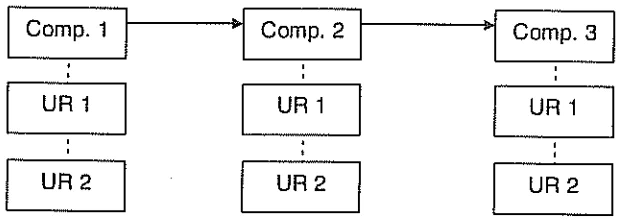
TRIMESTRE	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN (UNIDADES)	DEMANDA (UNIDADES)	COSTO DE PRODUCCIÓN (UNITARIO)	PRECIO DE VENTA (UNITARIO)	COSTO DE INVENTARIO (UNITARIO)
1	600	400	20	50	10
2	400	500	25	50	10
3	700	400	30	60	10
4	500	500	30	60	10

El inventario al inicio del trimestre 1 es de 100 unidades y la empresa quiere tener por lo menos 150 unidades en inventario al final del año, con el objetivo de hacer frente a las necesidades de inicio del año siguiente.

ACTIVIDAD 6

Julián debe armar un dispositivo electrónico de control. El dispositivo está formado por tres componentes en serie, de manera que la falla en uno alguno de los componentes origina la falla en el dispositivo. Se puede mejorar la confiabilidad del dispositivo de control instalando, en paralelo, una o dos unidades de reserva para cada una de los componentes. De esta manera, ante la falla de uno de los componentes entra en funcionamiento la unidad de reserva. En la figura se muestra esta situación.



En la tabla se proporciona la confiabilidad de cada componente, es decir la probabilidad de que no fallen.

Nº Unidades en paralelo	Componente 1	Componente 2	Componente 3
1	0,7	0,8	0,6
2	0,8	0,85	0,7
3	0,9	0,95	0,9

a) Utilice la programación dinámica para indicarle a Julián como construir el dispositivo para lograr la mínima probabilidad de falla y cuál es esta probabilidad.

b) Defina el objetivo y las variables del problema.

c) Identifique la función recursiva utilizada.

CAPÍTULO 8

PROGRAMACIÓN NO LINEAL

1. INTRODUCCIÓN

En numerosos problemas, las funciones o relaciones matemáticas que intervienen no son necesariamente lineales. De hecho, tal vez se puede decir que los problemas del mundo económico y empresario que se ajustan totalmente a la linealidad son la excepción y no la regla.

Entre los supuestos del modelo de PL que comúnmente no se cumplen y originan programas no lineales (PNL), se pueden mencionar:

- *Aditividad.* Es decir que, las contribuciones de dos o más variables al objetivo o a las restricciones funcionales no son independientes entre sí. En forma general podríamos decir que el total no es igual a la suma de las partes, y esto se da cuando existe una interacción entre las variables, por ejemplo cuando se mezclan sustancias químicas en la elaboración de un producto.
- *Proporcionalidad.* Este supuesto no se cumple en problemas en los cuales, por ejemplo, el ingreso obtenido por la venta de un producto no es proporcional a las unidades vendidas, ya que esta cantidad está en función del precio, el que será en estos casos una variable de decisión. Otro ejemplo del no cumplimiento de esta hipótesis se da cuando demasiados operarios son asignados para realizar una tarea, el rendimiento de cada trabajador puede disminuir en lugar de mantenerse constante, es decir que existen deseconomías o economías de escala.

En resumen, la existencia de diferentes tipos de relaciones, sean de carácter económico, lógicas, físicas, estructurales, etc., pueden dar lugar a la aparición de características de no linealidad en un modelo matemático.

Es importante destacar que, aunque los fenómenos no lineales son comunes, la posibilidad de lograr la optimización de estos modelos es mucho más difícil que en los modelos lineales y que los algoritmos desarrollados para su resolución son menos eficientes. Así, a diferencia de la PL, no se puede asegurar que un algoritmo de resolución de PNL logrará siempre encontrar la solución óptima para cualquier problema.

Además, en muchos casos, mediante PL se pueden obtener buenas aproximaciones a los modelos no lineales, esto conjuntamente con la facilidad de resolución de los problemas lineales, justifica la importancia y la reputación adquirida por la programación lineal.

De manera general un problema de PNL consiste en encontrar los valores de n variables $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tal que:

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(x) \\ &\text{sa} \\ &\quad g_i(x) \leq b_i \quad i = 1,2,\ldots..m \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

Donde $f(x)$ y $g_i(x)$ son funciones de n variables de decisión y además $f(x)$ y/o $g_i(x)$ son no lineales.

2. CARACTERÍSTICAS GENERALES

De la misma manera que en PL un problema de PNL, cuando tiene solo dos variables de decisión, puede representarse gráficamente. Esto nos será particularmente útil para mostrar algunas características de las soluciones óptimas, a saber:

- La región factible no necesariamente es un poliedro como en el caso de la PL y la solución óptima puede no encontrarse en un vértice. Recordemos que en el caso de programación lineal, el análisis gráfico permite identificar las restricciones limitantes en el vértice óptimo, y la solución óptima se obtiene resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por estas restricciones. En general, este método no funciona para el caso no lineal. A título ilustrativo, observemos el siguiente gráfico.

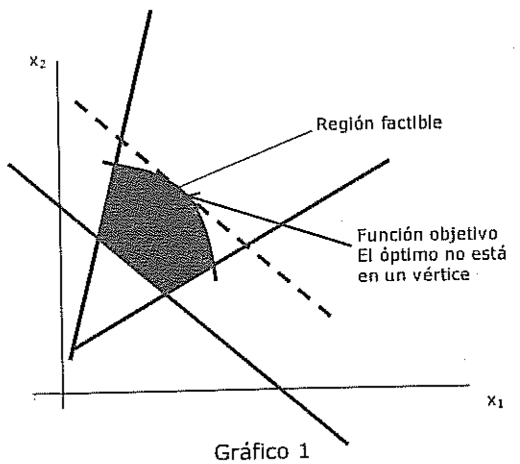


Gráfico 1

La restricción no lineal forma una parte de la frontera del conjunto de soluciones posibles y sólo existe una restricción limitante, la región factible es un conjunto convexo pero no un poliedro.

- En el gráfico 2 en cambio, todas las restricciones son lineales y por lo tanto, el conjunto de soluciones factibles es un poliedro convexo. Sin embargo, la función objetivo es no lineal y, nuevamente vemos que el óptimo no se presenta en un vértice.

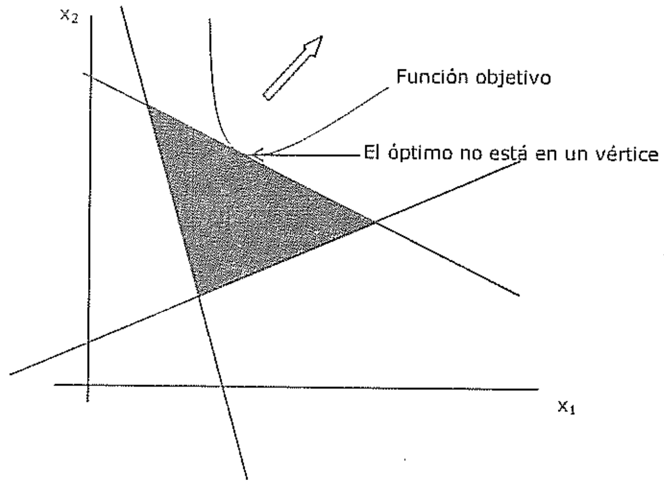


Gráfico 2

Efectivamente, algunas soluciones óptimas para algunas funciones objetivo no lineales pueden ni siquiera estar en la frontera de la región factible, pudiendo ser, por ejemplo, un punto interior de dicha región. Ciertamente, también podría darse el caso de una solución óptima en un vértice, lo importante es que esto no representa una propiedad general, como en el caso lineal. Este hecho tiene consecuencias algorítmicas importantes, ya que es necesario que para resolver este tipo de problemas se tengan en cuenta todas las soluciones de la región factible, y no solo aquellas que están en los vértices. No se dispone de un algoritmo que resuelva *todos* los problemas específicos que se ajustan a este formato, sin embargo se han realizado grandes logros en algunos casos especiales, bajo algunas suposiciones de las funciones.

- Otro inconveniente que surge en los PNL es la aparición de *óptimos locales* y *óptimos globales.* En PL siempre un óptimo local es también óptimo global, de hecho existe un teorema que lo prueba, sin embargo esto no siempre ocurre en PNL. En el gráfico 3 podemos observar que existe un óptimo local y un óptimo global.

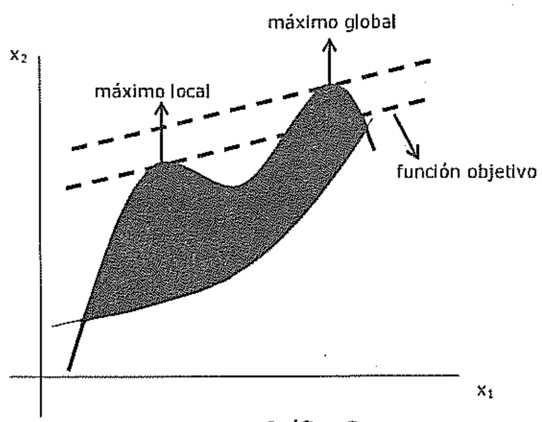


Gráfico 3

En el punto *"óptimo global"* el valor de la función objetivo *es mejor que en todos los demás* puntos factibles. Para garantizar que un óptimo local también sea global, deben satisfacerse ciertas condiciones de concavidad y convexidad. Si no se presentan estas propiedades, generalmente no es posible saber si una solución es un óptimo local o global. En general, los algoritmos de PNL no son capaces de distinguir entre un óptimo local y uno global, por lo que es sumamente importante conocer las condiciones bajo las cuales se garantiza que un óptimo local es también un óptimo global en la región de soluciones factibles. Observe que en el gráfico 3, a diferencia de los ejemplificados en los gráficos 1 y 2, el conjunto de soluciones factibles *no es un conjunto convexo*.

3. TIPOS DE PROGRAMAS NO LINEALES

Debido a que los PNL pueden presentarse de muy diversas formas no existe, como en PL, un algoritmo que resuelva todos estos tipos especiales de problemas. Por el contrario se han desarrollado algunos algoritmos para los tipos más comunes de problemas no lineales, por lo que es importante conocer sus características y así diferenciar los problemas que podremos optimizar de los que podemos intentar encontrar el óptimo.

3.1. OPTIMIZACIÓN NO RESTRINGIDA

Si un problema de PNL no tiene restricciones, el hecho de que la función objetivo sea cóncava nos garantiza que un máximo local es un máximo global, análogamente una función objetivo convexa garantiza que un mínimo local también es un mínimo global.

En general, una función cóncava tiene la propiedad de que el segmento de recta que conecta dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función nunca pertenece al espacio ubicado por arriba de la gráfica.

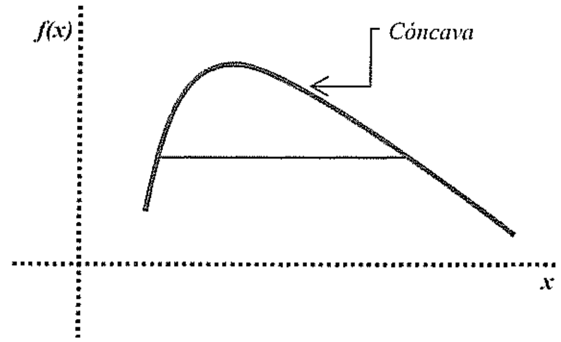


Gráfico 4: función cóncava

En general, una función convexa tiene la propiedad de que el segmento de recta que conecta dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función nunca pertenece al espacio ubicado por debajo de la gráfica.

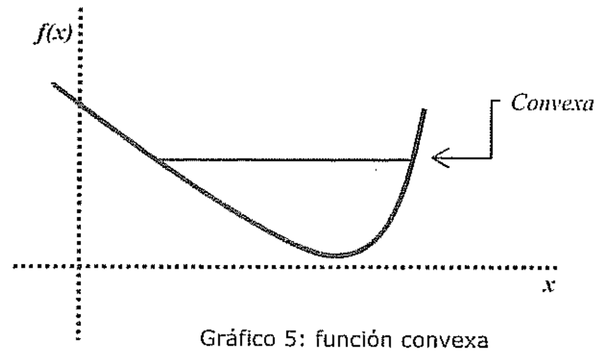


Gráfico 5: función convexa

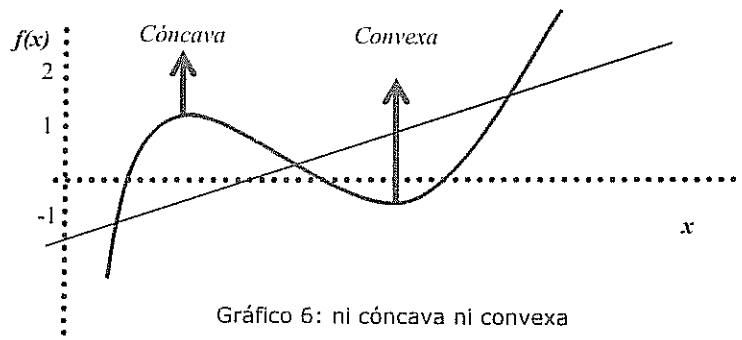


Gráfico 6: ni cóncava ni convexa

La función del gráfico 6 no es cóncava ni convexa, los puntos donde la concavidad cambia son puntos de inflexión.

Definición:

Sea $f: R^n \to R$

f es convexa si el dominio de f es un conjunto convexo y si para todo x_1, x_2 que pertenece al dominio de f y para todo número real t entre 0 y 1, se satisface que:

$$f\left[t\, x_1 + (1-t)x_2\right] \leq t\, f(x_1) + (1-t)\, f(x_2)$$

Una función f es cóncava si $-f$ es convexa. Desde el punto de vista geométrico esto significa que el segmento que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se encuentra sobre la gráfica de f.

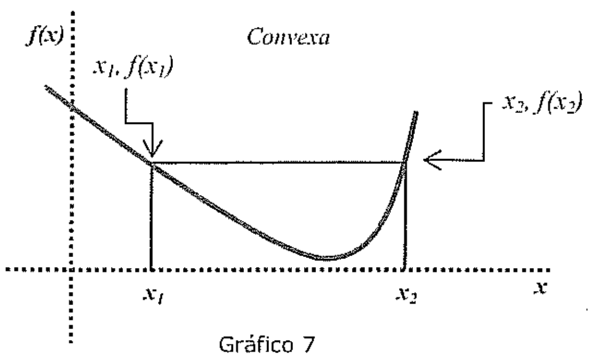


Gráfico 7

Recordemos que para una función $f(x)$ diferenciable:

Si $f''(x) < 0$ en un intervalo (a, b), entonces la función *f(x) es cóncava en el intervalo (a, b).*

Si $f''(x) > 0$ en un intervalo (a, b), entonces la función *f(x) es convexa en el intervalo (a, b).*

3.2. OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

Si existen restricciones, para garantizar que un óptimo local sea también global, se necesita como condición adicional que el conjunto de restricciones sea convexo.

En general, la región de soluciones factibles de un PNL es convexa si la función de restricción g(x) asociada con cada restricción del tipo ≤ es convexa y la función de restricción g(x) asociada con cada restricción del tipo ≥ es cóncava.

3.2.1. Programación Convexa

Comprende a los problemas de PNL que tienen función objetivo cóncava en problema de maximización, o convexa para problemas de minimización y una región factible que es un conjunto convexo. Como ya lo dijimos estas condiciones son suficientes para asegurar que un óptimo local es un óptimo global.

Dentro de la Programación convexa encontramos a los *Programas linealmente restringidos.*

Una característica muy importante de estos programas es que *cualquier punto óptimo local, es también un óptimo global.* Por lo cual, y tal como dijimos anteriormente, resultan ser los problemas no lineales más sencillos de resolver. Por definición, estos modelos tienen restricciones lineales (de igualdad o desigualdad) y función objetivo cóncava en caso de maximización o convexa en caso de minimización. Para este tipo de problemas, puede utilizarse en su resolución una variante del método simplex. Como casos especiales encontramos a la *Programación Cuadrática* y a la *Programación Separable.*

- ***Programación cuadrática***

La única diferencia entre los problemas de Programación Cuadrática (PC) y los de PL es que la FO incluye el cuadrado de una variable o el producto de dos variables.

Son dos las razones de la importancia de la PC, por un lado este tipo de formulaciones surgen de manera natural en una gran cantidad de aplicaciones como por ejemplo la de selección de carteras de inversiones, pero además se utiliza para resolver problemas generales de optimización linealmente restringidos a través de aproximaciones cuadráticas.

Es de destacar que en la PC, al igual que en los restantes modelos de PNL en general, no forzosamente tiene que existir una solución óptima en un vértice. Como consecuencia directa de esto, es posible que el número de variables positivas en el óptimo, sea mayor que el número de restricciones.

- ***Programación separable***

Se agrega el supuesto adicional de que todas las funciones f(x) y $g_i(x)$ son separables.

Una función es separable cuando cada término solo incluye una variable, por lo que puede expresarse como una suma de funciones de distintas variables. Este tipo de problemas satisface el supuesto de aditividad pero no el de proporcionalidad.

Por ejemplo la función

$$f(x_1, x_2) = -10x_1^2 + 20x_2^2 + 50\, x_1 - 25x_2$$

Puede expresarse como

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Dónde

$$f(x_1) = -10x_1^2 + 50\, x_1$$

$$f(x_2) = 20x_2^2 - 25x_2$$

3.2.2. Programación No Convexa

En esta clasificación se incluye a los problemas generales no lineales, en los cuales no se cumplen los supuestos de programación convexa. En estos casos aun cuando se tenga éxito en encontrar un óptimo local, no hay garantía de que sea también un óptimo global.

Los algoritmos para resolver estos programas no lineales generales, utilizan en su fundamentación, el cálculo avanzado. Se han desarrollado para su resolución paquetes de *software* especializados para optimización, que permiten encontrar óptimos locales de funciones no lineales de n variables ($n \geq 1$). Con frecuencia esos paquetes se basan en el análisis de la tasa de cambio de la función objetivo. Es decir, que para un problema de maximización, se elige un punto inicial, esto es, un conjunto de valores para las n variables de decisión, y luego se determina una dirección ascendente mediante la aproximación numérica del vector gradiente (formado por todas las derivadas parciales primeras de la función) evaluadas en ese punto inicial. Intuitivamente, para la optimización no restringida, el método avanza desde el punto inicial siguiendo una línea en dirección ascendente (en el caso de buscar un máximo), hasta el punto más alto al cual se puede llegar siguiendo esa dirección. Entonces se define una nueva dirección ascendente y continúa el procedimiento. El método termina cuando las derivadas primeras parciales aproximadas se acercan lo suficiente a cero. El punto así obtenido siempre será un "óptimo local". La búsqueda de otros óptimos locales se realiza iniciando de nuevo el programa de optimización para que comience en un punto inicial diferente.

4. MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

Una semejanza entre la PL y la PNL es la posibilidad utilizar, al menos parcialmente, el análisis de sensibilidad. Sabemos que en PL un incremento en el valor del lado derecho (Δb_i) de la *i-esima* restricción produce un incremento en el valor óptimo de la función objetivo igual a ($y_i \cdot \Delta b_i$) (siendo y_i la variable dual correspondiente), siempre que el incremento del lado derecho se mantenga dentro de un cierto intervalo en el cual la variable dual permanece constante. En PNL, este concepto se conoce como **multiplicador de Lagrange**[1], al igual que las variables duales, existe un multiplicador de Lagrange por cada restricción y usualmente se lo simboliza como λ_i. Sin embargo, los multiplicadores de Lagrange, generalmente, se van modificando al variar el incremento del valor del lado derecho de la restricción a la cual corresponden. Por esta

[1] Este nombre proviene del conocido método de los Multiplicadores de Lagrange para el cálculo de máximo o mínimos locales de funciones de n variables sujetas a m restricciones dadas bajo la forma de ecuaciones. Más recientemente (a mediados del siglo XX) Kuhn y Tucker generalizaron estos conceptos para el caso que existan restricciones bajo la forma de inecuaciones.

razón su interpretación económica indica que en el punto óptimo, el i-ésimo multiplicador de Lagrange representa cuánto crecería el valor óptimo de la función objetivo por cada unidad de crecimiento del lado derecho de la i-esima restricción, bajo la hipótesis de que la misma siga creciendo con la misma fuerza o intensidad con que está creciendo en ese punto. En general, esta hipótesis no se cumple dado el carácter no lineal de la función objetivo y/o de las restricciones. Esta interpretación proviene del hecho que, matemáticamente los multiplicadores de Lagrange, al igual que las variables duales, son las derivadas parciales de la función objetivo con respecto a un b_i.

5. ALGUNOS EJEMPLOS DE PNL CONVEXOS

Ejemplo 1

Una fábrica elaborará un producto cuyo proceso productivo pasa fundamentalmente por dos máquinas. Si definimos como x_1 a la cantidad de producto fabricada en la máquina 1 y x_2 a la cantidad de producto fabricada en la máquina 2.

Los costos de producción del producto según sea la máquina en la cual se procese están dados por las siguientes funciones:

$$a_1 x_1 + b_1 x_1^2 = \text{costo de producción en la máquina 1}$$
$$a_2 x_2 + b_2 x_2^2 = \text{costo de producción en la máquina 2}$$

Podemos formular un modelo que permita encontrar las cantidades a producir en cada máquina para minimizar el costo total de producción, respetando el requisito de que la producción total alcance cierto valor específico, por ejemplo Q.

La formulación de este problema es:

$$\text{Min } Z = a_1 x_1 + b_1 x_1^2 + a_2 x_2 + b_2 x_2^2$$
$$\text{s.a.}$$
$$x_1 + x_2 = Q$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ejemplo 2:

El presupuesto disponible para producir tres bienes es de R pesos. Supongamos que p_1, p_2 y p_3 son los precios de cada bien y que la "utilidad" derivada de producir x_1 unidades del bien 1, x_2 unidades del bien 2 y x_3 unidades del bien 3 la representamos como $x_1^{K1} + x_2^{K2} + x_3^{K3}$, siendo $K1$, $K2$ y $K3$ constantes previamente determinadas.

Podemos encontrar la mezcla de producción que maximice la utilidad, respetando la restricción presupuestaria, formulando el modelo no lineal:

$$\text{Max } Z = x_1^{K1} + x_2^{K2} + x_3^{K3}$$

s.a.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \leq R$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Ejemplo 3:

Una empresa desea optimizar la asignación presupuestaria en publicidad. Dispone en promedio, de $1000.- por día y se asigna su totalidad a comerciales en TV y/o anuncios en periódicos. El costo total anual que paga en publicidad se ha estimado en:

$$C(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 1{,}2x_2^2 + x_1 x_2$$

Siendo:

x_1: pesos promedio diarios gastados en anuncios en televisión.

x_2: pesos promedio diarios gastados en anuncios en periódicos.

El modelo a resolver tiene la siguiente estructura:

$$\text{Min } Z = 2x_1^2 + 1{,}2x_2^2 + x_1 x_2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 = 1000$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

La salida del *software* Solver de este problema se muestra en la tabla 1. Podemos observar que el multiplicador de Lagrange indica que el incremento total anual del costo en el departamento de publicidad sería de $1954,54 aproximadamente por cada peso adicional de presupuesto gastado en anuncios. Sin embargo, como dijimos anteriormente, no es posible decir sobre qué rango de aumento o disminución del VLD es válido dicho multiplicador. Incluso podríamos afirmar que posiblemente dicho incremento sea variable a medida que se modifica el presupuesto para anuncios. Por su parte, los valores del gradiente reducido incluidos en el informe de sensibilidad de PNL tienen una interpretación análoga a la de los valores de costo reducido en PL.

Nombre	Valor final	Gradiente reducido
Anuncios en TV	318,182	0,00
Anuncios en periódicos	681,82	0,00
Gasto Total Anual	977272,73	

Restricciones

Nombre	Valor final	Multiplicador de Lagrange
Gasto Total diario	100,00	1954,54

Tabla 1

6. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN EN PNL

En PL, si un problema tiene óptimo, siempre podemos asegurar que la solución óptima se encontrará en al menos un vértice de la región factible, de hecho hay un teorema que así lo demuestra. Esta es una importante característica de los modelos lineales, ya que los vértices de la región factible pueden definirse mediante ecuaciones lineales, de esta manera y a través de operaciones algebraicas se puede pasar de un vértice a otro adyacente cualquiera, en el cual la función objetivo mejora o conserva el mismo valor. Con esta técnica el método Simplex explora sistemáticamente los vértices de la región factible y establece una metodología para tratar problemas lineales. Sin embargo, esto no es aplicable al problema general de la programación no lineal debido a que, aun tratándose de programas convexos, la solución óptima no necesariamente se encuentra en un vértice de la región factible, más aún puede encontrarse un punto interior a la misma.

Desafortunadamente, no existe un algoritmo que se pueda utilizar para resolver cualquier problema de programación convexa, por el contrario se han propuesto muchos métodos diferentes, cada uno con ventajas y desventajas

Sin embargo y de manera general podemos decir que en los algoritmos de optimización no lineal la solución encontrada, para una solución inicial dada, se "cree" que es óptima, pero en realidad, salvo para el caso de programas convexos, no hay ninguna garantía de que esta solución sea el punto óptimo global, en el mejor de los casos podremos afirmar que corresponde a un óptimo local. Es por esta razón que generalmente, si no se trata de un PNL convexo, se aconseja optimizar varias veces el modelo utilizando cada vez un conjunto diferente de valores para las variables de decisión como soluciones iniciales, con la finalidad de encontrar la mayor cantidad de máximos locales posibles y luego seleccionar el mejor de ellos.

7. MODELO DE SELECCIÓN DE CARTERA DE INVERSIONES

La selección de cartera es un modelo de PC muy estudiado en el área de las finanzas. En realidad, el análisis de carteras es muy amplio y la exposición será solamente una breve descripción de la aplicación práctica.

7. 1. MODELO DE CARTERA PARA DOS ACTIVOS

El modelo de cartera puede expresarse de la siguiente forma: un inversionista tiene P pesos para invertir en un conjunto de n acciones y desea saber cuánto le conviene invertir en cada acción. El conjunto de valores que seleccione se conoce como cartera del inversionista. El inversionista tiene objetivos contrapuestos: desea una cartera que le brinde alto rendimiento y al mismo tiempo con bajo riesgo. De hecho, estas metas son antagónicas porque en la realidad, lo más frecuente es que carteras con alto rendimiento conllevan también un alto riesgo.

Explicaremos los conceptos de *rendimiento* y *riesgo* mediante un ejemplo. Supongamos una inversión de P_i pesos colocados en el activo i, de forma tal que al cabo de cierto período de tiempo esos P_i pesos aumentan a $1{,}15P_i$. En este caso, diríamos que el rendimiento del período es de 0,15 pesos, calculados como $(1{,}15\ P_i - P_i)/\ P_i$.

El concepto de riesgo es difícil de explicar y surge de considerar que el rendimiento no es exactamente conocido, sino que el mismo puede considerarse como una variable aleatoria. El riesgo se mide por medio de la *variación* de la variable aleatoria *rendimiento* de la cartera.

Como la aspiración del decisor es obtener el máximo rendimiento pero minimizando el riesgo, una manera de formular este modelo consiste en minimizar la varianza del rendimiento, es decir minimizar el riesgo, dentro de un determinado límite o acotamiento inferior para el rendimiento esperado. También pueden aparecer restricciones de políticas sobre la proporción de la cartera que podrá destinarse a ciertas acciones en particular.

Así definido, el modelo de cartera resulta un modelo no lineal cuadrático. Dónde x_1 representa la proporción de la cartera que se invertirá en la acción i. Por ejemplo, si se dispone de P pesos a invertir en dos acciones y si la solución óptima fuera $x_1 = 0{,}75$ y $x_2 = 0{,}25$, esto significaría que se debe invertir en total 0,75 P pesos en la acción 1 y los 0,25 P pesos restantes en la acción 2.

A continuación se presenta el modelo matemático general para un modelo con dos activos.

Sean:

σ_i^2 = varianza de los rendimientos anuales de la acción i, i = 1, 2
σ_{12} = covarianza de los rendimientos anuales de la acciones 1y 2
R_i = rendimiento anual esperado de la acción i, para $i = 1, 2$
b = límite inferior del rendimiento esperado anual de la cartera
S_i = límite superior de la inversión en la acción i, para $i = 1, 2$

Definimos además:

1. La *varianza de los rendimientos anuales de la acción i* es un número que describe la "variabilidad" de esos rendimientos de un año al siguiente.
2. La *covarianza de los rendimientos anuales de las acciones 1 y 2* es un número que describe la magnitud en la cual suben o bajan conjuntamente los rendimientos de las dos acciones.
3. El *rendimiento esperado de la cartera* se define como el número:

$$x_1R_1 + x_2R_2$$

4. La *varianza del rendimiento de la cartera* se define como el número:

$$\sigma_1^2\, x_1^2 + 2\sigma_{12}\, x_1\, x_2 + \sigma_2^2\, x_2^2$$

5. La *desviación estándar* del rendimiento de la cartera se define como la raíz cuadrada de la varianza.

De esta forma podemos presentar el modelo de cartera para dos activos de la siguiente manera:

Min $\sigma_1^2\, x_1^2 + 2\sigma_{12}\, x_1\, x_2 + \sigma_2^2\, x_2^2$ (varianza del rendimiento)
S.a.
$x_1 + x_2 = 1$ (todos los fondos deben ser invertidos)
$r_1 x_1 + r_2 x_2 \geq b$ (límite inferior del rendimiento esperado de la cartera)
$x_1 \leq B_1$ (límite superior de la inversión en la acción 1)
$x_2 \leq B_2$ (límite superior de la inversión en la acción 2)
$x_1,\ x_2 \geq 0$

Analicemos a continuación un ejemplo numérico específico:

Se conocen los siguientes datos de un problema de cartera con dos activos:

$\sigma_1^2 = 0{,}09$ $r_1 = 0{,}05$ $B_1 = 0{,}65$ $b = 0{,}04$
$\sigma_2^2 = 0{,}06$ $r_2 = 0{,}03$ $B_2 = 0{,}70$ $\sigma_{12} = 0{,}02$

La solución obtenida por medio del programa Solver es la siguiente:

Modelo de Cartera	**Acción 1**	**Acción 2**	**Total**	
Decisión % en accionres	36,36%	63,64%	100,00%	100,00%
% máx de c/acción	65,00%	70,00%		
Rendimiento esperado	3,00%	5,00%	4,27%	4,00%
Medidas de riesgo	**Acción 1**	**Acción 2**	**Covarianza**	
Varianza de la acción	0,09	0,06	0,02	
Varianza de la cartera	0,0119008	0,0242976	0,0092562	0,0454546

Tabla 2

Observe que el rendimiento esperado de esta cartera es de 4,27%. La única restricción limitante es la que indica que la suma de lo invertido en cada tipo de acción debe ser igual a 1. Al comparar los valores óptimos de x_1^* y x_2^* vemos que la cartera óptima contiene una mayor proporción del valor cuyo rendimiento esperado anual es más alto (la acción 2). El resultado del modelo asegura una mezcla óptima que permite minimizar la varianza de la cartera, garantizando que el rendimiento esperado de ésta sea por lo menos el 4%.

También se podría haber planteado el modelo de forma de maximizar el rendimiento de la cartera, bajo la restricción de que la varianza de ésta no debe exceder un límite superior determinado. No obstante, esta formulación impone que la relación cuadrática del modelo aparezca en una restricción, y no en la función objetivo, en cuyo caso el modelo resultante no es cuadrático. Sin embargo, esta última formulación no implica dificultad alguna con el uso del procedimiento de gradiente reducido generalizado (utilizado por Solver), u otro de los algoritmos generales para la PNL, y muchos constructores de modelos prefieren esta última formulación para la optimización de sus carteras de inversión.

7.2 MODELO DE CARTERA PARA TRES ACTIVOS

En esta sección presentamos el modelo para tres activos y a continuación lo aplicamos a un ejemplo.

Formulación del modelo:

Sean,

X = fracción del activo *x* en la cartera

Y = fracción del activo *y* en la cartera

Z = fracción del activo *z* en la cartera

Se usará "activo *i*" para referirse al activo *X*, *Y* o *Z*.

Los valores de los rendimientos esperados, varianzas y covarianzas tienen que ser estimados a partir de datos históricos. En general, si se dispone de datos sobre *n* períodos para cada activo *i* habrá un rendimiento histórico real R_i^t asociado a cada período *t*, donde *t* fluctuará entre 1 y *n*. Es decir que cada activo *i* tendrá *n* rendimientos históricos. El rendimiento periódico esperado del activo *i*, que mide el promedio de los rendimientos históricos de ese activo, se calcula como:

$$R_i = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_i^t$$

Los rendimientos históricos periódicos R_i^t se utilizan también para estimar las varianzas y covarianzas.

$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(R_i^t - \overline{R}_i\right)^2$ es la varianza del rendimiento para el activo *i*

$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(R_i^t - \overline{R}_i\right)\left(R_j^t - \overline{R}_j\right)$ es la covarianza de los rendimientos para los activos *i* y *j*

También se define:

b = límite inferior del rendimiento esperado de la cartera

S_i = límite superior de la fracción del activo *i* que puede estar en la cartera.

En función de los parámetros, la formulación de esta programación cuadrática para el modelo de tres activos es,

Min. $\sigma_x^2 X^2 + \sigma_y^2 Y^2 + \sigma_z^2 Z^2 + 2\,\sigma_{xy} XY + 2\,\sigma_{xz} XZ + 2\,\sigma_{yz} YZ$

S.a.

$R_x X + R_y Y + R_z Z \geq b$

$X + Y + Z = 1$

$X \leq S_x$

$Y \leq S_y$

$Z \leq S_z$

$X, Y, Z \geq 0$

Supongamos tres acciones y sus rendimientos históricos para 12 años. Llamaremos A, B y C a los tres tipos acciones elegidas. Los rendimientos históricos se muestran en la tabla siguiente.

Rendimientos históricos de acciones			
AÑO	**A**	**B**	**C**
1	25%	28,00%	15,80%
2	11,30%	26%	29,00%
3	22,60%	22,00%	40,90%
4	-4,60%	-25,50%	-7,80%
5	-7,10%	14,40%	15,90%
6	5,60%	11,00%	-3,50%
7	4,00%	32,10%	13,30%
8	9,10%	30,50%	73,20%
9	8,90%	19,50%	5,00%
10	8,30%	39,00%	13,10%
11	3,50%	7,00%	1,00%
12	17,50%	63,50%	55,00%
Rend. Promedio	8,68%	22,29%	20,91%

Tabla 3

A continuación tenemos que calcular los parámetros a partir de estos datos históricos.

El rendimiento en el año *n* está definido por:

$$\frac{(\text{precio de cierre, n}) - (\text{precio de cierre, n - 1}) + (\text{dividendos, n})}{(\text{precio de cierre, n - 1})}$$

Supongamos que deseamos minimizar la varianza del rendimiento de la cartera, bajo un rendimiento esperado de 15% y la restricción de que no se podrá colocar más de 75% de la cartera en ninguna acción individual.

En la tabla 4 se muestran los cálculos de los rendimientos promedios, matriz de covarianzas y los resultados del optimizador Solver. En la tabla 5 se muestra el análisis de sensibilidad del modelo.

	A	B	C
PROMEDIO	8,68%	22,29%	20,91%
VARIANZAS	0,00935202	0,04457045	0,06001081

COVARIANZAS

	A	B	C
A			
B	0,01071706		
C	0,01010352	0,03050009	

Tabla 4

Solución de Solver

Celda objetivo (Mín)

Nombre	Valor final
Varianza de la cartera	0,016975276

Celdas de variables

Nombre	Valor final
% en acciones A	52,27%
% en acciones B	35,12%
% en acciones C	12,61%

Restricciones

Nombre	Valor de la celda
% en acciones Total	100,00%
Rendimiento esperado Total	15,00%
Máximo % en acciones A	52,27%
Máximo % en acciones B	35,12%
Máximo % en acciones C	12,61%

Tabla 5

Análisis de Sensibilidad de Solver

Celdas de variables

Nombre	Final Valor	Gradiente Reducido
% en acciones A	0,522686472	0
% en acciones B	0,351227381	0
% en acciones C	0,126086147	0

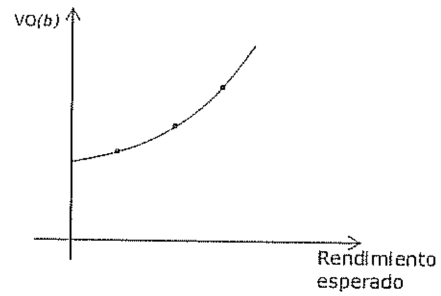
Restricciones

Nombre	Final Valor	Multiplicador Lagrange
% Total en acciones	1	0,000516256
Rendimiento esperado Total	15%	0,222895544

Tabla 6

La solución para el modelo especifica una cartera de aproximadamente 52,27% en A, 35,12% en B y 12,61% en C. El rendimiento anual esperado es exactamente 15%. El valor del objetivo óptimo indica que la varianza del rendimiento anual es 0,016975276.
Observamos además que el multiplicador de Lagrange indica que un incremento del 1% en el rendimiento esperado, conducirá a un *incremento aproximado* de 0,22289 en la varianza de la cartera.

Estas cifras son aproximaciones, ya que con una programación cuadrática las pendientes de los valores óptimos de la función objetivo como funciones de los términos independientes de las restricciones (al que simbolizaremos por z_0 = VO(b)) son instantáneas (a diferencia de la PL que son constantes en ciertos intervalos). En el caso del modelo de cartera, esto se refleja en la forma general del VO*(b)* según podemos apreciar en la siguiente figura.



Esta gráfica muestra que cuando la restricción sobre el rendimiento esperado se vuelve más estricta (es decir cuando *b* aumenta), el VO resulta cada vez más y más perjudicado. Esta gráfica se conoce como la *frontera eficiente*, y sus propiedades se estudian en los cursos de finanzas. Para nuestros propósitos, nos limitaremos a comentar que se trata de una función cuadrática convexa fragmentaria. Para encontrar cualquier punto de la gráfica de esta función, basta seleccionar un valor del LD de la restricción que establezca un límite inferior para el rendimiento esperado (*b*), y volver a optimizar el modelo.

7.3 MODELO DE CARTERA PARA *N* ACTIVOS

Para el caso general de *N* activos, el rendimiento esperado se define como,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i R_i$$

y la varianza del rendimiento de la cartera se define de acuerdo a la siguiente fórmula,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

El modelo general para N activos será:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

S.a:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i R_i \geq b_i$$

$$X_i \geq 0$$

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

1. ¿Existe alguna similitud conceptual entre las variables duales de la Programación Lineal y los multiplicadores de Lagrange de la Programación no Lineal? En caso de una respuesta afirmativa explique: a) cuales son las semejanzas; b) cuáles son sus diferencias.
2. Dado un Programa Matemático, con variables continuas, cuya función objetivo es no lineal, sujeta a restricciones dadas por ecuaciones y/o inecuaciones lineales, responda a las siguientes preguntas justificando su respuesta:
   a) ¿El conjunto de soluciones posibles es siempre un conjunto convexo?
   b) ¿El conjunto de soluciones óptimas (si existe más de una) es siempre un conjunto convexo?
   c) ¿Siempre existirá una solución óptima en un punto extremo (vértice) del Conjunto de soluciones posibles?
   d) ¿Siempre toda solución óptima será un punto de la frontera del conjunto de soluciones posibles?
   e) ¿Nunca un punto interior del conjunto de soluciones posibles puede corresponder a un óptimo?
   f) Si la función objetivo es cóncava: i) ¿Todo máximo relativo o local es también un máximo absoluto o global?; ii) ¿Todo mínimo relativo o local es siempre un mínimo absoluto o global?
   g) Si la función objetivo es convexa: i) ¿Todo máximo relativo o local será también un máximo absoluto o global?; ii) ¿Todo mínimo relativo o local es también un mínimo absoluto o global?

ACTIVIDAD 2

Una fábrica de amortiguadores produce dos modelos, a los que denominaremos Modelo A y Modelo C. Hay dos líneas de producción, una para cada modelo, e intervienen dos departamentos en la producción de cada modelo. La capacidad de la línea de producción del Modelo A es de 450 amortiguadores por día. La capacidad de producción del Modelo C es de 520 amortiguadores diarios. En el departamento 1, se fabrican los componentes. En este departamento, se requiere de tres horas de trabajo para cada amortiguador Modelo A y dos horas por cada unidad del Modelo C, en la actualidad se dispone de 20 trabajadores con una jornada laboral de 8 horas, En el departamento 2, se ensamblan los componentes y se hacen las pruebas de calidad del producto. Aquí se

requiere de una hora de trabajo para cada Modelo, en este departamento hay 10 operarios.

Un estudio de la demanda informó que las curvas de demanda de los productos de la compañía tienen una pendiente descendiente, estando las ventas, y por consiguiente la producción, relacionadas con el precio de venta, de la siguiente forma:

$$PA = -1{,}4\ C + 120$$
$$PC = 0{,}12\ A^2 - 1{,}50\ A + 250$$

Dónde,

A = producción diaria del Modelo A

C = producción diaria del Modelo C

PA = precio de venta del Modelo A

PC = precio de venta del Modelo C

El costo unitario variable de cada amortiguador A es de \$ 255.- y el del Modelo C de \$ 215.-

Formule el modelo matemático que le permita a la fábrica maximizar la contribución total a las utilidades.

ACTIVIDAD 3

Una cooperativa que produce electricidad enfrenta demandas de energía en periodos que pueden denominarse de horas pico y periodos de consumo reducido. Si el precio durante las horas pico es de $\$p_1$ por kwh, los clientes demandarán $(185 - 1{,}25\ p_1)$ kwh de potencia. Si durante las horas de consumo reducida se cobra un precio de $\$p_2$, entonces los clientes demandan $(150 - p_2)$ kwh. La cooperativa eléctrica debe tener la capacidad suficiente para satisfacer la demanda durante las horas de consumo máximo y de consumo reducido. Cuesta \$150 por día mantener cada kwh de capacidad. Determine cómo la cooperativa eléctrica puede maximizar los ingresos diarios menos los costos de operación.

ACTIVIDAD 4

Una empresa utiliza una cierta materia prima para elaborar dos tipos de productos. Se necesitan 0,5 unidades de MP y 2 horas de mano de obra (HMO) para elaborar un producto 1, por cada unidad de producto 2 se necesitan 1 unidad de MP y 3 HMO; mensualmente se dispone de 500 HMO. Actualmente tiene 100 unidades de materia prima, pero puede comprar más a un costo de \$150 por unidad.

Si se fabrican X_1 unidades de producto, entonces cada unidad se puede vender a $\$(80-2X_1)$, si se producen X_2 unidades de producto 2, entonces cada unidad se puede vender en $\$(60 - 1X_2)$.

¿Cuál debe ser el plan de producción?

¿Cuánto es el precio máximo que la fábrica estaría dispuesta a pagar por una unidad extra de materia prima?

ACTIVIDAD 5

La empresa K&C está planificando la campaña publicitaria de su nuevo producto, el perfume *Armony*, con esta finalidad quiere contratar anuncios en la radio y/o comerciales en televisión de 2 minutos de duración. Cada anuncio en la radio cuesta $300, el costo del minuto televisivo es de $350. Si se compran x_1 anuncios en radio serán escuchados por $4x_1$ miles de potenciales clientes hombres y $1x_1^2$ miles de potenciales clientes mujeres. Si se compran x_2 comerciales de Tv serán vistos por $2(\sqrt[3]{x_2})$ miles de hombres y $4(\sqrt{x_2})$ miles de mujeres. La empresa quiere que por lo menos 200 mil hombres y 300 mil mujeres vean sus anuncios a un mínimo costo.

ACTIVIDAD 6

Una fábrica utiliza el compuesto *AZ10* para elaborar dos tipos de fertilizantes: *Jardín Verde* y *Bello Parque*. Puede comprar hasta 700 kg del compuesto a $50 por kg. Con un kg *AZ10* puede obtenerse un kg de *Jardín Verde* a un costo de $75 o un kg de *Bello Parque* a un costo de $90. Si se producen X_1 kg de *Jardín Verde*, este se vende a un precio de $\$(270 - 2X_1)$ por kg. Si se producen X_2 kg de *Bello Parque*, éste se vende a un precio de $\$(150 - X_2)$ por kg. ¿Cuánto debería producirse de cada fertilizante para maximizar la ganancia?

ACTIVIDAD 7

Una empresa utiliza una cierta materia prima para elaborar dos tipos de productos. Cada kg de materia prima rinde 500 grs. de producto A y 200 grs. de producto B. Actualmente tiene disponibles 150 kg de materia prima. En la producción se utiliza una máquina que tiene disponible 200 hs, se necesitan 2 horas para procesar cada kg de producto A y 3 horas por cada kg de producto B.

Si se fabrican x_1 kg de producto A, entonces cada kg se puede vender a $\$(500 - \sqrt[3]{x_1})$, el precio de venta del producto B es de $95 por kg.

¿Cuál debe ser el plan de producción?

ACTIVIDAD 8

La siguiente tabla muestra los precios históricos al 31/12 de las acciones de Acindar, Molinos y Ledesma entre los años 1992 y 2004.

Período	Acindar	Molinos	Ledesma
1992	1,55	7,6	0,58
1993	1,15	12,8	1,37
1994	0,9	5,56	1,54
1995	0,71	8,2	1,28
1996	1,4	3,56	1,25
1997	2,38	2,4	1,04
1998	1,2	2,35	0,63
1999	1,6	2,46	0,62
2000	0,85	1,68	0,54
2001	0,13	1,9	0,67
2002	0,84	4,79	3,34
2003	3,45	5,25	2,07
2004	5,53	5,25	1,9

Fuente: www.bolsar.com

Suponga que el inversionista desea que:

- No colocar más del 50% en una acción individual
- La participación en Molinos debe superar 25%
- Un rendimiento mínimo esperado de 18% anual.

Trabajando con una planilla de cálculo:

1) Calcule la rentabilidad promedio anual de cada acción.
2) Calcule la varianza y matriz de covarianza de la rentabilidad promedio anual.
3) Obtenga la cartera de inversión óptima para estas tres acciones.

ACTIVIDAD 9

La siguiente tabla muestra los precios históricos al 31/12 de las acciones de Banco Francés, Minetti y Renault, entre los años 1992 y 2004

Período	Banco francés	Juan Minetti	Renault
1992	8,8	8,5	29,2
1993	12,7	4,9	53
1994	6,6	4,95	8,75
1995	8,85	3,3	5,2
1996	9,35	4,16	4,75

1997	9,28	3,12	1,4
1998	7,1	2,75	1,26
1999	7,9	2,51	1,1
2000	6,85	1,45	0,49
2001	2,95	0,64	0,18
2002	3,9	0,83	0,97
2003	8,5	3,3	1,51
2004	7,03	3,69	0

Fuente: www.bolsar.com

Suponga que el inversionista desea que:

- La participación de Minetti no debe superar el 60 % de la cartera
- Si invierte en automotrices, no invertirá en financieras.
- Un rendimiento esperado de por lo menos 11% anual.

Trabajando con una planilla de cálculo:

1) Calcule la rentabilidad promedio anual de cada acción.

2) Calcule la varianza y matriz de covarianza de la rentabilidad promedio anual.

3) Obtenga la cartera de inversión óptima para estas tres acciones.

CAPÍTULO 9

OPTIMIZACIÓN Y PLANIFICACIÓN CON GRAFOS

1. INTRODUCCIÓN

Frecuentemente, los tomadores de decisiones tienen bajo su responsabilidad la realización de proyectos compuestos por una gran cantidad de tareas o actividades, en las cuales se involucra a diferentes personas o departamentos de la organización. Cuando estos proyectos son de envergadura, se hace necesario realizar una adecuada planificación, programación y control de los mismos.

Un ejemplo de este tipo de problemas es el que enunciamos a continuación.

SYLKEN SA fabrica una línea completa de productos para afeitar. Recientemente, un competidor presentó una nueva afeitadora con hoja triple y banda lubricante, que durante los últimos meses ha capturado una parte significativa del mercado de la empresa. Los administradores han decidido que deben introducir un producto que compita con esta nueva afeitadora y les permita recuperar la parte del mercado perdida. Gustavo, gerente de planificación y desarrollo, ha identificado las actividades que se necesitan para diseñar, desarrollar y comercializar un nuevo producto y el tiempo esperado de cada una de estas actividades. Gustavo le pidió a Pablo, su asesor, revisar las tareas y entregarle un informe resumido que indique:

- ✓ El tiempo total que se requiere desde el principio del proyecto hasta que el producto nuevo se encuentre en manos del distribuidor.
- ✓ Las fechas específicas de inicio y finalización de cada actividad.
- ✓ Las tareas que deban ser cuidadosamente controladas para que el proyecto se concluya en una fecha específica.
- ✓ La posibilidad de acelerar ciertas actividades para terminar el proyecto más pronto asignándole mayores recursos y si es así cuáles serían estas tareas y a cuánto ascendería el costo adicional.