CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Conteúdo da Semana

1. Sistemas lineares
2. Método da Eliminação de Gauss
3. Fatoração LU
4. Método iterativo de Gauss-Jacobi
5. Método iterativo de Gauss-Seidel
6. Comparação entre os métodos

Sistemas Lineares

- Resolver:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde a_{ij} são os coeficientes, b_i constantes (termos independentes) e x_j as incógnitas, $i = 1,2,\dots,m$ e $j = 1,2,\dots,n$

Resolver o sistema $\Rightarrow$ Calcular os valores de x_j ($j = 1,2,\dots,n$), caso existam, que satisfaçam as m equações.

Sistemas Lineares

- Solução única
- Nenhuma solução
- Infinitas soluções

Consideremos a situação de duas equações e de duas variáveis

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

solução única $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Retas Concorrentes!

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

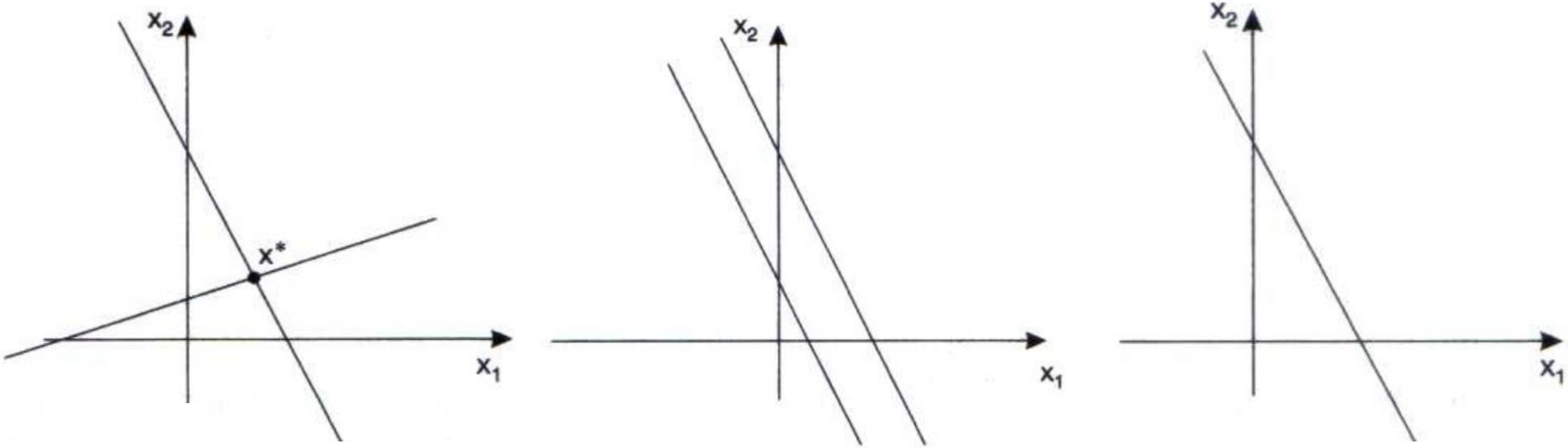
Nenhuma solução,

Retas Paralelas

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Infinitas soluções $x^* = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 - 2\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

Retas Coincidentes



Sistemas Lineares

- Notação matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes,

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é o vetor das variáveis,

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é o vetor constante (dos termos independentes).

Sistemas Lineares

- Resolver o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ implica em obter os escalares $x_1, \cdots, x_n$ que permitem escrever $\mathbf{b}$ como combinação linear das n colunas de $\mathbf{A}$.

- Ou seja,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

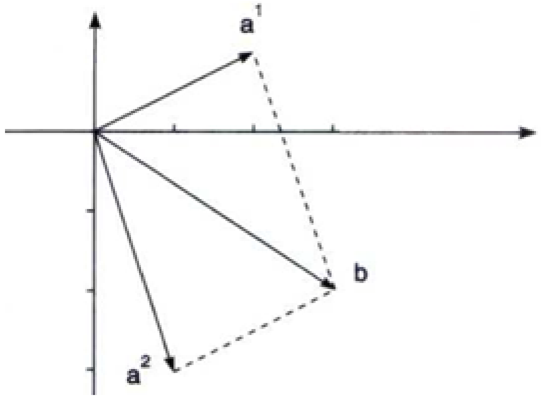
Sistemas Lineares

- Exemplo:

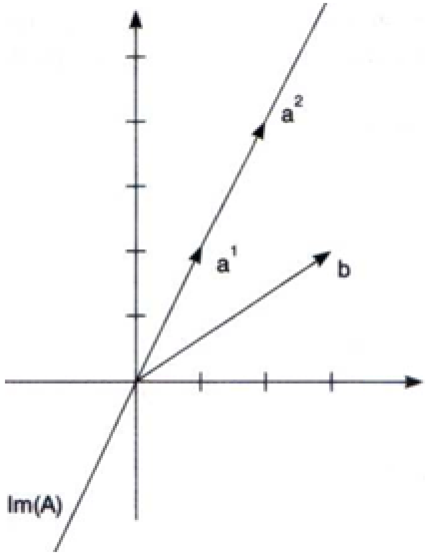
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

solução única $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

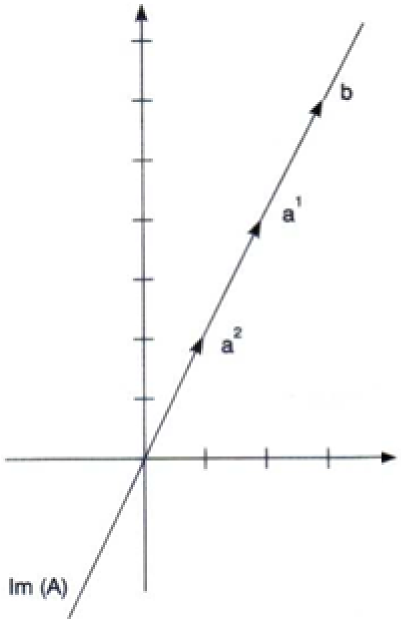


$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$



Nenhuma solução

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$



Infinitas soluções

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Sistemas de n equações e n incógnitas
- Tem solução única se e só se $\det \mathbf{A} \neq 0$.
- Poderiam ser resolvidos pela regra de Cramer: $x_i = \dfrac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$

Número de Equações	*Número de Operações*
2	11
3	59
5	1.349
10	101.575.099
20	~1,3 x 10^{20}

Número muito grande!

$\Rightarrow$ Necessitamos de métodos mais eficientes!

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Sistemas Lineares

- Métodos Diretos

Fornecem solução exata caso exista, a menos de arredondamentos, após um número finito de operações.

- Métodos Iterativos

Geram uma sequência de vetores $\{\mathbf{x}_k\}$, dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}_0$, que converge para solução $\mathbf{x}^*$, caso exista. Apesar de conduzirem a uma solução aproximada, têm vantagens computacionais e implicam menos recursos de memória do que os métodos diretos.

Chamaremos de $\bar{\mathbf{x}}$ uma solução aproximada do sistema linear.

Conteúdo da Semana

1. Sistemas lineares
2. Método da Eliminação de Gauss
3. Fatoração LU
4. Método iterativo de Gauss-Jacobi
5. Método iterativo de Gauss-Seidel
6. Comparação entre os métodos

- O método
- Sistemas equivalentes
- A eliminação
- Estratégias de pivoteamento
- Sistemas sem solução única

Método da Eliminação de Gauss

- O Método da Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema original em um sistema equivalente (que tem a mesma solução) com matriz dos coeficientes triangular superior.

- Sistema linear triangular tem solução imediata:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Substituição regressiva

$$\boxed{\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}}$$

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}}$$

Método da Eliminação de Gauss

- Representando elementos não nulos por "*"

Sistema original

$$\begin{cases} * x_1 + * x_2 + \ldots + * x_n = * \\ * x_1 + * x_2 + \ldots + * x_n = * \\ \vdots \\ * x_1 + * x_2 + \ldots + * x_n = * \end{cases}$$

Operações elementares entre equações

Sistema equivalente transformado

$$\begin{cases} * x_1 + * x_2 + \ldots + * x_n = * \\ \quad * x_2 + \ldots + * x_n = * \\ \quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad * x_n = * \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \ldots & * \\ * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & * \end{bmatrix}}_{\text{Matriz } \mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{vetor } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}}_{\text{vetor } \mathbf{b}}$$

Operações elementares na matriz aumentada

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & * \end{bmatrix}}_{\text{Matriz } \mathbf{A}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{vetor } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}}_{\text{vetor } \mathbf{b}^*}$$

Método da Eliminação de Gauss

- As operações elementares (que transformam o sistema em um sistema equivalente, ou seja, cuja solução é a mesa) são:

i. Trocar duas equações (ou linhas);

ii. Multiplicar uma ou mais equações (ou linhas) por constantes não nula;

iii. Trocar uma equação (ou linha) por ela mesma somada a um múltiplo de outra equação (ou linha).

Método da Eliminação de Gauss

- Eliminação progressiva de variáveis: da esquerda para a direita, de cima para baixo (abaixo da diagonal principal).

Pivôs anteriores a j

$$\begin{bmatrix}
a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} & \cdots a_{1j}^{(j)} & \cdots a_{1n}^{(j)} & b_1^{(j)} \\
0 & a_{22}^{(j)} & \cdots a_{2j}^{(j)} & \cdots a_{2n}^{(j)} & b_2^{(j)} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots\ a_{jj}^{(j)} & \cdots a_{jn}^{(j)} & b_j^{(j)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots a_{nj}^{(j)} & \cdots a_{nn}^{(j)} & b_n^{(j)}
\end{bmatrix}$$

Pivô

Matriz aumentada

Elementos a serem eliminados na iteração j

Método da Eliminação de Gauss

- À equação i $(> j)$ subtrai-se o múltiplo m_{ij} da equação j

$$\boxed{m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad L_i \leftarrow L_i - m_{ij} L_j}$$

- Se $a_{jj} = 0$ (ou próximo de zero!) troca-se a equação j com a i, de maneira que o elemento a_{ij} abaixo da diagonal principal na mesma coluna seja diferente de zero.

Método da Eliminação de Gauss

- Continuar a eliminação (ou pivoteamento) até que $j = n$

(a partir daí, basta fazer a substituição regressiva para finalizar a resolução)

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots a_{1j}^{(n)} & \cdots a_{1n}^{(n)} & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \cdots a_{2j}^{(n)} & \cdots a_{2n}^{(n)} & b_2^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots\ a_{jj}^{(n)} & \cdots a_{jn}^{(n)} & b_j^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots \boxed{a_{nn}^{(n)}} & b_n^{(n)} \end{array}\right]$$

Último pivô

Método da Eliminação de Gauss

- Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$m_{21} = \frac{1}{3} \quad , \quad m_{31} = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - m_{21} L_1 \\ L_3 \to L_3 - m_{31} L_1}]{}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = (5/3) \\ (1/3)x_2 - (22/3)x_3 = (5/3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{} \quad m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = (5/3) \\ -(24/3)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{} \quad x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Método da Eliminação de Gauss

- Problema: Pivô nulo ou próximo de zero!

- Estratégia de pivoteamento parcial

No início de cada eliminação de Gauss, trocando as linhas se necessário, escolher para o pivô o maior $|a_{ij}|$ da coluna j (com $i \geq j$).

- Estratégia de pivoteamento total

No início de cada etapa, escolher para o pivô o maior (em módulo) entre todos elementos que ainda atuam no processo de eliminação.

Problema: Muitas operações de comparação!

Método da Eliminação de Gauss

- Pivoteamento parcial X Pivoteamento total

Parcial

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 - x_4 = 5 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 6 \\ 0x_1 \boxed{- 3x_2} - 5x_3 + 7x_4 = 7 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 - x_4 = 5 \\ 0x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 7 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 6 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{continuar}}$$

Total

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 - x_4 = 5 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 6 \\ 0x_1 - 3x_2 - 5x_3 \boxed{+ 7x_4} = 7 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + -x_4 + 1x_3 + 2x_2 = 5 \\ 0x_1 + 7x_4 + 5x_3 - 3x_2 = 7 \\ 0x_1 + 3x_4 + 0x_3 + 1x_2 = 6 \\ 0x_1 + 0x_4 + 4x_3 + 2x_2 = 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{continuar}}$$

Método da Eliminação de Gauss

- Sistemas com $m \neq n$ ou matriz dos coeficientes singular $(\det \mathbf{A} = 0)$

$$\begin{bmatrix} \overset{piv\hat{o}}{[2]} & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ -8 & -6 & -8 \\ 4 & 9 & 10 \end{bmatrix} \tilde{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tilde{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & \overset{piv\hat{o}}{[6]} & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0=2 significa que não existe solução

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Conteúdo da Semana

1. Sistemas lineares
2. Método da Eliminação de Gauss
3. Fatoração LU
4. Método iterativo de Gauss-Jacobi
5. Método iterativo de Gauss-Seidel
6. Comparação entre os métodos

- O método
- Como encontrar L e U

Fatoração LU

- Uma fatoração $\mathbf{LU}$ de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ na qual $\mathbf{L}$ é triangular inferior com diagonal unitária e $\mathbf{U}$ é triangular superior.

- Dado o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a resolução pode ser feita da seguinte forma:

$$(\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b} \qquad \Rightarrow \text{Resolver} \quad \begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{cases}$$

- Vantagem de processos de fatoração: Pode-se resolver qualquer sistema linear que tenha $\mathbf{A}$ como matriz dos coeficientes. Alterando apenas o vetor b, a resolução do novo sistema linear será quase imediata.

Fatoração LU

- Exemplo: $\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 = -1 \end{cases}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow y_1 = 8 \ \text{ e } y_2 = -29/5$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -29/5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \boxed{x_1 = -21/5 \ \text{ e } x_2 = -29/10}$$

Como calcular **L** e **U**?

Fatoração LU

- **L** e **U** podem ser encontrados usando a ideia básica do método da Eliminação de Gauss

$$\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(0)} & a_{12}{}^{(0)} & a_{13}{}^{(0)} \\ a_{21}{}^{(0)} & a_{22}{}^{(0)} & a_{23}{}^{(0)} \\ a_{31}{}^{(0)} & a_{32}{}^{(0)} & a_{33}{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}^{(0)}\mathbf{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(1)} & a_{12}{}^{(1)} & a_{13}{}^{(1)} \\ 0 & a_{22}{}^{(1)} & a_{23}{}^{(1)} \\ 0 & a_{32}{}^{(1)} & a_{33}{}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(0)} & a_{12}{}^{(0)} & a_{13}{}^{(0)} \\ a_{21}{}^{(0)} & a_{22}{}^{(0)} & a_{23}{}^{(0)} \\ a_{31}{}^{(0)} & a_{32}{}^{(0)} & a_{33}{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(2)} & a_{12}{}^{(2)} & a_{13}{}^{(2)} \\ 0 & a_{22}{}^{(2)} & a_{23}{}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}{}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(1)} & a_{12}{}^{(1)} & a_{13}{}^{(1)} \\ 0 & a_{22}{}^{(1)} & a_{23}{}^{(1)} \\ 0 & a_{32}{}^{(1)} & a_{33}{}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{M}^{(0)}\mathbf{A}^{(0)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1}\mathbf{A}^{(2)}$$

$\mathbf{A}^{(2)}$ é triangular superior

$\Rightarrow$ Tomar $\mathbf{A}^{(2)}$ como $\mathbf{U}$!

E $\left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1} =?$

Fatoração LU

$$\left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}$$

Os elementos abaixo da diagonal são os multiplicadores do processo de eliminação de Gauss

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}{}^{(2)} & a_{12}{}^{(2)} & a_{13}{}^{(2)} \\ 0 & a_{22}{}^{(2)} & a_{23}{}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}{}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Após a fatoração $\mathbf{LU}$:

$$\begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{cases}$$

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} = \left(\left(\mathbf{M}^{(0)}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}^{(1)}\right)^{-1}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{b} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{M}^{(0)}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

⇒ O vetor y é o vetor constante do lado direito obtido ao final da eliminação de Gauss

Fatoração LU

- Exemplo: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Após a 1ª iteração do método de Gauss (sem pivoteamento):

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1/3} & 1 & 0 \\ \boxed{4/3} & ? & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicadores!

Após 2ª iteração:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \quad \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Conteúdo da Semana

1. Sistemas lineares
2. Método da Eliminação de Gauss
3. Fatoração LU
4. Método iterativo de Gauss-Jacobi
5. Método iterativo de Gauss-Seidel
6. Comparação entre os métodos

- Ideia dos métodos iterativos
- O método
- Critério de parada
- Convergência

Método iterativo de Gauss-Jacobi

- Muitas aplicações contém matrizes grandes e esparsas (que contém muitos coeficientes nulos);
- A resolução de sistemas esparsos por métodos diretos é onerosa. O processo de triangularização não preserva a esparsidade original.
- Métodos iterativos são mais econômicos. Além disso, reduzem os erros de arredondamento na solução obtida por métodos exatos.
- Um método é iterativo quando fornece uma sequência de aproximações da solução. Cada uma das aproximações é obtida da anterior pela repetição do mesmo processo. Precisam sempre saber se a sequência de soluções aproximadas $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é convergente.

Método iterativo de Gauss-Jacobi

Estimativa inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$

Sequência: $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$

Para determinar a solução de um sistema linear por métodos iterativos, precisamos transformar o sistema dado em um outro sistema equivalente (mesma solução), onde possa ser definido um processo iterativo.

Método iterativo de Gauss-Jacobi

- Transformar o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$

$$\Rightarrow \ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Cx}^{(k)} + \mathbf{g}$$

- Como encontrar $\mathbf{C}$ e $\boldsymbol{g}$?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{M}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{D} + \mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Dx} = \mathbf{b} - \mathbf{Mx} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Fazendo $-(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) = \mathbf{C}$ e $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{g}$, temos: $\quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \boxed{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \boxed{\mathbf{g}}$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

(supondo que A foi reordenada de modo que todos os seus elementos da diagonal sejam não nulos)

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & \cdots & -a_{n-1,n}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$$

$$x_1{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2{}^{(k)} - a_{13}x_3{}^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n{}^{(k)}\right)$$

$$x_2{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1{}^{(k)} - a_{23}x_3{}^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n{}^{(k)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1{}^{(k)} - a_{n2}x_2{}^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i{}^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j{}^{(k)}}{a_{ii}}}$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

- O processo é repetido até que o vetor $\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}$ esteja suficientemente próximo do vetor $\mathbf{x}^{(\mathbf{k-1})}$.

- Em geral define-se um número máximo de iterações e dada uma precisão ε exige-se que:

$$\boxed{d^{(\mathrm{k})} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i{}^{(\mathrm{k})} - x_i{}^{(\mathrm{k-1})} \right| < \varepsilon}$$

- Podemos efetuar o teste do erro relativo e exigir:

$$\boxed{d_r{}^{(\mathrm{k})} = \frac{d^{(\mathrm{k})}}{\max_{1 \le i \le n} \left| x_i{}^{(\mathrm{k})} \right|} < \varepsilon}$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

- Exemplo: $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$ com $\varepsilon = 0.05$ e $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -2/10 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

É o mesmo que o isolamento do vetor $\mathbf{x}$ mediante a separação pela diagonal:

$$10\ x_1 = 7 - 2\ x_2 - \ x_3 \qquad \rightarrow x_1 = \frac{7}{10} - \frac{2}{10}\ x_2 - \frac{1}{10} x_3$$

$$5\ x_2 = -8 - 1\ x_1 - \ x_3 \qquad \rightarrow x_2 = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}\ x_1 - \frac{1}{5} x_3$$

$$10\ x_3 = 6 - 2\ x_1 - 3\ x_2 \qquad \rightarrow x_3 = \frac{6}{10} - \frac{2}{10}\ x_1 - \frac{3}{10}\ x_2$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

1ª Iteração:

$$x_1{}^{(1)} = -0.2\ x_2{}^{(0)} - 0.1\ x_3{}^{(0)} + 0.7 = -0.2\ (-1.6) - 0.1\ (0.6) + 0.7 = 0.96$$
$$x_2{}^{(1)} = -0.2\ x_1{}^{(0)} - 0.2\ x_3{}^{(0)} - 1.6 = -0.2\ (0.7) - 0.2\ (0.6) - 1.6 = -1.86$$
$$x_3{}^{(1)} = -0.2\ x_1{}^{(0)} - 0.3\ x_2{}^{(0)} + 0.6 = -0.2\ (0.7) - 0.3\ (-1.6) + 0.6 = 0.94$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{bmatrix}$$

Critério de parada satisfeito?

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 0.26 > 0.05$$
$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = 0.26 > 0.05$$
$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = 0.34 > 0.05$$

2ª Iteração:

$$\Rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{bmatrix}$$

Critério de parada satisfeito?

$$\max_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = 0.12 > \varepsilon$$

3ª Iteração:

$$\Rightarrow \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.999 \\ 0.998 \end{bmatrix}$$

Critério de parada satisfeito?

$$\max_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right| = 0.032 < \varepsilon$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

- **Teorema - Critério das linhas:** Sejam

$$\alpha_k = \frac{\left(\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\right)}{|a_{kk}|} \qquad \alpha = \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k$$

Se, $\alpha < 1$ então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independente da escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

Isto equivale a dizer que o método converge se (para todo k):

$$|a_{kk}| > |a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{kn}|.$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

- No exemplo anterior: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} < 1$, $\alpha_2 = \frac{1+1}{5} < 1$ e $\alpha_3 = \frac{2+3}{10} < 1$ $\Rightarrow$ Método converge!

- Podemos tentar uma permutação de linhas e/ou colunas de forma a obtermos uma disposição para a qual a matriz dos coeficientes satisfaça o critério das linhas, pois desta forma a convergência está assegurada.

Por exemplo:

Substituir $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ por $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Conteúdo da Semana

1. Sistemas lineares
2. Método da Eliminação de Gauss
3. Fatoração LU
4. Método iterativo de Gauss-Jacobi
5. $\boxed{\text{Método iterativo de Gauss-Seidel}}$
6. Comparação entre os métodos

Método iterativo de Gauss-Seidel

- Ao se calcular x_j^{k+1} usa-se todos os valores $x_1^{k+1},\ldots,x_{j-1}^{k+1}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{k},\ldots,x_n^{k}$ restantes.
- Ou seja, à medida que cada novo valor de x_j é calculado pelo método de Gauss-Seidel, ele é imediatamente usado na próxima equação.

$$x_1{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2{}^{(k)} - a_{13}x_3{}^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n{}^{(k)}\right)$$
$$x_2{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1{}^{(k+1)} - a_{23}x_3{}^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n{}^{(k)}\right)$$
$$x_3{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1{}^{(k+1)} - a_{32}x_2{}^{(k+1)} - a_{34}x_4{}^{(k)} \cdots - a_{3n}x_n{}^{(k)}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1{}^{(k+1)} - a_{n2}x_2{}^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k+1)}\right)$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Conteúdo da Semana

1. Sistemas lineares
2. Método da Eliminação de Gauss
3. Fatoração LU
4. Método iterativo de Gauss-Jacobi
5. Método iterativo de Gauss-Seidel
6. Comparação entre os métodos

Comparação entre os métodos

- Convergência

- Métodos Diretos → Convergência garantida para qualquer sistema não-singular

- Métodos Iterativos → Convergência assegurada apenas sob determinadas condições.

Comparação entre os métodos

- Esparsidade

  - Métodos Diretos → Durante o processo de eliminação podem surgir elementos não-nulos em posições a_{ij} que originalmente eram nulas.

  - Métodos Iterativos → Principal vantagem é não alterar a estrutura da matriz A dos coeficientes, então, neste caso é muitas vezes preferível

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Comparação entre os métodos

- Erros

  - Métodos Diretos → Sérios problemas com erros de arredondamento, para amenizar usamos técnicas de pivoteamento

  - Métodos Iterativos → Somente os erros cometidos na última iteração afetam a solução.

    ↓

    Erros cometidos nas iterações anteriores não levarão à divergência do processo, nem à convergência a um outro vetor que não a solução

CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo