CAPÍTULO 5

TRANSPORTE, ASIGNACIÓN Y TRANSBORDO

1. INTRODUCCIÓN

Un tipo particular de problemas de PL son los conocidos como de transporte, de asignación y de transbordo. Ellos presentan ciertas características que los hacen especiales, por lo que en gran parte de la literatura se los estudia en forma separada bajo el nombre general de problemas de flujo en redes. Además, su estructura matemática particular, ha permitido desarrollar procedimientos especializados de solución que son más eficientes, en términos de tiempo computacional, que los otros métodos de resolución de programas lineales.

2. EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

El problema de transporte se presenta con frecuencia cuando se planea la distribución de bienes o servicios, a partir de varios lugares de suministro y hacia varias ubicaciones de demanda.

Por lo general, es limitada la cantidad de bienes que están disponibles en cada ubicación de oferta *–orígenes-*, y los bienes se requieren en diversas ubicaciones de demanda *–destinos-*.

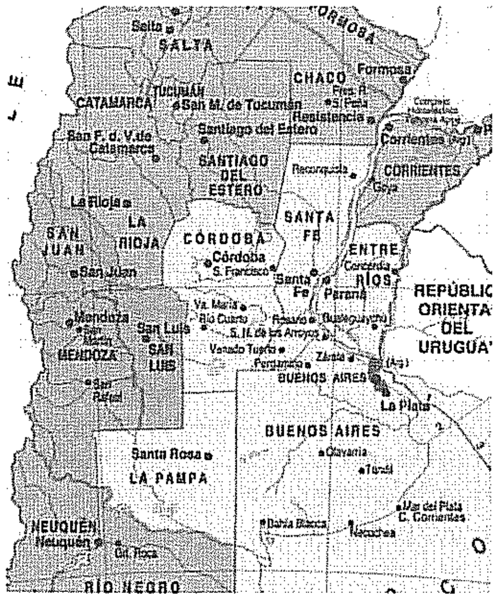
El objetivo del problema de transporte es minimizar el costo total de transportar los artículos desde los orígenes hacia los destinos.

Consideremos el problema de una fábrica de cerveza que distribuye, a nivel nacional, a partir de dos plantas elaboradoras ubicadas en Córdoba y Santa Fe. La cerveza se envía a tres mayoristas que se encuentran en Buenos Aires, Salta y Neuquén y que se encargan de la distribución posterior.

Los costos de distribución se presentan en la tabla, junto con la oferta mensual de cada fábrica y la demanda mensual de cada mayorista.

Mayorista / Fábrica	Buenos Aires	Salta	Neuquén	Oferta
Córdoba	2	4	5	300
Santa Fe	1	3	7	400
Demanda	350	250	100	

Tabla 1



Podríamos presentarlo de la siguiente manera:

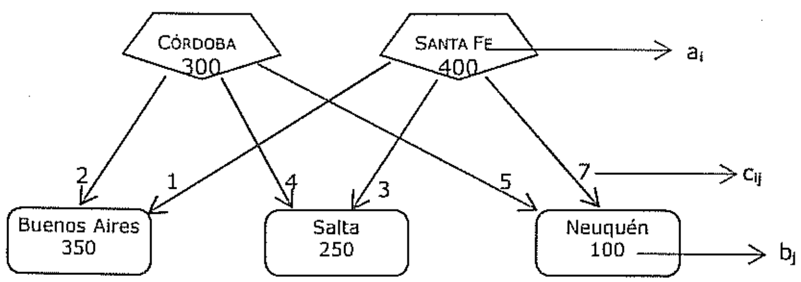


Gráfico 1

Con estos datos podemos plantear un Programa Lineal cuyo objetivo es minimizar el costo total de transporte y a cuyas variables de decisión (x_{ij}) las definimos como las cantidades a enviar desde cada fábrica hacia cada distribuidor.

x_{ij} = cantidad de mercadería a enviar desde la fábrica *i* al distribuidor *j*.

$$\text{Minimizar } Z = 2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + x_{21} + 3x_{22} + 7x_{23}$$

s.a.

$$\begin{array}{llllllll}
x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & = & 300 \\
 & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & = & 400 \\
x_{11} & & & + x_{21} & & & = & 350 \\
 & x_{12} & & & + x_{22} & & = & 250 \\
 & & x_{13} & & & + x_{23} & = & 100
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para toda i y toda j.}$$

Es necesario señalar varios detalles acerca de este planteamiento:

En primer lugar, las primeras dos restricciones imponen que la cantidad que se envía sea igual a la cantidad disponible. Se utilizan aquí restricciones de igualdad debido a que la *oferta total es igual a la demanda total*, por lo que debe transportarse la totalidad de la oferta. A un problema de este tipo se lo denomina *problema equilibrado de transporte.*

En segundo lugar las siguientes tres restricciones imponen que cada distribuidor reciba exactamente lo que demanda, se utilizan también restricciones de igualdad por ser el problema equilibrado.

Debe observarse que para un problema equilibrado de transporte una de las restricciones no es necesaria. Si la oferta total que se transporta es de 700 cajas y los dos primeros distribuidores reciben 600 cajas, entonces el tercer distribuidor debe recibir 100 cajas. Esto hace que una restricción sea redundante y por lo tanto pueda eliminarse. Si hacemos esto, para este problema que tiene dos orígenes y tres destinos, habrá 2 + 3 −1 = 4 restricciones linealmente independientes.

En general, un problema que tiene *h* orígenes y *k* destinos, tendrá exactamente *h+k−1* restricciones linealmente independientes. Este es un resultado importante, ya que en una SFB no degenerada, siempre habrá el mismo número de variables básicas que restricciones.

Además el número total de variables del problema será igual al número de orígenes por el número de destinos, es decir que tendrá *h.k variables.*

Variab. Básica = m = h+k-1

n = h.k → Var.
m = h+k-1 → restricc.
máx m variables positivas

MODELO GENERAL DE TRANSPORTE

Generalizamos el modelo usando la siguiente simbología:

c_{ij} = costo unitario de envío desde el origen **i** al destino **j**.

Cada origen tiene una disponibilidad u oferta a la que vamos a denominar a_i.

Cada destino demanda una cierta cantidad a la que llamaremos b_j.

Lo que pretendemos es determinar qué cantidad de mercadería deberíamos enviar desde cada origen hacia cada destino, de manera tal que el costo total del envío sea mínimo.

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_{ij}$$

costo

s.a.

oferta $\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots,h)$

demanda $\sum_{i=1}^{h} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\ldots,k)$ (1)

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j$$

CARACTERÍSTICAS DEL MODELO (hipótesis o supuestos)

1- *h* orígenes conocidos, con una oferta también conocida.
2- *k* destinos conocidos con una demanda también conocida.
3- El total de la oferta es igual al total de la demanda: $\sum_{i=1}^{h} a_i = \sum_{j=1}^{k} b_j$
4- El costo unitario de transporte $\mathbf{c_{ij}}$ es constante por unidad transportada.
5- El flujo de mercaderías va en un solo sentido, es decir desde los orígenes hacia los destinos.

VARIANTES DEL PROBLEMA

Las variantes adicionales del problema básico de transporte pueden contemplar una o más de las siguientes situaciones:

- ✓ Oferta total distinta de la Demanda total
- ✓ Función objetivo de maximización
- ✓ Rutas inaceptables

Oferta total distinta de la demanda total

Se pueden dar dos situaciones:

- Oferta > Demanda

Para equilibrar este problema creamos un *destino ficticio* que recibe la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{h} a_i - \sum_{j=1}^{k} b_j \qquad (2)$$

El costo de envío desde cada origen hacia ese destino ficticio es nulo. La o las variables positivas que en la solución final aparezcan relacionadas con dicho destino, indicarán donde quedó el *excedente de oferta.*

- Demanda > Oferta

Para equilibrar este problema creamos un *origen ficticio* con una oferta igual a la diferencia entre

$$\sum_{j=1}^{k} b_j - \sum_{i=1}^{h} a_i \qquad (3)$$

El costo de envío desde este origen hacia cada uno de los destinos nulo. La o las variables positivas que en la solución óptima aparezcan relacionadas con dicho origen, indicarán los destinos que quedaron con *demanda insatisfecha.*

Función Objetivo de maximización

En este caso los coeficientes de la función objetivo representarán beneficios unitarios o contribución unitaria a los beneficios, en cuanto a las restricciones, no sufren modificaciones.

Rutas inaceptables

Se eliminan del planteamiento de programación lineal a las correspondientes variables de decisión.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Resolver problemas de transporte utilizando paquetes de Programación Lineal de uso general es adecuado para problemas pequeños o medianos. Sin embargo, es frecuente que los problemas de Transporte sean muy grandes. Por ejemplo con 100 *Orígenes* y 1000 *Destinos* tendría 100.000 variables. Por esta razón se han desarrollado procedimientos de resolución más eficientes.

El método de transporte, al igual que el método Simplex de Programación Lineal, es un procedimiento de dos fases, en primer lugar, se requiere encontrar una solución factible básica inicial y después, se procede en forma iterativa a realizar mejoramientos en la solución hasta que se llega a la solución óptima. Con el objeto de resumir en forma conveniente los datos, por lo general, se utiliza una tabla de transporte.

Fase I: *Determinación de la solución factible inicial.*

Para determinar la SFB inicial, que debe ser no degenerada, se pueden usar varios métodos:

- ✓ Esquina Noroeste
- ✓ Mínimo costo
- ✓ Vogel
- ✓ Otros

Fase II: *Mejoramiento de la solución.*

Para cada variable básica se plantea una ecuación:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i y v_j son variables auxiliares y tendremos una u_i para cada Origen y una v_j para cada Destino.

Cuando hacemos esto, nos quedará un sistema de ecuaciones indeterminado que debemos resolver por cualquier método. Nuestro objetivo es encontrar un conjunto de valores para las u_i y las v_j que nos permitan luego determinar, para cada variable no básica, un índice de mejoramiento al que llamamos δ_{ij} y que se calcula como:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Este δ_{ij} nos indica el incremento que se produce en el costo total, es decir z, ante un incremento unitario de variable x_{ij}. Es decir, cuanto crece el costo total si enviamos una unidad desde el Origen i hacia el Destino j.

Como lo que queremos es minimizar el costo total, entonces, si todos los $\delta_{ij} \geq 0$, la solución analizada es la óptima. Pero si algún índice δ_{ij} nos da un valor < 0, entonces la solución no es la óptima y debemos determinar, al igual que en Simplex, cuál es la variable que entra y cuál es la que sale de la base.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Considere la siguiente tabla de transporte de un problema de mínimo:

	D_1	D_2	Oferta (a_i)
O_1	10	8	45
O_2	9	5	50
O_3	3	6	45
Demanda (b_j)	90	30	

Tabla 2

Determine cuál es la solución óptima, es decir las cantidades a enviar desde cada origen hacia cada destino que minimice el CT de transporte.

Resolución:

Para poder utilizar el método de transporte, primero se debe equilibrar el problema, es decir verificar que:

$$\sum_{i=1}^{h} a_i = \sum_{j=1}^{k} b_j$$

Como en este caso $\Sigma a_i = 140 > \Sigma b_j = 120$, debe crearse un destino ficticio (D_3) con todos sus costos de envío (c_{ij}) iguales a cero, y con un

requerimiento de demanda igual a la diferencia entre el total ofrecido y el total demandado.

Modificando la tabla de transporte, queda:

	D_1	D_2	D_3	Oferta (a_i)
O_1	10	8	0	45
O_2	9	5	0	50
O_3	3	6	0	45
Demanda (b_j)	90	30	20	

Tabla 3

A semejanza del método Simplex, en transporte se construye una tabla para cada solución posible básica del problema. Para ello trabajamos con un cuadro donde cada celda representará a una x_{ij} (cantidades a enviar desde el origen i al destino j), y en el ángulo superior derecho se colocará el costo unitario de envío desde cada origen a cada destino (c_{ij}).

La primera fase del método consiste en encontrar una primer SFB no degenerada, para lo cual utilizamos el **método de la esquina noroeste**.

Comenzamos asignándole el mayor valor posible a la variable x_{11}, teniendo en cuenta las restricciones de demanda y de disponibilidad, es decir la cantidad que el destino D_1 requiere y la que el origen O_1 tiene disponible para enviar. Este valor es 45; quedando el origen O_1 sin disponibilidad y el destino D_1 con una necesidad de 45 unidades más, que se le enviarán desde el origen O_2. Una vez satisfecha la demanda del primer destino pasamos al segundo destino, cuya demanda es de 30 unidades. Como el origen O_2 todavía dispone de 5 unidades, se las enviaremos al D_2 quedando aún una demanda insatisfecha de 25 unidades, las que recibirá desde el origen O_3. Las unidades restantes de este origen se envían al destino D_3. De esta manera, cada origen ha enviado todo lo que dispone y cada destino ha recibido todo lo solicitado.

El valor de la variable x_{11} se determina como: x_{11} = mín (a_1, b_1)

Corresponde ahora controlar que la solución encontrada sea una SFB no degenerada, para lo cual contamos el número de variables positivas, las que, para este problema deben ser: 3+3-1=5.

	D1		D2		D3		Oferta
		10		8		0	~~45~~
O1	45						0
		9		5		0	~~50~~ ~~5~~
O2	45		5				0
		3		6		0	~~45~~ ~~20~~
O3			25		20		0
Demanda	~~90~~ ~~45~~ 0		~~30~~ ~~25~~ 0		~~20~~		

Tabla 4

La solución factible básica inicial es:

$x_{11}=45$	$x_{23}=0$
$x_{12}=0$	$x_{31}=0$
$x_{13}=0$	$x_{32}=25$
$x_{21}=45$	$x_{33}=20$
$x_{22}=5$	

El valor de *Z= 1030*

Cada una de las variables positivas muestra la cantidad de mercadería a enviar desde el origen O_i al destino D_j, a excepción de x_{33}, que indica la mercadería que quedó sin enviar en el O_3.

En la fase II del método, debe verificarse si la solución encontrada es óptima, si no lo es, deberá determinarse una variable que entra a la base y una variable que sale de la base.

Para verificar la optimidad de la solución, se plantea para cada variable básica la siguiente ecuación:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

Luego, para cada variable no básica se calcula el índice:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Si estos índices de mejoramiento son todos mayores o iguales a cero, entonces la solución es óptima, de lo contrario deberá seleccionarse como variable de entrada a la que tenga el δ_{ij} negativo más pequeño.

Variables Básicas

$c_{11}= u_1+v_1= 10;$	si $u_1= 0$	$\Rightarrow v_1=10$
$c_{21}= u_2+v_1= 9;$	si $v_1=10$	$\Rightarrow u_2= -1$
$c_{22} = u_2+v_2= 5;$	si $u_2= -1$	$\Rightarrow v_2= 6$
$c_{32} = u_3+v_2= 6;$	si $v_2= 6$	$\Rightarrow u_3= 0$
$c_{33} = u_3+v_3= 0;$	si $u_3= 0$	$\Rightarrow v_3= 0$

Para resolver este sistema de ecuaciones indeterminado, asigne un valor arbitrario a cualquier variable y luego despeje las restantes.

Variables no Básicas

$\delta_{12}= c_{12}-u_1-v_2= 8-0-6= 2$
$\delta_{13}= c_{13}-u_1-v_3= 0-0-0= 0$
$\delta_{23}= c_{23}-u_2-v_3= 0-(-1)-0= 1$
$\delta_{31}= c_{31}-u_3-v_1= 3-0-10= -7$

$\delta_{13} = 0$ => Indica que hay múltiples soluciones que le dan a Z el valor de \$1030.
$\delta_{31} = -7$ => Indica que z disminuye en \$7, por cada unidad de mercadería que se envíe desde el origen 3, al destino 1.
Esta es la variable que ingresa a la base.

Para seleccionar la variable que sale de la base se procede con el siguiente razonamiento:

Vamos a determinar qué modificaciones deben hacerse en la solución actual, si pretendemos enviar una unidad desde el O_3 al D_1, respetando le conjunto restricciones de oferta y demanda. Con esta finalidad, colocamos un signo más en la celda de la variable que entra y luego vamos compensando con sucesivos signos más y menos hasta cerrar el

circuito y sólo afectando a variables básicas, como se muestra a continuación:

	D1	D2	D3	Oferta
O1	$\boxed{10}$ 45	$\boxed{8}$	$\boxed{0}$	45
O2	(-) $\boxed{9}$ 45	(+) $\boxed{5}$ 5	$\boxed{0}$	50
O3	(+) $\boxed{3}$	(-) $\boxed{6}$ 25	$\boxed{0}$ 20	45
Demanda	90	30	20	

Tabla 5

El valor máximo que puede asumir la variable que entra (x_{31}) estará dado por el mínimo entre x_{21} y x_{32}, esto es, donde se colocaron signos menos. Es decir:

$$x_{31} = \theta = \min\{x_{21}, x_{32}\} \quad , \quad x_{31} = 25$$

Para encontrar la nueva solución se procede a actualizar la tabla, sumando y restan el valor de x_{31} en todos las celdas donde haya algún signo más o menos.

	D1	D2	D3	Oferta
O1	(-) $\boxed{10}$ 45	$\boxed{8}$	(+) $\boxed{0}$	45
O2	$\boxed{9}$ 20	$\boxed{5}$ 30	$\boxed{0}$	50
O3	(+) $\boxed{3}$ 25	$\boxed{6}$	(-) $\boxed{0}$ 20	45
Demanda	90	30	20	

Tabla 6

La variable que salió de la base fue x_{32}.

El valor de z puede calcularse como:

$$z_{nuevo} = z_0 + \theta\delta_{31} = 1030 + 25(-7) = \$855$$

Esta nueva solución es:

$x_{11}=45$	$x_{23}=0$	
$x_{12}=0$	$x_{31}=25$	*Z= \$855*
$x_{13}=0$	$x_{32}=0$	
$x_{21}=20$	$x_{33}=20$	
$x_{22}=30$		

Nuevamente hay que evaluar si esta solución puede mejorarse y el proceso se repite hasta que todos los $\delta_{ij} \geq 0$, momento en el que se habrá encontrado la solución óptima.

Variables Básicas

$c_{11}= u_1+v_1= 10;$ si $u_1= 0$ $\Rightarrow v_1=10$
$c_{21}= u_2+v_1= 9;$ si $v_1=10$ $\Rightarrow u_2= -1$
$c_{22} = u_2+v_2= 5;$ si $u_2= -1$ $\Rightarrow v_2= 6$
$c_{31} = u_3+v_1= 3;$ si $v_1=10$ $\Rightarrow u_3=-7$
$c_{33} = u_3+v_3= 0;$ si $u_3=-7$ $\Rightarrow v_3= 7$

Variables no Básicas

$\delta_{12}= c_{12}-u_1-v_2= 8 - 0 - 6 = 2$
$\delta_{13}= c_{13}-u_1-v_3= 0 - 0 - 7 = -7$
$\delta_{23}= c_{23}-u_2-v_3= 0 - (-1) - 7 = -6$
$\delta_{32}= c_{32}-u_3-v_2= 6 - (-7) - 6 = 7$

Determinamos la variable que sale de la base en la tabla 6.

$$\theta = x_{13} = \min\{x_{11}, x_{33}\} \quad , \quad x_{13} = 20$$

Actualizamos nuevamente la tabla,

	D1	D2	D3	Oferta
O1	[10] 25	[8]	[0] 20	45
O2	[9] 20	[5] 30	[0]	50
O3	[3] 45	[6]	[0]	45
Demanda	90	30	20	

Tabla 7

La nueva solución es:

$x_{11}=25$ $x_{23}=0$
$x_{12}=0$ $x_{31}=45$
$x_{13}=20$ $x_{32}=0$
$x_{21}=20$ $x_{33}=0$
$x_{22}=30$ $Z= \$715$

Verificamos si la solución encontrada es la óptima

Variables Básicas

$c_{11}= u_1+v_1= 10;$ si $u_1= 0$ $\Rightarrow v_1=10$
$c_{13}= u_1+v_3= 0;$ si $v_3= 0$ $\Rightarrow u_1= 0$
$c_{21} = u_2+v_1= 9;$ si $u_2= -1$ $\Rightarrow v_1=10$
$c_{22} = u_2+v_2= 5;$ si $v_2= 6$ $\Rightarrow u_2=-1$
$c_{31} = u_3+v_1= 3;$ si $u_3=-7$

Variables no Básicas

$\delta_{12}= c_{12}-u_1-v_2= 8-0-6= 2$
$\delta_{23}= c_{23}-u_2-v_3= 0-(-1)-0= 1$
$\delta_{32}= c_{32}-u_3-v_2= 6-(-7)-6= 7$
$\delta_{33}= c_{33}-u_3-v_3= 0-(-7)-0= 7$

Como todos los $\delta_{ij} \geq 0$, entonces concluimos que la solución encontrada es la óptima.

PROBLEMA DE TRANSPORTE CON SOLUCIONES DEGENERADAS

Supongamos la siguiente tabla de transporte para un caso de mínimo, en la cual ya se realizó la primera asignación con el método de la esquina noroeste:

	D1	D2	D3	Oferta
O1	[3] 35	[6] 25	[7]	60
O2	[8]	[5] 30	[7]	30
O3	[4]	[9]	[11] 30	30
Demanda	35	55	30	

Tabla 8

Sabemos que para que una solución sea posible básica no degenerada deberá tener tantas variables positivas como: nº de orígenes + nº de destinos – 1, en este caso 5. Si nos fijamos en la tabla vemos que solamente hay 4 variables positivas.

Para poder empezar a trabajar con el método de transporte deberemos dejar como variable básica a alguna que tenga el valor 0. La elección de cuál $x_{ij} = 0$ dejar como básica se hace de manera tal que se puedan calcular todas las u_i y las v_j. En este caso la variable que dejamos como básica aparece con un 0.

	D1	D2	D3	Oferta
O1	- [3] 35	+ [6] 25	[7]	60
O2	[8]	- [5] 30	+ [7] **0**	30
O3	+ [4]	[9]	- [11] 30	30
Demanda	35	55	30	

Tabla 9

A continuación se trabaja de la misma manera que con una SPB No Degenerada, es decir debemos calcular los índices de mejoramiento.

Para las variables que están en la base:	Para las variables que no están en la base:
$c_{11} = u_1 + v_1 = 3$ $u_1 = 0$ $v_1 = 3$ $c_{12} = u_1 + v_2 = 6$ $u_2 = -1$ $v_2 = 6$ $c_{22} = u_2 + v_2 = 5$ $u_3 = 3$ $v_3 = 8$ $c_{23} = u_2 + v_3 = 7$ $c_{33} = u_3 + v_3 = 11$ Obsérvese que a la variable x_{23} se la consideró como básica.	$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ $\delta_{13} = 7 - 0 - 8 = -1$ $\delta_{21} = 8 + 1 - 3 = 6$ $\delta_{31} = 4 - 3 - 3 = -2$ $\delta_{32} = 9 - 3 - 6 = 0$

La variable que entra a la base es x_{31}, realizamos la compensación en la tabla 9. Podemos observar que la solución será también degenerada ya que hay 2 valores mínimos en los casilleros que aparecen signos (-). Podemos elegir para que quede en la base a cualquier de las dos, optamos por dejar como básica a x_{22}.

	D1	D2	D3	Oferta
O1	[3] 5	- [6] 55	+ [7]	60
O2	[8]	+ [5] **0**	- [7] 30	30
O3	[4] 30	[9]	[11]	30
Demanda	35	55	30	

Tabla 10

Probamos nuevamente la optimidad:

$c_{11} = u_1 + v_1 = 3$	$u_1 = 0$	$v_1 = 3$	$\delta_{13} = 7 - 0 - 8 = -\boxed{1}$
$c_{12} = u_1 + v_2 = 6$	$u_2 = -1$	$v_2 = 6$	$\delta_{21} = 8 + 1 - 3 = 6$
$c_{22} = u_2 + v_2 = 5$	$u_3 = 1$	$v_3 = 8$	$\delta_{32} = 9 - 3 - 6 = 2$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 7$			$\delta_{33} = 11 - 1 - 8 = 2$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 4$			

Reasignamos nuevamente, quedando la tabla 11 sobre la que deberá volver a probarse la optimidad.

	D1		D2		D3		Oferta
		3		6		7	
O1	5		25		30		**60**
		8		5		7	
O2			30				**30**
		4		9		11	
O3	30						**30**
Demanda	**35**		**55**		**30**		

Tabla 11

La tabla 11 contiene la asignación óptima, que como puede observarse se trata de una SPB No Degenerada. El costo total correspondiente a la solución óptima es de $ 645.-

EJERCICIO ADICIONAL

En la tabla siguiente se dan los datos de un problema de transporte de mínimo. Encuentre la solución óptima.

	D1		D2		D3		Oferta
		5		8		6	
O1							**60**
		4		10		6	
O2							**30**
		5		6		8	
O3							**30**
Demanda	**40**		**50**		**30**		

Tabla 12

3. EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Existen situaciones en las cuales es necesario asignar individuos (personas, máquinas, etc.) a tareas (puestos de trabajo, zonas, etc.) a este tipo particular de problema se lo conoce como asignación. Podemos decir entonces que, el problema de asignación, considera m individuos que deben distribuirse entre m tareas para minimizar el costo total de la distribución.

Si definimos a las variables como $x_{ij} = 1$ ó 0 dependiendo si el individuo i es asignado o no a la tarea j, y si c_{ij} es el costo de asignar el individuo i a la tarea j, el modelo matemático general tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{mín } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\
&\text{sa} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad\quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Como vemos, se trata de un problema de PL y como tal puede ser resuelto usando el método simplex. También podría resolverse usando el método de transporte, ya que puede observarse que tiene características comunes a este tipo de problemas. Sin embargo, debido a que las ofertas y las demandas son todas iguales a uno, usar el método de transporte nos conducirá a soluciones altamente degeneradas, es decir con muchas variables básicas iguales a cero. Una SFB no degenerada debería tener, para este problema, exactamente m+m-1 variables positivas. Sin embargo, debido a sus características particulares, las soluciones tendrán sólo m variables positivas, ya que debe asignarse sólo un individuo a cada tarea. Justamente por esta razón es que se ha desarrollado un método de resolución especial llamado método Húngaro.

VARIANTES DEL PROBLEMA

1. Objetivo de maximización

Al igual que en el problema de transporte, en este caso los coeficientes de la función objetivo representarán algún tipo de beneficio, monetario o no.

2. Número total de individuos diferente al número total de tareas

Si el número de individuos es menor al número de tareas, deberán crearse tantos orígenes ficticios como individuos falten, con un costo de asignación igual a cero. Por el contrario si el número de tareas es inferior al número de individuos, deberán crearse tantos destinos ficticios como tareas falten, con costo de asignación igual a cero.

3. Asignaciones no aceptables

En estos casos se deben eliminar del programa lineal las correspondientes variables de decisión.

4. Asignaciones múltiples

Se modifica la formulación del problema de la siguiente manera, si representamos como a_i al número de tareas que pueden se asignadas al individuo i, la restricción correspondiente será:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

EL MÉTODO HÚNGARO

Este método trabaja a partir de la tabla de costos originales y mediante sucesivos cuadros, va reduciendo los mismos hasta encontrar la asignación de costo mínimo. Podemos resumir el método mediante los siguientes pasos:

I.- Reducción por filas:
Elegir el menor elemento de cada fila y restárselo a todos los valores de la fila.

II.- Reducción por columnas:
Elegir el menor elemento de cada columna y restárselo a todos los valores de la columna.

Observemos que la matriz encontrada mediante estos dos pasos, es una matriz de costos reducidos.

III.- Cubrir los ceros de la matriz:
Cubrir todos los ceros de la matriz con el menor número de líneas (horizontales y verticales) posibles.

IV.- Prueba de optimidad:
Si el número de líneas trazadas es igual al número de filas (columnas), se encuentra entonces una solución óptima entre los ceros de la matriz.
Si el número de líneas trazadas es menor a m, volver a reducir la matriz, de acuerdo a lo explicado en el punto V.

V.- Seleccionar el menor número no cubierto por una línea y restárselo a los restantes elementos no cubiertos y sumárselo a los elementos que se encuentran en las intersecciones de las líneas.

VI.- Volver al paso III.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio Nº 1:

Supongamos una empresa que tiene 4 operarios para asignar a cuatro máquinas, los costos de la asignación se encuentran en la tabla siguiente.

	1	2	3	4
1	24	**10**	21	11
2	14	22	**10**	15
3	**15**	17	20	19
4	**11**	19	14	13

Tabla 13

Antes de comenzar a trabajar debemos verificar que el problema esté equilibrado, es decir que la cantidad de operarios debe ser igual a la de máquinas. De no ser así, se deberán agregar tantos operarios (o máquinas) como hagan falta. En este caso el problema está equilibrado, entonces podemos empezar a trabajar.

I.- Reducción por filas: Elegir el menor elemento de cada fila y restárselo a todos los valores de la fila.
En la tabla 1 aparecen sombreados los mínimos elementos de cada fila, a continuación se los restamos a cada uno de los valores de la fila correspondiente y obtenemos la tabla 2.

	1	2	3	4
1	14	**0**	11	**1**
2	4	12	**0**	5
3	**0**	2	5	4
4	**0**	8	3	2

Tabla 14

Al hacer esto el costo óptimo será menor, pero la solución obtenida será la misma.

II.- Reducción por columnas: Elegir el menor elemento de cada columna y restárselo a todos los valores de la columna.
Hacemos ahora lo mismo pero por columnas, en la tabla 2 aparecen sombreados los mínimos valores. De esta manera se obtiene la tabla 3.

	1	2	3	4
1	14	0	11	0
2	4	12	0	4
3	0	2	5	3
4	0	8	3	1

Tabla 15

III.- Prueba de optimidad: Cubrir todos los ceros de la matriz con el menor número de líneas (horizontales y verticales) posibles. A esta prueba la vemos en la tabla 4.

	1	2	3	4
1	14	0	11	0
2	4	12	0	4
3	0	2	5	3
4	0	8	3	**1**

Tabla 16

IV.- Verificar el número de líneas: Si el número de líneas trazadas es igual al número de filas (columnas), identificar la solución óptima.
Si es menor volver a reducir la matriz, de acuerdo a lo explicado en el punto **V**.

En este caso vemos que el número de líneas trazadas es 3, como es menor a m (orden de la matriz), se debe volver a reducir.

V.- Nueva reducción: Seleccionar el menor número no cubierto por una línea y restárselo a los restantes elementos no cubiertos y sumárselo a los elementos que se encuentran en las intersecciones de las líneas.
El menor número no cubierto, aparece en la tabla 16 sombreado.
Después de la nueva reducción nos queda la tabla 17

	1	2	3	4
1	15	0	12	0
2	4	11	0	3
3	0	1	5	2
4	0	7	3	0

Tabla 17

Probamos nuevamente la optimidad. Como el número de líneas es igual a m, entonces la tabla de costos encontrada corresponde a la solución óptima.
A continuación se debe hacer la asignación, de acuerdo a los ceros que aparecen en la matriz.

	1	2	3	4
1	15	**0**	12	0
2	4	11	**0**	3
3	**0**	1	5	2
4	0	7	3	**0**

Tabla 18

La asignación queda:

Operario	Máquina	Costo
1	2	10
2	3	10
3	1	15
4	4	13
Costo Total		**$48**

Tabla 19

Ejercicio Nº 2:

En este caso se nos presenta un problema de asignar 4 vendedores a 3 zonas con diferentes *beneficios* de acuerdo a la zona asignada.

	1	2	3
A	40	30	20
B	18	28	22
C	12	16	20
D	25	24	27

Tabla 20

El primer paso, antes de empezar a trabajar, es equilibrar el problema agregando una zona ficticia que tendrá un beneficio de asignación de 0 (ya que en realidad no existe).

	1	2	3	4
A	40	30	20	0
B	18	28	22	0
C	12	16	20	0
D	25	24	27	0

Tabla 21

Ahora transformamos esta matriz de beneficios a una matriz de "costos de oportunidad". Para hacer esto tomamos el mayor elemento de cada columna y hacemos la diferencia entre éste valor y cada uno de los restantes de la columna. De esta manera cada valor de una columna en particular representará el "costo" de no haber realizado la mejor asignación.
La tabla resultante es:

	1	2	3	4
A	0	0	7	0
B	22	2	5	0
C	28	14	7	0
D	15	6	0	0

Tabla 22

A continuación y con la tabla de costos de oportunidad se procede con el método Húngaro de la misma forma que en el ejercicio 1.

La solución óptima será:

Vendedor	Zona	Beneficio
A	1	40
B	2	28
C	4	0
D	3	27
Beneficio Total		**$ 95**

Tabla 23

UNA JUSTIFICACIÓN ECONÓMICA DEL MÉTODO HÚNGARO

Básicamente el método trabaja a través de reducciones (por fila y columna) de la matriz de costos del problema.
Supongamos que tenemos el problema de asignar individuos a tres tareas. Si le sumamos (restamos) una constante a una fila de la matriz de costos, la solución óptima permanece sin cambios, solamente se modificará el valor de la función objetivo incrementándose en una cantidad igual a la que se le sumó a cada elemento de la fila. Así si le agregamos una cantidad igual a k a cada costo de la primera fila de la matriz del problema, la nueva función objetivo será:

$$z' = z + k(x_{11} + x_{12} + x_{13})$$

Como cualquier SFB tendrá exactamente una variable igual a 1 en el primer renglón, entonces la nueva función objetivo será:

$$z' = z + k$$

De esta manera en los pasos I y II del método, se transforman los costos de asignación en "costos de oportunidad" mediante el procedimiento explicado anteriormente.

La prueba de optimidad, se basa en que cualquier solución factible en la que las $x_{ij} = 1$ tengan costo cero, debe ser óptima.

Analicemos la siguiente matriz reducida:

	1	**2**	**3**
1	0	3	6
2	4	0	0
3	0	4	3

Recordemos que debe asignarse sólo un individuo a cada tarea, cumpliendo con las restricciones de filas y columnas. En consecuencia, el número máximo de asignaciones con costo cero que pueden hacerse es igual a dos. Es decir, que en este caso, el número máximo de celdas con c_{ij} igual a cero, tales que dos de ellas no estén en la misma fila o columna es dos. Las celdas correspondientes se llaman independientes.

Hay un teorema que dice:
"el número máximo de celdas cero independientes en una matriz de asignación reducida es igual al número mínimo de líneas que cubren todos los ceros de la matriz".

En base a este teorema es que se plantea la prueba de optimidad del método.

La nueva reducción del paso V, tiene la misma lógica de los pasos I y II. Ya que este paso es una forma simplificada de la siguiente operación: seleccionar el mínimo costo y restárselo a cada fila no cubierta y sumarlo a cada columna cubierta. Este paso tiene el efecto de crear una nueva matriz de costos con la misma solución óptima pero con, por lo menos, un cero más.

4. EL PROBLEMA DE TRANSBORDO

Un problema de transbordo es una generalización del problema de transporte, en el cual aparecen nodos intermedios llamados nodos de transbordo, los que representan por ejemplo almacenes o depósitos.
En este problema, el flujo de mercadería que circula entre los nodos puede ser, desde los orígenes hacia los destinos, pasando o no, por nodos de transbordo.

En el ejemplo de las fábricas de cerveza podemos suponer que existen dos depósitos a los que se traslada la producción de ambas fábricas y luego se distribuye.

Gráficamente puede verse esta situación:

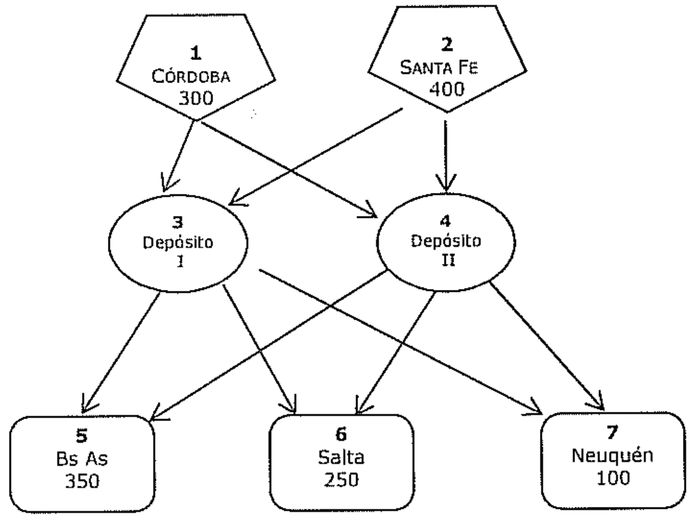


Gráfico 2

Este tipo de problemas al igual que los de transporte y asignación puede modelarse con un programa lineal, considerando que el flujo de mercadería entrante a cada nodo menos el flujo de mercadería saliente debe ser igual a cero. En los nodos correspondientes a los orígenes, el flujo entrante de mercadería corresponde a la oferta de ese nodo. De manera similar, en los nodos de destino, el flujo saliente está representado por la demanda de ese destino.
Suponiendo que los costos unitarios de transporte de las fábricas a los almacenes son:

	Depósito I	Depósito II
Córdoba	1	2
Santa Fé	3	2

Tabla 24

y los costos de transporte desde los almacenes a los distribuidores son:

	Buenos Aires	Salta	Neuquén
Depósito I	2	3	4
Depósito II	2	5	5

Tabla 25

Considerando la numeración asignada a cada nodo en el gráfico 2 y definiendo a las variables x_{ij} como la cantidad de unidades a enviar desde el nodo i al nodo j, el modelo lineal para este problema es:

$$\text{Min. } Z = x_{13} + 2x_{14} + 3x_{23} + 2x_{24} + 2x_{35} + 3x_{36} + 4x_{37} + 2x_{45} + 5x_{46} + 5x_{47}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
x_{13} + x_{14} &= 300\\
x_{23} + x_{24} &= 400\\
x_{13} + x_{23} - x_{35} - x_{36} - x_{37} &= 0\\
x_{14} + x_{24} - x_{45} - x_{46} - x_{47} &= 0\\
x_{35} + x_{45} &= 350\\
x_{36} + x_{46} &= 250\\
x_{37} + x_{47} &= 100
\end{aligned}$$

$x_{ij} \geq 0$ para toda i y toda j.

Los problemas de transbordo pueden modificarse fácilmente para poder ser resueltos con el método de transporte. Sin embargo, hay otros métodos para resolver este tipo de problemas.

EL MODELO MATEMÁTICO GENERAL

Formulación general del modelo:

x_{ij} = representa el flujo del nodo i al nodo j

$$\min \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij}$$

sa

$$\sum_k x_{jk} - \sum_k x_{kj} = L_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (5)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \text{ de la red}$$

Donde (5) representa que el flujo total que sale menos flujo total que entra es igual a la oferta del nodo.

Además si:

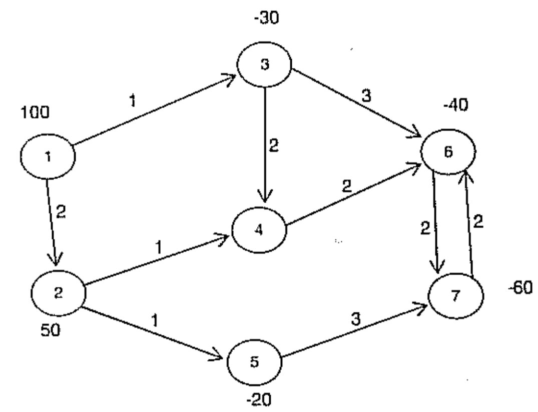
$L_j < 0 \Rightarrow$ nodo de demanda
$L_j > 0 \Rightarrow$ nodo de oferta
$L_j = 0 \Rightarrow$ nodo de trasbordo

El modelo supone que oferta total = demanda total y $c_{ij} \geq 0$

Observación: Si todos los L_{ij} y u_{ij} son enteros, el problema tendrá siempre una solución óptima con valores enteros.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para la siguiente red de transbordo, plantear el PL correspondiente.



En la red anterior podemos observar que hay distintos tipos de nodos, algunos son sólo emisores de flujo, algunos reciben y emiten y otro son típicamente de transbordo.

Cuando el número que aparece sobre el nodo es positivo, significa que se trata de una oferta y cuando es negativo, de una demanda de ese nodo. Algunas veces en lugar de diferenciar la oferta de la demanda por su signo, se hace a través de flechas que entran o salen del nodo o vértice. Los números que aparecen sobre los arcos representan a los costos del transbordo o transporte.

Recordemos que el objetivo del PL para resolver este problema es de mínimo y que tendremos una variable para cada arco de la red y una restricción para cada nodo. En el caso de haber capacidades para los arcos tendríamos también una restricción por cada arco que tenga capacidad.

Para plantear cada restricción, la forma más fácil es hacer:

flujo que entra al nodo (incluida la oferta en su caso) – flujo que sale al nodo (incluida la demanda en su caso) = 0

Considerando todo lo anterior el PL es:

$$\min.\ 2x_{12} + x_{13} + x_{24} + x_{25} + 2x_{34} + 3x_{36} + 2x_{46} + 3x_{57} + 2x_{67} + 2x_{76}$$

sa :

$$\begin{aligned}
100 - x_{13} - x_{12} &= 0\\
50 + x_{12} - x_{24} - x_{25} &= 0\\
x_{13} - 30 - x_{34} - x_{36} &= 0\\
x_{24} + x_{34} - x_{46} &= 0\\
x_{36} + x_{46} + x_{76} - 40 - x_{67} &= 0\\
x_{25} - x_{57} - 20 &= 0\\
x_{57} + x_{67} - 60 - x_{76} &= 0
\end{aligned}$$

$$\forall\, x_{ij} \geq 0$$

Recordar que para poder resolverlo se debe dejar en el primer miembro de cada igualdad todo lo que sea variable y en el segundo todo lo que sea constante.

5. UN COMENTARIO CON RESPECTO A LAS VARIABLES DE ESTOS PROBLEMAS

Las variables de los problemas de transporte, asignación y transbordo deben ser enteras, más aún, las variables de un problema de asignación pueden asumir sólo valores 0 ó 1. Es importante aclarar en este punto, que debido a la estructura particular de las restricciones en este tipo de problemas, si todas las ofertas y las demandas son enteras, las variables serán enteras y en el caso de asignación serán 0 ó 1. Esto es así ya que todos los coeficientes de las restricciones son iguales a 0 ó 1 y por lo tanto en la operatoria de simplex sólo habrá sumas y restas.

6. EL PROBLEMA DEL FLUJO MÁXIMO

Algunos problemas tienen como objetivo determinar la circulación máxima de algún tipo de bien a través de una red que posee un único nodo de entrada o "nodo fuente" y un único nodo de salida o "nodo destino". Es el caso, por ejemplo, de un oleoducto para el que se desea determinar la circulación máxima posible de petróleo por unidad de tiempo. En este problema no intervienen costos, sin embargo la cantidad de flujo por unidad de tiempo en cada arco está limitada por restricciones de capacidad, por ejemplo el diámetro de los oleoductos. En los nodos no se especifican capacidades de flujo, el único requerimiento en ellos es que para cada nodo, a excepción del nodo fuente y del nodo destino, debe darse la relación de equilibrio:

Flujo que sale = flujo que entra al nodo

Si llamamos nodo 1 al fuente y el nodo n al destino, el problema consiste en:

Maximizar f

sa

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} f, & \text{si } i = 1 \\ -f, & \text{si } i = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

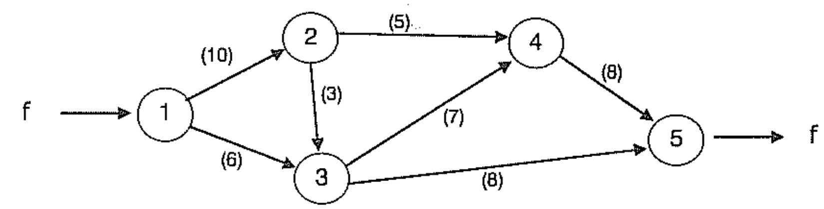
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall ij \text{ de la red}$$

x_{ij} = flujo por unidad de tiempo a través del arco (i,j) .

f es una variable que representa el flujo total que circula a través de la red por unidad de tiempo, es igual al flujo por unidad de tiempo que sale de la fuente y además es igual al flujo por unidad de tiempo que entra al nodo n. El objetivo consiste en maximizar esa cantidad y las u_{ij} simbolizan las capacidades de los arcos por unidad de tiempo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Consideremos la siguiente red



La red tiene un solo nodo de entrada y un solo nodo de salida. El problema consiste en encontrar la máxima cantidad de flujo por unidad de tiempo, que puede circular a través de esta red, desde la fuente hasta el destino. La cantidad de flujo por unidad de tiempo en cada arco está limitada por restricciones de capacidad, que están representadas entre paréntesis, además en este problema no intervienen costos.
Es decir que el objetivo será maximizar f, esta variable representará el flujo de circulación y tendremos además una variable para cada arco de la red y una restricción para cada nodo.
Al realizar el planteo del PL se debe respetar la condición de equilibrio en cada nodo y de capacidad de cada arco, con lo cual el PL será:

Maximizar f

sa

$x_{12} + x_{13} = f$

$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$

$x_{23} + x_{13} - x_{34} - x_{35} = 0$

$x_{24} + x_{34} - x_{45} = 0$

$x_{35} + x_{45} = f$

$x_{12} \leq 10$

$x_{13} \leq 6$

$x_{23} \leq 3$

$x_{24} \leq 5$

$x_{34} \leq 7$

$x_{35} \leq 8$

$x_{45} \leq 8$

x_{ij} 0 $\forall i$ $\forall j$

ACTIVIDADES DE AUTOEXAMEN

ACTIVIDAD 1

RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

1.- Cuántos valores nulos deberá tener una solución de un problema de transporte para que sea no básica, si se sabe que el problema tiene 8 orígenes, 6 destinos y además se conoce que el total de oferta es menor que el total de demanda. n.v = 6.8 = 48

m=12 = 6+8-1=13 menos de 35 variables nulas

2.- Cuántos valores positivos deberá tener una solución de un problema de transporte para que sea básica degenerada, si se sabe que el problema tiene 5 orígenes, 7 destinos y además se conoce que el total de demanda es menor que el total de oferta.

m = h+k-1 = 5+7-1 = 11 menos de 11 variab. positivas

3.- ¿Cómo se interpreta el valor X_{34} = 20 en un problema de transporte, si el origen 3 es ficticio? Hay una demanda insatisfecha de 20 en el destino 4

4.- En un problema de transporte de mínimo, ¿qué significa un δ_{13}= 4?

5.- En un problema de transporte de mínimo, ¿qué significa un δ_{24}= 0 en la solución óptima?

6.- ¿Cómo se puede demostrar que en un problema de transporte equilibrado el número de restricciones linealmente independientes es igual a h+k-1, siendo h=nº de orígenes y k=nº de destinos del problema?

ACTIVIDAD 2

RESPONDA VERDADERO O FALSO:

"El valor de la variable x_{ij} (i = 1, ...h), (j = 1,...k) en la función objetivo del problema del transporte representa el costo de enviar una unidad desde el origen i hacia el destino j."

ACTIVIDAD 3

La empresa de plásticos "Azteca" posee tres plantas de producción de hojas de acrílico, las cuales son transportadas a dos diferentes fábricas para producir diferentes productos. Los costos de transporte por lámina transportada desde las plantas de producción a las factorías, así como los datos de demanda y disponibilidad es como sigue:

	1	2	DISPONIBILIDAD
1	25	19	92
2	17	12	74
3	23	18	86
DEMANDA	173	215	

a) Elabore el modelo de PL que permita arribar al mínimo costo de transporte.
b) Encuentre la solución óptima con el método de transporte. Interprétela.

ACTIVIDAD 4

Una empresa planea abrir cuatro depósitos en cuatro ciudades: Córdoba, Buenos Aires, Rosario y Mendoza, para abastecer a tres regiones. Desde cada depósito se pueden enviar 100 unidades por semana de un cierto producto. La región 1 requiere 80 unidades por semana, la 2 demanda 70 unidades y la 3 necesita 50 unidades. Los costos de transporte por enviar una unidad desde cada planta a cada región se dan en la tabla.

Desde	Hasta ($)		
	Región 1	Región 2	Región 3
Córdoba	10	20	30
Buenos Aires	28	10	15
Rosario	15	15	10
Mendoza	20	30	20

Formule un PLE que se pueda usar para minimizar los costos semanales de transporte para cumplir con las demandas.

ACTIVIDAD 5

El dueño de una agencia de publicidad, trata de decidir cuál de cuatro vendedores debe asignar a cada uno de cuatro clientes. En la tabla se presentan los costos estimados de la asignación de cada vendedor. Use el método húngaro para encontrar la solución óptima del problema. Establezca el valor óptimo de la función objetivo.

	CLIENTE			
VENDEDOR	**1**	**2**	**3**	**4**
A	15	19	20	18
B	14	15	17	14
C	11	15	15	14
D	21	24	26	24

ACTIVIDAD 6

Una empresa debe distribuir cinco promotores, de su nueva línea de máquinas para riego automático, a cuatro regiones. En la tabla se muestran los incrementos estimados en ventas de acuerdo a la asignación de cada promotor.
Use el método húngaro para encontrar la solución óptima del problema. Establezca el valor óptimo de la función objetivo.

	REGIONES			
PROMOTOR	**1**	**2**	**3**	**4**
A	20	22	22	15
B	25	15	16	20
C	18	20	18	20
D	21	15	20	24
E	17	20	20	18

ACTIVIDAD 7

En la tabla siguiente se encuentran los costos de asignación de 5 empleados a 5 puestos de trabajo. Encuentre la asignación óptima usando el método Húngaro.

Trabajo / Empleado	1	2	3	4	5
1	20	14	6	10	22
2	16	8	22	20	10
3	8	6	24	14	12
4	20	22	2	8	6
5	4	16	22	6	24

ACTIVIDAD 8

En la tabla siguiente se encuentran los costos de asignación de 3 operarios a 4 tareas. Encuentre la asignación óptima usando el método Húngaro. Los operarios 2 y 3, pueden ser asignados a dos tareas,

asimismo observe que las celdas tachadas significan que el operario no puede ser asignado a dicha tarea.

	1	2	3	4
1	50	46	42	40
2	51	48	44	
3		47	45	45

ACTIVIDAD 9

Encuentre la solución óptima del siguiente PL usando el método de transporte:

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

sa

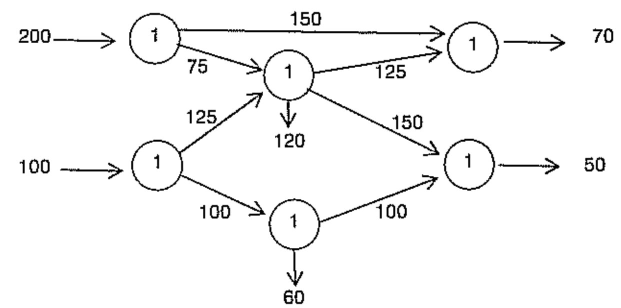
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_3 + x_4 \le 5$$
$$x_1 + x_3 \ge 5$$
$$x_2 + x_4 \ge 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ y } x_4 \ge 0$$

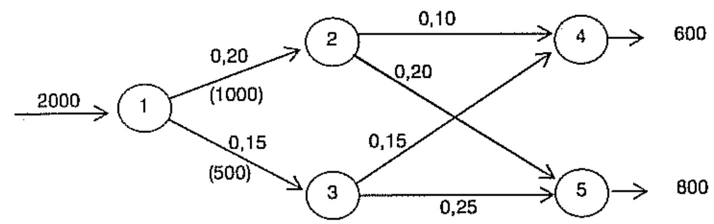
ACTIVIDAD 10

Plantear los PL de las siguientes redes de flujo de costo mínimo.

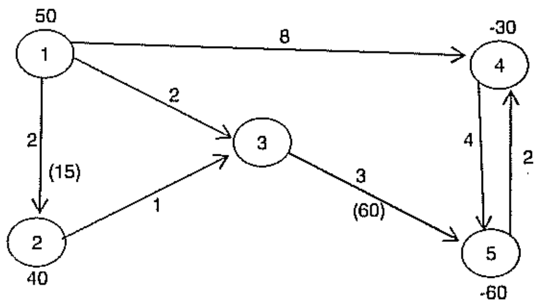
A.



B.



C.



Observación: Los números que aparecen entre paréntesis debajo de los arcos representan la capacidad del mismo.

ACTIVIDAD 11

Dibujar la red correspondiente al siguiente PL:

$$\min\ 2x_{13} + x_{14} + 3x_{25} + 4x_{36} + 2x_{43} + 5x_{46} + 2x_{47} + 2x_{54} + 4x_{57}$$

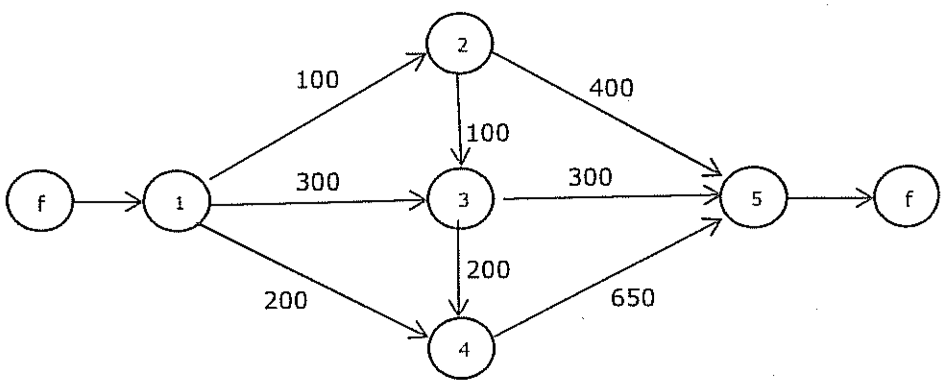
sa

$$100 - x_{13} - x_{14} = 0$$
$$150 - x_{25} = 0$$
$$x_{13} + x_{43} - 60 - x_{36} = 0$$
$$x_{14} + x_{54} - x_{43} - x_{46} - x_{47} = 0$$
$$x_{25} - x_{54} - x_{57} = 0$$
$$x_{36} + x_{46} - 90 = 0$$
$$x_{57} + x_{47} - 100 = 0$$
$$x_{13} \leq 50$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \quad \forall j$$

ACTIVIDAD 12

Plantear el PL de la siguiente red de flujo máximo.



CAPÍTULO 6

PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata sobre modelos que podrían ser formulados y resueltos como modelos de PL, con la condición de que algunas o todas sus variables tienen que asumir valores enteros.

Recordemos que uno de los supuestos de los modelos de programación lineal es la divisibilidad, es decir que las variables pueden asumir valores fraccionarios. En el mundo real, frecuentemente nos encontramos con problemas en los cuales las variables deben ser enteras. En tal caso, se llegará a un valor objetivo óptimo menor (en caso de maximización) al del problema que acepta soluciones continuas, salvo algún caso particular en el cual la solución óptima resulta entera[1].

Otros casos de necesidad de programación entera (PE) se refieren, por ejemplo, a variables de decisión que deben ser "binarias" (enteras que asumen únicamente los valores "0" ó "1"). Estas variables permiten modelar situaciones de opciones (elegir entre alternativas) o situaciones en las que se deben respetar ciertas condiciones lógicas y que, sin la presencia de ellas, no podría modelarse el problema.

Resumiendo, podemos decir que el modelo de Programación Entera es un modelo de PL donde las variables deben asumir valores enteros. Si sólo es necesario que algunas variables sean enteras, entonces se trata de un problema de programación entera mixta. Cuando las variables pueden asumir solamente valores 0 ó 1, se denomina programación binaria.

2. RELAJACIÓN LINEAL

La relajación lineal (RPL) de un PE se obtiene al omitir la condición que exige que las variables sean enteras. En consecuencia, el problema se transforma en un PL continuo, resultando una versión menos restringida del problema entero. En consecuencia:

---

[1] Como es el caso de los problemas de transporte, asignación y transbordo.