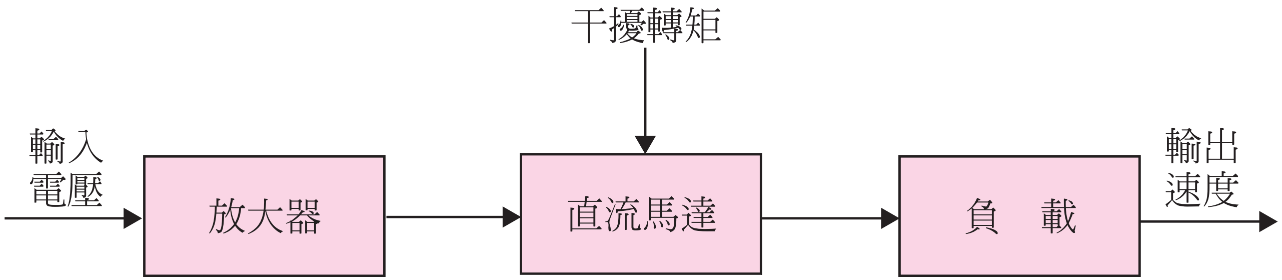
CHAPTER 3 方塊圖及訊號流程圖

※ **方塊圖** 方塊圖可用來表示系統的組成及連結，也可與轉移函數一起用來表示整個系統的因果關係。

★ 開迴路直流馬達速度控制系統 ⇨ 圖 3-1(a)

1. 直流馬達控制系統的輸入-輸出關係

圖 3-1(b)

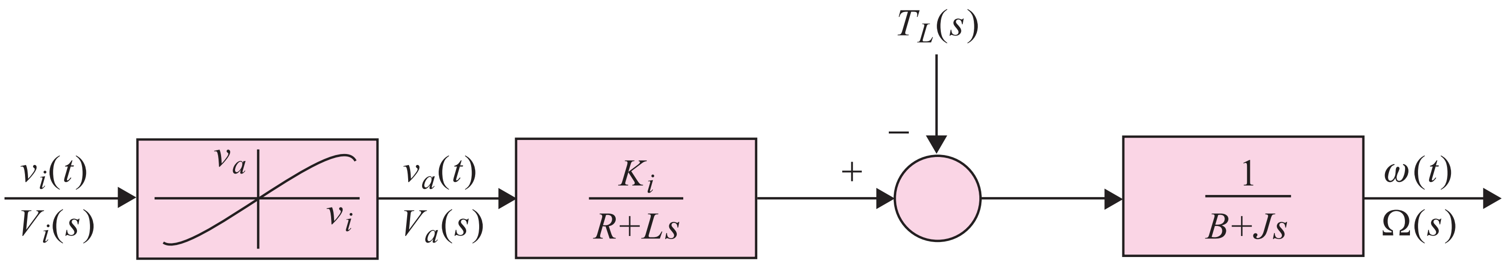


(a)

2. 放大器特性在線性區域內的轉移函數

$$\frac{V_a(s)}{V_i(s)} = K \qquad (3\text{-}1)$$

K 是一個常數

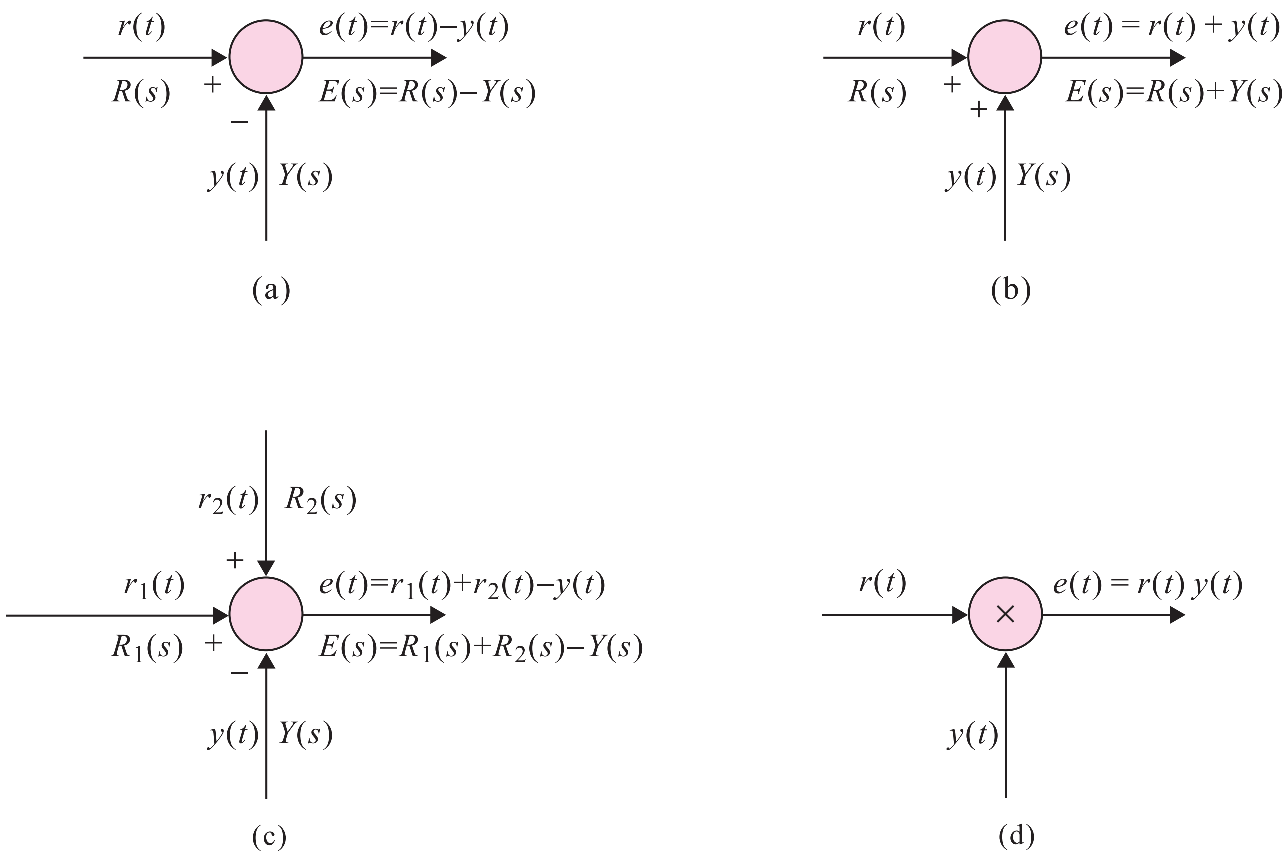


(b)

圖 3-1 (a) 直流馬達控制系統的方塊圖，(b) 具轉移函數及放大器特性的方塊圖

※ 控制系統的方塊圖

1. 感測裝置：有電位計、同步器、分解器、差動放大器、倍增器，及其它用於訊號處理的換能器。
2. 感測器可執行簡單的數學運算，如加法與減法。
3. 方塊圖元件如圖 3-2 所示。



★ 例如：圖 3-2(a) 中

$$e(t) = r(t) - y(t) \qquad \textbf{(3-2)}$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) \qquad \textbf{(3-3)}$$

***H*(*s*) = 1時才稱為Error Signal**

圖 3-2 控制系統典型感測裝置的方塊圖元件。(a) 減；(b) 加；(c) 加和減；(d) 乘

★ 線性回授控制系統的方塊圖

$r(t)$，$R(s)$ ≡ 參考輸入 (命令)
$y(t)$，$Y(s)$ ≡ 輸出 (受控變數)
$b(t)$，$B(s)$ ≡ 回授訊號
$u(t)$，$U(s)$ ≡ 驅動訊號
= 誤差訊號 $e(t)$，$E(s)$，當 $H(s)$ = 1
$H(s)$ ≡ 回授轉移函數
$G(s)H(s)$ ≡ **$L(s)$** = 迴路轉移函數
$G(s)$ ≡ 順向路徑轉移函數
$M(s)$ ≡ **$Y(s)/R(s)$** = 閉迴路轉移函數或系統轉移函數

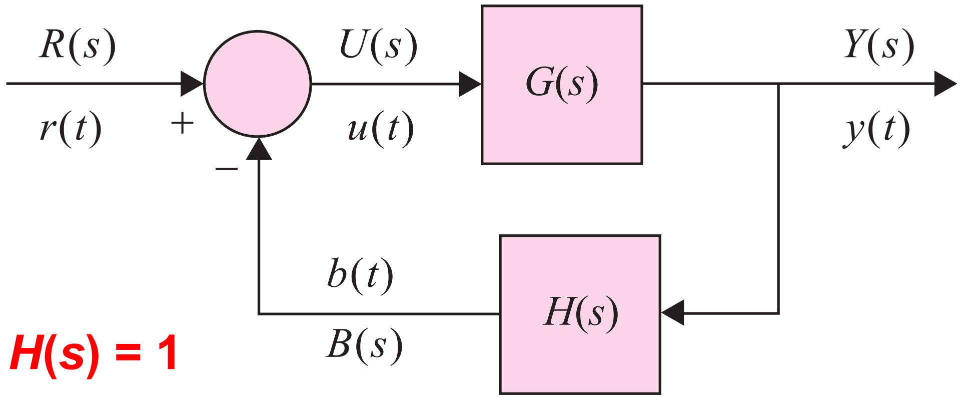


圖 3-3 回授控制系統的基本方塊圖

★ 閉迴路轉移函數 $M(s)$

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{3-4}$$

$$B(s) = H(s)Y(s) \tag{3-5}$$

$$U(s) = R(s) - B(s) \tag{3-6}$$

驅動訊號

$$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)B(s) \tag{3-7}$$

將 (3-6) 式代入 (3-4) 式

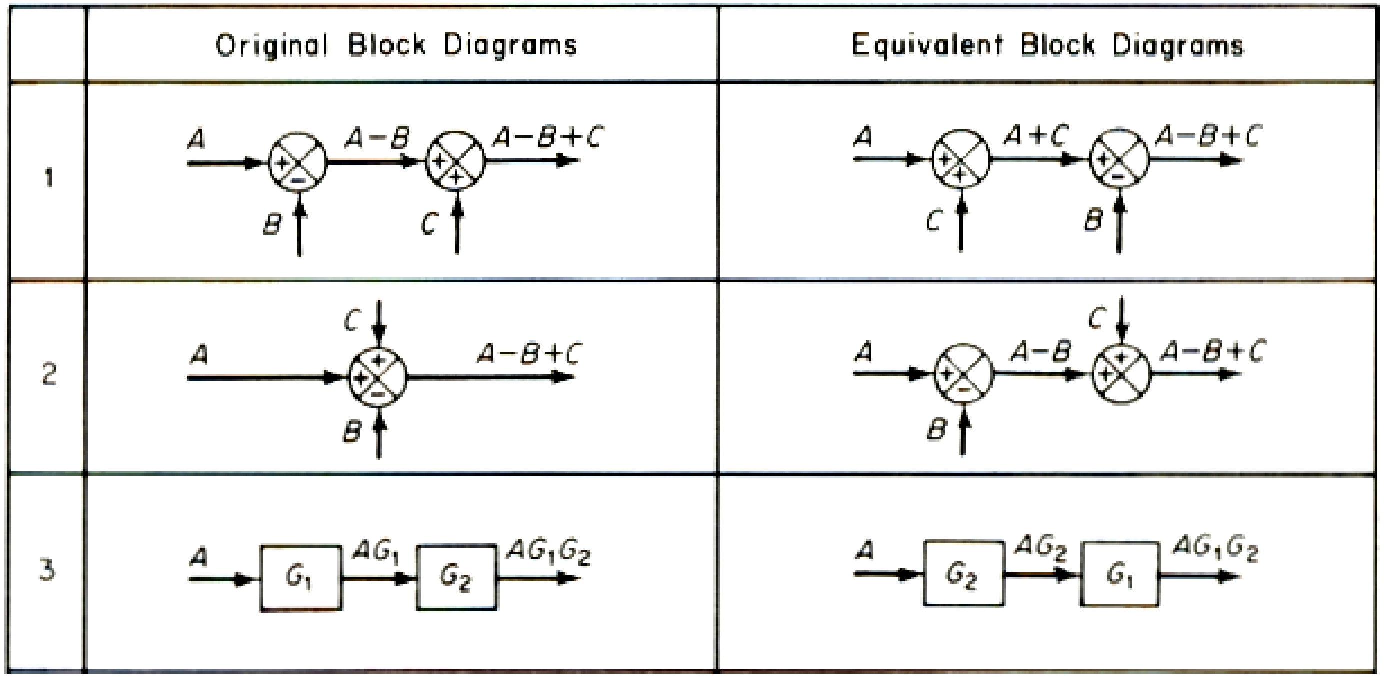
$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{3-8}$$

將 (3-5) 式代入 (3-7) 式

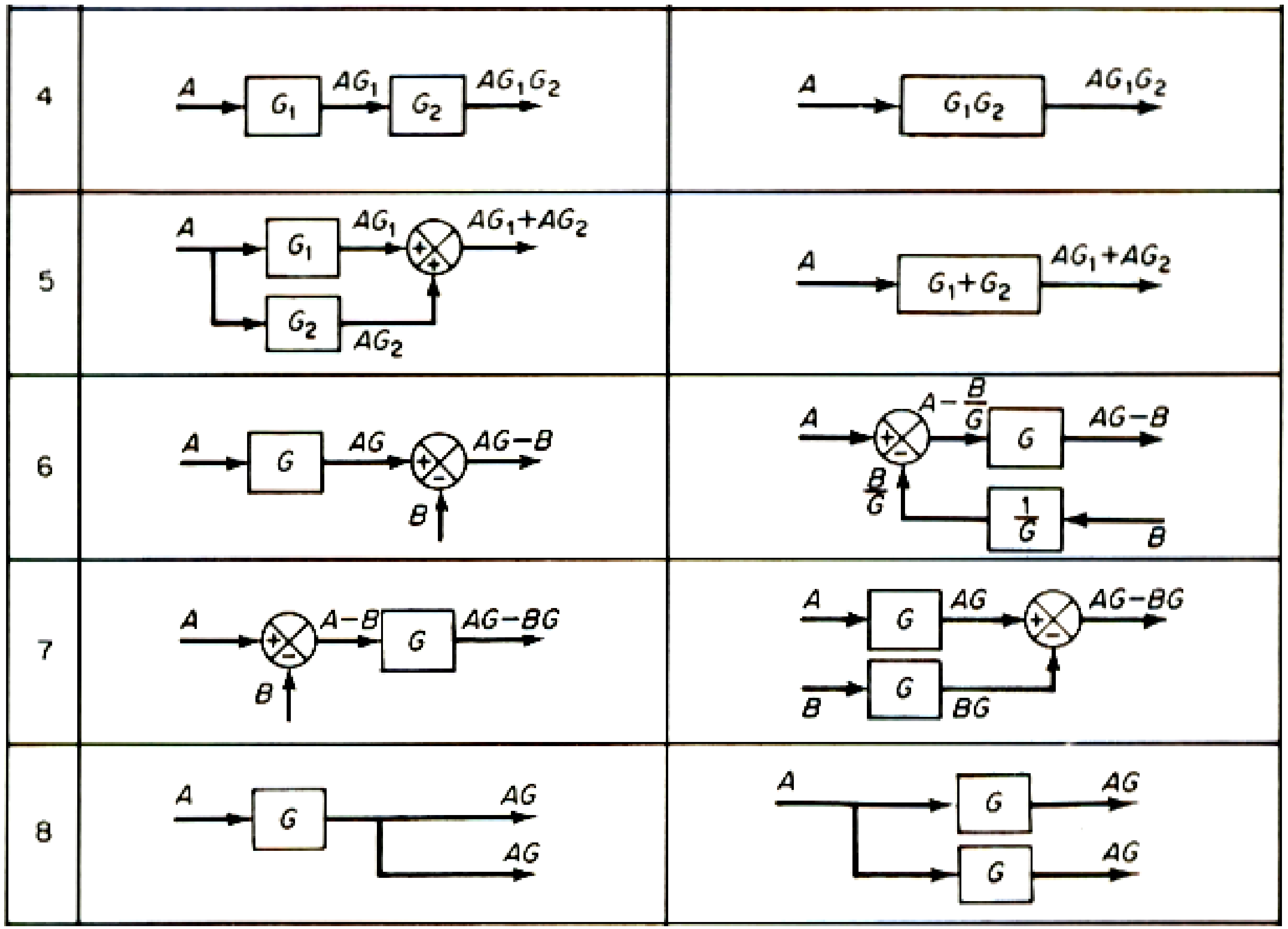
※ 控制系統的方塊圖化簡

摘自Ogata一書

1. Basic concepts
   i) The product of the transfer functions in the feedforward direction must remain the same.
   ii) The product of the transfer functions around the loop must remain the same.
2. Some block diagram reduction rules are summarized in the following table:

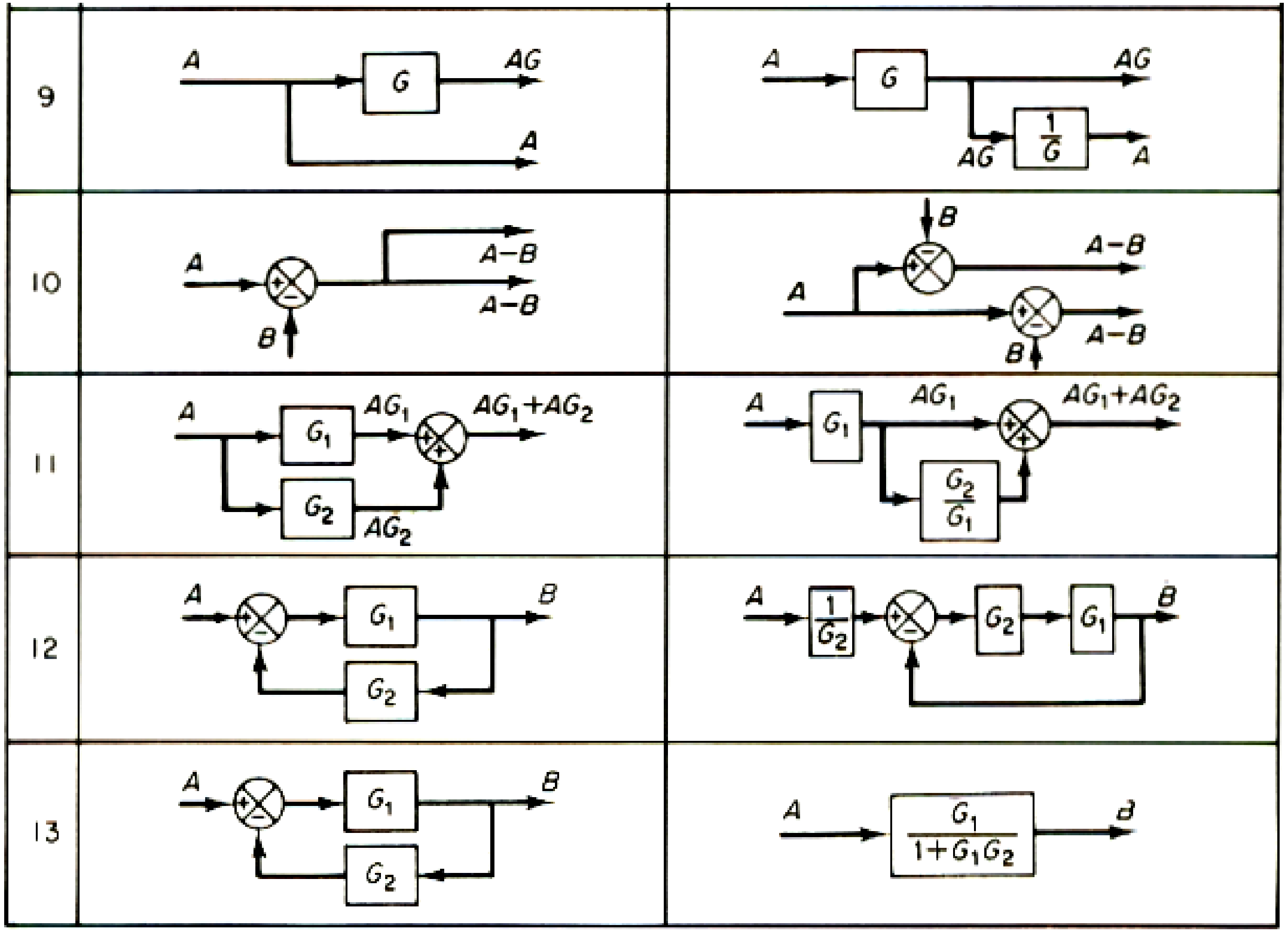


※ 控制系統的方塊圖化簡



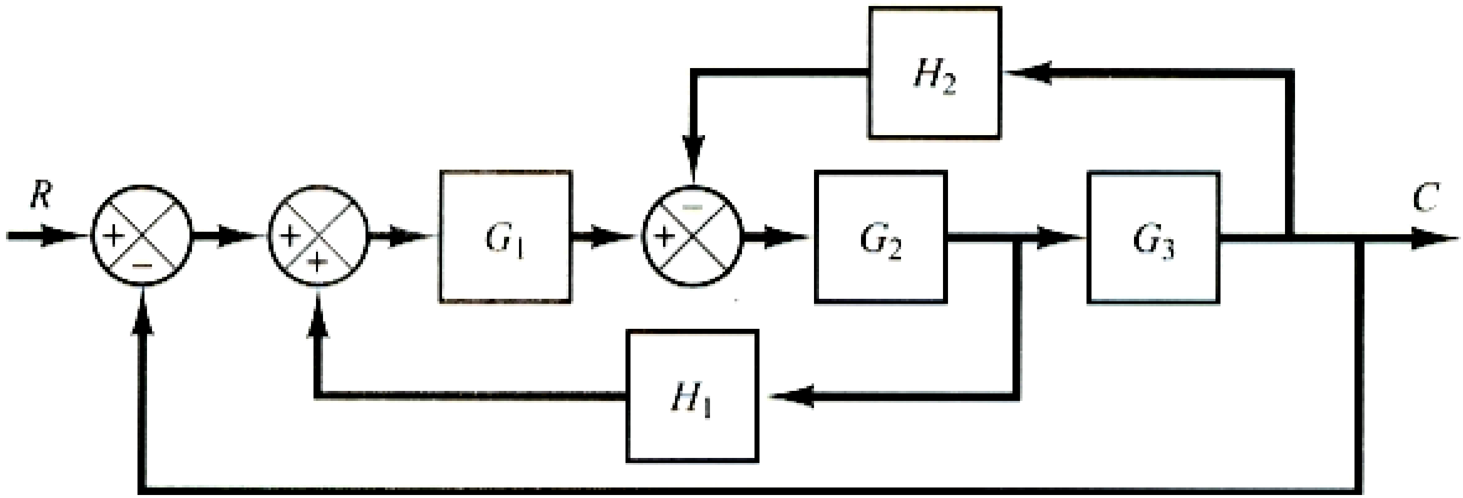
4
A
G_1
AG_1
G_2
AG_1G_2
A
G_1G_2
AG_1G_2
5
A
G_1
AG_1
AG_1+AG_2
G_2
AG_2
A
G_1+G_2
AG_1+AG_2
6
A
G
AG
$AG-B$
B
A
$A-\frac{B}{G}$
G
$AG-B$
$\frac{B}{G}$
$\frac{1}{G}$
B
7
A
$A-B$
G
$AG-BG$
B
A
G
AG
$AG-BG$
B
G
BG
8
A
G
AG
AG
A
G
AG
G
AG

※ 控制系統的方塊圖化簡


9
A
G
AG
A
1/G
10
A−B
B
11
G_1
G_2
AG_1
AG_2
AG_1+AG_2
G_2/G_1
12
$1/G_2$
13
$\frac{G_1}{1+G_1G_2}$

► 例題 Consider the system shown in Fig. 3-14(a). Simplify this diagram.

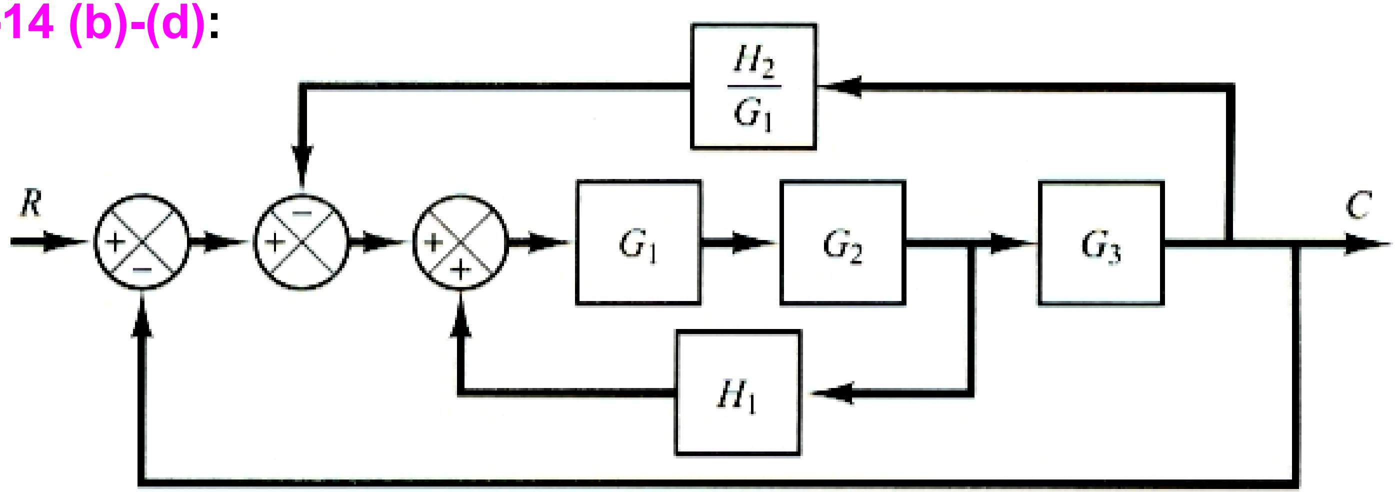
(a)



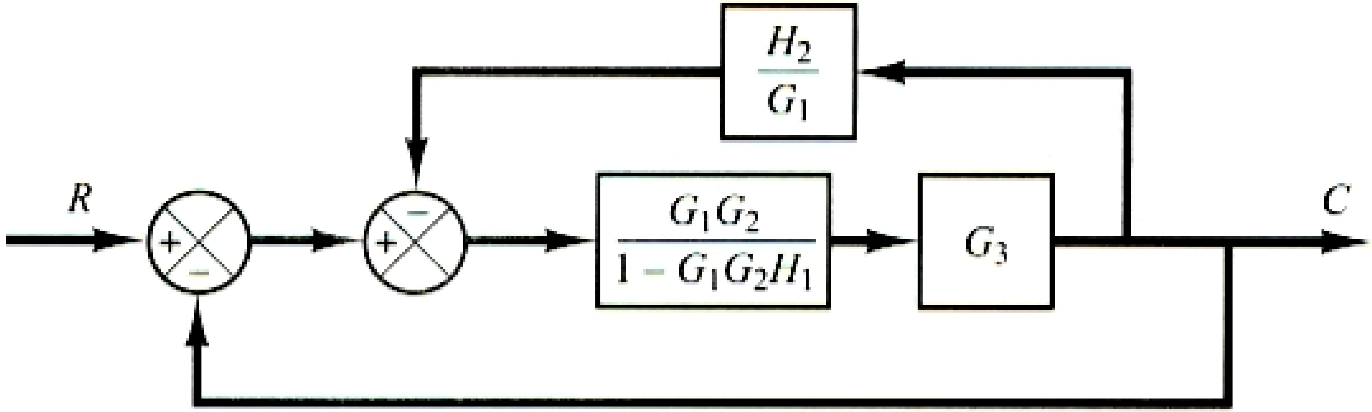
<Sol>

1. See Fig. 3-14 (b)-(d):

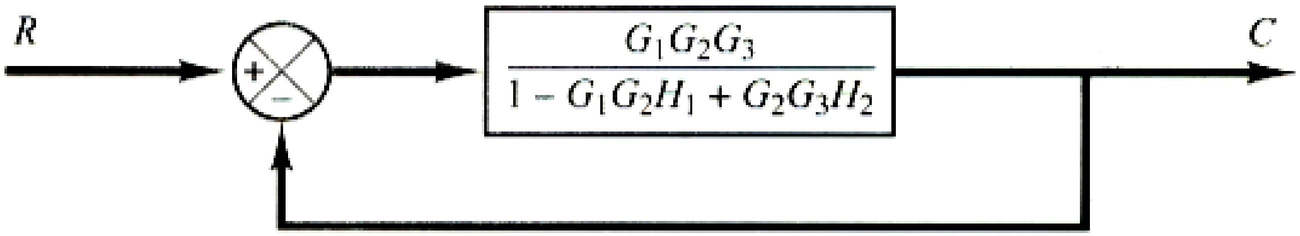
(b)



(c)



(d)



2. **The numerator of *C*(*s*)/*R*(*s*) is the product of the transfer functions of the feedforward path.**

$$
\begin{aligned}
&1-\sum(\text{product of the transfer functions around each loop})\\
&=1-(G_1G_2H_1-G_2G_3H_2-G_1G_2G_3)\\
&=1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3
\end{aligned}
$$

※ 多變數系統的方塊圖及轉移函數

具有 p 個輸入和 q 個輸出的多變數系統的兩種方塊圖表示法

圖 3-4

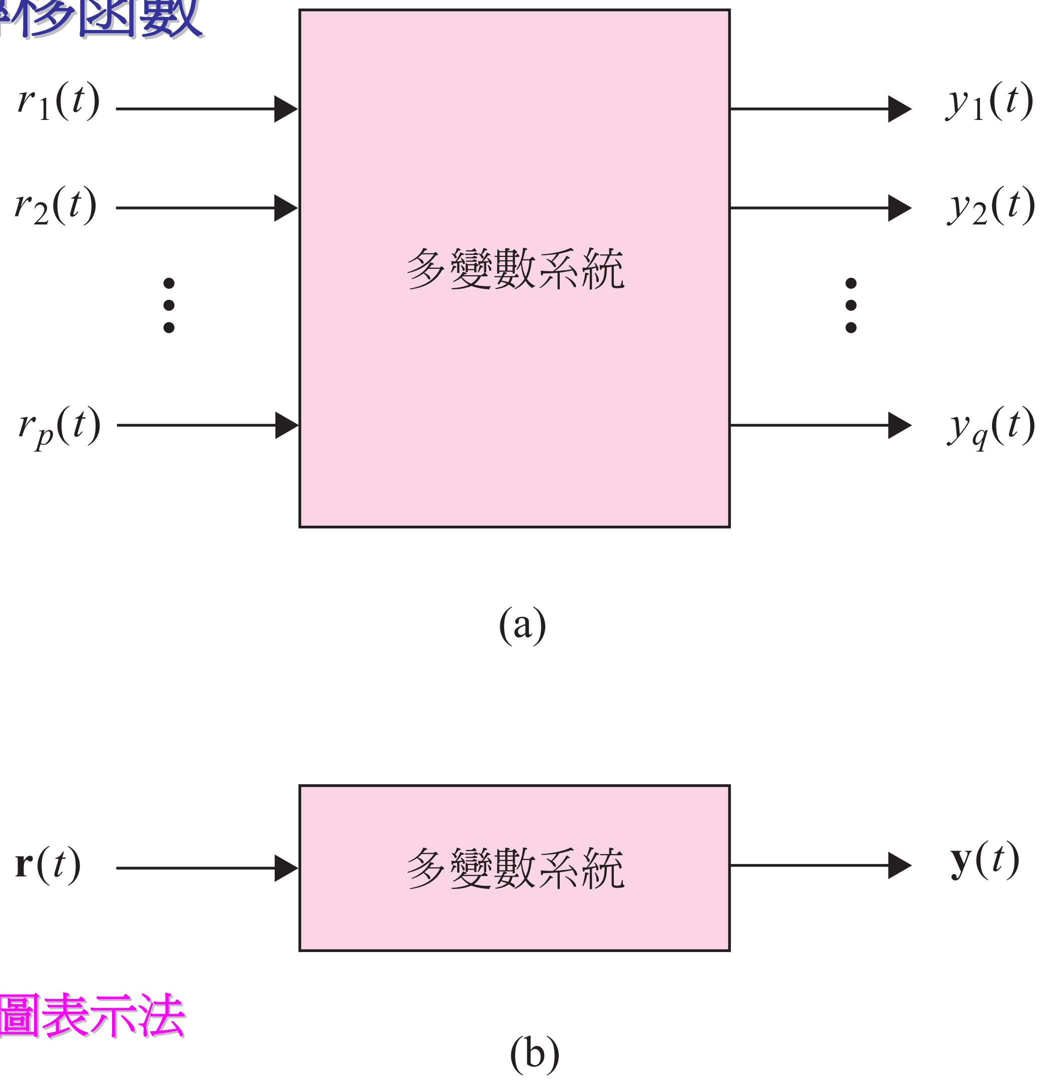


圖 3-4 多變數系統的方塊圖表示法

★ 多變數回授控制系統的方塊圖

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \qquad \textbf{(3-9)}$$

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{R}(s) - \mathbf{B}(s) \qquad \textbf{(3-10)}$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s) \qquad \textbf{(3-11)}$$

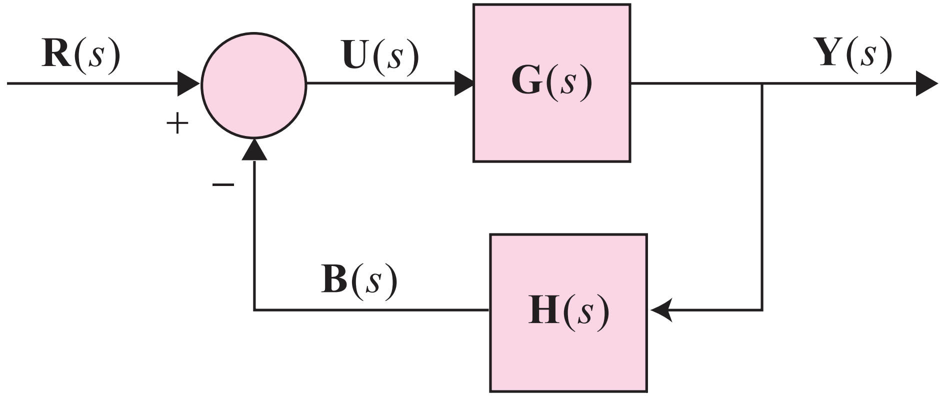


圖 3-5 多變數回授控制系統的方塊圖

其中 ，**Y(s)** 是 $q \times 1$ 的輸出向量，**U(s)**、**R(s)** 和 **B(s)** 為 $p \times 1$ 向量，而 **G(s)** 和 **H(s)** 分別為 $q \times p$ 和 $p \times q$ 轉移函數矩陣。

將 (3-11) 式代入 (3-10)式，然後再將 (3-10) 式代入 (3-9) 式

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s) - \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s) \qquad \textbf{(3-12)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\,\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s) \qquad \textbf{(3-13)}$$

★ 閉迴路轉移矩陣

假設 **I + G(s)H(s)** 為非奇異的

$$\mathbf{M}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\,\mathbf{G}(s) \qquad \textbf{(3-14)}$$

(3-13) $\Rightarrow \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{M}(s)\mathbf{R}(s) \qquad \textbf{(3-15)}$

► 例題 3-1 考慮圖 3-5，假設系統的順向路徑轉移函數矩陣及回授迴路轉移函數矩陣分別為

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3-16)}$$

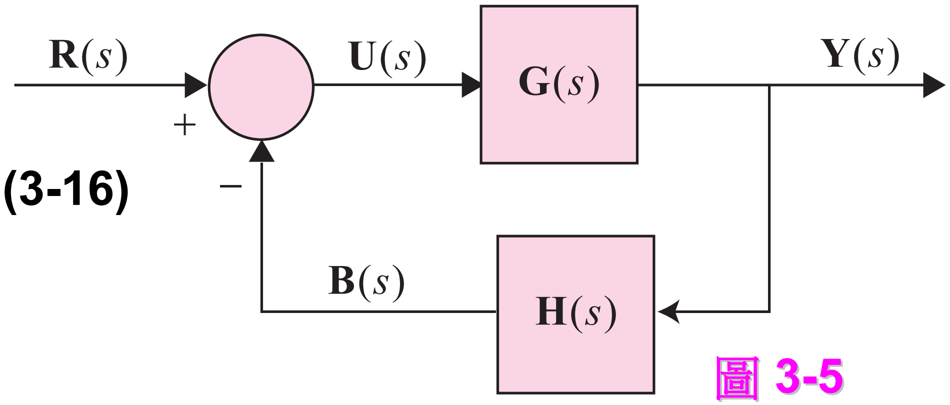


圖 3-5

1. 系統的閉迴路轉移矩陣

$$\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & 1 + \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{s+3}{s+2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3-17)}$$

2. 閉迴路轉移函數矩陣

$$\mathbf{M}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s+2} & \dfrac{1}{s} \\ -2 & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3-18)}$$

其中

$$\Delta = \frac{s+2}{s+1}\frac{s+3}{s+2} + \frac{2}{s} = \frac{s^2+5s+2}{s(s+1)} \qquad \textbf{(3-19)}$$

因此，閉迴路轉移函數矩陣為

$$\mathbf{M}(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+5s+2}\begin{bmatrix} \dfrac{3s^2+9s+4}{s(s+1)(s+2)} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{3s+2}{s(s+1)} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3-20)}$$

※ 訊號流程圖

訊號流程圖 **(SFG)** 可視為方塊圖的簡化型，用於描述由代數方程式所代表的線性系統的因果關係。

訊號流程圖可定義為：將一組線性代數方程式的變數之間輸入-輸出關係以圖解的方式說明。

★ 以一組 ***N*** 個代數方程式所描述的線性系統：

$$y_j = \sum_{k=1}^{N} a_{kj} y_k \qquad j = 1, 2, \ldots, N \qquad \textbf{(3-21)}$$

N 個方程式寫成因果關係型式：

$$\text{第 } j \text{ 個結果} = \sum_{k=1}^{N} (\text{由 } k \text{ 至 } j \text{ 的增益}) \times (\text{第 } k \text{ 個原因}) \quad \textbf{(3-22)}$$

$$\text{輸出} = \sum (\text{增益}) \times (\text{輸入}) \quad \textbf{(3-23)}$$

最重要的公理

當系統以一組積微分方程式來表示時，首先必須將方程式改寫成拉氏轉換方程式，然後再將後者排成 **(3-21)** 式的形式，或

$$Y_j(s) = \sum_{k=1}^{N} G_{kj}(s) Y_k(s) \qquad j = 1, 2, \ldots, N \quad \textbf{(3-24)}$$

※ SFG 的基本元件

1. 連結點或節點 **(nodes)** 用來表示變數。
2. 支路是由支路增益和支路方向組成。
3. 訊號可以經由支路依箭頭的方向傳輸。

在訊號流程圖中，訊號只能依支路箭頭的方向傳遞

訊號流程圖的作圖根本上是依據因果關係，而將任一變數本身和其它變數連結在一起。

Ex. 單一方程式所表示的線性系統

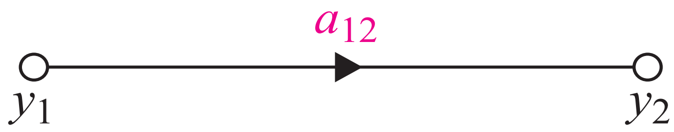


圖 3-6 $y_2 = a_{12}y_1$ 的訊號流程圖

$$y_2 = a_{12}y_1 \qquad \text{(3-25)}$$

其中， y_1 是輸入，y_2 是輸出，而 a_{12} 是兩個變數之間的增益或傳輸度。

在兩個節點 y_1 和y_2 之間的支路，可視爲具有增益 a_{12} 的單向放大器。

雖然 (3-25) 式的代數式可寫成

$$y_1 = \frac{1}{a_{12}} y_2 \qquad \text{(3-26)}$$

⇨ 但圖 3-6 的訊號流程圖並沒有包含這個關係。

► **例題 3-2** 考慮下列一組代數方程式，作爲建構一個 SFG 的例子：

$$\begin{aligned}
y_2 &= a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \\
y_3 &= a_{23}y_2 + a_{43}y_4 \\
y_4 &= a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4 \\
y_5 &= a_{25}y_2 + a_{45}y_4
\end{aligned} \qquad \text{(3-27)}$$

這些方程式的訊號流程圖的作圖逐步圖解於圖 3-7 中。

$$y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3$$
$$y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y_4$$
$$y_4 = a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4$$
$$y_5 = a_{25}y_2 + a_{45}y_4$$

(3-27)

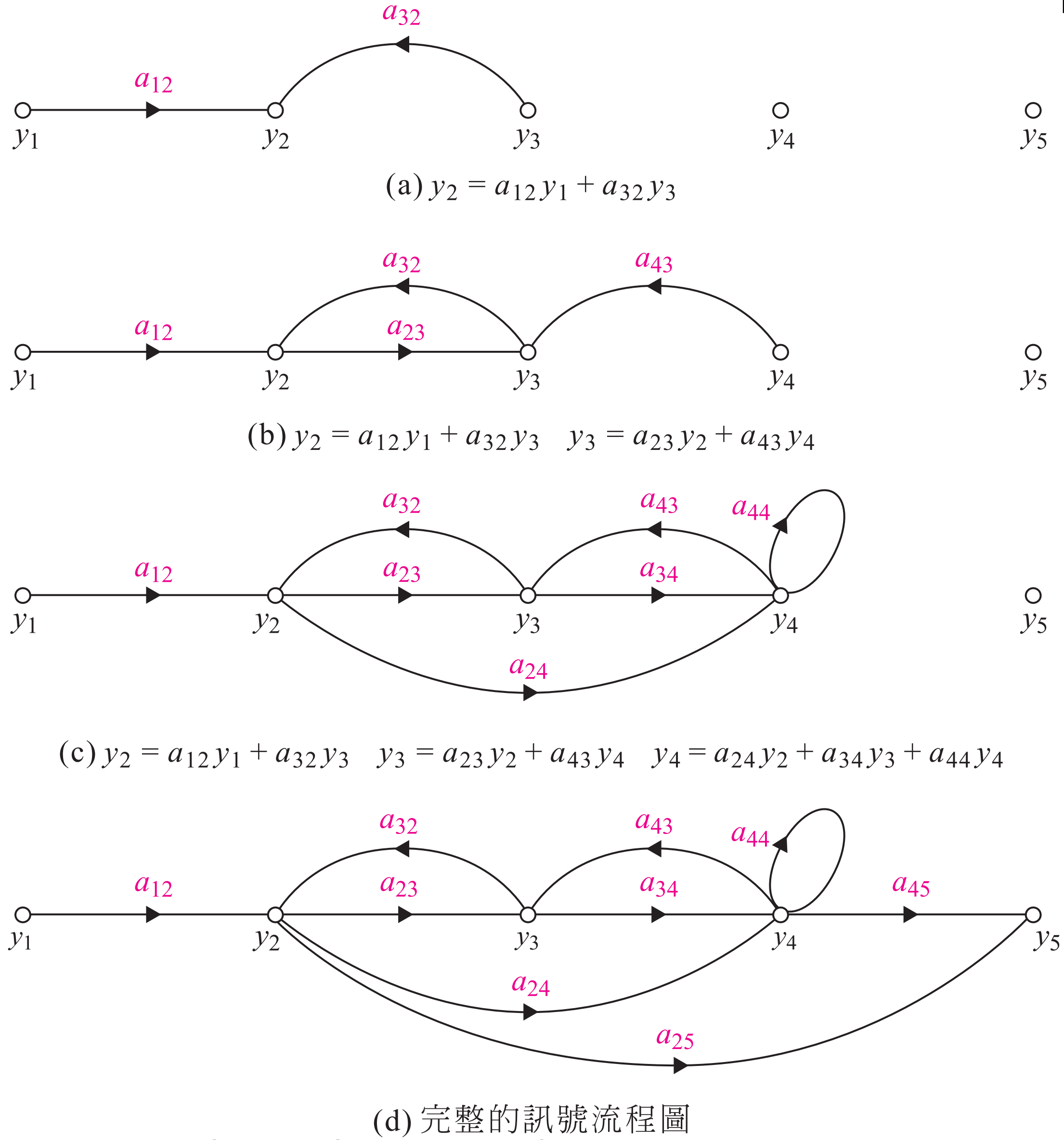


圖 3-7 (3-27) 式的訊號流程圖的逐步作圖說明

※ 訊號流程圖的基本特性摘要

1. 訊號流程圖只能適用於線性系統。
2. 畫訊號流程圖時所根據的方程式，必須是因果型式的代數方程式。
3. 節點代表變數。通常，節點由左排到右，由輸入至輸出依照整個系統的因果關係排定次序。
4. 訊號沿著支路傳送時，是沿支路上箭頭所指的方向傳送。
5. 由節點 y_k 至 y_j 的支路，表示變數 y_j 依 y_k 而變，反之並不成立。
6. 訊號 y_k 沿著節點 y_k 和 y_j 之間的支路傳送，則到達 y_j 的訊號是乘上支路增益 a_{kj}，即訊號為 $a_{kj}\, y_k$。

※ SFG 的名詞定義

如圖 3-7 的節點 y_1

輸入節點 (源點) 一個節點若只有出去的支路時稱為輸入節點。

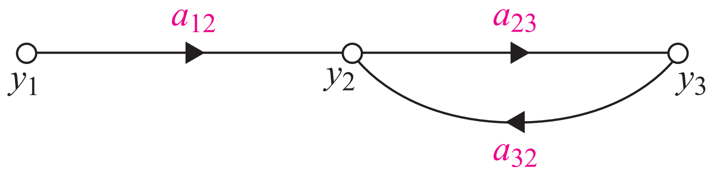
一輸入節點僅有出去的支路

如圖 3-7 的節點 y_5

輸出節點 (汲點) 一個節點若只有進來的支路時稱為輸出節點。

一輸出節點僅有進來的支路

★ 前述條件並非都能很快的看出輸出節點。例如，圖 3-8(a) 中的訊號流程圖並沒有任何節點滿足輸出節點的條件。

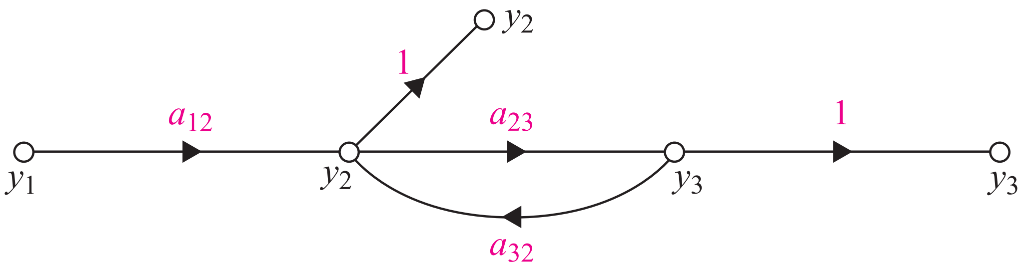


(a) 原來的訊號流程圖

★ 創造新的輸出節點

- 利用單位增益支路
- 圖 3-8(b)

訊號流程圖中的任何非輸入節點大都可以上述的運算變成輸出節點。



(b) 修改過的訊號流程圖

圖 3-8 修改訊號流程圖使得 y_2 和 y_3 滿足輸出節點的要求

★ 無法將非輸入節點轉成輸入節點。

- 重組代數方程式

Ex. 若圖 3-8(b)想加進一條單一增益的支路，將y_2 變成輸入節點，則會導致圖 3-9 的錯誤流程圖。而描述節點 y_2 的關係方程則變爲

$$y_2 = y_2 + a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \qquad \textbf{(3-28)}$$

路徑 任何通過同一方向的支路群連續系列的組合均稱為路徑 (path)。

順向路徑 若一路徑起始於輸入節點，結束於輸出節點且沿途所經過的節點沒有超過一次以上時，則稱此路徑為順向路徑 (forward path)。

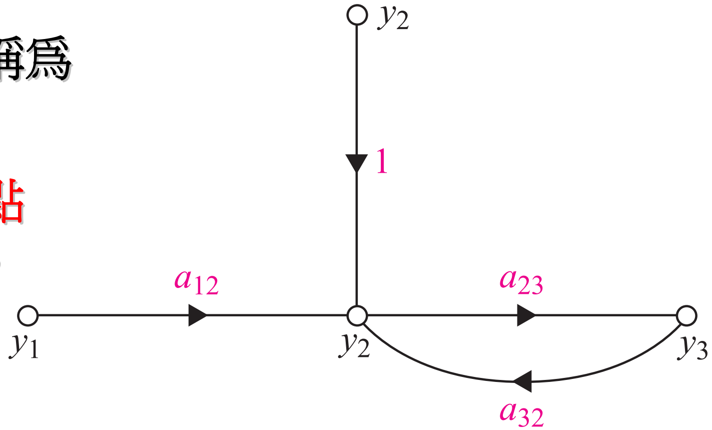


圖 3-9 使節點 y_2 改成輸入節點的錯誤方法

例如，圖 3-7(d) 中的訊號流程圖。

在 y_1 和 y_3 之間有兩條順向路徑
y_1 和 y_4 之間找到兩條順向路徑
y_1 和 y_5 之間也有三條順向路徑

迴路

若一路徑的起點和終點是在同一節點，且沿途節點並沒有遭遇一次以上時，則稱此路徑為迴路 (loop)。

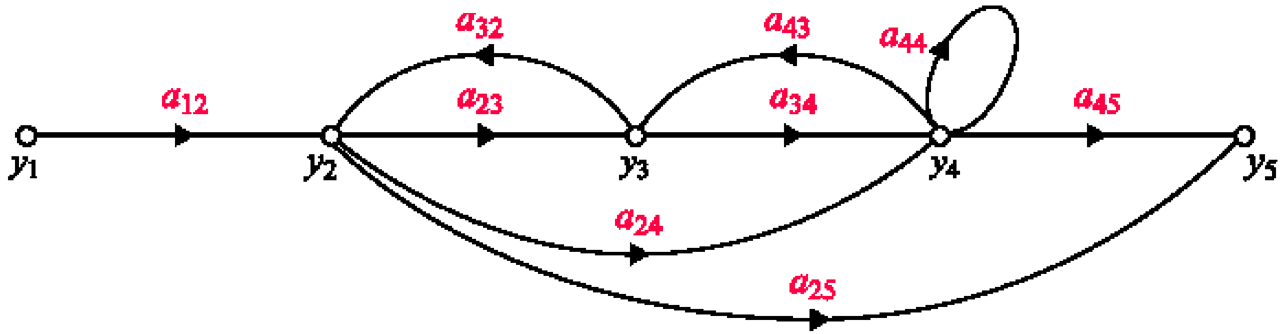


圖 3-7(d) 完整的訊號流程圖

例如，圖 3-7(d) 的訊號流程圖有四個迴路。這些迴路如圖 3-10 所示。

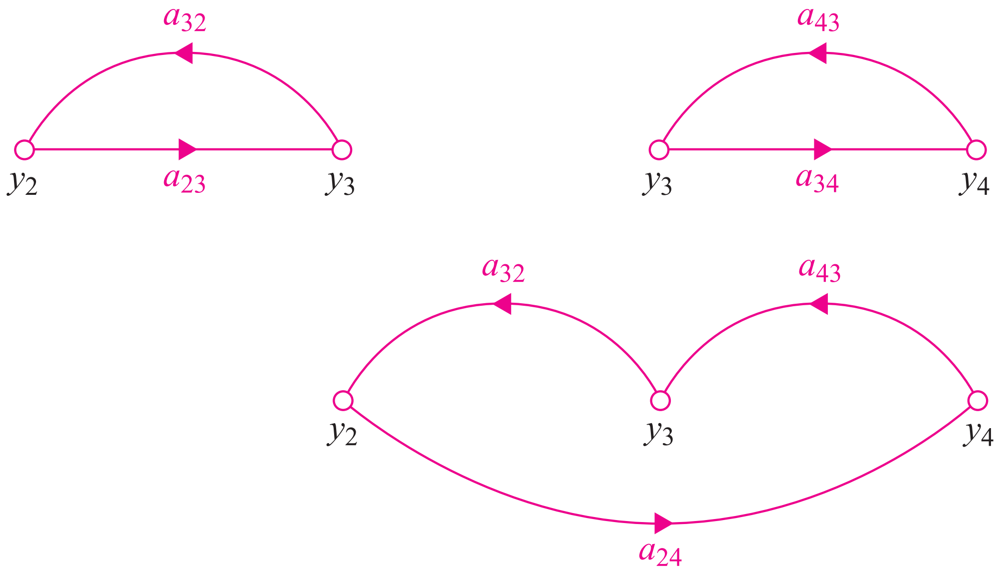


圖 3-10 在圖 3-7(d) 中訊號流程圖的四個迴路

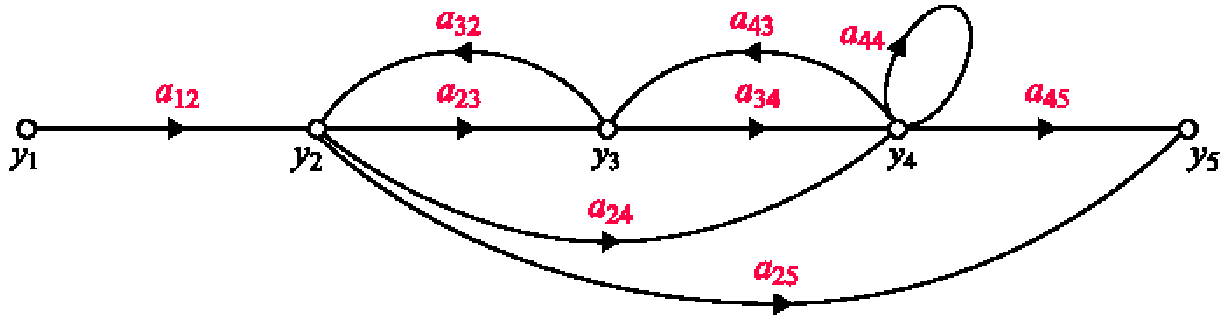


圖 3-7(d) 完整的訊號流程圖

路徑增益 在一路徑中所遇到的支路其支路增益的乘積稱爲路徑增益 (path gain)。

例如，圖 3-7(d) 中的路徑 $y_1 - y_2 - y_3 - y_4$ 的路徑增益爲 $a_{12}a_{23}a_{34}$ 。

順向路徑增益 順向路徑增益 (forward-path gain) 爲一順向路徑的路徑增益。

迴路增益 一迴路的路徑增益即稱爲迴路增益 (loop gain)。

例如，圖 3-10 中迴路 $y_2 - y_4 - y_3 - y_2$ 的迴路增益爲 $a_{24}a_{43}a_{32}$。

無接觸迴路 一 SFG 的兩部份若無共用節點，則稱此兩部份爲無接觸的 (nontouching)。

一 SFG 的兩部份如果沒有共有節點，則爲無接觸的。

例如圖 3-7(d) 中 SFG 的 $y_2 - y_3 - y_2$ 和 $y_4 - y_4$ 迴路，即爲無接觸迴路。

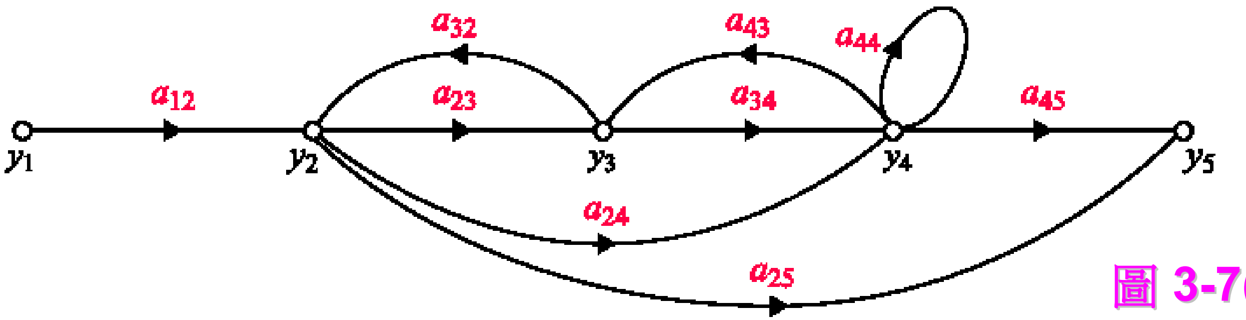


圖 3-7(d) 完整的訊號流程圖

※ 訊號流程圖的代數

1. 一節點所代表變數的值，等於所有進入該節點訊號的總和。

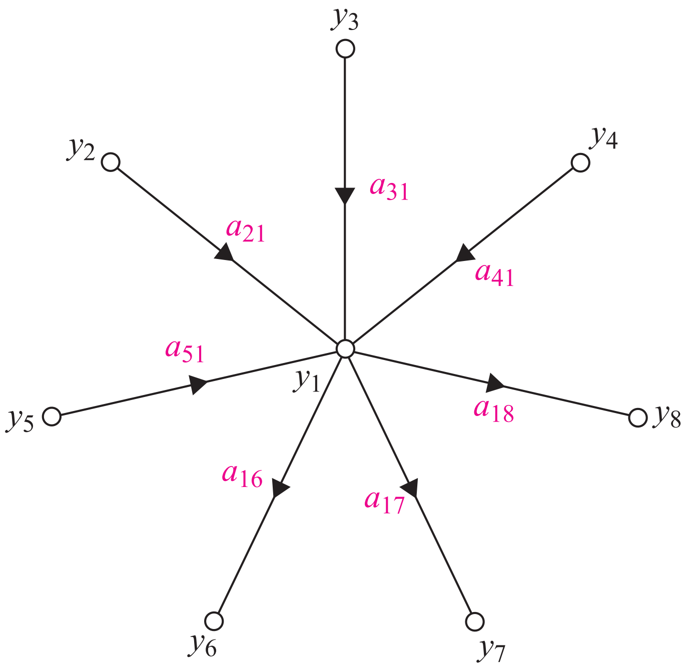


圖 3-11 節點當作總和點及傳輸點

Ex. 圖 3-11 的訊號流程圖而言，y_1 的值等於所有經由進來支路傳送的訊號總和；即

$$y_1 = a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 + a_{51}y_5 \quad \textbf{(3-29)}$$

2. 一節點所代表變數的值，會經由所有離開此節點的支路來傳遞。

Ex. 在圖 3-11 的 SFG 中，我們有

$$\begin{aligned} y_6 &= a_{16}y_1 \\ y_7 &= a_{17}y_1 \\ y_8 &= a_{18}y_1 \end{aligned} \quad \textbf{(3-30)}$$

3. 連結在兩個節點之間相同方向的平行支路，可用一個增益等於這些平行支路增益和的支路來代替。這個情況的例子說明於圖 3-12 中。

4. 在同一方向串接的支路，可用一個增益等於這些支路增益乘積的支路來代替。如圖 3-13 所示。

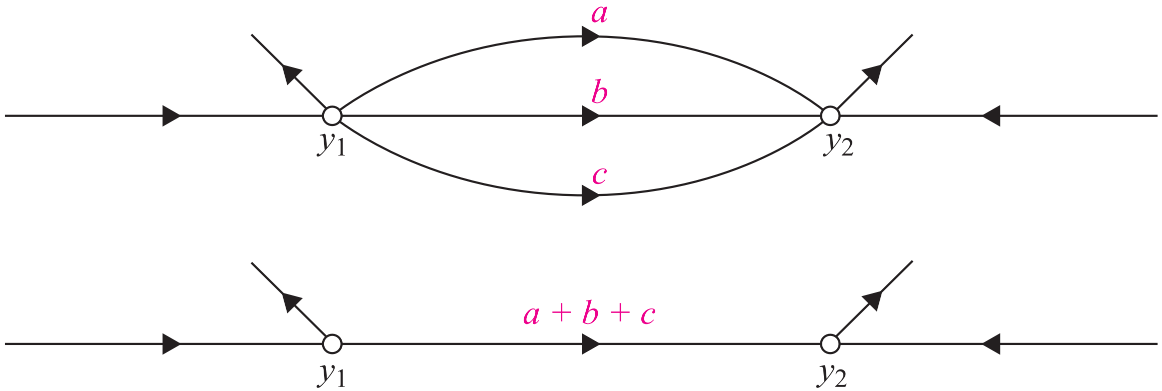


圖 3-12 以一個單一支路來代替平行路徑的訊號流程圖

※ 回授控制系統的 SFG

單迴路回授控制系統的 **SFG** 繪於圖 3-14，其閉迴路轉移函數為

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)} =\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad (3\text{-}8)$$

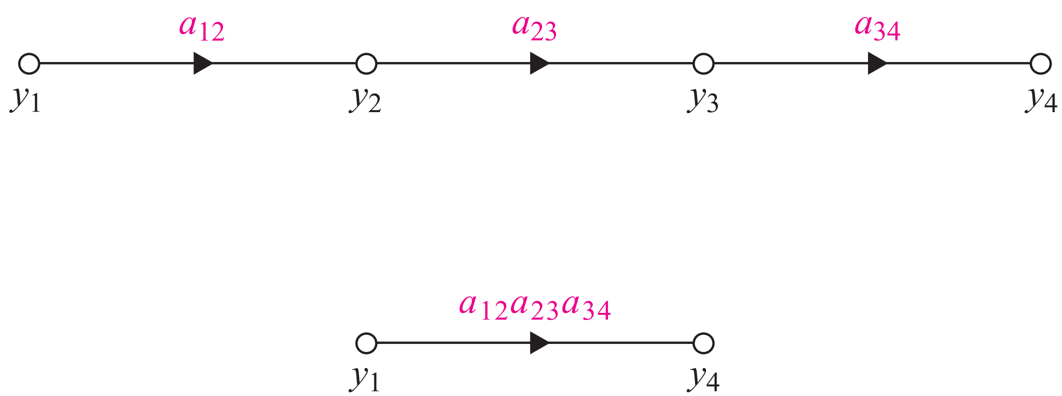
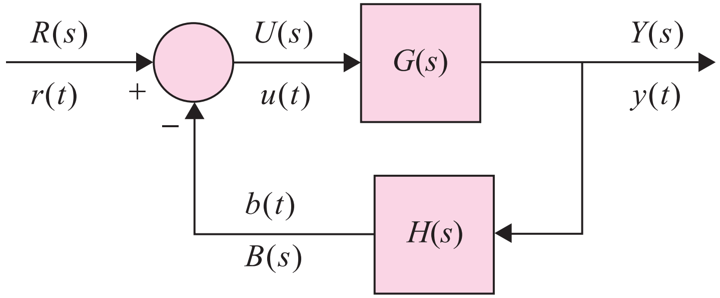


圖 3-13 以單一支路來代替串連的單方向支路群的訊號流程圖



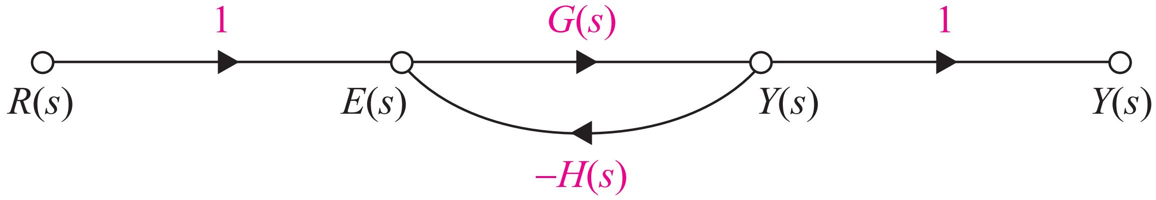


圖 3-14 圖 3-3 所示回授控制系統的訊號流程圖

※ SFG 的增益公式

已知 SFG 有 ***N*** 個順向路徑和 ***K*** 個迴路，在輸入節點 y_{in} 和輸出節點 y_{out} 之間的增益爲

$$\boxed{M = \frac{y_{out}}{y_{in}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}} \qquad \textbf{(3-31)}$$

⇨ **Mason's gain Formula**

其中 y_{in} = 輸入節點變數

y_{out} = 輸出節點變數

M = y_{in} 和 y_{out} 之間的增益

N = y_{in} 和 y_{out} 之間順向路徑的總數

M_k = y_{in} 和 y_{out} 之間第 k 條順向路徑的增益

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \cdots \qquad \textbf{(3-32)}$$

L_{mr} = r 個無接觸迴路 ($1 \le r \le K$) 的第 m 種 ($m = i$，j，k，…) 可能組合的增益乘積

或

Δ = 1 – (所有個別迴路增益和) + (兩個無接觸迴路的所有可能組合的增益乘積總和) – (三個無接觸迴路的所有可能組合的增益乘積總和) + … (3-33)

Δ_k = 在訊號流程圖中與第 k 個順向路徑無接觸部份的 Δ 。

- SFG增益公式僅能應用於一個輸入節點與輸出節點之間

► 例題 3-3　考慮圖 3-14 的訊號流程圖，試求出轉移函數 $Y(s)/R(s)$。

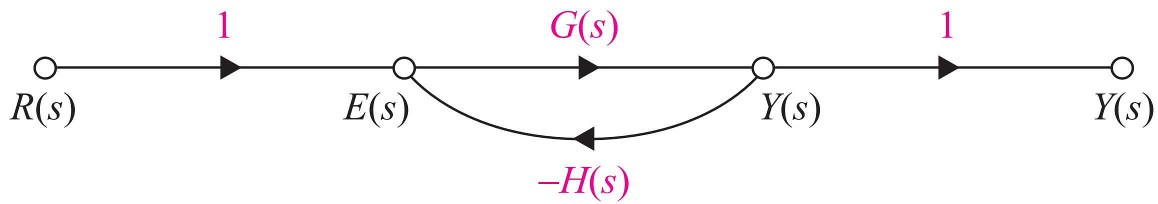


圖 3-14　圖 3-3 所示回授控制系統的訊號流程圖

<Sol.>

1. 在 $R(s)$ 和 $Y(s)$ 之間只有一條順向路徑，順向路徑增益是

$$M_1 = G(s) \qquad \textbf{(3-34)}$$

2. 只有一個迴路；迴路增益是

$$L_{11} = -G(s)H(s) \qquad \textbf{(3-35)}$$

3. 因為只有一個迴路，所以沒有無接觸迴路。且順向路徑和唯一的迴路接觸。因此 $\Delta_1 = 1$，及

$$\Delta = 1 - L_{11} = 1 + G(s)H(s) \qquad \textbf{(3-36)}$$

利用 **(3-31)** 式，閉迴路轉移函數可寫成

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad \textbf{(3-37)}$$

這與 **(3-8)** 式相合

► 例題 3-4　考慮圖 3-7(d) 的 **SFG**。首先，用增益公式來決定 y_1 和 y_5 之間的增益。

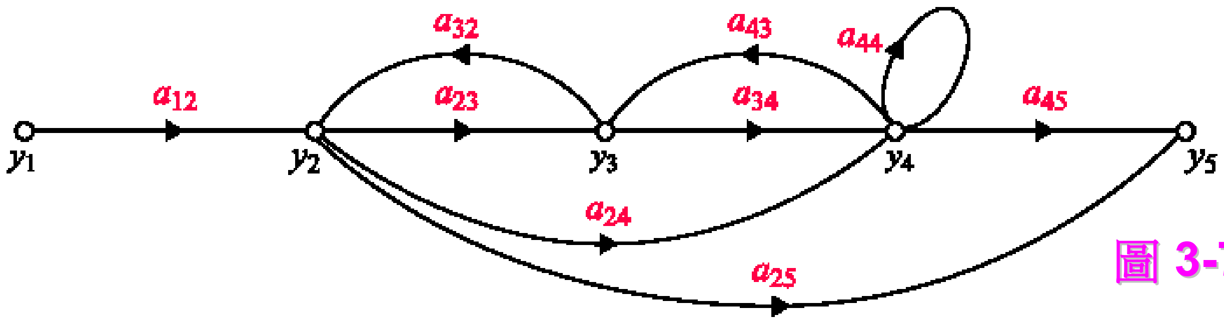


圖 3-7(d) 完整的訊號流程圖

<Sol.>

1. 三個順向路徑與順向路徑增益為：

$M_1 = a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{45}$　　順向路徑：$y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5$

$M_2 = a_{12}\,a_{25}$　　順向路徑：$y_1 - y_2 - y_5$

$M_3 = a_{12}\,a_{24}\,a_{45}$　　順向路徑：$y_1 - y_2 - y_4 - y_5$

2. SFG 的四個迴路增益為：

四個迴路示於圖 3-10 中

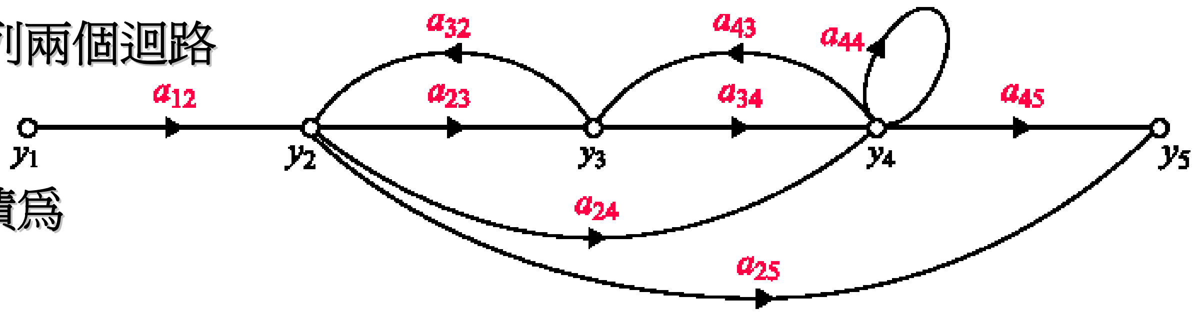
$L_{11} = a_{23}\,a_{32}$　　$L_{21} = a_{34}a_{43}$　　$L_{31} = a_{24}a_{43}a_{32}$　　$L_{41} = a_{44}$

3. 有一對無接觸的迴路，即下列兩個迴路

$y_2 - y_3 - y_2$　和　$y_4 - y_4$

這兩個無接觸迴路的增益乘積為

$L_{12} = a_{23}a_{32}a_{44}$　　**(3-38)**



4. 所有的迴路都與順向路徑 M_1 和 M_3 有接觸。因此 $\Delta_1 = \Delta_3 = 1$。

5. 所有迴路中有兩個迴路與順向路徑 M_2 無接觸，它們是迴路 $y_3 - y_4 - y_4$ 和 $y_4 - y_4$。

$$\Delta_2 = 1 - a_{34}a_{43} - a_{44} \qquad \textbf{(3-39)}$$

6. y_1 和 y_5 之間的增益：

利用**Mason's Gain Formula:** (3-31) 式

$$\frac{y_5}{y_1}=\frac{M_1\Delta_1+M_2\Delta_2+M_3\Delta_3}{\Delta}=\frac{(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45})+(a_{12}a_{25})(1-a_{34}a_{43}-a_{44})+a_{12}a_{24}a_{45}}{1-(a_{23}a_{32}+a_{34}a_{43}+a_{24}a_{32}a_{43}+a_{44})+a_{23}a_{32}a_{44}} \quad \textbf{(3-40)}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta &= 1-(L_{11}+L_{21}+L_{31}+L_{41})+L_{12}\\ &= 1-(a_{23}a_{32}+a_{34}a_{43}+a_{24}a_{32}a_{43}+a_{44})+a_{23}a_{32}a_{44}\end{aligned} \quad \textbf{(3-41)}$$

★ 若選 y_2 爲輸出，則

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{a_{12}(1-a_{34}a_{43}-a_{44})}{\Delta} \quad \textbf{(3-42)}$$

無論選擇那一個爲輸出節點，Δ 都是一樣的

其中， Δ 與 **(3-41)** 式相同。

► 例題 3-5 考慮圖 3-15 中的**SFG**。利用增益公式可得下列輸入-輸出關係：

$$y_2/y_1,\quad y_4/y_1,\quad y_6/y_1=?$$

<Sol.>

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{1+G_3H_2+H_4+G_3H_2H_4}{\Delta} \quad \textbf{(3-43)}$$

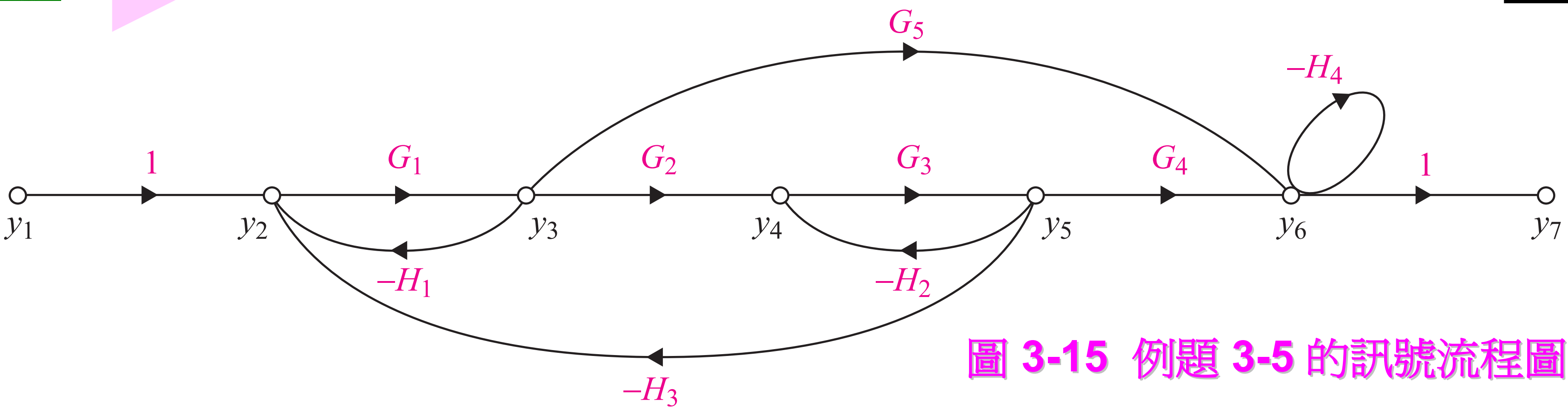


圖 3-15 例題 3-5 的訊號流程圖

$$\frac{y_4}{y_1} = \frac{G_1G_2(1 + H_4)}{\Delta} \qquad \textbf{(3-44)}$$

$$\frac{y_6}{y_1} = \frac{y_7}{y_1} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1 + G_3H_2)}{\Delta} \qquad \textbf{(3-45)}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &+ G_1H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_3 + H_4 + G_1G_3H_1H_2 \\ &+ G_1H_1H_4 + G_3H_2H_4 + G_1G_2G_3H_3H_4 + G_1G_3H_1H_2H_4\end{aligned} \qquad \textbf{(3-46)}$$

CHAPTER 3 方塊圖及訊號流程圖

※ 增益公式在輸出節點及非輸入節點之間的應用

在圖 3-15 的 SFG 中，我們想找出關係 y_7/y_2。

令 y_{in} 爲 SFG 的輸入，而 y_{out} 爲輸出。針對非輸入節點 y_2 言，增益 y_{out}/y_2 可寫成

$$\frac{y_{out}}{y_2} = \frac{y_{out}/y_{in}}{y_2/y_{in}} = \frac{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{從 } y_{in} \text{ 到 } y_{out}} / \Delta}{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{從 } y_{in} \text{ 到 } y_2} / \Delta} \quad \textbf{(3-47)}$$

Δ 與輸入和輸出無關

$$\Rightarrow \frac{y_{out}}{y_2} = \frac{y_{out}/y_{in}}{y_2/y_{in}} = \frac{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{從 } y_{in} \text{ 到 } y_{out}}}{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{從 } y_{in} \text{ 到 } y_2}} \quad \textbf{(3-48)}$$

注意，Δ 沒有出現在左式中。

► 例題 3-6　由圖 3-15 中的 SFG，y_2 與 y_7 之間的增益可寫成

$$\frac{y_7}{y_2} = \frac{y_7/y_1}{y_2/y_1} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1 + G_3H_2)}{1 + G_3H_2 + H_4 + G_3H_2H_4} \quad \textbf{(3-49)}$$

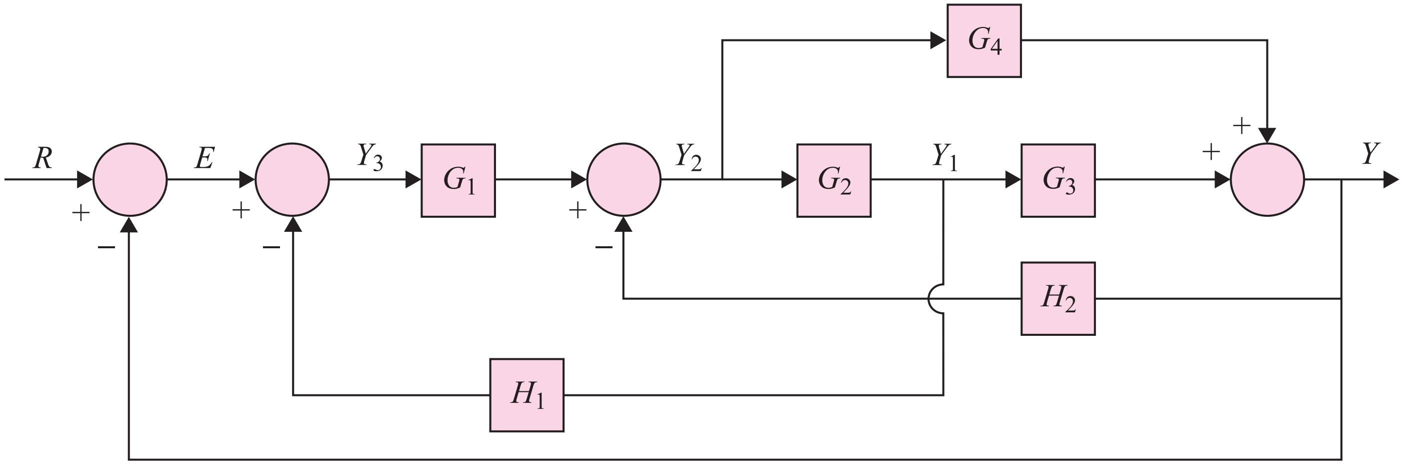
先清楚確認所有的迴路和無接觸部份

※ 增益公式在方塊圖中的應用

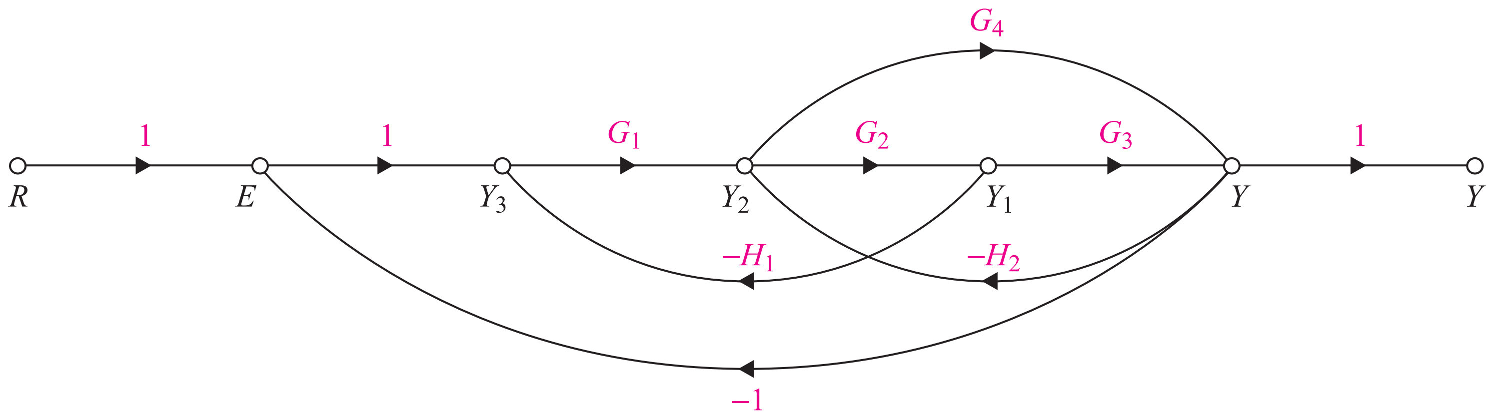
1. (3-31) 式的通用增益公式可用來求解方塊圖或訊號流程圖輸入-輸出關係。
2. 先繪出方塊圖對應的等效訊號流程圖，再應用增益公式。

► 例題 3-7 爲說明如何建構一方塊圖的等效 SFG 及如何應用增益公式於方塊圖，考慮圖 3-16(a) 中的方塊圖。試求系統的閉迴路轉移函數 $Y(s)/R(s)$ = ?

圖 3-16
(a) 控制系統的方塊圖；
(b) (a)圖的等效訊號流程圖



(a)



(b)

<Sol.>

在 **SFG** 中的節點代表所有進入節點訊號的總和點，所以方塊圖中的**負回授**是以在 **SFG** 的回授路徑上**指定負增益**來表示。

1. 系統的等效方塊圖示於圖 **3-16(b)**。

2. 閉迴路轉移函數：

應用 **(3-31)**

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{\Delta} \quad \textbf{(3-50)}$$

其中， $\Delta = 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4$ **(3-51)**

同理，得

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2}{\Delta} \quad \textbf{(3-52)}$$

利用 **(3-48)** 式而求得

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2} \quad \textbf{(3-53)}$$

※ 狀態圖

1. 狀態圖用以描述狀態方程式與微分方程式。

2. 狀態圖的建構乃使用拉氏轉換後的狀態方程式，並遵循所有 **SFG** 的法則來完成。

3. 狀態圖的基本元件類似傳統的 **SFG**，但積分運算除外。

★ 積分運算的狀態圖

1. 令變數 $x_1(t)$ 與 $x_2(t)$ 之間的關係為一階微分

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \qquad \textbf{(3-54)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = \int_{t_0}^{t} x_2(\tau)d\tau + x_1(t_0) \qquad \textbf{(3-55)}$$

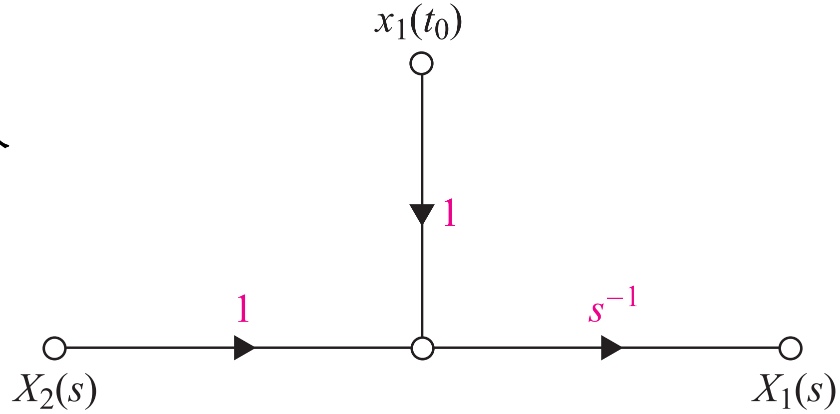


圖 3-17 $X_1(s) = [X_2(s)/s] + [x_1(t_0)/s]$ 的訊號流程圖表示法

2. 取拉氏轉換，可得

$$X_1(s) = \mathcal{L}\left[\int_{t_0}^{t} x_2(\tau)d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

$$= \mathcal{L}\left[\int_{0}^{t} x_2(\tau)d\tau - \int_{0}^{t_0} x_2(\tau)d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \qquad \textbf{(3-56)}$$

$$= \frac{X_2(s)}{s} - \mathcal{L}\left[\int_{0}^{t_0} x_2(\tau)d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} + \frac{x_1(t_0)}{s} \qquad \tau \geq t_0 \qquad \textbf{(3-57)}$$

狀態轉移假設是從 $\tau = t_0$ 開始，$x_2(\tau) = 0$，$0 < \tau < t_0$，故此項為零

兩種狀態圖表示法：**圖 3-17** 與 **圖 3-18**

★ 狀態圖的主要用途：

1. 狀態圖可直接由系統的微分方程式導出。並可決定狀態變數及狀態方程式。
2. 狀態圖可由系統的轉移函數導出。(見4-11節)
3. 狀態圖可用在類比計算機上做系統規劃，或在數位計算機中做系統模擬。
4. 由狀態圖利用訊號流程增益公式法可求得<u>拉氏</u>轉換領域中的狀態變換方程式。
5. 由狀態圖可求得系統的轉移函數。
6. 由狀態圖可決定狀態方程式和輸出方程式。

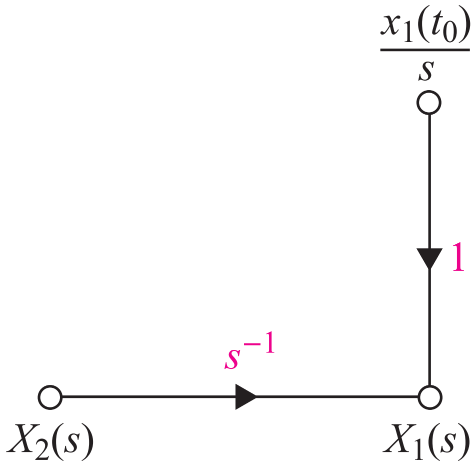


圖 3-18 $X_1(s) = [X_2(s)/s] + [x_1(t_0)/s]$ 的訊號流程圖表示法

※ 由微分方程式到狀態圖

1. 線性系統的高階微分方程式

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = r(t) \qquad \textbf{(3-58)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} - \cdots - a_2 \frac{dy(t)}{dt} - a_1 y(t) + r(t) \qquad \textbf{(3-59)}$$

請注意：狀態圖中積分器的輸出常被定義為狀態變數

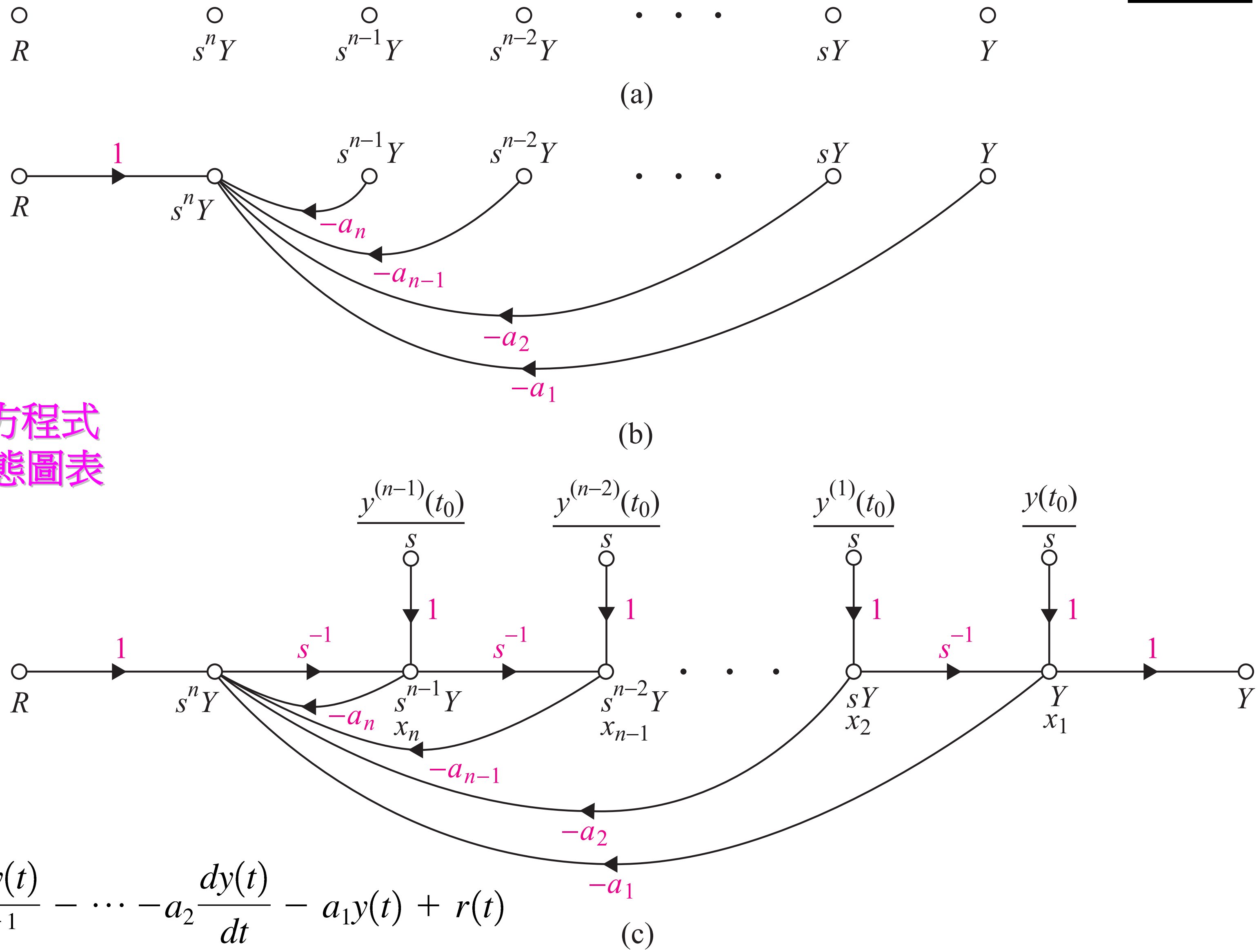


圖 3-19 微分方程式(3-58) 式的狀態圖表示法

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_n \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} - \cdots - a_2 \frac{dy(t)}{dt} - a_1 y(t) + r(t)$$

2. 將代表 $R(s)$，$s^nY(s)$，$s^{n-1}Y(s)$，…，$sY(s)$ 和 $Y(s)$ 的節點由左至右排列，如圖 3-19(a) 所示。

3. 將圖 3-19(a) 中的節點用支路連接起來，以描述 (3-59) 式。 ⇨ 圖 3-19(b)

   在拉氏領域中，$s^iY(s)$ 是相對於 $d^iy(t)/dt^i$，$i = 0$，1，2，…，n

4. 安插增益為 s^{-1} 的積分支路並加上初始條件至積分器的輸出。 ⇨ 圖 3-19(c)

5. 積分器的輸出定義為狀態變數 x_1，x_2，…，x_n。

► 例題 3-8 試繪出下列微分方程式的狀態圖：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = r(t) \quad \textbf{(3-60)}$$

<Sol.>

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + r(t) \quad \textbf{(3-61)}$$

系統的狀態圖，如圖 3-20 所示。狀態變數 x_1 和 x_2 亦表示於圖中。

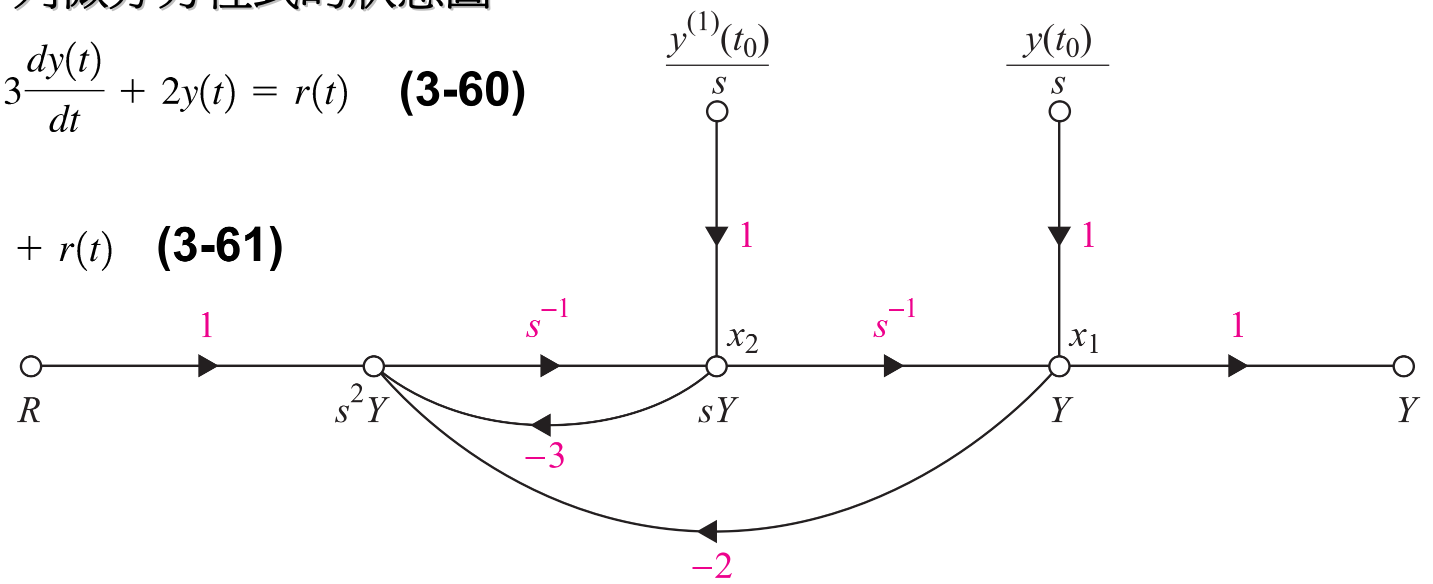


圖 3-20 (3-60) 式的狀態圖

※ 由狀態圖到轉移函數

輸入和輸出之間的轉移函數，可從狀態圖中利用增益公式，並將所有其它輸入和初始條件設爲零來求得。

► 例題 3-9 考慮圖 3-20 中的狀態圖。試求 ***R*(*s*)** 和 ***Y*(*s*)** 之間的轉移函數。

<Sol.> 在該兩節點間應用增益公式，並將初始條件設爲零而求得。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \qquad \textbf{(3-62)}$$

※ 由狀態圖到狀態方程式與輸出方程式

附錄 B

★ 線性系統之狀態方程式與輸出方程式的通式

狀態方程式：$\dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) + br(t)$ **(3-63)**

輸出方程式：$y(t) = cx(t) + dr(t)$ **(3-64)**

其中，***x*(*t*)** 爲狀態變數，***r*(*t*)** 爲輸入，***y*(*t*)** 爲輸出，而 ***a***、***b***、***c*** 與 ***d*** 則爲常數係數。

★ 從狀態圖導出狀態與輸出方程式的步驟：

1. 從狀態圖中刪去初始狀態與增益為 s^{-1} 的積分器支路，這是因為狀態與輸出方程式並未包含拉氏運算子 s 或初始狀態。
2. 針對狀態方程式，將代表狀態變數微分的節點視為輸出節點，這是因為這些變數出現在狀態方程式的左邊。輸出方程式的輸出 $y(t)$ 自然是一個輸出節點的變數。
3. 在狀態圖中將狀態變數與輸入視為輸入變數，這是因為這些變數是位於狀態與輸出方程式的右手邊。
4. 應用 SFG 增益公式於狀態圖。

► 例題 3-10 試求圖 3-20所代表的狀態方程式與輸出方程式。

<Sol.>

1. 將圖 3-20 的狀態圖去掉積分器支路與初始狀態得出圖 3-21。
2. 採用 $dx_1(t)/dt$ 與 $dx_2(t)/dt$ 為輸出節點，$x_1(t)$、$x_2(t)$ 與 $r(t)$ 為輸入節點
3. 在這些節點之間應用增益公式，可得狀態方程式為

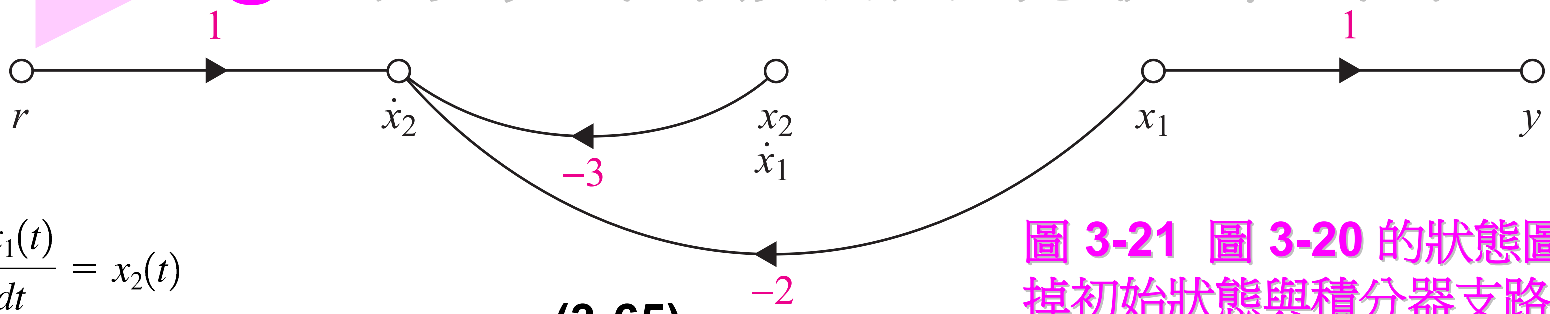


圖 3-21　圖 3-20 的狀態圖去掉初始狀態與積分器支路

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) - 3x_2(t) + r(t) \tag{3-65}$$

4. 以 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 與 $r(t)$ 為輸入節點，$y(t)$ 為輸出節點，並應用增益公式，輸出方程式可寫為

$$y(t) = x_1(t) \tag{3-66}$$

► 例題 3-11 試求圖 3-22(a) 之狀態圖所代表的狀態方程式。

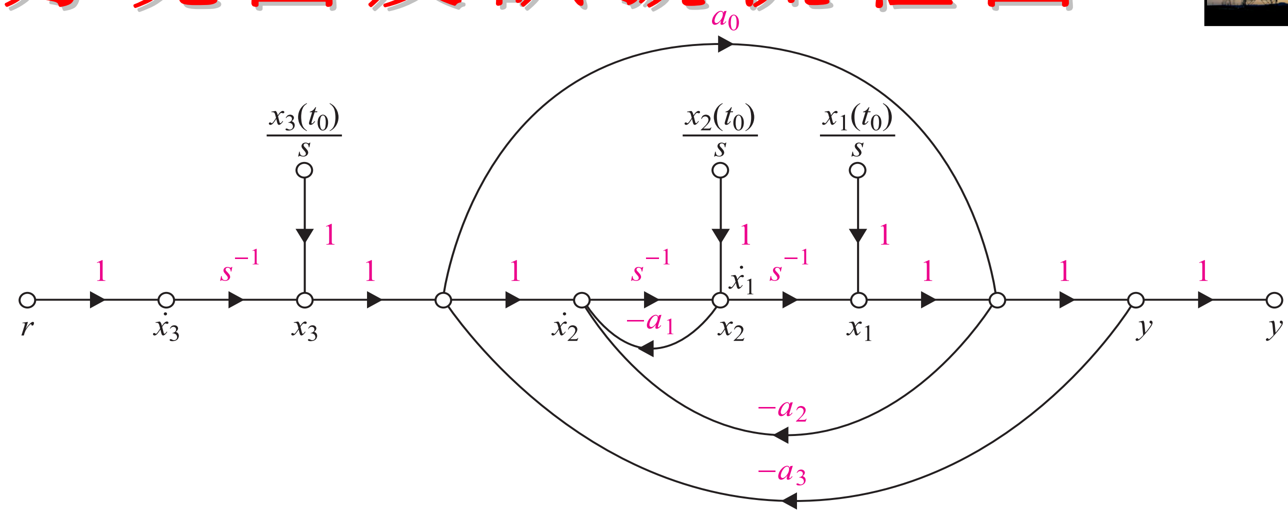
<Sol.>

1. 去掉初始狀態與積分器的狀態圖。 圖 3-22(b)

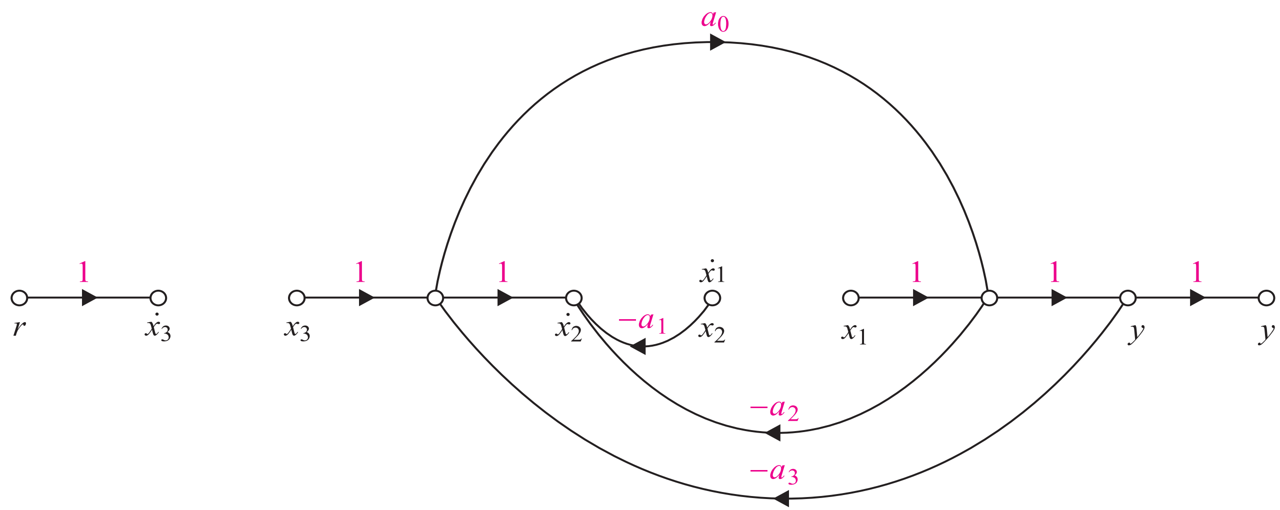
圖 3-22(b) 中狀態圖仍然包含一迴路

2. 將 $dx_1(t)/dt$、$dx_2(t)/dt$ 與 $dx_3(t)/dt$ 視為輸出節點變數；$r(t)$、 $x_1(t)$、$x_2(t)$與 $x_3(t)$為輸入節點。

3. 應用增益公式於圖 3-22(b) 中的狀態圖，可得如下向量-矩陣形式的狀態方程式：



(a)



(b)

圖 3-22
(a) 狀態圖，(b) 圖 (a) 中的狀態圖去掉所有的初始狀態與積分器後的狀態圖

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-(a_2 + a_3)}{1 + a_0 a_3} & -a_1 & \dfrac{1 - a_0 a_2}{1 + a_0 a_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \qquad \textbf{(3-67)}$$

輸出方程式為

$$y(t) = \frac{1}{1 + a_0 a_3} x_1(t) + \frac{a_0}{1 + a_0 a_3} x_3(t) \qquad \textbf{(3-68)}$$

圖 3-23 顯示轉移函數計算器視窗

※ MATLAB 工具與個案研究

1. 在 **ACSYS** 視窗內點選當的按鍵或在 **MATLAB** 命令視窗內鍵入**TFcal**，即可啓用轉移函數計算器 **(Transfer Function Calculator)** 工具。
2. 按下「初學者說明」**(Help for 1st Time User)** 以取得各項指示。結果便會出現圖 3-24 所示的 **MATLAB** 協助對話盒。

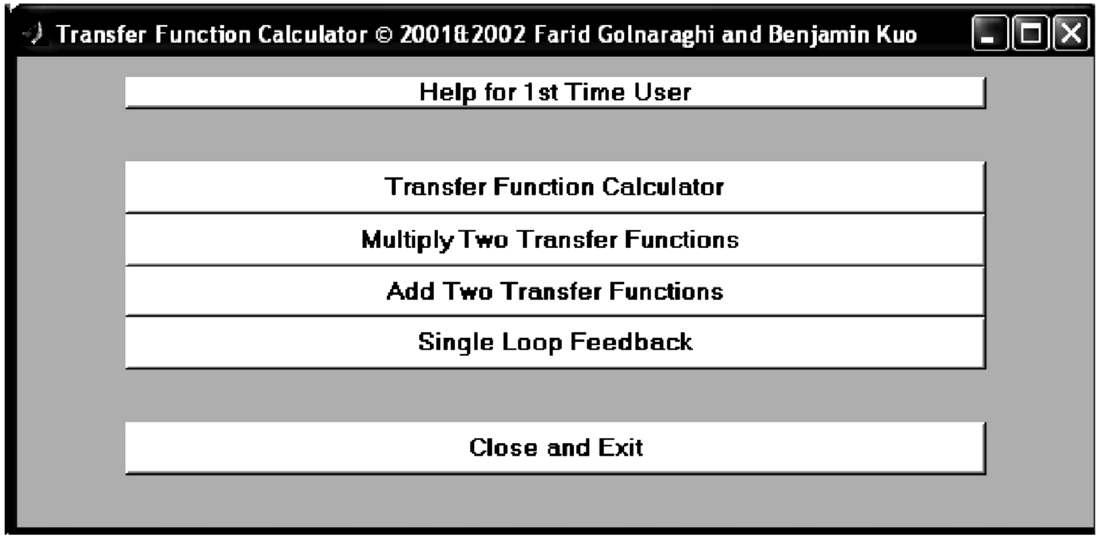


圖 3-23 轉移函數計算器視窗

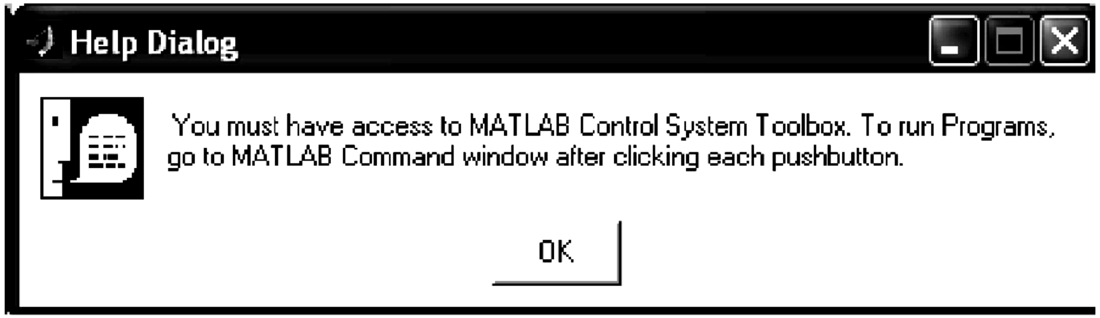


圖 3-24 TFcal 工具的 MATLAB 協助對話盒

3. 第一個動作按鍵為「轉移函數計算器」 (Transfer Function Calculator)，此鍵可用來求出轉移函數極點與零點，並將系統由轉移函數形式轉換成狀態空間形式 (詳細介紹請參閱第五章)。

4. 如圖 **3-25** 所描述的，吾人亦可用其它按鍵來計算簡單系統的轉移函數。

► 例題 **3-12**

考慮下列各轉移函數，分別對應於圖 **3-25** 所示的各方塊圖

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+2},$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad H(s) = 10 \qquad \textbf{(3-69)}$$

試求每一情況的轉移函數 ***Y(s)/R(s)***。

<Sol.>

針對圖 **3-25 (a)** ，按下「兩轉移函數相乘」**(Multiply Two Transfer Function)** 鍵 **(**如圖 **3-23** 所示的**)**。

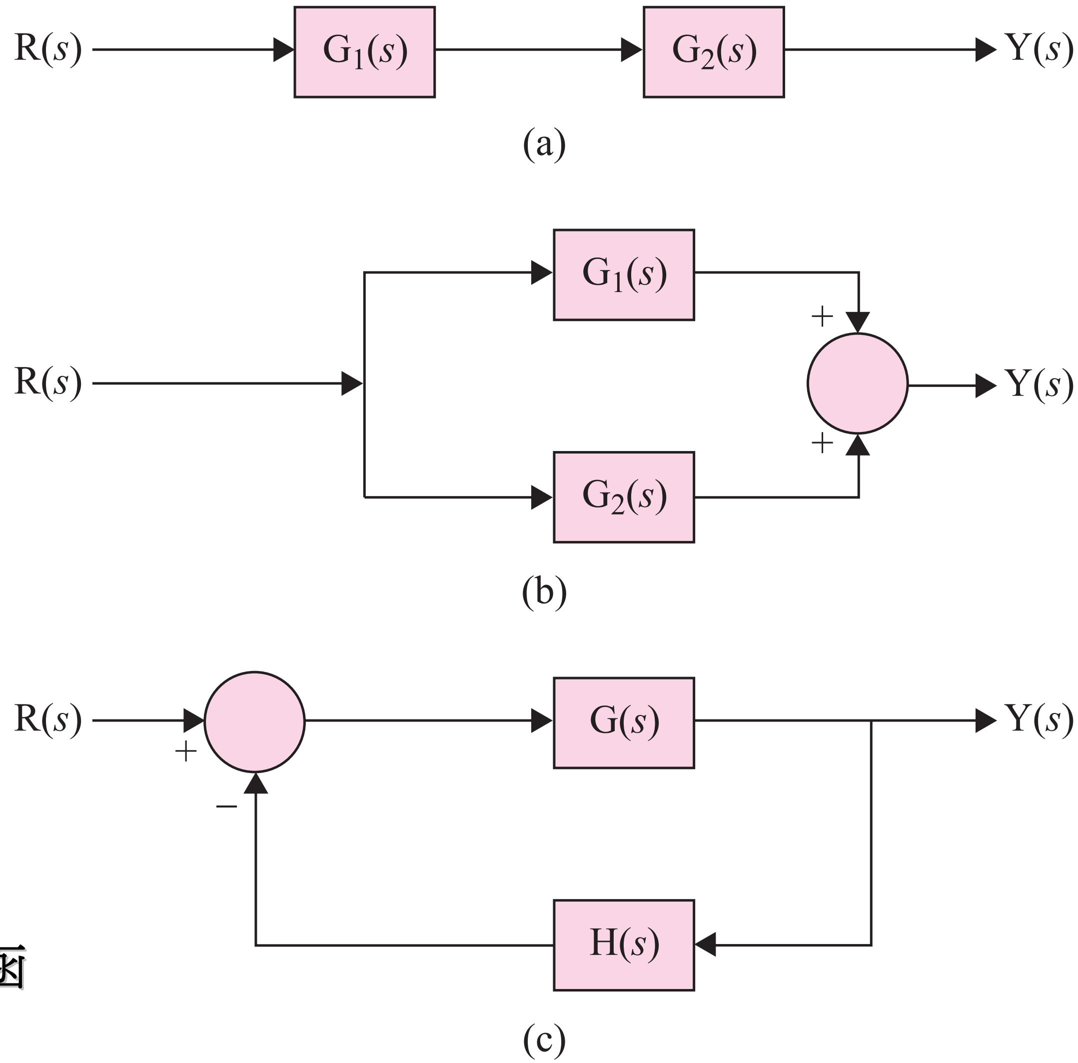


圖 **3-25 TFcal** 工具內所使用的基本方塊圖

1. 在 MATLAB 命令視窗內，依照指示鍵入 $G_1(s)$ 及 $G_2(s)$ 轉移函數。
2. 此程式將會產生多項式及因式分解形式的轉移函數，以及其極點與零點，如圖3-26 所示。

因此，

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \textbf{(3-70)}$$

```
Transfer Function Calculator. © Kuo & Golnaraghi 8th Edition, John Wiley & Sons.
e.g., Use the following input format: (s+2)*(s^3+2*s+1)/(s*(s^2+2*s+1))

Enter G1 and G2 to find G1*G2

Enter G1 = 1/(s+1)
Transfer function:
 1
----
s + 1

Enter G2 = 1/(s+2)
Transfer function:
 1
----
s + 2

G=G1*G2 is:
Transfer function:
      1
-------------
s^2 + 3 s + 2

polesG =
–2
–1

zerosG =
  Empty matrix: 0-by-1

G factored:

Zero/pole/gain:
   1
----------
(s+2) (s+1)
```

圖 3-26 參考例題 3-12，圖 3-25 中 (a) 圖例子的 TFcal 結果

3. 使用 **TFcal** 內的「兩轉移函數相加」**(Add Two Transfer Functions)** 及 「單迴路回授」**(Single Loop Feedback)** 選項，吾人即可分別求解圖 **3-25** 的 **(b)** 及 **(c)** 例，其結果如下所示：

(b) 例：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2(s + 1.5)}{(s + 1)(s + 2)} \qquad \textbf{(3-71)}$$

(c) 例：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 10} \qquad \textbf{(3-72)}$$