sea linealmente dependiente, la condición necesaria y suficiente es que la igualdad:

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n = \varnothing$$

Se debe verificar para al menos un escalar α_i no nulo.

Observaciones:

1. Cualquier vector puede expresarse de una única forma como combinación lineal de k vectores linealmente independientes.

2. Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es linealmente dependiente.

3. Un conjunto que contiene un solo vector es linealmente dependiente si se trata del vector nulo y linealmente independiente en cualquier otro caso.

4. El conjunto formado por los vectores unidad, en todos los casos, es linealmente independiente.

1.2. MATRICES

Definición

Una matriz A es un conjunto de números reales dispuestos en forma rectangular. Si el arreglo tiene *m* renglones y *n* columnas entonces se llama matriz *mxn*. Se dice que el tamaño o dimensión es *m* por *n*.
Se indica como a_{ij} al elemento que aparece en el renglón i-ésimo y la columna j-ésima
Ejemplo de matriz de 2x3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Una matriz que tiene *m* filas y *m* columnas se llama matriz cuadrada.
Algunos conceptos

Diagonal principal:

$$\begin{bmatrix} X & & \\ & X & \\ & & X \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: todas sus componentes distintas de cero están en la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior: todas las componentes que se encuentran debajo de los elementos de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior: si todas las componentes que se encuentran arriba de los elementos de la diagonal principal son ceros.

Matriz identidad o forma canónica: los elementos de la diagonal principal son todos iguales a la unidad y los restantes son iguales a cero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nula si todos los elementos son iguales a cero, se simboliza como ϕ

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices *mxn*. La suma A+B de las dos matrices es la matriz *mxn*:

$$A+B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Esta definición es aplicable para la suma de A y B sólo si son del mismo orden.
En definitiva, la suma de dos matrices del mismo tamaño se obtiene sumando las componentes correspondientes de las matrices.

Propiedades:

1. $A + \phi = A$
2. $A + B = B + A$
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$

Multiplicación por un escalar

Sea α un escalar y A una matriz *nxm*, el producto αA se obtiene a partir de A multiplicando cada una de las componentes de A por el escalar α.

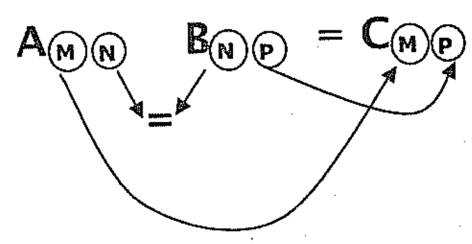
Propiedades
Sean A y B dos matrices *mxn* y α y β escalares, entonces:

6. $\alpha (A+B) = \alpha A + \alpha B$
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
8. $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$
9. $1A = A$
10. $0A = \varnothing$

Multiplicación de matrices

Sean A una matriz de orden *mxr* y B una matriz de orden *rxn*. El producto AB es la matriz *mxn* cuya componente ij-ésima es el producto interno del renglón i-ésimo de A y la columna j-ésima de B.

Para que puedan multiplicarse *deben ser compatibles*, es decir:



Propiedades

Asociativa: Dadas las matrices A_{mn} B_{np} C_{pr}

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

Distributiva con respecto a la suma: Si A, B y C son de tamaños apropiados

1. $A\,(B+C) = AB + AC$
2. $(B + C)\,A = BA + CA$

No es conmutativa

$A_{mn}\,B_{np}$ $AB = C_{np}$
$BA \rightarrow$ no se puede

$A_{mn}\,B_{nm}$ $AB = C_{mm}$
$BA = D_{nn}$

$A_{mm}\,B_{mm}$ $AB \neq BA$ en general

Si I es una matriz identidad y $A_{mn} \Rightarrow I_m A = A$ y $A\,I_n = A$

Reducida de una matriz

Una matriz R_A se llama matriz reducida de A, si se obtiene a partir de ella a través de operaciones elementales.
Características de las matrices reducidas y escalonadas por filas:

1. El primer elemento no nulo de cada fila es igual a la unidad. Este elemento se llama pívot o conductor.
2. Los restantes elementos de la columna del conductor son iguales a cero.
3. Las filas nulas se encuentran por debajo de las no nulas.
4. Los elementos conductores se encuentran ubicados en escalera.

Matrices Reducidas

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&4&2&0&1\\0&1&5&1&0\\0&0&1&3&0\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Matrices No Reducidas

Operaciones elementales en fila:

1. Intercambio de filas entre sí.
2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
3. Sumar a una fila otra u otras multiplicadas por un número.

Rango de una matriz

Consideremos una matriz A_{np}.
El rango columna de A es igual al número máximo de columnas linealmente independientes de A.
El rango fila de A es igual al número máximo de filas linealmente independientes de A.
Se puede demostrar que en toda matriz el rango columna es igual al rango fila de la misma. Entonces podemos definir el rango de una matriz como el número máximo de líneas paralelas linealmente independientes.
Ejemplo:

$$\begin{bmatrix}5&-2\\5&1\\0&3\end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2, ya que la segunda fila es igual a la primera más la tercera, esto implica que el rango final no puede ser igual a 3.
De la definición de rango podemos deducir que éste es un número entero no negativo asociado a la matriz dada.
Por ejemplo, para una matriz A_{3x5} el valor del rango debe ser menor o igual a 3. No puede ser mayor ya que esto significaría que la matriz tiene más de 3 filas linealmente independientes y esto es imposible.

En general, considerando una matriz A_{np}, el valor numérico del rango de A que simbolizamos r(A), estará acotado de la siguiente manera:

$$0 \le r(A) \le \text{mín}\,(n\,,\,p)$$

Podemos decir que: el rango de una matriz está dado por el número de líneas (filas o columnas) no nulas de su matriz reducida. Según contemos filas o columnas, tendremos el rango y fila y el rango columna.

Matriz traspuesta

Si A es una matriz mxn entonces la traspuesta de A, que simbolizamos como A', es una matriz nxm cuyo i-ésimo renglón es la j-ésima columna de A y cuya j-ésima columna es el i-ésimo renglón de A.
En símbolos, si

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow A' = (a_{ji})$$

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\4&6&8\end{bmatrix}\qquad A'=\begin{bmatrix}2&4\\0&6\\-1&8\end{bmatrix}$$

1.3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

La expresión:

$$2x + y = 12$$

se llama ecuación lineal en las variables x e y porque su gráfica en el plano xy es una recta.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal de n variables, donde:

$a_1, a_1, \dots, a_n \rightarrow$ coeficientes
$b \rightarrow$ valores del lado derecho

son constantes numéricas reales y donde no todos los coeficientes a_i son iguales a 0.

Un sistema de m ecuaciones lineales en n variables, se escribe:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables y los coeficientes a_{ij} y b_i son constantes numéricas reales.

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

es decir:

$$AX = B$$

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables que tiene todos los valores del lado derecho iguales a 0, se llama **sistema homogéneo.**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = 0$$

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Una sucesión c_1, c_2, ..., c_n de números reales es una solución de la ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

siempre que:

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + ... + a_nc_n = b$$

El conjunto solución de un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas es el conjunto de valores de las incógnitas x_1, x_2, ... , x_n que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente

Para cualquier sistema de ecuaciones lineales se debe dar alguno de los siguientes casos:

1. El sistema no tiene solución → se dice que es Incompatible.
2. El sistema tiene una única solución → es un sistema Compatible determinado.
3. El sistema tiene infinitas soluciones → se trata de un sistema Compatible Indeterminado.

SISTEMA DE ECUACIONES

Tiene Solución → **COMPATIBLE** → Solución única / Infinitas soluciones

No Tiene Solución → **INCOMPATIBLE**

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes son los que admiten las mismas soluciones y se obtienen a través de la aplicación de operaciones elementales en fila sobre las ecuaciones del sistema.
La eliminación gaussiana reduce un sistema de ecuaciones lineales a otro sistema que es más fácil de resolver y que tiene el mismo conjunto solución, es decir a un sistema equivalente.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Existen distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, siendo los más conocidos el *Método de Sustitución* y el *Método por Igualación.* Cuando el número de incógnitas y/o el número de ecuaciones aumenta, estos procedimientos se tornan poco prácticos.

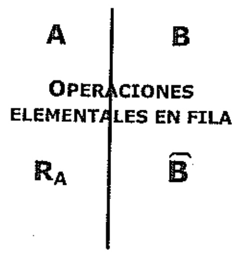
El *Método de Gauss-Jordan* es aplicable a cualquier tipo de sistemas de ecuaciones lineales independientemente de cuál sea el número de ecuaciones y de incógnitas que tenga. Este método consiste en transformar una matriz que representa un sistema de ecuaciones, a través *operaciones elementales por fila*, en una *matriz reducida escalonada por fila* que representará un nuevo *sistema equivalente*.
Antes de comenzar con el método vamos a definir a la matriz ampliada del sistema como aquella que se forma con la matriz de coeficientes (A) a la que se le ha agregado como última columna el vector de términos independientes (B).
Es decir dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriz ampliada del sistema será:

$$AB = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

De acuerdo al concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes, si obtenemos la matriz $\widehat{AB}$ por aplicación de operaciones elementales en fila sobre la matriz AB, entonces los sistemas de ecuaciones $AX = B$ y $\widehat{A}X = \widehat{B}$ serán equivalentes.
Basándose en esto, el método de Gauss Jordan aplica sistemáticamente operaciones elementales en fila sobre la matriz ampliada del sistema hasta obtener un sistema de ecuaciones equivalente. La utilización de estas operaciones se realiza hasta obtener la matriz reducida por filas de A. Esquemáticamente el método consiste en:



Luego de obtener la R_A, se plantea nuevamente el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$R_A X = \widehat{B}$$

y se despejan de él los valores de las variables.

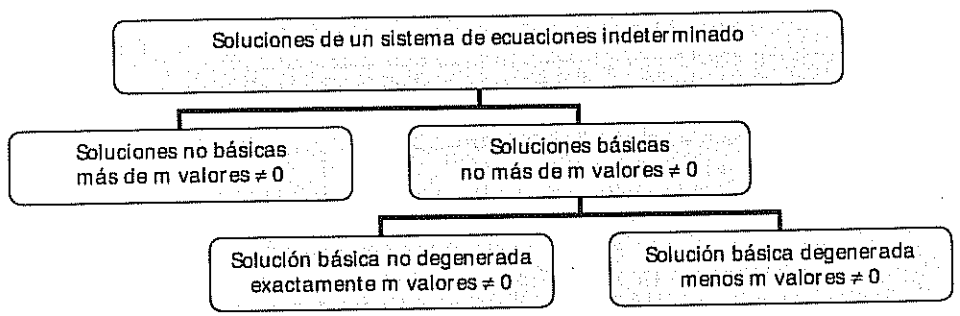
Soluciones básicas

Ya dijimos que los sistemas de ecuaciones pueden ser incompatibles, cuando no tienen solución, o compatibles si tienen solución. A su vez los sistemas compatibles pueden ser determinados, cuando tienen una única solución, o indeterminado cuando tienen infinitas soluciones.
Dentro de las infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado, existe un subconjunto de soluciones con características particulares a las que se les denomina soluciones básicas (SB).
La particularidad de una solucione básica (SB) es que, de los ***n*** valores de las variables, tendrá como máximo ***m*** valores distintos de cero y los restantes ***n-m*** serán nulos. Así por ejemplo si tenemos un sistema de ecuaciones indeterminado con siete variables y tres ecuaciones, una SB tendrá como máximo tres valores de las variables distintos de cero y los restantes, cuatro en este caso, serán nulos.

A su vez si la SB tiene exactamente *m* valores distintos de cero, o lo que es lo mismo exactamente *n-m* valores iguales a cero, se llama solución básica no degenerada (SBND). Pero si tiene menos de *m* valores distintos de cero (o más de *n-m* valores nulos), la solución es básica degenerada (SBD).
Se denominan variables básicas (VB) en una SB a aquellas que son distintas de cero y serán variables no básicas (VNB) aquellas que son iguales a cero.
Teniendo en cuenta todo lo anterior podemos decir que el número máximo de soluciones básicas que puede tener un sistema de ecuaciones lineales indeterminado, está dado por:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Esquemáticamente:



Utilización método de Gauss Jordan

Primer ejemplo:

$18\,x_1 + 9\,x_2 = 90$
$5\,x_1 + 10\,x_2 = 50$

Armamos la matriz ampliada del sistema y luego reducimos la matriz de coeficientes a través de operaciones elementales en fila:

	x_1	x_2	B
F1	18	9	90
F2	5	10	50
F1´	1	0,5	5
F2´	0	5	-200
F1"	1	0	450
F2"	0	1	-40

Matriz Ampliada

1ero) F1´= F1/18
2do) F2´= F1´x (-5)+ F2

1ero) F2"= F2´/5
2do) F1"= F2"x (-0,5)+ F1´

Sistema equivalente obtenido:

$1x_1 + 0\,x_2 = 450$
$0\,x_1 + 1\,x_2 = -40$

De dónde la solución es:

$x_1 = 450$
$x_2 = -40$

Segundo ejemplo:

$8\,x_1 + 10\,x_2 + 12\,x_3 = 160$
$15\,x_1 + 10\,x_2 + \;\;5\,x_3 = 250$

	x_1	x_2	x_3	B
F1	8	10	12	160
F2	15	10	5	250
F1´	1	1,25	1,5	20
F2´	0	-8,75	-17,5	-50
F1"	1	0	-1	12,85
F2"	0	1	2	5,71

Sistema equivalente obtenido:

$1\,x_1 + 0\,x_2 - 1\,x_3 = 12{,}85$ (1)
$0\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 = 5{,}71$

De dónde la solución, considerando a x_3 como variable libre, es:

$x_1 = 12{,}85 + x_3$
$x_2 = 5{,}71 - 2\,x_3$
$x_3 = t \in \Re$

Este es un sistema indeterminado que tiene como máximo 3 soluciones básicas que surgen de anular sucesivamente a x_1, x_2 y x_3.
La primera solución básica la vamos a obtener anulando a x_3, del sistema equivalente (1) al que llegamos por aplicación de operaciones en elementales fila, entonces nos queda:

$x_1 = 12{,}85$
$x_2 = 5{,}71$
$x_3 = 0$

La siguiente solución básica la obtendremos anulando a x_2, es decir que esta variable ahora será no básica y en su lugar introduciremos a x_3.
Para obtener esta nueva solución básica, partimos del sistema equivalente (1) al que aplicaremos operaciones elementales en fila para

lograr que en la columna de x_3 tengamos un 0 cero en la primera fila y un 1 en la segunda, es decir que sea un vector unitario. Al aplicar las operaciones elementales en fila lo hacemos sobre toda la matriz ampliada.
La primera operación será multiplicar la fila 2 por ½ y así logramos el pívot. A continuación multiplicamos a esta nueva F2 por 1 y se la sumamos a la F1.

Con estas operaciones nos quedará el vector $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ para x_1 y el vector $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ para x_3.

x_1	x_2	x_3	B
1	0	-1	12,85
0	1	2	5,714
1	0,5	0	15,714
0	0,5	1	2,857

El nuevo sistema equivalente, sin considerar a x_2 ya que su valor es 0; será:

$1\,x_1 + 0\,x_3 = 15{,}714$ (2)
$0\,x_1 + 1\,x_3 = 2{,}857$

Como x_2 es igual a cero, la solución básica será

$x_1 = 15{,}714$
$x_2 = 0$
$x_3 = 2{,}857$

La tercer y última solución básica la obtenemos a partir del sistema equivalente (2) ahora buscando que el vector correspondiente a x_2 sea el vector unitario $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, es decir reemplazando a x_1 por x_2 en la solución básica anterior.

Las operaciones a realizar son:

1. Multiplicamos a la F2 por 1/2 y así obtenemos la nueva F2
2. Multiplicamos a la nueva F2 por -1/2 y se la sumamos a la F1

x_1	x_2	x_3	B
1	0,5	0	15,714
0	0,5	1	2,857
2	1	0	31,429
-1	0	1	-12,857

El nuevo sistema equivalente:

$1\,x_2 + 0\,x_3 = 31{,}429$
$0\,x_2 + 1\,x_3 = -12{,}857$

Como x_1 es igual a cero, la solución básica será:

$x_1 = 0$
$x_2 = 31{,}429$
$x_3 = -12{,}857$

1.4. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

La expresión:

$$2x + y \leq 12$$

se llama inecuación lineal en las variables x e y. Esta expresión se cumple para algunos valores de las variables y su gráfica es un semiplano.
Las inecuaciones pueden ser de una o varias variables, una inecuación con dos incógnitas (o variables) puede presentarse de alguna de las formas que se muestran a continuación

- $ax + by + c \leq 0$
- $ax + by + c < 0$
- $ax + by + c \geq 0$
- $ax + by + c > 0$

en las que a, b, c son números reales y $a \neq 0$ y $b \neq 0$

De la misma manera que en las ecuaciones, el conjunto de pares ordenados (x, y) que cumplan con la desigualdad se llama solución de la misma.

Un sistema de inecuaciones lineales es un conjunto de desigualdades y su solución será el conjunto de pares ordenados que cumplan simultáneamente todas las desigualdades de dicho sistema.

Ejemplo de aplicación

Represente gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} 8X + 5Y &\leq 240 \\ 3X + 5Y &\leq 150 \\ X &\geq 0 \\ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Como ya dijimos el conjunto de puntos solución de cada inecuación lineal es un semiplano espacio bidimensional y la intersección de los

semiplanos correspondientes a cada inecuación forma el conjunto solución del sistema.
La forma más sencilla de representar este semiplano es partiendo de la ecuación de la recta que está implícita en la inecuación (es decir, considerándola como una igualdad); y posteriormente, observar hacia a qué lado de la recta están los puntos que verifican la desigualdad.

- Así la inecuación: $8X + 5Y \leq 240$ se transforma en la ecuación:
  $8X + 5Y = 240$

Para graficar una recta se requiere conocer al menos dos puntos. Por ejemplo, se pueden obtener los puntos correspondientes a la ordenada y a la abscisa al origen:

Si $X = 0$ → $Y = 48$

Si $Y = 0$ → $X = 30$

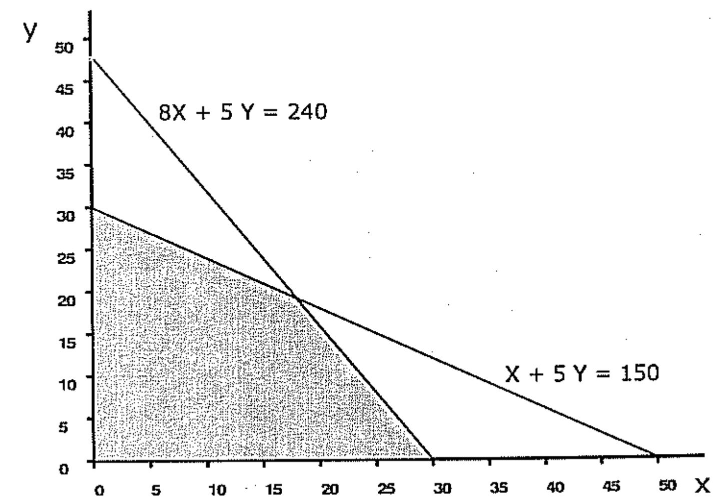
Estos puntos se grafican en un sistema de ejes cartesiano y se unen con una recta. Todos los puntos que se encuentran sobre la recta y por debajo de ésta, verifican la desigualdad analizada.

- Con la inecuación $3X + 5Y \leq 150$, se debe proceder de la misma manera.

- Las inecuaciones $X \geq 0$; $Y \geq 0$ indican que los valores que asumen ambas variables deben ser no negativos, por lo que sólo debe considerarse el primer cuadrante.

- La **solución a este sistema de inecuaciones** estará dado por la intersección de todos los semiplanos.

Gráficamente:



1.5. FUNCIONES

Muchos problemas de la vida real nos plantean un reto: analizar, representar y generalizar relaciones. De ahí la importancia del estudio de funciones, ellas nos sirven para reconocer, describir, generalizar patrones y construir modelos matemáticos que predigan el comportamiento de fenómenos de la vida real.

Concepto de función

Dados dos conjuntos no vacíos X e Y, se llama función de X en Y a una regla que asigna a cada elemento x que pertenece a X un único elemento y que pertenece a Y. Simbólicamente $y = f(x)$.

Ejemplos de funciones:

$f(x) = 25 + 5x$ ➔ Función lineal

$$f(x) = \frac{5x+5}{x-1}$$

Dándole valores a x obtendremos los valores de la función.

Inversa de una función

Dada una *función $f(x)$*, su inversa es otra función, designada por $f^{1}(x)$ de forma que se verifica: si $f(a) = b$, entonces $f^{1}(b) = a$

Pasos a seguir para determinar la función inversa de una dada:

* Despejar la variable independiente x.
* Intercambiar la x por la y, y la y por la x.

La función así obtenida es la inversa de la función dada.

Ejemplo

* Despejamos

$$f(x) = y = \frac{5x+5}{x-1}$$

$$x = \frac{y+5}{y-5}$$

* Intercambiamos la x por la y

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{x-5}$$

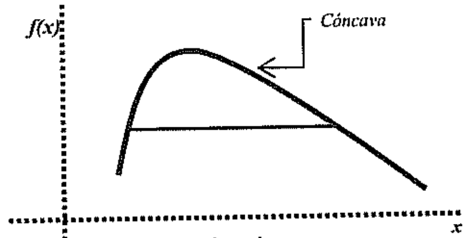
Crecimiento y decrecimiento de funciones

Si una función f es derivable en todos los puntos de un intervalo abierto, entonces:

- ✓ La función es creciente en el intervalo si su derivada primera es mayor que cero para todos los valores de x pertenecientes al intervalo.
- ✓ La función es decreciente en el intervalo si su derivada primera es menor que cero para todos los valores de x pertenecientes al intervalo.

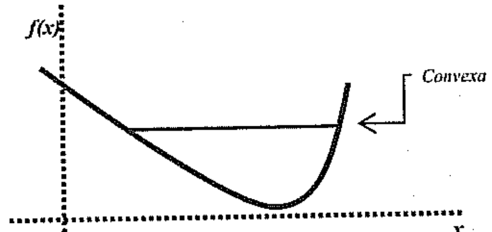
Concavidad y Convexidad

En general, una función cóncava tiene la propiedad de que el segmento de recta que conecta dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función nunca pertenece al espacio ubicado por arriba de la gráfica.

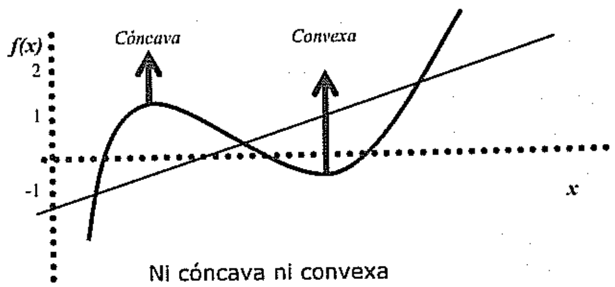


Función cóncava

En general, una función convexa tiene la propiedad de que el segmento de recta que conecta dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función nunca pertenece al espacio ubicado por debajo de la gráfica.



Función convexa



Ni cóncava ni convexa

La función del gráfico precedente no es cóncava ni convexa, los puntos donde la concavidad cambia son puntos de inflexión.

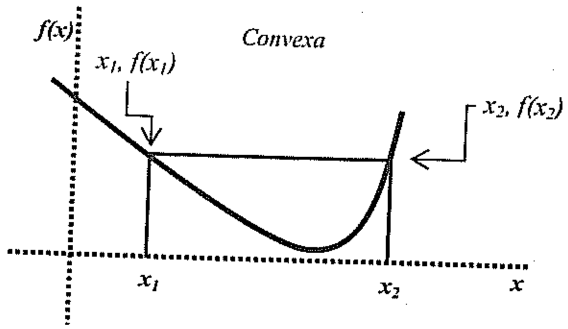
Definición:

Sea $f: R^n \to R$

f es convexa si el dominio de f es un conjunto convexo y si para todo x_1,x_2 que pertenece al dominio de f y para todo número real t entre 0 y 1, se satisface que:

$$f\left[t\, x_1 + (1-t)x_2\right] \leq t\, f(x_1) + (1-t)\, f(x_2)$$

Una función f es cóncava si $-f$ es convexa. Desde el punto de vista geométrico esto significa que el segmento que une $(x_1,f(x_1))$ y $(x_2,f(x_2))$ se encuentra sobre la gráfica de f.



Recordemos que para una función $f(x)$ diferenciable:

Si $f''(x) < 0$ en un intervalo (a, b), entonces la función *f(x) es cóncava en el intervalo (a, b).*

Si $f''(x) > 0$ en un intervalo (a, b), entonces la función *f(x) es convexa en el intervalo (a, b).*

Máximos y Mínimos

Funciones de una variable

Una función f tiene un máximo relativo en el punto a, si f(a) es mayor o igual que los puntos próximos al punto a.

Una función f tiene un mínimo relativo en el punto *a*, si f(*a*) es menor o igual que los puntos próximos al punto *a*.

Es decir que tanto los máximos como los mínimos son llamados relativos porque los comparamos con puntos vecinos muy cercanos y no podemos por lo tanto afirmar que sean máximos o mínimos absolutos, es decir considerando toda la función.

Entonces:

- Un punto $(a,f(a))$ es llamado máximo relativo de $f(x)$ si existe un intervalo abierto alrededor de a tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo x perteneciente el intervalo.
- Un punto $(a,f(a))$ es llamado mínimo relativo de $f(x)$ si existe un intervalo abierto alrededor de a tal que $f(x) \geq f(a)$ para todo x perteneciente el intervalo.

Si f es derivable en a, a es un extremo relativo o local si:

1. $f'(a) = 0$

2. $f''(a) \neq 0$

Siendo a un valor crítico de f(x) tal que $f'(a) = 0$; entonces si f'' es continua en un intervalo abierto que contenga al punto *a*,

- → Cuando $f''(a) > 0$ tendremos un mínimo relativo en a
- → Cuando $f''(a) < 0$ tendremos un máximo relativo en a
- → Cuando $f''(a) = 0$ puede o no tener un extremo relativo.

Los pasos a seguir para determinar los extremos relativos son:

- ➤ Calculamos $f'(x)$
- ➤ $f'(x) = 0$ y despejamos x_0
- ➤ Calculamos $f''(x)$
- ➤ Reemplazamos a x por x_0 y analizamos el signo

Funciones de más de dos o más variables

1. Se igualan las derivadas parciales primeras a cero.
2. Se resuelven las ecuaciones anteriores y se obtienen las coordenadas de los puntos críticos.
3. Se construye la matriz Hessiana (derivadas parciales de segundo orden).

$$H(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Se sustituyen los puntos críticos en la matriz Hessiana para obtener tantas matrices como puntos críticos tengamos.

4. Dependiendo del tipo de matriz resultante de evaluar la matriz Hessiana en los diferentes puntos críticos, estos puntos serán:
   - Si $H_i>0\ \forall i=1,\ldots,n$ f alcanza el mínimo relativo en el punto.
   - Si $H_{impar}<0$ y $H_{par}>0\ \forall i=1,\ldots,n$ f alcanza el máximo relativo en el punto.
   - Si $H_i \neq 0\ \forall i=1,\ldots,n$ y no es ninguno de los casos anteriores, es un punto de silla.

2. CONOCIMIENTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

2.1. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Variables Aleatorias

Una **variable aleatoria** es cierto fenómeno de interés cuyas respuestas o resultados pueden expresarse numéricamente.
Formalmente, dado un espacio de probabilidad (Ω, A, P), una variable aleatoria unidimensional *X* es una función real definida sobre el espacio muestral Ω, que transfiere la estructura probabilística del espacio muestral a los números reales *R* definidos.

$$X: \Omega \rightarrow R$$

Tal que [X=x] es un evento aleatorio para todo x que pertenece a los reales.

Donde:
Ω: es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.
A: es el álgebra de conjuntos y/o familia de eventos.
P: es la probabilidad asociada a cada resultado del conjunto Ω y del conjunto A.

Las variables aleatorias se pueden clasificar en discretas o continuas.
Una variable aleatoria es **discreta** si el número de valores que puede asumir es contable, ya sea finito o infinito numerable. Los datos discretos surgen de un proceso de conteo.
Una variable aleatoria es **continua** si puede adoptar cualquier valor dentro de un rango definido de valores. Los datos continuos surgen de un proceso de medición.

Función de Probabilidad

En el **caso discreto** se denomina *función de cuantía p(x)* y asocia una probabilidad a cada posible valor de la variable.
Condiciones esenciales que debe cumplir una función de cuantía:
1- Las probabilidades asociadas a los distintos valores que puede asumir la variable deben ser no negativos → *p(x) ≥ 0 para todo x*
2- La suma de todas esas probabilidades debe dar uno → $\sum_{i=1}^{k} p(x_i)=1$
Donde *k* es la cantidad de valores que asume la variable.

En el **caso continuo** se denomina *función de densidad f(x)* y permite encontrar la probabilidad de que la variable asuma valores en un intervalo mediante el uso de integrales, ya que en este caso las probabilidades están representadas por áreas o superficies.
Condiciones esenciales que debe cumplir una función de densidad:
1- La función debe asumir valores no negativos → *f(x) ≥ 0 para todo x*

2- El área total bajo la curva correspondiente a la función de densidad debe ser igual a uno → $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
Los límites de integración (-∞,+∞) denotan el menor y el mayor valor que asume la variable, respectivamente.

Función de Distribución

La función de distribución *F(x)* de una variable aleatoria *X* acumula probabilidades desde el valor mínimo que asume la variable hasta un valor genérico x_0 perteneciente a su recorrido. Es decir, la función de distribución permite obtener la probabilidad que la variable asuma cualquier valor menor o igual que x_0.
Formalmente:

$$F: R \rightarrow [0,1]$$

$$F(x_0) = P(X \leq x_0); \quad x_0 \varepsilon R$$

En el **caso discreto** la función de distribución $F(x_j)$ se calcula a partir de la función de cuantía:

$$F(x_j) = P(X \leq x_j) = \sum_{i=1}^{j} p(x_i)$$

En el **caso continuo** la función de distribución $F(x)$ se calcula a partir de la función de densidad:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Esperanza Matemática

La esperanza matemática *E(X)* es el valor promedio que se presentará si el experimento se repite un número grande de veces.

Para una variable aleatoria discreta X con su respectiva función de cuantía *p(x)*, la esperanza matemática *E(X)* se calcula de la siguiente manera:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p(x_i)$$

Para una variable aleatoria continua X con su respectiva función de densidad *f(x)*, la esperanza matemática toma la siguiente forma:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x)dx$$

Varianza

La varianza *V(X)* mide la dispersión de los datos entorno a la esperanza matemática si el experimento se repite un número grande de veces. Se define como la esperanza de los desvíos al cuadrado de los valores de la variable respecto al valor esperado, razón por la cual asume siempre valores no negativos.

$$V(X) = \sigma^2 = E[X - \mu]^2$$

Para una variable aleatoria discreta X:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k}[x_i - \mu]^2\, p(x_i)$$

Para una variable aleatoria continua X:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x - \mu]^2 f(x)\, dx$$

Desviación Estándar

La desviación estándar *DS(X)* de una variable aleatoria *X* se define a partir de su varianza como:

$$DS(X) = \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Esta medida representa el desvío esperado de los valores de la variable respecto a su esperanza.

2.2. DISTRIBUCIONES ESPECIALES DE PROBABILIDAD

A continuación se caracterizan algunos modelos teóricos de probabilidad que tienen gran importancia, debido a que aproximan adecuadamente el comportamiento de una gran variedad de fenómenos reales.

Distribución Poisson

La Variable Poisson se define como:

X = Número de sucesos independientes en un intervalo de longitud fija (tiempo o espacio)

La variable asume valores enteros no negativos:
Recorrido de X: 0,1,2,...

Su función de cuantía se define de la siguiente forma:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\dots \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Donde λ es el promedio de ocurrencias en el intervalo fijado.

Su función de distribución está dada por:

$$P(X \le s) = \sum_{x=0}^{s} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Esperanza Matemática ⟹ $E(X) = \lambda$
Varianza ⟹ $V(X) = \lambda$
Desviación Estándar ⟹ $DS(X) = \sqrt{\lambda}$

Distribución Exponencial

La Variable Exponencial se define como:

X = Tiempo entre la ocurrencia de dos sucesos consecutivos

La variable asume cualquier valor no negativo:
Recorrido de X: (0,+∞)

Su función de densidad se define de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Su función de distribución está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Esperanza Matemática ⟹ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
Varianza ⟹ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Desviación Estándar ⟹ $DS(X) = \frac{1}{\lambda}$

La esperanza de la variable Poisson representa el promedio de ocurrencias por unidad de tiempo mientras que la esperanza de la variable Exponencial es su recíproca e indica el tiempo promedio que transcurre entre dos sucesos consecutivos.

Distribución Uniforme

Una variable *X* con distribución uniforme es aquella que tiene la misma probabilidad de ocurrir cualquiera fuera el valor que asuma dentro de un intervalo determinado *(a,b)*, donde los límites *a* y *b* constituyen los parámetro de esta distribución.

La variable asume valores dentro del intervalo determinado:
Recorrido de X: (a,b)

Su función de densidad se define de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Su función de distribución está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Esperanza Matemática $\Rightarrow E(X) = \frac{(a+b)}{2}$
Varianza $\Rightarrow V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Desviación Estándar $\Rightarrow DS\,(X) = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$

Distribución Normal

Es un modelo de variable continua con distribución perfectamente simétrica, constituyéndose sumamente relevante en la estadística por sus variadas aplicaciones en gran cantidad de fenómenos reales.
La variable con distribución normal puede asumir valores en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y los parámetros que caracterizan a esta distribución son: media μ y varianza σ^2.

Su función de densidad se define de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad -\infty \le x \le +\infty$$

Variable Normal Estandarizada

Dada una variable $X \sim N\ (\mu, \sigma^2)$, la variable normal estandarizada, simbolizada con la letra Z, se obtiene haciendo la siguiente transformación lineal:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N\,(0{,}1)$$

Su función de densidad se define de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty \le z \le +\infty$$

Esperanza Matemática $\Rightarrow E(Z) = 0$
Varianza $\Rightarrow V(Z) = 1$
Desviación Estándar $\Rightarrow DS\ (Z) = 1$

USO DE LA TABLA NORMAL ESTÁNDAR

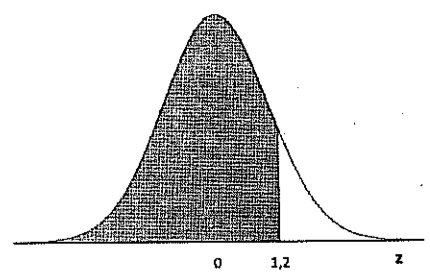
La función de distribución normal típica estandarizada está dada por:

$$F(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

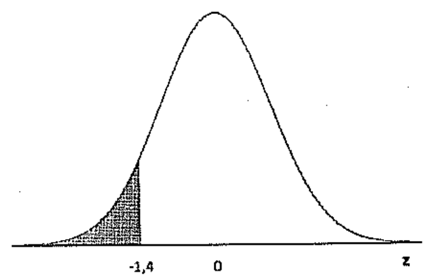
Para el cálculo de probabilidades de una variable con distribución normal estándar, en lugar de realizar la integral anterior, se suele recurrir a tablas donde se encuentran tabuladas las probabilidades acumuladas correspondientes. Generalmente en estas tablas sólo aparecen valores positivos de la variable estandarizada, por lo que el cálculo de probabilidades para valores negativos se resuelve teniendo en cuenta la simetría de la distribución.

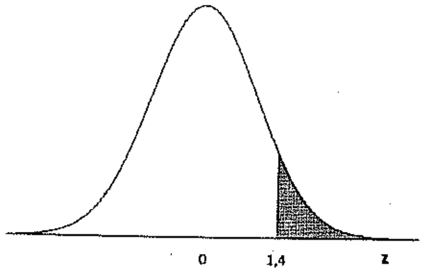
A continuación presentamos algunos ejemplos prácticos:

1. $P(Z < 1{,}20) = F(1{,}20) = \mathbf{0{,}8849}$

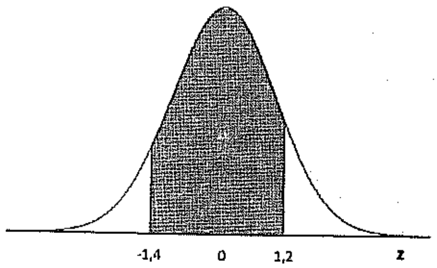


2. $P(Z < -1{,}40) = P(Z > 1{,}40) = 1 - F(1{,}40) = 1 - 0{,}9192 = \mathbf{0{,}0808}$

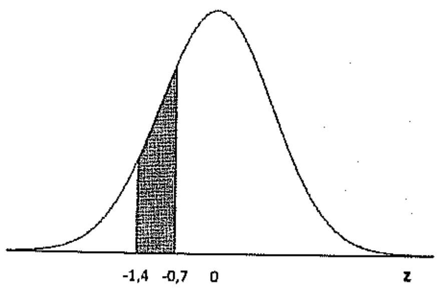


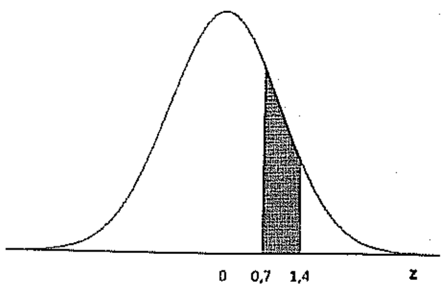


3. $P(-1{,}40 < Z < 1{,}20) = F(1{,}20) - F(-1{,}40) = F(1{,}20) - P(Z > 1{,}40) =$ $F(1{,}20) - [1 - F(1{,}40)] = 0{,}8849 - [1 - 0{,}9192] = \mathbf{0{,}8041}$



4. $P(-1{,}40 < Z < -0{,}70) = P(0{,}70 < Z < 1{,}40) = F(1{,}40) - F(0{,}70) =$ $0{,}9192 - 0{,}7580 = \mathbf{0{,}1612}$





Distribución Beta

Es una distribución de probabilidad continua con parámetros: γ y β, donde la variable está acotada entre un máximo a y un mínimo b.

Una especificación usual de su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\gamma+\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \dfrac{(x-a)^{\gamma-1}(b-x)^{\beta-1}}{(b-a)^{\gamma+\beta-1}} & a \le x \le b \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Donde: Γ es la función gamma

Esperanza Matemática $\Rightarrow$ $E(X) = \frac{\gamma b + \beta a}{(\gamma+\beta)}$
Varianza $\Rightarrow$ $V(X) = \frac{(b-a)^2 \gamma\beta}{(\gamma+\beta)^2(\gamma+\beta+1)}$
Desviación Estándar $\Rightarrow$ $DS(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2\gamma\beta}{(\gamma+\beta)^2(\gamma+\beta+1)}}$

Adicionalmente esta distribución será unimodal si se verifican las siguientes condiciones:

- $\gamma > 1$
- $\beta > 1$
- $0 \le a < b < \infty$

El valor modal m queda expresado de la siguiente manera:

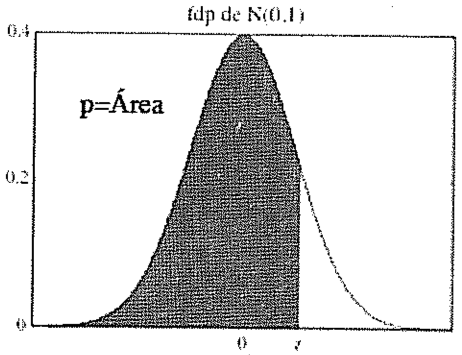
$$m = \frac{(\gamma-1)b + (\beta-1)a}{\gamma+\beta-2}$$

En el caso particular que: $\gamma + \beta = \mathbf{6}$ y $\beta\gamma = \gamma + \beta + \mathbf{1}$, se puede demostrar que, empleando la definición del valor modal, la esperanza, la varianza y la desviación estándar estarán dadas por:

Esperanza Matemática $\Rightarrow$ $E(X) = \frac{a+4m+b}{6}$
Varianza $\Rightarrow$ $V(X) = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
Desviación Estándar $\Rightarrow$ $DS(X) = \frac{b-a}{6}$

Distribución normal estándar
Z~N(0,1)
Tabla de la función de distribución:
P(Z≤z) = p

En la tabla figuran los valores de probabilidad acumulada p en función de z.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

CAPÍTULO 14

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECCIONADOS

CAPÍTULO 2

ACTIVIDAD 4

DATOS:

Demanda	10	15	20	25	30
Nº de días	10	25	30	20	15
Probabilidad	0,1	0,25	0,3	0,2	0,15

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

Xi= cantidad de flores compradas con anticipación
Yj= cantidad de flores demandadas el día de la secretaria

MATRIZ DE LAS COMPENSACIONES:

Oferta/Demanda	Y1= 10	Y2= 15	Y3= 20	Y4= 25	Y5= 30	d(x)
X1= 10	100	175	250	325	400	253,75
X2= 15	135	150	225	300	375	234,75
X3= 20	170	185	200	275	350	230,75
X4= 25	205	170	235	250	325	232,25
X5= 30	240	255	270	285	300	270,75
Pj	0,1	0,25	0,3	0,2	0,15	

Decisión Óptima (D.O.)= comprar 30 flores (X5)