INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus Vitória

- Caso seja necessário, utilize o colab ou outros softwares para fazer os algoritmos e auxiliar nas contas durante a resolução dos problemas.
- Todas as questões devem ser resolvidas detalhadamente (se utilizar um algoritmo na resolução, ilustre ao menos os primeiros passos na lista feita a mão e anexe o código).

1) Escreva um algoritmo para a resolução de um sistema linear utilizando o método de eliminação de Gauss.

2) Resolva o sistema linear abaixo utilizando o Método de Eliminação de Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

3) Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$ com matriz tridiagonal ($a_{ij} = 0$ se $|i - j| > 1$). Escreva um algoritmo para resolver este sistema através da eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial de modo que a estrutura especial da matriz A seja explorada. Teste com o sistema abaixo, para $n = 10$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_{i\text{-}1} + 2x_i - x_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq n\text{-}1 \\ -x_{n\text{-}1} + 2x_n = 0 \end{cases}$$

4) Mostre que se A é matriz não singular e $A = LU$, então $A = LD\bar{U}$, onde D é matriz diagonal e U matriz triangular superior com diagonal unitária. Como pode ser resolvido o sistema $Ax = b$ utilizando uma fatoração $LD\bar{U}$?

5) Escreva um algoritmo para o método da eliminação de Gauss, com estratégia de pivoteamento parcial. Resolva um exemplo 5×5 para validar seu algoritmo.

6) Escreva um algoritmo para a resolução de um sistema linear utilizando fatoração LU. Resolva um exemplo 4×4 para validar seu algoritmo.

7) Pesquise e explique abaixo como utilizar a estratégia de pivoteamento parcial no método da fatoração LU.

8) Utilize a fatoração LU para resolver os sistemas abaixo.

i) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

9) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ kx_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Determine os valores de k para que o sistema acima satisfaça o critério de convergência de linhas.

b) Pesquise e enuncie o critério de convergência de Sassenfeld. Em seguida, determine os valores de k para que o sistema acima satisfaça este critério.

10) Para os sistemas dados abaixo verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito e resolva pelo método de Gauss-Seidel, se possível.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

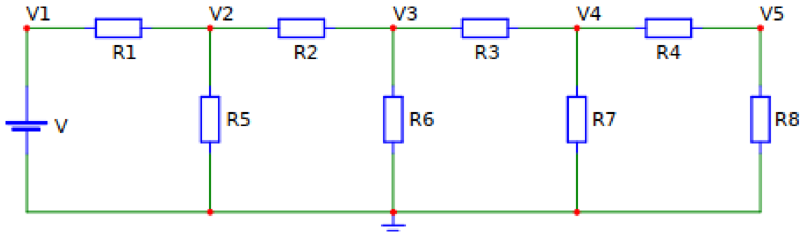
e

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11) Aplique analítica e graficamente os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel ao sistema $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

O que acontece se você permutar as equações (repita o procedimento)?

12) Considere o circuito elétrico mostrado na figura abaixo. Escreva um sistema na forma matricial sendo as tensões V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5 as cinco incógnitas. Resolva esse problema quando V = 127 (escolha um dos métodos numéricos estudados).



$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2 \text{ e } R_5 = R_6 = R_7 = 100 \text{ e } R_8 = 50$$

13) Resolva o sistema linear pelo Método de Gauss-Seidel com $x(0)=(3, 1, 0, -1)^T$ e $\varepsilon=10^{-4}$.

$$\begin{cases} 4.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 1.x_4 = 7 \\ 2.x_1 - 8.x_2 + 1.x_3 - 1.x_4 = -6 \\ 1.x_1 + 2.x_2 - 5.x_3 + 1.x_4 = -1 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 - 4.x_4 = -1 \end{cases}$$

14) Resolva o sistema linear abaixo pelo Método de Jacobi com $x(0)=(0, 3, 1, 4)^T$ e $\varepsilon=10^{-3}$.

$$\begin{cases} 5.x_1 - 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_4 = 5 \\ 1.x_1 + 9.x_2 - 3.x_3 + 4.x_4 = 26 \\ 3.x_2 - 7.x_3 + 2.x_4 = -7 \\ -2.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 + 10.x_4 = 33 \end{cases}$$