Semana 14 – Parte 1

CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Conteúdo da Semana 14

1. Interpolação
2. Interpolação polinomial
3. Interpolação polinomial via Sistemas Lineares
4. Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange
5. Interpolação polinomial via Polinômios de Newton
6. Análise do erro

Interpolação

- A tabela abaixo relaciona calor específico da água à sua temperatura T

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico (cal/mol°)	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- Perguntas:
  - Qual é o calor específico quando T é 32,5 °C?
  - E quando T é 34 °C?
  - E quando T é 39 °C?
  - Qual a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837?

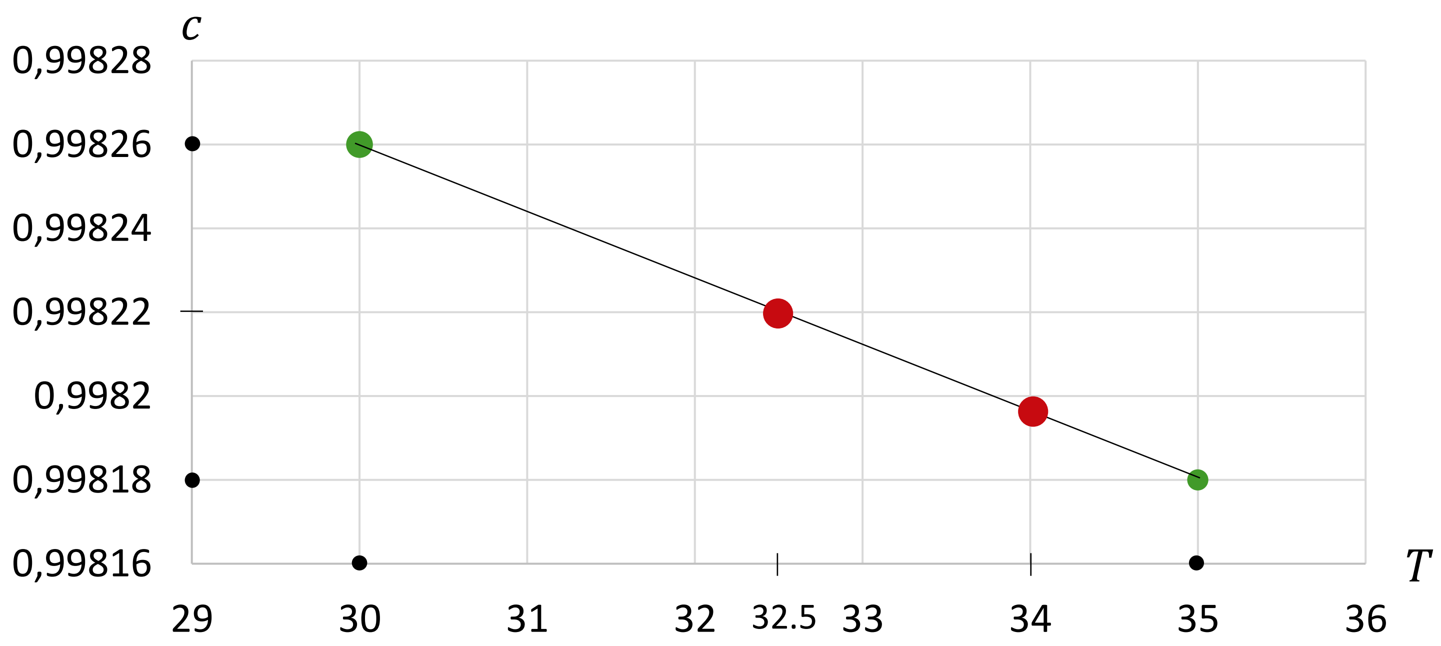
Interpolação

Temperatura (°C)	30	35	40
Calor específico (cal/mol°)	0.99826	0.99818	0.99828

- Quanto vale c quando T é 32.5°C?

Alternativa: Utilizar a média!

$c \approx 0.99822$

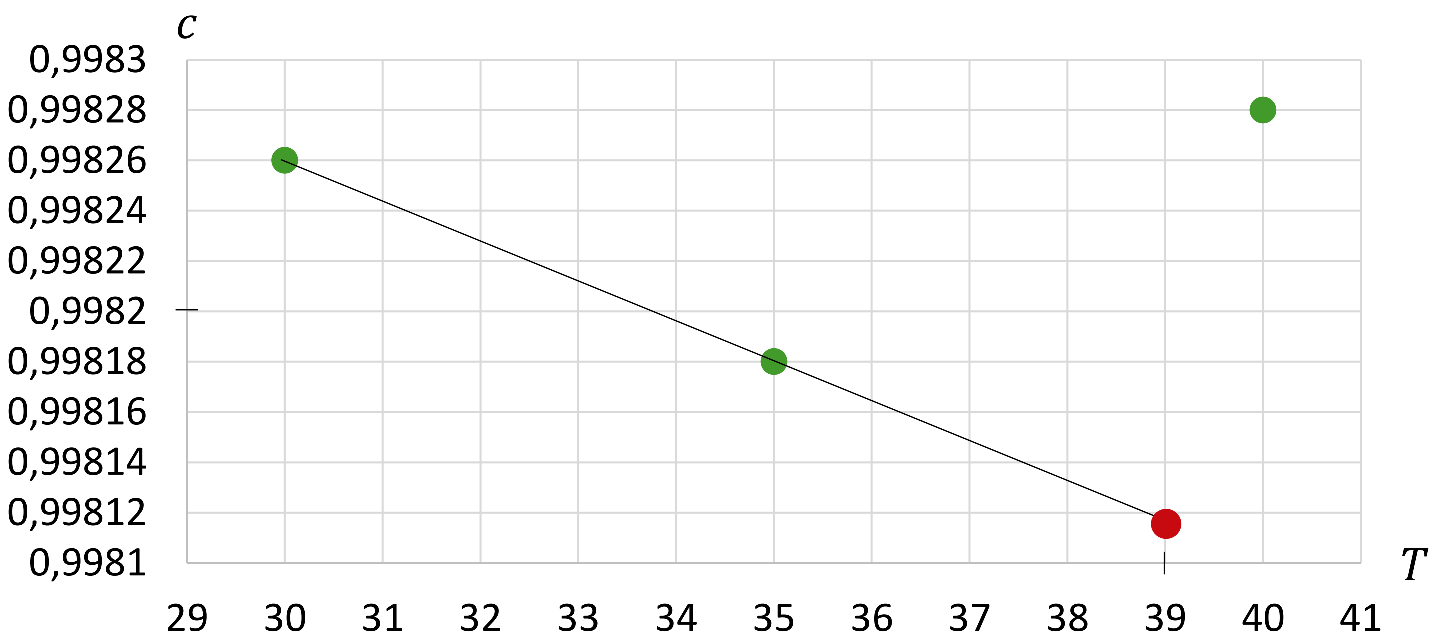


- E para T =34°C? Alternativa: Determinar a reta que passa pelos pontos dados!

Interpolação

Temperatura (°C)	30	35	40
Calor específico (cal/mol°)	0.99826	0.99818	0.99828

- Quanto vale c quando T é 39°C?

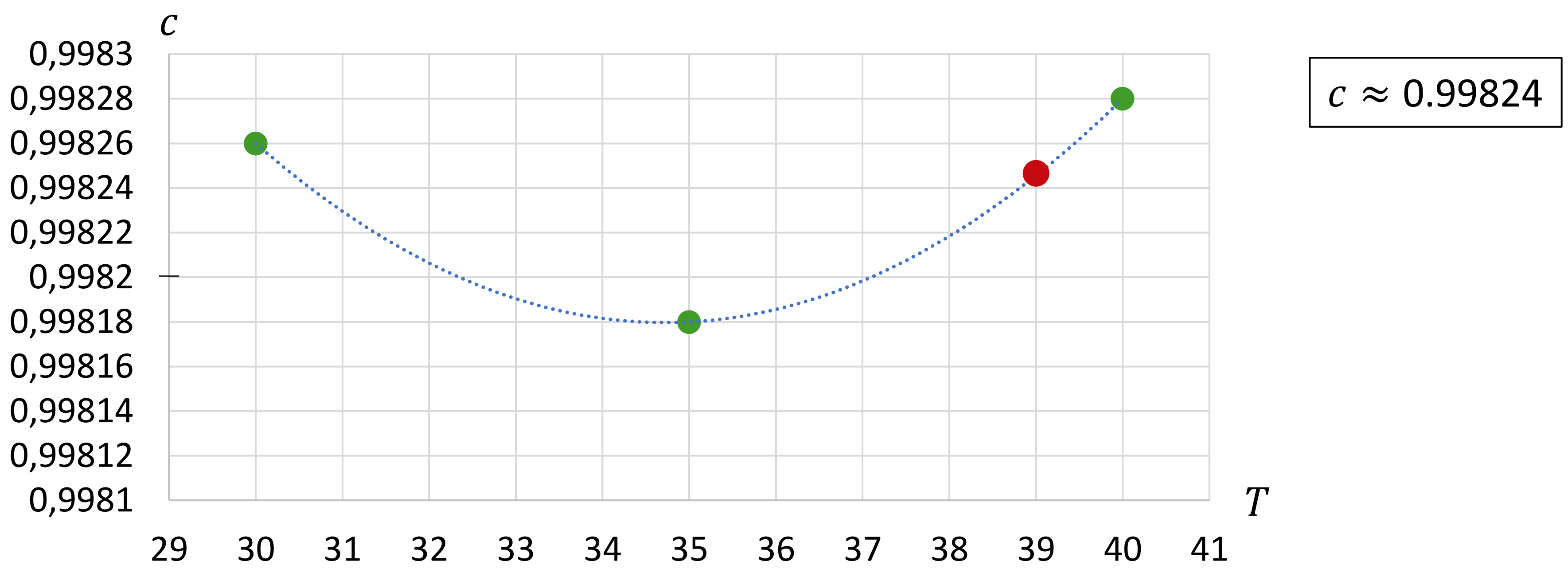


⇒ A reta que encontramos anteriormente não parece uma boa alternativa para essa estimativa.

Interpolação

Temperatura (°C)	30	35	40
Calor específico (cal/mol°)	0.99826	0.99818	0.99828

- Alternativa: Determinar a parábola que passa pelos 3 pontos dados!

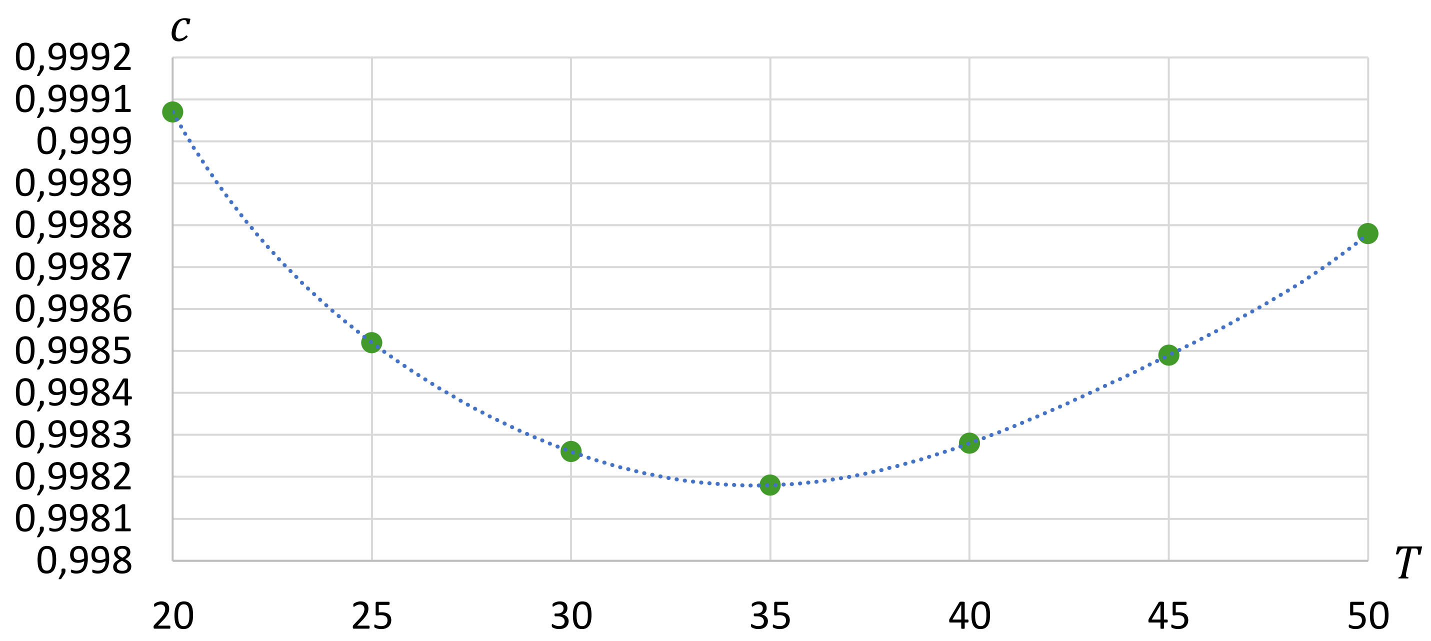


$\Rightarrow$ conseguimos boas aproximações para qualquer temperatura **entre 30°C e 40°C**.

Interpolação

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico (cal/mol°)	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

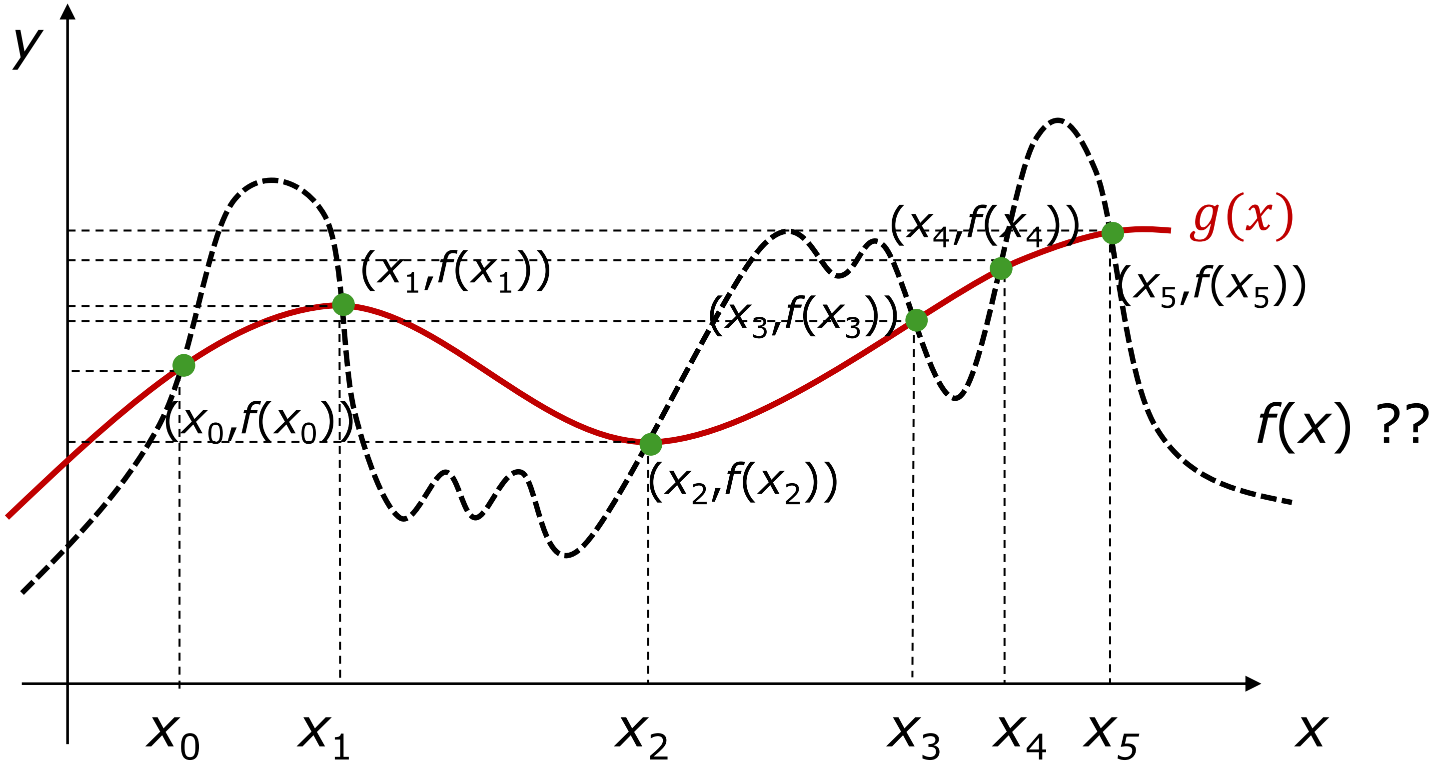
- Para estimar c para temperaturas **entre 20°C e 50°C**, podemos utilizar um polinômio de grau 6 (pois temos 7 dados).



Interpolação

- Interpolar uma função f (nem sempre conhecida) consiste em aproximar essa função por uma função g. Assim, os valores de $f(x)$ podem ser estimados (com erro controlado) por $g(x)$, se x está entre os valores observados fornecidos.

IMPORTANTE: g deve coincidir com os dados.



Consideraremos aqui que g(x) é um **polinômio** (interpolação polinomial).

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Conteúdo da Semana 14

1. Interpolação
2. Interpolação polinomial
3. Interpolação polinomial via Sistemas Lineares
4. Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange
5. Interpolação polinomial via Polinômios de Newton
6. Análise do erro

Interpolação polinomial

- Teorema: Dados os $n+1$ pontos distintos $(x_0, f(x_0)), \cdots, (x_n, f(x_n))$ existe um único polinômio $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ (de grau menor ou igual a n), tal que $p_n(x_k) = f(x_k)$ para $k = 0,1,2, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ O polinômio de n-ésima ordem que passa por $n+1$ pontos **é único**.

Dem. do teorema: Das condições de interpolação $p_n(x_k) = f(x_k)$, temos:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2{x_0}^2 + \ldots + a_n{x_0}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 + \ldots + a_n{x_1}^n = f(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2{x_n}^2 + \ldots + a_n{x_n}^n = f(x_n) \end{cases}$$

Interpolação polinomial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes associada é conhecida como matriz de Vandermonde (linhas estão em PG).

É possível mostrar (por indução) que se $x_0, x_1, \ldots,\ x_n$ são distintos, então o determinante desta matriz é não-nulo.

$\Rightarrow$ o sistema admite solução única.

Conclusão: Existem a_0 , a_1 , a_2 ,…., a_n únicos que satisfazem as condições de interpolação.

Interpolação polinomial

Há várias maneiras para obter $p_n(x)$.

Discutiremos três possibilidades:

- **Resolução de Sistema Linear**
- **Forma de Lagrange**
- **Forma de Newton**

- As três formas devem conduzir ao mesmo polinômio.

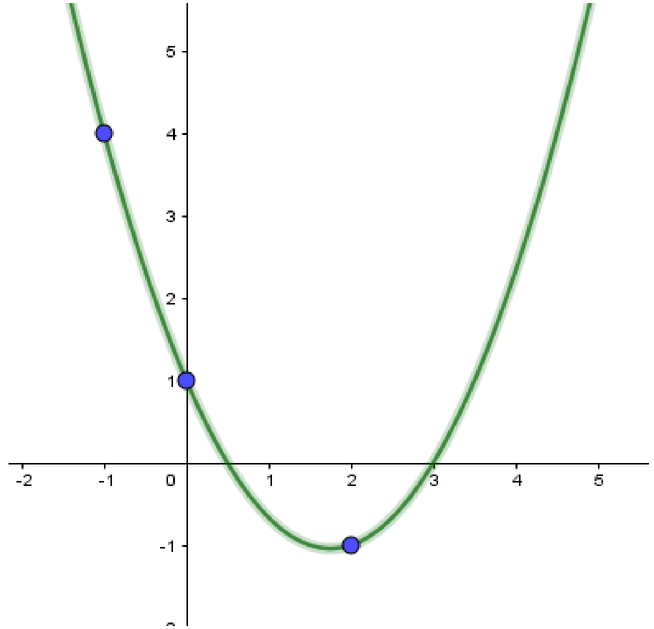
Conteúdo da Semana 14

1. Interpolação
2. Interpolação polinomial
3. Interpolação polinomial via Sistemas Lineares
4. Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange
5. Interpolação polinomial via Polinômios de Newton
6. Análise do erro

Interpolação polinomial via Sistemas Lineares

- Exemplo: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1



$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Resolução de Sistema Linear

$$\begin{cases} p_2(-1) = f(-1) = 4 & \Rightarrow \ a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ p_2(0) = f(0) = 1 & \Rightarrow \ a_0 = 1 \\ p_2(2) = f(2) = -1 & \Rightarrow \ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{a_0 = 1, \ a_1 = -7/3 \quad \text{e} \quad a_2 = 2/3}$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2 \longleftarrow$$

polinômio que interpola $f(x)$ em x_0, x_1 e x_2

Conteúdo da Semana 14

1. Interpolação
2. Interpolação polinomial
3. Interpolação polinomial via Sistemas Lineares
4. Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange
5. Interpolação polinomial via Polinômios de Newton
6. Análise do erro

Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange

- Interpolação linear (grau 1)

- Dados os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), a interpolação linear de Lagrange é o polinômio (de grau 1) $\boldsymbol{p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)}$ tal que:

$$p_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad p_1(x_1) = y_1$$

- Como determinar os polinômios de Lagrange $L_0(x)$ e $L_1(x)$?

Forma simples para que as condições sejam satisfeitas:

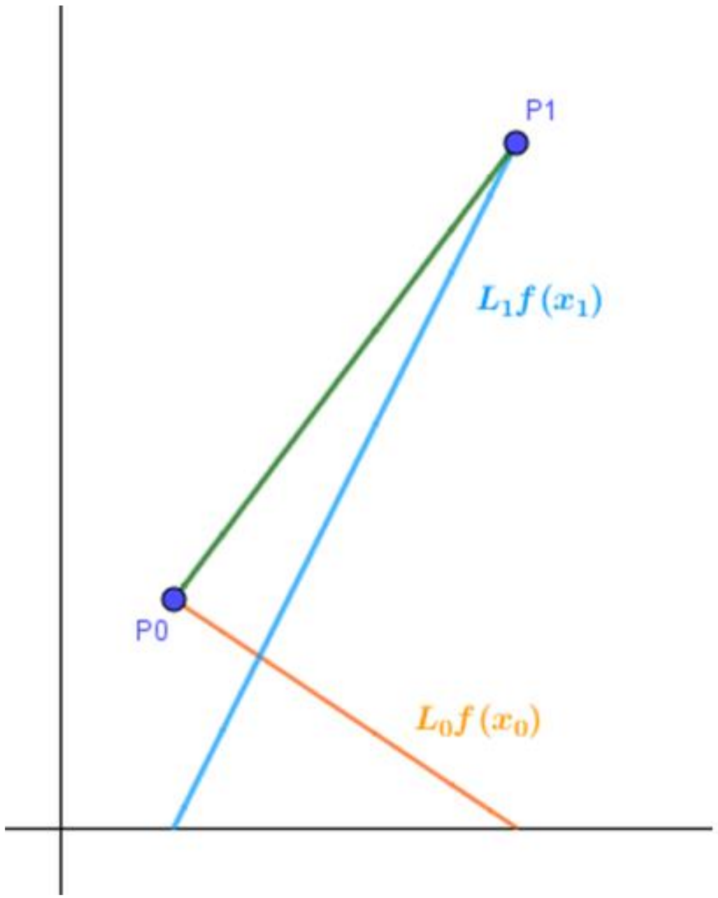
$$L_0(x_0) = 1, \quad L_1(x_0) = 0, \qquad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_1) = 1$$

Podemos tomar $L_0(x)$ e $L_1(x)$ como:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

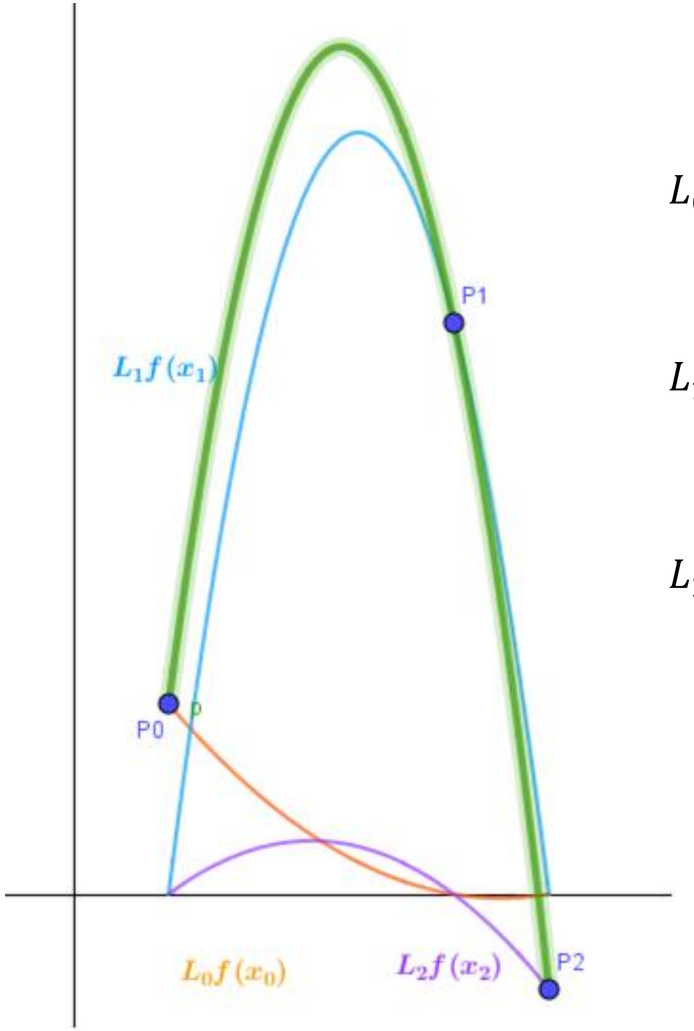
Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$



$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$



$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange

- **Caso geral:** $(n+1)$ pontos distintos $(x_0, f(x_0)), \cdots, (x_n, f(x_n))$

- A interpolação de $f(x)$ usando Lagrange consiste em obter uma função $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots\ldots + y_n L_n(x)$ tal que $\boldsymbol{p_n(x_k) = y_k}$, ou seja:

$$\boxed{p_n(x_k) = y_0 L_0(x_k) + y_1 L_1(x_k) + \ldots\ldots + y_n L_n(x_k) = y_k}$$

- Como determinar os polinômios de Lagrange $L_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$?

Forma simples para que as condições sejam satisfeitas:

$$L_k(x_k) = 1, \qquad L_k(x_i) = 0\,, \quad \text{se } i \neq k$$

Podemos tomar $L_k(x)$ como:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots\ldots(x_k-x_n)}$$

Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange

- Exemplo: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela utilizando os polinômios de Lagrange:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

$$p_2(x) = y_0\ L_0(x) + y_1\ L_1(x) + y_2\ L_2(x)$$

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \dfrac{x^2-2x}{3} \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0+2)} = \dfrac{x^2-x-2}{-2} \\ L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \dfrac{x^2+x}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 4\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2+x}{6}\right)$$

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$$

Parte 1 - Fim

CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Semana 14 - Parte 2

CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Conteúdo da Semana 14

1. Interpolação
2. Interpolação polinomial
3. Interpolação polinomial via Sistemas Lineares
4. Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange
5. Interpolação polinomial via Polinômios de Newton
6. Análise do erro

Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

- O polinômio de Newton $p_n(x)$, que interpola $n+1$ pontos distintos $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, yn)$ tem a seguinte expressão:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots\ldots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{n-1})$$

- Como determinar d_k?

No Método de Newton, os valores de d_k são dados por diferenças divididas de ordem k (veremos definição formal mais a frente).

$d_0 = ?$ $\qquad p_n(x_0) = d_0 = y_0$

$d_1 = ?$ $\qquad p_n(x_1) = d_0 + d_1(x_1 - x_0) = y_1$

$d_2 = ?$ $\qquad p_n(x_2) = d_0 + d_1(x_2 - x_0) + d_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

- Interpolação linear (grau 1)

- Dados os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), a interpolação linear de Newton é o polinômio (de grau 1) $\boldsymbol{p_1(x) = d_0 + d_1(x - x_0)}$ tal que:

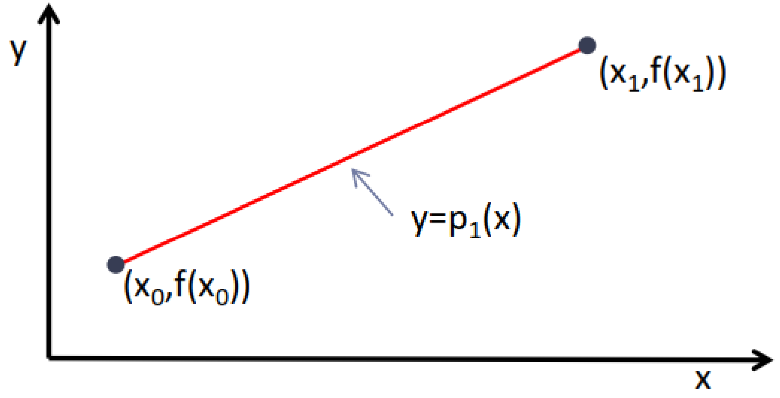
$p_1(x_0) = y_0$ e $p_1(x_1) = y_1$

$d_0, d_1 = ??$

$$p_1(x_0) = d_0 = y_0$$

$$p_1(x_1) = d_0 + d_1(x_1 - x_0) = y_1 \quad \rightarrow d_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

- Interpolação de grau 2

- Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$e (x_2, y_2), o polinômio de interpolador de Newton de grau 2 é $\boldsymbol{p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)}$

$d_0, d_1, d_2 = ??$

$p_2(x_0) = y_0,\ p_2(x_1) = y_1$ → Analogamente temos: $\boxed{d_0 = y_0}$ e $\boxed{d_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$

Para $p_2(x_2) = y_2$ temos:

$$p_2(x_2) = \boxed{d_0} + \boxed{d_1}(x_2 - x_0) + d_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

$$\Rightarrow \quad d_2 = \frac{y_2 - \boxed{y_0} - \boxed{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

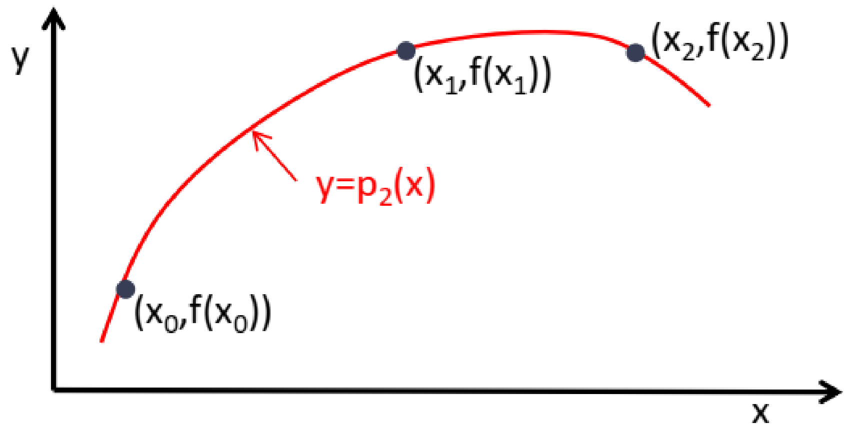
Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

$$\Rightarrow \quad d_2 = \frac{y_2 + \boxed{(-y_1 + y_1)} - y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(x_2 + \boxed{(-x_1 + x_1)} - x_0\right)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{\boxed{x_2 - x_1}}\boxed{(x_2 - x_1)} + \cancel{y_1 - y_0} - \dfrac{(y_1 - y_0)(x_2 - x_1) + \cancel{(y_1 - y_0)}(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cancel{(x_2 - x_1)} - \dfrac{(y_1 - y_0)\cancel{(x_2 - x_1)}}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)\cancel{(x_2 - x_1)}}$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$



$$p_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

- O operador diferenças divididas é definido por:

$f[x_k] = f(x_k) = y_k \longrightarrow$ ordem 0

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \longrightarrow \text{ordem 1}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\dfrac{y_{k+2} - y_{k+1}}{x_{k+2} - x_{k+1}} - \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}}{x_{k+2} - x_k} \longrightarrow \text{ordem 2}$$

$\vdots$

OBS: No método de Newton, os valores de d_k são dados por $\boxed{d_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}$

(Cada $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ é chamada diferença dividida de ordem k)

Por exemplo para o polinômio de grau 2:

$$\boxed{p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)}$$

Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

- Tabela de diferenças divididas

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	…	Ordem n
x_0	$f[x_0] = y_0$					
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_o]}{x_1 - x_0}$				
x_1	$f[x_1] = y_1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$			
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2] = y_2$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$\vdots$	$\ddots$	$f[x_0, .., x_n]$
		$f[x_2, x_3] = \cdots$	$\vdots$		$⋰$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
		$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n] = y_n$					

Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

Por exemplo para o polinômio de grau 3:

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)\,(x-x_2)$$

Polinômio de grau n:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,..,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

- Exemplo: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela utilizando os polinômios de Newton:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

Interpolação polinomial via Polinômios de Newton

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
		$\frac{1-4}{0-(-1)} = -3$	
0	1		$\frac{-1-(-3)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$
		$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	
2	-1		

$$p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 4 + (-3)(x - (-1)) + \frac{2}{3}(x - (-1))(x - 0) \quad \Rightarrow \boxed{p_2\,(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1}$$

Conteúdo da Semana 14

1. Interpolação
2. Interpolação polinomial
3. Interpolação polinomial via Sistemas Lineares
4. Interpolação polinomial via Polinômios de Lagrange
5. Interpolação polinomial via Polinômios de Newton
6. Análise do erro

Análise do erro

- Medir a distância entre o polinômio $p_n(x)$ e a função $f(x)$.

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x)}$$

- Utilizando um polinômio de **grau 0** para aproximar $f(x)$:

$$\boxed{p_0(x) = f[x_0]} \qquad \boxed{E_0(x) = f(x) - p_0(x)}$$

Para um ponto qualquer x temos: $f[x_0, x] = \dfrac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0}$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\boxed{f(x_0)}}_{p_o(x)} + \underbrace{\boxed{(x - x_0)f[x_0, x]}}_{E_0(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x]}$$

Análise do erro

- Utilizando um polinômio de **grau 1** para aproximar $f(x)$:

$$\boxed{p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)} \qquad \boxed{E_1(x) = f(x) - p_1(x)}$$

Para um ponto qualquer x temos:

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f(x_0) - f[x_0, x_1](x - x_0)}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\boxed{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}}_{p_1(x)} + \underbrace{\boxed{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]}}_{E_1(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]}$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Análise do erro

- É possível demonstrar (indução matemática) que para um polinômio interpolador de **grau n** para aproximar $f(x)$, temos:

$$\boxed{\begin{aligned}p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ &\ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\end{aligned}}$$

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x)$$

Com erro associado dado por:

$$\Rightarrow \boxed{E_n(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)\underbrace{f[x_0, \ldots, x_n, x]}_{}}$$

diferença dividida de ordem $n + 1$ (com $n + 2$ pontos)

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Análise do erro

- Teorema (Estimativa para o Erro) Considere $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ e f uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \cdots, x_n$, então para qualquer x no intervalo:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

onde $c \in [x_0, x_n]$.

- Teorema (Estimativa para Diferença Dividida) Se $x \in [x_0, x_n]$ então existe $c \in [x_0, x_n]$ tal que:

$$f[x_0, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Análise do erro

- Corolário: $|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)\ldots(x - x_n)| \frac{M}{(n+1)!}$

onde $\mathrm{M} = \max_{x\in[x_0,x_n]}\left|f^{(n+1)}(x)\right| \qquad (*)$

- Estimativa para o erro:

Se a função f é dada na forma de tabela, não conseguimos utilizar $(*)$.

Neste caso, o valor absoluto do erro $|E_n(x)|$ só pode ser estimado.

Alternativa: $\Rightarrow$ **precisamos de mais um ponto tabelado!**

$$\frac{M}{(n+1)!} \approx \max\left|f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}]\right|$$

$$\Rightarrow |E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \lesssim |(x - x_0)\ldots(x - x_n)| \max\left|f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]\right|$$

com $x \in (x_0, x_n)$.

Análise do erro

- OBS: A análise do erro na interpolação polinomial é válida para as 3 formas (via sistemas lineares, Lagrange e Newton) uma vez que o polinômio interpolador é único.

- Exemplo: Seja $f(x)$ dada na tabela:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obter $f(0.47)$ usando um polinômio de grau 2.

b) Encontrar uma estimativa para o erro.

Análise do erro

- Tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.428		
0.34	0.22		2.0325	
		0.8333		-17.8963
x_0 = 0.4	0.27		-3.7033	
		0.1667		18.2494
x_1 = 0.52	0.29		1.0415	
		0.375		-2.6031
x_2 = 0.6	0.32		0.2085	
		0.4167		
0.72	0.37			

Análise do erro

a) Escolhendo $x_0 = 0.4,\ x_1 = 0.52,\ x_2 = 0.6$

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$= 0.27 + 0.1667(x - 0.4)\ + 1.04115(x - 0.4)(x - 0.52)$$

$$\Rightarrow \ p(0.47) = 0.2780 \approx f(0.47)$$

b) Estimativa para o erro

$$\Rightarrow |E_2(x)| = |f(x) - p_2(x)| \lesssim (x - x_0)(x - x_n)(x - x_n)\,\max|f[x_0, x_1, x_2, x_3]|$$

$$|E(0.47)| \approx |(0.47 - 0.4)(0.47 - 0.52)(0.47 - 0.6)||18.2492|$$

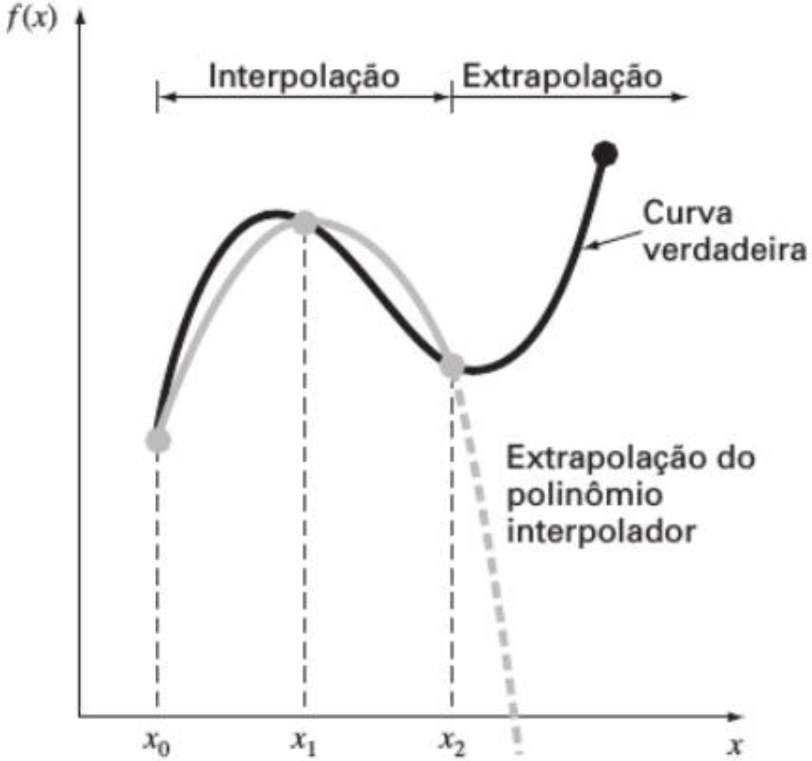
$$|E(0.47)| \approx 8.303 \times 10^{-3}$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

Análise do erro

- OBS: Os métodos de **interpolação** e análise de erros não são úteis para aproximar os valores da função fora do intervalo dado!

⇒ Não servem para **extrapolação**! É um processo diferente de ajustar os pontos a uma curva.



Parte 2 - Fim

CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Maria Clara Schuwartz Ferreira
mclarascferreira@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo