第五章　控制系統時域響應

5-1 前言

線性系統模型的動態行為可以用線性常微分方程式來表示，而其解法為利用拉氏轉換將微分方程式化為代數方程式，所得到系統轉移函數之特徵方程式的根則決定了系統的模態或響應特徵，下面列出常見特徵方程式的根：

(1)具實根 r，則系統的動態特性可表爲

$$y_1(t) = Ae^{rt}$$

(2)具實根 r 的 m 重根，則系統的動態特性可表爲

$$y_2(t) = A_1e^{rt} + A_2te^{rt} + \ldots + A_mt^{m-1}e^{rt}$$

(3)具共軛複根 $\sigma \pm j\omega$，則系統的動態特性可表爲

$$y_3(t) = e^{\sigma t}\left(C\cos\omega t + D\sin\omega t\right)$$

當系統的特徵根均有負實部時，系統是穩定的，在滿足穩定的前題後，系統的動態性能自然成為討論的主角。系統的動態性能主要分成暫態響應之敏捷性與穩態之精確性兩類，其除與系統本身的結構直接有關外，它與命令輸入的型式也息息相關。

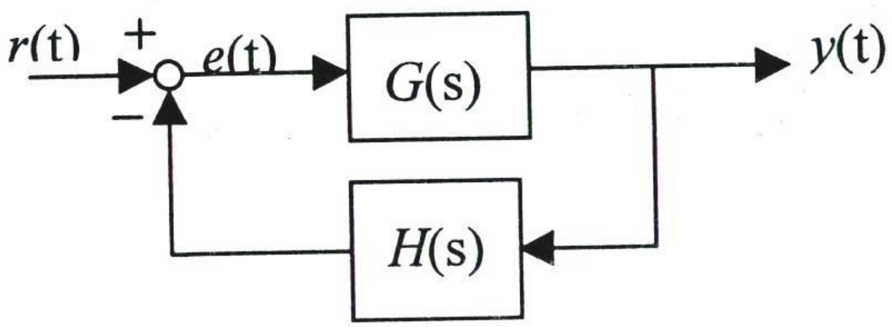
5-2 系統之穩態性能

穩態性能是指系統的穩態誤差 e_{ss}，定義為無窮時間時系統期望輸入 r(t)與真實輸出 y(t)的差值，即

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

5-2-1 靜態誤差常數

考慮如下圖的閉迴路穩定系統



閉迴路系統方塊圖

系統輸入 *R(s)*到誤差 E(s)間的轉移函數推導如下：

$E = R - HY$， $Y/R = G/(1+GH)$

$E/R = 1 - H\,Y/R$

$= 1 - HG/(1+GH)$

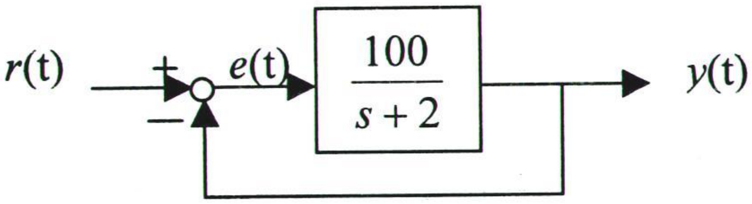
$= 1/(1+GH)$

或可直接將誤差函數表為

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

上式很明顯的可以看出系統的誤差 $E(s)$的大小由閉迴路系統的迴路增益 $G(s)H(s)$及外部輸入 $R(s)$的型態所決定。

例 1　試求下圖系統在 $r(t)$為單位步階函數時的穩態誤差？



閉迴路系統方塊圖

【解】：首先利用拉氏轉換中的終值定理將穩態誤差重寫為：

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)/[1+G(s)H(s)]$$

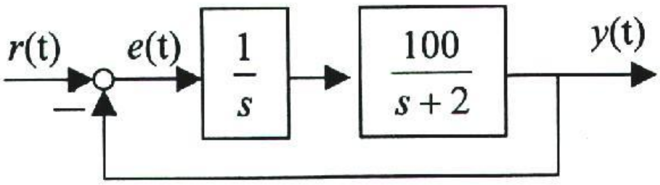
單位步階函數 $r(t)$ 經拉氏轉換後得 $R(s)=\frac{1}{s}$，分別將 $G(s)H(s)$ 及 $R(s)$ 代入

上式可得穩態誤差爲

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{1}{s}}{1+\frac{100}{s+2}}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s+2}{s+102}=\frac{1}{51}\text{。}$$

例 2　欲改善上例的穩態誤差，可於迴路中加入一個積分控制器如下圖。



例　2閉迴路系統方塊圖

試求下面輸入時的穩態誤差？

(i) $r(t)=1$　　　　(ii) $r(t)=t$

【解】:

(i) 將 *G(s)H(s)*及 *R(s)=1/s* 代入上式可得穩態誤差為

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{1}{s}}{1+\frac{100}{s(s+2)}}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s(s+2)}{s^2+2s+100}=0\text{。}$$

(ii)將 $G(s)H(s)$ 及 $R(s)=\frac{1}{s^2}$ 代入上式可得穩態誤差爲

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{1}{s^2}}{1+\frac{100}{s(s+2)}}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s+2}{s^2+2s+100}=0.02\text{。}$$

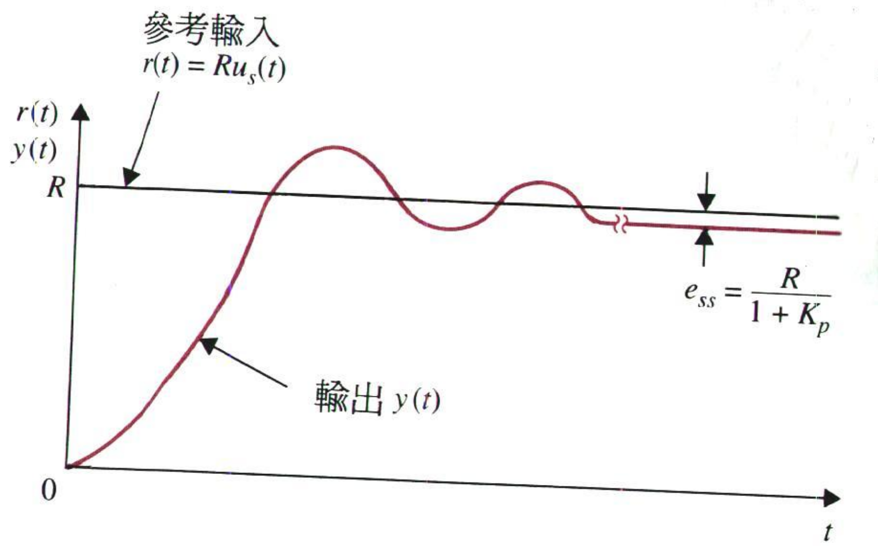
上面例子很清楚的說明系統結構及命令輸入對穩態誤差的影響。

系統結構(迴路增益)具有以下型式：

$$G(s)H(s)=\frac{b_Q s^Q+b_{Q-1}s^{Q-1}+\dots+b_0}{s^N(a_T s^T+a_{T-1}s^{T-1}+\dots+a_0)}=\frac{\sum_{i=0}^{Q} b_i s^i}{s^N\sum_{i=0}^{T} a_i s^i},$$

則系統稱為型式－N(Type-N)。故三種典型輸入之穩態誤差：

1. 階級輸入



$$r(t) = Ru(t)\quad，u(t) = \begin{cases} 1，t\geqq 0 \\ 0，t< 0 \end{cases}$$

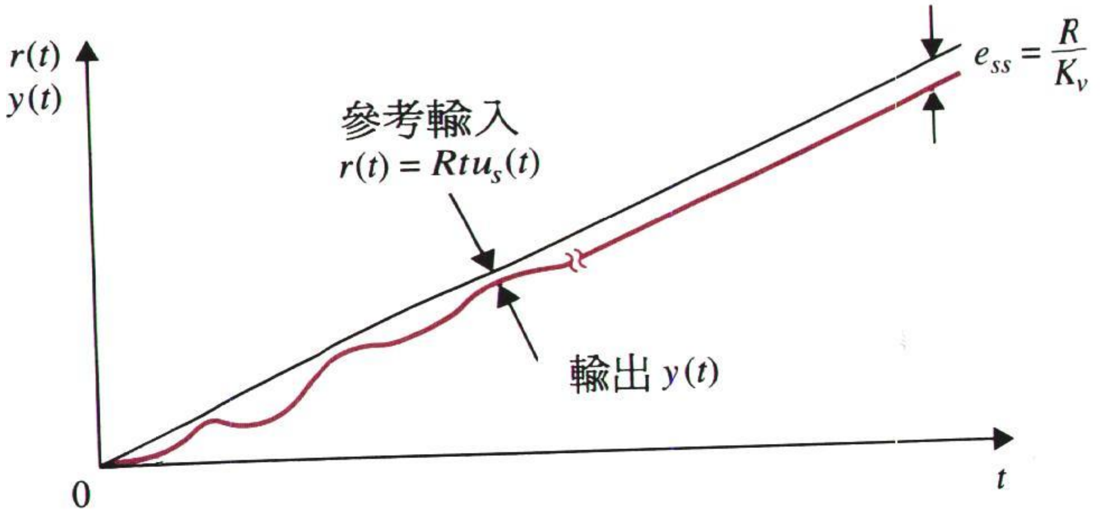
$R(s) = R/s$

$$\therefore e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)/[1+G(s)H(s)]$$

$$= s\cdot(R/s)/[1+\lim_{s\to 0}GH] = \frac{R}{1+K_p}$$

$K_p \equiv \lim_{s\to 0}GH \leftarrow$ 靜態位置誤差常數

2. 斜坡輸入



$$r(t) = Rt \cdot u(t) \quad \rightarrow \qquad R(s) = R/s^2$$

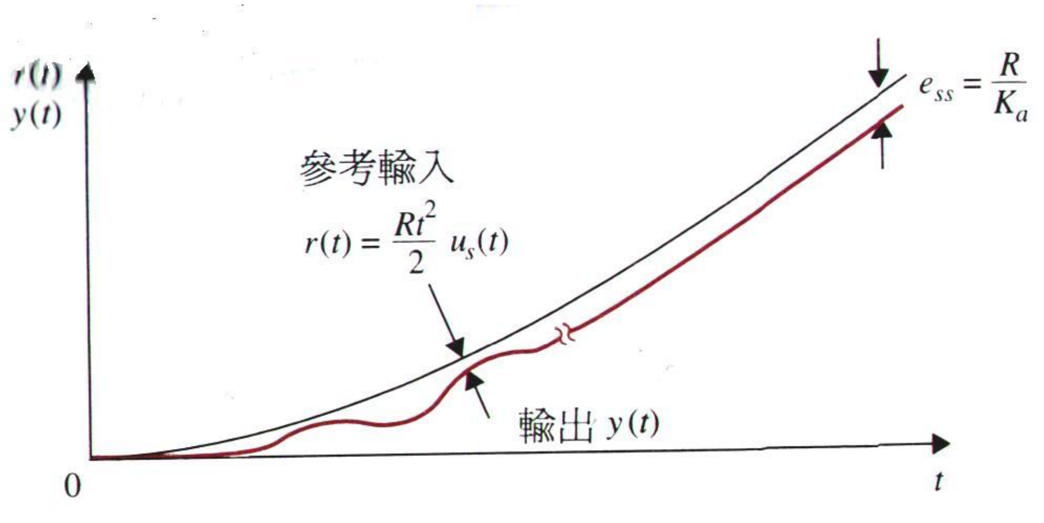
$$\therefore e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)/[1+G(s)H(s)] = \lim_{s\to 0} s \cdot (R/s^2)/[1+GH]$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{R}{s+sGH} = \frac{R}{\lim_{s\to 0} sGH}$$

靜態速度誤差常數：

$$K_v \equiv \lim_{s\to 0} sGH$$

3. 拋物線輸入



$r(t) = Rt^2 \cdot u(t) \rightarrow R(s) = R/s^3$

$$\therefore e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)/[1+G(s)H(s)]$$

$$= \lim_{s\to 0} s \cdot (R/s^3)/[1+GH] = \lim_{s\to 0} \frac{R}{s^2+s^2GH}$$

$$= \frac{R}{\lim_{s\to 0} s^2GH}$$

靜態加速度誤差常數

$$K_a \equiv \lim_{s\to 0} s^2GH$$

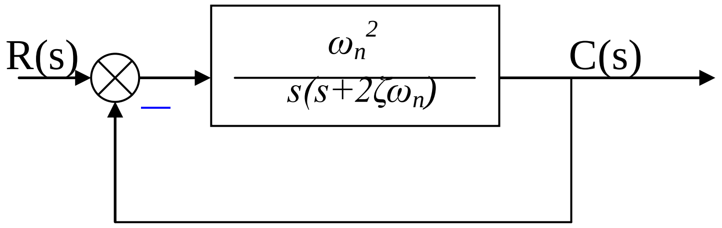
系統型式 N	K_p	K_v	K_a	E_{ss} 階級	E_{ss} 斜坡	E_{ss} 拋物線
0	b_0/a_0	0	0	$R/(1+K_p)$	∞	∞
1	∞	b_0/a_0	0	0	R/K_v	∞
2	∞	∞	b_0/a_0	0	0	R/K_a

由上表知，階級輸入信號採用為標準測試信號，主要係在一般伺服系統型式均小於 2 時，其穩態誤差均可為零之故。

5-3 系統之動態性能

5-3-1 二階系統之階級響應

標準二階閉迴路控制系統如下圖所示：



標準二階系統

$$G(s)=\frac{\omega_n^{\,2}}{s(s+2\zeta\omega_n)},H=1$$

$$G_C(s)=\frac{G}{1+GH}=\frac{\omega_n^{\,2}/s(s+2\zeta\omega_n)}{1+\omega_n^{\,2}/s(s+2\zeta\omega)}$$

$$=\frac{\omega_n^{\,2}}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^{\,2}}$$

$$\therefore\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{\,2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\,2}}$$

此系統的特徵方程式 $A(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\,2} = 0$

特徵方程式的根如下：

$$s_{1,2} = \alpha\pm j\omega = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

例：下圖表示樞控直流馬達之整體轉移函數數學方塊圖。

$$E_i(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{K_i}{L_aJs^2+(R_aJ+L_af)s+R_af+K_iK_m}} \longrightarrow s\Theta(s)$$

試求：二階轉移函數 $s\Theta(s)/E_i(s)$所對應之ζ 及 ω_n 值。

解：

$$s\Theta(s)/E_i(s) = \frac{K_i/L_aJ}{s^2+[(R_aJ+L_af)/L_aJ]s+(R_af+K_iK_m)/L_aJ}$$

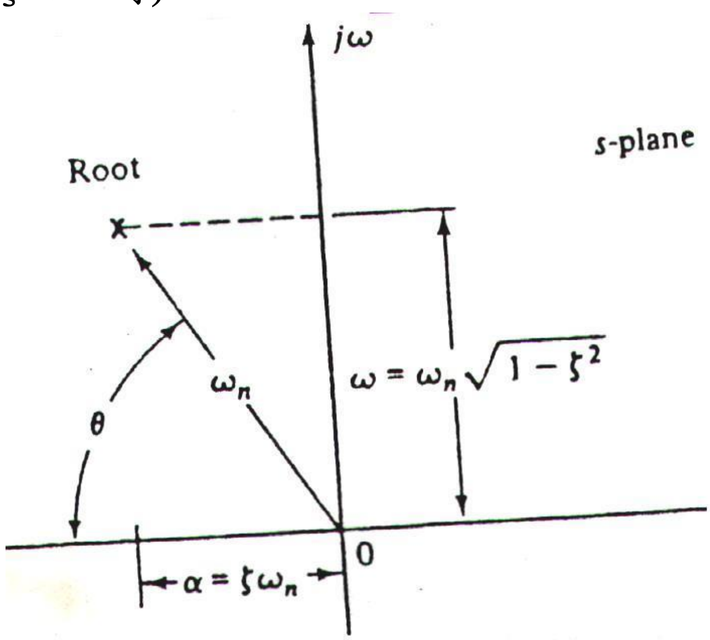
$$2\zeta\omega_n = (R_aJ+L_af)/L_aJ$$

$$\omega_n^{\ 2} = (R_af+K_iK_m)/L_aJ$$

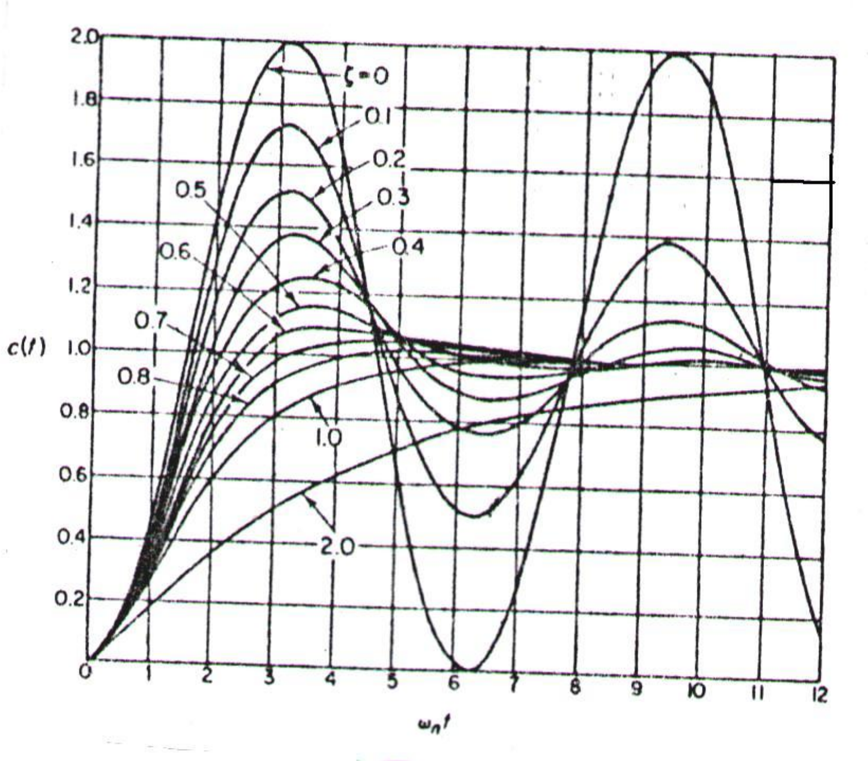
$$\therefore\quad \omega_n = [(R_af+K_iK_m)/L_aJ]^{1/2}$$

$$\zeta\ = (R_aJ+L_af)/[4\,L_aJ\,(R_af+K_iK_m)]^{1/2}$$

下圖表示上式二階系統特徵方程式之根在 s 平面之位置關係圖(當 0< ζ< 1 時)：



故二階系統之動態行為可由ζ及 ω_n 兩個參數來描述。而在不同阻尼比下，輸出之時域之階級響應如下圖所示，由圖知，於 0< ζ< 1 時，閉迴路極點為共軛複數且位於 s 平面之左半部，此系統稱為欠阻尼，其暫態響應呈現振盪狀態。於 ζ=1 時，此系統稱為臨界阻尼。於ζ> 1 時，系統為過阻尼，臨界阻尼與過阻尼之暫態響應並不呈現振盪現象。若ζ=0，暫態響應將不會消失。



以下將對圖 6-10 所示之系統求其對於單階輸入之響應，此處考慮三種情況：欠阻尼(0< ζ< 1)，臨界阻尼(ζ=1)，與過阻尼(ζ> 1)。

(1) 欠阻尼(0< ζ< 1)：此種情形，*C(s)/R(s)*可寫為

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{2}}{(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)}$$

其中 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$，頻率 ω_d 稱為阻尼自然頻率，對於一單階輸入，*C(s)*可寫為

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

將上式改寫如下，則 *C(s)*之反拉氏轉換將可很容易求得

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\therefore C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

於第二章中曾求得

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\sin\omega t] = \omega/[(s+\alpha)^2+\omega^2]$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cos\omega t] = (s+\alpha)/[(s+\alpha)^2+\omega^2]$$

其中如 $\alpha = \zeta\omega_n$，$\omega = \omega_d$，則 *C(s)*之反拉式轉換可得為

$$\mathcal{L}^{-1}[C(s)] = c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega nt}(\cos\omega_d t + \zeta_d \sin\omega_d t)，\zeta_d = \zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega nt}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \theta)，$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$$

若阻尼比 ζ 等於零，響應變成無阻尼且無限制的繼續振盪下去，等於零阻尼之情況，響應 *c(t)*可將 $\zeta=0$ 代入上式而得到

$$c(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

因此，由上式可知 ω_n 代表此系統之欠阻尼自然頻率，亦即 ω_n 乃於阻尼減至零時，系統之振盪頻率。若線性系統有些微之阻尼存在，欠阻尼自然頻率即無法由實驗觀得，此時所觀得之頻率乃為阻尼自然頻率 ω_d，其等於 $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。此頻率常小於欠阻尼自然頻率，ζ 增加時阻尼自然頻率 ω_d 將變小，若 ζ 增加至大於一，此時系統變成過阻尼而不會有振盪發生。

(2) 臨界阻尼($\zeta=1$)：若 $C(s)/R(s)$有兩個很靠近之極點，此系統即可約略視為一臨界阻尼系統。
對於一單階輸入，$R(s)=1/s$，$C(s)$可寫為

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}$$

上式之反拉氏轉換為

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega nt}(1+\omega_n t)$$

當然此項結果亦可於(1)式中令 ζ 趨近於一而得。

(3) 過阻尼($\zeta > 1$)：此種情況下，$C(s)/R(s)$之兩個極點為負實數且不相等，對於單階輸入，$R(s)=1/s$，$C(s)$可寫為

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}$$

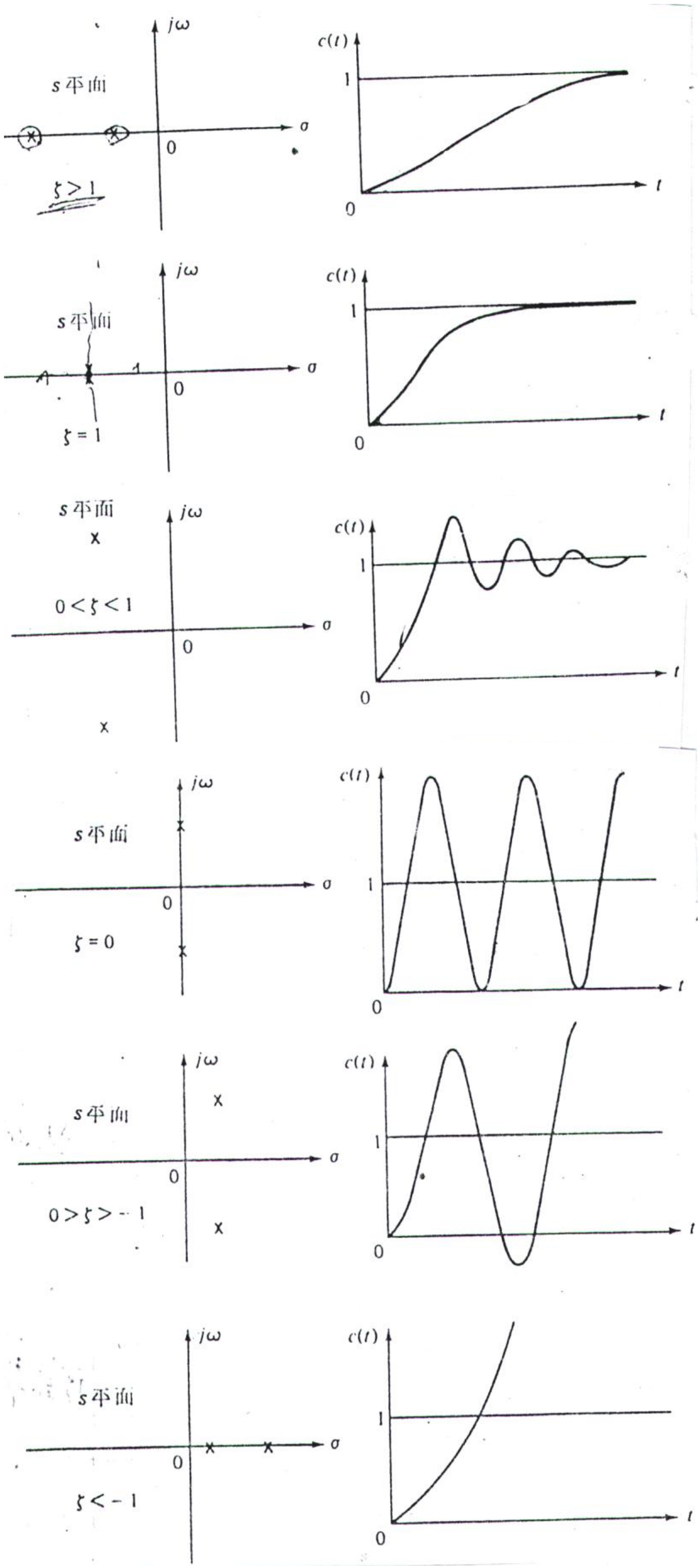
其反拉氏轉換為

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(e^{-s1t}/s_1 - e^{-s2t}/s_2\right)$$

其中 $s_1 = (\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\ \omega_n$，$s_2 = (\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\ \omega_n$，故響應 $c(t)$ 包含了兩個衰減之指數項。

於 ζ 略大於一時，此二衰減指數項中之一會較另一項衰減得快，故衰減得快(相當於時間常數較小者)那一項可予以忽略。亦即若 s_2 遠較 s_1 靠近 $j\omega$ 軸，則 s_1 可予以忽略，由於上式中含 s_1 項遠較含 s_2 之項衰減得快，故 s_1 對響應之影響遠較 s_2 對應之影響為小，把衰減得快那項消去後，系統之響應即與一階系統之響應相似。

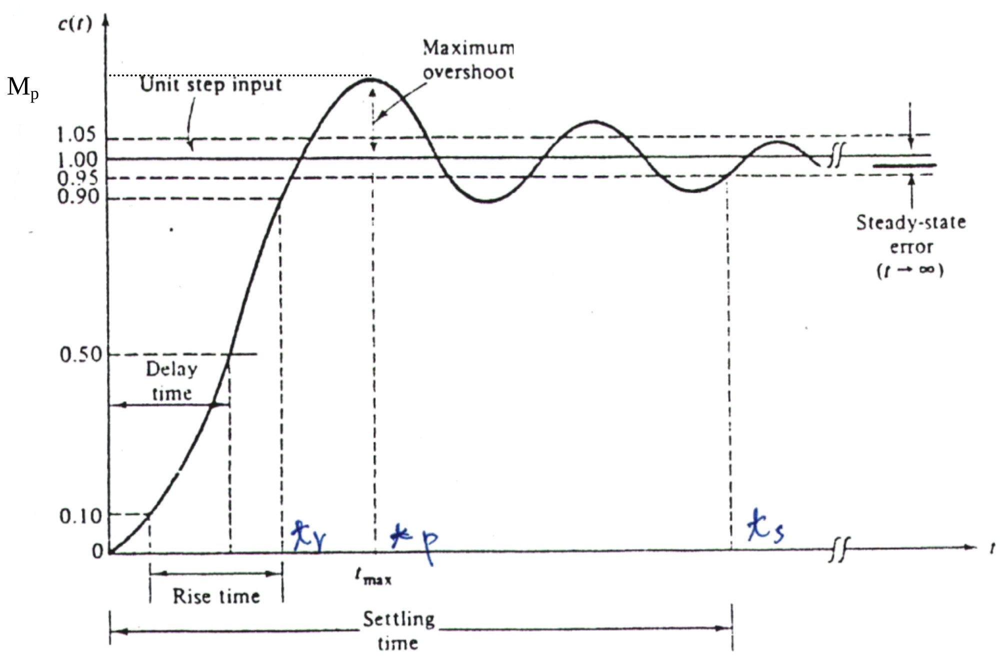
下圖表示在 s 平面上各種根位置所對應響應之比較，上述三種不同 ζ 值之響應情況分別顯示於圖中，由圖知欠阻尼 $(0< \zeta < 1)$情況為後續探討之重點。



在 s 平面上各種根位置響應之比較

5-3-2 暫態響應規格

系統之階級響應性能規格說明如下，下圖則以時域響應示意圖標示對應之性能規格：



Typical unit step response of a control system.

(1) 最大超越量(maximum percent overshoot)PO_{max}

系統單位階級響應之最大(首次)尖峰值 M_p 與期望值之差與穩態輸出響應值之比。

(2) 尖峰時間(peak time)t_p

系統單位階級響應發生最大尖峰值所需的時間。

(3) 上昇時間(rise time)t_r

系統單位階級響應從穩態值的 0 %至 100%

(0< ζ< 1)或 10%至 90%(ζ >1)所需的時間。

(4) 安定時間(settling time)t_s

系統單位階級響應進入穩態值的±5%或±2%範圍內且不再離開此範圍所需的時間。

5-3-3 暫態響應規格關係式

假若標準二階系統受單位階級輸入，則其輸出為：

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega nt}(\cos\omega_d t + \zeta_d \sin\omega_d t)\text{，}\zeta_d = \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega nt}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)\text{，}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta) = \cos^{-1}\zeta$$

下面推導時域上之性能指標：

(1) 峰值 M_p

令 $dc(t)/dt = 0$，可得峰值發生時間

$$t_p = \pi/\omega_d$$

將峰值時間代入 $c(t)$可得

$$M_p = c(t_p) = 1 + e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}}$$

其中最大超越量為 $PO_{max} = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}}$

(2)安定時間 t_s

直觀上，安定時間與動態系統的時間常數有關，而事實上它可由系統動態的包絡線求得，一般以下式近似之

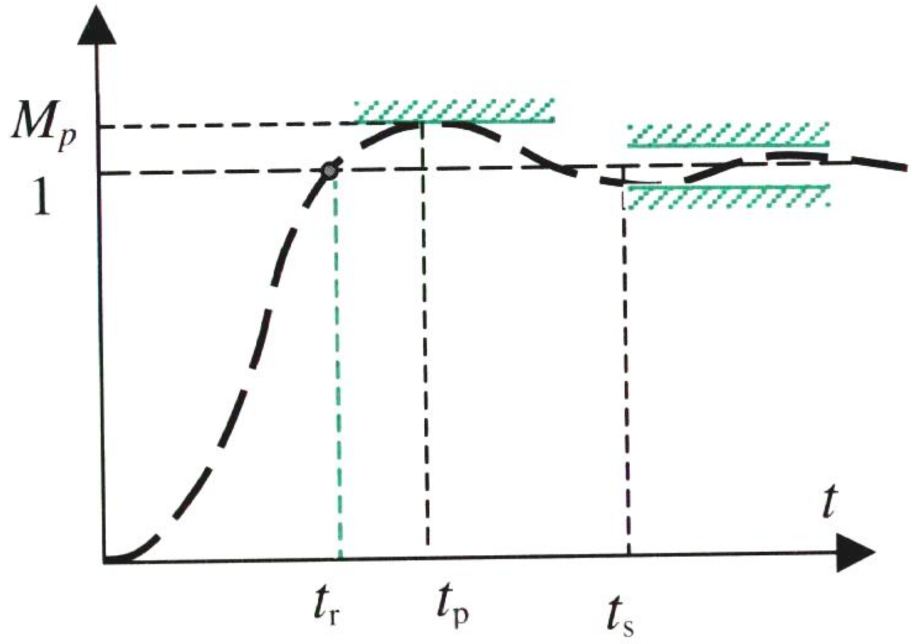
$$t_s = 4\tau = 4/\zeta\omega_n\text{，}for\ \pm 2\%$$

(3)上昇時間 t_r

若考慮系統首次達穩態值所需的時間，可令 c(t)=1，並算得

$$t_r = (\pi - \theta)/\omega_d$$

因此，根據上面的性能規格即可大略繪出系統的時域響應與相對的性能(參考下圖)。



系統時域響應與性能

例1　假設系統轉移函數為

$$G(s) = \frac{25}{s^2+5s+25}$$

求系統的 t_r，t_p，t_s，及 M_p，並畫出系統之概略響應圖。

Sol:

由標準二階系統之定義可知 $\omega_n^{\,2} = 25$，$2\zeta\omega_n = 5$，故 $\omega_n = 5$，$\zeta = 0.5$，因此可算得 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4.33$，$\theta = cos^{-1}\zeta = 1.047$，利用上面導得的結果可算出：

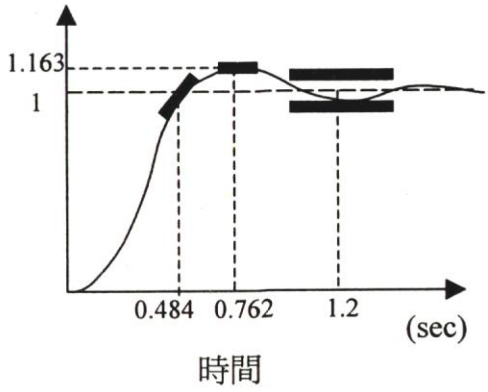
峰值時間 $t_p = \pi/\omega_d = 0.726$ 秒

尖峰值 $M_p = 1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.163$

上昇時間 $t_r = (\pi - \theta)/\omega_d = 0.484$ 秒

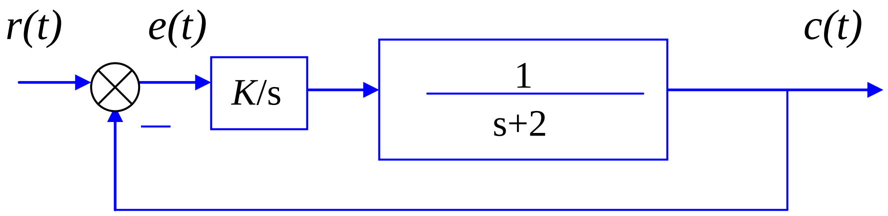
安定時間 $t_s = 4\tau = 4/\zeta\omega_n = 1.6$ 秒，for ±2%

因此，系統的時域響應大致如下圖。



系統時域響應與性能對照圖

例 2　考慮下圖之閉迴路系統



(1) 設計一積分控制器，即求 K 值使系統之最大超越量 =0.0432。

(2) 求此時之 t_r 及 t_p?

解：

(1) 系統閉迴路轉移函數為

$$G_c(s) = \frac{(K/s)[1/(s+2)]}{1+(K/s)[1/(s+2)]} = \frac{K}{s^2+2s+K}$$

因此，

$$\omega_n^2 = K，2\zeta\omega_n = 2，故\ \omega_n = \sqrt{K}，\zeta = 1/\sqrt{K}，$$

$$PO_{max} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.0432$$

兩邊取對數，可算得 $\zeta = 1/\sqrt{2}$，可求得控制器參數為

$$K = 2$$

(2) 由(1)知閉迴路系統轉移函數為

$$G_c(s) = \frac{2}{s^2+2s+2}$$

且可知，$\omega_n = \sqrt{2}$，$\zeta = 1/\sqrt{2}$，

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1$，$\theta = \cos^{-1}\zeta = \pi/4$

代入前面所推導的公式可得到上昇時間及尖峰值

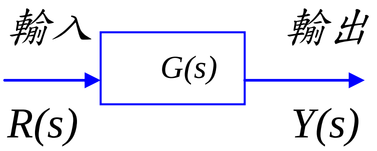
$t_r = (\pi - \theta)/\omega_d = 0.75\pi = 2.356$ 秒

$t_p = \pi/\omega_d = \pi = 3.1416$ 秒

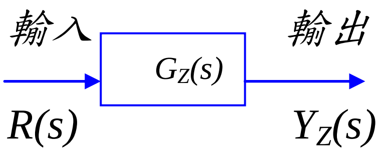
$t_s = 4\tau = 4/\zeta\omega_n = 4$ 秒，for ±2%

5-4 增加極、零點對動態性能之影響

(1) 增加零點



$Y = G\,R$



$Y_Z = G_Z\,R$

$$G_Z(s) = G(s) \cdot [(s+z)/z] = G(s) + G(s) \cdot (s/z)$$

$$\therefore Y_Z(s) = G_Z(s)\,R(s) = GR + GR \cdot (s/z)$$

$$\therefore y_Z(t) = y(t) + (1/z)[dy(t)/dt]$$

由上式可知增加零點，系統輸出將有如下圖的變化：

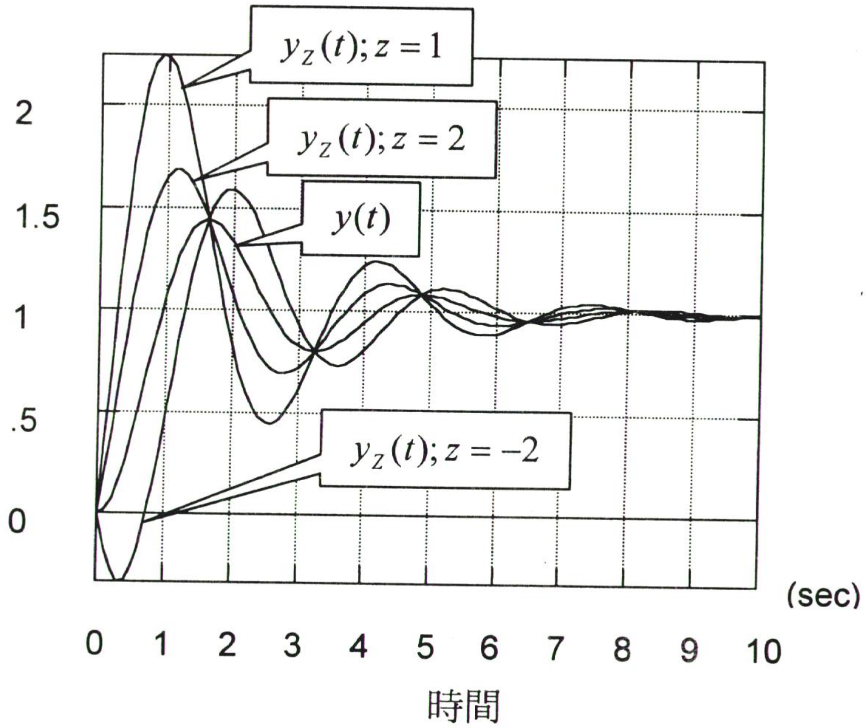
(a)系統的暫態行為受到影響，響應可能變快。

(b)附加的零點離虛軸愈遠(即 z 值為正很大時)，則對系統的影響也相對減小。

(c)當 z 值為負時，$G_Z(s)$為非最小相位系統。

【非最小相位系統】：

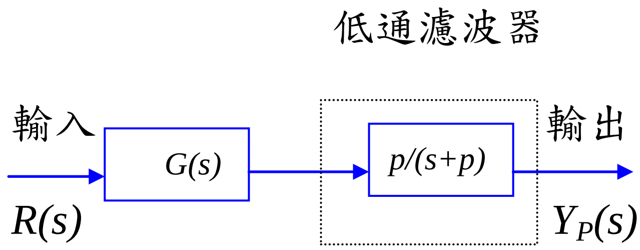
若一系統之轉移函數的所有零點都落在複數平面的左半面上，則稱此系統為最小相位系統(minimum-phase system)，若有零點落在複數平面的右半面上，則稱此系統為非最小相位系統(nonminimum-phase system)。



附加零點的影響($G(s)=4/(s^2+s+4)$)

(2) 增加極點

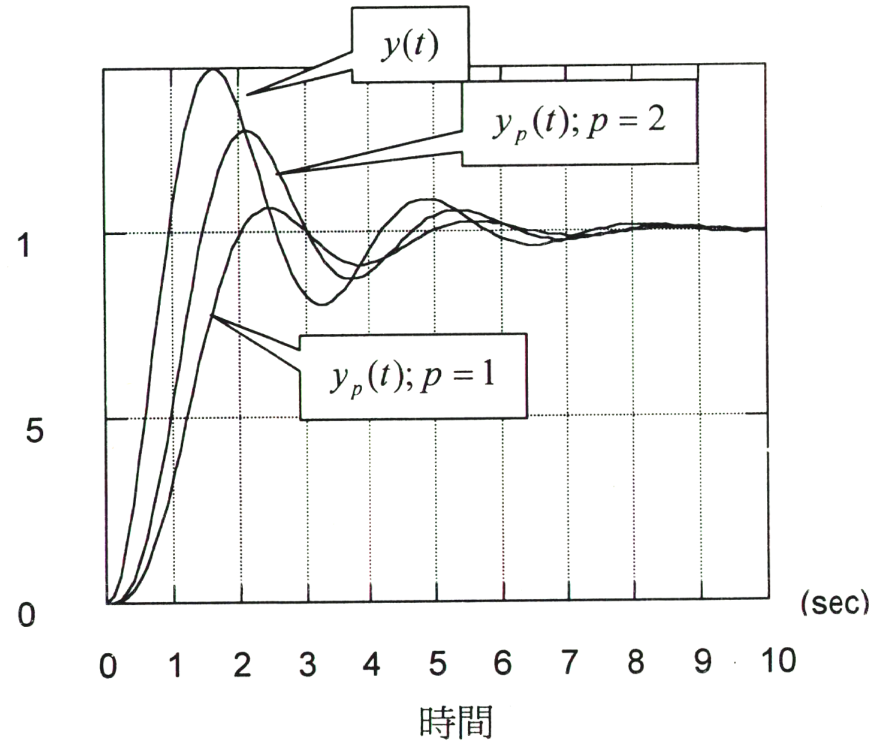
$$G_p(s) = G(s) \cdot [p/(s+p)]$$



因此附加極點會有如下圖之效果：

(a) 系統的暫態行為受到影響，響應減慢。

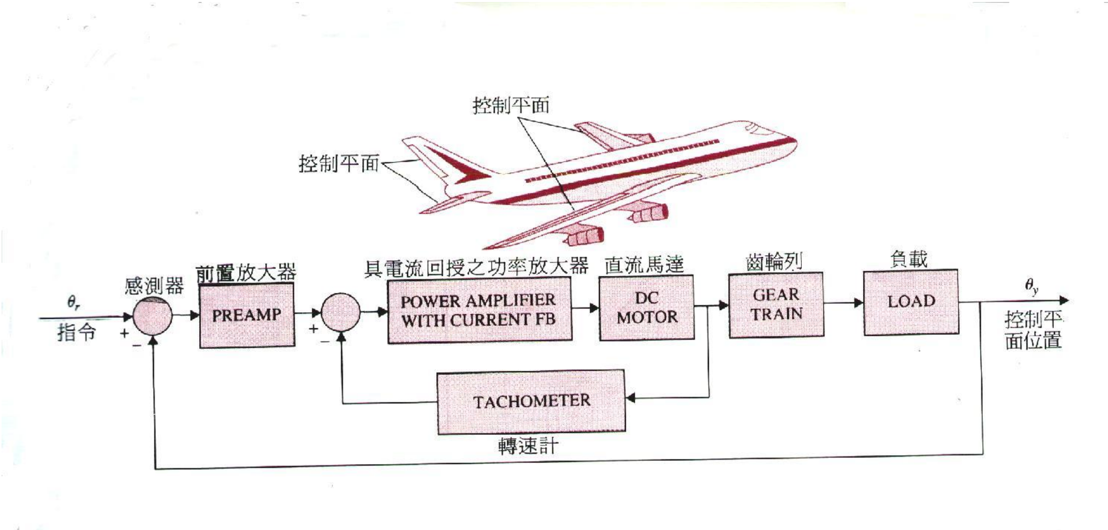
(b) 附加極點離虛軸愈遠(即 p 值很大，濾波器的頻寬愈寬)，則對系統的影響也相對減少。



附加極點的影響$(G(s) = 4/(s^2 + s + 4))$

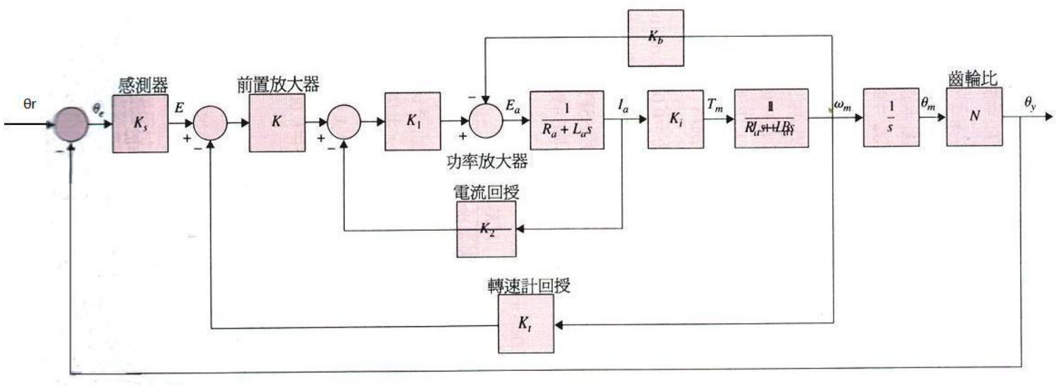
5-5 位置控制系統的時域分析

在此節中將利用前幾節所建立的時域準則分析系統的性能。假設控制系統的目的為控制現代航空器機翼的位置，由於響應的改善及可靠度的要求，現代飛機的控制平面均以電子式控制器加以控制。在以前飛機上的輔助翼、尾舵和昇降舵均藉由機械連桿連接到駕駛艙加以控制，『線控飛行』的控制系統是一種飛機姿態控制，其應用於近代飛機控制上且不再完全使用機械連桿。下圖所示為此類位置控制系統的功能方塊圖。



飛機姿態控制系統方塊圖

下圖則為此控制系統的數學方塊圖。此簡化系統將放大器增益和馬達轉矩的飽和、齒輪背隙及軸的橈性忽略而得到，此系統的目的為系統輸出 $\theta_y(t)$ 跟隨輸入 $\theta_r(t)$ 變化。



各系統參數的值如下：

- 編碼器增益 K_s=1 V/rad
- 前置放大器增益 K =變數
- 功率放大器增益 K_1=10 V/V
- 電流回授增益 K_2=0.5 V/A
- 轉速計回授增益 K_t=0 V/rad/sec
- 馬達電樞阻抗 R_a=5. 0 Ω
- 馬達電樞電感 L_a=0.003 H
- 馬達轉矩常數 K_i=9.0 oz-in/A
- 馬達反電動勢常數 K_b=0.0636 V/rad/sec
- 馬達慣量 J_m=0.001 oz-in-sec^2
- 負載慣量 J_L=0.01 oz-in-sec^2
- 馬達黏滯摩擦係數 B_m=0.005 oz-in-sec
- 負載黏滯摩擦係數 B_L=1.0 oz-in-sec
- 馬達與負載間齒輪列比值 $N=\theta_y/\theta_m=1/10$

由於馬達是經由一齒輪比為 N 的齒輪列接到負載，$\theta_y=N\theta_m$ 所以從馬達側看到的等效總慣量及黏滯摩擦係數分別為

$$J_t= J_m+N^2 J_L =0.0001+0.01/100 = 0.0002 \text{ oz-in-sec}^2$$
$$B_t= B_m+N^2 B_L =0.005+1/100 = 0.015 \text{ oz-in-sec}$$

此系統的單回授系統的前向轉移函數可利用方塊圖合成規則求得如下：

$$G(s)=\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_e(s)}$$

$$=\frac{K_sK_1K_iKN}{s[L_aJ_ts^2+(R_aJ_t+L_aB_t+K_1K_2J_t)s+R_aB_t+K_1K_2B_t+K_iK_b+KK_1K_tK_i]}$$

因爲最高次項爲 s^3，故此系統爲三階，此放大器-馬達系統的電子時間常數爲

$$\tau_a=\frac{L_a}{R_a+K_1K_2}=\frac{0.003}{5+5}=0.0003\ 秒$$

而馬達-負載的機械時間常數爲

$$\tau_t=\frac{J_t}{B_t}=\frac{0.0002}{0.015}=0.01333\ 秒$$

由於馬達的低電感，所以電子時間常數遠小於機械時間常數。因此可以忽略電樞電感 L_a，以便加以近似。如此，三階系統便近似爲二階。往後將會說明此並非以低階系統近似高階系統的最好方法。前向路徑轉移函數爲

$$\begin{aligned}G(s)&=\frac{K_sK_1K_iKN}{s[(R_aJ_t+K_1K_2J_t)s+R_aB_t+K_1K_2B_t+K_tK_b+KK_1K_iK_t]}\\&=\frac{K_sK_1K_iKN/(R_aJ_t+K_1K_2J_t)}{s[s+(R_aB_t+K_1K_2B_t+K_iK_b+KK_1K_iK_t)/(R_aJ_t+K_1K_2J_t)]}\end{aligned}$$

將系統參數代入　　　　　　可得

$$G(s)=\frac{4500K}{s(s+361.2)}$$

比較　　　　　　　　　　　　　　標準二階系統轉移函數，可得

自然無阻尼頻率 $\omega_n=\pm\sqrt{\dfrac{K_sK_1K_iKN}{R_aJ_t+K_1K_2J_t}}=\pm\sqrt{4500K}$ rad/sec

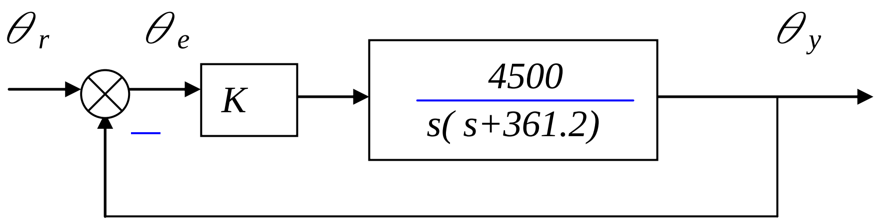
阻尼比 $\zeta=\dfrac{R_aB_t+K_1K_2B_t+K_iK_b+KK_1K_iK_t}{2\sqrt{K_sK_1K_iKN(R_aJ_t+K_1K_2J_t)}}=\dfrac{2.692}{\sqrt{K}}$

因此，自然無阻尼頻率 ω_n 與放大器增益的平方根 K 成正比，而阻尼比 ζ 與 $\sqrt{K}$ 成反比。

此單回授控制系統之特性方程式爲

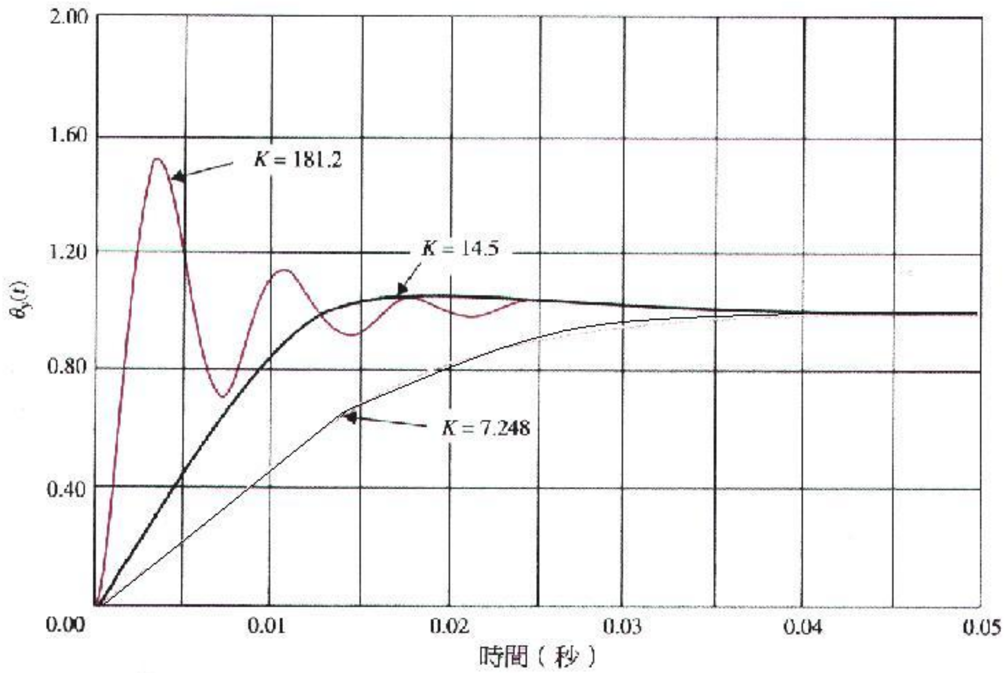
$$s^2+361.2s+4500K=0$$

因此，此系統的數學方塊圖可簡化如下圖：



5-5-1 單位步級輸入的暫態響應

在時域分析上，是以外加單位步級輸入，並設定初始條件為零來分析系統性能。如此，系統的最大超越量、上升時間與安定時間等均可加以研究。由簡化後的飛機姿態控制系統(如上圖)知，當 *K* 值已知，由 *Matlab* 的工具箱 *Simulink* 軟體可以求得參考輸入是單位步級函數時的暫態響應。以下為三種不同 *K* 值，利用 *Simulink* 所得到的結果，此三種響應畫於下圖中。



姿態控制系統的單位步級響應，$L_c=0$

下表為比較三種不同 *K* 值的步級響應特性，當 *K=181.17*，此時阻尼比為 0.2(ζ=0.2)，系統為欠阻尼系統，最大超越量為 52.7%，此值已超過太多。當 *K=7.248*，此時 ζ=1.0，系統為臨界阻尼系統，此時並無任何超越量。當 *K=14.5*，此時 ζ=0.707，系統為欠阻尼系統，最大超越量為 4.3%。

二階位置控制系統在不同 K 值下的性能比較

增益 K	ζ	ω_n (rad/sec)	最大超越量 (%)	t_d (秒)	t_r (秒)	t_s (秒)	t_{max} (秒)
7.25	1.000	180.62	0	0.00929	0.0186	0.0259	—
14.50	0.707	255.44	4.3	0.00560	0.0084	0.0114	0.01735
181.20	0.200	903.00	52.2	0.00125	0.00136	0.0150	0.00369

預測控制系統的性能可由另一方法得之，即觀察特性方程式的根。此單位回授控制系統的根為：

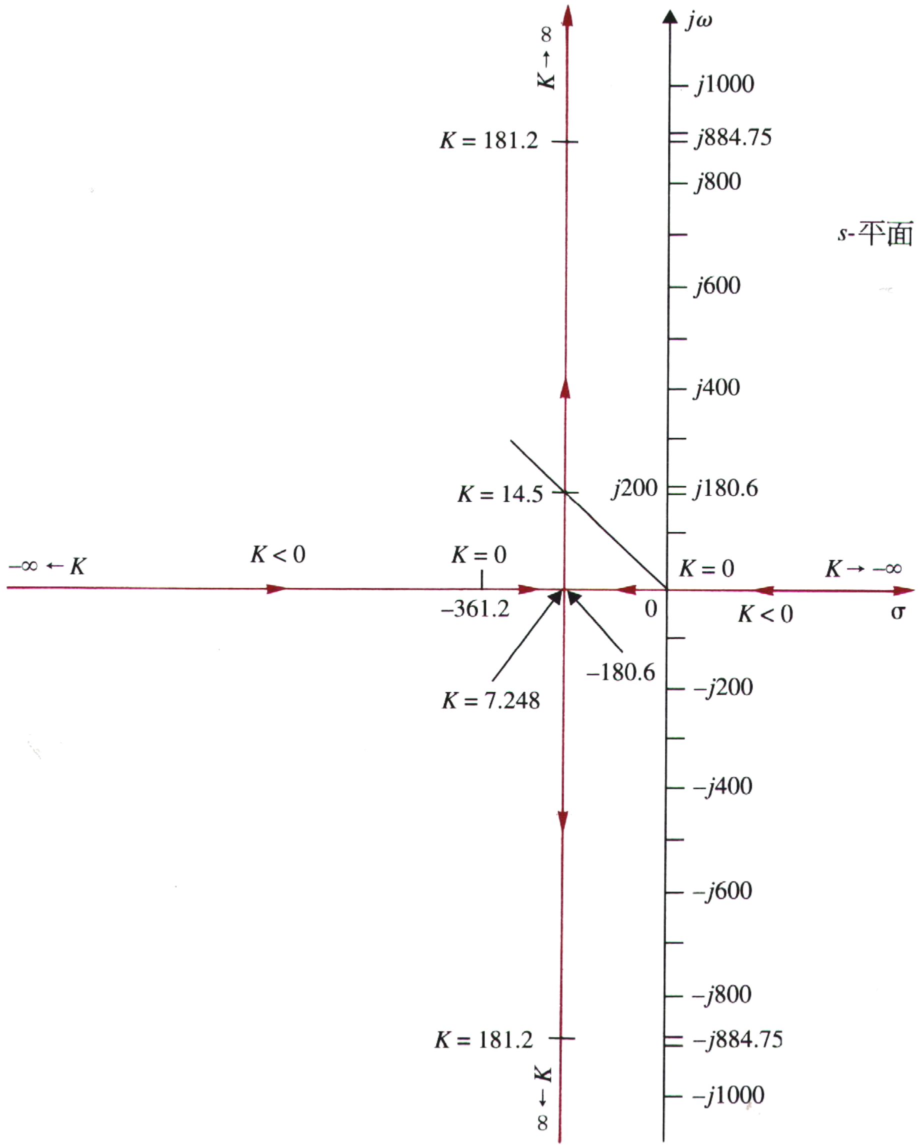
$$s^2 + 361.2s + 4500K = 0$$

$$s_1 = -180.6 + \sqrt{32.616 - 4500K}$$
$$s_2 = -180.6 - \sqrt{32.616 - 4500K}$$

由上兩式可以看出，當 K 值在 0 和 7.248 間，兩個根是負實數，亦即 K 在這範圍內系統是過阻尼同時步級響應不會有超越量。當 K 值增加到超過 7.248 後，系統無阻尼自然頻率亦隨 $\sqrt{K}$ 而增加。下圖表示此系統的根軌跡圖，由此圖可以求出暫態響應的動態特性如下表：

放大器增益	特性方程式的根	系統特性
$0 < K < 7.248$	兩相異負實根	過阻尼 ($\zeta > 1$)
$K = 7.248$	兩相等負實根	臨界阻尼 ($\zeta = 1$)
$7.248 < K < \infty$	兩共軛複數根，實部為負值	低阻尼 ($\zeta < 1$)
$-\infty < K < 0$	兩相異實根，一為正一為負	不穩定系統 ($\zeta < 0$)

此系統的簡化模型(標準二階系統)是型態 1(Type 1)。因此，當輸入是步級函數時系統的穩態誤差對所有的正 K 值都是零。



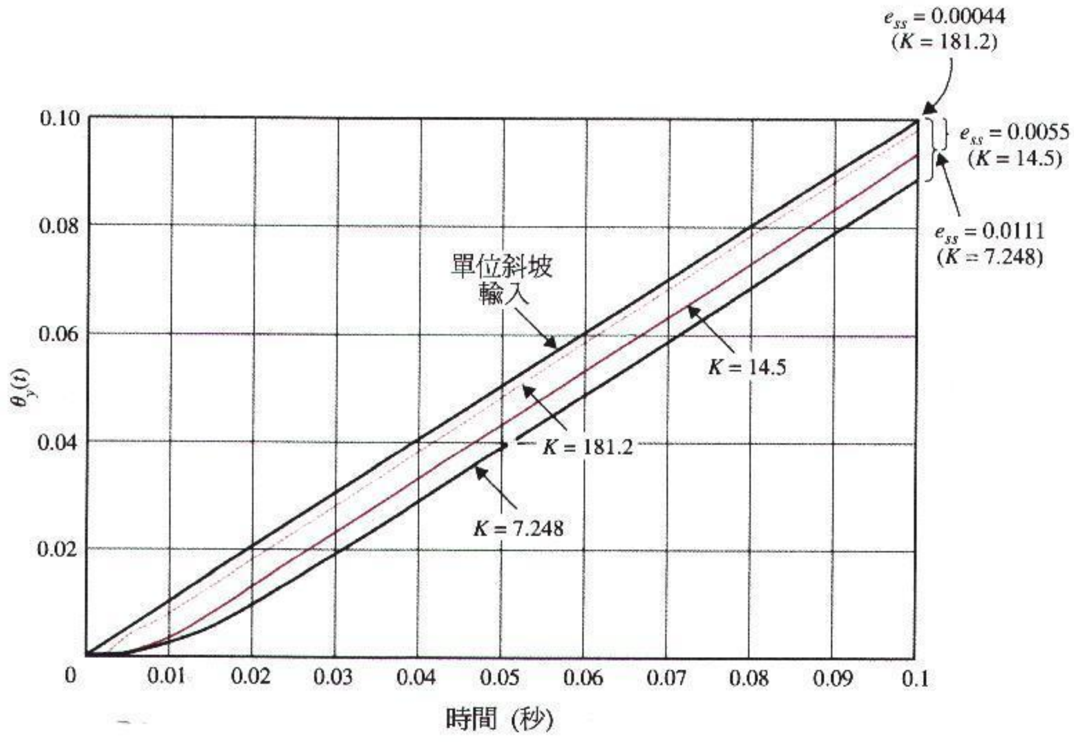
特性方程式當 K 改變時的根軌跡

5-5-2 單位斜坡輸入的暫態響應

位置控制最有效的方式是直接控制輸出訊號，而非只利用布級輸入。換言之，系統必須設計成可以追蹤目標軌跡的變化。因而有必要研究位置控制系統跟隨一輸入斜坡函數的能力。對一單位斜坡輸入$\theta_r(t)=tu_s(t)$，系統輸出響應$\theta_y(t)$可以由 *Simulink* 軟體模擬求得上述三種不同 K 值的系統斜坡響應，如下圖所示。注意斜坡響應的的穩態誤差不為零，可利用 5-2-1 節的方法求得單位斜坡輸入的穩態誤差為

$$e_{ss} = \frac{0.0803}{K}$$

由上式知，穩態誤差與 K 值成反比。如果我們想增加 K 值以改善系統的穩態誤差，則暫態步級響應應會振盪的更厲害，這個現象在所有的控制系統中非常普遍。對高階系統而言，如果系統的迴路增益值太高則系統可能不穩定。若在系統迴路中加入控制器，則暫態性能與穩態誤差可同時改善。



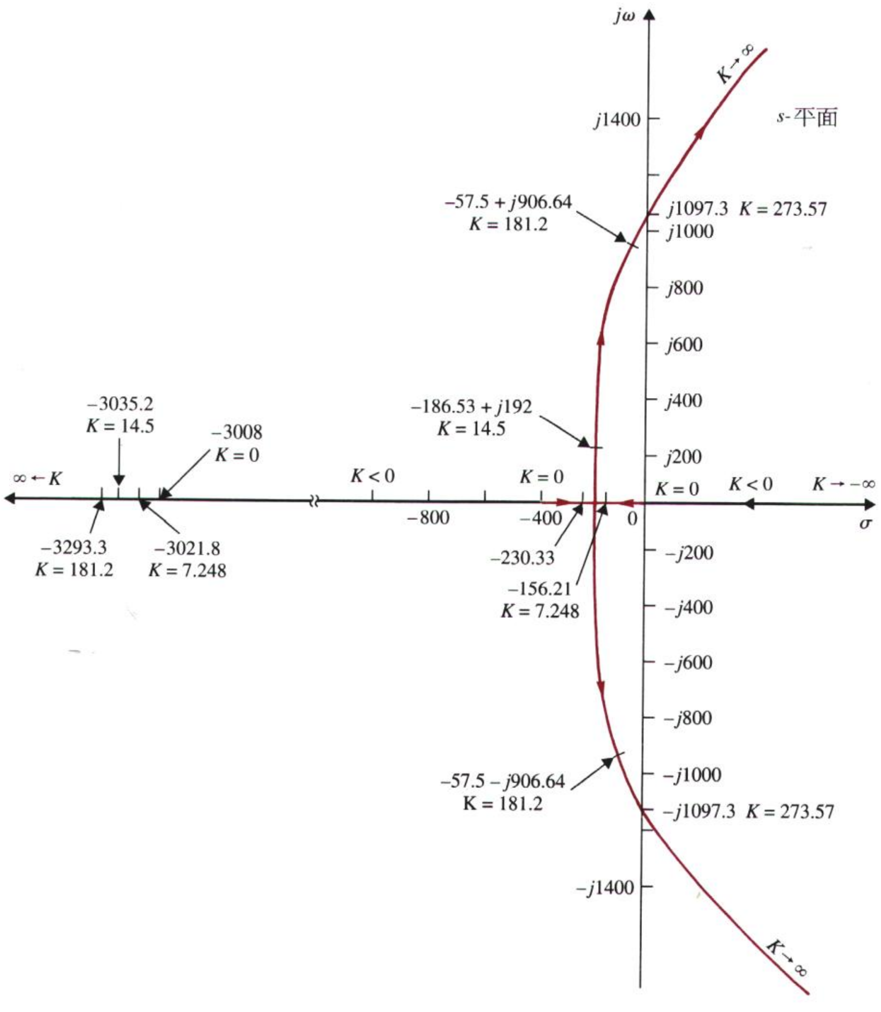
姿態控制系統的單位斜坡響應；L_a=0

5-5-3 三階系統的時間響應

若直流馬達的電樞電感忽略不計，則控制系統是二階且對所有的正 K 值都是穩定的。現在探討在電樞電感 L_a=0.003H 時的性能。當 L_a=0.003H 時，系統的前向轉移函數變為：

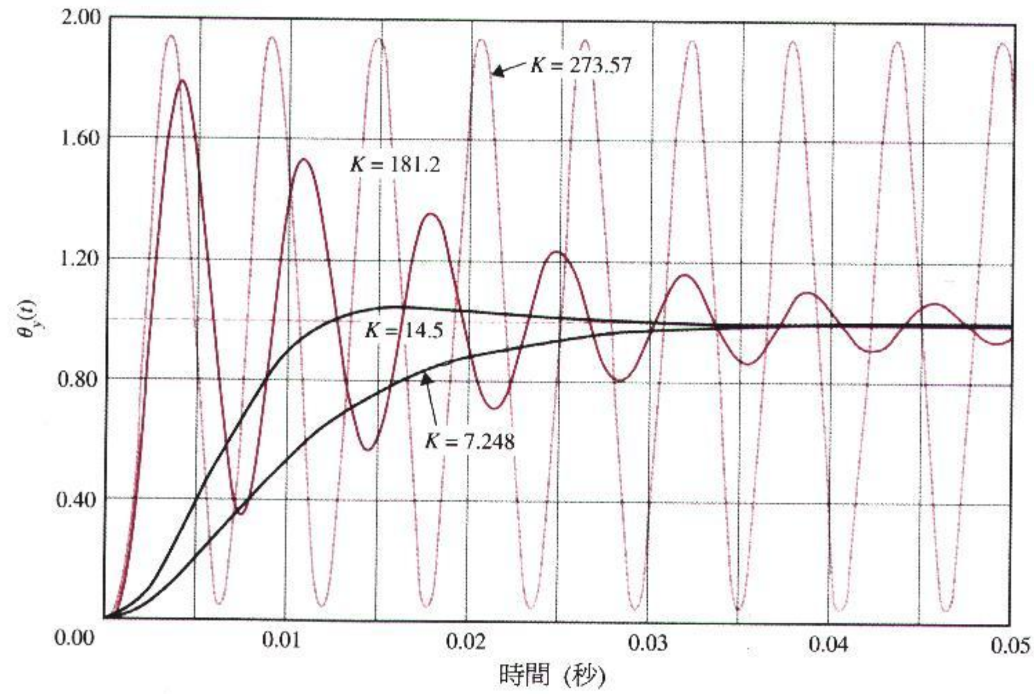
$$G(s) = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s^2 + 3408.3s + 1204000}$$

利用以前二階系統中所用三種不同 K 值求此三階系統的特性方程式的根，而與近似二階系統比較，當 K=7.248 時，二階系統為臨界阻尼，而三階系統則為輕微地過阻尼。當 K=14.5 時，二階系統阻尼比為 0.707，而三階系統阻尼比則為 0.697。當 K=181.2 時，二階系統阻尼比為 0.2，而三階系統阻尼比則為 0.0633，遠小於二階系統。因此，可以看出二階系統近似的準確度隨 K 增加而降低。下圖為三階系統特性方程式 K 值改變時的根軌跡圖。當 K=181.2 時，三階系統的共軛複數根比相同 K 值下的二階系統的根較接近 $j\omega$ 軸，此解釋了為何三階系統在 K=181.2 時，較二階系統來得不穩定。當 K=273.57 時，為穩定邊限的 K 值，大於此值系統就變成不穩定。



三階姿態控制系統的根軌跡

下圖為三階系統在不同 K 值時的步級響應，其中 K=7.248 和 14.5 的響應與二階系統相同，然而 K=181.2 時兩個響應是不同的。當加以考慮電感時，三階系統仍為型式 1。因此，若系統穩定，則馬達的電感並不影響系統穩態性能。



三階姿態控制系統的單位步級響應