TEORÍA DE JUEGOS

MATERIAL COMPLEMENTARIO AL LIBRO "APOYO CUANTITATIVO A LAS DECISIONES"

La Teoría de Juegos es un tipo de análisis matemático que permite estudiar, analizar y predecir el comportamiento esperado de los individuos que interactúan en un juego, lo cual es conocido como comportamiento estratégico.

Fue diseñada y elaborada por el matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern en 1939, con el fin de realizar análisis económico de ciertos procesos de negociación.

¿Qué es un juego?
Un juego incluye dos o más tomadores de decisiones que buscan maximizar su beneficio o minimizar sus pérdidas y supone la existencia de:

- Reglas
- Estrategias
- Recompensas o resultados

Entre las reglas del juego es importante definir el número y el orden de las jugadas.

Clasificación de los juegos

- ☒ **Por el número de jugadores**: existen juegos de 2 jugadores, de tres jugadores o de más jugadores.
- ☒ **Por la suma de los pagos**: En muchos juegos lo que un jugador gana lo pierde otro. A estos juegos se les conoce como juegos de suma cero. También existen juegos que no son de suma cero, donde lo que gana un jugador no necesariamente lo pierde otro, pueden ser de suma constante o no.
- ☒ **Por el número de estrategias**: se pueden tener juegos con 2 o más estrategias. Generalmente se estudian más los de 2 estrategias por ser más sencillos.
- ☒ **Juegos de Estrategia Pura**: los juegos de estrategia pura son los juegos en que cada jugador tiene una y sólo una estrategia óptima. En algunos juegos los jugadores no tienen una única estrategia óptima.
- ☒ **Juegos de Estrategia Mixta**: hay que juegos que carecen de estrategias óptimas como el muy conocido juego de "piedra, papel o tijera", en esos casos deberán identificarse estrategias mixtas.
- ☒ **Juegos Cooperativos o con transferencia de utilidad**: los jugadores pueden comunicarse entre ellos y negociar los resultados; ambas partes deben analizar las condiciones y los beneficios de cooperar entre sí, y las consecuencias y riesgos de traicionar las negociaciones.
- ☒ **Juegos No Cooperativos o sin transferencia de utilidad**: los jugadores no tienen la posibilidad de comunicarse para llegar a acuerdos previos, este el caso del "dilema de los prisioneros".
- ☒ **Juegos repetidos:** En este tipo de juego un grupo fijo de jugadores juega un juego dado repetidamente, y cada vez toman en cuenta el resultado de todas las jugadas anteriores antes de hacer la siguiente jugada. Generalmente se analizan

utilizando árboles de decisión y calculando las probabilidades de cada jugada dado el comportamiento anterior del oponente.

Analizaremos juegos que tienen como características:

- Bi-personales
- Suma cero o constante
- La ganancia de un jugador representa pérdida para el otro
- De una sola jugada o de varias jugadas pero independientes entre sí
- No cooperativos

La lógica de la teoría de juegos supone que cada empresa o jugador tiene la misma información y selecciona una estrategia que proporciona el mejor resultado posible desde su punto de vista, desconociendo al momento de la elección cuál será la estrategia que elegirá su competidor.

Analicemos la siguiente matriz de pagos que se da a continuación y que contiene incremento en porcentajes de participación en el mercado de dos empresas competidoras.

	B1	***B2***	***B3***
A1	8	-2	-3
A2	6	5	6
A3	-2	4	-9

La empresa A ha definido las estrategias A1, A2 y A3 y para la empresa B sus estrategias son B1, B2, y B3. Para este problema lo que A gana como % de incremento de mercado lo pierde B, así si A implementara la estrategia A1 y B la B1, entonces A consigue un incremento de 8 puntos porcentuales en tanto que B pierde 8% de su mercado.

Suponga que la empresa A selecciona la estrategia *A*1. Es posible un incremento en la participación de mercado de 8% o una disminución del 2% o 3% dependiendo de la estrategia que siga la empresa B.

Si la empresa B cree que la empresa A utilizará la estrategia *A*1, entonces empleará la estrategia *B3*.

Si A cree que B elegirá la estrategia B3, entonces le conviene cambiar y elegir la estrategia A2, pero en este caso a B le convendrá seleccionar B2.

Observe que en esta combinación - A elige A2 y B selecciona B2 - a ninguna de las dos les conviene ahora cambiar de estrategia, esto quiere decir que se llegó a un punto de equilibrio.

En definitiva, bajo el supuesto de que la empresa B seleccionará la mejor estrategia para ella, la empresa A analiza el juego y se protege frente a las acciones de la empresa B. Al hacerlo, la empresa A identifica el resultado mínimo posible para cada una de sus acciones. Este resultado es el valor mínimo en cada fila de la matriz de resultados.

	B1	***B2***	***B3***	***Mínimo***
A1	8	-2	-3	-3
A2	6	5	6	5
A3	-2	4	-9	-9

Al considerar los valores de la columna Mínimo, vemos que se puede garantizar a la empresa A un incremento en la participación de mercado de por lo menos 5% al seleccionar la estrategia que proporciona el *máximo de los mínimos de fila* (estrategia *A*2). Por tanto, la empresa A sigue un procedimiento *maximin* y selecciona la estrategia *A2* como su mejor estrategia.
Veamos ahora la tabla de resultados desde el punto de vista del otro jugador. Para la empresa B las entradas de la tabla de resultados representan pérdidas en la participación de mercado.
Considere lo que ocurre a la empresa B si selecciona la estrategia *B*1. Es posible que tenga una disminución en la participación de mercado del 8% o del 6% o un incremento de participación del 2%. Bajo el supuesto de que la empresa A seleccionará la estrategia que es mejor para ella, la empresa B sabe que si selecciona la estrategia B1 podría incurrir en una pérdida en la participación de mercado de 8%. Por tanto, la empresa B analiza el juego considerando el valor máximo de cada columna, el cual proporciona la disminución máxima en su participación de mercado para cada estrategia de la empresa A.

	B1	***B2***	***B3***	***Mínimo***
A1	8	-2	-3	-3
A2	6	5	6	5
A3	-2	4	-9	-9
Máximo	8	5	6	

Se puede garantizar a la empresa B una disminución en la participación de mercado de no más de 5% al seleccionar la estrategia que proporciona el *mínimo de los máximos* de columna *Máximo* (estrategia B2). Por tanto, la empresa B sigue un procedimiento *minimax* y selecciona la estrategia B2 como su mejor jugada. Bajo la estrategia B2 la empresa B sabe que la empresa A no puede obtener más de 5% de participación de mercado.

Este juego analizado posee un punto de equilibrio o punto de silla, que se presenta cuando el *maximin = minimax*. El equilibrio surge cuando a ningún jugador le conviene cambiar su estrategia ya que esto haría disminuir su ganancia o incrementar su pérdida.

Procedimiento a seguir para determinar la existencia de un punto de equilibrio, en el caso en el que los pagos representan ganancias.

- Calcular el resultado mínimo para cada fila (jugador A).
- Para el jugador A, seleccionar la estrategia que proporciona el máximo de los mínimos de fila.
- Calcular el resultado máximo para cada columna (jugador B).
- Para el jugador B, seleccionar la estrategia que proporciona el mínimo de los máximos de columna.

- Si el valor maximin es igual al valor minimax, existe una estrategia pura óptima para ambos jugadores. El juego posee un punto de equilibrio o punto de silla.

El valor del juego (*v*) está dado por el valor del punto de equilibrio en el que las estrategias óptimas para ambos jugadores se intersecan

El ***equilibrio de Nash***, se presenta cuando cada jugador elige la acción que maximiza su pago, tomando como dadas las decisiones de los otros jugadores, y sin tener en cuenta los efectos que su decisión pueda tener en los pagos de los demás.
En una situación de equilibrio de Nash, ninguno de los jugadores tendrá incentivos *individuales* para variar de estrategia.
Al calificar como *individual*, se hace referencia al carácter no cooperativo del juego. Sin embargo es posible que en un equilibrio de Nash la situación se pueda mejorar para todos por medio de un *cambio simultáneo* de estrategia por parte de varios jugadores es decir actuando de manera cooperativa.
Si una combinación de estrategias *no es* un equilibrio de Nash, existe al menos un jugador que puede aumentar sus ganancias cambiando de estrategia.
Son frecuentes los juegos que admiten más de un equilibrio de Nash, como por ejemplo en el juego conocido como *La guerra de los sexos*, que analizaremos más adelante.

Dominancia

Existe dominancia de una estrategia A1 sobre otra A2, cuando todos los resultados de la estrategia A1 son preferibles o indiferentes a los resultados de la estrategia A2, independientemente de lo que haga el oponente.

Si una estrategia A*n* está dominada por las restantes estrategias del jugador, puede ser eliminada de la matriz de pagos y de esta manera reducir el tamaño de la matriz de pagos.

Estrategias Mixtas

Veamos otro ejemplo:

	B1	***B2***	***B3***	***B4***
A1	2	2	3	-1
A2	4	3	2	6

- *No existe una estrategia pura óptima*
- *El juego no está en equilibrio*

Se debe elegir una estrategia mixta, es decir se deben mezclar estrategias. Esto significa determinar una probabilidad de juego para cada estrategia pura. Si llamamos x_i a la probabilidad de que el jugador de filas juegue la estrategia ***i***, entonces en nuestro caso se debe calcular

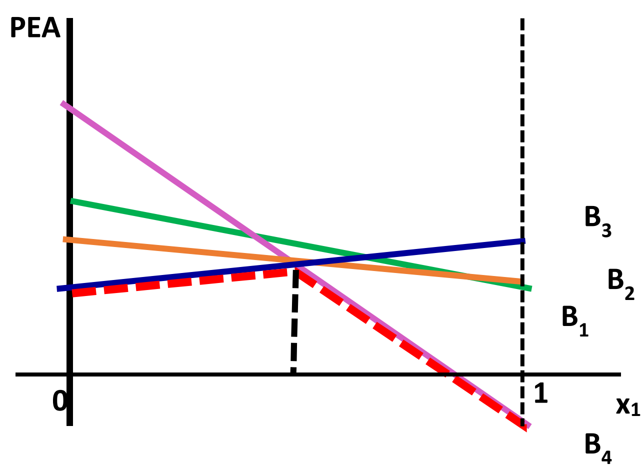
x_1= probabilidad de jugar la estrategia

x_2= probabilidad de jugar la estrategia A2

Como la matriz de pago es de 2×*n*, el juego se puede resolver gráficamente, en el caso de ser *m*×*n* deberá usarse un modelo de PL.
Para encontrar la solución, determinamos el pago esperado del jugador A (PEA) ante cada estrategia de B considerando que, como x_1 y x_2 representan probabilidades y además $x_1 + x_2 = 1$, entonces a $x_2 = 1 - x_1$

Estrategia Pura de B	***Pago esperado de A (PEA)***
B1	$2x_1 + 4(1- x_1) = 2x_1 + 4 - 4x_1 = 4 - 2x_1$
B2	$2x_1 + 3(1- x_1) = 3 - x_1$
B3	$3x_1 + 2(1- x_1) = 2 + x_1$
B4	$-x_1 + 6(1- x_1) = 6 - 7x_1$

Graficamos ahora las rectas representativas de las recompensas de A ante cada estrategia de B.



La envolvente inferior de las cuatro rectas (línea de puntos) representa el pago esperado mínimo para A, sin importar lo que haga B, el máximo de la envolvente inferior corresponde al punto de solución *maximin*.
El máximo de las mínimas recompensas nos indica el valor para x_1.

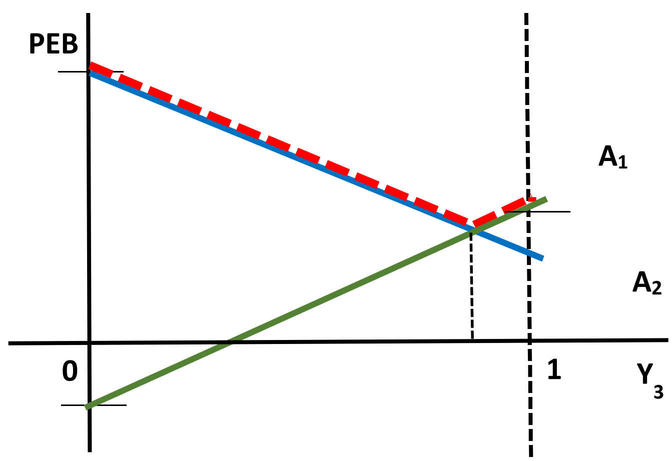
Este punto se da en la intersección de las rectas de B_3 y B_4, despejando el valor de x_1 obtenemos la estrategia mixta.

$x_1 = 0,5$ y $x_2 = 1 - x_1 = 0,5$

El valor del juego se determina sustituyendo x_1 en cualquiera de las funciones que representan a los pagos esperados B3 o B4, $v = 5/2$

La estrategia óptima de B se determina considerando las dos estrategias que forman la envolvente inferior del gráfico. Esto significa que B puede mezclar las estrategias B3 y B4. Si definimos como y_3 a la probabilidad de que el jugador B juegue la estrategia B3 y y_4 a la probabilidad de que juegue la estrategia B4 y recordando que $y_3 + y_4 = 1$, podemos calcular el pago esperado de B (PEB) para cada estrategia de A.

Estrategia Pura de A	Pago esperado de B
A1	$3y_3 - 1\ (1 - y_3) = -1 + 4y_3$
A2	$2y_3 + 6\ (1 - y_3) = 6 - 4y_3$



$y_1 = y_2 = 0$ y $y_4 = 1 - y_3$

$y_4 = 1/8$ $y_3 = 7/8$

<u>PROCEDIMIENTO A SEGUIR</u>

→ Verifique si existe una solución de estrategia pura. Si existe una estrategia pura, esa es la solución óptima.

→ Si no existe una estrategia pura y el juego es mayor que 2x*n*

→ Verifique si existen estrategias dominadas en fila y elimínelas.

→ Verifique si existen estrategias dominadas en columna y elimínelas.

→ Elabore la tabla de resultados reducida y continúe el análisis de dominancia para eliminar el mayor número de filas y columnas posible.

→ Si el juego reducido es 2x*n*, calcule la estrategia mixta óptima gráficamente.

→ Si el juego reducido es *m*x*n*, calcule la estrategia mixta óptima usando PL.

El modelo de PL, para encontrar las estrategias mixtas está explicado en el capítulo 2 del libro "*Apoyo Cuantitativo a las Decisiones*".

Algunas consideraciones

La conducta de dos jugadores puede definir cualquiera de las siguientes situaciones:

- El equilibrio Nash corresponde al resultado de aplicar **estrategias puras**.
- El equilibrio Nash corresponde al resultado de aplicar **estrategias mixtas**.
- Existe un equilibrio Nash dentro del juego.
- Existen dos o más equilibrios Nash dentro del juego.
- No existe ni siquiera un equilibrio Nash.

El concepto de solución de las estrategias en equilibrio no siempre da solución a un juego no cooperativo. Esto se debe a que pueden existir más de un par de estrategias en equilibrio. De tal forma que si sólo existe un par de estrategias en equilibrio o existen más de uno pero con los mismos pagos, la solución existe y será las que forman el equilibrio único o cualquiera de las que tengan los mismos pagos.
Sin embargo, si existe más de un par de estrategias en equilibrio y los pagos son diferentes, no existe solución del juego en esas condiciones.

Analicemos algunos Juegos más conocidos

EL DILEMA DEL PRISIONERO

A.W. Tucker es quien diseñó el famosísimo problema del "Dilema del Prisionero".

Dilema del prisionero

		Prisionero 1	
		No delatar	Delatar
Prisionero 2	No delatar	(-2,-2)	(-10, -1)
	Delatar	(-1, -10)	(-6, -6)

El **dilema del prisionero** es el ejemplo más típico de teoría de juegos. Supongamos que detienen a dos personas por delitos menores que les costarían a cada una dos años de cárcel. La policía sabe que han cometido un delito más grave pero necesitan pruebas, supongamos que esa prueba es la confesión de uno de los dos prisioneros.

Si ambos delatan al otro por el delito mayor irán seis años a la cárcel. Si uno delata y el otro no, el delator irá un año por colaborar y el otro irá diez años por el delito. Teniendo en cuenta que los prisioneros no pueden comunicarse entre ellos (están en habitaciones separadas) ¿qué harán?

Supongamos que somos **uno de los dos prisioneros**, no sabemos qué hará el otro por lo que el mejor de los casos es delatar al otro independientemente de lo que haga, ya que en ambas situaciones minimizamos los años de pena esperados en la cárcel. Si el otro nos delata iremos seis años en vez de diez y si no nos delata iremos uno en vez de dos.

Dado que el otro es igual de inteligente que nosotros, lo más probable es que llegue a la misma decisión. El resultado final es que ambos pierden seis años entre rejas, mientras que si hubieran cooperado sólo habrían recibido una pena de dos años de cárcel. La situación alcanzada es un **equilibrio de Nash**, porque ambas partes no pueden cambiar sin empeorar. Sin embargo, no se encuentra la mejor solución para ambas partes.

Es importante considerar que el modelo analizado es una simplificación de la realidad ya que se deberían considerar otros elementos tales como la naturaleza del decisor que inicialmente identifica como amigos a quienes han sido detenidos, y teniendo en cuenta ese hecho podrían haber preparado una estrategia inicial de no delatarse, pero, la naturaleza indicaría que al ser delincuentes ese trato de no delatarse puede ser fácilmente violado solo por el hecho de ser delincuentes y que no les interese otra cosa que no sea un beneficio propio o individualista. Por otro lado debe estar claro que ambos prisioneros deben presentar igualdad de castigos porque una diferencia entre ellos puede llevar a resultados inesperados, por ejemplo si uno tiene antecedentes previos que empeoren sus castigos o que reciban cadena perpetua lo que llevaría a que no tenga importancia cualquiera de los resultados

HALCÓN PALOMA

En el lenguaje ordinario entendemos por "halcón" a los políticos partidarios de estrategias más agresivas mientras que identificamos como "paloma" a los más pacifistas. El modelo Halcón-Paloma sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras. Este modelo es conocido en la literatura anglosajona como el " hawk-dove " o el " chicken " y en español es conocido también como "gallina".

Dos vehículos se dirigen uno contra otro en la misma línea recta y a gran velocidad. El que frene o se desvíe ha perdido. Pero si ninguno de los dos frena o se desvía... Este sería un modelo halcón paloma

También se ha utilizado este modelo abundantemente para representar una guerra fría entre dos superpotencias. La estrategia Halcón consiste en este caso en proceder a una escalada armamentística y bélica. Si un jugador mantiene la estrategia Halcón y el otro elige la estrategia Paloma, el Halcón gana y la Paloma pierde. Pero la situación peor para ambos es cuando los dos jugadores se aferran a la estrategia Halcón. El resultado puede modelizarse con la siguiente matriz de pagos que representa orden de preferencia.

	Jugador j: Y		
Jugador i X		Paloma	Halcón
	Paloma	**2, 2**	3,1
	Halcón	1, 3	**4, 4**

En este juego hay dos equilibrios en estrategias puras: (A,A) y (B,B) y un equilibrio en estrategias mixtas.

Podemos observar las sutiles pero importantes diferencias de este modelo con el Dilema del Prisionero. En principio la matriz es muy parecida, simplemente se han intercambiado las posiciones de los pagos 3º y 4º, pero la solución y el análisis son ahora muy diferentes.

Aquí hay dos resultados que son equilibrios de Nash: cuando las estrategias elegidas por cada jugador son diferentes; es decir, cuando un jugador elige halcón y el otro jugador elige paloma. Por el contrario, en el Dilema del Prisionero el equilibrio de Nash está en el punto en que ambos jugadores traicionan.

Otra notable diferencia de este juego con otros es la importancia que aquí adquiere el orden en que los jugadores eligen sus estrategias. Como tantas veces en la vida real, el primero que juega, gana. El primero elegirá y manifestará la estrategia Halcón con lo que el segundo en elegir se verá obligado a elegir la estrategia Paloma, la menos mala.

LA GUERRA DE LOS SEXOS

El modelo de "La guerra o Batalla de los sexos" es un ejemplo muy sencillo de utilización de la teoría de juegos para analizar un problema frecuente en la vida cotidiana. Hay dos jugadores: "ÉL" y "ELLA". Cada uno de ellos puede elegir entre dos posibles estrategias a las que llamaremos "Fútbol" (A) y "Discoteca" (B).

Supongamos que el orden de preferencias de ÉL (jugador i) es el siguiente:

- (Lo más preferido) EL y ELLA eligen Fútbol. **(2, 1) 1º**
- EL y ELLA eligen Discoteca. **(1, 2) 2º**
- EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca. **(0, 0)** (si no están juntos ninguno es feliz) **3º**
- (Lo menos preferido) El elige Discoteca y ELLA elige Fútbol. **(0, 0) 4º**

Supongamos que el orden de preferencias de ELLA (jugador j) es el siguiente:

- (Lo más preferido) ÉL y ELLA eligen Discoteca. **(1, 2) 1º**
- EL y ELLA eligen Fútbol. **(2, 1) 2º**
- EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca. **(0, 0) 3º**
- (Lo menos preferido) Él elige Discoteca y ELLA elige Fútbol. **(0, 0) 4º**

La matriz de pagos es la siguiente, donde los pagos representan el orden de preferencias:

Max\Max	Jugador j		
Jugador i		A	B
	A	**2, 1**	0, 0
	B	0, 0	**1, 2**

Este juego, tal como lo hemos descrito, es un juego sin repetición y sin transferencia de utilidad. Sin repetición significa que sólo se juega una vez por lo que no es posible tomar decisiones en función de la elección que haya hecho el otro jugador en juegos anteriores. Sin transferencia de utilidad significa que no hay comunicación previa por lo que no es posible ponerse de acuerdo, negociar ni acordar pagos secundarios ("Si vienes al fútbol te pago la entrada").

El problema que se plantea es simplemente un problema de coordinación. Se trata de coincidir en la elección. Al no haber comunicación previa, es posible que el resultado no sea óptimo. Si cada uno de los jugadores elige su estrategia maximín el pago que recibirán (3º \3º) es subóptimo en este caso con un pago de (0, 0). Esa solución, no es un punto de equilibrio de Nash ya que los jugadores están tentados de cambiar su elección: cuando ELLA llegue a la discoteca y observe que ÉL se ha ido al fútbol, sentirá el deseo de cambiar de estrategia para obtener un pago mayor.

Generalizando el problema, en este juego hay dos equilibrios en estrategias puras: (A,A) y (B,B) y un equilibrio en estrategias mixtas.

Para calcular el equilibrio en estrategias mixtas haremos lo siguiente:

Sea p la probabilidad con la que el jugador i juegue la estrategia A, y $1 - p$ la probabilidad con que el jugador i juegue la estrategia B. Entonces, la utilidad esperada del jugador j es:

$Euj(A) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$, Si i utiliza la estrategia A, y

$Euj(B) = 0 \cdot p + 2 \cdot (1 - p) = 2 \cdot (1 - p)$, Si i utiliza la estrategia B.

El jugador j utiliza una estrategia mixta entre A y B si está indiferente entre la estrategia A y B, es decir, si su ganancia esperada cuando juega A es la misma que su ganancia esperada cuando juega B. Eso es el caso si pi es la solución de:

$$p = 2(1 - p) \Rightarrow p= 2/3$$

Es decir, si i juega A con una probabilidad $p = 2/3$ el jugador j está indiferente entre jugar A y jugar B.

Del mismo modo podemos calcular para el jugador j, siendo q la probabilidad con la que el jugador j juegue la estrategia A, y $1 - q$ la probabilidad con que el jugador j juegue la estrategia B. Entonces, la utilidad esperada del jugador i es:

$Eui(A) = 2 \cdot q + 0 \cdot (1 - q) = 2q$, si j juega A

$Eui(B) = 0 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 \cdot (1 - q)$, si j juega B

el q con el que el jugador i está indiferente entre jugar A y jugar B, sera.

Entonces tenemos $Eui(A) = Eui(B)$ si:

$2q = 1 - q \Rightarrow q= 1/3$.

Entonces, el tercero equilibrio de Nash es cuando:

- **El jugador i juega A con una probabilidad 1 / 3 y B con una probabilidad 2 / 3**
- **El jugador j juega A con una probabilidad 2 / 3 y B con una probabilidad 1 / 3**

La matriz de pagos podría haberse considerado en base a pagos que representan el orden de preferencias:

Min\Min		Jugador j	
Jugador i		A	B
	A	**1º\2º**	3º\3º
	B	4º\4º	**2º\1º**

ó considerar una utilidad 1 cuando elige lo que le gusta a ese jugador pero no coincide con el otro jugador

Max\Max		Jugador j	
Jugador i		A	B
	A	**2,1**	1,1
	B	0,0	**1,2**

Debemos recordar que consideramos el juego con simultaneidad. Eso significa que cuando el segundo jugador hace su elección no sabe lo que ha decido el primero. Pero podrían introducirse algunas modificaciones al modelo como ser que no sean simultáneos por lo que el segundo jugador conoce la elección del primero, o que exista una diferencia entre las preferencias de alguno de los jugadores, por ejemplo, identificando a uno de ellos como egoísta lo que implicaría que no le interesa la elección del otro jugador.

PROBLEMAS:

Para algunos de los problemas que se brindan a continuación se dan las respuestas al final.

1.- La CBA SA, necesita elegir la estrategia a seguir para competir con la empresa NQN SA. Ha desarrollado un modelo de pronósticos de ventas de cada uno de los productos de su empresa, en función de sus decisiones y las de la empresa NQN SA. Estos datos los resume en la matriz de pago que se muestra a continuación. En ella cada pago representa las ventas que gana CBA SA y que pierde NQN SA.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	20	120	-50
A2	60	20	70	60
A3	-20	0	-40	60

Indicar la estrategia de CBA SA, la de NQN SA y el valor del juego.

2.- Para cada una de las matrices de juegos propuestas a continuación, en las cuales los pagos representan ganancias para el jugador de filas y pérdidas para el jugador de columnas:

- Verifique si existe estrategia pura óptima.
- Utilice el análisis de dominancia para reducir las matrices.
- Encuentre las estrategias óptimas a seguir y el valor del juego.

I.

	B1	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*
A1	2	2	1	-2	-3
A2	4	3	4	-2	0
A3	5	1	2	5	6

II.

	B1	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*
A1	2	-1	5	-2	6
A2	2	4	-3	1	0

III.

	B1	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*
A1	-1	-2	-1	2	-3
A2	-4	-3	-4	-2	-4
A3	-4	-1	0	-5	6

IV.

	B1	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*
A1	-7	15	0	-5	-2
A2	-5	-4	-5	-4	-1
A3	7	10	17	-10	7
A4	0	-6	6	-6	18

V.

	B1	*B2*	*B3*
A1	-1	-3	-1
A2	-5	-1	3
A3	-7	-9	-2
A4	-4	-3	4
A5	-2	-2	-1

RESPUESTAS

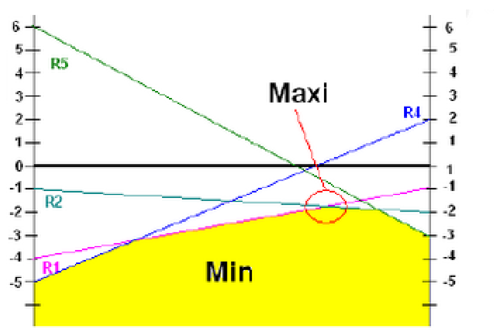
I. $x_1 = 0{,}44$; $y_1 = 0{,}7888$; $v = 1{,}89$

Matriz Reducida	B2	B4
A2	3	-2
A3	1	5

II. $x_1 = 0{,}3636$; $y_1 = 0{,}2727$; $v = -0{,}091$

Matriz Reducida	*B3*	*B4*
A1	5	-2
A2	-3	1

III.



Estrategias mixtas para el jugador de filas		Estrategias mixtas para el jugador de columnas	
V = -1.750000		***V*** = -1.750000	
X1	0.750000	Y1	0.250000
X2	0.000000	Y2	0.750000
X3	0.250000	Y3	0.000000
		Y4	0.000000
Solución con LINDO		Y5	0.000000

IV. $y_1 = 2/7$; $y_4 = 5/7$; $x_2 = 6/7$; $x_4 = 1/7$; $v = -4,286$

Estrategias mixtas para el jugador de filas
V = -4.285714

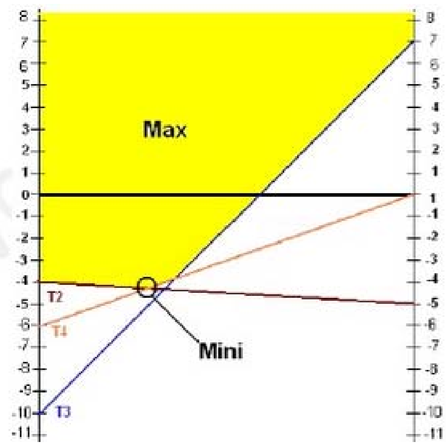
X1	0.857143
X2	0.000000
X3	0.142857

Solución con LINDO

Estrategias mixtas para el jugador de columna
V = -4.285714

Y1	0.285714
Y2	0.714286

Solución con LINDO



V. $y_1 = 1/2$; $x_5 = 1$; $v = -2$