# Semana 2 – Parte 1

## CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

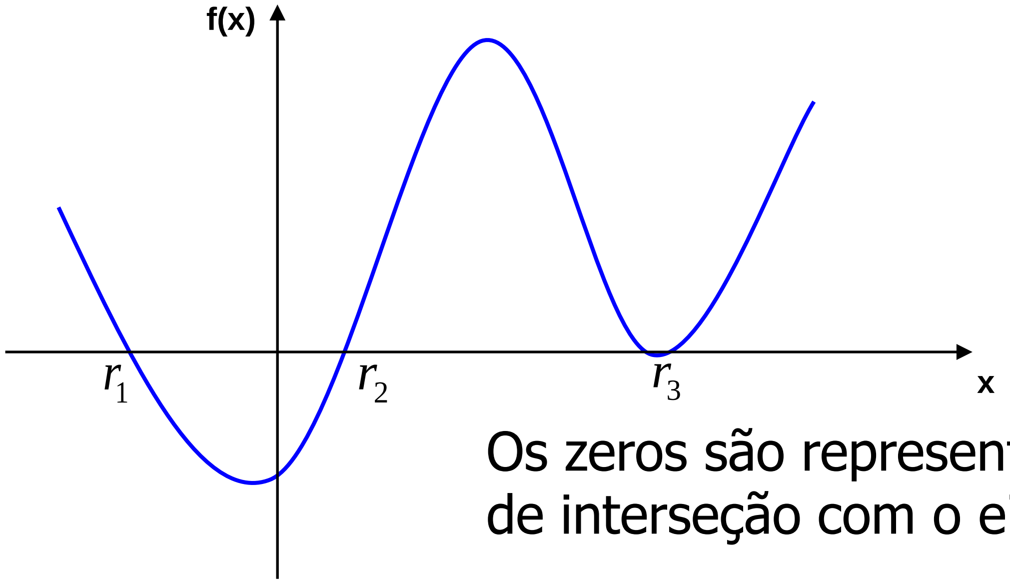
# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
5. Método do ponto fixo
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Zeros reais de funções

- Definição do problema: Encontrar valores reais de $x$ que satisfaçam $f(x) = 0$, isto é, encontrar os zeros da função (ou raízes da equação).




Os zeros são representados pelos pontos de interseção com o eixo $x$

- Este problema aparece em diversas aplicações e projetos de engenharia.

# Zeros reais de funções

- Métodos diretos
  - Métodos analíticos
  - Fornecem soluções exatas
  - Porém, são aplicáveis a apenas alguns tipos de problemas envolvendo por exemplo, funções do 1º e 2º grau.
- Métodos iterativos
  - Geram sucessões de soluções aproximadas
  - Aplicáveis a uma vasta gama de problemas, envolvendo função polinomiais de grau mais alto e funções transcendentais (não algébricas) como trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
5. Método do ponto fixo
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

- Panorama
- Aproximação inicial: análise gráfica
- Aproximação inicial: análise teórica
- Refinamento

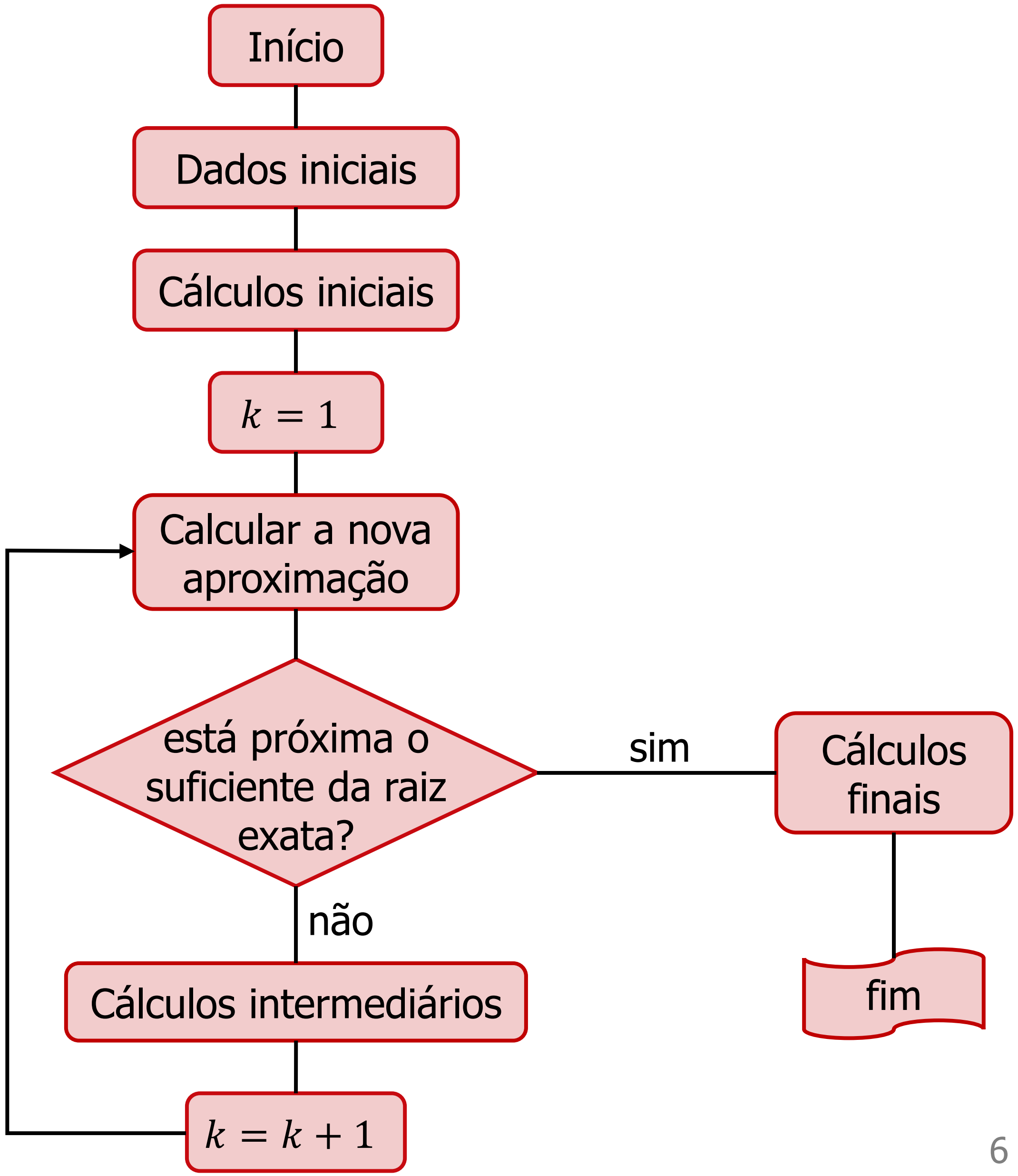
# Métodos iterativos



- Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos.
- **Ideia central:** partir de uma aproximação inicial $x_0$ para a raiz e em seguida refinar essa aproximação por meio de um processo iterativo do tipo:

$$x_i = F(x_{i-1}), \qquad i = 1, \cdots n$$

- $F(x)$ é chamada função de iteração



# Métodos iterativos



- Em geral, tem-se então duas etapas:
- Fase I: Localizar ou Isolar uma raiz (Aproximação inicial)

  Obtenção de um intervalo $[a, b]$ que contém uma única raiz $r$ por meio de:

  - Análise gráfica da função e/ou
  - Análise teórica da função.

- Fase II: Refinamento

  A partir de um valor inicial $x_o$ em $[a, b]$, gerar uma sequência $\{x_o, x_1, \cdots, x_k, \cdots\}$ que seja convergente para $r$.

# Métodos iterativos

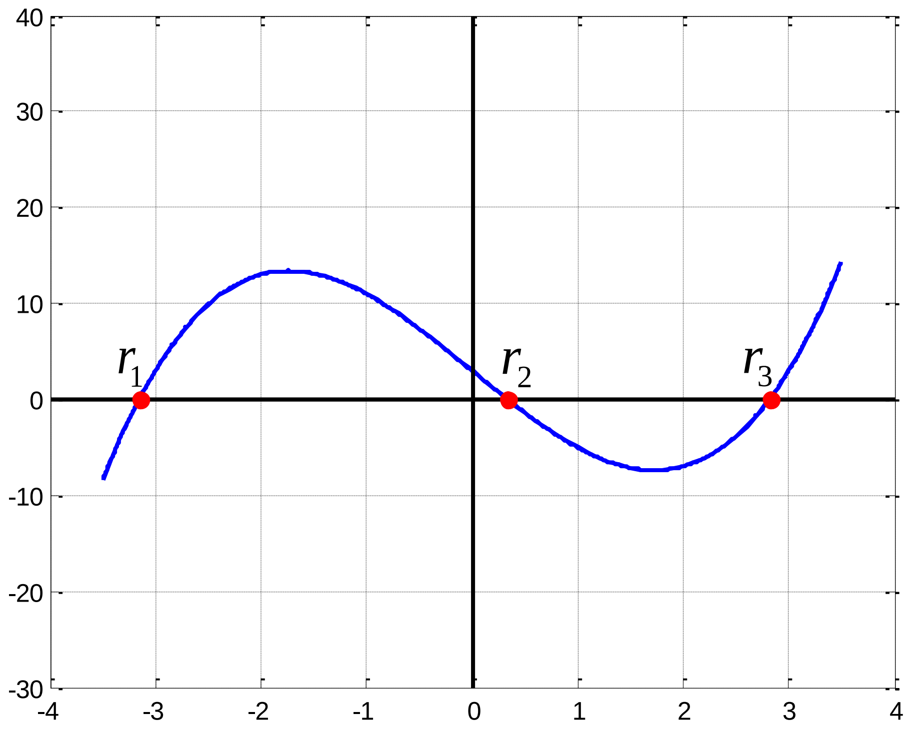


- Análise de gráficos para uma aproximação grosseira da raiz:
  - Esboçar o gráfico da função $f$ e localizar as abcissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo $x$.
  - A partir da equação $f(x) = 0$, obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$. Esboçar os gráficos destas funções e localizar os pontos onde as curvas se interceptam.
- As técnicas gráficas tem valor prático pouco limitado por não serem precisas, mas proporcionam uma aproximação inicial para os outros métodos numéricos.
- Além disso, conhecemos as propriedades das funções (para antecipar possíveis "armadilhas" dos métodos).

# Métodos iterativos



- Exemplo 1: $f(x) = x^3 - 9x + 3$




$r_1 \in [-4, -3]$

$r_2 \in [0, 1]$

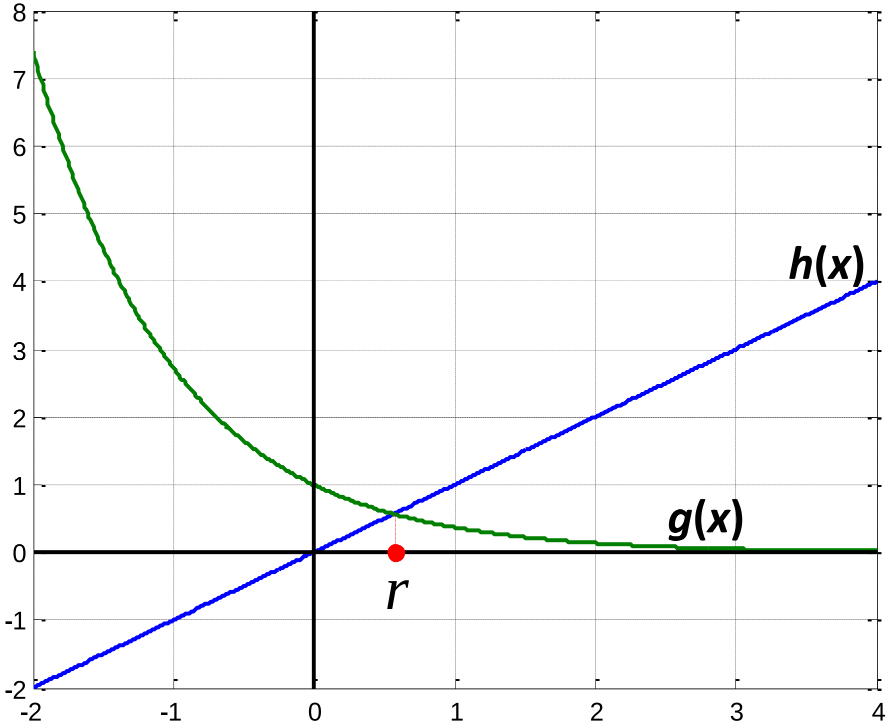
$r_3 \in [2, 3]$

- Exemplo 2: $f(x) = e^{-x} - x = 0$

$x = e^{-x}$

$g(x) = e^{-x} \qquad \therefore r \in [0,1]$

$h(x) = x$

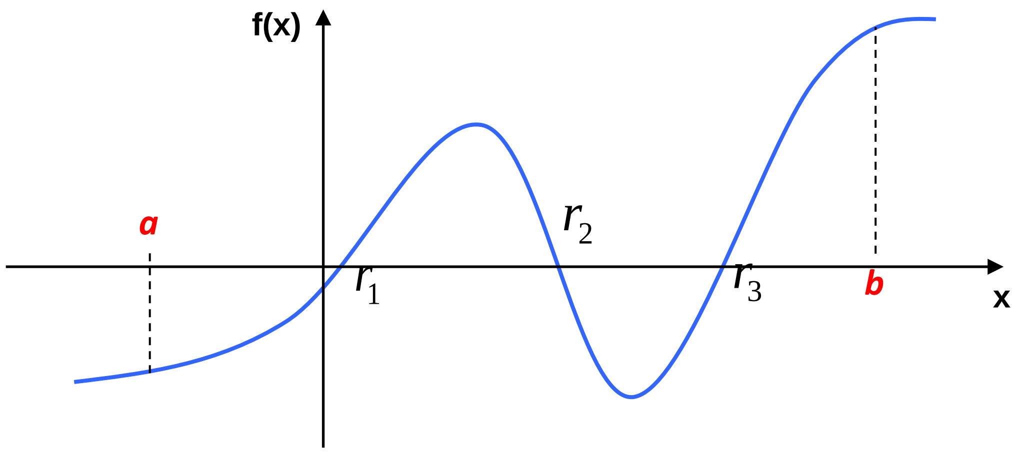


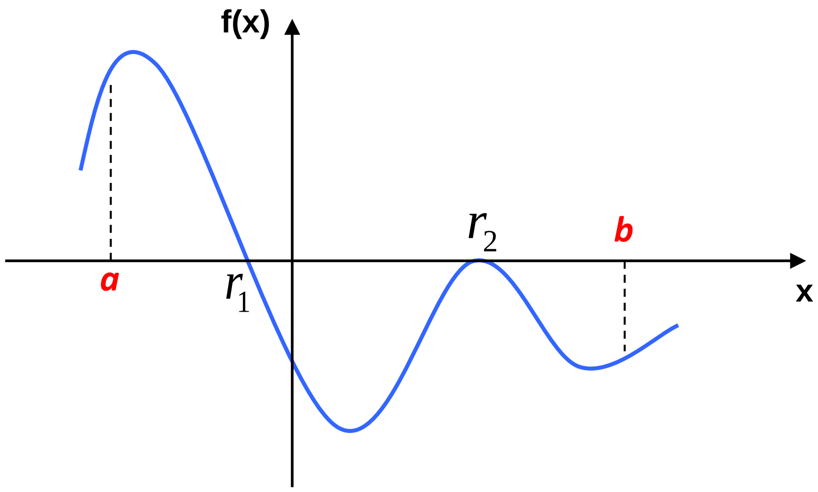
# Métodos iterativos



- Teorema do valor intermediário (TVI) ou Teorema de Bolzano

Seja uma função **contínua** no intervalo $[a, b]$. Se $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto x entre a e b que é zero de $f$.

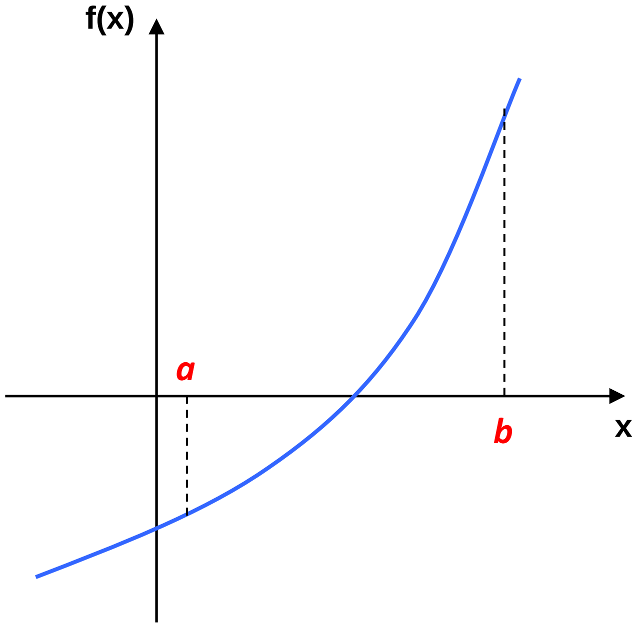


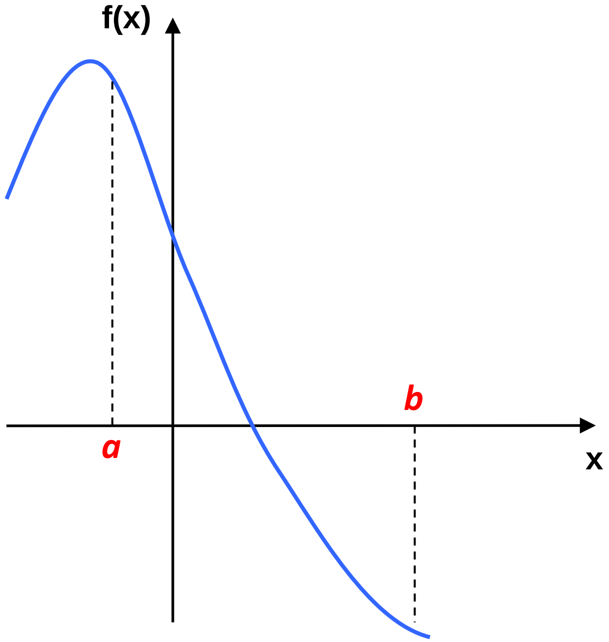
# Métodos iterativos



- Sob as hipóteses do teorema anterior, se f′(x) existir e preservar o sinal em [a, b], então existe uma única raiz neste intervalo.
- Graficamente:




$$f'(x) > 0, \forall x \in [a,b]$$



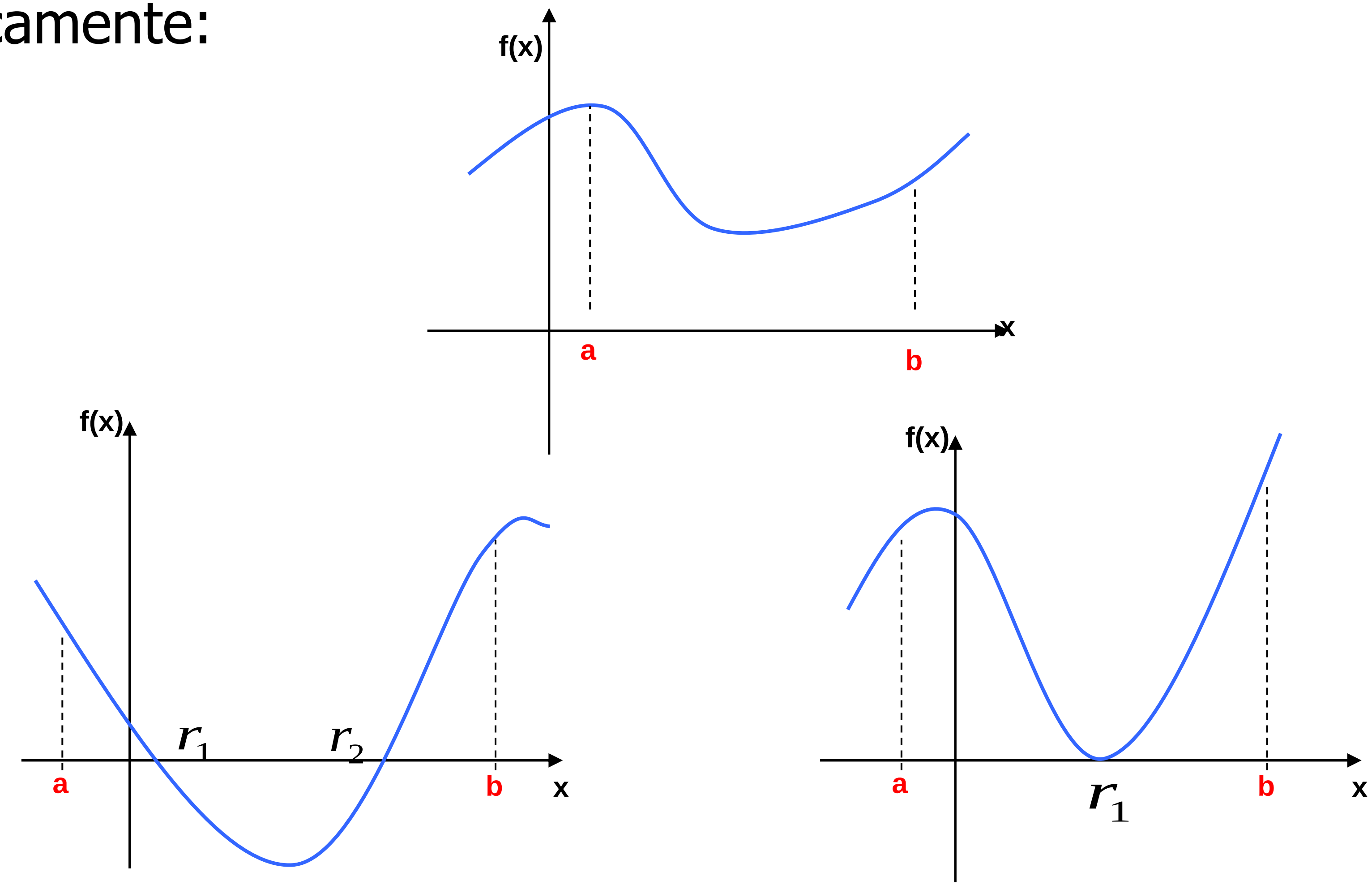

$$f'(x) < 0, \forall x \in [a,b]$$

# Métodos iterativos



Se $f(a)f(b) > 0$ então pode existir ou não raízes no intervalo $[a, b]$.

Graficamente:



# Métodos iterativos



Exemplo 1: Análise do sinal de f(x): $f(x) = x^3 - 9x + 3$

| $x$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Como $f$ é contínua, existe ao menos um zero de f(x) em cada um dos intervalos $I_1 = [-5,-3]$, $I_2 = [0,1]$, $I_3 = [2,3]$.

Além disso: $f'(x) = 3x^2 - 9$, que conserva o sinal em cada um dos intervalos,

$\Rightarrow$ cada raiz é única no intervalo.

# Métodos iterativos



- Com o estudo do gráfico e o estudo analítico, chegamos a resultados aproximados, mas ainda distantes do ideal...
- A fase de refinamento que veremos a seguir é o que diferencia os métodos.
- Importante notar que os métodos que vamos estudar nesta aula partem sempre de um intervalo de separação, isto é, intervalos que contem apenas uma raiz.

# Métodos iterativos



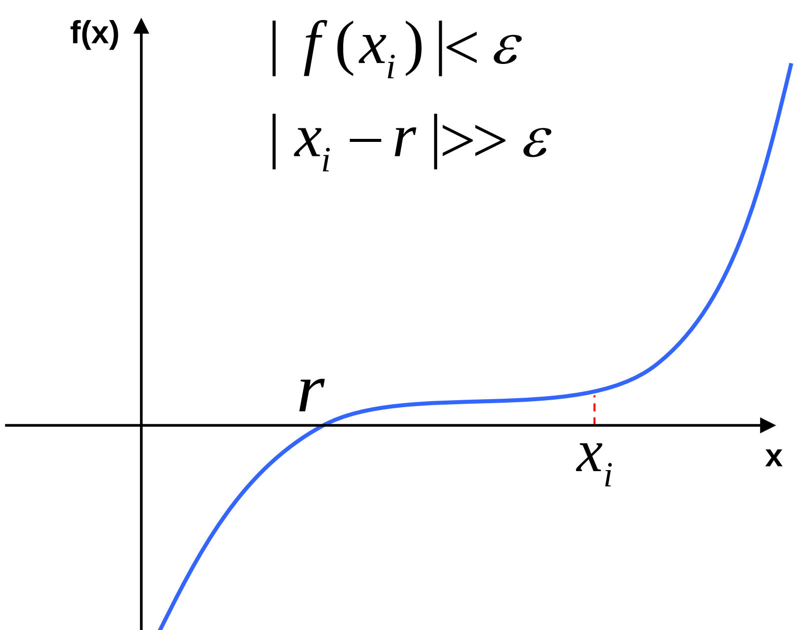
- Critério de parada

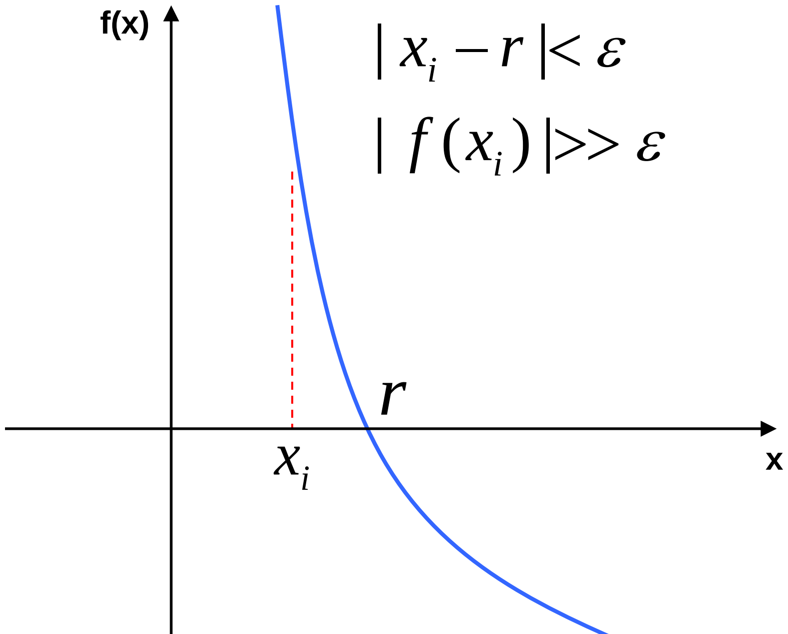
  - O valor de $x_i$ é raiz aproximada com precisão $\varepsilon$ se:

i) $|x_i - r| < \varepsilon$

ii) $|f(x_i)| < \varepsilon$

- Nem sempre é possível ter as duas exigências satisfeitas:



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
5. Método do ponto fixo
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

- O método
- Número de iterações
- Vantagens e desvantagens

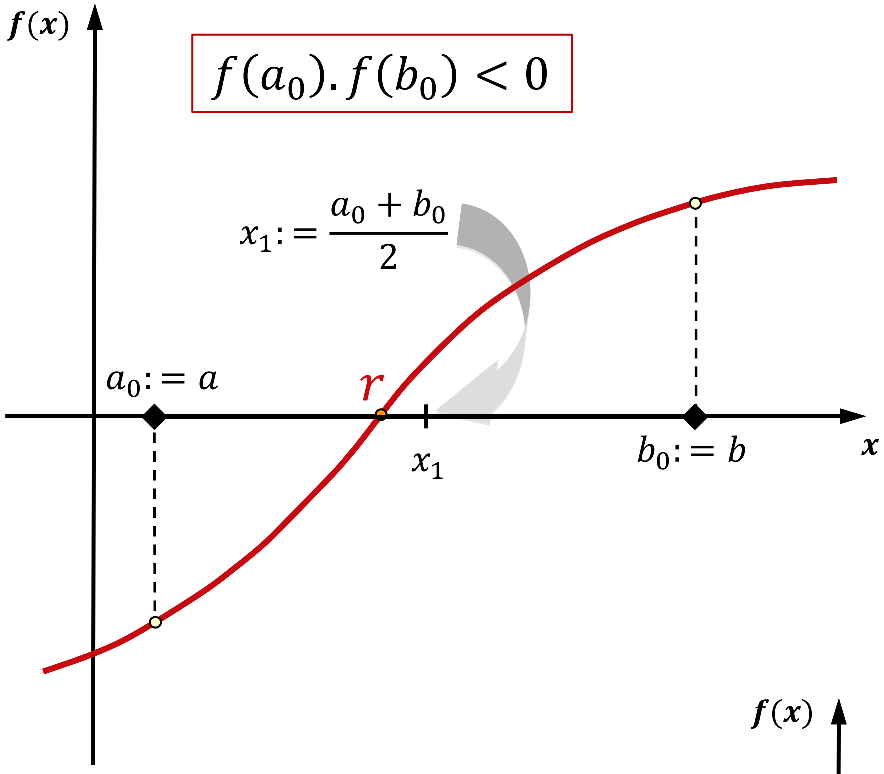
# Método da bissecção



- Considere $f$ contínua no intervalo $[a,b]$ e tal que $f(a).f(b) < 0$, supondo que este intervalo contenha apenas uma única raiz.
- O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz o subdividindo sucessivas vezes pelo ponto médio.
- Critério de parada: O processo iterativo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor que uma precisão pré-estabelecida $\varepsilon$.
- Convergência: Se $f$ é contínua em $[a,b]$ e $f(a).f(b) < 0$, então o método da bisseção gera uma sequência que converge para um zero de $f$.

# Método da bissecção



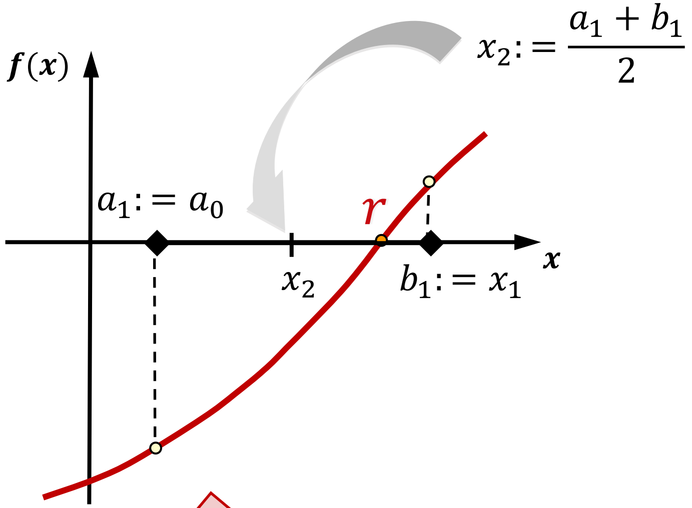



Determinar novo intervalo:

$f(a_0).f(x_1) < 0$ ?

SIM!

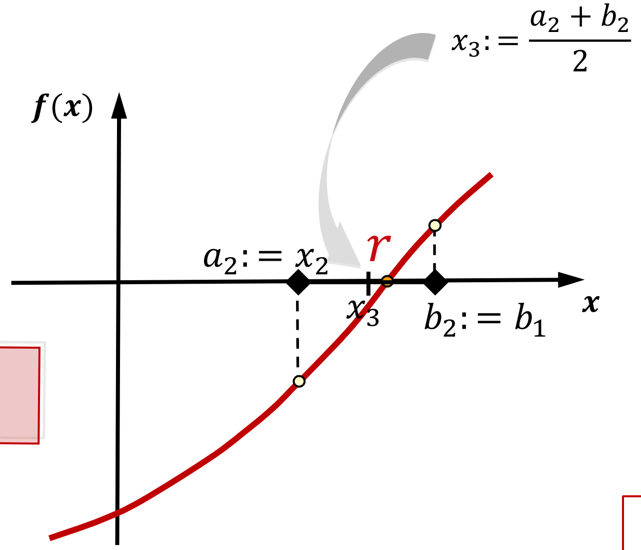
$\Rightarrow [a_1, b_1] \coloneqq [a_o, x_1]$




$f(a_1).f(x_2) < 0$ ?

NÃO!

$\Rightarrow [a_2, b_2] \coloneqq [x_2, b_1]$




Repete-se o processo até que o **critério de parada** seja atendido:

$$|b_k - a_k| < \varepsilon$$

Função de iteração:

$$x_{k+1} := \frac{a_k + b_k}{2}, k = 0,1,2,\cdots$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Método da bissecção

- Exemplo 1: $f(x) = x^3 - x - 1$, considerando $\varepsilon = 0{,}002$

Intervalo inicial atribuído: $[a_0, b_0] = [1, 2]$

$f(a_0).f(b_0) = -1.5 < 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow$ Sinal da derivada em [1,2]: +

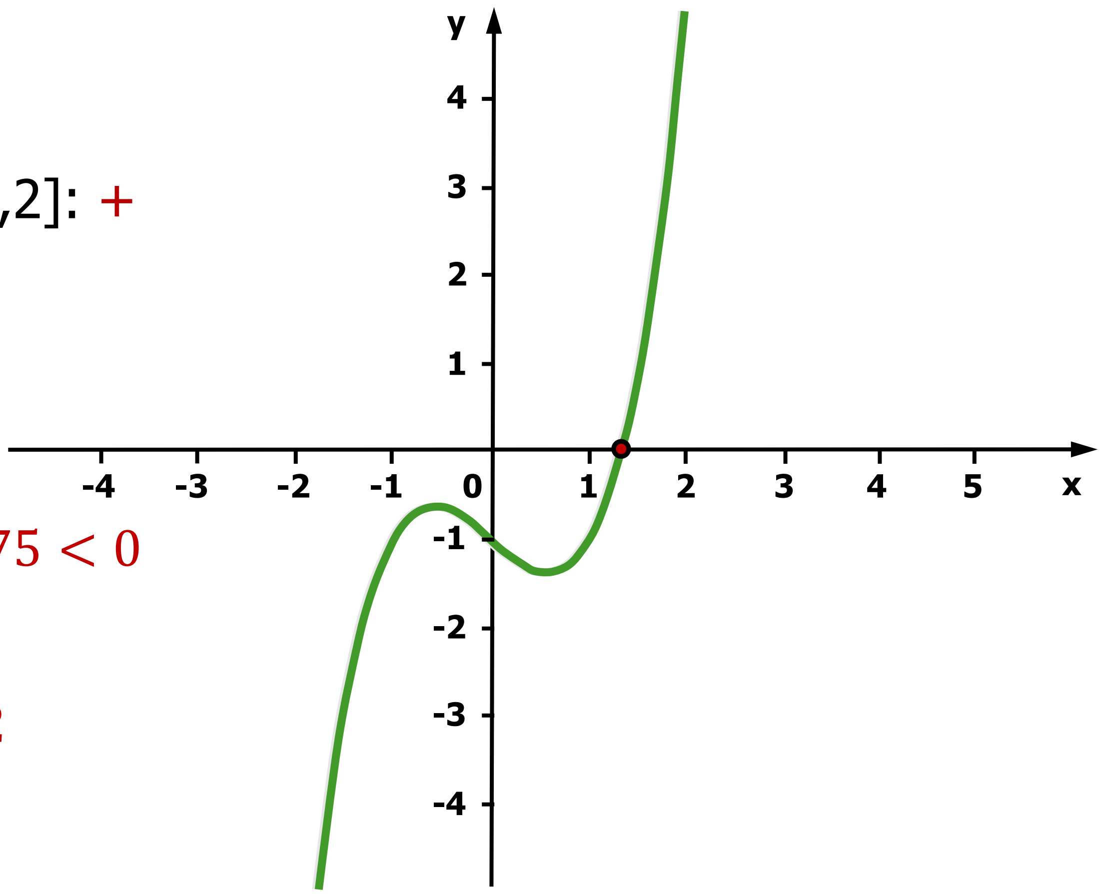
1ª iteração:

Ponto médio: $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = 1{,}5$

Para novo intervalo: $f(a_0).f(x_1) = -1.0{,}875 < 0$

$\Rightarrow [a_1, b_1] := [a_o, x_1]$

Critério de parada: $|a_1 - b_1| = 0{,}5 > 0{,}002$



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Método da bissecção

| $k$ | Intervalo | | Ponto médio | Para novo intervalo | | Critério de parada | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_k$ | $b_k$ | $x_{k+1}$ | $f(a_k)$ | $f(x_{k+1})$ | $\|b_k - ak\|$ | $\|f(x_k)\|$ |
| 0 | 1,000000 | 2,000000 | 1,500000 | −1,000000 | 0,875000 | – | – |
| 1 | 1,000000 | 1,500000 | 1,250000 | −1,000000 | −0,296875 | 0,500000 | 0,875000 |
| 2 | 1,250000 | 1,500000 | 1,375000 | −0,296875 | 0,224609 | 0,250000 | 0,296875 |
| 3 | 1,250000 | 1,375000 | 1,312500 | −0,296875 | −0,051514 | 0,125000 | 0,224609 |
| 4 | 1,312500 | 1,375000 | 1,343750 | −0,051514 | 0,082611 | 0,062500 | 0,051514 |
| 5 | 1,312500 | 1,343750 | 1,328125 | −0,051514 | 0,014576 | 0,031250 | 0,082611 |
| 6 | 1,312500 | 1,328125 | 1,320312 | −0,051514 | −0,018711 | 0,015625 | 0,014576 |
| 7 | 1,320312 | 1,328125 | 1,324218 | −0,018713 | −0,002129 | 0,007813 | 0,018711 |
| 8 | 1,324218 | 1,328125 | 1,326172 | −0,002129 | 0,006208 | 0,003906 | 0,002129 |
| 9 | 1,324218 | 1,326172 | 1,325195 | −0,002129 | 0,002036 | 0,001953 | 0,006208 |

$r \approx 1{,}3252$ $\quad \varepsilon = 0{,}002$

# Método da bissecção



- Como em cada passo, dividimos o intervalo por 2, temos:
  - 1ª iteração ($n=1$): é $\dfrac{(b-a)}{2}$
  - 2ª iteração ($n=2$): é $\dfrac{(b-a)}{2^2}$
  - 3ª iteração ($n=3$): é $\dfrac{(b-a)}{2^3}$

    $\vdots \qquad \vdots$
  - $n$ª iteração: é $\dfrac{(b-a)}{2^n}$

O número de iterações é dependente da tolerância considerada

- Tolerância = ε ⇒ temos que achar o maior inteiro que satisfaz: $\dfrac{(b-a)}{2^n} \leq \varepsilon$

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \ln\left(\frac{b-a}{2^n}\right) \leq \ln \varepsilon \Rightarrow \ln(b-a) - \ln 2^n \leq \ln \varepsilon \Rightarrow$$

$$\ln(b-a) - n \ln 2 \leq \ln \varepsilon \Rightarrow \boxed{n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}}$$

# Método da bissecção



- Vantagens:
  - Facilidade de implementação;
  - Estabilidade e convergência para a solução procurada;
  - Desempenho regular e previsível.

- Desvantagens:
  - Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de $f$ em um elevado número de iterações);
  - Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);
  - Não funciona se a raiz tangenciar o eixo $x$.

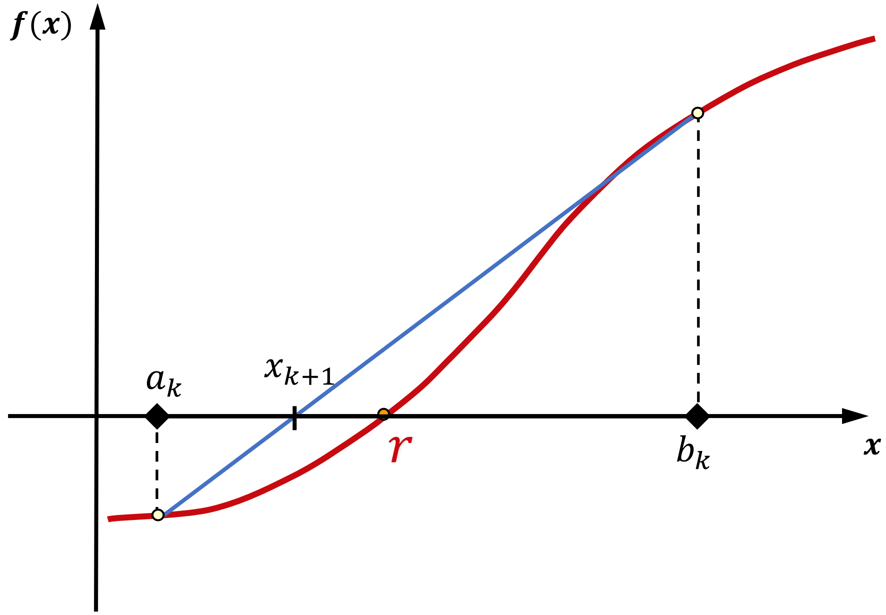
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
   - O método
   - Vantagens e desvantagens
5. Método do ponto fixo
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

# Método da posição falsa

- Assim como o método da bisseção, também é um método de quebra (realizada na interseção com eixo $x$ da reta definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ).




- Para determinar a iteração $x_{k+1}$ é tirada a média ponderada em vez da média aritmética:

$$x_{k+1} := \frac{a_k|f(b_k)| + b_k|f(a_k)|}{|f(b_k)| + |f(a_k)|} \Rightarrow \boxed{x_{k+1} := \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}}$$

# Método da posição falsa

- Exemplo 2: $f(x) = x^3 - x - 1$, considerando $\varepsilon = 0{,}002$

| $k$ | Intervalo | | Iteração | Para novo intervalo | | Critério de parada | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_k$ | $b_k$ | $x_{k+1}$ | $f(a_k)$ | $f(x_{k+1})$ | $\|b_k - ak\|$ | $\|f(x_k)\|$ |
| 0 | 1,000000 | 2,000000 | 1,166667 | −1,000000 | −0,578704 | − | − |
| 1 | 1,166667 | 2,000000 | 1,253112 | −0,578704 | −0,285363 | 0,8333333 | 0,578704 |
| 2 | 1,253112 | 2,000000 | 1,293437 | −0,285363 | −0,129542 | 0,7468880 | 0,285363 |
| 3 | 1,293437 | 2,000000 | 1,311281 | −0,129542 | −0,056589 | 0,7065626 | 0,129542 |
| 4 | 1,311281 | 2,000000 | 1,318989 | −0,056589 | −0,024304 | 0,6887190 | 0,056588 |
| 5 | 1,318989 | 2,000000 | 1,322283 | −0,024304 | −0,010362 | 0,6810115 | 0,024304 |
| 6 | 1,322283 | 2,000000 | 1,323684 | −0,010362 | −0,004404 | 0,6777173 | 0,010362 |
| 7 | 1,323684 | 2,000000 | 1,324280 | −0,004404 | −0,001869 | 0,6763157 | 0,004404 |
| 8 | 1,324280 | 2,000000 | 1,324532 | −0,001869 | −0,0007930 | 0,6757205 | 0,001869 |

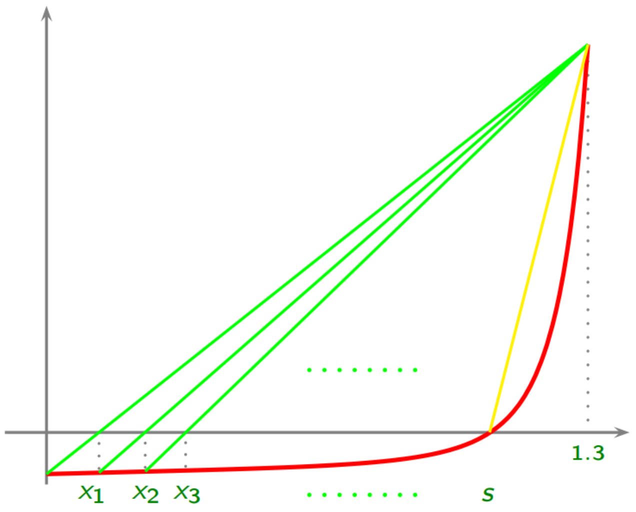
$r \approx 1{,}3245$

$\varepsilon = 0{,}002$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Método da posição falsa

- Exemplo 2: $f(x) = x + e^{x^5} - 5$




| $n$ | $a_n$ | $f(a_n)$ | $b_n$ | $f(b_n)$ | $x_{n+1}$ | $f(x_{n+1})$ | $\varepsilon_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | +0.000 | −4.000 | +1.300 | +37.274 | +0.126 | −3.87 | +3.87 |
| 1 | +0.126 | −3.874 | +1.300 | +37.274 | +0.237 | −3.76 | +3.76 |
| 2 | +0.237 | −3.763 | +1.300 | +37.274 | +0.334 | −3.66 | +3.66 |
| 3 | +0.334 | −3.662 | +1.300 | +37.274 | +0.420 | −3.57 | +3.57 |
| 4 | +0.420 | −3.566 | +1.300 | +37.274 | +0.497 | −3.47 | +3.47 |
| 5 | +0.497 | −3.472 | +1.300 | +37.274 | +0.566 | −3.37 | +3.37 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 50 | +1.065 | −0.008 | +1.300 | +37.274 | +1.065 | $-6.64 \times 10^{-3}$ | $+6.64 \times 10^{-3}$ |
| 51 | +1.065 | −0.007 | +1.300 | +37.274 | +1.065 | $-5.54 \times 10^{-3}$ | $+5.54 \times 10^{-3}$ |
| 52 | +1.065 | −0.006 | +1.300 | +37.274 | +1.065 | $-4.63 \times 10^{-3}$ | $+4.63 \times 10^{-3}$ |

O método das bissecções sucessivas aplicado a este problema garante o mesmo erro máximo em 9 iterações!

⇒ Com métodos de localização de raízes não é simples fazer generalizações.

# Método da posição falsa



- Vantagens:
  - Facilidade de implementação;
  - Em muitos casos tem um melhor desempenho quando comparado ao método da bisseção.
- Principal desvantagem:
  - É unilateral, isto é, uma das extremidades tenderá a permanecer fixa, o que pode levar a convergência insatisfatória.

# Parte 1 – Fim

## CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Semana 2 – Parte 2

## CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
5. Método do ponto fixo
   - O método
   - Convergência
   - Vantagens e desvantagens
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

# Método do Ponto Fixo



- Seja $f$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz $r$ da equação $f(x) = 0$.

- O método do ponto fixo (MPF) ou Método da Iteração Linear (MIL) consiste em transformar $f(x) = 0$ em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$, onde $\varphi$ é uma função de iteração.

- A partir de uma aproximação inicial $x_0$ gerar uma sequência pelo processo iterativo dado por: $\boxed{x_{k+1} := \varphi(x_k), k = 0, 1, 2 \cdots}$

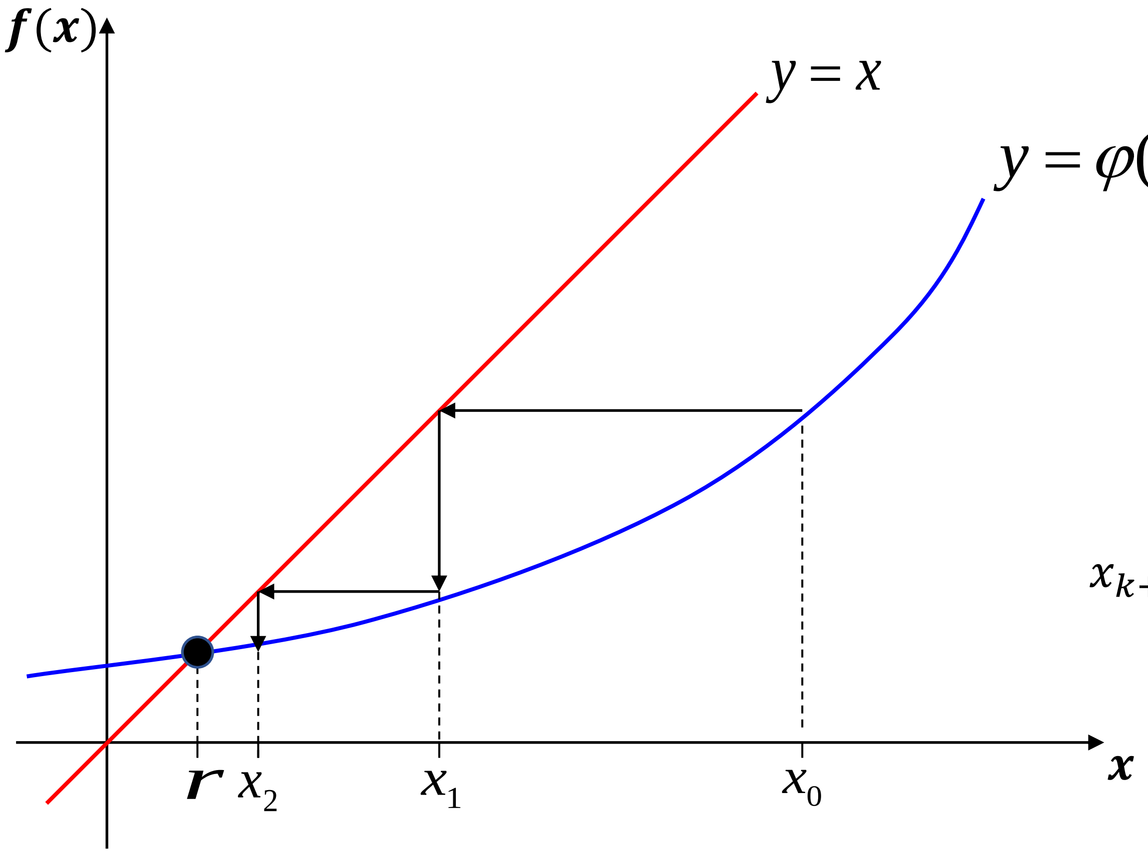
Problema de determinação de um zero de $f$ ($f(x) = 0$) $\Rightarrow$ Problema de determinação de um ponto fixo de $\varphi$ ($\varphi(x) = x$)

# Método do Ponto Fixo



## • Interpretação Geométrica

- Graficamente, uma raiz da equação $f(x) = 0$ é a abcissa do ponto de intersecção da reta $y = x$ e da curva $y = \varphi(x)$




$x_{k+1} := \varphi(x_k), k = 0, 1, 2 \cdots$

# Método do Ponto Fixo

- Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6$

Determinar $\varphi$:

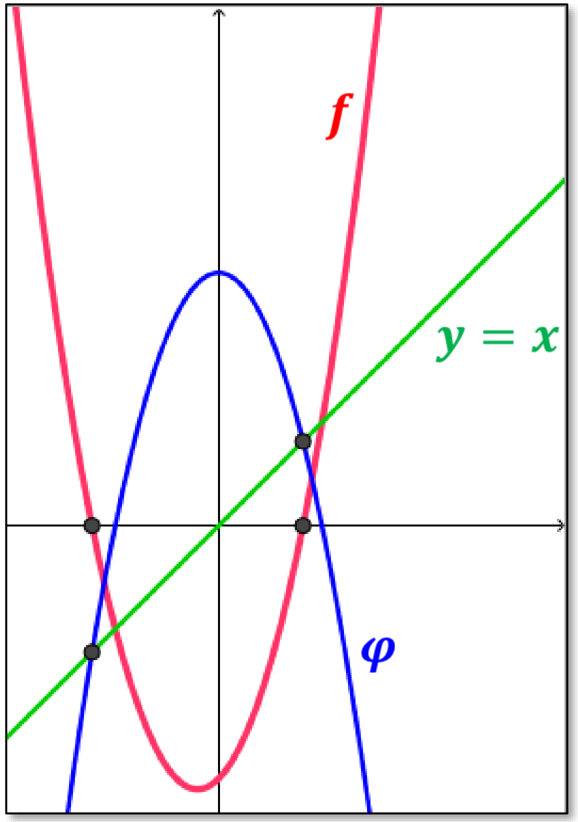
$$f(x) = 0 \longleftrightarrow x = \varphi(x)$$

Por exemplo:

$$x^2 + x - 6 = 0 \longleftrightarrow x = 6 - x^2 = \varphi(x)$$

Possíveis funções de iterações

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 6 - x^2 \\ \varphi_2(x) = \pm\sqrt{6 - x} \\ \varphi_3(x) = \dfrac{6}{x} - 1 \\ \varphi_4(x) = \dfrac{6}{x+1} \end{cases}$$



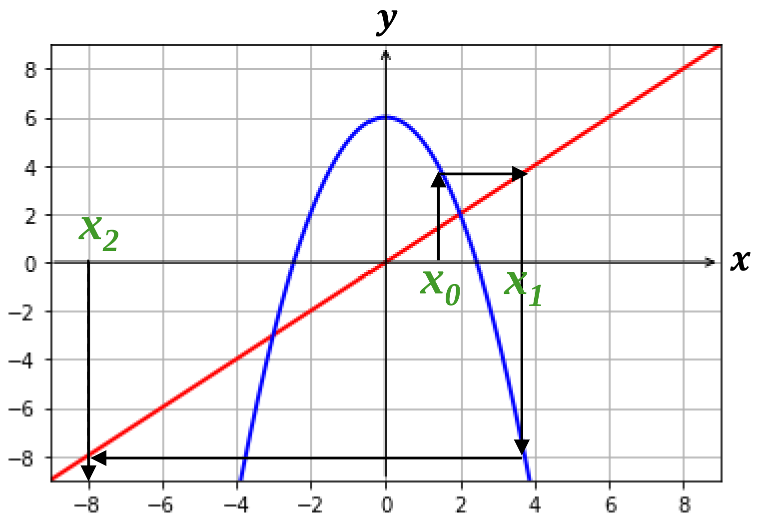
# Método do Ponto Fixo

- As raízes da equação são $-3$ e $2$

Consideremos $x_0 = 1.5$ e a função de iteração: $\varphi_1(x) = 6 - x^2$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0) = 6 - (1.5)^2 = 3.75 \\ x_2 = \varphi(x_1) = 6 - (3.75)^2 = -8.0625 \\ x_3 = \varphi(x_2) = 6 - (-8.0625)^2 = -59.003906 \\ \vdots \end{cases}$$




$\{x_k\}$ não está convergindo para $r = 2$

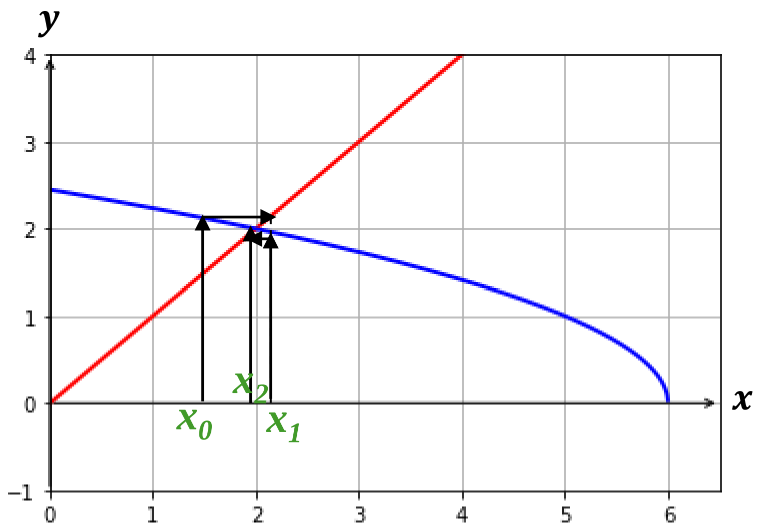
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Método do Ponto Fixo

- Consideremos a função de iteração $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$, com $x_0 = 1.5$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{6-1.5} = 2.12132 \\ x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{6-2.12132} = 1.96944 \\ x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt{6-1.96944} = 2.00763 \\ x_4 = \varphi(x_3) = \sqrt{6-2.00763} = 1.99809 \\ x_5 = \varphi(x_4) = \sqrt{6-1.99809} = 2.00048 \\ \vdots \end{cases}$$

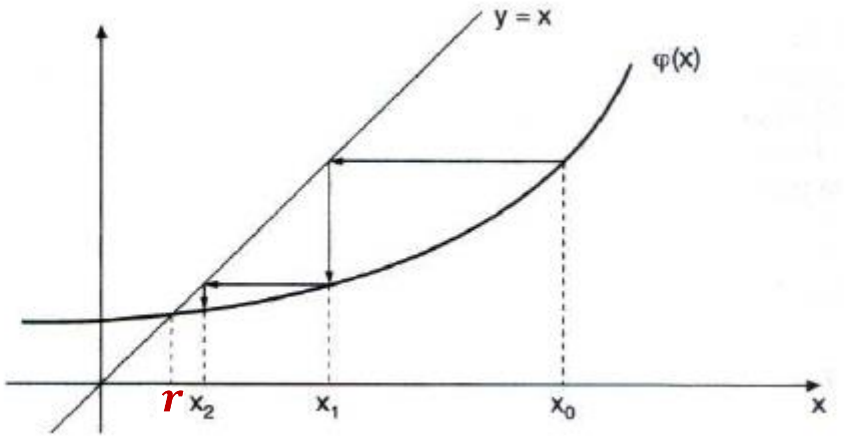



$\{x_k\}$ está convergindo para $r = 2$

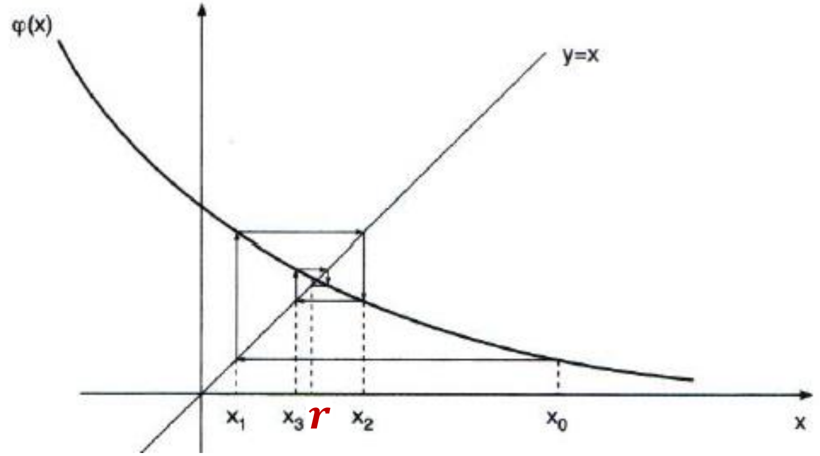
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Método do ponto fixo

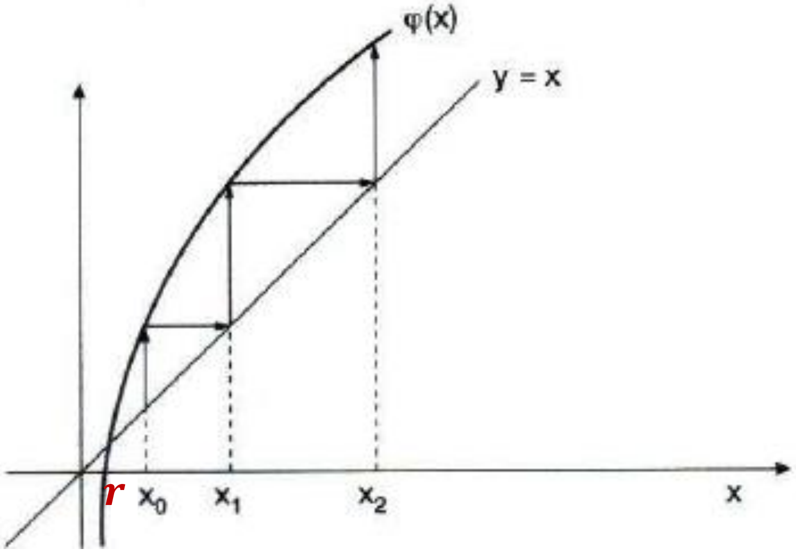




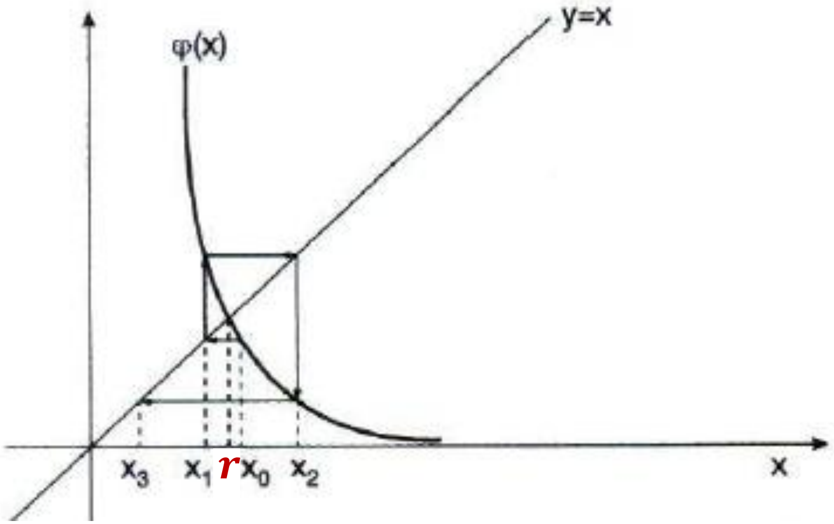

Convergência monotônica $0 < \varphi'(x) < 1$




Convergência oscilante $-1 < \varphi'(x) < 0$




Divergência monotônica $\varphi'(x) > 1$




Divergência oscilante $\varphi'(x) < -1$

# Método do ponto fixo



- Teorema

Seja $r$ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada em um intervalo $I$ centrado em $r$ e seja $\varphi$ uma função para esta equação. Se:

1. $\varphi$ e $\varphi'$ forem contínuas em $\mathrm{I}$
2. $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in \mathrm{I}$
3. $x_0 \in \mathrm{I}$

Então a sequência $\{x_k\}$ gerada por $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1, \ldots$ converge para $r$.

Demonstração: Feita em duas partes:

(i) $x_k \in I, \; \forall k$

(ii) $\lim_{k\to\infty} x_k = r$

# Método do ponto fixo



(i) $x_k \in I, \ \forall k$

Demonstração por indução:

- $x_0 \in I$.
- Demonstraremos que se $x_k \in I$ então $x_{k+1} \in I$.

$$f(r) = 0 \ \Leftrightarrow r = \varphi(r)$$

Além disso, por definição temos $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$\Rightarrow x_{k+1} - r = \varphi(x_k) - \varphi(r)$$

Aplicando o TVM, se $x_k \in \ I$, existe $c_k$ entre $x_k$ e $r$ tal que:

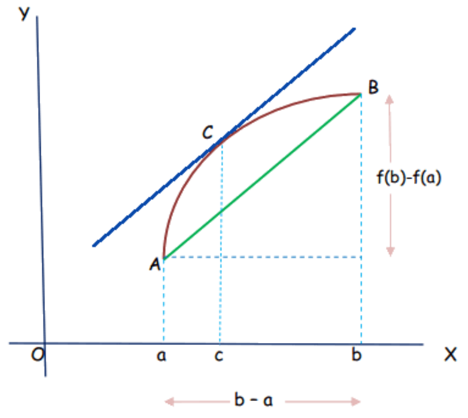
$$\varphi'(c_k)(x_k - r) = \varphi(x_k) - \varphi(r)$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - r| = |\varphi'(c_k)(x_k - r)| = |\varphi'(c_k)|.|x_k - r| < |x_k - r|$$

Como $x_k \in \ I$, e $I$ está centrado em $r$, temos que $x_{k+1} \in I$.

Teorema do Valor Médio

$f$ é contínua no intervalo $[a,b]$.
$f$ é diferenciável no intervalo $(a,b)$. $\Rightarrow$ $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



# Método do ponto fixo



(ii) $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = r$

$$|x_1 - r| = \underbrace{|\varphi'(c_0)|}_{\leq M} |x_0 - r| \leq M\,|x_0 - r|$$

$$|x_2 - r| = \underbrace{|\varphi'(c_1)|}_{\leq M} |x_1 - r| \leq M\,|x_1 - r| \leq M^2\,|x_0 - r|$$

$$\vdots$$

$$|x_k - r| = \underbrace{|\varphi'(c_{k-1})|}_{\leq M} |x_{k-1} - r| \leq M\,|x_{k-1} - r| \leq \ldots \leq M^k\,|x_0 - r|$$

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - r| \leq \lim_{k \to \infty} M^k\,|x_0 - r| = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - r| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{k \to \infty} x_k = r.$$

# Método do ponto fixo



- Voltando ao exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6$

$\boldsymbol{\varphi}(x) = 6 - x^2$

$\boldsymbol{\varphi}'(x) = 2x$

$\boldsymbol{\varphi}(x)$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})$ são contínuas para todos os reais.

$$|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})| < \mathbf{1} \leftrightarrow |\mathbf{2}\boldsymbol{x}| < \mathbf{1} \leftrightarrow -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

- Não existe um intervalo I centrado em x=2, tal que $|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})| < \mathbf{1}$

$\Rightarrow$ condição de convergência não foi satisfeita!

# Método do ponto fixo



- Analisando condições de convergência: $f(x) = x^2 + x - 6$

$\boldsymbol{\varphi}(x) = \sqrt{6 - x}$

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6} - \boldsymbol{x}}}$$

$\boldsymbol{\varphi}(x)$ é contínua em $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} | \boldsymbol{x} \leq \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{\varphi}'(x)$ é contínua em $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} | \boldsymbol{x} < \mathbf{6}\}$

$$|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})| < \mathbf{1} \leftrightarrow \left|\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6} - \boldsymbol{x}}}\right| < \mathbf{1} \leftrightarrow \boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{4}} = \mathbf{5.75}$$

$\Rightarrow$ Condições de convergência satisfeitas para $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}} < \mathbf{5.75}$

# Método do ponto fixo



- Ordem de convergência

Seja $\{x_k\}$ uma sequência que converge para $r$ e seja $e_k = x_k - r$ o erro na iteração $k$.

Se existir um número $p \geq 1$ e uma constante $C > 0$, tais que

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C}$$

então $p$ é chamada de ordem de convergência desse método.

Do limite acima podemos escrever:

$$|e_{k+1}| \approx C|e_k|^p \text{ para } k \to \infty$$

A ordem de convergência mede a velocidade com que as iterações aproximam-se da solução exata.

# Método do ponto fixo



- O método do ponto fixo tem convergência apenas linear.

- Conforme foi demonstrado, temos que:

$$x_{k+1} - r = \varphi'(c_k)(x_k - r)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - r}{x_k - r} = \lim_{k\to\infty} \varphi'(c_k) = \varphi'(\lim_{k\to\infty}(c_k)) = \varphi'(r)$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \varphi'(r) = C \ \text{ e } \ |C| < 1}$$

$\Rightarrow$ Para grandes valores de $k$ o erro em qualquer iteração é proporcional ao erro na iteração anterior, sendo $\varphi'(r)$ o fator de proporcionalidade.

# Método do ponto fixo



- O método do ponto fixo determina as condições para a definição da função $\boldsymbol{\varphi}(x)$, mas não apresenta a função propriamente dita.
- Ou seja, diferente dos métodos apresentados anteriormente, a convergência não é garantida.
- Como poderíamos definir $\boldsymbol{\varphi}(x)$ de forma que as condições apresentadas fossem sempre satisfeitas?

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
5. Método do ponto fixo
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

- O método
- Convergência
- Vantagens e desvantagens

# Método de Newton-Raphson



- Método de Newton Raphson:

Escolher para a função de iteração a função $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(r) = 0$ .

Temos que escolher de maneira que $f(x) = 0$ seja equivalente a $\varphi(x) = x$

Partindo da forma geral: $\varphi(x) = x + a(x)f(x), \qquad a(x) \neq 0, \forall x \in I$

$$\varphi'(x) = 1 + a(x)f'(x) + a'(x).f(x) \Rightarrow \varphi'(r) = 1 + a(r)f'(r) \Rightarrow a(r) = -\frac{1}{f'(r)}$$

Então: $\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

O que nos leva ao seguinte processo iterativo:

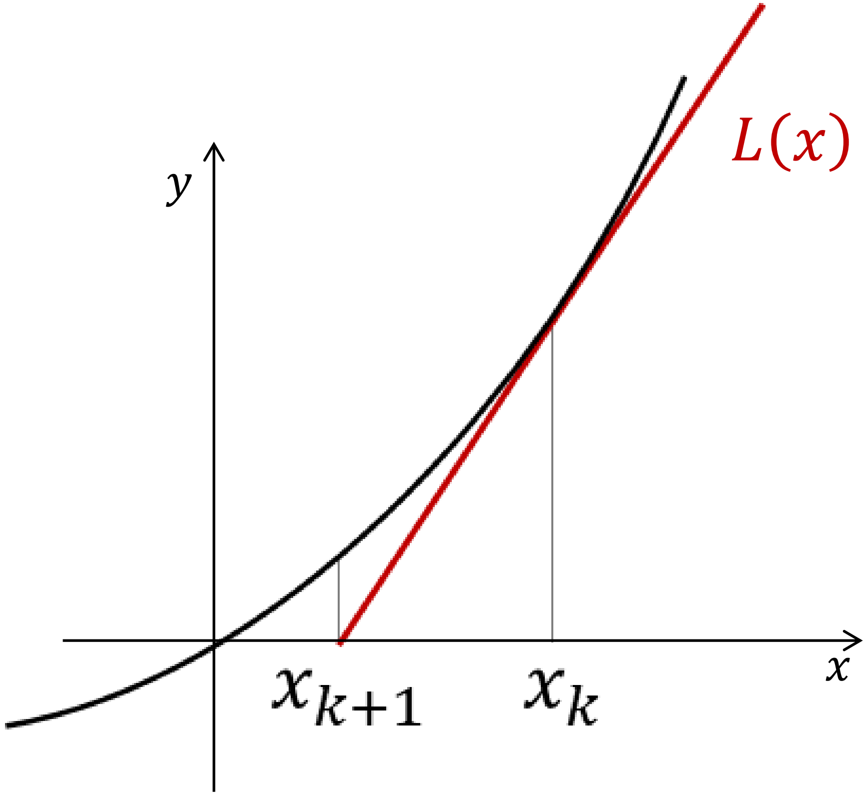
$$\boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

# Método de Newton-Raphson



- Interpretação geométrica:

Dado o ponto $(x_k, f(x_k))$, $x_{k+1}$ é a interseção da reta tangente à curva neste ponto, com o eixo $x$. De fato:



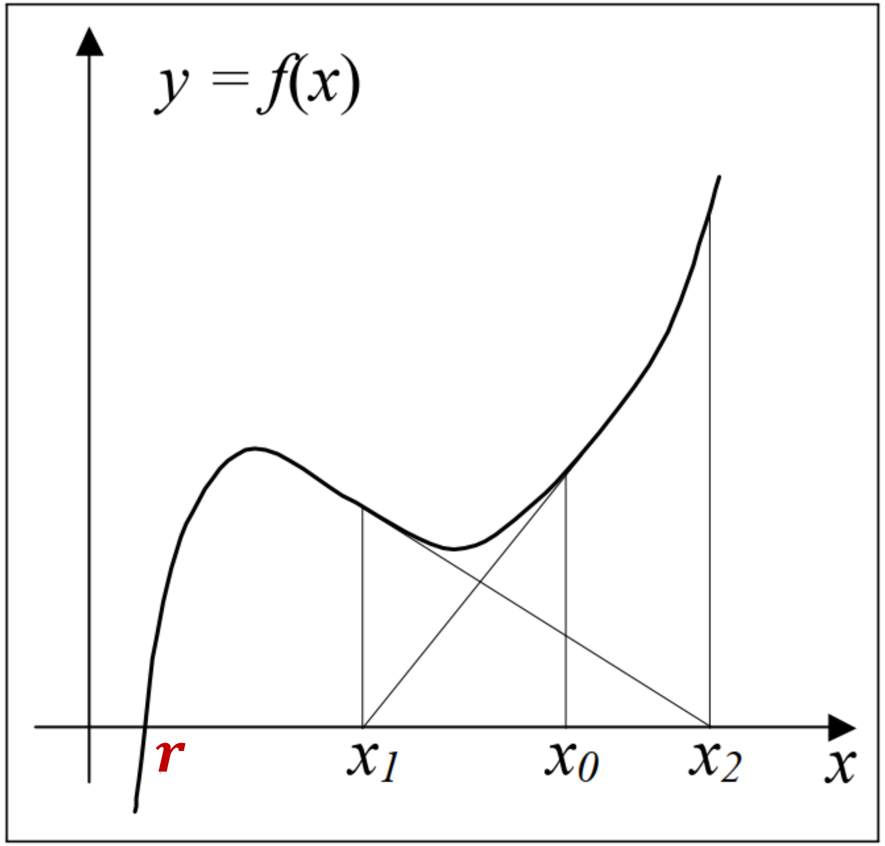

$$L(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$L(x) = 0 \Rightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1}$$

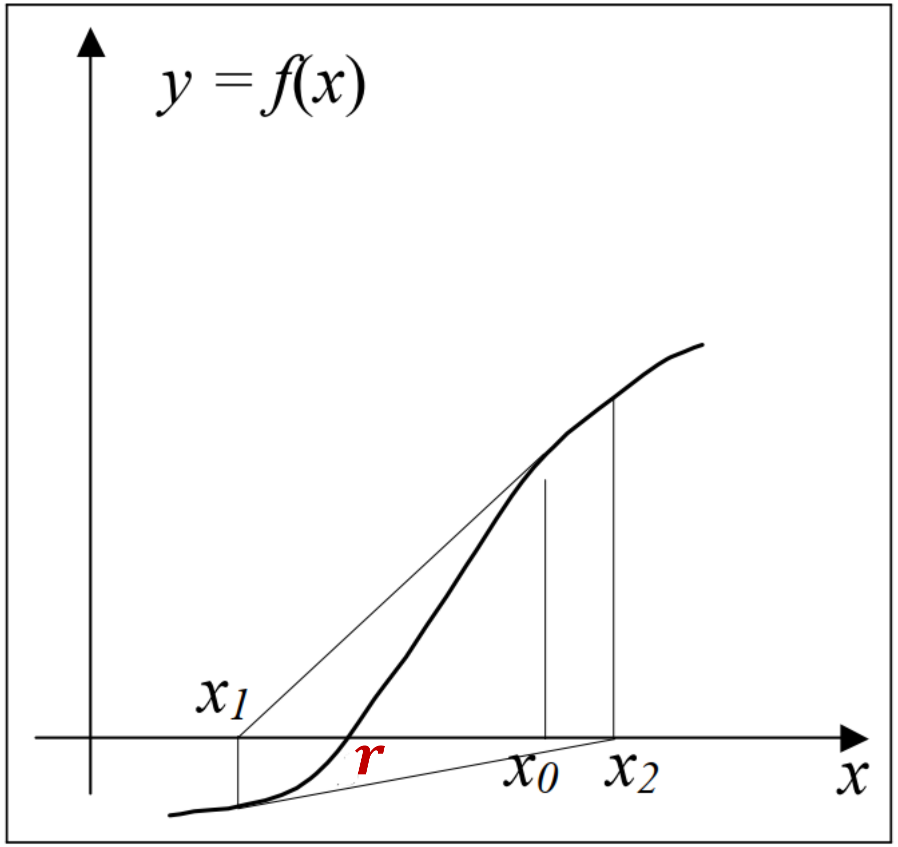
# Método de Newton-Raphson



- Pode ocorrer divergência:




Anulamento da derivada




Mudança de concavidade

# Método de Newton-Raphson



- Se $r$ uma raiz da equação $f(x) = 0$ tal que $f'(r) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que o método de Newton-Raphson converge para $r$ sempre que $x_0 \in [r - \delta, r + \delta]$.

$\Rightarrow$ O método de Newton sempre converge, desde que se escolha $x_0$ suficientemente próximo da raiz $r$.

- A ordem de convergência do método de Newton é quadrática

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ e } \varphi(r) = r \qquad \Rightarrow \boxed{x_{k+1} - r = \varphi(x_k) - \varphi(r)}$$

Desenvolvendo $\varphi(x_k)$ em série de Taylor em torno de $r$ temos:

$$e_{k+1} = \cancel{\varphi(r)} + (x_k - r)\cancel{\varphi'(r)}^{\,0} + \frac{(x_k - r)^2}{2!}\varphi''(r) + \cdots - \cancel{\varphi(r)}$$

$$e_{k+1} = \frac{(e_k)^2}{2}\varphi''(r) \qquad \Rightarrow \boxed{\lim \frac{e_{k+1}}{(e_k)^2} = \frac{\varphi''(r)}{2} \leq C}$$

# Método de Newton-Raphson

- Exemplo: Dada $f(x) = x^3 - 9x + 3$, encontrar a raiz utilizando $x_0 = 0{,}5$ como aproximação inicial. Execute o método até que $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-2}$.

$f'(x) = 3x^2 - 9$

Temos que $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 9x_k + 3}{3x_k^2 - 9}$

Assim: $x_1 = 0{,}5 - \frac{0{,}5^3 - 9.0{,}5 + 3}{3.0{,}5^2 - 9} = 0{,}3333\cdots$

Analogamente, $x_2 = 0.3376\cdots.$

$f(x_2) \cong 1{,}834.10^{-5} \cong 0$

Solução: $r \cong 0.3376$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Método de Newton-Raphson



- O Método de Newton-Raphson tem convergência muito boa (quadrática).
- Entretanto, apresenta as seguintes desvantagens:
  - Exige o cálculo $f'$ a cada iteração
  - Possíveis problemas:

- Convergência lenta se $f'(x_k)$ for muito grande

- Pode ocorrer overflow se $f'(x_k)$ for muito próximo de zero

# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
5. Método do ponto fixo
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

- O método
- Convergência
- Vantagens e desvantagens

# Método das secantes



- Um grande inconveniente do método de Newton-Raphson é a necessidade da obtenção de $f'(x)$ e o cálculo de seu valor numérico a cada iteração
- Alternativa: Substituir o cálculo da derivada $f'(xk)$ pelo quociente das diferenças

$$f'(xk) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

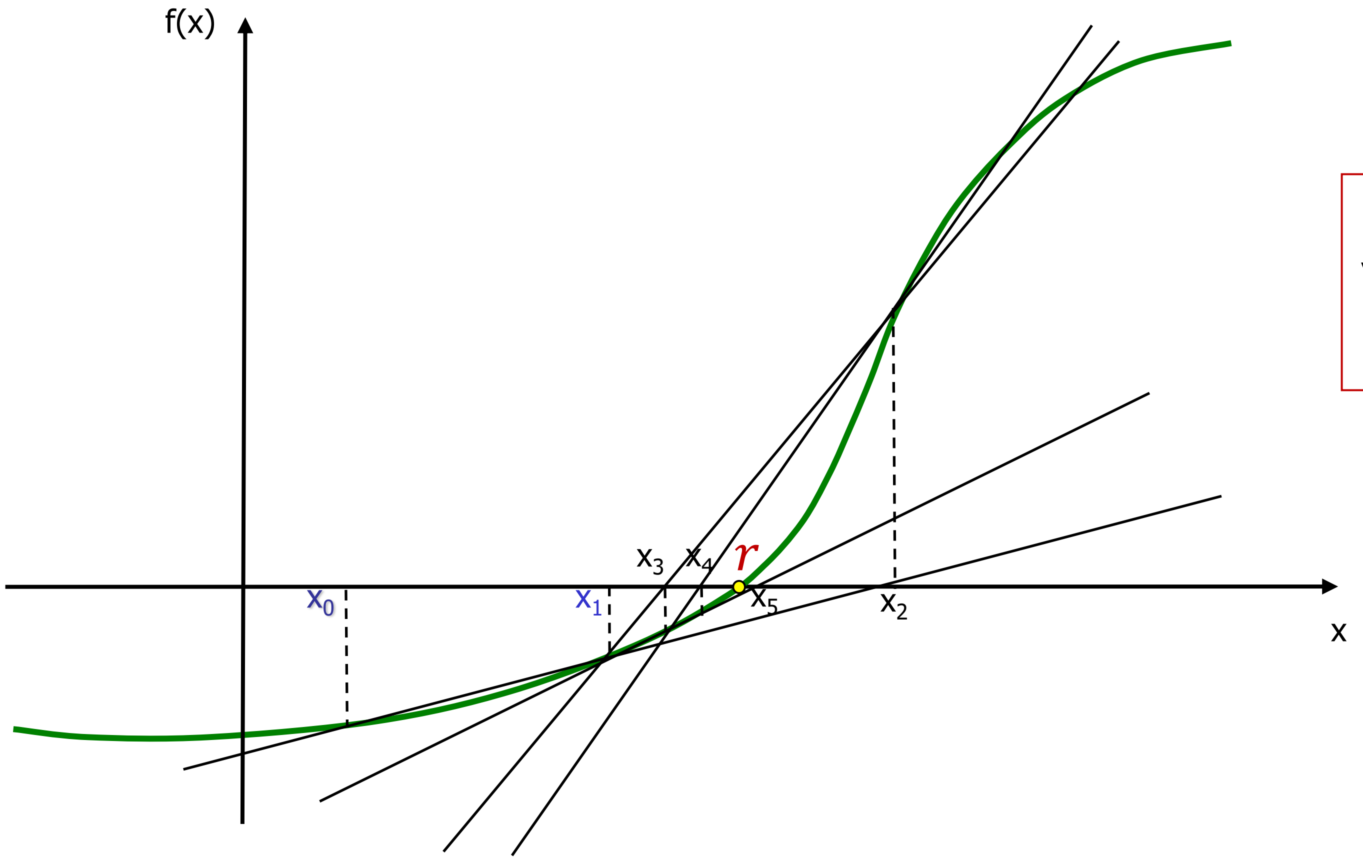
onde $x_{k-1}$ e $x_k$ são duas aproximações para a raiz

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}}$$

# Método das secantes



- Interpretação geométrica




Repete-se o processo até que o valor de $x$ atenda às *condições de parada*.

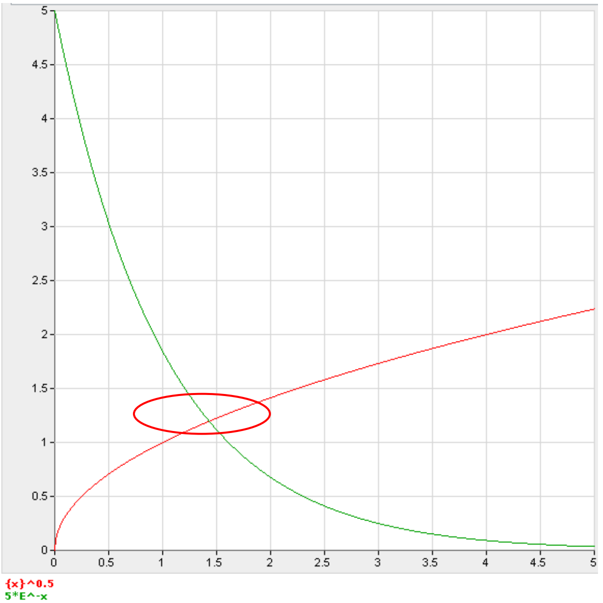
# Método das secantes



- A ordem de convergência do método das secantes é $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$
- A ordem de convergência do método da secante não é quadrática como a do método de Newton, mas também não é apenas linear.
- Apesar da ordem de convergência do método das secantes ser inferior à do método de Newton, este método fornece uma alternativa viável, desde que requer somente um cálculo da função $f$ por passo, enquanto que dois cálculos ($f(x_k)$ e $f'(x_k)$) são necessários para o método de Newton.

# Método das secantes

- Exemplo: Determinar a raiz positiva da equação $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ pelo método das secantes, com erro relativo inferior a $10^{-2}$ .



próximo ao ponto x= 1.4

$$x_0 = 1{,}4 \rightarrow f(x_0) = -0{,}052$$

$$x_1 = 1{,}5 \rightarrow f(x_1) = 0{,}110$$

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \Rightarrow x_2 = 1{,}432$$

Erro relativo: $\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} \cong 0{,}047$

$$x_2 = 1{,}432 \rightarrow f(x2) = 0.002$$

Analogamente temos $x_3 = 1{,}431$

Erro relativo: $\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} \cong 0{,}0007 < 10^{-2}$

# Método das secantes



- Método tem desempenho elevado, com rapidez na convergência;
- Cálculos mais convenientes que do método de Newton;
- No método da secante há a substituição dos valores em sequência: o novo valor $x_{i+1}$ substitui $x_i$ e o valor de $x_i$ substitui $x_{i-1}$. Isto é, a função não necessariamente fica confinada no intervalo inicial $[a, b]$, o que pode levar à divergência.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Conteúdo da Semana 2

1. Zeros reais de funções
2. Métodos iterativos
3. Método da bissecção
4. Método da posição falsa
5. Método do ponto fixo
6. Método de Newton-Raphson
7. Método das secantes
8. Comparação entre os métodos

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

# Comparação entre os métodos

## Garantia de convergência

- Bisseção e Posição Falsa

Convergência garantida, desde que:

  - função seja contínua em $I$,
  - $f'(x)$ mantenha sinal em $I$
  - $f(a).f(b) < 0$

- Métodos de ponto fixo

Convergência garantida, desde que (além das condições anteriores):

  - $\varphi$ e $\varphi'$ sejam contínuas em I,
  - $|\varphi'(x)| \leq k < 1, \forall x \in I$
  - $x_0 \in I$

# Comparação entre os métodos

- Facilidade de implementação
- Esforço computacional com base no:
  - Número total de iterações
  - Custo operacional envolvido em cada iteração: tempo de processamento, memória utilizada, número e complexidade de operações efetuadas
- O método de Newton é uma boa opção, desde que seja fácil verificar as condições de convergência e o cálculo de $f'(x)$ não seja muito elaborado. Caso contrário, seria mais apropriado utilizar o método das secantes (converge mais rapidamente que os demais). No entanto, se for difícil avaliar as condições de convergência, poderíamos utilizar um dos métodos de quebra.

# Parte 2 – Fim

## CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo