- Otorgar una tarjeta que le permite a los clientes obtener un descuento sobre productos perecederos. A ésta la llamaremos estrategia 2.

Cada uno desea elevar al máximo su número de clientes atraídos. Mediante la teoría de juegos determine la estrategia óptima para cada supermercado y el valor del juego.

	SUPERMERCADO II	
SUPERMERCADO I	ESTRATEGIA 1	ESTRATEGIA 2
ESTRATEGIA A	20000	20000
ESTRATEGIA B	30000	25000

ACTIVIDAD 8

Una pizzería está planificando su actividad para el próximo domingo. En función de los datos que se reflejan en la siguiente tabla (beneficios obtenidos), realizar el árbol de decisión correspondiente y en función de este, probar que la decisión más adecuada es hornear 170 pizzas.

	Demanda 150	Demanda 160	Demanda 170	Demanda 180
Hornear 150	300	300	300	300
Hornear 160	290	320	320	320
Hornear 170	280	310	340	340
Hornear 180	270	300	330	360
Probabilidad	0,2	0,4	0,25	0,15

CAPÍTULO 3

PROGRAMACIÓN LINEAL

1. INTRODUCCIÓN

Debido a que la esencia de la PL puede transmitirse mejor a través de un modelo concreto, comenzamos el análisis de este tema mediante un ejemplo.

Una fábrica de cerámicos quiere determinar el plan de producción óptimo de sus dos productos:

Cerámicos Esmaltados
Cerámicos Rústicos

El proceso de producción de los cerámicos requiere diferentes combinaciones de horas de mano de obra, horas de secado y de cocción. Para la fabricación de un m^2 de cerámico esmaltado son necesarias 5 horas de mano de obra, 4 horas de secado y 6 horas de cocción. Por cada m^2 de cerámico rústico se requieren 5 horas de mano de obra, 8 horas de secado y 4 horas de cocción.

La contribución a las utilidades por cada m^2 de cerámico son:
$8 para el cerámico esmaltado
$6 para el cerámico rústico

Teniendo en cuenta que la fábrica dispone de 300 horas de mano de obra, 400 horas para secado y 320 horas para cocción por mes, formule un modelo que le permita a la fábrica determinar el plan de producción que maximice la contribución a las utilidades.

	Cerámico Esmaltado	Cerámico Rústico	Disponibilidad hrs. mensuales
Horas de Mano de Obra / m^2	5	5	300
Horas de Secado / m^2	4	8	400
Horas de Cocción / m^2	6	4	320
Contribución a las utilidades / m^2	8	6	

Tabla 1

Vamos a suponer además, que la empresa no tiene limitaciones respecto a la demanda, es decir, puede vender todo lo que produce.

Al proceso de representar este problema mediante un modelo matemático, se denomina *modelización* o *planteamiento* del modelo lineal.

ALGUNAS CONSIDERACIONES AL MOMENTO DE MODELIZAR

En primer lugar, analizaremos las características del problema:

La empresa tiene como objetivo la maximización de las utilidades provenientes de la fabricación de los cerámicos rústicos y esmaltados.

La contribución máxima a las utilidades que puede lograrse está sujeta a la disponibilidad de los insumos.

Tanto las utilidades como el uso de los insumos son proporcionales a la cantidad que se fabrique de los productos.

No es posible fabricar cantidades negativas de los productos.

Las características observadas en este problema son comunes a un tipo importante de situaciones que pueden ser representadas a través de un modelo matemático, conocido como *Programación Lineal* (PL).

De acuerdo a las consideraciones anteriores, desarrollaremos un modelo matemático que represente el problema enunciado. Para modelizar un problema debemos identificar el objetivo, definir a las variables y enunciar las restricciones en forma verbal. Para nuestro ejemplo serán:

Objetivo: maximizar la contribución total a las utilidades

serve que las
·iables están
finidas con unidad
medida y para un
riodo de análisis

Variables de decisión:

x_1: m^2 de cerámicos esmaltados a fabricar mensualmente.

x_2: m^2 de cerámicos rústicos a fabricar mensualmente.

Restricciones:

- La cantidad de horas de mano de obra a utilizar mensualmente no debe superar las 300.
- La cantidad de horas de secado a utilizar mensualmente no debe superar las 400
- La cantidad de horas de cocción a utilizar mensualmente no debe superar las 320

Es conveniente, al momento de modelizar, controlar siempre las unidades de medida.

Cuando estemos seguros de haber identificado a todas las restricciones del problema, podremos representarlo a través de un modelo matemático.

MODELO MATEMÁTICO

$$\text{Max } Z = 8\,x_1 + 6\,x_2$$

$$\left[\frac{\$}{m^2}\right] \quad \left[m^2\right]$$

Sujeto a:

$$5\,x_1 + 5\,x_2 \le 300 \quad \text{Hrs. M O}$$

$$\left[\frac{hsMO}{m^2}\right] \quad \left[m^2\right] \quad \left[hsMO\right]$$

$$4\,x_1 + 8\,x_2 \le 400 \quad \text{Hrs. Secado}$$
$$6\,x_1 + 4\,x_2 \le 320 \quad \text{Hrs. Cocción}$$
$$x_1\,,\ x_2 \ge 0$$

Finalmente el modelo es:

$$\begin{array}{lll}
\text{Max } z = 8\,x_1 + 6\,x_2 & & \\
\text{sa} & & \\
5\,x_1 + 5\,x_2 \le 300 & & \text{Hs de M O} \\
4\,x_1 + 8\,x_2 \le 400 & & \text{Hs de Secado} \\
6\,x_1 + 4\,x_2 \le 320 & & \text{Hs de Cocción} \\
 & & \\
x_1 \text{ y } x_2 \ge 0 & &
\end{array}$$

Observe que en el primer miembro de las restricciones está representado el uso del recurso y en el segundo miembro (lado derecho) se encuentra la disponibilidad del mismo. Asimismo, la última restricción: x_1 , $x_2 \ge 0$ expresa que las variables del problema sólo pueden asumir valores reales no negativos.

Analizando las restricciones del problema, observamos que se admite la posibilidad de utilizar una menor cantidad de recursos que los disponibles. Esta situación puede representarse matemáticamente a través de variables que representen los insumos no utilizados, conocidas con el nombre de *variables de holgura o excedente.*

Estas variables aparecen en el objetivo con coeficiente nulo, dado que no aportan nada a las utilidades.

$$\begin{array}{lll}
\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 & & \\
\text{sa} & & \\
5x_1 + 5x_2 + S_1 \quad = 300 & & \text{Hs de Mano de Obra} \\
4x_1 + 8x_2 \quad + S_2 \quad = 400 & & \text{Hs de Secado} \\
6x_1 + 4x_2 \quad\quad + S_3 = 320 & & \text{Hs de Cocción} \\
 & & \\
x_1, x_2, S_1, S_2 \text{ y } S_3 \ge 0 & &
\end{array}$$

Siendo:

S_1= cantidad de sobrante de horas de mano de obra

S_2= cantidad de sobrante de horas de secado.

S_3= cantidad de sobrante de horas de cocción.

2. MODELO MATEMÁTICO GENERAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La Programación Lineal es un modelo de Programación Matemática[1] en el cual, la función a optimizar (maximizar o minimizar) es lineal y cuyas variables (no negativas) están sujetas a un conjunto de restricciones también lineales, expresadas como desigualdades del tipo ≥, ≤ o igualdades.

El modelo puede ser expresado de diferentes maneras:

FORMA EXPLÍCITA

$$\text{Maximizar } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n$$

Sujetas las x_j a:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n &\le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n &\le b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n &\le b_m \end{aligned}$$

$$\forall x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Dónde:

x_j son las variables de decisión del modelo.

c_j son parámetros que preceden a las variables en la función objetivo (FO) y generalmente representan beneficios, ingresos o costos unitarios, los que pueden ser monetarios o no.

a_{ij} $(i=1, 2, \dots, m)$ son parámetros que representan coeficientes técnicos en las restricciones.

b_i son los términos independientes de las restricciones. Estos parámetros generalmente representan disponibilidades de insumos o requerimientos necesarios.

Es conveniente aclarar que el modelo puede presentar algunas variantes y aún así será un modelo de PL, ellas son:

- El objetivo puede ser minimizar.
- Algunas o todas las restricciones pueden ser del tipo mayor o igual que (≥) o de igualdad (=).

[1] En el anexo 1 se caracteriza un modelo de Programación Matemática.

FORMA MATRICIAL

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } Z = CX \\ &AX \le B \\ &X \ge \phi \end{aligned}$$

donde :

C = es un vector fila de orden 1x*n*
X = es un vector columna de orden *n*x1
A = matriz de orden *m*x*n*
B = es un vector columna de orden *m*x1

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad C = [c_1, c_2, \dots, c_n] \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

FORMA VECTORIAL

$$\text{Máx } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \; x_j = P_0 \qquad P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad P_0 = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$X_j \ge 0, \ \forall j$$

FORMA ESTÁNDAR (matricial)
Un PL en forma estándar tiene todas las restricciones de igualdades (independientemente de que la FO sea de máximo o mínimo), es decir:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } CX \\ &AX = B \\ &X \ge \phi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Minimizar } CX \\ &AX = B \\ &X \ge \phi \end{aligned}$$

FORMA CANÓNICA (matricial)
Un PL en forma canónica es aquel que:

- en caso de máximo, todas las restricciones son del tipo ≤
- en caso de mínimo, todas las restricciones son de ≥

Maximizar CX	Minimizar CX
$AX \leq B$	$AX \geq B$
$X \geq \phi$	$X \geq \phi$

FORMA MIXTA (matricial)
Cuando las restricciones son de cualquier tipo, cualquiera sea el sentido de optimidad de la FO, decimos que el PL es mixto.

Maximizar CX	Minimizar CX
$AX\ [\geq, =, \leq]\ B$	$AX\ [\geq, =, \leq]\ B$
$X \geq \phi$	$X \geq \phi$

SUPUESTOS DEL MODELO

Este modelo tiene implícitos ciertos supuestos, algunos de los cuales son obvios mientras que otros no tanto. De todas maneras es importante tenerlos presente al momento de analizar un problema. Ellos son:

- ✓ Un *único objetivo* que está sujeto a restricciones, y a las restricciones de no negatividad de las variables.
- ✓ *Aditividad,* lo que implica que las contribuciones de los productos individuales son aditivas.
- ✓ *Proporcionalidad*, esto es, que tanto la función objetivo como las restricciones deben ser proporcionales al nivel de las variables.
- ✓ *Divisibilidad*, es decir que las variables deben ser divisibles a cualquier nivel fraccionario.
- ✓ *Certidumbre*, lo que supone que los parámetros del modelo se conocen con certeza.

3. MÉTODO GRÁFICO PARA RESOLVER PROGRAMAS LINEALES

Nos interesa ahora resolver nuestro problema, es decir poder indicarle al decisor cuántos metros cuadrados de cada cerámico deberá producir mensualmente para maximizar su beneficio.

Resolver un programa lineal significa encontrar un conjunto de valores para las variables de decisión que cumpliendo con todas las restricciones – incluidas las de no negatividad-, optimicen a la función objetivo.

De acuerdo a lo anterior y como el modelo tiene sólo dos variables de decisión (x_1 y x_2), para solucionar el problema de la fábrica de cerámicos podemos utilizar el método gráfico.

Para identificar la solución óptima, debemos encontrar primero el conjunto de todos los valores de x_1 y x_2 que son solución del sistema de inecuaciones de restricción, y luego de todos ellos identificar cuál optimiza a la función z. Lo hacemos de la siguiente manera:

1.- Encontramos el conjunto de puntos que es solución de la primera restricción. Para hacer esto dibujamos la recta representativa de la igualdad $5x_1+5x_2 = 300$ y a continuación verificamos cuál es el semiplano que cumple con la restricción[2].
Siempre debemos tener en cuenta que las restricciones de no negatividad ubican el gráfico en el primer cuadrante.

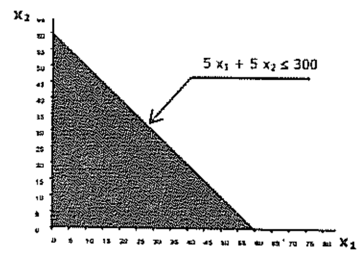


Gráfico 1

2.- A continuación identificamos el conjunto de puntos que es solución de las dos primeras restricciones, para ello introducimos en el gráfico a la restricción: $4x_1 + 8x_2 \leq 400$, verificamos cuál es el semiplano que es solución de esta restricción y luego identificamos el conjunto de puntos solución de ambas restricciones. Hacemos lo mismo hasta incluir a todas las restricciones.

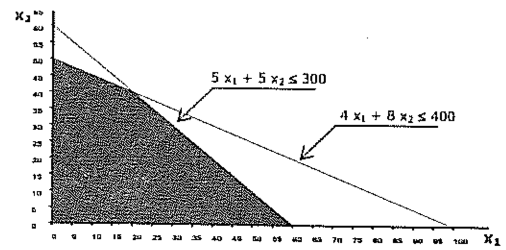


Gráfico 2

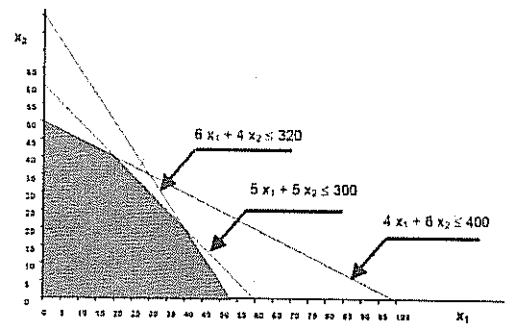


Gráfico 3

3.- Una vez encontrado el conjunto solución o región factible, para identificar la solución óptima, debemos graficar la función z.

[2] Esto se logra reemplazando en la inecuación a x_1 y x_2 por las coordenadas de un punto, como por ejemplo el (0, 0).

Para nuestro problema, $z = 8\ x_1 + 6\ x_2$, siendo la forma explícita de la ecuación de esta recta:

$$x_2 = \frac{z}{6} - \frac{8}{6}x_1$$

Observe que esta ecuación define a una "familia" de rectas paralelas y que a medida que se incrementa el valor de z (contribución total en este caso), se obtienen rectas paralelas cada vez más alejadas del origen. Esto nos permite afirmar que, el sentido de optimidad en el desplazamiento de z, será alejándola del origen y como consecuencia, el punto de mayor utilidades será el último punto de contacto entre z y el polígono de soluciones.

Note que no se habla del punto más alejado del origen, ya que esto involucra el concepto de distancia al origen, el cual no es acertado en este caso.

Para identificar este punto, se debe introducir la recta z en el gráfico. Luego, la desplazamos en su sentido de optimidad.

consejable, darle
ın valor arbitrario
poder dibujarla.

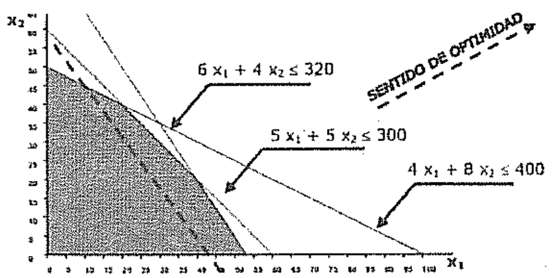


Gráfico 4

ice cuál es el
ido de optimidad
objetivo fuera:
$z = 8x_1 - 6x_2$

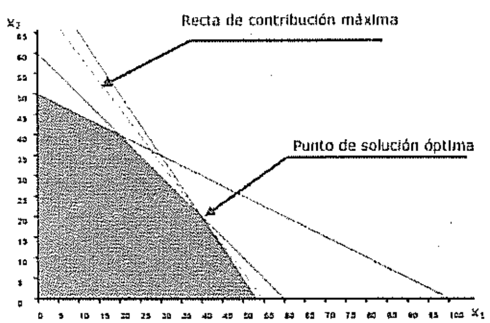


Gráfico 5

Vemos que el punto óptimo se forma con la intersección de las restricciones de horas de mano de obra y de horas de cocción. Para encontrar la solución óptima, se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$6\ x_1 + 4\ x_2 = 320$$
$$5\ x_1 + 5\ x_2 = 300$$

Solución Óptima:

$$x_1 = 40\ m^2$$
$$x_2 = 20\ m^2$$

Valor de la Función objetivo en el óptimo:

$$Z = \$\ 440$$

	Hrs. Requeridas para x_1= 40 m^2 y x_2= 20 m^2	Horas disponibles	Horas no utilizadas	Tipo de restricción
HMO	5(40) + 5(20) = 300	300	0	Limitante
Hrs. Secado	4(40) + 8(20) = 320	400	80	No limitante
Hrs. Cocción	6(40) + 4(20) = 320	320	0	Limitante

Tabla 2

En la tabla anterior podemos observar que existen 80 horas de secado que no han sido utilizadas (S_2 = 80) en tanto que para las horas de mano de obra y de cocción se utilizaron todos los recursos.

En definitiva, la respuesta que podemos darle al responsable de la empresa es que, para obtener la máxima contribución total a las utilidades que será de \$ 440.- debe fabricar 40 unidades del Producto I y 20 unidades del Producto II. Siguiendo este plan de producción utilizará todas las horas de mano de obra y todos los materiales disponibles, quedando sin usar 80 horas máquina.

Resumen de los pasos en la aplicación del Método gráfico:

1. Identificar el conjunto de soluciones posibles del problema o región factible.
2. Trazar la recta representativa de la función objetivo.
3. Desplazar la recta en el sentido de optimización hasta identificar el último punto de contacto entre la recta y la región factible. Este punto es la solución óptima y corresponde a un vértice del polígono de soluciones.
4. Encontrar los valores de las variables que optimizan la función objetivo, resolviendo en forma simultánea las ecuaciones de restricción que determinan el punto óptimo.
5. Encontrar los valores de las variables de holgura/excedente, reemplazando los valores de las variables de decisión en cada una de las ecuaciones de restricción.
6. Encontrar el valor de Z reemplazando los valores de las variables en la función objetivo.

En los casos en que el problema tiene más de tres variables de decisión es imposible utilizar el método gráfico. Esto resulta una gran limitación, ya que los problemas reales tienen gran cantidad de variables y restricciones. Afortunadamente, existe un método algebraico para resolver programas lineales que se llama Método Simplex, el cual veremos en detalle más adelante.

UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN

El dueño de una pequeña tienda de mascotas prepara una mezcla especial de comida, para los perros que tiene en guardería durante el fin de semana, combinando dos alimentos, a los que llamaremos I y II.

El veterinario ha sugerido que la grasa contenida en la mezcla no debe superar los 300 gramos y que por lo menos debe tener 40 unidades de vitamina A.

El alimento I contiene 10grs. de grasa y 4 unidades de vitamina A por cada kg., mientras que el II contiene 20 grs. de grasa y 3 unidades de vitamina A por Kg. También aconsejó incluir en la mezcla por lo menos 3 kg de alimento II.

Además de lo indicado por el veterinario debe tener en cuenta que del alimento I solamente puede conseguir hasta 8 kg. por semana y que, debido a la cantidad promedio de perros en la guardería, necesita por lo menos 12 kg. de mezcla por fin de semana.

El costo del alimento I es de $5 por kg. y el del alimento II es de $7 por kg.

Para modelizar este problema debemos identificar el objetivo, definir a las variables y enunciar las restricciones en forma verbal.

Objetivo:
minimizar el costo total de la mezcla de alimentos.

Variables:
x_1 = Kg. de alimento tipo I a incluir en la mezcla.
x_2 = Kg. de alimento tipo II a incluir en la mezcla.

Restricciones:

- El contenido máximo de grasa en la mezcla no debe superar los 300 grs.
- La mezcla debe contener por lo menos 40 unidades de vitamina A.
- Se pueden conseguir hasta 8 kgs. de alimento I por semana.
- La mezcla debe contener por lo menos 3 kgs. del alimento II.
- Se necesitan por lo menos 12 kgs. de mezcla por fin de semana.
- Las variables no pueden asumir valores negativos.

El modelo de PL para este problema es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } 5x_1 + 7x_2 \\
&sa \\
&10x_1 + 20x_2 \le 300 \\
&4x_1 + 3x_2 \ge 40 \\
&x_1 \le 8 \\
&x_2 \ge 3 \\
&x_1 + x_2 \ge 12 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Resolvemos gráficamente siguiendo los pasos anteriormente enumerados en el método.

1.- Identificamos a la región factible, es decir al conjunto de puntos que es solución de todas las inecuaciones del sistema de restricciones del PL.

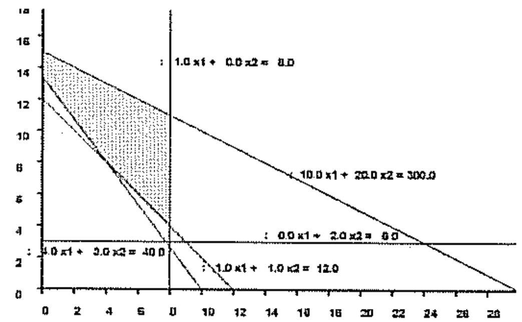


Gráfico 6

2.- Introducimos en el gráfico a la recta representativa de z y luego la desplazamos en su sentido de optimidad para identificar al punto óptimo.

Como en este caso la función objetivo representa un costo, al disminuir el valor de z en la ecuación de la recta, la ordenada al origen también disminuye y por lo tanto podemos decir que el sentido de optimidad de z se encuentra desplazándola hacia el origen.

En el gráfico siguiente, se representa a z con línea de puntos.

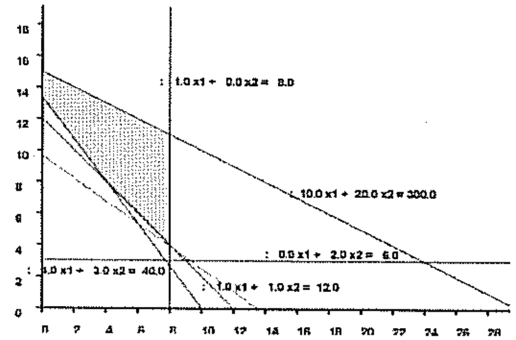


Gráfico 7

Puede observarse que el punto óptimo se forma por la intersección de las rectas que representan a las restricciones:

$$x_1 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 \geq 12$$

Con ellas planteamos un sistema de dos ecuaciones que nos permitirán determinar los valores de las variables de decisión.

A continuación se encuentran los valores de las variables de holgura/excedente reemplazando a las variables de decisión, por sus respectivos valores, en las restricciones.

La solución completa es:

VARIABLE	VALOR
x_1	8
x_2	4
S_1	140
S_2	4
S_3	0
S_4	1
S_5	0

Esta solución óptima le da a la FO el valor Z = $ 68.-

El informe al dueño de la tienda de mascotas debería contener como mínimo la siguiente información:

- Cantidad de mezcla a preparar por fin de semana: 12kg.
- Composición: 8kg. del alimento tipo I y 4Kg. del alimento tipo II.
- Costo de la mezcla por fin de semana: $68.-

Especificaciones técnicas:

- Contiene 1 kg. por encima del mínimo requerido del alimento II y exactamente el máximo permitido del alimento I.
- La cantidad de grasa aportada es de 160grs.y contiene 44 unidades de vitamina A.

4. CONCEPTOS BÁSICOS

A continuación enunciaremos algunos conceptos necesarios para continuar con el desarrollo de este capítulo.

Combinación Lineal convexa de vectores

Es una combinación lineal convexa de r vectores V_1, V_2, ..., V_r es otro vector V, tal que:

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots\ldots + \alpha_r V_r$$

Con la condición de que los $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, para i= 1, 2,..., r

Por ejemplo para el caso de dos dimensiones, si realizamos una combinación lineal convexa de dos vectores obtendremos como resultado un punto (vector) que pertenece al segmento de recta que los une. Gráficamente:

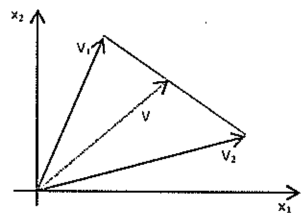
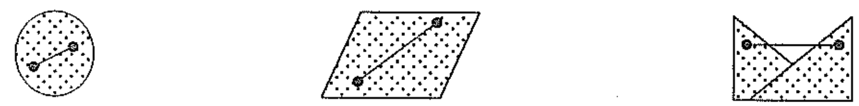


Gráfico 8

Conjunto Convexo: un conjunto de puntos S es un conjunto convexo, si el segmento rectilíneo que une cualquier par de puntos de S, se encuentra completamente en S.

Observe que de las figuras que se muestran a continuación, las dos primeras son conjuntos convexos en tanto que la tercera no lo es.



Para cualquier conjunto convexo S, un punto P es un punto extremo si para cada segmento rectilíneo que se encuentra completamente en S y que pasa por P, P es un extremo del segmento rectilíneo.

Para un problema de PL, en forma estándar, con m ecuaciones de restricción y n variables incluidas las de holgura o excedente, enunciamos los siguientes conceptos respecto al conjunto de soluciones del problema:

Solución factible o posible de un PL (SF): es un conjunto de valores de las variables x_j que verifican el sistema de restricciones incluidas las de no negatividad.

Solución Factible Básica (SFB): es toda solución factible que tiene como máximo m variables positivas; o lo que es lo mismo, tiene n-m valores de las variables nulos. El número máximo de soluciones básicas se calcula de la siguiente manera:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Solución Factible Básica No Degenerada: tiene *exactamente m* variables positivas, o *exactamente n-m* variables nulas

Solución Factible Básica Degenerada: tiene menos de *m* variables positivas, o *más* de *n-m* variables nulas.

Solución Óptima: es toda solución que le da a la función Z el máximo (o mínimo) valor.

Podemos resumir estos conceptos en el siguiente diagrama:

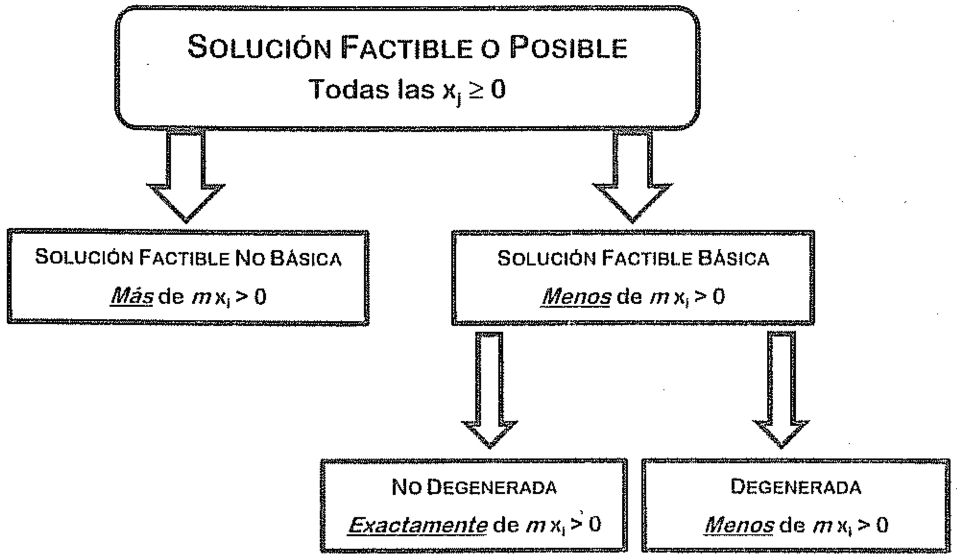
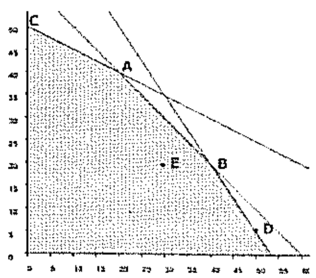


Gráfico 9

5. CONSIDERACIONES RESPECTO AL CONJUNTO DE SOLUCIONES

A partir del gráfico del problema de la fábrica de cerámico analicemos, en una tabla, algunos puntos del conjunto de soluciones del problema. Para cada uno de ellos determinemos si las variables (decisión y holgura) son positivas o nulas:



	A	B	C	D	E
X_1	>0	>0	=0	>0	>0
X_2	>0	>0	>0	>0	>0
S_1	=0	=0	>0	>0	>0
S_2	=0	>0	=0	>0	>0
S_3	>0	=0	>0	=0	>0

Observe que en los puntos que corresponden a los vértices A, B y C la solución es posible básica (m variables positivas) en tanto que en los puntos D y E las soluciones son posibles no básicas (más de m variables positivas).

Considerando lo analizado hasta el momento, podemos hacer las siguientes observaciones:

- ✓ Para cumplir con las restricciones de no negatividad de las variables, gráficamente se trabaja siempre en el 1º cuadrante.

- ✓ El poliedro de soluciones es un conjunto convexo.
- ✓ Los puntos que resulta necesario considerar para buscar el óptimo, son los que se encuentran sobre la frontera de la región factible.
- ✓ En particular podemos observar que si el PL tiene solución, ésta se encontrará en, al menos, uno de los vértices.
- ✓ Se puede obtener la solución en cada vértice resolviendo en forma simultánea las ecuaciones lineales que lo determinan.
- ✓ Las soluciones factibles en los vértices son soluciones factibles básicas.
- ✓ Todos los puntos del poliedro de soluciones verifican las restricciones, es decir que el problema tiene infinitas soluciones factibles.
- ✓ En todo punto situado sobre una recta no hay sobrante de ese insumo.
- ✓ En las ecuaciones determinantes del óptimo (restricciones limitantes), no hay sobrantes de insumos, por lo tanto, las variables de holgura son nulas.
- ✓ En las ecuaciones no determinantes del óptimo (restricciones no limitantes) siempre hay sobrantes de insumos, o sea, las variables de holgura son positivas.
- ✓ Si el funcional verifica su máximo valor en un único vértice del poliedro, significa que el problema tiene una única solución óptima.
- ✓ Si z fuera paralela a una restricción limitante, el problema tendría infinitas soluciones óptimas.
- ✓ Si el óptimo se verifica en un vértice donde se cruzan 3 o más rectas de restricción, la solución óptima es degenerada.

6. TEOREMAS DE COMBINACIONES LINEALES CONVEXAS DE SOLUCIONES FACTIBLES

Enunciaremos una serie de teoremas relacionados con las soluciones factibles de los problemas lineales, los que resultarán de utilidad en desarrollos posteriores.

TEOREMA 1

Este teorema se enuncia como: "Toda combinación lineal convexa de soluciones factibles de un programa lineal, es otra solución factible de dicho programa".

Para demostrarlo partimos de un PL estándar matricial:

$$\text{Maximizar } CX$$
$$AX = B$$
$$X \geq \phi$$

Sean X_1, X_2, .., X_r, r vectores soluciones del PL, por lo tanto se verificará:

$$\begin{array}{ll} & AX_1=B \\ & AX_2=B \\ \ldots\ldots \quad (1) & \\ & AX_r=B \end{array}$$

Si multiplicamos miembro a miembro las ecuaciones del sistema (1) por escalares α_1; α_2, ..., α_r respectivamente, con la condición que,

$$\alpha_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$$

tendremos:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 A X_1 = \alpha_1 B \\ \alpha_2 A X_2 = \alpha_2 B \\ \ldots\ldots\ldots \qquad (2) \\ \alpha_r A X_r = \alpha_r B \end{array}$$

Sumando miembro a miembro:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A X_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i B$$

Podemos extraer factor común premultiplicando el primer miembro por A y el segundo por B, entonces queda:

$$A \sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i = B \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$$

Siendo,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$$

el vector resultante de la combinación convexa,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i = X_k$$

será también una solución factible del PL, es decir:

$$AX_k = B$$

En consecuencia queda demostrado el teorema.

Corolario del teorema 1: "el conjunto de todas las soluciones factibles de un PL, si no es vacío, es un conjunto convexo. Es decir que, si no es vacío, está formado por un único elemento o por una infinidad".

TEOREMA 2

"Si existe más de una solución factible que le den el mismo valor a la función objetivo, cualquier combinación lineal convexa de las mismas, dará al funcional igual valor".

La demostración de este teorema es similar al anterior.

Partimos de un PL en forma estándar matricial:

$$\text{Maximizar } CX$$
$$AX = B$$
$$X \geq \phi$$

Sean X_1, X_2, X_r, r vectores soluciones del PL que dan a la función objetivo igual valor, por lo tanto se verificará:

$$\begin{array}{ll} CX_1 = Z_0 & \\ CX_2 = Z_0 & \\ .\ \ ..\ \ .. & (3) \\ CX_r = Z_0 & \end{array}$$

Si multiplicamos miembro a miembro las ecuaciones del sistema (3) por escalares α_1; α_2,...., α_r respectivamente, con la condición que,

$$\alpha_i \geq 0 \text{ y, } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

tendremos:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 CX_1 = \alpha_1 Z_0 & \\ \alpha_2 CX_2 = \alpha_2 Z_0 & (4) \\ .\ \ \ .\ \ . & \\ \alpha_r CX_r = \alpha_r Z_0 & \end{array}$$

Si ahora sumamos miembro a miembro, obtendremos:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i C X_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i Z_0$$

de donde,

$$C \sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i = Z_0 \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$$

Como,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$$

tendremos que el vector resultante de la combinación convexa

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i = X_k$$

es también una solución factible del PL que otorga a la función de decisión el mismo valor Z_0, es decir:

$$CX_k = Z_0$$

En consecuencia, de acuerdo a los teoremas 1 y 2, podemos afirmar que cualquier combinación convexa de soluciones factibles óptimas es también una solución factible óptima.

Por lo cual, respecto al conjunto de soluciones factibles óptimas decimos que es un conjunto convexo, que si no es vacío, esta formado por un elemento o por una infinidad.

TEOREMA 3

"Si un PL es resoluble – es decir que posee óptimo -, existirá siempre por lo menos una solución factible básica que también sea óptima"[3].

7. MÉTODO SIMPLEX

Este método, desarrollado por George Dantzig en 1947, permite encontrar la solución óptima de cualquier programa lineal, cualquiera sea el número de variables y ecuaciones que lo forman, e identificar aquellos problemas que no tienen solución, o cuya solución óptima es no acotada[4].

El algoritmo parte de una solución básica inicial (SF en un vértice), y a través de sucesivas iteraciones, explora sistemáticamente los vértices del poliedro de soluciones del Programa Lineal hasta identificar la solución óptima.

Si bien con posterioridad, se han desarrollado métodos que teóricamente son más eficientes en tiempo computacional para problemas de gran tamaño, Simplex ha demostrado en la práctica, un mejor desempeño en la mayoría de los casos, razón por la cual es aún el de mayor difusión.

El método Simplex tiene en cuenta las siguientes propiedades de los puntos extremos o soluciones factibles básicas:

1.- (a) Si existe exactamente una solución óptima, entonces *debe* ser una solución de punto extremo.
(b) Si existen soluciones óptimas múltiples, entonces al menos dos de ellas *deben* ser soluciones factibles en puntos extremos adyacentes (sólo se consideran las soluciones factibles).

[3] La demostración de este teorema puede consultarse en Gass (1979), Capítulo 3.
[4] El Teorema que fundamenta el Método Simplex se enuncia y demuestra en el Anexo 1 al final de este Capítulo.

2.- Existe sólo un número *finito* de puntos extremos (soluciones factibles básicas).

3.- Si una solución en un vértice es igual o *mejor* (según el valor de la función objetivo) que todas las soluciones factibles en los vértices adyacentes a ella, entonces es igual o *mejor* que todas las demás soluciones en los vértices, es decir, es *óptima*.

Recordemos que gráficamente, cada vértice se forma por la intersección de las rectas representativas de las restricciones y que los valores de las variables para cada punto extremo, se encuentran resolviendo en forma simultánea las ecuaciones de restricción correspondientes a ese vértice. A su vez, cada punto extremo o vértice corresponde a una *solución posible básica* del problema.

El método Simplex, basándose en estas conclusiones generales, analiza sistemáticamente los puntos extremos de la región factible hasta identificar el punto óptimo. Asegurándose en cada paso que el vértice analizado no es peor que el anterior, esto es, que le dé a la función objetivo un valor mejor o al menos igual que el anterior.

PASOS DEL MÉTODO SIMPLEX

Teniendo en cuenta lo expresado en el Teorema 3, el algoritmo Simplex busca el óptimo de un problema de PL recorriendo algunos de los vértices del poliedro del conjunto de soluciones factibles de manera que el valor de la función objetivo mejore en cada desplazamiento.

Es decir que analiza las soluciones posibles básicas del problema hasta encontrar la óptima, resolviendo en cada paso un sistema de "m" ecuaciones con "n" variables.

El método consiste fundamentalmente en dos fases:

En la ***primera fase*** se identifica una solución posible básica que sirva de punto de partida.

En la ***segunda fase o fase iterativa*** se analiza si dicha solución es o no óptima, y si no lo es, a partir de ella se encuentra una mejor.

El Simplex trabaja con tablas o cuadros, cada uno de ellos corresponde a un punto extremo o vértice del conjunto de soluciones factibles, es decir a una solución posible básica. Las tablas resumen toda la información necesaria de cada solución.

Primera Fase: identificación de una solución factible básica.
Los pasos a seguir en esta etapa son:

1. Convertir el modelo a su forma estándar. Esto se logra sumando una variable de holgura al lado izquierdo de las restricciones de $\leq$ y restando una variable de excedente en los primeros miembros de las

restricciones de ≥. Estas variables deberán interpretarse de acuerdo al significado de la restricción de que se trate, sin embargo, en la función objetivo llevan un coeficiente nulo ya que no agregan nada al objetivo. En el caso de que en el vector del lado derecho exista algún valor negativo, deberán multiplicarse ambos miembros de la restricción por -1.

2. Analizar la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones de restricción y ver si en ella existen *m* vectores unitarios con configuración de matriz identidad. Las variables cuyos coeficientes técnicos (a_{ij}) se corresponden con la submatriz identidad, serán las variables consideradas básicas en la solución inicial y sus valores en la solución serán los términos independientes de las restricciones (b_i). El resto de las variables serán consideradas no básicas y, por tanto, su valor en la solución será cero. Si la matriz A no contiene una submatriz identidad o existe algún componente negativo en el vector B, no se puede determinar en esta instancia una solución factible básica inicial y por lo tanto no es posible comenzar con Simplex[5].
3. Armar la tabla de partida, tomando como solución básica inicial la correspondiente a los vectores unitarios identificados en la etapa anterior.

Segunda Fase: mejoramiento de la solución

En esta segunda fase se analiza si la solución encontrada es óptima o no, y esto se hace a través de un criterio de optimidad, el que indica si es posible mejorar o no el valor de z.

Si la solución no es óptima, entonces se debe pasar a otra SFB haciendo un cambio de variables en la base. Es decir que, alguna variable no básica –nula- pasa a ser básica –positiva- y alguna variable básica pasa a ser no básica. Esto se conoce como: "determinación de la variable que entra y la variable que sale de la base".

A continuación se actualiza la tabla simplex y se analiza nuevamente la solución. El procedimiento continúa hasta que el criterio de optimidad indica que la solución hallada es óptima.

1. Análisis de la solución: investigar si la solución encontrada se puede mejorar, para ello analizar las diferencias c_j-z_j. Estos valores miden el incremento de la función objetivo ante un aumento unitario en el valor de cada una de las variables no básicas. Por lo tanto:
   - Si una variable no básica que tenga asociado un (c_j-z_j)>0 ingresa a la base, el valor de z aumentará.
   - Si una variable no básica que tenga asociado un (c_j-z_j)<0 ingresa a la base, el valor de z disminuirá.
   - Si una variable no básica que tenga asociado un (c_j-z_j)=0 ingresa a la base, el valor de z no se alterará.

[5] Posteriormente se analizará la forma de solucionar este inconveniente a fin de hallar una solución básica de partida.

Como consecuencia de lo anterior, la prueba de optimidad dice:

- En problemas de maximización, la solución es óptima si todas las diferencias (c_j-z_j) son ≤ 0.
- En problemas de minimización, la solución es óptima si todas las diferencias (c_j-z_j) son ≥ 0.

2. Variable de entrada: determinar la variable que ingresará a la base. La variable que entra a la base debe ser aquella que tenga el mayor incremento positivo en el caso de maximización (o mayor incremento negativo en el caso de minimización), ya que ésta es la variable que aumenta (disminuye) más rápidamente el valor de la función objetivo. Entonces:

   - Si Z es de Maximización, ingresa la variable que verifica mayor diferencia marginal (c_j-z_j) > 0.
   - Si Z es de Minimización, ingresa la variable que verifica menor diferencia marginal (c_j-z_j) < 0.

3. Variable de salida: para determinar la variable que sale de la base, se selecciona aquella que tenga el menor cociente entre su valor en la solución actual (λ_i) y el coeficiente λ_{ik} (siendo k la variable que entra) siempre y cuando dicho coeficiente sea estrictamente positivo, es decir:

En general λ_{ij} representa a los coeficientes de la columna de la variable x_j

$$\theta = \min \frac{\lambda_i}{\lambda_{ik}}; \qquad \forall \lambda_{ik} > 0$$

Este cociente representa el máximo valor que puede tomar la variable entrante, antes que viole las restricciones de no negatividad.

Si **todos** los λ_{ij} son ≤ 0 la solución es no acotada. Esto significa que la función objetivo podría incrementar (disminuir) infinitamente su valor. Esta situación es prácticamente imposible en la realidad, por lo cual corresponde detener el proceso de cálculo y revisar la modelización del problema.

4. Actualización: se debe actualizar la tabla, mediante operaciones elementales en filas.

5. Criterio de detención: el proceso se detiene cuando:

   - Si Z es de Maximización: (c_j-z_j) ≤ 0; ∀j
   - Si Z es de Minimización: (c_j-z_j) ≥ 0; ∀j
   - Para alguna variable no básica que pueda entrar a la base se verifica que **todos** los λ_{ij} son ≤ 0

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Retomando nuestro problema de la fábrica de cerámicos, una vez agregadas las variables de holgura a su formulación, nos queda:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ &\text{sa} \\ 5x_1 + 5x_2 + S_1 &= 300 \\ 4x_1 + 8x_2 + S_2 &= 400 \\ 6x_1 + 4x_2 + S_3 &= 320 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\text{ y } S_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Una primera solución posible básica puede encontrarse igualando a cero x_1 y x_2, de esta manera la solución será:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ S_1 &= 300 \\ S_2 &= 400 \\ S_3 &= 320 \end{aligned}$$

y el valor de la función objetivo es, $Z = 0$

Como vemos, se trata de la solución posible básica que corresponde al punto (0,0) en la solución gráfica.
Las variables que son iguales a cero en una SFB, se las denomina *variables no básicas* y las que asumen un valor positivo son las *variables básicas*.

Una forma de identificar las variables que serán básicas en la solución de partida, consiste en analizar la matriz A de coeficientes del sistema de ecuaciones de restricción:

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & 8 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 6 & 4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que las columnas que corresponden a las variables básicas son vectores unitarios, esta es justamente, la característica que nos permite identificar las variables que estarán en la base en la primera solución.

Es conveniente expresar esta solución, útil como punto de partida para el Simplex, en una tabla (para facilitar los cálculos que el método requiere).

A continuación se presenta la estructura de una tabla Simplex con su descripción:

		$C_B \rightarrow$				
$C_B \downarrow$	Base	VLD	**NOMBRE DE LAS VARIABLES**			
	z_j					
	$c_j - z_j$					

Tabla3

Columna Base: nombre de las variables básicas. Hay un renglón para cada variable básica y este renglón tiene un 1 en la columna que corresponde a dicha variable básica.

Columna C_B: coeficientes que preceden a las variables básicas en la función objetivo.

Fila C_B: coeficientes que tienen cada una de las variables en la función objetivo.

Columna VLD (vector del lado derecho): contiene los valores de las variables básicas en la presente solución y el valor de la función objetivo.

El **cuerpo de la tabla** contiene tantas filas como ecuaciones de restricción tenga el problema más dos renglones, uno para z_j y otro para $c_j - z_j$ y tantas columnas como variables tenga el problema.

Cálculo de la fila z_j: se determina cada valor como la suma de los productos que se obtienen multiplicando los elementos de la columna C_B por los elementos correspondientes de la j-ésima columna.

Cálculo de la fila $c_j - z_j$: se determina cada valor restando z_j de c_j.

Representamos la solución de partida en la tabla 2:

		C_B	8	6	0	0	0
C_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1	300	5	5	1	0	0
0	S_2	400	4	8	0	1	0
0	S_3	320	6	4	0	0	1
	z_j	0	0	0	0	0	0
		$c_j - z_j$	8	6	0	0	0

Tabla 4

En la columna VLD se encuentra la primera solución, que es como ya lo habíamos dicho:

Verifique en la solución gráfica que esta solución corresponde al vértice (0,0)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ S_1 &= 300 \end{aligned}$$

$$S_2 = 400$$
$$S_3 = 320$$

En esta solución, Z = 0.

Una vez identificada la solución de partida, pasamos a la segunda fase del método o fase iterativa. En ésta debemos analizar si la solución actual es óptima o no y en este último caso, hallar una nueva solución que le proporcione un mejor valor a la función objetivo.

Para saber si la solución encontrada en la tabla 2 es óptima o no, se utiliza el criterio de optimidad -para problema de maximización-: *la solución será óptima cuando todas las diferencias* $c_j - z_j$ *sean menor o igual que cero.* Podemos observar que para nuestro ejemplo, hay dos valores positivos, por lo tanto la solución no es óptima.

Para encontrar una nueva SFB, hay que tener en cuenta que, alguna de las variables no básicas en la solución actual, deberá ingresar a la base y, alguna de las variables básicas deberá salir de la base actual (esto es, asumir un valor nulo en la nueva solución).

Primero se selecciona la variable que ingresa a la base y luego la variable que sale. Se debe seguir el siguiente criterio:

- En caso de máximo:

Ingresa a la base a variable que verifica mayor diferencia marginal $(c_j - z_j) > 0$. En este caso la variable que entra es x_1, y a continuación marcamos la columna correspondiente.

Sale de la base se selecciona la variable que tenga el menor cociente entre su valor actual (λ_i) y el coeficiente λ_{ij} (siendo j=k la variable que entra) siempre y cuando dicho coeficiente sea estrictamente positivo, es decir:

$$\theta = \min \frac{\lambda_i}{\lambda_{ij}}; \qquad \forall \lambda_{ij} > 0$$

Una vez determinada la variable que sale de la base, en este caso S_3, marcamos la fila correspondiente:

		C_B	8	6	0	0	0	
C_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	300	**5**	5	1	0	0	300/5=60
0	S_2	400	**4**	8	0	1	0	400/4=100
0	**S_3**	**320**	**6**	**4**	**0**	**0**	**1**	320/6=**53,33**
	z_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	8	6	0	0	0	

Tabla 5

Seleccionadas la variable que ingresa y la que sale de la base, debemos calcular la nueva SFB (otro vértice). Esto se logra incorporando la

variable que entra y eliminando la variable que sale. En esta nueva solución las variables básicas serán:

$$S_1, S_2 \text{ y } x_1$$

y las variables no básicas:

$$x_2 \text{ y } S_3.$$

El valor de la FO en la nueva solución será:

$$Z_{nuevo} = Z_0 + (C_j - Z_j)\theta$$

Como x_1 reemplaza a S_3, la columna correspondiente a x_1 en la nueva tabla deberá ser el vector unitario:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, tendremos que hallar una matriz equivalente a la matriz A de la solución anterior. Para lograr esto se emplean las siguientes operaciones elementales en filas:

⇒ multiplicar una fila por un número distinto de cero.

⇒ sumarle a una fila otra multiplicada por un número.

Explicamos a continuación el procedimiento para obtener la nueva solución:

1º.- armamos nuevamente la tabla colocando a x_1 en la base, en lugar de S_3, con su correspondiente coeficiente en la columna C_B.

		C_B	8	6	0	0	0
C_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1						
0	S_2						
8	**x_1**						
	z_j						
		$c_j - z_j$					

Tabla 6

2º.- el número que se encuentra en la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale, se llama elemento **pivot** y en la nueva solución tiene que ser igual a uno.

Para esto multiplicamos toda la fila de x_1 por su recíproca, es decir 1/6, obteniendo de esta manera la fila nueva de la variable x_1, como se muestra a en la tabla siguiente:

		C_B	8	6	0	0	0
C_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1						
0	S_2						
8	**x_1**	**320/6**	**1**	**4/6**	**0**	**0**	**1/6**
	z_j						
		$c_j - z_j$					

Tabla 7

De esta manera, hemos encontrado el elemento unitario del vector x_1:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3º.- Ahora debemos encontrar los elementos nulos del vector x_1. Para ello, usamos la segunda operación elemental en fila. El cero que corresponde a la fila de S_2 se obtiene sumando a la fila de S_2 (tabla 3), la fila nueva de x_1 (tabla 5) multiplicada por -4 (opuesto del número que se desea anular). Esto es:

VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
400	4	8	0	1	0
+ (320/6) (-4)	+ 1 (-4)	+ (4/6)(-4)	+ 0(-4)	+ 0(-4)	+ (1/6)(-4)
1120/6	**0**	**32/6**	**0**	**0**	**-4/6**

Tabla 8

		c_B	8	6	0	0	0
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1						
0	S_2	**1120/6**	**0**	**32/6**	**0**	**1**	**-4/6**
8	x_1	320/6	1	4/6	0	0	1/6
	z_j						
		$c_j - z_j$					

Tabla 9

4º.- A continuación obtenemos el cero correspondiente a la fila de S_1 haciendo: la fila S_1 más, la fila nueva de x_1 multiplicada por -5.

		c_B	8	6	0	0	0
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1	**200/6**	**0**	**10/6**	**1**	**0**	**-5/6**
0	S_2	1120/6	0	32/6	0	1	-4/6
8	x_1	320/6	1	4/6	0	0	1/6
	z_j						
		$c_j - z_j$					

Tabla 10

5º.- Una vez actualizada la tabla, corresponde calcular la fila de z_j y la de $c_j - z_j$ conformando de esta manera la nueva tabla:

		c_B	8	6	0	0	0	
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	**200/6**	**0**	**10/6**	**1**	**0**	**-5/6**	**20**
0	S_2	1120/6	0	**32/6**	0	1	-4/6	35
8	x_1	320/6	1	**4/6**	0	0	1/6	80
	z_j	1280/3	8	32/6	0	0	8/6	
		$c_j - z_j$	0	**4/6**	0	0	-8/6	

Tabla 11

La nueva solución es:

$x_1 = 320/6$
$x_2 = 0$
$S_1 = 200/6$
$S_2 = 1120/6$
$S_3 = 0$

$Z = 1280/3$

Podemos observar que aún no hallamos la solución óptima, ya que para la columna correspondiente a la variable x_2 se verifica un valor $c_j - z_j > 0$.

La variable que ingresa a la base en la próxima solución será x_2, ya que verifica la mayor diferencia marginal, $(c_2 - z_2) = 4/6$.

Para determinar la variable que sale de la base calculamos los cocientes entre cada elemento de la columna VLD y los elementos correspondientes de la columna de x_2, pero sólo considerando los denominadores positivos. Los cálculos se pueden observar en la tabla 9.

Luego, para pasar a la nueva solución, debemos repetir los pasos 1 a 5.

Obtenemos en este caso la siguiente tabla:

		c_B	8	6	0	0	0
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
6	x_2	20	0	1	6/10	0	-5/10
0	S_2	80	0	0	-32/10	1	2
8	x_1	40	1	0	-4/10	0	5/10
	z_j	440	8	6	4/10	0	1
		$c_j - z_j$	0	0	-4/10	0	-1

Tabla 12

Como podemos observar se trata de la solución óptima ya que todas las diferencias marginales $(c_j - z_j)$ son negativas o nulas.

La solución óptima es:

$x_1 = 40$
$x_2 = 20$
$S_1 = 0$
$S_2 = 80$
$S_3 = 0$

$Z = 440$

8. TÉCNICA DE LA BASE ARTIFICIAL

Al resolver algunos problemas con el método Simplex, muchas veces sucede que no podemos identificar la solución básica de partida.

En general, esto ocurre cuando en el planteo tenemos restricciones de igualdad o inecuaciones del tipo ≥ . En el primer caso, no es necesario

agregar variables de holgura y en el segundo las agregamos restando, por lo cual no existirán en la matriz A los *m* vectores unitarios necesarios para formar la primera solución básica.
Para solucionar este problema, se utiliza la técnica de la base artificial o simplemente variables artificiales. Se trata de un artificio matemático por medio del cual, se agregan al problema tantas variables artificiales como vectores unitarios nos falten en la matriz A. De este modo, modificamos el problema original de manera tal que nos permita identificar la solución de partida.

Es importante destacar que estas variables *no son variables del problema original*. Por ello decimos que, una solución del mismo, se obtiene una vez que se hayan eliminado de la base todas las variables artificiales. Para que el algoritmo Simplex las elimine de la base rápidamente, se deben agregar en la función objetivo precedidas de un coeficiente que deberá ser:

- ✓ en caso de maximización, muy grande en valor absoluto y negativo.
- ✓ si el problema es de mínimo, muy grande y positivo.

Si se verifica la condición de optimidad y en la base aún queda alguna variable artificial, puede suceder alguna de las siguientes dos cosas:

- ✓ Si la variable artificial quedó en la base con un valor positivo, entonces el problema original es no factible.
- ✓ Si la variable artificial quedó en la base pero con un valor nulo, entonces la solución encontrada sí es solución del problema original y será degenerada ya que tendrá menos de *m* valores positivos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Supongamos al siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 15x_1 + 25x_2 \\
&\text{sa} \\
&5x_1 + 6x_2 \le 50 \\
&8x_1 + 4x_2 \ge 30 \\
&\qquad\quad x_2 \le 5 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Para comenzar el método Simplex, primero debemos expresar el problema en forma estándar (agregamos las variables de holgura/excedente)

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 15x_1 + 25x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
&\text{sa} \\
&5x_1 + 6x_2 + S_1 = 50 \\
&8x_1 + 4x_2 - S_2 = 30 \\
&\qquad\quad x_2 + S_3 = 5 \\
&x_1, x_2, S_1, S_2 \text{ y } S_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Calculamos el número de variables: *n*=5 y la cantidad de ecuaciones de restricción linealmente independientes: *m*=3. Luego, analizamos a la matriz A para identificar los *m* vectores unitarios que formen la matriz identidad.

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
5	6	**1**	0	**0**
8	4	**0**	-1	**0**
0	1	**0**	0	**1**

Observemos que en la matriz A falta el vector unitario:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para generar este vector, se modifica el problema original agregando nuevas variables que, como no son parte del problema original, se las llama variables artificiales. Recordemos que estas variables se agregan solamente como un artificio matemático a los fines de generar una solución básica de partida, pero *no son variables del problema original*.

En este ejemplo, como el problema es de maximización, en la función objetivo deben agregarse restadas y precedidas de un coeficiente muy grande.

Recordemos además que, encontraremos una primera solución del problema original cuando la variable artificial (A_1) haya salido de la base.

El problema original modificado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 15x_1 + 25x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MA_1 \\
&\text{sa} \\
&5x_1 + 6x_2 + S_1 = 50 \\
&8x_1 + 4x_2 - S_2 + A_1 = 30 \\
&\qquad\quad x_2 + S_3 = 5 \\
&x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \text{ y } A_1 \ge 0
\end{aligned}$$

Se utilizó –M como coeficiente de A_1, pero podría reemplazarse por un valor numérico grande, que sea por lo menos 100 veces más que el mayor cj.

Si se analiza la matriz A, encontramos los *m* vectores unitarios:

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1
5	6	**1**	0	**0**	**0**
8	4	**0**	-1	**0**	**1**
0	1	**0**	0	**1**	**0**

La primera solución básica estará formada por S_1, S_2 y A_1 como variables básicas y x_1, x_2 y S_2como variables no básicas.

Tablas Simplex:

		c_B	15	25	0	0	0	-M	
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	
0	S_1	50	**5**	6	1	0	0	0	10
-M	**A_1**	**30**	**8**	**4**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**3,75**
0	S_3	5	**0**	1	0	0	1	0	---
	z_j	----	-8M	-4M	0	M	0	-M	
		$c_j - z_j$	**15+8M**	25+4M	0	-M	0	0	

Tabla 13

La variable que entra es x_1 y sale A_1. Como la variable artificial no es parte del problema original, se puede eliminar su columna ya que no puede volver a entrar a la base, así la nueva tabla es:

		c_B	15	25	0	0	0	
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	**x_2**	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	31,25	0	**3,5**	1	0,625	0	8,92
15	x_1	3,75	1	**0,5**	0	-0,125	0	7,5
0	**S_3**	**5**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**5**
	z_j	56,25	15	7,5	0	-1,875	0	
		$c_j - z_j$	0	**17,5**	0	1,875	0	

Tabla 14

Aún no llegamos a la solución óptima, la variable que entra es x_2 y la que sale es S_3.

ara el cálculo de θ o se consideran los ocientes para las las de x_1 y x_2 porque ›s denominadores on negativo y nulo espectivamente.

		c_B	15	25	0	0	0	
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	**S_2**	S_3	
0	**S_1**	**13,75**	**0**	**0**	**1**	**0,625**	**-3,5**	**22**
15	x_1	1,25	1	0	0	**-0,125**	-0,5	----
25	x_2	5	0	1	0	**0**	1	----
	z_j	143,75	15	25	0	-1,875	17,5	
		$c_j - z_j$	0	0	0	**1,875**	-17,5	

Tabla 15

Luego de una iteración más obtenemos la tabla óptima:

		c_B	15	25	0	0	0
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	S_2	22	0	0	1,6	1	-5,6
15	x_1	4	1	0	0,2	0	-1,2
25	x_2	5	0	1	0	0	1
	z_j	185	15	25	3	0	7
		$c_j - z_j$	0	0	-3	0	-7

Tabla 16

La solución óptima es:

$x_1 = 4$
$x_2 = 5$
$S_1 = 0$
$S_2 = 22$
$S_3 = 0$

Z = 185

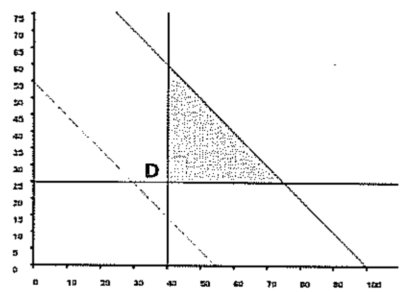
9. CASOS PARTICULARES

Al resolver un problema de PL, pueden presentarse situaciones especiales, las cuales se conocen con el nombre de "casos particulares".

9.1. PROBLEMA CON MÚLTIPLES SOLUCIONES ÓPTIMAS

Observe el siguiente PL y su solución gráfica:

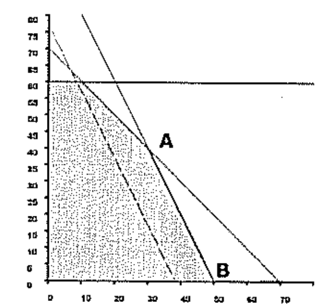
$$\begin{aligned} &\min\ 80x_1 + 80x_2 \\ &\text{sa} \\ &5x_1 + 5x_2 \le 500 \\ &x_1 \ge 40 \\ &x_2 \ge 25 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



Observe que la recta z es paralela a una restricción.

Compare el gráfico anterior con el del PL que se da a continuación:

$$\begin{aligned} &\max\ 80x_1 + 40x_2 \\ &\text{sa} \\ &5x_1 + 5x_2 \le 350 \\ &12x_1 + 6x_2 \le 600 \\ &x_2 \le 60 \\ &x_1, x_2 \end{aligned}$$



En este caso la recta de isoutilidad (z) también es paralela a una de las restricciones.

La diferencia entre los dos casos mostrados es que en el segundo, la recta z es paralela a una restricción limitante. Esto implica que existirán dos vértices que son óptimos, el A y el B, y además todos los puntos que forman el segmento de recta que los une.

La tabla óptima del simplex del problema de maximización es:

		c_B	80	40	0	0	0	
c_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	100	0	2,5	1	0	-0,417	40= θ
80	x_1	50	1	0,5	0	0	0,083	100
0	S_2	60	0	1	0	1	0	60
	z_j	4000	80	40	0	0	6,67	
		$c_j - z_j$	0	**0**	0	0	-6,67	

Tabla 17

Observe que la diferencia $c_2 - z_2$ es igual a cero y la variable x_2 no es básica.

Esto significa que si introducimos x_2 a la base y eliminamos la que corresponda, en este caso S_1, obtendremos otra solución que le dará a z el mismo valor. Esto es así, porque según el Teorema que fundamente el Método Simplex[6], el valor de una nueva solución se obtiene calculando,

$$Z_{nuevo} = Z_0 + (C_j - Z_j)\theta$$
$$Z_{nuevo} = 4000 + 0(40) = 4000$$

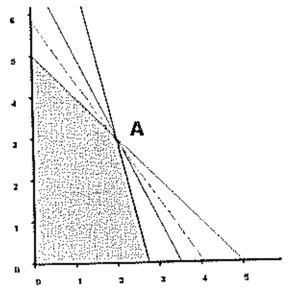
Luego, de acuerdo al Teorema 2, mediante combinaciones lineales convexas podemos obtener infinitas soluciones óptimas.

Este caso especial se origina cuando el conjunto de soluciones óptimas está formado por más de un elemento, por lo que, de acuerdo al teorema 1 y 2 de combinaciones lineales convexas, decimos que el problema posee una infinidad de soluciones óptimas.

9.2. PROBLEMA CON SOLUCIONES DEGENERADAS

Analicemos la solución gráfica del siguiente PL:

$$\begin{aligned} &\max\ 20x_1 + 14x_2 \\ &\text{sa} \\ &8x_1 + 4x_2 \le 28 \\ &2x_1 + 2x_2 \le 10 \\ &8x_1 + 2x_2 \le 22 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



En el vértice óptimo se intersectan tres restricciones, podríamos decir que el vértice A está sobre definido. Esto hace que en ese punto se anulen más de n-m variables y por lo tanto que la solución sea degenerada.

Veamos ahora las últimas dos tablas simplex para este problema:

[6] Ver la demostración de este Teorema en el Anexo 1 al final de este Capítulo.

		c_B	20	14	0	0	0	
c_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	8	4	0	1	0	-2	**2**
0	S_2	12	6	0	0	1	-1	**2**
14	X_2	5	1	1	0	0	0,5	5
	z_j	70	14	14	0	0	0	
		$c_j - z_j$	6	0	0	0	-7	

Tabla 18

Observe que existe un empate entre S_1 y S_2 al decidir la variable que sale de la base. En principio, se puede seleccionar como variable de salida a cualquiera de las dos. Si elegimos sacar S_2 (tabla 19) se observa que S_1 se hace nula en la columna VLD. En este caso la solución encontrada es una solución degenerada

		c_B	20	14	0	0	0
c_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
0	**S_1**	**0**	0	0	1	-0,667	-1,33
20	x_1	2	1	0	0	0,167	-0,167
14	x_2	3	0	1	0	-0,167	0,667
	z_j	82	20	14	0	1	6
		$c_j - z_j$	0	0	0	-1	-6

Tabla 19

A partir de la tabla 18, realice los cálculos con S_1 como variable de salida y observe qué sucede.

Una situación similar se presenta si se seleccionara S_2 como variable de salida.

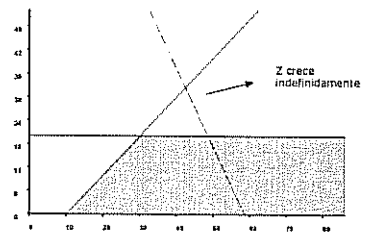
La degeneración se observa cuando el vector solución verifica menos de m valores positivos o más de $(n - m)$ valores nulos.

Recordemos que también se presenta un caso de problema degenerado cuando en la solución óptima quedan variables artificiales nulas.

9.3. PROBLEMA NO ACOTADO

A continuación se muestra un PL y su solución gráfica

$$\begin{aligned} &\text{Max } 2x_1 + x_2 \\ &\text{sa} \\ &x_1 - x_2 \ge 10 \\ &\quad x_2 \le 20 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



Observe que la recta z puede ser desplazada en su sentido de optimidad sin llegar nunca al óptimo.

Esta situación en la tabla simplex:

		c_B	2	1	0	0
c_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2
2	x_1	30	1	0	**-1**	0,5
1	x_2	20	0	1	**0**	0,5
	z_j	80	2	1	**-2**	1,5
		$c_j - z_j$	0	0	2	-1,5

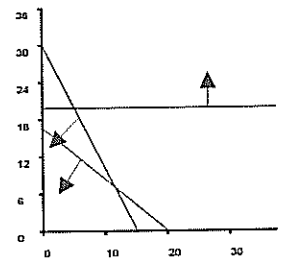
Tabla 20

Es imposible seleccionar la variable que sale, ya que todos los elementos de la columna de S_1 son negativos y ceros. En este caso debe detenerse

el proceso y revisar el planteo, puesto que esto surge justamente de un error en la modelización del problema.
Podemos decir que un PL es no acotado cuando el conjunto de soluciones factibles es un conjunto convexo abierto y el sentido de optimización del funcional se dirige hacia la zona no acotada del mismo.

9.4. PROBLEMA INCOMPATIBLE

$$
\begin{aligned}
&\max\ 20x_1 + 30x_2 \\
&\text{sa} \\
&10x_1 + 5x_2 \le 150 \\
&5x_1 + 6x_2 \le 100 \\
&x_2 \ge 20 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



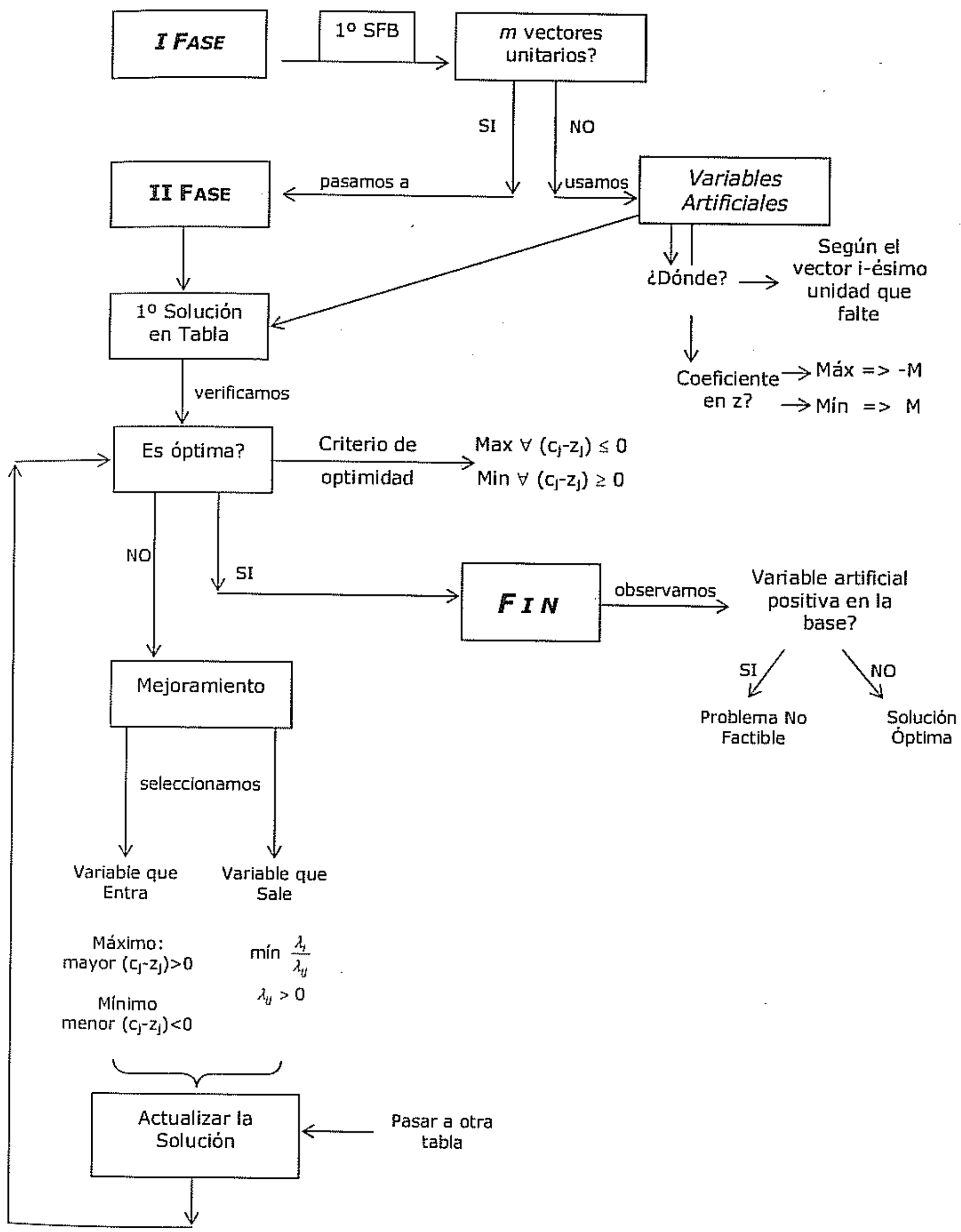
En el gráfico se puede ver que no existe una región factible. El sistema de restricciones es incompatible.

		c_B	20	30	0	0	0	-1000
c_B	Base	VLD	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1
0	S_1	66,667	5,834	0	1	-0,834	0	0
30	x_2	16,667	0,834	1	0	0,167	0	0
-1000	A_1	3,334	-0,834	0	0	-0,167	-1	1
	z_j	------	858,334	30	0	171,66	1000	-1000
		$c_j - z_j$	-838.34	0	0	-171,66	-1000	0

Tabla 21

En la tabla se observa que el criterio de optimidad indica que es la solución óptima, sin embargo como ha quedado en la base una variable artificial positiva, concluimos que el problema original es incompatible o no factible.

DIAGRAMA DEL MÉTODO SIMPLEX



10. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA TABLA SIMPLEX

Antes de comenzar con el análisis de post-optimidad, vamos a realizar una interpretación de cada uno de los elementos de la tabla simplex. Este tema se conoce también como análisis económico del método Simplex.

Continuaremos con nuestro problema de la producción de cerámicos, recordemos los requerimientos de insumos, como así también la contribución a las utilidades de cada producto:

	Cerámico Esmaltado	Cerámico Rústico	Disponibilidad hrs. mensuales
Horas de Mano de Obra / m^2	5	5	300
Horas de Secado / m^2	4	8	400
Horas de Cocción / m^2	6	4	320
Contrib.a las utilidades / m^2	8	6	

Tabla 22

Objetivo: Maximizar la contribución total a las utilidades mensuales.

Definición de variables:
x_1 = m^2 de cerámico esmaltado a producir mensualmente.
x_2 = m^2 de cerámico rústico a producir mensualmente.

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = 8x_1 + 6x_2 & \\ \text{S.a.} & \\ 5x_1 + 5x_2 \le 300 & \text{Hrs. M O} \\ 4x_1 + 8x_2 \le 400 & \text{Hrs. Secado} \\ 6x_1 + 4x_2 \le 320 & \text{Hrs. Cocción} \\ x_1, x_2 \ge 0 & \end{array}$$

Agregamos variables de holgura,

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 & \\ \text{S.a.} & \\ 5x_1 + 5x_2 + S_1 = 300 & \text{Hrs. M O} \\ 4x_1 + 8x_2 + S_2 = 400 & \text{Hrs. Secado} \\ 6x_1 + 4x_2 + S_3 = 320 & \text{Hrs. Cocción} \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0 & \end{array}$$

S_1= cantidad de sobrante de horas de mano de obra.
S_2= cantidad de sobrante de horas de secado.
S_3= cantidad de sobrante de horas de cocción.

La tabla que se muestra a continuación es la que se obtiene luego de una iteración de Simplex:

		c_B	8	6	0	0	0	
c_B	**Base**	**VLD**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	200/6	0	10/6	1	0	-5/6	20
0	S_2	1120/6	0	32/6	0	1	-4/6	35
8	x_1	320/6	1	4/6	0	0	1/6	80
	z_j	1280/3	8	32/6	0	0	8/6	
		$c_j - z_j$	0	4/6	0	0	-8/6	

Tabla 23

Según esta solución, produciendo 320/6 m^2 de cerámico esmaltado y nada de cerámico rústico, se tendrá un beneficio de $ 1280/3.

Con este plan de producción se usarán todas las horas de cocción, quedando un excedente de 200/6 horas de mano de obra y 1120/6 horas de secado.

Además podemos decir que el plan de producción no es el óptimo y por lo tanto no se obtiene la máxima contribución a las utilidades posible.

Vamos a analizar qué sucede si decidimos producir algunos m^2 de cerámico rústico, que según este plan no estamos fabricando.

Para producir un m^2 de rústico necesitamos 5 horas de mano de obra, 8 horas de secado y 4 horas de cocción. Con las HMO y horas de secado no hay inconvenientes, ya que en este momento tenemos excedentes; no ocurre lo mismo con las horas de cocción debido a que -para el plan de producción actual- se trata de un recurso limitante (variable de holgura nula).

Es decir que, si queremos producir un m^2 de cerámico rústico necesariamente deberemos dejar de fabricar algo del cerámico esmaltado, para así poder liberar horas de cocción.

Al disminuir la producción del cerámico esmaltado, para poder fabricar cerámico rústico, sufrirán también modificaciones los excedentes de los otros insumos.

Todo este análisis, como así también la modificación que se producirá en el objetivo, lo encontramos en la columna correspondiente a x_2.

		c_B	6
c_B	**Base**	**VLD**	x_2
0	S_1	200/6	10/6
0	S_2	1120/6	32/6
8	x_1	320/6	4/6
	z_j	1280/3	32/6
		$c_j - z_j$	4/6

Cuánto se deberá disminuir la producción de cerámico esmaltado para poder producir 1 m^2 de cerámico rústico

Tasa de sustitución λ_{ij}

Z_2 =contribución que se pierde por unidad que se fabrique

C_2-Z_2 = incremento marginal unitario de Z

Tasas de sustitución: en general indican, si su signo es positivo, el "sacrificio" que se deberá hacer de la variable básica x_i para incrementar en una unidad la variable no básica x_j. Si la tasa de sustitución es negativa indica el incremento que se producirá en la variable básica.

En nuestro ejemplo 4/6 significa que, para poder fabricar un m^2 de cerámico rústico, deberemos dejar de producir 4/6 de m^2 de cerámico esmaltado.

Esto se debe a que para poder producir un m^2 de cerámico rústico se necesitan 4 horas de cocción, mientras que para producir un m^2 del cerámico esmaltado se necesitan 6 horas de cocción; entonces si se dejan de fabricar 4/6 m^2 del cerámico esmaltado, tendremos:

$$\underbrace{6}_{\text{horas de cocción por m}^2\text{ de cerámico esmaltado}} \cdot \underbrace{4/6}_{\text{m}^2\text{ de cerámico esmaltado a disminuir}} = 4 \longrightarrow \text{horas de cocción liberadas en la producción del cerámico esmaltado (que son las que necesitamos para producir un m}^2\text{ de cerámico rústico).}$$

El valor λ_{12}=10/6, nos dice que por cada m^2 que se incremente la producción de cerámico rústico, el excedente de HMO se reducirá en 10/6.

Mientras que λ_{22} = 32/6, indica que por cada m^2 que se incremente la producción de cerámico rústico, el excedente de horas de secado se reducirá en 32/6.

En cuanto a Z_j expresa la **contribución que se pierde por m^2 que se fabrica de cerámico rústico** - originado por la reducción de la producción de cerámico esmaltado-. Es decir, Z_1 = 32/6 expresa que el cambio que se necesita realizar en el plan de producción, para poder fabricar un m^2 de cerámico rústico, disminuye la contribución a las utilidades en \$32/6.

Comparando este "costo" con la contribución unitaria de cerámico rústico, podremos decidir si nos conviene o no hacer dicha modificación en el plan de producción, es decir:

$$C_2 - Z_2 = 6 - 32/6 = 4/6$$

Este valor representa el **incremento neto unitario de la función objetivo**, como es positivo, lógicamente nos convendrá fabricar el cerámico rústico, ya que por cada m^2, la contribución total a las utilidades crecerá en \$ 4/6.

Si nos conviene fabricar un m^2, entonces nuestra intención será producir todos los m^2 que se puedan. Así el paso siguiente es determinar cuántas unidades podremos fabricar con los recursos que tenemos.

Vamos a llamar θ a esa cantidad. Para encontrar el valor de θ usamos las tasas de sustitución de la siguiente manera:

Sabemos que por cada unidad en que se aumente x_2, x_1 disminuirá en 4/6; la pregunta es:

¿Hasta cuántos m^2 se puede disminuir x_1?

Seguramente coincidiremos en que lo máximo que puede disminuirse es 320/6 (la producción actual), ya que todas las variables deben respetar la restricción de no negatividad.

Podemos escribir esto de la siguiente manera:

$$4/6\ \theta \leq 320/6$$

Usando para los excedentes de horas de mano de obra (S_1) y horas de secado (S_2), el mismo razonamiento que para x_1, podemos escribir las siguientes inecuaciones:

$$10/6\ \theta \leq 200/6$$
$$32/6\ \theta \leq 1120/6$$

El valor de θ que cumpla con las tres inecuaciones, será el nuevo valor para x_2.

Resolviendo:

$$10/6\ \theta \leq 200/6 \Rightarrow \theta \leq 20$$
$$32/6\ \theta \leq 1120/6 \Rightarrow \theta \leq 35$$
$$4/6\ \theta \leq 320/6 \Rightarrow \theta \leq 80$$

Vemos que el nuevo valor de x_2 es 20 (el único valor que verifica las tres inecuaciones)

Utilizando todo lo que tenemos hasta ahora podemos conocer la solución completa.

Valores de las variables:

$$x_1 = 320/6 - (20 \cdot 4/6) = 40$$
$$x_2 = 20$$
$$S_1 = 200/6 - (20 \cdot 10/6) = 0$$
$$S_2 = 1120/6 - (20 \cdot 32/6) = 80$$
$$S_3 = 0$$

El nuevo valor de Z:

$$Z = 1280/3 + (20 \cdot 4/6) = 440$$

En forma general y de acuerdo a lo demostrado en el teorema fundamental del método simplex, podemos decir que los valores de las variables para la nueva solución se calculan como:

$$x_i = \lambda_i - \theta\lambda_{ij} \quad (i = 1...m)$$
$$x_j = \theta$$
$$x_k = 0 \quad (k \neq 1, 2, ...m, j)$$

Mientras que el nuevo valor del funcional es:

$$z_0 + \theta\,(c_j - z_j)$$

ANEXO 1

MODELO DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Formalmente un modelo de Programación Matemática tiene la siguiente estructura:

$$\text{Óptimo } z = f(\mathbf{x})$$

Sujeto a:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \quad \text{para } i \in \mathbb{I}_1$$
$$g_i(\mathbf{x}) \geq b_i \quad \text{para } i \in \mathbb{I}_2$$
$$g_i(\mathbf{x}) = b_i \quad \text{para } i \in \mathbb{I}_3$$

Siendo $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$, e $\mathbb{I}_3$ una partición del conjunto de índices $\mathbb{I} = \{1, 2, ..., m\}$.

Donde m representa el número total de ecuaciones y/o inecuaciones de restricción existentes en el modelo.
Podemos decir que estamos frente a un problema de Programación Matemática si el mismo trata de optimizar (maximizar o minimizar) una función donde las variables pueden asumir únicamente los valores que verifican un conjunto de restricciones expresadas como ecuaciones y/o inecuaciones.

De acuerdo a las características de la función objetivo y las restricciones, un modelo de Programación Matemática, puede ser de:

- ✓ Programación Lineal: cuando la función objetivo y todas las restricciones son lineales.
- ✓ Programación Entera: si algunas o todas las variables de modelo deben ser enteras.
- ✓ Programación No Lineal: cuando la función objetivo y/o alguna o todas las restricciones son no lineales.
- ✓ Programación Multiobjetivo: cuando existe más de una función objetivo.

ANEXO 2

TEOREMA QUE FUNDAMENTA EL MÉTODO SIMPLEX

Dantzing desarrolló el método Simplex basándose en el teorema fundamental de la PL que sostiene que: "Si un problema de PL es resoluble, existe al menos una solución posible básica que será también óptima". Por esta razón es que sólo consideramos las soluciones de los vértices del poliedro y descartamos las de punto interior.

Partimos de un PL expresado en forma estándar vectorial:

$$\text{Max } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

sa

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots\ldots + P_n x_n = P_0 \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

Consideramos conocida un solución factible (posible) básica (SFBND) de este problema, en la que suponemos que los m valores positivos son los m primeros (es decir que los nulos serán los n-m restantes). Llamaremos a cada elemento de este vector solución λ_i , es decir:

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \\ . \\ . \\ \lambda_m > 0 \\ \lambda_{m+1} = 0 \\ . \\ \lambda_n = 0 \end{bmatrix}$$

Siendo una solución verificará (2) y le dará a z un valor z_0 , es decir:

$$z_0 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + \ldots\ldots + c_m \lambda_m \qquad (3)$$

sa

$$P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2 + \ldots\ldots + P_m \lambda_m = P_0 \qquad (4)$$

Al ser una SFB los vectores P_1, P_2,........,P_m son linealmente independientes (es decir constituyen una base en el espacio m-dimensional) por lo que podremos expresar cualquier vector no básico como combinación lineal de ellos.

Tomemos un vector no básico cualquiera (P_j para j = m+1, m+2, ..., n.) y lo expresemos como combinación lineal de los vectores básicos (P_i, i = 1, 2, ..., m) mediante escalares que llamaremos λ_{ij}

$$P_1 \lambda_{1j} + P_2 \lambda_{2j} + \ldots\ldots + P_m \lambda_{mj} = P_j \qquad (5)$$

Además con los mismos escalares definimos la igualdad:

$$z_j = c_1 \lambda_{1j} + c_2 \lambda_{2j} + \ldots\ldots + c_m \lambda_{mj} \qquad (6)$$

Con todos estos elementos pasamos a enunciar el teorema:

"Si para alguna j se verifica que $c_j > z_j$, será posible encontrar al menos una solución posible tal que:

$$z > z_0 \text{"}$$

Siendo z_0 el valor del funcional para la solución actual y z el valor del funcional para la nueva solución.

Para demostrarlo multiplicamos ambos miembros de (5) y (6) por un parámetro θ y luego restamos de (4) y (3); es decir:

$$(4) - \theta\,(5)$$

$$(3) - \theta\,(6)$$

$$P_1 (\lambda_1 - \theta \lambda_{1j}) + P_2 (\lambda_2 - \theta \lambda_{2j}) + \ldots\ldots + P_m (\lambda_m - \theta \lambda_{mj}) = P_0 - \theta P_j \quad (7)$$

$$z_0 - \theta z_j = c_1 (\lambda_1 - \theta \lambda_{1j}) + c_2 (\lambda_2 - \theta \lambda_{2j}) + \ldots\ldots + c_m (\lambda_m - \theta \lambda_{mj}) \quad (8)$$

En (7) despejamos P_0

$$P_1 (\lambda_1 - \theta \lambda_{1j}) + P_2 (\lambda_2 - \theta \lambda_{2j}) + \ldots\ldots + P_m (\lambda_m - \theta \lambda_{mj}) + \theta P_j = P_0 \quad (9)$$

En (8) sumamos $c_j \theta$ en ambos miembros:

$$z_0 + \theta (c_j - z_j) = c_1 (\lambda_1 - \theta \lambda_{1j}) + c_2 (\lambda_2 - \theta \lambda_{2j}) + \ldots + c_m (\lambda_m - \theta \lambda_{mj}) + c_j \theta \quad (10)$$

Observe que, el vector formado por:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \theta\lambda_{1j} \\ \lambda_2 - \theta\lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_m - \theta\lambda_{mj} \\ \theta \end{bmatrix}$$

Es una solución del programa lineal puesto que verifica (4).

Asimismo, siendo las λ_i (i = 1.....m) todas positivas por hipótesis, es evidente que existirán valores positivos de θ que verifiquen:

$$\lambda_i - \theta \lambda_{ij} \geq 0 \quad (i = 1\ldots.m) \qquad (11)$$

En consecuencia, para cualquier valor de θ que verifique (11), podemos afirmar que los valores:

$$x_i = \lambda_i - \theta\lambda_{ij} \quad (i = 1...m)$$
$$x_j = \theta \qquad (12)$$
$$x_k = 0 \quad (k \neq 1, 2, ...m, j)$$

Constituyen una solución posible ya que verifica el sistema de restricciones (9) y le da al funcional un valor en (10) igual a:

$$z_0 + \theta\,(c_j - z_j)$$

Con lo cual hemos demostrado el teorema puesto que:

$$z = z_0 + \theta\,(c_j - z_j) > z_0 \qquad (13)$$

Ahora bien, como nuestro objetivo es maximizar z, será conveniente que z crezca lo más posible, para lo cual resulta lógico pensar que θ deberá asumir el mayor valor que el sistema de ecuaciones (11) le permita, de donde se deduce que el mayor valor que θ puede asumir es

$$\theta = \min \frac{\lambda_i}{\lambda_{ij}} \qquad \text{para } \lambda_{ij} > 0 \qquad (14)$$

Obsérvese que si para alguna j, donde se verifica $c_j > z_j$, "todos" los $\lambda_{ij} \leq 0$, entonces θ no tendrá límite superior, con lo cual tampoco lo tendrá z (es función creciente de θ según (13)) y estaremos ante el caso de un funcional **no acotado**.

La nueva solución factible básica encontrada en (12) es utilizada como una nueva base, a partir de la cual y desarrollándose todo el proceso descripto, podemos ir encontrando nuevas SFB con valores cada vez mejores del funcional siempre que para alguna j se verifique $c_j > z_j$ exista al menos un i que cumpla con (14).

El proceso se detendrá cuando para todo j se verifique que:

$$c_j \leq z_j$$

La demostración puede consultarse en Pérez Mackeprang C.: "Introducción a la PL y sus aplicaciones" FCE.

APLICACIÓN DEL TEOREMA CON UN EJEMPLO

Consideremos el problema lineal:

$$\text{Max } Z = 8\,x_1 + 6\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_4$$

Sa

$$\begin{aligned} 5\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 300 \\ 4\,x_1 + 8\,x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 400 \\ 6\,x_1 + 4\,x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 320 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = 1, ..., 5)$$

Del cual suponemos conocida la siguiente solución factible básica no degenerada:

$$\lambda_1 = 320/6; \qquad \lambda_2 = 0; \qquad \lambda_3 = 200/6; \quad \lambda_4 = 1120/6 \quad y \quad \lambda_5 = 0$$

Esta solución, otorga a la función objetivo el valor:

$$z_0 = 1280/3$$

Analizaremos que ocurre si intentamos introducir a la base la variable x_2. Para ello, planteamos expresar el vector no básico P_2 mediante la combinación lineal de los vectores que corresponden a las variables básicas, es decir:

$$P_1\,\lambda_{12} + P_3\,\lambda_{32} + P_4\,\lambda_{42} = P_2$$

$$\begin{bmatrix}5\\4\\6\end{bmatrix}\lambda_{12} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\lambda_{32} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\lambda_{42} = \begin{bmatrix}5\\8\\4\end{bmatrix};$$

Resolviendo este sistema, obtenemos el valor de los escalares :

$\lambda_{12} = 4/6$

$\lambda_{32} = 10/6$

$\lambda_{42} = 32/6$

Observemos que cada λ_{ij} mide la reducción que se debe realizar en el valor de las variables básicas i (i= 1, 3, 4), a fin de liberar los recursos necesarios para introducir una unidad de x_2.

Calculamos además:

$$z_2 = c_1\,\lambda_{12} + c_3\,\lambda_{32} + c_4\,\lambda_{42} = 8\,(4/6) + 0\,(10/6) + 0\,(32/6) = 32/6$$

El valor z_2 mide el costo de introducir a la base la variable no básica x_2 (a nivel unitario), medido en términos de la reducción que debe efectuarse en las variables básicas.

A partir de este valor calculamos la contribución neta que se obtendrá por producir una unidad de x_2:

$$c_2 - z_2 = 6 - 32/6 = 4/6$$

De acuerdo al teorema que fundamenta el método Simplex, como $c_2 > z_2$, podemos mejorar la solución actual, si introducimos a la base la variable x_2.

Dado que producir a nivel unitario x_2 mejora el objetivo en 4/6, es lógico intentar ingresar esta variable al mayor valor posible (es decir, aquel valor permitido por la disponibilidad de insumos). Llamaremos θ a ese valor y planteamos las siguientes relaciones que nos permitirán calcular el mayor valor al cual se puede ingresar x_2:

$\lambda_1 - \theta\ \lambda_{12} \geq 0;\quad 320/6 - (4/6\ \theta) \geq 0;\quad \theta = 80$

$\lambda_3 - \theta\ \lambda_{32} \geq 0;\quad 200/6 - (10/6\ \theta) \geq 0;\quad \theta = 20$

$\lambda_4 - \theta\ \lambda_{42} \geq 0;\quad 1120/6 - (32/6\ \theta) \geq 0;\ \theta = 35$

De donde $\theta = 20$, es el valor que verifica el sistema de inecuaciones y por lo tanto decimos que es el valor al cual ingresará la variable x_2 a la base en la próxima solución.

Para conocer cómo se modifican las variables básicas en la nueva solución, calculamos:

$x_1 = \lambda_1 - \theta\ \lambda_{12} = 320/6 - (20\ \ 4/6) = 40$

$x_3 = \lambda_3 - \theta\ \lambda_{32} = 200/6 - (20\ \ 10/6) = 0$

$x_4 = \lambda_4 - \theta\ \lambda_{42} = 320/6 - (20\ \ 4/6) = 80$

Resumiendo, el vector correspondiente a la nueva solución es:

$$X = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix};$$

El valor de z para esta nueva solucion lo calculamos como:

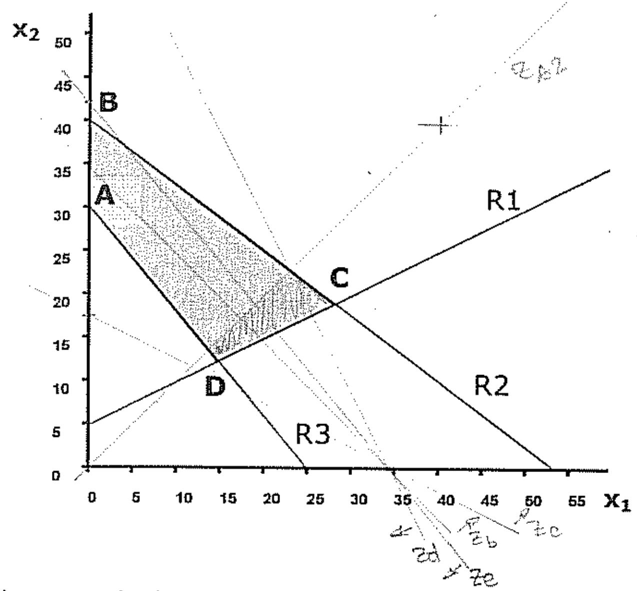
$$z = z_0 + \theta\left(c_2 - z_2\right) = 1280/3 + 20\ (4/6) = 440$$

El proceso se repite hasta que $\forall\ j\ \therefore\ c_j \leq z_j$

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

En base al análisis del siguiente gráfico responda:



a) Cuáles restricciones son limitantes en cada uno de los vértices del poliedro de soluciones.

b) Si el objetivo es maximizar $30x_1 + 30x_2$
¿Cuál es el vértice óptimo?
¿Cuáles variables son básicas en ese vértice?

c) Si el objetivo es maximizar $30x_1 + 60x_2$
¿Cuál es el vértice óptimo?
¿Cuáles variables son básicas en ese vértice?

d) Si el objetivo es minimizar $30x_1 + 15x_2$
¿Cuál es el vértice óptimo?
¿Cuáles variables son básicas en ese vértice?

e) A qué conclusión arribaría si el objetivo es minimizar $30x_1 + 25x_2$

f) Podría arribar a la misma conclusión si el objetivo fuera maximizar $30x_1 + 25x_2$

ACTIVIDAD 2

Cuál será la región factible si al gráfico del problema anterior se le agrega la restricción: $x_1 \geq x_2$

ACTIVIDAD 3

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para la solución óptima de un de un PL?

(a) Todo programa lineal tiene una solución óptima. F
(b) La solución óptima utiliza todos los recursos disponibles. F
(c) Si la solución óptima existe, ocurre en al menos un vértice de la región factible. V
(d) Tanto (a) como (b) son verdaderas. F
(e) Ninguna de las anteriores. F

ACTIVIDAD 4

Sea x_1 el número de unidades producidas y x_2 el número de unidades compradas. Si el costo unitario de producción es de \$2.-, el de adquisición de \$3 y la demanda de 4000 unidades, entonces la función objetivo será:

(a) Max $2x_1 + 3x_2$
(b) Min $4000(x_1 + x_2)$
(c) Max $8000x_1 + 12000x_2$
V (d) Min $2x_1 + 3x_2$
(e) ninguna de las anteriores

ACTIVIDAD 5

Marque la o las alternativas correctas. En un PL, la degeneración ocurre cuando:

V (a) Existe una diferencia $c_j - z_j = 0$ para alguna variable no básica.
(b) Existe una diferencia $c_j - z_j = 0$ para alguna variable básica.
(c) Se produce un empate al decidir la variable que entra a la base.
V (d) Se produce un empate al decidir la variable que sale de la base.
(e) Ninguna de las anteriores.

ACTIVIDAD 6

RESPONDA VERDADERO O FALSO

F A. "La región factible de un PL es el conjunto de todos los puntos que satisfacen por lo menos una restricción".

F B. "El conjunto de soluciones factibles de un problema lineal siempre es infinito".

F C. "Si el conjunto de soluciones factibles óptimas es el conjunto vacío, entonces necesariamente el conjunto de soluciones factibles debe ser también vacío"

F D. "Dado un PL con 7 variables y 4 ecuaciones de restricción linealmente independientes. Si una solución del mismo posee 5 variables positivas y 2 nulas, decimos que es una solución factible básica degenerada".

F E. "Las soluciones no básicas de un PL siempre están ubicadas en la frontera del poliedro de soluciones"

V F. "Las variables de holgura/excedente pueden ser positivas, negativas o nulas según el tipo de restricción en la que se agregan".

V G. "Para un modelo de PL de maximización, la regla de entrada en el método simplex, garantiza que la función objetivo no decrecerá en cada recorrido".

F H. "En simplex, la no factibilidad (sin solución) ocurrirá siempre que exista un empate al seleccionar la variable de salida".

F I. "Con el método simplex se sabe que, la degeneración ocurrirá siempre que exista un empate al seleccionar la variable de entrada".

F J. "Si un programa lineal no es no factible, tiene solución óptima".

F K. "Usando el método simplex en un caso de maximización, y dado que el renglón z_j da la pérdida que resulta de incrementar en una unidad a la variable no básica x_j, podemos elegir la mejor variable para introducir a la base, seleccionando cualquier columna que tenga valor z_j negativo."

F L. "Dados dos puntos factibles **X*** y **X****, entonces todos los puntos situados sobre el segmento de recta que los une son factibles y **Z** tiene el mismo valor en todos esos puntos".

ACTIVIDAD 7

Suponga que no se hubiera eliminado la variable básica con el menor cociente λ_i / λ_{ij} para $\lambda_{ij} > 0$, en una iteración específica del simplex. ¿Qué efecto tendría esto sobre la tabla simplex para la siguiente solución?

VLD con valores negativos viola restricción de no negatividad

ACTIVIDAD 8

Si de un problema de PL de maximización, con 5 variables y 3 restricciones, se conoce la siguiente solución factible básica:

$$x_1 = \lambda_1 \qquad x_2 = \lambda_2 \qquad x_3 = \lambda_3 \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = 0$$

Esta solución da a la función objetivo el valor igual a Z_0
Se conocen también que

$$c_4 - z_4 > c_5 - z_5 > 0$$

y

$$\begin{array}{ll} \lambda_{14} & \lambda_{15} \\ \lambda_{24} & \lambda_{25} \\ \lambda_{34} & \lambda_{35} \end{array}$$

Indique para la próxima solución:
1) ¿Cuál es la variable que entra? X_4
2) ¿Cómo determina el valor de θ?
3) ¿Cuál es el valor de las variables en la próxima solución?
4) ¿Cómo se determina el valor de la función objetivo?

ACTIVIDAD 9

En la tabla simplex, para un problema de maximización, cómo se interpreta un valor $Z_4 = 10$, si X_4 es una variable de holgura?
Es el costo de liberar una unidad del recurso relacionado a la v holg.

ACTIVIDAD 10

Considerando la tabla simplex de un PL de maximización que se presenta a continuación se solicita:

			30	20	15	0	0
C_B	Base	VLD	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
15	X_3	5	0	0,5	1	-0,5	0
30	X_1	20	1	0,5	0	0,5	0
0	S_2	30	0	1,5	0	-0,5	1
	Z_j	675	30	22,5	15	7,5	0
		C_j-Z_j	0	-2,5	0	-7,5	0

Complete la tabla
a) ¿Es ésta la solución óptima? ¿Por qué? Si, todos los $C_j - Z_j \leq 0$
b) Si esta es la solución óptima, especifíquela $X = (20, 0, 5, 0, 30)$
c) Si no es la solución óptima realice las iteraciones necesarias para llegar a ella.

ACTIVIDAD 11

La siguiente tabla corresponde a un PL de maximización canónico (con restricciones del tipo $\leq$):

		C_j	15	10	20	0	0	0
C_B	Base	VLD	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
20	X_3	50	2/3	1/3	1	1/3	0	0
0	S_2	200	7/3	5/3	0	-1/3	1	0
0	S_3	300	-1/3	7/3	0	-2/3	0	1
	Z_j	1000	40/3	20/3	20	20/3	0	0
	$C_j - Z_j$		-5/3	-10/3	0	-20/3	0	0

a) Complete la tabla, ¿es esta la solución óptima? ¿Por qué?
b) Si no es la solución óptima realice las iteraciones necesarias para llegar a ella y especifíquela

ACTIVIDAD 12

Dado el PL

Max $z = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3$ Contribución Total a las Utilidades

Sujeto a:

$50x_1 + 50x_2 + 40x_3 \leq 3900$ Restricción de kilos de hierro
$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 600$ Restricción de Horas de Maquina
$6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 330$ Restricción de Horas de Mano de Obra.
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Donde
x_1: unidades de repuestos A a elaborar en una semana.
x_2 : unidades de repuestos B a elaborar en una semana.
x_3 : unidades de repuestos C a elaborar en una semana.

Resuelva utilizando simplex e informe la solución óptima

ACTIVIDAD 13

Una compañía de auditores se especializa en preparar liquidaciones y auditorías de empresas pequeñas. Tienen interés en saber cuántas auditorías y liquidaciones pueden realizar mensualmente para maximizar sus ingresos. Se dispone de 800 horas de trabajo directo y 320 horas para revisión. Una auditoría en promedio requiere de 40 horas de trabajo directo y 10 horas de revisión, además aporta un ingreso de \$ 300. Una liquidación de impuesto requiere de 8 horas de trabajo directo y de 5 horas de revisión, produce un ingreso de \$ 100. El máximo de liquidaciones mensuales disponibles es de 50.

A.- Plantear el problema y encontrar la solución óptima usando el método gráfico.
B.- Resuelva usando el método simplex.
C.- A partir de la solución encontrada, elabore un informe para el decisor.

ACTIVIDAD 14

SuperMovil SA fabrica dos tipos de teléfonos celulares (FX120 y FX128), los únicos recursos escasos en el proceso de fabricación son la mano de obra y los chips de potencia.

Actualmente, la compañía tiene dos trabajadores, el trabajador 1 que está dispuesto a trabajar hasta 40 horas a la semana y se le paga \$12 la hora y el trabajador 2 que está dispuesto a trabajar hasta 50 horas a la semana y se le paga \$10 la hora.

Las necesidades de mano de obra de cada modelo de teléfono se dan en la siguiente tabla:

NECESIDADES DE MANO DE OBRA	FX120	FX128
Trabajador 1	2	1
Trabajador 2	1	2

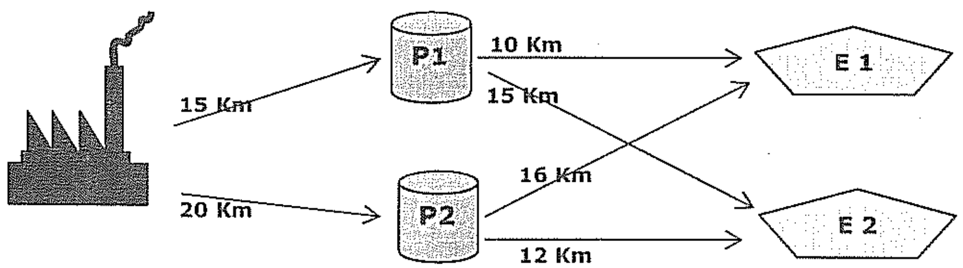
SuperMovil SA puede conseguir hasta 25 chips de potencia a la semana y la contribución unitaria a las utilidades de los teléfonos es de $30 y $20 respectivamente.
A.- Plantear el problema y encontrar la solución óptima usando el método gráfico.
B.- Resuelva usando el método simplex.
C.- A partir de la solución encontrada, elabore un informe para el decisor.

ACTIVIDAD 15

Para los siguientes problemas se solicita:
a) Definir verbalmente el objetivo.
b) Definir las variables de decisión.
c) Identificar verbalmente a las restricciones.
d) Plantear el modelo lineal.

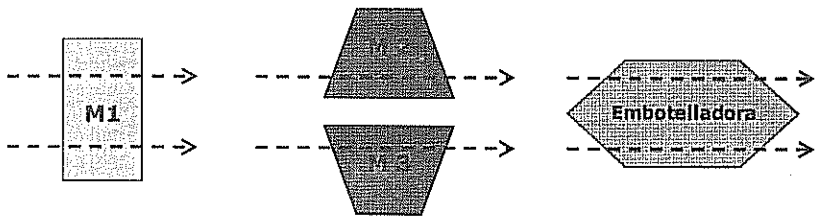
I. DESECHOS INDUSTRIALES

Una fábrica quiere minimizar los costos de deshacerse de las 100 Tn diarias de basura que produce, las que puede enviar a dos plantas procesadoras. En la Planta 1 (P1), el costo de procesamiento de la basura es de $ 15 por Tn. y en la Planta 2 (P2) es de $20 por Tn. Cada Planta procesadora puede recibir hasta 80 Tn por día. Cada tonelada de basura que entra en la P1 queda reducida a 0,25 Tn. de desechos industriales y en la P2 se reducen a 0,20 Tn. Estos desechos deben enviarse a uno de los dos enterramientos sanitarios existentes en la ciudad, los que tienen con capacidad de recibir hasta 30 tn por día cada uno. Las distancias en kilómetros desde la fábrica hasta cada planta y desde ellas a cada quemador, son las que se muestran en el gráfico.
El costo de transportar una tonelada de material, sea basura o desecho, es de $3 por kilómetro.



II. PROCESO PRODUCTIVO

Litoral SA elabora y vende jugo concentrado de naranja y de pomelo. La administración desea encontrar el plan de producción que maximice sus beneficios en función a su capacidad productiva y a la demanda de jugos, ya que en relación a la materia prima no existen problemas de abastecimiento.
Todo comienza con la transformación de la materia prima en derivados con mayor valor agregado, los más comunes son: aceite esencial, jugo concentrado y cáscara deshidratada.
Una vez que la fruta es seleccionada y clasificada pasa a la extracción de aceite esencial, el que se obtiene por raspado de la cáscara de la fruta bajo una corriente de agua, que arrastra el aceite esencial en forma de emulsión hasta las centrífugas encargadas de su recuperación.
A continuación la fruta pasa a la extracción de jugo. Esto se realiza en máquinas extractoras, que en una sola operación separan el jugo, las cáscaras, semillas y hollejos, y una emulsión de aceite esencial que contiene la fruta.
El jugo obtenido es tamizado, pasteurizado y concentrado. El jugo concentrado se envía a tanques refrigerados donde se homogeneiza su calidad y luego se embotella.
Esquemáticamente, el proceso productivo de los concentrados sigue el diagrama que se muestra a continuación.



La máquina 1 (M1) extrae el jugo de la fruta y separa la parte sólida. Por cada kg de naranjas se obtienen 0,70 lts de jugo y por kg. de pomelo se obtienen 0,65 lts. Esta máquina puede procesar hasta 125kg/hora, con un costo de 30$/hora.
El proceso de concentrado de jugo de naranja se realiza en la máquina 2 (M2) perdiéndose durante el mismo un 25% debido a la evaporación de líquido. La capacidad de procesamiento de esta máquina es de 55 lts/hs. a un costo de $80 por hora.
El concentrado de pomelo se obtiene en la M3, con un rendimiento del 70%. Esta máquina puede procesar hasta 60 lts de jugo de pomelo por hora a un costo $90 por hora.
Cada máquina puede trabajar como máximo 10 hs. por día.
Una vez terminado el proceso, el jugo es embotellado en envases de un litro, con un costo de $0,10 por envase. La embotelladora tiene una capacidad de 500 litros por día.

La información referida a costo de materia prima, precio de venta y demanda máxima del mercado, se presentan en la siguiente tabla:

	COSTO MATERIA PRIMA $/kg	PRECIO DE VENTA $/lts	DEMANDA MÁXIMA lts./día
NARANJA	0,75	5,00	500
POMELO	0,80	6,00	800

Actualmente la empresa tiene comprometida una entrega de jugo concentrado de naranjas, de 100 lts por día.

III. INVERSIONES

La AFJP *Seguridad SA* ha solicitado a un grupo de analistas financieros que le indiquen recomendaciones de inversión para el fondo de jubilaciones. Disposiciones del Estado hacen necesario diversificar las inversiones asignando el fondo entre los siguientes instrumentos: certificados de depósito (CD), bonos de tesorería (BT), acciones comunes (AC), acciones especulativas (AE), fondos comunes de inversión (FC). Los analistas han estimado un rendimiento anual para cada clase de inversión y han desarrollado un factor de riesgo para cada una de ellas. Este factor señala la probabilidad de que el rendimiento real de la inversión en esa clase sea inferior al rendimiento esperado. Esta información se presenta en la siguiente tabla:

Inversión	Rend. esper. anual (%)	Factor de Riesgo
CD	6,00	0,02
BT	12,00	0,42
AC	9,00	0,38
AE	14,30	0,45
FC	6,70	0,05

La AFJP ha señalado que el factor promedio ponderado de riesgo no debe ser superior a 0,20 y además que los Fondos Comunes de Inversión deben representar al menos el 50% del total. Por otro lado, las disposiciones reglamentarias prohíben que se invierta más del 25% en acciones especulativas y bonos de tesorería. ¿Que recomendaciones deben hacer los analistas si se pretende maximizar el rendimiento sobre la inversión?

IV. PERIODOS MÚLTIPLES –PRODUCCIÓN Y PLANEACIÓN DE INVENTARIOS

Estos modelos de periodos múltiples permiten establecer, para cada uno de los periodos considerados, un programa de producción y de inventarios finales que permita maximizar la contribución total o minimizar los costos.

La empresa CompuTar SA, fabricante de procesadores para computadoras, quiere determinar el programa anual de producción e inventario, que maximice su contribución total. La información relevante del problema, se da en la siguiente tabla:

TRIMESTRE	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN (UNIDADES)	DEMANDA (UNIDADES)	COSTO DE PRODUCCIÓN (UNITARIO)	PRECIO DE VENTA (UNITARIO)	COSTO DE INVENTARIO (UNITARIO)
1	600	400	20	50	10
2	400	500	25	50	10
3	700	400	30	60	10
4	500	500	30	60	10

El inventario al inicio del trimestre 1 es de 100 unidades y la empresa quiere tener por lo menos 150 unidades en inventario al final del año, con el objetivo de hacer frente a las necesidades de inicio del año siguiente.

Observación: para modelizar los aspectos del problema que se refieren a los diferentes periodos (t), en cada uno de ellos requerirá una ecuación de equilibrio del tipo:

Invent. Final (t) = Invent. Inicial (t) + Producción (t) – Demanda (t)