CAPÍTULO 12

DECISIÓN MULTICRITERIO DISCRETA

1. INTRODUCCIÓN

María, Ana y Julia están planificando sus próximas vacaciones de verano. Luego de una ardua discusión acordaron que los posibles destinos son, Río de Janeiro, el Parque Nacional Los Glaciares o las ruinas de Machu Pichu. Habían reducido las posibilidades pero qué difícil les resultaba elegir uno!

María propuso: *"elijamos de acuerdo al costo del viaje"*, Julia le respondió: *me parece bien pero....creo que también estaría bueno que tengamos en cuenta el interés cultural del lugar"* a lo que Ana añadió: *" que les parece si además consideramos la oferta de servicios a los turistas?"*

Las tres amigas habían acotado su problema, sin embargo seguía siendo complejo para ellas tomar una decisión, podremos ayudarlas en esta tarea?.....

Tomar decisiones es una de las facetas más relevantes en la vida de los individuos y las organizaciones. En cualquier campo, sabemos que la responsabilidad lleva aparejada la facultad de poder tomar decisiones, y a su vez, toda decisión conlleva la responsabilidad de sus posibles consecuencias.

En el estudio de los problemas de decisión, es común suponer que todo decisor actúa racionalmente a la hora de tomar decisiones. El proceso de decisión racional, implica un comportamiento fundamentalmente optimizador por parte del decisor, quien obviamente, no se conformará con cualquier alternativa sino que debe elegir la óptima.

El problema se presenta al tratar de aplicar este concepto de decisión racional en situaciones reales, donde la complejidad de los problemas a menudo reduce las posibilidades de encontrar la alternativa óptima. El decisor debe buscar entonces una alternativa que satisfaga suficientemente sus niveles de aspiración para los objetivos que se ha propuesto. La alternativa elegida de este modo se denomina satisfactoria.

Esto modifica el concepto clásico de decisor racional, por el de decisor con *racionalidad limitada*. Simon (1955) sostiene que *"la mayor parte de* *las decisiones humanas, ya sean individuales o de organización, se refieren al descubrimiento y selección de alternativas satisfactorias, sólo en casos excepcionales se ocupan del descubrimiento y selección de alternativas óptimas".*

Sabemos que, en la optimización clásica o programación matemática se busca el máximo o mínimo de una única función objetivo, sometida a un conjunto de condiciones o restricciones que necesariamente deben cumplirse. Esto implica que todas las consecuencias derivadas de seguir cada alternativa, pueden ser reducidas o expresadas en términos de una sola función evaluadora. En la realidad ocurre que el decisor suele utilizar varios objetivos para evaluar las distintas alternativas, algunos de ellos, difíciles de medir en términos de beneficios o costos, como serían por ejemplo, el impacto ambiental, la imagen de un producto, el impacto social, la calidad, seguridad, confort, etc. Aún cuando estos objetivos puedan ser incorporados al modelo mediante restricciones, tendría la desventaja de impedir toda intervención por parte del decisor, introduciendo gran rigidez en las decisiones.

Para afrontar específicamente situaciones en las que un decisor, actuando con racionalidad limitada, debe resolver un problema en el cual son diversos los objetivos que se pretenden alcanzar simultáneamente, ha surgido la metodología multiobjetivo.

En esencia, el proceso de decisión Multiobjetivo o Multicriterio, es un problema de optimización con varias funciones objetivo simultáneas. Matemáticamente puede formularse:

$$\max_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x})$$

dónde:

$\mathbf{x}$ es el vector $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de las variables de decisión.

X es la región factible del problema, o conjunto de todos los valores que pueden asumir las variables de decisión.

$F(\mathbf{x})$ es el vector $[f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_p(\mathbf{x})]$ de las *p funciones objetivo* que representan los criterios u objetivos simultáneos del problema.

En este tipo de problemas, es prácticamente imposible que exista una alternativa o solución (es decir un valor concreto del vector $\mathbf{x}$) para el cual alcancen su valor óptimo, simultáneamente, todas y cada una de las funciones objetivo. Suele ocurrir que, debido al mayor o menor conflicto entre los objetivos, una solución sea mejor que otras en alguno de ellos, mientras que para los restantes objetivos, sea superada por otras soluciones. En estos casos el decisor elegirá la mejor entre un conjunto de alternativas consideradas por él, satisfactorias.

Existen dos grandes ramas dentro de la metodología multiobjetivo o multicriterio:

- La rama contínua de la decisión multicriterio, conocida como *Decisión Multiobjetivo* o *Programación por Objetivos*, que se ocupa de problemas con objetivos múltiples, en los cuales las alternativas pueden tomar un número *infinito* de valores.
- La rama discreta o *Decisión Multicriterio Discreta*, que analiza problemas en los que el conjunto de alternativas de decisión está formado por un número *finito* y generalmente pequeño de variables.

La *Decisión Multiobjetivo* o *Programación por Objetivos* es un tipo de modelización que evidentemente tiene interés práctico, especialmente para abordar problemas con gran número de variables continuas y varios objetivos simultáneos a alcanzar al mismo tiempo. Si bien resulta sumamente interesante profundizar en el estudio de esta rama de la Decisión Multiobjetivo, el presente capítulo tiene el propósito de analizar con cierta rigurosidad la rama discreta, conocida como *Decisión Multicriterio Discreta* (DMD).

2. DECISIÓN MULTICRITERIO DISCRETA

El análisis multicriterio discreto es una metodología de toma de decisiones útil en una gran cantidad de campos de aplicación, cuando hay que decidir entre varias alternativas teniendo en cuenta diversos objetivos o puntos de vista, generalmente en conflicto.

Frecuentemente nos enfrentamos ante situaciones en las que es necesario seleccionar un curso de acción entre varios posibles, considerando diversos objetivos.

Volvamos al problema de las tres amigas que estaban planificando sus próximas vacaciones. Habían acordado tres posibles destinos:

- ➢ Las playas de Río de Janeiro
- ➢ El Parque Nacional Los Glaciares
- ➢ Las ruinas de Machu Pichu

Para seleccionar el destino consideraron como relevantes los siguientes factores:

- ⇒ Costo del viaje (pasaje, estadía, etc..)
- ⇒ Interés cultural del lugar
- ⇒ Vida nocturna que cada uno ofrece al turista (oferta de restaurantes, confiterías, etc..)

Observando la situación, podemos decir que decidir dónde viajar resulta naturalmente complejo por diversas razones: es evidente que ninguna de las alternativas es mejor que otra considerando todos los criterios en conjunto, ya que algunos son contrapuestos, por ejemplo, el sitio con mayor interés cultural, evidentemente, no posee la mejor vida nocturna. Por otro lado, existen factores medibles cuantitativamente y otros que no lo son.

Mediante este sencillo ejemplo tratamos de mostrar que situaciones de este tipo, donde el decisor se enfrenta a la elección de una alternativa en presencia de objetivos múltiples, son sumamente frecuentes en la vida real, tanto de los individuos como de las organizaciones.

3. CONCEPTOS BÁSICOS

Decisor: individuo, o grupo de individuos, que directa o indirectamente proporciona el juicio de valor final que puede ser usado para evaluar las alternativas disponibles a fin de poder identificar la mejor elección. Aunque esto parezca una trivialidad, tiene un sentido crucial en la DMD. En efecto, la alternativa seleccionada dependerá, en última instancia, de la información que el decisor haya aportado al proceso. Esta información, en forma de juicios de valor, es fundamentalmente subjetiva y obedece a la estructura interna de preferencias que tiene el decisor.

Analista: además del decisor, existe otra persona, encargada de modelizar el problema y eventualmente hacer las recomendaciones relativas a la selección final. A esta persona se la conoce como el *analista*. El analista no expresa opiniones personales, sino que se limita a recoger las del decisor y tratarlas de la manera más objetiva posible. Al contrario de lo que ocurre con el decisor, el papel del analista en el proceso de toma de decisión, es sobre todo, objetivo. Recolecta información subjetiva del decisor y la traslada al modelo, formalizando la misma para su utilización concreta.

Los papeles desempeñados por el decisor y el analista son totalmente complementarios y fundamentales, aunque en última instancia, la responsabilidad de cada decisión corresponde al decisor y no al analista.

Conjunto de Elección: el decisor se enfrenta a un conjunto finito y discreto de alternativas, comúnmente conocido como conjunto de elección, al que denominaremos $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Supondremos que las alternativas son diferentes, exhaustivas y excluyentes.

Las dos últimas hipótesis resultan un poco fuertes, puesto que la exhaustividad supone que si el decisor introduce una nueva alternativa al conjunto de elección, en principio, deberá plantear nuevamente el modelo con el nuevo conjunto A. Es decir, no cabe concebir "alternativas intermedias" a las enumeradas. Si tales alternativas quisieran considerarse, simplemente deberán agregarse al conjunto de elección.

Por otra parte, suponer que las alternativas sean excluyentes, implica que no se admite la elección de una solución mixta.

Atributos y Criterios: para realizar la elección entre alguna de las alternativas del conjunto de elección, se supone que el decisor posee varios ejes de evaluación. Estos ejes de evaluación son los elementos que direccionan el análisis y se deben establecer con base en la modelización de las consecuencias, de manera que representen las dimensiones relevantes del problema. A partir de estos ejes, es posible hacer comparaciones entre las alternativas.

Si, por ejemplo, la decisión se refiere a la elección entre diversos automóviles a comprar, el decisor podría considerar: el precio, la seguridad, el confort, el tamaño, etc. Estas características se denominan atributos. Ellos representan propiedades, características, capacidades de satisfacer necesidades y/o deseos, etc. que poseen las alternativas, aunque en diferentes "cantidades" o "intensidades", según cuál sea la alternativa considerada y el atributo con respecto al cual se hace la evaluación.

Cuando a estos atributos se les agrega información relativa a las preferencias del decisor, de tal manera que proporcionan un conjunto de reglas que permiten comparar las alternativas, con respecto a un atributo, se dice que ese conjunto de reglas representa un criterio de decisión. Es decir que un *criterio es una función que refleja las preferencias del decisor en relación a un atributo*.

En el ejemplo anterior, con relación al precio, si el deseo u objetivo del decisor, es que éste sea el menor posible, entonces a partir de esta información adicional, conjuntamente con la información sobre los precios de cada automóvil considerado, queda definido un criterio que permitirá, ante cualquier par de automóviles de los analizados, determinar cuál es el preferido con respecto al atributo precio.

Denominaremos $C=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ al conjunto de todos los criterios considerados. Supondremos siempre que C es un conjunto finito y discreto. Entre los criterios podremos distinguir algunos de tipo cuantitativos y otros cualitativos.

Los criterios deben cumplir con las siguientes propiedades:

- ⇒ **Exhaustividad**: se refiere a que se deben considerar todos los criterios necesarios que permitan la discriminación entre alternativas.
- ⇒ **Coherencia**: implica que las preferencias globales del decisor deben ser coherentes con las preferencias en cada criterio, en el sentido que si dos alternativas A_1 y A_2, tienen la misma evaluación en todos los criterios, y por lo tanto son indiferentes para el decisor, la mejora en la evaluación de una con respecto a un criterio, implicará que ésta sea globalmente preferida.

⇒ **No redundancia entre criterios:** esta propiedad es deseable, pero no esencial, pero si no se la tiene en cuenta, se corre el riesgo de otorgar duplicada importancia a un atributo.

En la DMD el número máximo de criterios posibles a usar, puede estar limitado por el método de resolución que se vaya a emplear posteriormente para el análisis del problema. Algunos métodos de DMD que operan comparando alternativas, plantean que no es aconsejable emplear más de 7 criterios, debido a que estudios de psicometría develaron la limitación del cerebro humano para comparar simultáneamente más de 7 cosas. Pero aun cuando el método de DMD lo permita, no es aconsejable trabajar simultáneamente con más de 20 criterios en el mismo plano de igualdad, por la dificultad de percibir las características más significativas del problema de decisión en una visión global del mismo.

Ante la existencia de un gran número de criterios, situación bastante común en la práctica, se aconseja estructurarlos en una jerarquía de criterios y subcriterios, incluso en varios niveles. Por ejemplo, frente a una decisión de selección de personal, podrían considerarse los siguientes criterios y subcriterios:

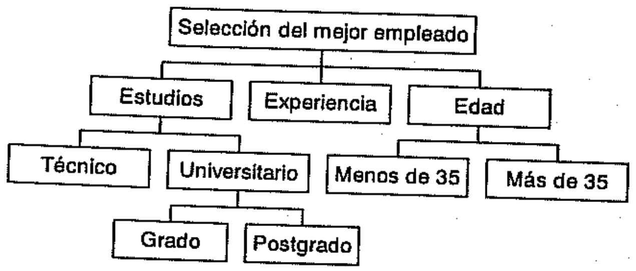

Figura 1

Matriz de Decisión: supondremos que el decisor es capaz de dar, para cada uno de los criterios considerados y para cada alternativa del conjunto de elección, un valor numérico a_{ij} , que expresa una evaluación de la alternativa A_i respecto al criterio C_j.

Se pueden resumir estas evaluaciones bajo la forma de una matriz $A=[a_{ij}]$, en la cual cada fila expresa las cualidades de la alternativa *i* respecto de los *n* atributos considerados; mientras que cada columna *j* recoge las evaluaciones que el decisor hizo de todas las alternativas respecto al atributo *j*. De esta manera un elemento genérico a_{ij} de la matriz, indica la evaluación o *performance* de la i-ésima alternativa respecto al j-ésimo atributo.

$$\begin{array}{cc} & \text{Atributos} \\ \text{Alternativas} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Tipos de Problemas: a partir de los conceptos anteriormente enunciados, podemos decir que, dado un problema de decisión, la DMD se ocupa de alguna de las siguientes problemáticas[1]:

➢ Problema tipo α (Pα): seleccionar la "mejor" alternativa, o las mejores alternativas.

➢ Problema tipo β (Pβ): aceptar alternativas que parecen "buenas" y rechazar aquellas que parecen "malas". Es decir se realizaría una clasificación de las alternativas

➢ Problema tipo γ (Pγ): generar un ordenamiento de las alternativas.

➢ Problema tipo δ (Pδ): Realizar una descripción de las alternativas.

Estas problemáticas no son independientes entre sí, ya que parece lógico pensar que la ordenación de alternativas (Pγ) puede servir de base para resolver problemas (Pα).

En la búsqueda de soluciones a estos tipos de problemas de DMD, diversos autores han desarrollado diferentes métodos.

4. PREFERENCIAS DEL DECISOR

Es razonable pensar que el tomador de decisiones, frente a dos alternativas A_1 y A_2 que pertenecen a su conjunto de elección, es capaz de decir cuál prefiere o si le resultan indiferentes. En definitiva podemos decir que:

- El decisor prefiere estrictamente A_1 a A_2 cuando su elección se efectúa sin ninguna duda, lo que denotaremos como $A_1 \succ A_2$. ($\succ$ significa "estrictamente preferido a").

- Si el decisor es indiferente entre A_1 y A_2 , lo denotaremos como $A_1 \approx A_2$ ($\approx$ significa "indiferente a").

- Cuando el decisor no sabe si prefiere estrictamente A_1 a A_2, o si le resultan indiferentes, diremos que "A_1 es preferida o indiferente a

[1] Clasificación dada por Roy, B. et al (1993)

A_2" y lo representaremos por: $A_1 \succeq A_2$. Esto se conoce como preferencia débil.

ORDEN Y PREORDEN

Si el decisor actúa racionalmente, es lógico pensar que entre dos alternativas, puede decirnos si le resultan indiferentes ($\approx$), o si prefiere estrictamente una a otra ($\succ$), o si una alternativa es preferida o indiferente a otra ($\succeq$).

Una estructura de preorden completo corresponde a la noción intuitiva de clasificación con posibilidad de empate. Es decir que para cada par de alternativas A_1 y A_2, se cumple que $A_1 \succeq A_2$ o bien, $A_2 \succeq A_1$.

La diferencia entre un preorden total y un orden total es que en el segundo no se admite la posibilidad de empate.

Las nociones de órdenes y preordenes, no son adecuadas para realizar cálculos. Sin embargo, existe un conjunto ordenado que se adapta muy bien a los mismos: el conjunto $\Re$ de los números reales. Recordemos que en este conjunto se pueden establecer relaciones de preorden tales como $\geq$ y $\leq$; de esta manera podemos establecer un vínculo entre un preorden sobre un conjunto cualquiera y el conjunto $\Re$.

5. ESCALAS DE MEDIDA

Para evaluar las alternativas es necesario definir sus atributos y evaluarlos a través de los criterios. Las evaluaciones pueden ser cualitativas o cuantitativas, las evaluaciones cuantitativas pueden expresadas en dos tipos de escala: ordinal y cardinal.

Escala Ordinal: ordena todas la alternativas sin tener en cuenta la distancia entre ellas, por lo que el valor numérico asignado no es significativo, sólo la posición de la alternativa en la ordenación natural respecto del atributo considerado

Escala Cardinal: a diferencia de la escala ordinal, en este tipo de escalas se obtiene una ordenación de las evaluaciones y de las distancias entre ellas. Existen dos tipos de escalas cardinales: ratio o de razones y de intervalos. La diferencia entre ellas radica en la posición que se le asigna al cero.

- *Escala Cardinal Ratio:* indica la distancia de las evaluaciones a un origen no arbitrario. Los ratios de las evaluaciones de las alternativas se tienen en cuenta y no varían si se multiplican todos lo valores de la escala por una constante.

Para poder comprender claramente este tipo de escala, veamos un ejemplo de su aplicación. Supongamos que tenemos dos automóviles, el primero cuesta \$10.000 y el otro \$5.000. Podemos afirmar indistintamente que:

- El precio de ambos es de \$15.000 (por suma)
- El segundo automóvil es \$5.000 más barato que el primero (por resta)
- El primer automóvil es dos veces más caro que el segundo (por multiplicación)
- El segundo automóvil tiene un precio igual a la mitad del primero (por división).

Las escalas que permiten realizar todas las operaciones matemáticas usuales, como en este caso, se denominan escalas de razones o cardinal ratio.

También podemos decir, que este tipo de escala, es un conjunto de números positivos cuyas relaciones se mantienen igual si se multiplican todos los valores por un número arbitrario y positivo.

En una escala de razones, el decisor puede elegir libremente la unidad de medida y una vez hecha la elección (pesos, dólares, kilos, libras, etc.) queda determinada la totalidad de la escala. Además, toda escala de razones tiene un "cero natural" y esto es debido a que quien mide dispone únicamente una elección, la unidad de medida.

- *Escala Cardinal Intervalo*: indica la distancia de las evaluaciones a algún origen arbitrario que no representa la ausencia completa del atributo que se mide. Por ejemplo el año cero no significa que no existe tiempo antes de ese año. Asimismo cero grados centígrados no significa que no hay temperatura. En cambio en la escala cardinal ratio el cero representa la ausencia del atributo o característica medida.

6. FUNCIÓN DE UTILIDAD

La utilidad refleja la actitud del tomador de decisiones hacia el objetivo considerado y no es una elección sencilla, ya que depende de las preferencias del sujeto de las decisiones. En ocasiones, se mide en unidades totalmente arbitrarias que representan la satisfacción, que para el decisor tiene un resultado dado[2].

Una función de utilidad es una aplicación que transforma las preferencias dadas por el decisor respecto a las alternativas, en un valor numérico, de manera tal que respeta la relación de preferencia entre los resultados. Es decir que si A_1 es preferible a A_2, entonces la utilidad de A_1 es mayor que la utilidad A_2. En símbolos:

$$\text{Si } A_1 \succ A_2 \Rightarrow U(A_1) > U(A_2)$$

[2] Esta utilidad, no tiene ninguna relación con el concepto de utilidad manejado en contabilidad o finanzas.

FUNCIÓN DE UTILIDAD ORDINAL

Para comprender este tipo de función de utilidad, veamos un ejemplo sencillo. Para clasificar a los alumnos de un curso se dispone de tres notas en las asignaturas: contabilidad, economía y matemática. Supongamos tres alumnos y sus respectivas notas:

	Contabilidad	Economía	Matemática
Alumno a	4	8	1
Alumno b	2	2	8
Alumno c	6	3	4

Tabla 1

En este caso, cada criterio C_j es cuantitativo y viene ya expresado por medio de una función de utilidad U_j :

$U_1(a) = 4$
$U_1(b) = 2$
$U_1(c) = 6$

$U_2(a) = 8$
$U_2(b) = 2$
$U_2(c) = 3$

$U_3(a) = 1$
$U_3(b) = 8$
$U_3(c) = 4$

Si estas notas no indicaran más que el orden de los alumnos por materia, es decir:

Una función de utilidad ordinal solamente indica el orden y nada más

$c \succ a \succ b$ en contabilidad,
$a \succ c \succ b$ en economía,
$b \succ c \succ a$ en matemática

estaríamos frente a una función de utilidad ordinal.

Si esto ocurre, podríamos afirmar que una tabla como la siguiente aporta exactamente la misma información que la anterior:

	Contabilidad	Economía	Matemática
Alumno a	4	9	6
Alumno b	2	6	8
Alumno c	5	7	7

Tabla 2

En efecto, las utilidades U'_j:

$U'_1(a) = 4$
$U'_1(b) = 2$
$U'_1(c) = 5$

$U'_2(a) = 9$
$U'_2(b) = 6$
$U'_2(c) = 7$

$U'_3(a) = 6$
$U'_3(b) = 8$
$U'_3(c) = 7$

Representan los mismos preordenes que los de la tabla 1.

Si admitimos que los tres alumnos han sido calificados con notas entre 0 y 10, podemos definir una transformación estrictamente creciente de [0,10] en [0,1] de la forma $t(y) = \frac{1}{10}y$, donde y representan los preordenes de la tabla 1, y obtener una nueva función de utilidad ordinal, en la cual se mantienen los preordenes:

	Contabilidad	Economía	Matemática
Alumno a	0,4	0,8	0,1
Alumno b	0,2	0,2	0,8
Alumno c	0,6	0,3	0,4

Tabla 3

Esta tabla es tan aceptable desde el punto de vista de la utilidad ordinal como las dos anteriores.

Con esto queremos significar que podríamos haber trabajado simplemente con los rangos dados en el preorden inicial, atribuyendo en cada materia tres puntos al primer alumno, dos puntos al segundo y un punto al último (tabla 4), la función de utilidad que representa estos valores se denomina función de utilidad canónica.

La función de utilidad canónica se calcula de la forma $U(a_i) = m+1- r(a_i)$, siendo m el número de alternativas y $r(a_i)$ el rango atribuido a la i-ésima alternativa.

	Contabilidad	Economía	Matemática
Alumno a	2	3	1
Alumno b	1	1	3
Alumno c	3	2	2

Tabla 4

FUNCIÓN DE UTILIDAD CARDINAL INTERVALO

Un decisor expresa preferencias cardinal intervalo, si puede comparar las diferencias de preferencias. Decimos que una función cardinal intervalo es una función que además de respetar el orden, respeta las diferencias, es decir:

Si en la relación de preorden total se verifica que $(a \succeq b)$ y $(c \succeq d)$, el cociente de las diferencias $\frac{U(a)-U(b)}{U(c)-U(d)}$ deberá mantenerse para cualquier función de utilidad que represente esas preferencias.

La principal propiedad de las funciones de utilidad cardinal intervalo radica en que si el decisor ha expresado sus preferencias bajo la forma de una función de utilidad cardinal intervalo U, entonces, cualquier otra función de utilidad cardinal intervalo que represente el mismo preorden debe ser de la forma: $k_1 U + k_2$, donde $k_1 > 0$ y k_2 *es libre.*

FUNCIÓN DE UTILIDAD CARDINAL RATIO

Un decisor que expresa sus preferencias cardinal ratio, deberá verificar que:

1. El cociente $\frac{U(a)-U(b)}{U(c)-U(d)}$ es un invariante del decisor
2. El cociente $\frac{U(a)}{U(b)}$ es un invariante del decisor

Se puede observar que la función de utilidad cardinal ratio constituye un subconjunto de las funciones de utilidad cardinal intervalo, ya que la condición 1 es común a la definición de función de utilidad cardinal intervalo, mientras que la segunda condición se deduce de admitir la existencia de un cero absoluto.

Dada una función de utilidad cardinal ratio *U*, se puede encontrar una función equivalente cardinal ratio U´ mediante la relación: $U = k\,U'$ $(k > 0)$

Como en la mayoría de los casos las preferencias del decisor se expresan como una función utilidad cardinal intervalo, en lo sucesivo, salvo que expresamente lo aclaremos, cuando hagamos referencia a la función de utilidad cardinal intervalo, diremos simplemente utilidad cardinal.

7. FUNCIÓN DE AGREGACIÓN

Cuando cada criterio se expresa bajo la forma de una función de utilidad, las preferencias globales del decisor respecto de cada alternativa, se buscarán mediante una función que transforme las *n* funciones de utilidad asociadas a los *n* criterios, en una función de utilidad global que represente el preorden del decisor. Una función de este tipo, se denomina función de agregación y los métodos de DMD que la utilizan se conocen como *métodos de agregación*.

Muchos métodos de DMD proponen buscar la función de agregación mediante la suma ponderada de las utilidades. En principio, no hay ninguna razón para pensar que puedan sumarse U_j utilidades representando n preordenes. No obstante, se demuestra que si se cumplen ciertas hipótesis respecto a la naturaleza de las preferencias del decisor, éstas pueden expresarse bajo la forma de una suma de funciones de utilidad, la cual recibe el nombre de función de utilidad cardinal aditiva. Estas hipótesis son bastante fuertes y en forma simplificada podemos decir que una función de utilidad aditiva presupone:

- **Independencia entre los criterios.** Esto significa que las preferencias del decisor sobre un atributo son independientes del nivel de satisfacción alcanzado por los demás atributos.
- **Comparabilidad intercriterios.** Esto se relaciona con la compensación que debe darse entre los criterios respecto a los valores de las alternativas, de forma tal que si uno disminuye la utilidad en una alternativa, debe aumentarla en otro, a fin de que la utilidad global del decisor no varíe.

8. NORMALIZACIÓN DE LAS EVALUACIONES

En casi todos los métodos de DMD se requiere que las evaluaciones a_{ij} de una alternativa i, respecto a cada uno de los j criterios, *sean* comparables en magnitud, unidad de medida, posición al cero, dispersión de medida, etc., motivo por el que generalmente las evaluaciones se transforman a valores entre 0 y 1. Esta operación se llama *normalización de las evaluaciones*.

Existen diferentes procedimientos para realizar la normalización de vectores, entre los más utilizados, podemos mencionar:

	Procedimiento 1	Procedimiento 2	Procedimiento 3
Forma de cálculo	$r_i = \frac{a_i}{\max\ a_i}$	$r_i = \frac{a_i - \min\ a_i}{\max\ a_i - \min\ a_i}$	$r_i = \frac{a_i}{\sum_i a_i}$
Interpretación	% del máximo de a_i	% del rango (max, a_i – min. a_i)	% del total Σa_i
Características	Respeta la proporcionalidad. Es el más usado.	Respeta la cardinalidad, pero no la proporcionalidad.	Usado por el método AHP. Ofrece las mismas ventajas que el procedimiento 1, pero da valores más pequeños y concentrados.

Tabla 5

Es importante destacar que el resultado final puede verse considerablemente afectado por el procedimiento de normalización utilizado. Con la finalidad de evitar cualquier tipo de manipulación de los resultados del problema, el analista deberá conocer el procedimiento de normalización empleado por el método de DMD que utilizará.

La normalización no siempre es necesaria, pero sí es esencial en la mayoría de los métodos compensatorios. El propósito que persigue es el de obtener escalas comparables, y que permitirá realizar comparaciones intra-atributos e Inter-atributos. De este modo los valores normalizados no tienen unidades de dimensión.

9. PREANÁLISIS DE DOMINACIÓN

Sabemos que es casi imposible que en un problema de DMD exista una única alternativa que simultáneamente alcance el valor óptimo de todas y cada una de las funciones objetivo. Lo que sí ocurre frecuentemente es que, debido al mayor o menor conflicto entre los diversos criterios, una solución sea mejor que otra en algunos de ellos, mientras que para los restantes criterios sea superada por otras soluciones. Esto equivale a decir que entre los elementos del conjunto de elección, existen *soluciones dominadas*, llamadas así por que hay otra u otras soluciones que las superan claramente en al menos un criterio, sin ser peor en los restantes. Generalmente, sólo las soluciones *no dominadas* o *eficientes* serán las que le interesaran al analista.

Es importante que precisemos exactamente el concepto de solución eficiente o no dominada, dado su papel fundamental en la teoría de la Decisión Multicriterio. Decimos que una solución es eficiente cuando no existe otra solución que sea superior a ella, en al menos un criterio e igual en los restantes (ninguna alternativa es dominante en relación a ella), es decir, o son iguales en todos y cada uno de los criterios, o la otra la supera en uno o más criterios y, a su vez, ella supera a la otra en al menos uno de los criterios restantes[3].

En los problemas tipo α (búsqueda de la mejor alternativa), parece racional eliminar las alternativas dominadas. Sin embargo, en aquellos otros problemas en que se desea una ordenación de las alternativas (problemas tipo γ), puede tener sentido conservar las dominadas, ya que serán dominadas por algunas, pero no lo serán por las restantes, frente a las que pueden compararse favorablemente en una ordenación final.

Por ejemplo, si se consideran la alternativas $\{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$, y suponiendo que A_4 está dominada por A_1, pero no por A_2 ni por A_3, una decisión (ordenación) perfectamente posible de un decisor racional podría ser: $A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3$. Obsérvese que la alternativa A_4 inclusive dominada por A_1, es más satisfactoria que A_2 y A_3, aún cuando éstas sean no dominadas, este fenómeno se conoce como "segundo brillante".

10. PREANÁLISIS DE SATISFACCIÓN

Se denomina así al análisis previo, mediante el cual se eliminan las alternativas no satisfactorias. La idea básica fue propuesta por Simon[4] al plantear un modelo alternativo al paradigma vigente de optimización del decisor racional. El "hombre administrativo" de Simon dista del anterior ideal en varios aspectos importantes: información limitada, capacidad limitada de cálculo, no necesidad de búsqueda del óptimo en los problemas reales, sino tan sólo de soluciones "satisfactorias", etc. Es por ello que Simon habla de niveles de aspiración fijados a priori por el decisor, cumplidos los cuales, cualquier alternativa que encuentre primero le servirá como válida para su problema de decisión.

El análisis de satisfacción utiliza estas ideas empleando **umbrales de satisfacción** para cada criterio (umbral inferior si el criterio se maximiza, o umbral superior si se minimiza) fijados previamente por el decisor, de manera tal que se eliminen las alternativas que, en algún criterio, no los superan. Estas alternativas serían, por lo tanto,

[3] Esta definición se basa en el concepto de Óptimo de Pareto que sostiene que el estado óptimo de una comunidad se presenta cuando ninguna persona puede mejorar su situación sin que empeore la de otra.
[4] Simon H. A. pp. 99-114

alternativas no satisfactorias, lo que justifica su exclusión de posteriores análisis.

El preanálisis de satisfacción puede constituir por sí mismo un método de DMD, si el decisor altera dinámica e interactivamente los umbrales de satisfacción de los criterios, con el fin de reducir el número de alternativas satisfactorias hasta que sólo quede una de ellas como superviviente[5].

11. ASIGNACIÓN DE PESOS O PONDERACIONES

En todo problema de decisión, es casi inevitable que algunos criterios tengan para el decisor más relevancia que otros. Se denominan pesos o ponderaciones a la importancia relativa que los criterios tienen para el decisor.

Representaremos por w_j al peso asignado al j-ésimo criterio y por $W = [w_1, w_2, .., w_n]$ al conjunto de pesos asignados a todos los criterios. La matriz de decisión juntamente con el vector de pesos, constituyen toda la información necesaria, en principio, para "resolver" un problema de DMD:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Criterios} \\
 & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & .. & C_n \end{array} \\
\text{Alternativas} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix} \\
\text{Pesos} & \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & .. & w_n \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Los pesos pueden tener un sentido ordinal, si sólo importa su rango (el mayor, el segundo, etc.), o cardinal, si su valor numérico w_j también es relevante.

La mayoría de los Métodos de DMD están influenciados por los pesos. Es evidente entonces que los valores que les asignemos influirán de forma determinante en los resultados de cualquier problema, lo cual parece lógico dado que miden la importancia que le otorga el decisor a cada criterio.

Resulta indispensable evaluar los pesos de tal forma que reflejen, lo más fielmente posible, las preferencias del decisor.

Se han propuesto diversos métodos para asignar los pesos, entre los que podemos mencionar:

[5] Esta es precisamente la filosofía del Método PRIAM desarrollado por Lévine y Pomerol, utilizando conceptos de Inteligencia Artificial.

- **Métodos de asignación directa**, en los que el decisor asigna directamente los pesos.
- **Métodos de comparaciones binarias de los criterios**, cuyo principal representante es Thomas Saaty (1980) a través del Método AHP. La asignación de pesos se realiza mediante el cálculo del autovector dominante de una matriz de comparaciones binarias de los criterios.

12. CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE DMD

Se denominan métodos de DMD a los diferentes métodos propuestos para dar solución a alguno de las problemáticas enunciadas por Roy.

Se dice que un método es *compensatorio* cuando la mejora de valor en un criterio, al comparar una alternativa con otra, permite compensar un deterioro en otro criterio. Es decir, una estrategia de elección es compensatoria si los intercambios de logros entre atributos (*trade-offs*) están permitidos, mientras que la estrategia será no compensatoria si no están autorizadas dichas compensaciones.

En el caso de métodos compensatorios los pesos tienen el significado concreto de tasa de sustitución entre los criterios.

Para realizar una clasificación de los métodos de DMD, son diversos los puntos de vista a considerar, entre los que podemos mencionar: el tipo de problema que resuelve, la dimensión de la matriz de decisión, la forma ordinal o cardinal de medir las evaluaciones y los pesos, el método de normalización utilizado, su carácter compensatorio o no, la escuela teórica en que se encuadran, los procedimientos de trabajo que plantean al decisor (tales como estimación de datos, comparación entre alternativas, interactividad), entre otros. Barba Romero y Pomerol (1997) presentan una clasificación basada en la similitud de estructura y forma de operar de los métodos más extendidos y utilizados, la cual da una visión global y práctica de los métodos de DMD, aún cuando se pierdan algunos detalles.

Queremos destacar que son cientos los métodos de DMD existentes y no puede decirse que haya uno o algunos superiores a otros en todos los aspectos, más bien es recomendable que el analista conozca las ventajas y limitaciones que pueden ofrecerle y seleccionar el que considere más adecuado según el problema que se le presente.

En este capítulo, estudiaremos solamente los siguientes:

- Ponderación Lineal
- Proceso de Análisis Jerárquico
- TOPSIS

13. PONDERACIÓN LINEAL

Con este método se obtiene, para cada alternativa, la ponderación global por simple suma de las contribuciones obtenidas en cada criterio.

Es uno de los métodos más utilizados, por ser sencillo e intuitivo en su aplicación. Es compensatorio, requiere que las evaluaciones y los pesos sean cardinales, necesita una normalización previa de las evaluaciones y es muy sensible al procedimiento de normalización utilizado. El supuesto teórico más fuerte es que requiere la existencia de una función de utilidad cardinal aditiva para los criterios.

Consiste en construir una función valor $U(A_i)$ para cada alternativa, de la forma:

$$U(A_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, r_{ij}$$

donde w_j y r_{ij}, representan, respectivamente, a los pesos de los criterios y las preferencias de cada alternativa con respecto a cada criterio, una vez que han sido normalizados.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Supongamos que un inversionista quiere determinar qué proyecto de inversión emprender. Se le presentan cuatro proyectos y quiere tomar una decisión considerando los siguientes objetivos: Impacto Ambiental (IA), Rentabilidad (RE), Riesgo (RI) y Tiempo de Recuperación de la inversión (TR). Los dos primeros son objetivos a maximizar, mientras que los últimos son a minimizar.

El primer paso es solicitarle al decisor que evalúe cada alternativa a luz de cada uno de los criterios y que nos exprese la importancia que él le asigna a cada uno de los objetivos que se van a utilizar.

Las evaluaciones que el inversionista ha realizado de cada proyecto respecto a cada objetivo se muestran en la tabla 1.

En el caso del impacto ambiental, para calificar a cada proyecto utilizó una escala que va de 1 a 10, donde 10 representa un impacto ambiental "excelente" y 1 un impacto ambiental "muy malo".

Para el riesgo, la escala utilizada va de 1 a 5, donde 1 representa el menor riesgo y 5 el riesgo más alto.

En el caso de la Rentabilidad, se utiliza directamente la tasa de rentabilidad del proyecto, expresada en porcentaje. En cuanto al período de recuperación se usan los años de recuperación de la inversión.

Con estas indicaciones la matriz de evaluaciones es la siguiente:

	Max IA	Max RE	Min RI	Min TR
Proyecto 1	8	14	1	7
Proyecto 2	3	16	5	2
Proyecto 3	5	13	1	4
Proyecto 4	3	20	3	5

Tabla 6

También se le pidió al decisor que utilizara una escala de 1 a 10 para asignar pesos a los criterios, donde 1 representa la menor importancia y 10 la importancia máxima. Estos pesos se muestran en la tabla 7

w_j	5	8	7	3

Tabla 7

Para la aplicación de este método debemos expresar todos los objetivos como maximización. Esto lo podemos lograr considerando el inverso de la evaluación dada para los casos de los objetivos a minimizar, ya que además necesitamos que todas las evaluaciones sean positivas.

La matriz de evaluaciones, con todos sus objetivos a maximizar, queda entonces:

	Max IA	**Max RE**	**Max RI**	**Max TR**
Proyecto 1	8	14	1	0.143
Proyecto 2	3	16	0.200	0.500
Proyecto 3	5	13	1	0.250
Proyecto 4	3	20	0.333	0.200

Tabla 8

Corresponde ahora normalizar las utilidades asignadas a cada uno de los elemento de decisión.

Hemos visto que pueden utilizarse diferentes métodos de normalización, nosotros optaremos por normalizar respecto a la suma (procedimiento 3), ya que es uno de los más difundidos. Las evaluaciones obtenidas quedarán comprendidas entre 0 y 1, con mejor evaluación cuanto más cercana a 1 se encuentre.

Por ejemplo, para obtener la evaluación normalizada del proyecto 1 respecto al criterio IA, realizamos la siguiente cuenta:

$$r_{ij} = \frac{8}{19} = 0,421$$

Las utilidades y los pesos normalizados se muestran en la tabla 9.

	Max IA	**Max RE**	**Max RI**	**Max TR**
Proyecto 1	0.421	0.222	0.395	0.131
Proyecto 2	0.158	0.254	0.079	0.458
Proyecto 3	0.263	0.206	0.395	0.229
Proyecto 4	0.158	0.317	0.131	0.183
w_j	0.217	0.348	0.304	0.13

Tabla 9

Obtenemos la preferencia global de cada alternativa a través de una ponderación lineal dada por la función:

$$U(A_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j r_{ij}$$

Así para el proyecto 1, su preferencia global estará dad por:

U(P1)=0.421(0.217)+0.222(0.348)+0.395(0.304)+0.131(0.13)= 0.306

Para los restantes:

U(P2)= 0.206

U(P3)= 0.279

U(P4)= 0.208

Con las utilidades globales podemos establecer un orden de preferencias para los proyectos.

Proyecto 1	**0.306**
Proyecto 3	**0.279**
Proyecto 4	**0.208**
Proyecto 2	**0.206**

14. MÉTODO ANALÍTICO JERÁRQUICO (AHP)

El método AHP (*Analytic Hierarchy Process*) desarrollado por Thomas Saaty, puede considerarse una variante del método de Ponderación Lineal en la cual los pesos se asignan por comparaciones de a pares de criterios en lugar de hacerlo en forma directa.

Resuelve problemáticas tipo γ a través de un proceso que podemos sintetizar en las siguientes etapas:

Etapa 1 Estructurar el problema como un árbol jerárquico.

Etapa 2 Extraer la información del decisor mediante comparaciones de a pares entre los elementos de decisión - criterios y alternativas -.

Etapa 3 Usar el método de valores propios para estimar los pesos relativos de los elementos de decisión.

Etapa 4 Comprobar la consistencia de los juicios del decisor.

Etapa 5 Generar una evaluación global de cada alternativa a través de una ponderación lineal.

Analicemos como funciona el método a través de un sencillo ejemplo. Supongamos que el departamento de personal necesita nuevas computadoras. Se consideran tres proveedores: HP, IBM y Compaq. Para su selección se consideran cuatro criterios: Precio (P), velocidad de procesamiento (VP), garantía (G) y servicio técnico (ST).

Etapa 1: Estructurar el problema como un árbol jerárquico.

La construcción del árbol jerárquico puede realizarse de alguna de las dos siguientes formas:

- Construcción arriba – abajo: se comienza identificando los atributos globales, es decir, construyendo el árbol de lo más general a lo más particular. Todos los aspectos generales recopilados en la definición del problema están presentes en esta primera instancia. Cada criterio propuesto deberá llevar aparejada una definición operativa. Al descomponer un criterio hay que procurar que los sub-criterios generados guarden una relación jerárquica con el principal, evitando que se establezcan relaciones con otros principales. Se termina de agregar cuando las últimas ramas son susceptibles de ser valoradas por cualquier procedimiento.

- Construcción de abajo – arriba: en muchos casos al decisor le cuesta el procedimiento arriba abajo que, de alguna manera supone un cierto grado de elaboración sobre el material, lo cual no siempre ocurre. En estos casos la elaboración de lo particular a lo general es más recomendable Este procedimiento consiste en identificar todas las características que ayudan a distinguir entre las alternativas y posteriormente se construye la estructura agrupando las características que mantienen un factor común, a fin de identificar los diferentes criterios.

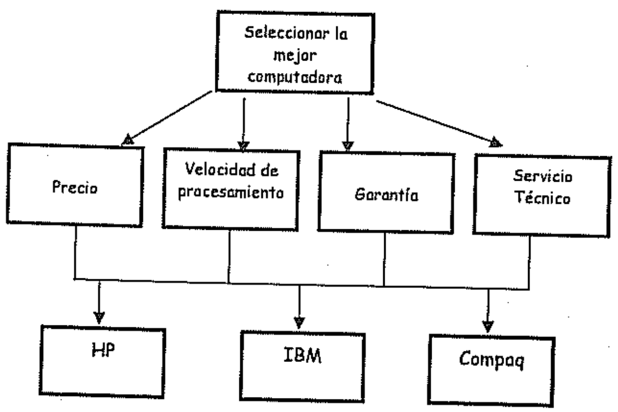

Figura 2

Etapa 2: Realizar comparaciones pareadas entre los elementos de decisión: objetivos (criterios) entre sí y entre las alternativas con respecto a cada objetivo. Estas comparaciones se realizan de acuerdo a una escala propuesta por Saaty, llamada Escala Fundamental:

1	Igualmente importante	Los dos elementos contribuyen igualmente al objetivo.
3	Moderadamente importante	La experiencia y el juicio favorecen un elemento en relación a otro.
5	Notablemente más importante	La experiencia o juicio favorecen fuertemente un elemento en relación a otro.
7	Importancia muy fuerte o demostrada	Un elemento es muy fuertemente favorecido en relación a otro. Puede ser demostrada en la práctica.
9	Importancia absoluta	La evidencia favorece un elemento en relación a otro, en el más alto grado de certeza.
2,4,6,8	Valores intermedios	Cuando se busca una condición de compromiso entre dos definiciones.

Tabla 10

I.- Comparación de a pares entre objetivos

	P	VP	G	ST
P	1	3	2	5
VP	1/3	1	1/2	1/2
G	1/2	2	1	2
ST	1/5	2	1/2	1

De esta manera, si *n* es el número de elementos que se comparan, sólo será necesario solicitar al decisor [n (n -1)]/2 comparaciones.

Notar que si la importancia de P con respecto a VP es 3 (moderadamente más importante), entonces, 1/3 será la medida que refleja el juicio del decisor al comparar VP con P.

II.- Se comparan las alternativas entre sí, con respecto a cada criterio, usando la metodología anterior.

P	HP	IBM	Compaq
HP	1	2	3
IBM	1/2	1	2
Compaq	1/3	1/2	1

VP	HP	IBM	Compaq
HP	1	1/2	1/4
IBM	2	1	1/3
Compaq	4	3	1

G	HP	IBM	Compaq
HP	1	1/6	1/3
IBM	6	1	3
Compaq	3	1/3	1

ST	HP	IBM	Compaq
HP	1	1/4	1/7
IBM	4	1	1
Compaq	7	1	1

Etapa 3: Estimar las ponderaciones o pesos relativos de los elementos de decisión.

El procedimiento matemático exacto para determinar las ponderaciones involucra el cálculo de valores y vectores propios[6]. Sin embargo, el

[6] Ver Anexo 1 al final del capítulo.

siguiente procedimiento de dos pasos, proporciona una buena aproximación:

Para cada una de las matrices obtenidas en la etapa anterior - A [a_{ij}] - obtener la matriz normalizada - A_{norm} - dividiendo cada elemento de la columna j por la suma de los elementos de la columna j.

Estimar cada peso (w_i) como el promedio de los elementos de la fila i de la matriz normalizada.

Aplicando este procedimiento se obtienen las matrices normalizadas,

	P	VP	G	ST
P	0,4918	0,3750	0,5000	0,5882
VP	0,1639	0,1250	0,1250	0,0588
G	0,2459	0,2500	0,2500	0,2353
ST	0,0984	0,2500	0,1250	0,1176

P	HP	IBM	Compaq
HP	0,5455	0,5714	0,5000
IBM	0,2727	0,2857	0,3333
Compaq	0,1818	0,1429	0,1667

VP	HP	IBM	Compaq
HP	0,1429	0,1111	0,1579
IBM	0,2857	0,2222	0,2105
Compaq	0,5714	0,6667	0,6316

G	HP	IBM	Compaq
HP	0,1000	0,1111	0,0769
IBM	0,6000	0,6667	0,6923
Compaq	0,3000	0,2222	0,2308

ST	HP	IBM	Compaq
HP	0,0833	0,1111	0,0667
IBM	0,3333	0,4444	0,4667
Compaq	0,5833	0,4444	0,4667

los pesos relativos (w_j) de los criterios:

$$\begin{bmatrix} 0{,}4888 & 0{,}1182 & 0{,}2453 & 0{,}1478 \end{bmatrix}$$

y de las alternativas respecto a cada criterio:

Precio	Velocidad Procesamiento	Garantía	Servicio Técnico
$\begin{bmatrix} 0{,}5390 \\ 0{,}2973 \\ 0{,}1638 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}1373 \\ 0{,}2395 \\ 0{,}6232 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}0960 \\ 0{,}6530 \\ 0{,}2510 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}0870 \\ 0{,}4148 \\ 0{,}4981 \end{bmatrix}$

Etapa 4: Comprobar la consistencia de los juicios del decisor.
Luego de armar cada matriz de comparaciones pareadas deberá comprobarse la consistencias de los juicios del decisor ya que éste cometerá ciertas inconsistencias al estimar los a_{ij}, y esto se hace través de un "ratio de consistencia" (RC).

Si RC ≤ 0,10 entonces la matriz considerada no presenta inconsistencias serias, de lo contrario el tomador de decisiones debe reconsiderar y posiblemente revisar los juicios de comparación por pares, antes de seguir adelante con el análisis.

Calcular el "índice de consistencia" (IC) como:

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

Donde:

n es el número de elementos que se comparan

λ_{max} es el valor propio de la matriz, que se calcula de la forma:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{(Aw)_i}{w_i}$$

Se determina a continuación la razón de consistencia $RC = \frac{IC}{IA}$, donde IA es un índice aleatorio ya calculado para matrices cuadradas de orden n, siendo algunos de sus valores los siguientes:

Nº de alternativas	Valor a utilizar
3	0,52
4	0,89
5	1,11
6	1,25
7	1,35
8	1,40
9	1,45
10	1,49

Tabla 11

Con este procedimiento verificamos consistencia de la matriz de comparaciones pareadas entre criterios:

$$Aw = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4888 \\ 0{,}1182 \\ 0{,}2453 \\ 0{,}1478 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0727 \\ 0{,}4776 \\ 1{,}0216 \\ 0{,}6045 \end{bmatrix}$$

$$\lambda max = \frac{1}{4}\left(\frac{2{,}0727}{0{,}4888} + \frac{0{,}4776}{0{,}1182} + \frac{1{,}0216}{0{,}2453} + \frac{0{,}6045}{0{,}1478}\right) = 4{,}1345$$

$$IC = \frac{4{,}1345 - 4}{3} = 0{,}0448$$

Como:

La construcción del árbol jerárquico puede realizarse de alguna de las dos siguientes formas:

- Construcción arriba – abajo: se comienza identificando los atributos globales, es decir, construyendo el árbol de lo más general a lo más particular. Todos los aspectos generales recopilados en la definición del problema están presentes en esta primera instancia. Cada criterio propuesto deberá llevar aparejada una definición operativa. Al descomponer un criterio hay que procurar que los sub-criterios generados guarden una relación jerárquica con el principal, evitando que se establezcan relaciones con otros principales. Se termina de agregar cuando las últimas ramas son susceptibles de ser valoradas por cualquier procedimiento.

- Construcción de abajo – arriba: en muchos casos al decisor le cuesta el procedimiento arriba abajo que, de alguna manera supone un cierto grado de elaboración sobre el material, lo cual no siempre ocurre. En estos casos la elaboración de lo particular a lo general es más recomendable Este procedimiento consiste en identificar todas las características que ayudan a distinguir entre las alternativas y posteriormente se construye la estructura agrupando las características que mantienen un factor común, a fin de identificar los diferentes criterios.

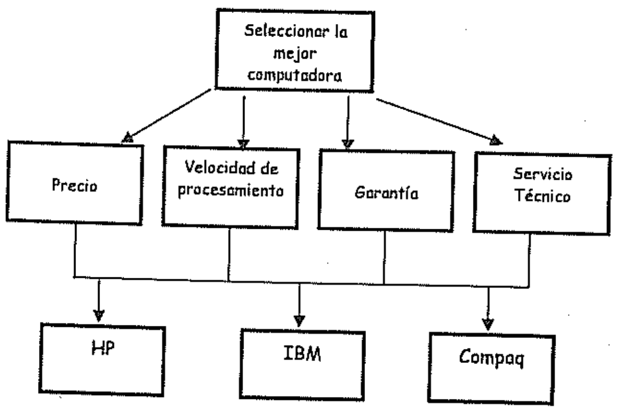

Figura 2

Etapa 2: Realizar comparaciones pareadas entre los elementos de decisión: objetivos (criterios) entre sí y entre las alternativas con respecto a cada objetivo. Estas comparaciones se realizan de acuerdo a una escala propuesta por Saaty, llamada Escala Fundamental:

1	Igualmente importante	Los dos elementos contribuyen igualmente al objetivo.
3	Moderadamente importante	La experiencia y el juicio favorecen un elemento en relación a otro.
5	Notablemente más importante	La experiencia o juicio favorecen fuertemente un elemento en relación a otro.
7	Importancia muy fuerte o demostrada	Un elemento es muy fuertemente favorecido en relación a otro. Puede ser demostrada en la práctica.
9	Importancia absoluta	La evidencia favorece un elemento en relación a otro, en el más alto grado de certeza.
2,4,6,8	Valores intermedios	Cuando se busca una condición de compromiso entre dos definiciones.

Tabla 10

I.- Comparación de a pares entre objetivos

	P	VP	G	ST
P	1	3	2	5
VP	1/3	1	1/2	1/2
G	1/2	2	1	2
ST	1/5	2	1/2	1

De esta manera, si n es el número de elementos que se comparan, sólo será necesario solicitar al decisor $[n\ (n-1)]/2$ comparaciones.

Notar que si la importancia de P con respecto a VP es 3 (moderadamente más importante), entonces, 1/3 será la medida que refleja el juicio del decisor al comparar VP con P.

II.- Se comparan las alternativas entre sí, con respecto a cada criterio, usando la metodología anterior.

P	HP	IBM	Compaq
HP	1	2	3
IBM	1/2	1	2
Compaq	1/3	1/2	1

VP	HP	IBM	Compaq
HP	1	1/2	1/4
IBM	2	1	1/3
Compaq	4	3	1

G	HP	IBM	Compaq
HP	1	1/6	1/3
IBM	6	1	3
Compaq	3	1/3	1

ST	HP	IBM	Compaq
HP	1	1/4	1/7
IBM	4	1	1
Compaq	7	1	1

Etapa 3: Estimar las ponderaciones o pesos relativos de los elementos de decisión.

El procedimiento matemático exacto para determinar las ponderaciones involucra el cálculo de valores y vectores propios[6]. Sin embargo, el

[6] Ver Anexo 1 al final del capítulo.

siguiente procedimiento de dos pasos, proporciona una buena aproximación:

Para cada una de las matrices obtenidas en la etapa anterior - A [a_{ij}] - obtener la matriz normalizada - A_{norm} - dividiendo cada elemento de la columna j por la suma de los elementos de la columna j.

Estimar cada peso (w_i) como el promedio de los elementos de la fila i de la matriz normalizada.

Aplicando este procedimiento se obtienen las matrices normalizadas,

	P	VP	G	ST
P	0,4918	0,3750	0,5000	0,5882
VP	0,1639	0,1250	0,1250	0,0588
G	0,2459	0,2500	0,2500	0,2353
ST	0,0984	0,2500	0,1250	0,1176

P	HP	IBM	Compaq
HP	0,5455	0,5714	0,5000
IBM	0,2727	0,2857	0,3333
Compaq	0,1818	0,1429	0,1667

VP	HP	IBM	Compaq
HP	0,1429	0,1111	0,1579
IBM	0,2857	0,2222	0,2105
Compaq	0,5714	0,6667	0,6316

G	HP	IBM	Compaq
HP	0,1000	0,1111	0,0769
IBM	0,6000	0,6667	0,6923
Compaq	0,3000	0,2222	0,2308

ST	HP	IBM	Compaq
HP	0,0833	0,1111	0,0667
IBM	0,3333	0,4444	0,4667
Compaq	0,5833	0,4444	0,4667

los pesos relativos (w_j) de los criterios:

$$\begin{bmatrix} 0,4888 & 0,1182 & 0,2453 & 0,1478 \end{bmatrix}$$

y de las alternativas respecto a cada criterio:

$$\underset{\text{Precio}}{\begin{bmatrix} 0,5390 \\ 0,2973 \\ 0,1638 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Velocidad Procesamiento}}{\begin{bmatrix} 0,1373 \\ 0,2395 \\ 0,6232 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Garantía}}{\begin{bmatrix} 0,0960 \\ 0,6530 \\ 0,2510 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Servicio Técnico}}{\begin{bmatrix} 0,0870 \\ 0,4148 \\ 0,4981 \end{bmatrix}}$$

Etapa 4: Comprobar la consistencia de los juicios del decisor.
Luego de armar cada matriz de comparaciones pareadas deberá comprobarse la consistencias de los juicios del decisor ya que éste cometerá ciertas inconsistencias al estimar los a_{ij}, y esto se hace través de un "ratio de consistencia" (RC).

Si RC ≤ 0,10 entonces la matriz considerada no presenta inconsistencias serias, de lo contrario el tomador de decisiones debe reconsiderar y posiblemente revisar los juicios de comparación por pares, antes de seguir adelante con el análisis.

Calcular el "índice de consistencia" (IC) como:

$$IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$$

Donde:

n es el número de elementos que se comparan

λ_{max} es el valor propio de la matriz, que se calcula de la forma:

$$\lambda_{max} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\frac{(Aw)_i}{w_i}$$

Se determina a continuación la razón de consistencia $RC = \frac{IC}{IA}$, donde IA es un índice aleatorio ya calculado para matrices cuadradas de orden n, siendo algunos de sus valores los siguientes:

Nº de alternativas	Valor a utilizar
3	0,52
4	0,89
5	1,11
6	1,25
7	1,35
8	1,40
9	1,45
10	1,49

Tabla 11

Con este procedimiento verificamos consistencia de la matriz de comparaciones pareadas entre criterios:

$$Aw = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4888 \\ 0,1182 \\ 0,2453 \\ 0,1478 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0727 \\ 0,4776 \\ 1,0216 \\ 0,6045 \end{bmatrix}$$

$$\lambda max = \frac{1}{4}\left(\frac{2,0727}{0,4888} + \frac{0,4776}{0,1182} + \frac{1,0216}{0,2453} + \frac{0,6045}{0,1478}\right) = 4,1345$$

$$IC = \frac{4,1345 - 4}{3} = 0,0448$$

Como:

$$RC = \frac{0,0448}{0,9} = 0,04982 < 0.10$$

decimos que la matriz de comparaciones entre criterios no presenta inconsistencias serias.

De la misma forma, si se calculan los RC para las restantes matrices podrá comprobarse que ninguna presenta inconsistencias relevantes.

Etapa 5: Generar la evaluación global de cada alternativa a través de una ponderación lineal con los valores obtenidos en la etapa 3. De esta evaluación global surgirá la "mejor alternativa" para el decisor.

Con los vectores de prioridades de las alternativas, construimos una matriz que resume las prioridades de cada una de ellas con respecto a cada uno de los criterios, a la que llamaremos matriz de prioridades $P=[r_{ij}]$.

Luego, a través de una ponderación lineal con el vector de ponderaciones de los criterios, obtenemos la ponderación global de las alternativas.

$$U(A_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, r_{ij}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{Criterios} \\ \text{Alternativas} & \begin{bmatrix} 0,5390 & 0,1373 & 0,0960 & 0,0870 \\ 0,2973 & 0,2395 & 0,6530 & 0,4148 \\ 0,1638 & 0,6232 & 0,2510 & 0,4981 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0,4888 \\ 0,1182 \\ 0,2453 \\ 0,1478 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0,3163} \\ \mathbf{0,3951} \\ \mathbf{0,2889} \end{bmatrix}$$

Con la utilidad global de cada alternativa se puede construir una ordenación final, que en este ejemplo indica que el equipo marca IBM tiene una mejor calificación global (0,3951).

15. FUNDAMENTACIÓN DEL MÉTODO AHP:

Profundizaremos ahora el estudio de cada una de las etapas descriptas anteriormente.

Etapa 1: Estructurar el problema como un árbol jerárquico

Quizás este es el aspecto más importante del AHP, donde el analista estructura el problema en una jerarquía interrelacionada de los elementos de decisión.

En el primer nivel se encuentra el objetivo general del problema. En el segundo nivel se ubican los atributos u objetivos que contribuyen directamente al logro del objetivo general. A medida que se desciende en la jerarquía, incrementa el detalle de los atributos y el último nivel contiene las alternativas de decisión.

Saaty sugiere que el número de elementos en cada nivel debe ser limitado a un máximo de nueve, sin embargo, esta restricción no es una condición necesaria del método.

La jerarquía lineal es normalmente la estructura que mejor representa, en términos de simplicidad y funcionalidad, la dependencia entre los niveles de los componentes de un sistema. Es una forma conveniente de descomponer, en pasos, un problema complejo, en la búsqueda de la explicación de causa y efecto, formándose una cadena lineal.

Esta modelización debe ser cuidadosa, pues los criterios dispuestos en cada nivel deben ser no redundantes (independencia de un nivel en relación a los niveles inferiores) y homogéneos (los criterios de un determinado nivel jerárquico deben presentar el mismo grado de importancia relativa dentro de su nivel).

En general, un árbol jerárquico para *m* alternativas, *n* atributos y *k* niveles, tiene una estructura como la siguiente:

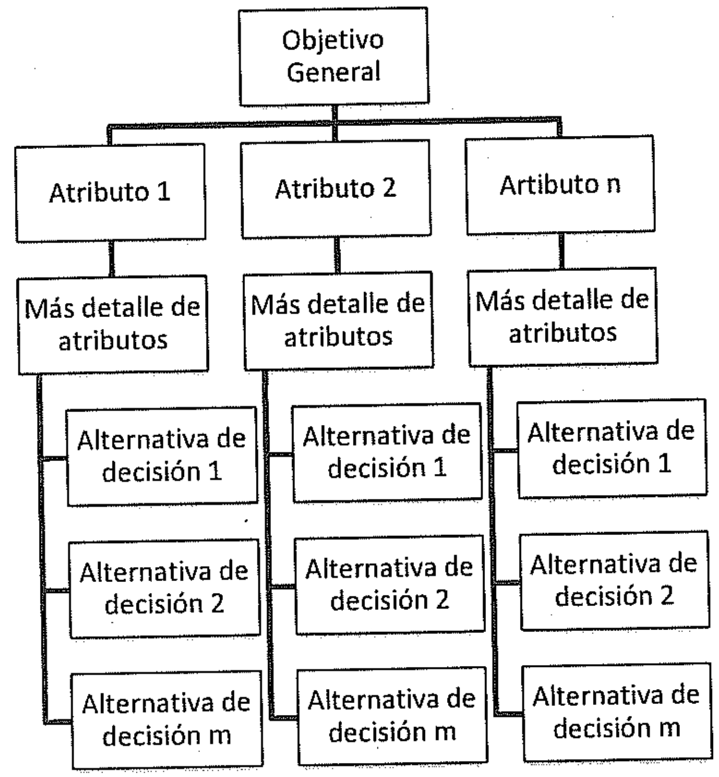

Figura 3

Después de completada la modelización, se seguirá con la fase de implementación del método propiamente dicho.

Etapa 2: Extraer la información del decisor mediante comparaciones de a pares entre los elementos de decisión – criterios y alternativas -.

Los datos de entrada del problema se organizan en matrices de comparaciones de a pares de elementos de un nivel, que contribuyen a satisfacer o alcanzar los objetivos del nivel inmediato superior.
Utilizando la escala de 1 a 9, cada juicio refleja la respuesta a dos preguntas: ¿cuál de los elementos es más importante con respecto a un criterio de nivel superior? Y ¿cuánto más importante? Si el elemento en fila es menos importante que el elemento en columna, entramos el valor recíproco en la posición correspondiente de la matriz, esto es: $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$

Para un conjunto de n elementos en una matriz, se necesitan $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaciones, ya que hay n elementos iguales a 1 en la diagonal principal, que surgen de comparar cada elemento consigo mismo, y de los restantes juicios la mitad son recíprocos.

Las matrices de comparaciones de a pares son recíprocas, las que gozan de interesantes propiedades en las cuales se basa el método AHP.
Se puede pensar que es posible una asignación directa de los pesos a los elementos de un nivel dado. Saaty argumenta, que dar la asignación directa de los pesos es demasiado abstracto para el decisor y los resultados serían incorrectos. En cambio las comparaciones de a pares permiten al decisor revelar sus preferencias de manera natural.

Etapa 3: Usar el método de valores propios para estimar los pesos relativos de los elementos de decisión.

Para realizar la asignación de pesos, Saaty aconseja utilizar el método de los valores propios, aunque se han propuestos otros menos conocidos.

Supongamos que tenemos n piedras[7] : A_1 , A_2, ... A_n, con pesos conocidos
W = [w_1 , w_2 ,.....w_n] , respectivamente, y que formamos una matriz de relaciones pareadas, cuyas filas dan la relación de los pesos de cada piedra con respecto a todas las otras, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

[7] Ejemplo tomado de Saaty , T,

En donde por ejemplo, si $w_1 = ½$ y $w_2 = ¼$, entonces la piedra 1 es dos veces más pesada que la piedra 2. Es decir que: $a_{12} = \frac{w_1}{w_2} = 2$

Observemos que, a partir de esta matriz, si quisiéramos recuperar el vector de pesos, deberíamos resolver el sistema:

$$A\,W = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n\,W \qquad (1)$$

Donde:

$$A\,W = n\,W, \text{ o } (A - nI)\,W = 0$$

es un sistema de ecuaciones homogéneo, que tiene una solución no trivial si y sólo si, el $|A - nI| = 0$

O sea, n es un valor propio de A, y W su autovector asociado.

Analizando la matriz A vemos que tiene rango 1, ya que cada línea es un múltiplo constante de la primera. Por lo tanto todos sus valores propios (λ), excepto uno, son iguales a cero. Como la suma de los valores propios de una matriz es igual a su traza y dado que todos los elementos de la diagonal principal de A son todos iguales a 1, podemos decir que el valor propio de A es igual al orden de la matriz, es decir n.

Esto demuestra que aún si el decisor no conociera los pesos de las piedras, pero fuera totalmente consistente en sus juicios, podríamos obtener los pesos w_i a partir de la única solución no trivial de (1).

Recordemos que AHP supone que el decisor no conoce el vector de pesos W, por lo cual, no se puede dar el valor exacto de $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, sino sólo una estimación de él como juicio.

Al no poder determinar la matriz A, el problema consiste ahora en encontrar una estimación de ella, la que llamaremos $\hat{A}$ y a partir de ésta el vector de pesos estimados ($\hat{W}$)

Es decir:

$$\hat{A}\hat{W} = \lambda_{max}\hat{W} \qquad (2)$$

dónde:

$\hat{A}$ = Es la matriz de juicios o comparaciones pareadas
$\hat{W}$ = estimador de los pesos relativos

λ_{max} = el mayor valor propio de $\hat{A}$

Para realizar estas estimaciones, la metodología AHP toma como entradas las comparaciones pareadas determinadas en la etapa anterior y produce como salida los pesos relativos de los elementos de cada nivel.

Saaty propone como forma de estimación del autovector un método que consta de los siguientes pasos:

1º A partir de la matriz pareada A, obtener la matriz normalizada como

$$A_{norm} = r_{ij} = \left[\frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}} \right]$$

2º Calcular el vector de pesos como el promedio de cada fila de la matriz normalizada.

$$w_j = \frac{1}{n} \sum_j \left(r_{ij} \right)$$

Etapa 4: Comprobar la consistencia de los juicios del decisor.

Si $\hat{A}$ fuera completamente consistente, entonces λ_{max} sería igual a n y $\hat{W}$ igual a W. Sin embargo, en la práctica el decisor cometerá ciertas inconsistencias en sus juicios, es deseable entonces, encontrar una medida del error cometido debido a las mismas. Saaty demuestra que pequeños cambios en a_{ij} implican un cambio pequeño en el λ_{max} y la desviación de este con respecto a n , nos proporciona una medida de la inconsistencia.

Para medir la inconsistencia se calcula un *índice de consistencia*, $IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$, que luego se compara con el *índice aleatorio* (IA) calculado para matrices cuadradas de orden n por el Laboratorio Nacional de Oak Ridge (E.E.U.U.), siendo algunos de sus valores los de la siguiente tabla:

Orden	3	4	5	6	7	8	9	10
IA	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49

Tabla 12

La relación $RC = \frac{IC}{IA}$ se llama *relación de consistencia* y si su valor es menor a 0,10 indica que la matriz $\hat{A}$ no presenta inconsistencias serias; por el contrario si RC fuera mayor a 0,10 se aconseja revisar los juicios del decisor.

Etapa 5: Generar una evaluación global de cada alternativa a través de una ponderación lineal.

Esta etapa consiste en agregar los pesos relativos de todos los niveles obtenidos en la etapa 3 con el fin de producir un vector compuesto por ponderaciones, el cual da un ordenamiento de las alternativas con el fin de alcanzar el objetivo más general del problema.

Es decir, consiste en calcular la función de agregación, con la que se generaran los valores finales para las alternativas, ordenándolas por medio de una función de utilidad aditiva de la forma:

$$U(A_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j r_{ij}$$

donde r_{ij} representa a la utilidad normalizada de la alternativa i con respecto al criterio j y w_j representa el peso asignado a cada criterio, una vez normalizado.

16. MÉTODO TOPSIS:

Yoon y Hwang (1995) desarrollaron la técnica TOPSIS (*Technique for Order Preferente by Similarity to Ideal Solution*) basándose en el concepto de que es deseable que una alternativa determinada se ubique a la distancia más corta respecto de una solución ideal positiva y a la mayor distancia respecto a una solución ideal negativa.

SOLUCIÓN IDEAL

Vamos a definir entonces, qué se entiende por solución ideal positiva o alternativa "ideal" y solución ideal negativa o alternativa "anti-ideal".

Dado un conjunto X de m alternativas de decisión , un conjunto J de n atributos y una matriz A cuyos elementos a_{ij} son las evaluaciones de cada una de las alternativas respecto a cada atributo, es decir $a_{ij} = u_j(x_i)$ y transformados previamente todos los criterios a maximizar y todas las a_{ij} a valores mayores o iguales a cero.

Se llama alternativa "ideal" al punto:

$$a^+ = \left[a_{i1}^+, a_{i2}^+, \ldots\ldots, a_{in}^+ \right]$$

Donde,

$$a_{ij}^+ = \max_j \; a_{ij}$$

De esta manera la alternativa ideal se obtiene al maximizar cada criterio independientemente.

Análogamente se puede definir la alternativa "anti-ideal" como:

$$a^- = [a_{i1}^-, a_{i2}^-, \ldots\ldots, a_{in}^-]$$

donde,

$$a_{ij}^- = \min_j \; a_{ij}$$

En definitiva, una solución ideal se define como un conjunto de niveles ideales respecto a todos los atributos considerados de un determinado problema, aun cuando la solución ideal usualmente sea imposible o no sea factible de obtener. Es claro que tanto la alternativa a^+ como la a^- no forman parte del conjunto de elección, de lo contrario no existiría un problema de decisión, es decir que ambas son virtuales.

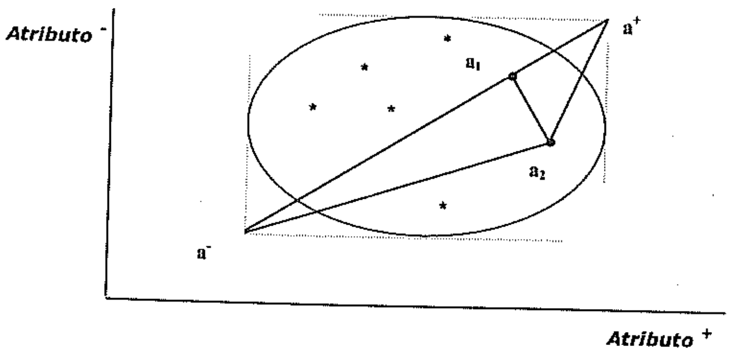

Figura 4

En el gráfico (Hwang y Yoon, 1995) se consideran las posiciones de dos alternativas a_1 y a_2 respecto al ideal de un atributo de beneficio (a^+) y al de un atributo de costo o desventaja (a^-). Las distancias euclídeas al ideal positivo y al ideal negativo muestran que, en este espacio bidimensional, a_1 se encuentra más cerca de a^+ y que a_2 está más lejos del anti-ideal a^-.

Debido a esta situación de ambigüedad es necesario determinar el índice de similaridad de las dos alternativas, valor mediante el cual se tiende a maximizar la distancia relativa al ideal negativo respecto a la suma de las distancias respecto al ideal positivo y al ideal negativo respectivamente.

EL MÉTODO

Primero se determina el valor normalizado (r_{ij}) de la preferencia de cada alternativa i respecto al criterio j, mediante la aplicación de alguna de métrica, como se muestra a continuación:

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}} \qquad r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\left(\sum_j a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\max_j a_{ij}}$$

Los coeficientes así obtenidos son ponderados por los pesos de los criterios, también normalizados, obteniéndose los valores:

$$v_{ij} = w_j \; r_{ij}$$

Denotando con

$$A^+ = [v_1^+, \ldots\ldots\ldots, v_n^+]$$

el vector de los v_j^+ mejores valores para el conjunto de criterios (ideal positivo), y con

$$A^- = [v_1^-, \ldots\ldots\ldots, v_n^-]$$

los v_j^- peores valores alcanzables o no deseables para el mismo conjunto (ideal negativo), se calculan las distancias de cada alternativa i al ideal positivos S_i^+ y al ideal negativo S_i^- según una métrica previamente escogida.

$$S_i^+ = \left[\sum_j^n |v_{ij} - v_j^+|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad S_i^- = \left[\sum_j^n |v_{ij} - v_j^-|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Finalmente el índice de similaridad al ideal positivo se evalúa como el cociente:

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{(S_i^+ + S_i^-)}$$

Es decir que cuanto más elevado es el índice C_i^* más lejos se sitúa la alternativa *i* respecto al ideal negativo en relación a las distancias totales a los dos ideales y por tanto más preferida resulta su posición global.

En definitiva podemos decir que:

TOPSIS define un índice de similaridad (o proximidad relativa), respecto a la solución ideal positiva, combinando la proximidad a la solución ideal positiva y la lejanía respecto a la solución ideal negativa. Seleccionando luego a aquella alternativa que se ubica lo más cerca posible a la máxima similaridad respecto a la solución ideal positiva.

DISTINTOS TIPOS DE MÉTRICAS

Al medir las distancias a la solución ideal positiva y a la solución ideal negativa, se pueden utilizar diferentes métricas en R^n (Barba Romero y

Pomerol 1997), sin embargo la más utilizada es la métrica de Minkowski entre dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de R^n, que se define de la siguiente manera:

$$m_p = \left[\sum_j |x_j - y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } p \geq 1$$

Los valores más utilizados para p son p = 1, p = 2 y p = ∞.

Para p = 1 (distancia ciudad):

$$m_1 = \sum_j |x_j - y_j|$$

Para p = 2 (distancia euclídea):

$$m_2 = \left[\sum_j (x_j - y_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Para p→∞, se obtiene:

$$m_\infty = Max_j |x_j - y_j|$$

ya que en el límite $\left[\sum_j (x_j - y_j)^p\right]^{\frac{1}{p}}$, tiende a $Max_j |x_j - y_j|$

El método TOPSIS al determinar primero el valor normalizado de la preferencia cada alternativa i respecto al criterio j, utiliza alguna de las métricas antes enunciadas, como se muestra a continuación:

$$p = 1 \qquad r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_j x_{ij}}$$

$$p = 2 \qquad r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\left(\sum_j x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$p \to \infty \qquad r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_j x_{ij}}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Volvamos al problema del inversionista y sus proyectos de Inversión. En la tabla siguiente se encuentran las utilidades ya normalizadas y ponderadas por los pesos de los criterios, es decir los v_{ij}. Hemos agregado dos filas en las que se identifican a la alternativa ideal (A^+) y anti-ideal (A^-)

	Max IA	Max RE	Max RI	Max TR
Proyecto 1	0.091	0.077	0.120	0.017
Proyecto 2	0.034	0.088	0.024	0.059
Proyecto 3	0.057	0.072	0.120	0.030
Proyecto 4	0.034	0.110	0.040	0.024
A^+	0.091	0.110	0.120	0.059
A^-	0.034	0.072	0.024	0.017

Tabla 13

Para calcular las distancias al ideal y anti-ideal utilizamos la métrica 1, aunque podría haberse usado cualquiera.

Recordemos que con esta métrica las distancias se calculan como:

$$S_i^+ = \sum_j^n |v_{ij} - v_j^+| \quad y \quad S_i^- = \sum_j^n |v_{ij} - v_j^-|$$

$S^+_1 = |0.091-0.091| + |0.077-0.110| + |0.120-0.120| + |0.017-0.059| = 0.076$
$S^-_1 = |0.091-0.034| + |0.077-0.072| + |0.120-0.024| + |0.017-0.017| = 0.159$

$S^+_2 = |0.034-0.091| + |0.088-0.110| + |0.024-0.120| + |0.059-0.059| = 0.175$
$S^-_2 = |0.034-0.034| + |0.088-0.072| + |0.024-0.024| + |0.059-0.017| = 0.059$

$S^+_3 = |0.057-0.091| + |0.072-0.110| + |0.120-0.120| + |0.030-0.059| = 0.103$
$S^-_3 = |0.057-0.034| + |0.072-0.072| + |0.120-0.024| + |0.030-0.017| = 0.132$

$S^+_4 = |0.034-0.091| + |0.110-0.110| + |0.040-0.120| + |0.024-0.059| = 0.173$
$S^-_4 = |0.034-0.034| + |0.110-0.072| + |0.040-0.024| + |0.024-0.017| = 0.061$

Recordando que el índice de similaridad se calcula como:

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{(S_i^+ + S_i^-)}$$

Para cada una de las alternativas obtenemos:

$$C_1^* = \frac{0.159}{(0.076 + 0.159)} = 0.676$$

$$C_2^* = \frac{0.059}{(0.175+0.059)} = 0.251$$

$$C_3^* = \frac{0.132}{(0.103+0.132)} = 0.562$$

$$C_4^* = \frac{0.061}{(0.173+0.061)} = 0.261$$

A partir de los índices de similaridad podemos ordenar a las alternativas de acuerdo a su máxima similiradidad al ideal positivo:

esuelva el oblema aplicando s métricas 2 y 3 y mpare los sultados.

Proyecto 1	**0.676**
Proyecto 3	**0.562**
Proyecto 4	**0.261**
Proyecto 2	**0.251**

Podemos observar que el orden de las alternativas coincide con el dado por el método de ponderación lineal. Esto no es casualidad, ya que utilizando la métrica m_1 (distancia ciudad), los métodos TOPSIS y Ponderación lineal proporcionarán la misma ordenación.

17. Premisas Básicas del Apoyo Multicriterio a las Decisiones

Es necesario tener presente que, los Métodos Multicriterio no buscan presentar una "solución" al problema eligiendo una única verdad, más bien, apoyan el proceso de decisión a través de la recomendación de acciones o cursos de acción a quien va a tomar la decisión. Tratan de representar lo más fielmente posible las preferencias del decisor o del grupo de decisores, aun cuando ellas no sean totalmente consistentes. No se debe olvidar que:

- El "óptimo" depende de cada punto de vista que se adopte, es decir, de cada criterio.
- En la gran mayoría de los problemas reales, no existe una solución ideal que satisfaga simultáneamente todos los intereses asociados al problema.
- Se buscan soluciones de compromiso, es decir que sean satisfactorias en el sentido dado por Simon.

ANEXO 1

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Sea **A** una matriz de orden n. Un vector **v** no nulo es un **vector propio** o **característico**[8] de **A**, si existe un escalar real λ tal que :

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} \qquad (1)$$

El escalar λ se llama **valor propio** o **valor característico**[9] de **A**, correspondiente a **v** y **v** es un vector propio correspondiente a λ.

Cada uno de los valores propios debe corresponder a un vector no nulo **v**. El vector nulo, se excluye como vector propio, dado que $\mathbf{A}\,\phi = \phi = \lambda\,\phi$ se cumple para cualquier matriz **A** de orden n y cualquier escalar λ.

Pueden encontrarse todos los valores propios de una matiz **A** de orden n, resolviendo (1). Observemos que si $\mathbf{v} \neq \phi$ y $\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} = (\lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{v}$.

Por lo tanto:

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{v} = (\lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{v} - \mathbf{A}\,\mathbf{v} = \phi \qquad (2)$$

En donde $\mathbf{v} \neq \phi$. La ecuación (2) tiene una solución no trivial si y sólo si:

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Entonces se dice que λ es un valor propio de A si y sólo si λ es una solución real de la ecuación $|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

[8] Conocido también como autovector o eigenvector
[9] Conocido también como autovalor o eigenvalor

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

Una organización está considerando comprar un nuevo paquete de software para administración de proyectos. Han decidido que es importante que el software elegido tenga gran variedad de herramientas y sea fácil de usar. Se ha elaborado una lista de cuatro paquetes y sus desempeños para estos dos criterios.

Software	Herramientas disponibles	Facilidad de uso
Software 1	62	100
Software 2	70	50
Software 3	60	60
Software 4	90	10

También han decidido que el puntaje para "Herramientas disponibles" deberá tener una ponderación de 2 y "Facilidad de uso" de 1, ya que la importancia del primer criterio es el doble de la del segundo.
¿A qué conclusión arribaría? ¿Qué otras preguntas querría hacer? ¿Considera que los criterios elegidos son apropiados?

ACTIVIDAD 2

Juan está por elegir su compañera en la fiesta de egresados y ha determinado que belleza, inteligencia y personalidad son los factores clave para elegir una compañera satisfactoria. Su matriz de comparación por pares para estos objetivós es la siguiente:

$$\begin{array}{r} \text{belleza} \\ \text{inteligencia} \\ \text{personalidad} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Debe elegir entre tres mujeres: Ana, María y Elena
En las siguientes matrices de comparaciones de a pares Juan refleja sus preferencias entre estas tres mujeres con respecto a cada criterio:

Belleza Inteligencia *Personalidad*

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 1 & \\ & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & \\ & 1 & \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando AHP, aconseje a Juan sobre la pareja a elegir.

¿Es consistente con sus juicios?

ACTIVIDAD 3

Dos universidades (A y B) le han ofrecido a Julián becas para realizar sus estudios de posgrado. Tres criterios son importantes para él al realizar la selección: Monto de la beca (M), Prestigio de la Institución (P) y Calidad de vida de la ciudad (C).

Utilice AHP con el fin de ayudar a Julián en la elección de la universidad más adecuada para sus estudios de posgrado.

A continuación se proporcionan las matrices de comparaciones pareadas.

¿Son consistentes los juicios de Julián?

	M	P	C
M	1	2	5
P		1	4
C			1

M	A	B
A	1	3
B		1

P	A	B
A	1	1/4
B		1

C	A	B
A	1	5
B		1

ACTIVIDAD 4

Una empresa prestadora de servicios de internet le pidió a Roberto que comparara entre sí los criterios para evaluar el servicio. Roberto facilitó la siguiente matriz pareada:

	RAPIDEZ	COSTO	SERV. DE POSVENTA
RAPIDEZ	1	3	5
COSTO		1	4
SERV. DE POSVENTA			1

¿Son consistentes los juicios de Roberto?

ACTIVIDAD 5

Considere el caso en que usted es el dueño de una inmobiliaria y un cliente está interesado en adquirir una casa. Al indagarlo respecto a las características que desea del inmueble, obtiene los siguientes datos:

1) El cliente dice que la cantidad de dormitorios es importante y que prefiere una casa con varios dormitorios. Para él es aceptable una vivienda con por lo menos 2 dormitorios y no más de 5. Con más de esa cantidad no le interesa.

2) El tamaño del terreno es otro factor importante. Prefiere lotes grandes a pequeños. Desea adquirir una casa que tenga por lo menos 400 m^2 de terreno. Piensa que lotes de más de 2000 m^2 no le interesan.

3) La antigüedad del inmueble, es otra característica a tener en cuenta. Manifiesta que prefiere casas nuevas a antiguas. Para que la considere aceptable, debería tener 20 años o menos.

4) Respecto al costo de la vivienda, considera que no puede gastar más de U$S 200.000.- y que, aunque prefiere las más económicas, no cree posible que viviendas que cuesten menos de 60.000.- puedan interesarle.

5) Otro criterio a evaluar en su decisión será la distancia a colegios bilingües para sus hijos. Sobre el particular prefiere una casa que se encuentre a no más de 3 km. de distancia a colegios de este tipo.

El cliente le manifestó que, era consciente de lo difícil que es conseguir un inmueble que cumpla con todos los requisitos, pero que igualmente aceptaría ver viviendas cuyas características sean similares a las solicitadas.
Suponga que usted ha examinado su base de datos y encontró 31 potenciales viviendas, con las características que se detallan en la tabla de la página siguiente.

1. Se solicita que seleccione 10 casas para ofrecerle al cliente.
2. Suponga que el cliente le ha dado las siguientes valoraciones para sus objetivos:
   N° de dormitorios: 15
   Terreno: 20
   Antigüedad: 10
   Costo: 10
   Distancia a colegios: 25

Realice un ordenamiento de las alternativas del cliente de acuerdo a las preferencias manifestadas por él.

	Dormitorios	Terreno m^2	Antigüedad	Precio	Colegios en km.
Casa 1	5	250	25	290.000	2.5
Casa 2	5	400	18	90.000	3.9
Casa 3	3	600	20	92.000	1.1
Casa 4	2	300	25	42.000	5
Casa 5	2	250	15	47.500	3.2
Casa 6	2	200	19	87.500	2.4
Casa 7	4	600	9	95.000	1.5
Casa 8	7	1300	28	180.000	4.5
Casa 9	3	300	30	55.000	4.5
Casa 10	3	400	20	60.000	1.1
Casa 11	5	600	14	160.000	2
Casa 12	4	350	16	112.500	1.2
Casa 13	3	1250	9	180.000	1.9
Casa 14	6	600	10	120.000	5.4
Casa 15	6	1000	4	140.000	3.5
Casa 16	4	300	17	110.000	1.2
Casa 17	8	2000	40	2450.000	3.6
Casa 18	7	1200	2	215.000	3.2
Casa 19	4	400	8	175.000	2.3
Casa 20	3	750	16	120.000	1.2
Casa 21	4	500	0	275.000	2.9
Casa 22	5	1000	14	180.000	4.1
Casa 23	4	350	11	105.000	0.3
Casa 24	3	450	2	194.000	1.6
Casa 25	3	200	18	42.500	2.1
Casa 26	5	850	17	105.000	3.5
Casa 27	5	500	12	185.000	0.3
Casa 28	4	2500	10	65.000	3.4
Casa 29	4	1750	22	135.000	3.2
Casa 30	3	400	30	76.000	0.2
Casa 31	4	250	5	125.000	3.1

ACTIVIDAD 6

Un decisor que tiene que ordenar cinco proyectos de inversión en el área de turismo (alternativas) que denominamos A1, A2, A3, A4 y A5, y que evaluará en base a cuatro criterios:

A1: Valor actual neto (VAN)
A2: Nivel de empleo
A3: Posibilidades de expansión
A4: Inversión Inicial

Todos los criterios son a maximizar, excepto el último que es a minimizar.

La tabla que se presenta a continuación contiene las valoraciones de cada una de las alternativas respecto a cada criterio y los pesos de los criterios

	Max VAN	*Max* NE	*Max* PE	*Min* II
A1	100	7	B	1800
A2	200	8	B	1600
A3	100	4	MB	1200
A4	200	6	E	2500
A5	250	9	MB	3000
Pesos w_j	0,365	0,185	0,2	0,25

Escala Lingüística utilizada en la evaluación del criterio Posibilidades de Expansión.

Excelente	*Muy Bueno*	*Bueno*	*Regular*	*Malo*
10	8	6	4	2

CAPÍTULO 13

Conocimientos Básicos Previos

1. CONOCIMIENTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA

1.1. VECTORES

Definición

Sean p_1, p_2, ..., p_n, *n* números reales, un *vector fila o renglón* se define como un conjunto ordenado de dichos números escritos de la siguiente manera:

$$P = [p_1 \quad p_2 \quad .. \quad .. \quad p_n]$$

Entonces P se llama vector fila y la componente i-ésima es p_i.

Análogamente, un vector columna se define como un conjunto de *n* números reales escritos de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{bmatrix}$$

Dimensión de un vector: es el número de componentes que tiene el vector.

Representación gráfica de un vector: geométricamente todo vector se puede representar en un espacio de tantas dimensiones como sea el orden del mismo y consiste en un segmento orientado que une el origen del sistema con el punto representativo de las componentes del vector en el espacio considerado, siendo las componentes del vector las coordenadas de dicho punto. Gráficamente, se podrán representar hasta vectores de orden 3.

Por ejemplo, *en el espacio bidimensional* un vector es una parte de una recta en el que se identifican su origen y su extremo.