# Semana 19

## CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 19

1. Introdução
2. Regra dos trapézios
3. Regra dos trapézios repetida
4. Erro na regra dos trapézios
5. Regra de Simpson

# Introdução

- Objetivo: Determinar $$\int_a^b f(x)dx$$

- Podem ser difíceis, ou mesmo impossíveis de resolver analiticamente.

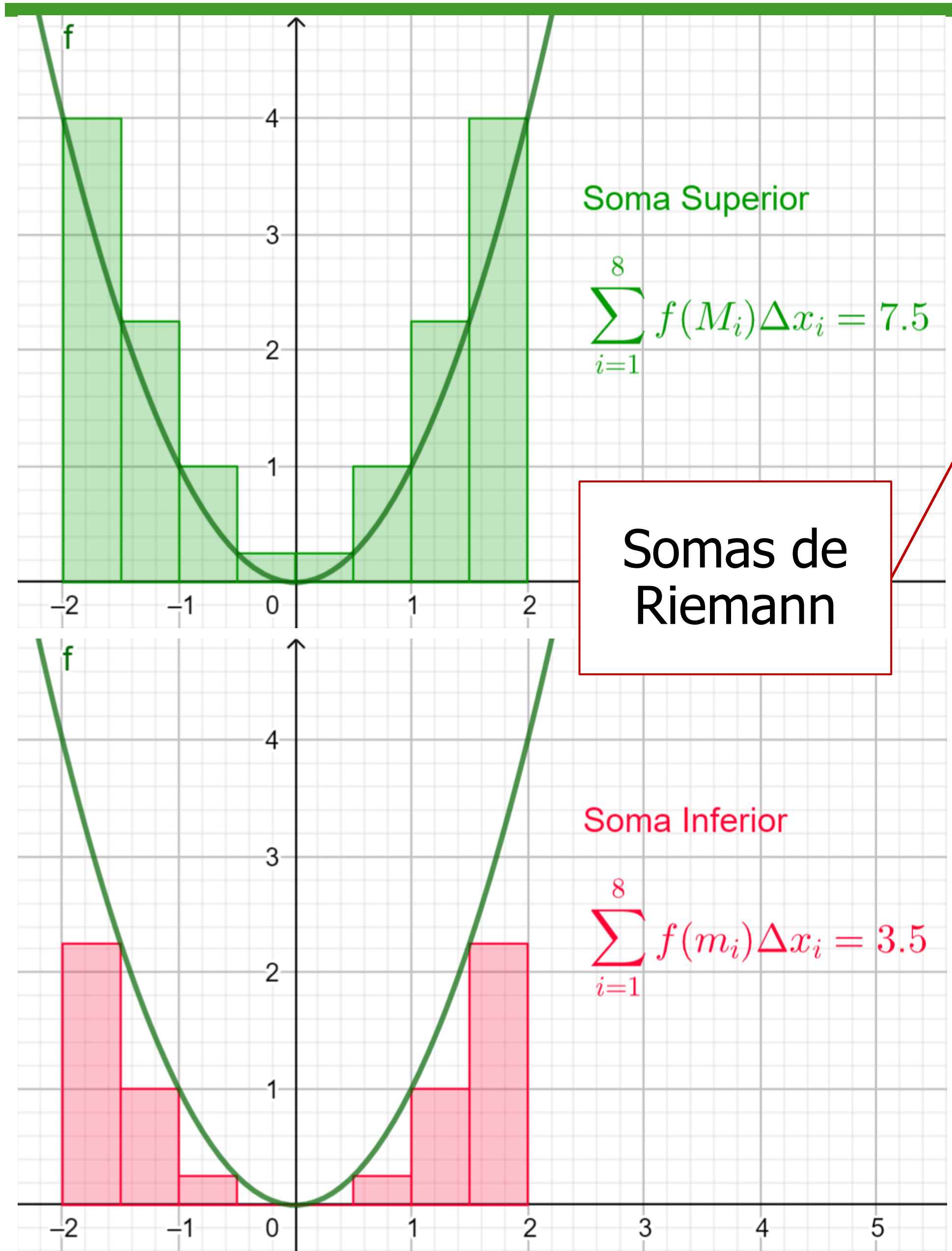
  Utilizar séries de Taylor?

- E quando não conhecemos a expressão analítica de $f$ e temos apenas alguns dados discretos?

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Métodos Numéricos}}$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

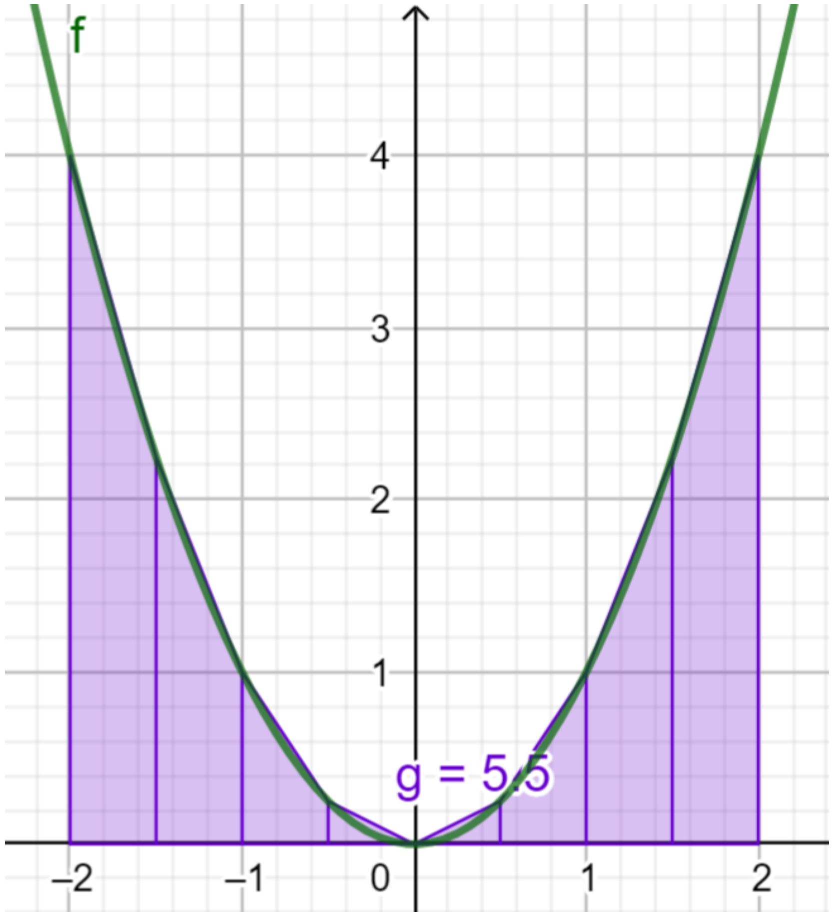
# Introdução




Somas de Riemann

Problema: convergência muito lenta

Ideia: Utilizar trapézios



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 19

1. Introdução
2. Regra dos trapézios
3. Regra dos trapézios repetida
4. Erro na regra dos trapézios
5. Regra de Simpson

# Regra dos trapézios

- Estimativa para a integral utilizando interpolação polinomial:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx}$$

onde $p_1(x)$ é o polinômio de Lagrange de grau 1:

$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$, com

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)\right) dx = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)dx + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)dx =$$

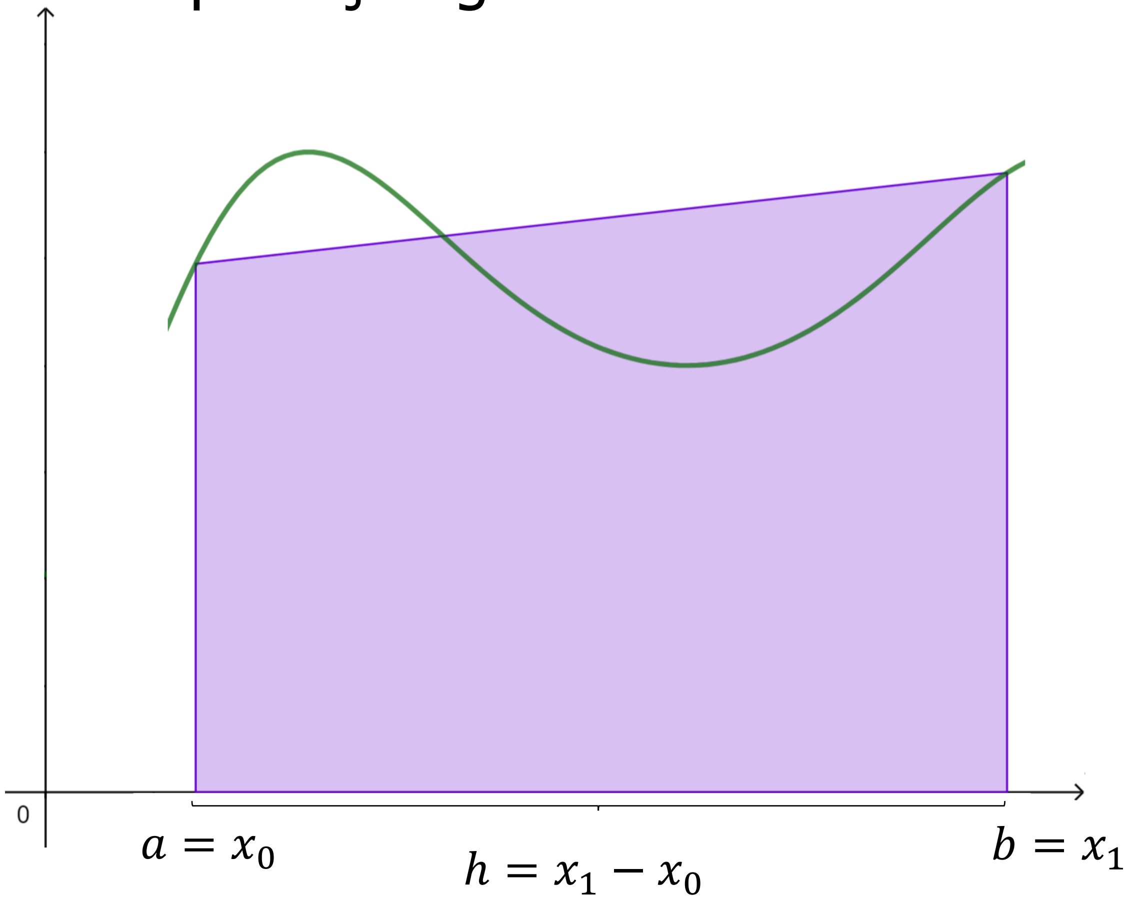
$$= \frac{f(x_0)}{-h} \left(\frac{x^2}{2} - x_1 x\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} + \frac{f(x_1)}{h} \left(\frac{x^2}{2} - x_0 x\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{-h}\left(-\frac{{x_1}^2}{2} - \frac{{x_0}^2}{2} + x_0 x_1\right) + \frac{f(x_1)}{h}\left(\frac{{x_1}^2}{2} - +x_0 x_1 + \frac{{x_0}^2}{2}\right) = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2h}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$

# Regra dos trapézios

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \left(f(x_0) + f(x_1)\right)\frac{h}{2}$$

- Intepretação geométrica




$$\boxed{I_T = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \left(f(x_0) + f(x_1)\right)\frac{h}{2}}$$

$=$ Área do trapézio $\left((b + B)\frac{h}{2}\right)$

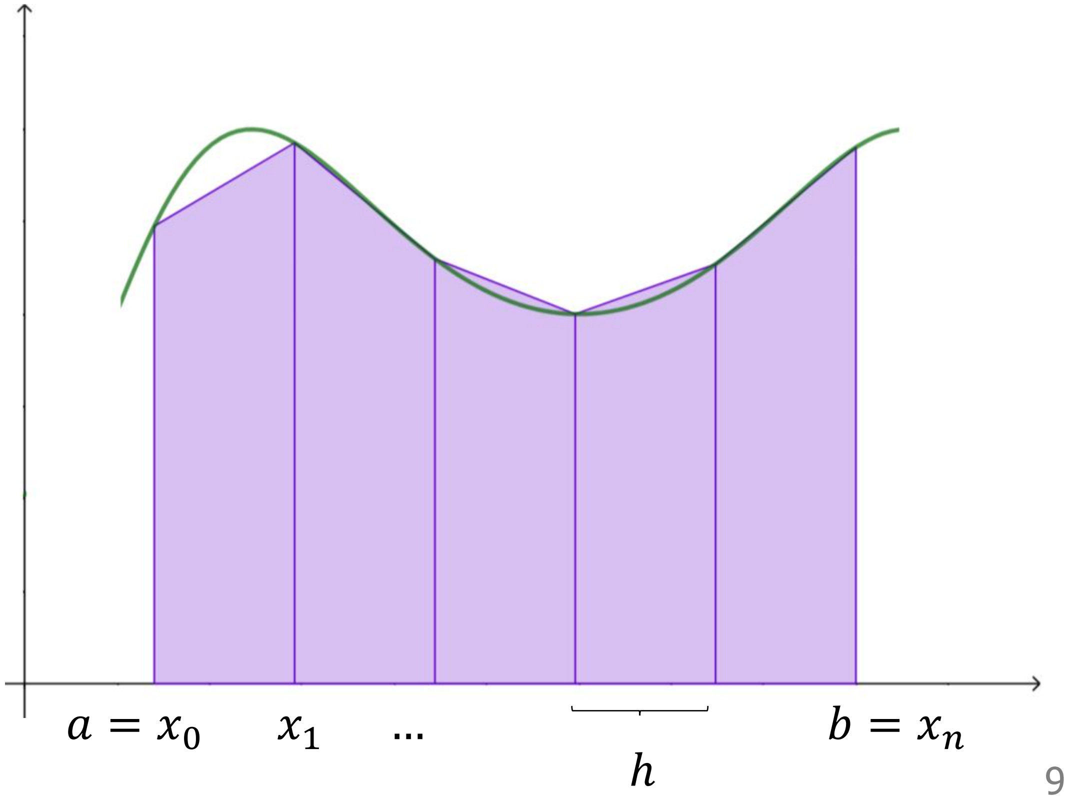
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 19


1. Introdução
2. Regra dos trapézios
3. Regra dos trapézios repetida
4. Erro na regra dos trapézios
5. Regra de Simpson

# Regra dos trapézios repetida

- A regra do trapézio simples é uma boa aproximação se os pontos $a$ e $b$ têm uma distância pequena entre si ($h = x_1 - x_0$ é pequeno).
- E se o intervalo $[a, b]$ for grande?
    - Subdividi-lo em $n$ subintervalos (de tamanho $h = (b - a)/n$) e aplicar a regra dos trapézios em cada um deles (em cada um a função é aproximada por uma função linear).



# Regra dos trapézios repetida

- Então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

- Só os termos $f(x_0)$ e $f(x_n)$ não se repetem, assim, esta fórmula pode ser simplificada em:

$$I_{TR} = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\big(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\big) + f(x_n)\right]$$

# Regra dos trapézios repetida

- Exemplo: Estimar $\int_0^4 (1+x^2)^{-1/2}dx$

- Regra dos Trapézios - 2 pontos

$x_0 = 0$ e $x_1 = 4 \quad (h = 4)$

$$I_T = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = 2\,(1{,}00000 + 0{,}24254) = 2{,}48508$$

- Regra dos Trapézios - 3 pontos

$x_0 = 0,\ x_1 = 2$ e $x_2 = 4 \quad (h = 2)$

$$I_{TR} = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + y_2) = 1\,(1{,}00000 + 2.0{,}44722 + 0{,}24254) = 2{,}1369$$

- Regra dos Trapézios - 9 pontos

$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}5, \ldots, x_8 = 4\ (h = 0{,}5)$

$$I_{TR} = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + \cdots + y_7) + y_8) = 2{,}0936$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0.0 | 1.00000 |
| 0.5 | 0.89445 |
| 1.0 | 0.70711 |
| 1.5 | 0.55475 |
| 2.0 | 0.44722 |
| 2.5 | 0.37138 |
| 3.0 | 0.31623 |
| 3.5 | 0.27473 |
| 4.0 | 0.24254 |

# Conteúdo da Semana 19

1. Introdução
2. Regra dos trapézios
3. Regra dos trapézios repetida
4. Erro na regra dos trapézios
5. Regra de Simpson

# Erro na regra dos trapézios

- Vimos que: $$E(x) = f(x) - p_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ \frac{f''(c(x))}{2}$$

$\Rightarrow$ Ao integrar $p_1(x)$, temos o seguinte erro:

$$E_T(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) f''(c(x)) dx$$

- Aplicando o teorema do valor médio, podemos mostrar que $\exists\ c$ tal que:

$$E_T(x) = \frac{f''(c)}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)\, dx$$

$$\boxed{\Rightarrow E_T(x) = -\frac{h^3 f''(c)}{12}}$$

# Erro na regra dos trapézios

- O erro cometido em aplicar $n$ vezes a regra do trapézio é

$$E_{TR} = -n\frac{h^3}{12}f''(c) \quad \text{com} \quad c \in (a, b)$$

- Em geral, não é possível calcular $f''(c)$.

$\Rightarrow$ Calcular um limitante superior para o erro.

$$|E_{TR}| \leq n\frac{h^3}{12}M$$

onde $M = \max|f''(x)|$

# Erro na regra dos trapézios

Exemplo: Considere a integral $\int_0^1 e^x \, dx$

a) Calcule uma aproximação para a integral utilizando 10 subintervalos. Estime o erro.

b) Qual é o número mínimo de subdivisões, de modo que o erro seja inferior a $10^{-3}$?

a) $x_i = 0{,}1i$ para $i = 0{,}1,..,10 \quad (h = 0{,}1)$

$$\int_0^1 e^x \, dx = \frac{0{,}1}{2}[e^0 + 2e^{0,1} + 2e^{0,2} + 2e^{0.3} + \ldots + 2e^{0,9} + e^{1,0}]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x \, dx = 1{,}719713$$

Estimativa do erro:

$$E_{TR} = 10.\frac{0{,}1^3}{12}e^c \quad \text{com} \quad c \in (0{,}1)$$

$$|E_{TR}| \le 0.01e/12 = 0.00227 \le 0.003$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x \, dx = 1.719 \pm 0.003$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Erro na regra dos trapézios

b) Qual é o número mínimo de subdivisões, de modo que o erro seja inferior a $10^{-3}$?

$\frac{n(h)^3 M}{12} \leq 10^{-3}$ com $h = \frac{1}{n}$

$$\frac{e}{12n^2} \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow n \geq 15{,}05$$

$\Rightarrow n = 16$ subintervalos

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

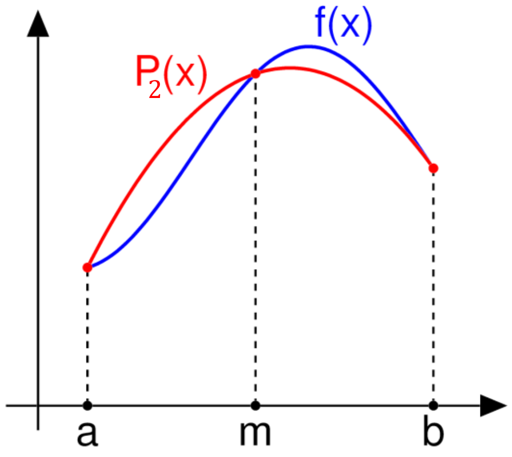
# Conteúdo da Semana 19

1. Introdução
2. Regra dos trapézios
3. Regra dos trapézios repetida
4. Erro na regra dos trapézios
5. Regra de Simpson

# Regra de Simpson

- Estimativa para a integral utilizando interpolação polinomial:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx$$




onde $p_2(x)$ é a parábola que passa pelo ponto médio e pelos extremos do intervalo, dado por (Lagrange):

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

Então:

$$I_S = \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx \approx \big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)\frac{h}{3}$$

# Regra de Simpson

- De modo análogo à Regra do Trapézio, ao integrar $p_2(x)$ na regra de Simpson estamos realizando uma aproximação e cometendo um erro, que é dado por:

$$\Rightarrow E_S(x) = -\frac{h^5 f^{(iv)}(c)}{90}$$

Com $c \in (x_0, x_2)$

- Novamente, é uma boa aproximação se o intervalo $[a, b]$ é pequeno.
- Caso contrário: fazer subdivisões e aplicar a regra repetidamente.

$$I_{SR} = \frac{h}{3}\{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \ldots + [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\}$$

$$E_{SR} = -\frac{n}{2}\left(\frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90}\right)$$

OBS: o número de subdivisões deve ser múltiplo de 2, pois precisamos de dois subintervalos (e portanto de três pontos) para cada aplicação da regra.

# Regra de Simpson

Exemplo: Considere a integral $\int_0^1 e^x \; dx$

a) Calcule uma aproximação para a integral utilizando 10 subintervalos e a regra de Simpson. Estime o erro.

b) Qual é o número mínimo de subdivisões, de modo que o erro seja inferior a $10^{-3}$?

a) $x_i = 0{,}1i$ para $i = 0{,}1, .., 10 \quad (h = 0{,}1)$

$$\int_0^1 e^x \; dx = \frac{0{,}1}{3}[e^0 + 4e^{0{,}1} + 2e^{0{,}2} + 4e^{0{,}3} + 2e^{0{,}4} + \ldots + 2e^{0{,}8} + 4e^{0{,}9} + e^{1{,}0}]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x \; dx = 1{,}7182828$$

Estimativa do erro:

$$E_{TR} = \mathbf{5}.\frac{0{,}1^5}{90} e^c \quad \text{com} \quad c \in (0{,}1)$$

$$|E_{TR}| \le 10^{-5} e/18 \; = 1{,}51.10^{-6} \le 0{,}000002$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x \; dx = 1.718283 \pm 0.000002$$

# Regra de Simpson

b) Qual é o número mínimo de subdivisões, de modo que o erro seja inferior a $10^{-3}$?

$$\frac{n}{2}\frac{(h)^5 M}{90} \leq 10^{-3} \text{ com } h = \frac{1}{n}$$

$$\frac{e}{180n^4} \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow n \geq 1{,}9713$$

$\Rightarrow n = 2$ subintervalos

# Regra de Newton-Cotes

- Generalizando: Fórmula de integração de Newton-Cotes utilizando polinômio de grau $n$.

$$I = \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)\ dx \approx \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)\ dx = \text{ utilizando forma de Lagrange} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} [f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x)]\ dx =$$

$$= f(x_0)\int_{x_0}^{x_n} L_0(x)\ dx + f(x_1)\int_{x_0}^{x_n} L_1(x)\ dx + \ldots + f(x_n)\int_{x_0}^{x_n} L_n(x)\ dx =$$

$$\Rightarrow I = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots. + A_n f(x_n) \qquad \text{com } A_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)\ dx$$

# Semana 19 - Fim

## CÁLCULO NUMÉRICO


Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira

mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo