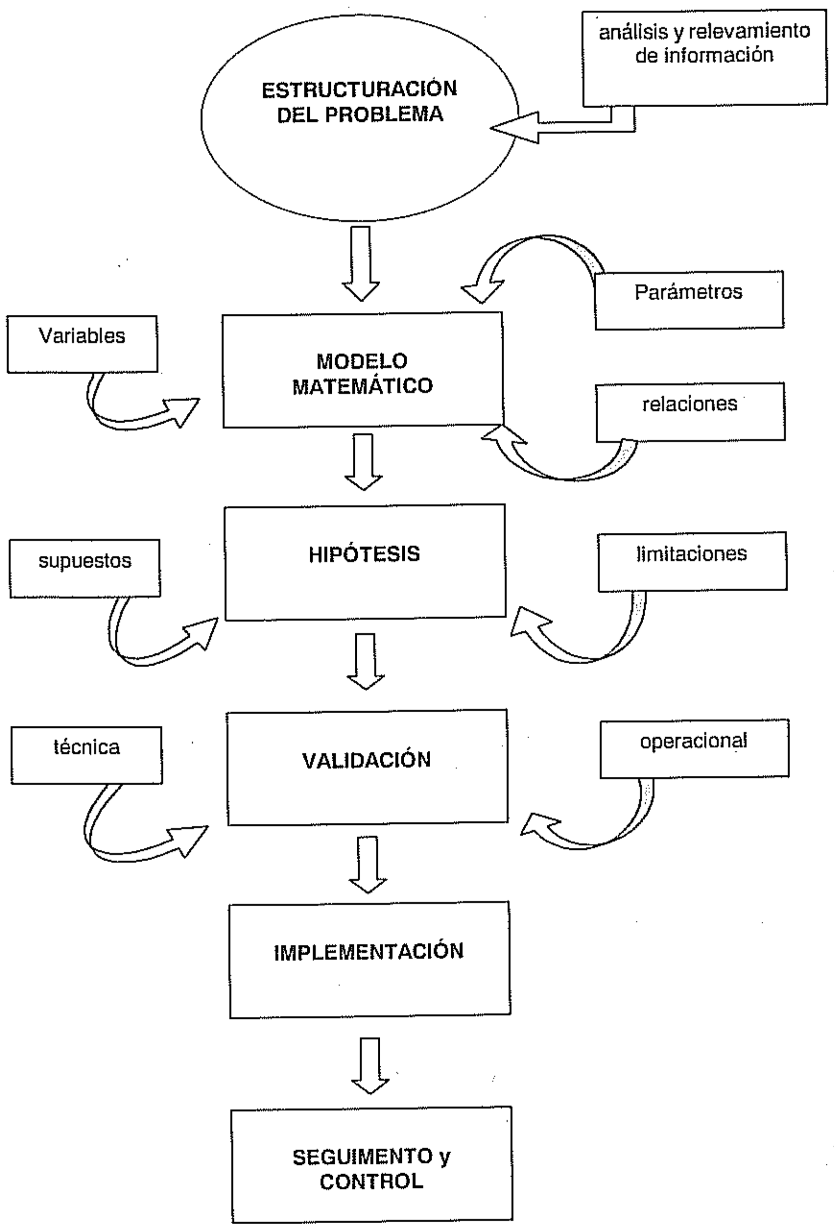


Gráfico 2

CAPÍTULO 2

EL PROCESO DE DECISIÓN

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, trataremos de dar una caracterización general de los problemas de decisión, la cual nos resultará de utilidad al momento de analizar los diferentes modelos a estudiar en este texto.

Básicamente un proceso de toma decisión se presenta cuando, frente a un problema, existen más de una alternativa o curso de acción posible.

En todo proceso de decisión intervienen dos actores, aunque en algunos casos la misma persona asume los dos roles:

Decisor: es quien tiene el poder y la responsabilidad de ratificar una decisión y asumir sus consecuencias.

Analista: es el encargado de estructurar el problema y ayudar al decisor a visualizarlo.

Frente a un problema de decisión, consideramos conocido el conjunto de las alternativas posibles, al que denominaremos X. Este conjunto supondremos que está formado por un número finito de elementos, a los cuales genéricamente llamaremos x_i, es decir, $X=\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$, siendo *n* el número de alternativas de decisión.

Conocido este conjunto X, intentaremos establecer una relación entre los elementos del conjunto, de forma tal que para cualquier par de elementos podremos decir si uno es preferible o indiferente al otro.

Así para, $x_1 \in X \wedge x_2 \in X$, podemos establecer que x_1 es preferible a x_2:

$$x_1 \succ x_2$$

o bien que x_2 es preferible a x_1:

$$x_2 \succ x_1$$

o si ambos elementos son indiferentes entre sí:

$$x_1 = x_2$$

Esta relación, que llamaremos relación de preferencia, es de orden completo y se determina a través de una aplicación o función d: $X \rightarrow \Re$, conocida como "función de decisión" y a la cual simbolizaremos como d(x).

Si esta función de decisión mide algo deseable, como un beneficio o un ingreso, a los fines de seleccionar la mejor alternativa, calcularemos:

$$\text{Máx } d(x)$$

y llamaremos a la/las alternativas que verifiquen ese valor "decisión óptima o decisión racional"

Por el contrario, si la función mide algo no deseable, como un costo o pérdida, con el fin de seleccionar la decisión óptima, calcularemos:

$$\text{Mín } d(x)$$

2. DECISIÓN Y UNIVERSO

En un problema de decisión, a menudo los resultados que se obtienen al seleccionar una alternativa se ven condicionados por la presentación de ciertos sucesos que no dependen del tomador de decisiones. Llamaremos a este conjunto de sucesos "estados de la naturaleza".

Los estados naturales representan variables exógenas cuya presentación modifica los resultados de la acción seleccionada.

Representaremos los estados de la naturaleza mediante el conjunto Y, siendo:

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m\}$$

Supondremos que, cada vez que el decisor elige un elemento x_i del conjunto X, se presenta, un elemento particular y_j del conjunto Y, tal que el par ordenado (x_i,y_j) determina un resultado o compensación $c(x_i,y_j)$. Es decir, a cada par ordenado (x_i,y_j) le corresponde un número real $c(x_i,y_j)$ que mide el grado de satisfacción que le produce al tomador de decisiones, el hecho de seleccionar una alternativa x_i cuando se presenta un estado natural y_j.

A los fines prácticos, cuando el número de elementos de los conjuntos X e Y es finito y relativamente pequeño, los resultados se pueden resumir en forma matricial. A esta matriz se la conoce con el nombre de matriz de las compensaciones o matriz de resultados y tiene una estructura como la siguiente:

	y_1	y_2	. . . .	y_m
x_1	$c(x_1,y_1)$	$c(x_1,y_2)$	. . . .	$c(x_1,y_m)$
x_2	$c(x_2,y_1)$	$c(x_2,y_2)$	. . . .	$c(x_2,y_m)$
x_3	$c(x_3,y_1)$	$c(x_3,y_2)$	. . . .	$c(x_3,y_m)$
.	.	.	. . . .	.
x_n	$c(x_n,y_1)$	$c(x_n,y_2)$		$c(x_n,y_m)$

Tabla 1

En forma simplificada, se suelen representar las $c(x_i,y_j)$ por c_{ij}, es decir:

	y_1	y_2	. . . .	y_m
x_1	c_{11}	c_{12}	. . . .	c_{1m}
x_2	c_{21}	c_{22}	. . . .	c_{2m}
x_3	c_{31}	c_{32}	. . . .	c_{3m}
.	.	.	. . . .	.
x_n	c_{n1}	c_{n2}		c_{nm}

Tabla 2

Como el decisor no controla el valor que asumirá y_j, no podrá seleccionar una decisión teniendo en cuenta solamente los valores de la función $c(x,y)$. Deberá contar con algunos elementos adicionales que informen sobre el comportamiento de los estados de la naturaleza y le permitan construir una función de decisión $d(x)$.

Para solucionar tales cuestiones, dependiendo de la disponibilidad de la información, se organizan los problemas de decisión en tres escenarios posibles:

- Decisiones en situación de certeza o de universo cierto
- Decisiones bajo riesgo o de universo aleatorio
- Decisiones bajo incertidumbre o de universo incierto

En estos tres escenarios coinciden autores tales como, Taha (2004) y Hillier y Lieberman (2002).

3. DECISIONES EN SITUACIÓN DE CERTEZA O DE UNIVERSO CIERTO

Un escenario de certeza se da cuando quienes toman las decisiones tienen la información completa y precisa. Tales situaciones pueden ser estudiadas por medio de modelos deterministas. Estos modelos suponen que se conoce toda la información necesaria para la toma de una decisión. Por ejemplo, cuando el problema consiste en determinar el número de unidades a producir para maximizar la utilidad, conociéndose la disponibilidad de materia prima y mano de obra, como así también la utilización de estos insumos por unidad de producto.

Estos tipos de modelos son excelentes para situaciones en las que existen muchas variables endógenas y restricciones. Son útiles cuando muy pocas variables no controladas por el modelo presentan incertidumbre, por lo tanto, son ideales para la toma de decisiones internas de la organización y, en consecuencia, una gran parte de los problemas de uso corriente en las empresas pueden formularse con estas herramientas, además de que existen aplicaciones informáticas poderosas que facilitan la resolución de dichos problemas. Estos modelos pueden aplicarse a problemas tan dispares como situaciones de producción, logística, planificación de la fuerza de ventas, etcétera.

Desde el punto de vista de la presentación formal de este universo, decimos que se conoce con exactitud, cuál es el estado de la naturaleza que se presentará ante determinadas circunstancias. Es decir, que existe certeza de lo que ocurrirá durante el período en cual se tomará la decisión. Por lo tanto el decisor conoce la compensación c(x,y) que obtendrá, la cual, por depender únicamente de x, puede ser tomada como función de decisión. Es decir que en Universo cierto,

$$d(x) = c(x,y)$$

Situaciones de este tipo se presentan cuando el conjunto de estado naturales (Y) está formado por un único elemento o bien, cuando estando integrado por más de un elemento, existe uno de ellos con alta probabilidad de presentación y los restantes con probabilidad muy baja o casi nula.

De esta manera, conocida la función de decisión d(x), se deberá encontrar el valor de x que la optimice. Para lo cual, en el caso más sencillo –cuando el conjunto X es finito y con un número reducido de elementos- bastará con reemplazar en d(x) cada posible valor del vector X y seleccionar como decisión óptima aquel elemento que le dé el mejor valor a d(x).

Frecuentemente, el conjunto X está formado por un número grande de elementos –o es infinito-, lo cual hace imposible seleccionar la mejor alternativa con el procedimiento anterior. En estos casos, existen métodos de cálculo –algoritmos- que permiten solucionar el problema.

4. DECISIONES BAJO RIESGO O DE UNIVERSO ALEATORIO

Un escenario de decisiones bajo riesgo supone que la información disponible no es suficiente o puede obtenerse con cierto margen de incertezas, debiendo ser reflejada esta situación mediante una distribución de probabilidad. Por ejemplo, cuando debemos elegir cuántas unidades de un bien producir, pero no sabemos con exactitud cuál será el nivel de demanda, aunque con los registros históricos disponibles es posible construir una distribución de probabilidad.

ste información
evia, que permite
cular la
obabilidad de
esentación de cada
ado de la
turaleza

Problemas bajo condiciones de riesgo se utilizan para una gran gama de situaciones que involucren decisiones estratégicas de la organización con su medio ambiente externo, ya que las variables generalmente no están totalmente bajo el control de los tomadores de decisiones. Por ejemplo, decisiones acerca de la localización de una planta, discernir entre construir, ampliar o cambiar de ubicación un negocio, elegir entre diferentes proyectos, entre otras.

Formalmente, decimos que en estos casos se conocen los estados de la naturaleza que se pueden presentar, y la probabilidad de presentación que corresponde a cada estado de la naturaleza. De esta manera surge como natural usar, como función de decisión, el valor esperado de las compensaciones ante cada decisión posible. La función de decisión d(x) entonces, es la esperanza matemática de las compensaciones:

$$d(x) = E_y\left[\, c(x,y) \,\right] = \Sigma\, C(x_i,y_j)\; p_j$$

siendo p_j la probabilidad del j-ésimo estado de la naturaleza.

La *Decisión Óptima* será, para el caso de que las compensaciones reprsenten algo deseable (beneficios o ingresos):

$$\max d(x) = \max_x E_y\left[\, c(x,y) \,\right]$$

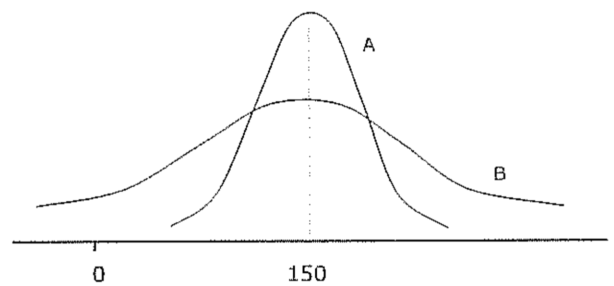
Si las compensaciones representan algo indeseable como pérdidas o costos, la *decisión óptima* de acuerdo a este criterio, se determina:

$$\min d(x) = \min_x E_y\left[\, c(x,y) \,\right]$$

Al criterio de tomar como función de decisión la Esperanza Matemática de las compensaciones se le realizan principalmente dos *críticas*:

1) La primera plantea que, además de considerar a la Esperanza Matemática como función de decisión, debería incorporarse alguna medida de dispersión de las compensaciones, como podría ser la desviación estándar.

Esto solucionaría el problema que se presenta cuando aparecen valores semejantes de la esperanza matemática para más de una alternativa. Situación que gráficamente podemos mostrar mediante el siguiente ejemplo hipotético de dos proyectos de inversión. Observemos que ambos proyectos presentan igual rentabilidad esperada ($150), no obstante, el proyecto B tiene mayor dispersión respecto a ese valor, pudiendo obtener rentas muy superiores e incluso entrar en pérdidas.



2) La segunda crítica se refiere a que el valor de la esperanza matemática se vuelve significativo solamente cuando la decisión se repite un número grande de veces. Por el contrario, si la decisión debe tomarse por única vez, el criterio debe aplicarse con cautela, ya que podría conducir a una elección equivocada.

APLICACIÓN PARA UN CASO DE BENEFICIOS

Supongamos un problema de seleccionar una entre tres alternativas posibles (x_1,x_2,x_3) cuyos resultados se ven influenciados por tres sucesos (y_1,y_2,y_3) con probabilidades conocidas de presentación. En la siguiente tabla se resumen los resultados (beneficios) de cada alternativa frente a cada estado natural y las probabilidades de presentación de estos últimos.

	y_1	y_2	y_3
x_1	150	110	100
x_2	125	95	300
x_3	120	130	250
P_j	0.3	0.5	0.2

Tabla 3

Para seleccionar la mejor alternativa aplicamos el criterio de la esperanza matemática, es decir:

	y_1	y_2	y_3	$\sum C(x_i,y_j)\ p_j$
x_1	150	110	100	150 (0.3) + 110 (0.5) + 100 (0.2) = 120
x_2	125	95	300	125 (0.3) + 95 (0.5) + 300 (0.2) = 145
x_3	120	130	250	120 (0.3) + 130 (0.5) + 250 (0.2) = **151**
P_j	0.3	0.5	0.2	

Tabla 4

La decisión óptima es la alternativa x_3 por que ofrece el mayor beneficio esperado, en este caso de $ 151.-

5. DECISIONES BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE O DE UNIVERSO INCIERTO

Observe que en este caso, no se cuenta con información previa.

Un ambiente de decisión en condiciones de incertidumbre se presenta cuando no conocemos la distribución de probabilidad de los estados de la naturaleza. Para estas situaciones existen varios métodos de elección basados en criterios racionales. Una característica distintiva de estos métodos radica en la subjetividad del criterio de decisión, lo cual es otro punto a favor de la racionalidad limitada de Simon, al menos en este tipo de metodología.

Una característica fundamental, de los criterios bajo condiciones de incertidumbre se refiere a que un mismo problema, a la luz de los diferentes enfoques del análisis de decisiones puede tener varias soluciones, lo cual es un reflejo del estilo gerencial de los decisores. No es posible decir que uno de estos criterios sea mejor que otro. Lo aconsejable en estos casos, es que el decisor utilice el que considere adecuado, según los datos del problema y a partir de un conocimiento amplio de cómo opera cada criterio y las críticas o desventajas de cada uno.

CRITERIO DE WALD O PESIMISMO

El principal concepto en el que se basa este modelo es evitar pérdidas elevadas o inaceptables. De esta manera debemos colocarnos en la

situación más desfavorable ante cada alternativa de decisión y luego elegir entre ellas la más favorable. En caso de beneficios a este modelo se lo conoce como criterio *maximin* y en caso de costos como el criterio *minimax*.

El procedimiento puede describirse como sigue:

1. Determinar el resultado más desfavorable para cada alternativa de decisión, de esta manera construimos la función de decisión d(x).

$$\text{Beneficios} \Rightarrow d(x) = \min_y c(x_i, y_j)$$

$$\text{Costos} \Rightarrow d(x) = \max_y c(x_i, y_j)$$

2. De todos estos valores seleccionar el que nos proporcione el mejor valor para d(x). La alternativa asociada con este resultado es la estrategia que debe utilizarse o decisión óptima.

$$\text{Beneficios} \Rightarrow \max d(x) = \max_x \min_y c(x_i, y_j)$$

$$\text{Costos} \Rightarrow \min d(x) = \min_x \max_y c(x_i, y_j)$$

APLICACIÓN PARA UN CASO DE BENEFICIOS

	y_1	y_2	y_3	Min c_{ij}
x_1	150	110	100	100
x_2	125	95	300	95
x_3	120	130	250	**120**

Tabla 5

Observe que el valor 120 representa el mínimo beneficio que obtendrá si elige la alternativa x_3

La decisión óptima es la que verifica el *maximin*, es decir x_3

APLICACIÓN PARA UN CASO DE COSTOS

	y_1	y_2	y_3	y_4	Max c_{ij}
x_1	10	18	25	12	**25**
x_2	15	5	30	8	30
x_3	10	13	20	35	35

Tabla 6

25 representa el mayor costo que obtendrá si elige la alternativa x_1

La decisión óptima es la que verifica el *minimax*, es decir x_1

La principal *crítica* que se le realiza a este criterio radica en el hecho de que, al considerar solamente las situaciones más desfavorables que pueden presentarse y dejar de lado las restantes, en algunos casos, puede conducir a decisiones poco racionales.

Para observar esta situación analicemos el caso hipotético de dos alternativas para seleccionar el tamaño de una nueva planta industrial, cuyos resultados dependerán de la situación económica del país en los próximos 10 años:

	SITUACIÓN I	SITUACIÓN II	d(x) = min c(x,y)
PLANTA I	1.000.000	2.000.000	1.000.000
PLANTA II	500.000	25.000.000	500.000

Tabla 7

De acuerdo a este criterio se deberá construir la planta I, sin embargo, es indudable que muchos decisores en situaciones similares no dudarían en escoger la alternativa II.

CRITERIO DE HURWICZ O DE PESIMISMO RELATIVO

Este criterio supone que el tomador de decisiones no es completamente pesimista o totalmente optimista y que el grado de optimismo se puede medir a través de un coeficiente α que está comprendido entre 0 y 1, con lo cual el nivel de pesimismo queda definido a través de su complemento $(1 - \alpha)$.

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Usando este coeficiente se define la función d(x) como un promedio ponderado entre el mejor y el peor resultado que corresponde a cada alternativa de decisión.

$$\text{Beneficios} \rightarrow d(x) = \alpha \max_{y} c(x_i, y_j) + (1-\alpha) \min_{y} c(x_i, y_j)$$

$$\text{Costos} \rightarrow d(x) = \alpha \min_{y} c(x_i, y_j) + (1-\alpha) \max_{y} c(x_i, y_j)$$

La decisión óptima se obtiene calculando:

$$\text{Beneficios} \rightarrow \max d(x) = \max_{x} \left[\alpha \max_{y} c(x_i, y_j) + (1-\alpha) \min_{y} c(x_i, y_j) \right]$$

$$\text{Costos} \rightarrow \quad \min d(x) = \min_{x} \left[\alpha \min_{y} c(x_i, y_j) + (1-\alpha) \max_{y} c(x_i, y_j) \right]$$

Se sugiere aplicar este criterio haciendo variar los valores de α y luego analizar los resultados.

APLICACIÓN PARA UN CASO DE BENEFICIOS (α= 0,50)

	y_1	y_2	y_3	α Máx c (x,y) + (1-α) Mín c (x,y)
x_1	150	110	100	(0.50) 150 + (0.50) 100 = 125
x_2	125	95	300	(0.50) 300 + (0.50) 95 = **197,5**
x_3	120	130	250	(0.50) 250 + (0.50) 120 = 185

Tabla 8

Según este criterio, la decisión óptima es x_2

APLICACIÓN PARA UN CASO DE COSTOS (α= 0,50)

	y_1	y_2	y_3	y_4	α Min c(x,y) + (1-α) Máx c(x,y)
x_1	10	18	25	12	(0.50) 10 + 0.50 25 = **17,5**
x_2	15	10	30	8	(0.50) 8 + 0.50 30 = 19
x_3	10	13	20	35	(0.50) 10 + 0.50 35 = 22.5

Tabla 9

Observe que si α = 0, entonces el criterio es el de Wald, por el contrario si α = 1 estaremos ante un optimismo total.

Según este criterio, la decisión óptima es x_1

La *crítica* al criterio de Hurwicz, es similar a la realizada a Wald, pero en este caso, se argumenta que considera solamente situaciones extremas -más y menos favorables- perdiendo información sobre los valores intermedios de las compensaciones.

CRITERIO DE SAVAGE O DEL MÍNIMO ARREPENTIMIENTO

Savage pone en duda si realmente las compensaciones c(x,y) miden la satisfacción que le produce a un individuo tomar una decisión y que se presente determinado suceso. Frente a esto, postula una nueva forma de medir el grado de satisfacción a través de lo que "deja de ganar por no haber elegido la alternativa correcta frente a ese estado natural". Bajo este concepto se construye una nueva matriz -a partir de la matriz de compensaciones-. Esta nueva matriz denominada R (de los lamentos o arrepentimiento[1]), muestra los *costos de oportunidad* de no haber seleccionado la mejor decisión ante cada posible estado de la naturaleza. Para elegir la mejor alternativa, Savage aconseja aplicar el criterio de Wald para costos a la matriz R.

Cada elemento r_{ij} de la matriz de los lamentos, se calcula como:

Beneficios $\Rightarrow$ r_{ij} = máximo beneficio de la columna – beneficio considerado

Costos $\Rightarrow$ r_{ij} = costo considerado – mínimo costo de la columna

Es decir:

$$\text{Beneficios} \Rightarrow r(x_i, y_j) = \max_{x} c(x_i, y_j) - c(x_i, y_j)$$

$$\text{Costos} \Rightarrow r(x_i, y_j) = c(x_i, y_j) - \min_{x} c(x_i, y_j)$$

Obsérvese que en este modelo, quien toma las decisiones busca evitar pérdidas elevadas de oportunidad a través de un análisis *minimax* de la matriz de arrepentimientos. Al hacer esto se minimiza la diferencia máxima que puede ocurrir entre la mejor alternativa para un estado de la naturaleza determinado y cada uno de los resultados, es decir que se asegura minimizar el arrepentimiento máximo o costo de oportunidad.

$$\text{Beneficios o Pérdidas} \Rightarrow d(x) = \max_{y} r(x_i, y_j)$$

[1] *Regret* en inglés

La decisión óptima será:

$$\text{Beneficios o Perdidas} \Rightarrow \min_{x} d(x) = \min_{x} \max_{y} r(x_i, y_j)$$

APLICACIÓN PARA UN CASO DE BENEFICIOS

Matriz de compensaciones

	y_1	y_2	y_3
x_1	150	110	100
x_2	125	95	300
x_3	120	130	250

Tabla 10

ara Obtener la
iatriz R se debe
abajar sobre las
olumnas de la
iatriz de
ompensaciones

Matriz R

	y_1	y_2	y_3	Max $r(x_i,y_j)$
x_1	0	20	200	200
x_2	25	35	0	**35**
x_3	30	0	50	50

Tabla 11

Observemos que aplicando Wald para pérdidas, la decisión óptima es x_2

APLICACIÓN PARA UN CASO DE COSTOS

Matriz de compensaciones

	y_1	y_2	y_3
x_1	10	18	25
x_2	15	10	30
x_3	10	13	20

Tabla 12

serve que la
isión óptima,
ependientemente
tipo de
npensación
beficios o costos),
mpre se obtiene
icando *mínimax*

Matriz R

	y_1	y_2	y_3	Max $r(x_i,y_j)$
x_1	0	8	5	8
x_2	5	0	10	10
x_3	0	3	0	**3**

Tabla 13

Nuevamente, se aplica Wald para pérdidas y obtenemos en este caso que x_3 es la decisión óptima.

CRITERIO DE LAPLACE Y LAGRANGE

Basándose en el principio de la razón insuficiente, este criterio le asigna igual probabilidad de presentación a cada estado de la naturaleza. De esta manera, si *m* es el número de estados naturales, la probabilidad de

presentación de cada uno de ellos será $1/m$. Luego utilizando estas probabilidades se procede de igual manera que en un universo aleatorio.

Es decir, la función de decisión será:

$$\text{Beneficios o costos} \rightarrow d(x) = E_y\left[\, c(x,y) \,\right]$$

Mientras que la decisión óptima para este criterio se calcula como:

$$\text{Beneficios} \rightarrow \max d(x) = \max_x E_y\left[\, c(x,y) \,\right]$$

$$\text{Costos} \rightarrow \min d(x) = \min_x E_y\left[\, c(x,y) \,\right]$$

APLICACIÓN PARA UN CASO DE BENEFICIOS

	y_1	y_2	y_3	$(1/m)\ \sum c_{ij}$
x_1	150	110	100	(1/3) 360 = 120
x_2	125	95	300	(1/3) 520 = **173,33**
x_3	120	130	250	(1/3) 500 = 166.66

Tabla 14

La decisión óptima es x_2

APLICACIÓN PARA UN CASO DE COSTOS

	y_1	y_2	y_3	y_4	$(1/m)\ \sum c_{ij}$
x_1	10	18	25	12	(¼) 65 = 16.25
x_2	15	5	30	8	(¼) 58 = **14,50**
x_3	10	13	20	35	(¼) 88 = 22

Tabla 15

La decisión óptima es seleccionar la alternativa x_2.

6. ÁRBOLES DE DECISIÓN

Esta técnica es útil para resolver determinados problemas de decisión bajo condiciones de riesgo. Un árbol de decisión es una forma gráfica y analítica de representar todos los eventos (sucesos) que pueden surgir a partir de una decisión asumida en cierto momento. Permite desplegar visualmente un problema y organizar el trabajo de cálculos que deben realizarse y ayuda a tomar la mejor decisión desde un punto de vista probabilístico, ante un abanico de posibles decisiones.

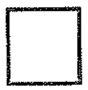
Tiene la característica de que se elige todo un plan de acciones sucesivas a lo largo del tiempo, en el que en cada una de las etapas o puntos de decisión se tienen diferentes alternativas y cada una de éstas tiene eventos asociados con probabilidades concretas.

Elegir la mejor alternativa consiste en elegir la decisión de mayor valor ponderado a lo largo de una ruta de decisiones adyacentes, como producir o comercializar, construir o ampliar una planta, elegir entre diferentes proyectos de inversión, etcétera.

Debemos mencionar, sin embargo, que visualizar eventos futuros asociados a decisiones presentes es una cuestión sumamente compleja, más aún cuando una decisión involucra muchas alternativas de decisión en el tiempo.

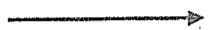
CONCEPTOS BÁSICOS

- *Nodo de decisión*: Indica la necesidad de tomar una decisión en ese momento del proceso. Se representa por un cuadrado.



- *Nodo de probabilidad*: Indica que en ese punto del proceso ocurre un evento aleatorio. Está representado por un círculo.

- *Rama:* Nos muestra los distintos caminos que se pueden emprender cuando tomamos una decisión o bien ocurre algún evento aleatorio.



PASOS PARA EL ANÁLISIS DEL ÁRBOL DE DECISIÓN

1. Definir el problema.
2. Dibujar el árbol de decisión.
3. Asignar probabilidades a los eventos aleatorios.
4. Estimar los resultados para cada combinación posible de alternativas.
5. Resolver el problema obteniendo como solución la ruta que proporcione la política óptima.

Vamos a mostrar la operatoria de este método a través de un ejemplo sencillo. Supongamos que una compañía de seguros nos ofrece una indemnización por accidente de $210.000.

Si no aceptamos la oferta y decidimos ir a juicio podemos obtener $185.000, $415.000 o $580.000 dependiendo de los fundamentos que la justicia considere aceptables.

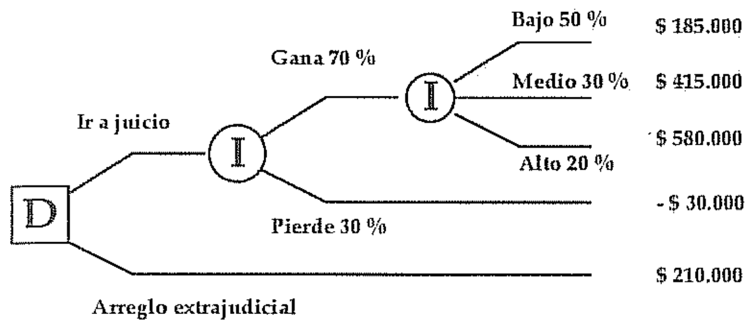
Si perdemos el juicio, debemos pagar las costas que ascienden a $30.000.

Se solicita identificar la decisión más adecuada, sabiendo que el 70% de los juicios se gana, y de éstos, en el 50% se obtiene la menor indemnización, en el 30% la intermedia y en el 20% la más alta.

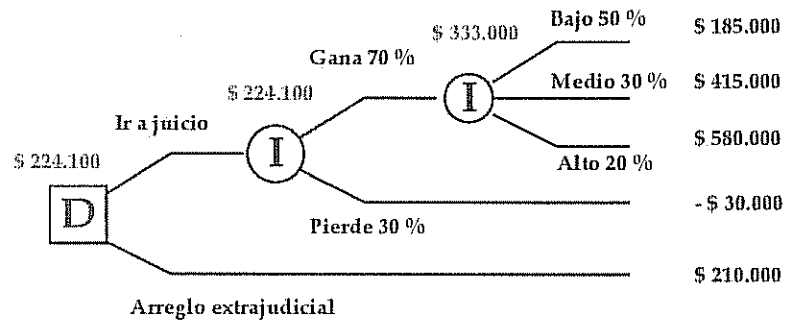
Para resolver este problema, seguimos los pasos ya indicados:

Paso 1.- El problema queda claramente definido en el enunciado.

Paso 2 y 3.- El árbol que define este problema con las probabilidades asociadas a los eventos aleatorios es el siguiente:



Paso 4.- Sobre el árbol se deberán estimar los posibles resultados frente a cada probable situación:



Observar que los valores en los nodos surge de:

185.000(0,50)+415.000(0,30)+580.000(0,20)= $333.000

$224.100 es el máximo entre [(333.000) 0,70; (-30.000)0,30]

El resultado en D es el máximo entre 224.100 y 210.000.

Paso 5.- Analizando las rutas de decisiones posibles y sus resultados en términos de beneficios esperados, se observa que *la decisión óptima será ir a juicio.*

7. DECISIONES BAJO CONFLICTO O JUEGOS DE ESTRATEGIA

En este caso se debe considerar un universo de decisión donde la ocurrencia de alguno de los estados de la naturaleza no se produce al azar sino por la elección de un opositor inteligente, que a fin de obtener su mayor beneficio procurará hacerle al decisor el mayor perjuicio. Problemas con estas características se conocen también como de Universo Hostil y son estudiados por la Teoría de Juegos. Esta teoría trata sobre la toma de decisiones bajo conflicto y fue desarrollada por Von Newman y Morgenstern y descrita en su texto clásico de 1944.

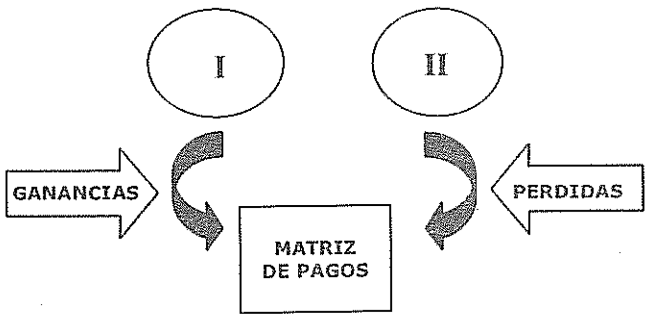
Un juego incluye dos o más tomadores de decisión que buscan maximizar sus ganancias. El resultado del juego depende de las acciones que toma cada uno de los jugadores. Para analizarlos, los juegos se clasifican por el número de jugadores, por la suma algebraica de todos los pagos y por el número de estrategias o acciones posibles.

En este apartado presentaremos un caso particular de juegos conocidos como de *dos jugadores y suma cero*, esto significa que todo lo que pierde o gana un jugador lo gana o pierde el otro respectivamente.

Se asume siempre que ambos jugadores son igualmente inteligentes y racionales y que cada decisión de un jugador es efectuada con total desconocimiento de la jugada que efectúa el oponente.

En estas circunstancias será totalmente racional que cada jugador elija una estrategia del tipo de las presentadas por el criterio pesimista, extrayendo las peores consecuencias de cada decisión y eligiendo de entre todas ellas a la mejor.

La matriz de compensaciones, que ahora se llama matriz de pagos, se obtiene considerando como si el decisor fuera un jugador (jugador I), con todas sus alternativas, y el universo es reemplazado por el oponente (jugador II), representando lo que antes eran los estados de la naturaleza, ahora las alternativas de éste último. La matriz de pagos se construye de forma tal que los pagos representan las ganancias del jugador I (cuyas alternativas corresponden a filas) y consiguientemente las pérdidas del oponente o jugador II (cuyas alternativas corresponden a columnas).



Para resolver este problema, parece lógico pensar que el Jugador I elegirá el máximo de los mínimos (criterio maximin) y el jugador II elegirá el mínimo de los máximos (criterio minimax.

Observar que esta forma de resolver el problema equivale a aplicar el criterio de Wald para ganancias para el jugador I y para pérdidas para el jugador II

Si la elección hecha por ambos jugadores, recae en el mismo par (x,y) diremos que el juego tiene punto de equilibrio, es decir que ambos jugadores elegirán su estrategia más conveniente y esta dará como resultado el pago que recibirá el jugador I (que también podrá ser una pérdida y entonces llevará signo negativo) por parte de su oponente (que será ganancia para éste si lleva signo menos). En este caso el valor del pago, ubicado en la intersección de la fila maximin y la columna minimax, se lo designa *Valor del Juego* (V), porque si ninguno comete un error siempre el juego se resolverá de esa forma, ya que le garantiza al Jugador I tener como mínimo ese beneficio (mayor si su oponente se equivoca) y al jugador II tener como máximo esa pérdida (menor si el jugador I se equivoca). Al punto de equilibrio algunos autores lo llaman *punto de silla*.

Veamos un ejemplo, supongamos que dos empresas competidoras tienen cada una 4 acciones o decisiones alternativas respecto al lanzamiento de nuevos productos al mercado. La siguiente tabla resume las ganancias que obtendrá la empresa A, que a la vez resultan pérdidas para B (matriz de pagos). También se muestran los resultados de la aplicación del criterio de Wald para cada empresa, de acuerdo a lo indicado:

		ACCIONES DE B				Max min Cij x y
		B I	B II	B III	B IV	
ACCIONES DE A	A I	-12	19	4	0	-12
	A II	8	-2	5	7	-2
	A III	16	15	10	42	**10**
	A IV	-12	53	2	-26	-26
Min max Cij y x		16	53	**10**	42	

Tabla 16

Analizar qué ocurre si se selecciona una alternativa diferente a la indicada por el criterio de Wald.

Observemos que en la matriz de pagos se verifica que:

$$\max_x \min_y c_{ij} = \min_y \max_x c_{ij}$$

Por lo tanto el juego posee *punto de silla* y el *valor del juego* (V) =10. Decimos que a cada jugador le conviene jugar una *estrategia única*, que justamente es la indicada por el criterio de Wald aplicado a ambos jugadores. Cuando el juego se resuelve con una estrategia única se lo denomina *juego con estrategia pura óptima.*

Ahora bien, no todos los juegos tienen estrategia pura óptima. En ese caso no hay un razonamiento válido que haga que cada jugador prefiera una alternativa frente a otras, dado que cada uno puede inferir la jugada del otro y cambiar en consecuencia y lo mismo puede hacer el contrario, lo que lleva a cada uno a un círculo vicioso que le impide seleccionar racionalmente una estrategia. Veamos un ejemplo:

		DECISIONES DE B				Max min C_{ij} x y
		B I	B II	B III	B IV	
DECISIONES DE A	A I	-12	19	4	0	-12
	A II	8	-2	5	7	-2
	A III	16	15	18	42	**15**
	A IV	-12	53	2	-26	-26
Min max C_{ij} y x		**16**	53	18	42	

Tabla 17

Observemos que:

$$\max_y \min_y c_{ij} \neq \min_y \max_x c_{ij}$$

No obstante en esta situación el juego puede ser resuelto si se admite la realización de varias jugadas (jugadas múltiples), es decir que cada jugador pueda efectuar un número grande de decisiones alternando las posibles alternativas. En estos casos decimos que el juego es de *estrategias mixtas.*

Von Newman y Morgenstern demuestran que en el caso de estrategias mixtas, siempre existe punto de silla y el valor de juego se obtiene cuando:

$$v = \max_x \min_y \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} p_i q_j = \min_y \max_x \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} p_i q_j$$

$$0 \leq p_i \leq 1 \qquad 0 \leq q_j \leq 1$$

El problema que se plantea es cómo seleccionar los vectores p_i y q_j.

Si bien existen técnicas para casos particulares de matriz de pagos de dimensión 2x2, para problemas de mayor dimensión, la Programación Lineal es una metodología que permite encontrar el valor de estos vectores.

En estas condiciones el juego con punto de equilibrio para una sola jugada, sería un caso particular en el cual hay una alternativa para cada jugador que recibe el 100% de peso probabilístico, siendo las otras totalmente descartables, es decir son juegos que se resuelven mediante

una estrategia pura y no con combinaciones lineales de varias o todas las estrategias disponibles por cada jugador.

SOLUCIÓN DE JUEGOS CON ESTRATEGIAS MIXTAS POR PROGRAMACIÓN LINEAL[2]

Mediante esta técnica se pueden calcular los vectores de probabilidad de cada jugador. Analicemos el caso del jugador I, para cualquier estrategia pura del competidor, las probabilidades óptimas de I se pueden calcular resolviendo el siguiente problema:

$$\max_x \left[\min \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} p_i, \sum_{i=1}^{n} c_{i2} p_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{im} p_i \right) \right]$$

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = 1$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ahora bien, haciendo

$$v = \min \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} p_i, \sum_{i=1}^{n} c_{i2} p_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{im} p_i \right)$$

La ecuación implica que,

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} p_i \geq v, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

Entonces el problema para el jugador I se puede escribir:

$$Max(z) = v$$

sujeta a

$$v - \sum_{i=1}^{n} c_{ij} p_i \leq 0$$

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = 1$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

v sin restric.

De la misma forma, el vector de probabilidades óptimas para el jugador II se calcula resolviendo el siguiente problema lineal:

2. Se aconseja al lector leer el capítulo 3 y 4 de este libro antes de abordar el estudio de este tema.

$$Min(g) = v$$

sujeta a

$$v - \sum_{j=1}^{m} c_{ij} q_j \geq 0$$

$$q_1 + q_2 + ... + q_m = 1$$

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., m$$

v sin restric.

El problema (4) es el dual de (3), razón por la cual ambos problemas optimizan la variable sin restricción v (valor del juego).

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para el ejemplo de la tabla 17 el modelo lineal que permite obtener las probabilidades óptimas del jugador A es el siguiente:

$$Max\ (z) = v$$

Sujeta a

$$\begin{aligned}
v + 12p_1 - 8p_2 - 16p_3 + 12p_4 &\leq 0 \\
v - 19p_1 + 2p_2 - 15p_3 - 53p_4 &\leq 0 \\
v - 4p_1 - 5p_2 - 18p_3 - 2p_4 &\leq 0 \\
v \qquad\quad - 7p_2 - 42p_3 + 26p_4 &\leq 0 \\
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1
\end{aligned}$$

$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4 \geq 0$

v sin restricción de signo

La solución óptima es

$p_1 = 0$

$p_2 = 0$

$p_3 = 0{,}9848$

$p_4 = 0{,}0152$

$v = 15{,}578$

El programa lineal del jugador B es:

$$Min\ (g) = v$$

Sujeta a

$$\begin{aligned}
v + 12q_1 - 19q_2 - 4q_3 \qquad\quad &\leq 0 \\
v - 8q_1 + 2q_2 - 5q_3 - 7q_4 &\leq 0 \\
v - 16q_1 - 15q_2 - 18q_3 - 42q_4 &\leq 0 \\
v + 12q_1 - 53q_2 - 42q_3 + 26q_4 &\leq 0 \\
q_1 + q_2 + q_3 + p_4 &= 1
\end{aligned}$$

$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4 \geq 0$; v sin restricción de signo

La solución óptima es:

$q_1 = 0{,}5758$

$q_2 = 0{,}4242$

$q_3 = 0$

$q_4 = 0$

$v = 15{,}578$

CASO DEL JUEGO PIEDRA, PAPEL, TIJERA

Veamos que sucede con el conocido juego de piedra, papel y tijeras, suponiendo que cada jugador gana o pierde \$1.-

La matriz de pago que como la que se presenta en la tabla:

A \ B	PI	PA	TI
PI	0	-1	1
PA	1	0	-1
TI	-1	1	0

Tabla 18

Podemos Observar que en este caso no existe una estrategia pura óptima, por lo que A debe elegir un vector de probabilidades que represente cuántas veces jugará cada estrategia, es decir debe elegir p_1, p_2 y p_3.

El valor esperado de A para cada estrategia que juegue B será:

Elección de B	Recompensa de A por cada elección de B
PI	$0p_1 + 1p_2 - 1p_3 = p_2 - p_3$
PA	$-1p_1 + 0p_2 + 1p_3 = -p_1 + p_3$
TI	$1p_1 - 1p_2 + 0p_3 = p_1 - p_2$

Tabla 19

B elegirá una estrategia tal que el valor esperado de A sea el mínimo posible.

Viéndolo en la matriz de pagos:

A \ B	PI	PA	TI
PI	0	-1	1
PA	1	0	-1
TI	-1	1	0
Min	$p_2 - p_3$	$-p_1 + p_3$	$p_1 - p_2$

Tabla 20

Por lo tanto A debe elegir una estrategia tal que le mínimo de sus valores esperados sea el máximo posible. Si llamamos ***v*** a ese valor máximo posible, entonces éste debe ser tal que cumpla con:

$$v \leq p_2 - p_3$$
$$v \leq -p_1 + p_3$$
$$v \leq p_1 - p_2$$

Con todo lo anterior, A puede plantear un PL para averiguar cuál ese máximo valor posible de v, considerando también que como p_1, p_2 y p_3 representan probabilidades, entonces su suma debe ser igual a 1.

Quedando el PL:

$$\begin{aligned} &Max\ v \\ &\text{sa} \\ &v \leq p_2 - p_3 \\ &v \leq -p_1 + p_3 \\ &v \leq p_1 - p_2 \\ &p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ &p_1,\ p_2 \text{ y } p_3 \geq 0 \text{ y } v \text{ número real} \end{aligned}$$

Resolviendo el programa:

$v = \$1{,}00$

$p_1 = 1/3$

$p_2 = 1/3$

$p_3 = 1/3$

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

RESPONDA SI LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON VERDADERAS O FALSAS:

A) Se puede considerar al criterio de Wald es un caso particular del criterio de Hurwicz.

B) Cuando las compensaciones representan costos, y α es el coeficiente de optimismo, la función de decisión según el criterio de Hurwicz está dada por:
$d(x) = (\alpha) \text{ Min } c(x,y) + (1-\alpha) \text{ Max } c(x,y)$.

C) Si las compensaciones representan beneficios, la función de decisión aplicando el criterio de Savage está dada por: $d(x) = \max \min r(x,y)$.

D) La única crítica que se le formula al criterio de la Esperanza Matemática es que no tiene en cuenta la desviación típica.

ACTIVIDAD 2

RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

a) En una matriz de resultados de un problema de decisión, ¿qué representan los c_{ij}?

b) ¿Qué críticas podrían realizarse al criterio de Hurwicz?

c) En el criterio de Savage. ¿Cómo se calculan los elementos de la matriz R, cuando los elementos de la matriz de compensaciones representan costos?

ACTIVIDAD 3

Un inversionista posee un capital que asciende a \$400.000.- Tiene tres alternativas de inversión que llamaremos A, B y C.
La alternativa A es invertir el 100% del capital, la alternativa B es invertir el 40% del capital, mientras que la C propone invertir el 30% del mismo.
El rendimiento de la inversión A será del 10%, la B rendirá el 11% y la C el 17%.
En el caso de B y C al saldo no invertido lo guardará en el banco que le proporcionará un interés que se fijará al finalizar el período, según la situación económica que se presente, la que podrá ser de gran inflación, recesión o prosperidad económica. El interés anual que abonará el banco en cada situación económica será del 10%, 7% y 5% respectivamente.
Qué alternativa deberá elegir el inversionista si:

a) Utiliza el criterio de Wald.

b) Utiliza el criterio del optimismo relativo y fija un coeficiente de pesimismo de 0,65.
c) Utiliza el criterio de Savage.
d) Si estima que la posibilidad de que haya gran inflación es del 20% y la de prosperidad económica es del 50%.

ACTIVIDAD 4

La florería "Claveles S.A." debe decidir cuántas orquídeas ordenar para el día de la secretaria. La demanda de este tipo de flores en los días especiales, como el de la secretaria o el de la madre, es una variable aleatoria (D). El costo de cada flor es de $10 si las compra con anterioridad al día de la secretaria. Si la demanda excede el número de flores disponibles, el faltante se satisface colocando una orden urgente. En este caso, el costo de cada flor será $5 más caro que el costo normal. Si la demanda es menor que el inventario que se tiene, las flores que sobran se pueden vender con posterioridad. El precio de venta de las flores que sobren, será $3 menos que su costo original, ya que no se encontrarán igualmente frescas.
Se realizó un estudio sobre 100 días festivos y se han registrado las siguientes observaciones:

Demanda	10	15	20	25	30
Nº de días en que se produjo	10	25	30	20	15

¿Qué cantidad de orquídeas aconsejaría usted ordenar para minimizar el costo esperado?

ACTIVIDAD 5

Un pequeño supermercado pide semanalmente un tipo especial de yogurt con cereales y vitaminas. El encargado de compras ha observado que las posibles demandas son: 100, 200 o 300 unidades. El producto cuesta $0,8 cada uno y se vende a $1,25 la unidad. Los que sobran al final de la semana se pueden devolver, obteniéndose un reintegro de $0,60 por cada uno. Si durante la semana le faltan productos, puede solicitarlos al proveedor en carácter de pedido urgente con un recargo de 10%

a) ¿Cuál será la decisión óptima según el criterio de Hurwicz? Considere un coeficiente de optimismo de 0,7?
b) ¿Cuál será la decisión óptima según el criterio de Wald?
c) ¿Cuál será la decisión óptima según el criterio de Lapalce?
d) ¿Cuál será la decisión óptima según el criterio de Savage o del mínimo arrepentimiento?
e) Suponiendo que la demanda semanal sigue la distribución que se presenta en la tabla:

Demanda	100	200	300
Probabilidad	0.35	0.45	0.2

¿Cuántas unidades se deberán comprar?

ACTIVIDAD 6

Una fábrica está evaluada en 150 millones. La fábrica desea incorporar un nuevo producto al mercado. Existen tres estrategias para incorporar el nuevo producto:

- Alternativa 1: Hacer un estudio de mercado del producto de forma de determinar si se introduce o no al mercado.
- Alternativa 2: Introducir inmediatamente el producto al mercado (sin estudio previo).
- Alternativa 3: No lanzar inmediatamente el producto al mercado (sin estudio previo).

En ausencia de estudio de mercado, la fábrica estima que el producto tiene un 55% de probabilidad de ser exitoso y de 45% de ser un fracaso. Si el producto es exitoso, la fábrica aumentaría en 300 millones su valor, si el producto fracasa se devaluaría en 100 millones.

El estudio de mercado vale 30 millones. El estudio predice que existe un 60% de probabilidad de que el producto sea exitoso. Si el estudio de mercado determina que el producto sería exitoso, existe un 85% de posibilidades de que efectivamente lo sea. Si el estudio de mercado determina que el producto sería un fracaso, existe sólo un 10% de posibilidades de que el producto sea exitoso.

Si la empresa no desea correr riesgos (desea maximizar el valor esperado de la empresa), ¿Qué estrategia debería seguir?

ACTIVIDAD 7

Dos importantes cadenas de supermercados se disputan una franja del mercado. Para captar a los clientes de esta franja, cada supermercado ha pensado en una estrategia diferente, de esta manera los clientes que logre atraer uno de ellos los pierde el otro supermercado.

El supermercado I ha elaborado las siguientes estrategias alternativas:

- Otorgar una tarjeta para que los clientes puedan sumar puntos con sus compras los que luego podrán canjearlos por regalos según los puntos acumulados. A ésta la llamaremos estrategia A.
- Otorgar una tarjeta para que los clientes puedan sumar puntos con sus compras los que luego podrán aplicar en compras futuras como descuentos. A ésta la llamaremos estrategia B.

Las estrategias del supermercado II son:

- Otorgar una tarjeta que le permite a los clientes obtener un descuento sobre productos no perecederos. A ésta la llamaremos estrategia 1.

- Otorgar una tarjeta que le permite a los clientes obtener un descuento sobre productos perecederos. A ésta la llamaremos estrategia 2.

Cada uno desea elevar al máximo su número de clientes atraídos. Mediante la teoría de juegos determine la estrategia óptima para cada supermercado y el valor del juego.

	SUPERMERCADO II	
SUPERMERCADO I	ESTRATEGIA 1	ESTRATEGIA 2
ESTRATEGIA A	20000	20000
ESTRATEGIA B	30000	25000

ACTIVIDAD 8

Una pizzería está planificando su actividad para el próximo domingo. En función de los datos que se reflejan en la siguiente tabla (beneficios obtenidos), realizar el árbol de decisión correspondiente y en función de este, probar que la decisión más adecuada es hornear 170 pizzas.

	Demanda 150	Demanda 160	Demanda 170	Demanda 180
Hornear 150	300	300	300	300
Hornear 160	290	320	320	320
Hornear 170	280	310	340	340
Hornear 180	270	300	330	360
Probabilidad	0,2	0,4	0,25	0,15

CAPÍTULO 3

PROGRAMACIÓN LINEAL

1. INTRODUCCIÓN

Debido a que la esencia de la PL puede transmitirse mejor a través de un modelo concreto, comenzamos el análisis de este tema mediante un ejemplo.

Una fábrica de cerámicos quiere determinar el plan de producción óptimo de sus dos productos:

Cerámicos Esmaltados
Cerámicos Rústicos

El proceso de producción de los cerámicos requiere diferentes combinaciones de horas de mano de obra, horas de secado y de cocción. Para la fabricación de un m^2 de cerámico esmaltado son necesarias 5 horas de mano de obra, 4 horas de secado y 6 horas de cocción. Por cada m^2 de cerámico rústico se requieren 5 horas de mano de obra, 8 horas de secado y 4 horas de cocción.

La contribución a las utilidades por cada m^2 de cerámico son:
\$8 para el cerámico esmaltado
\$6 para el cerámico rústico

Teniendo en cuenta que la fábrica dispone de 300 horas de mano de obra, 400 horas para secado y 320 horas para cocción por mes, formule un modelo que le permita a la fábrica determinar el plan de producción que maximice la contribución a las utilidades.

	Cerámico Esmaltado	Cerámico Rústico	Disponibilidad hrs. mensuales
Horas de Mano de Obra / m^2	5	5	300
Horas de Secado / m^2	4	8	400
Horas de Cocción / m^2	6	4	320
Contribución a las utilidades / m^2	8	6	

Tabla 1

Vamos a suponer además, que la empresa no tiene limitaciones respecto a la demanda, es decir, puede vender todo lo que produce.