

CAPÍTULO

Principios de la conversión de energía electromecánica

Este capítulo se enfoca en el proceso de conversión de energía electromecánica, el cual ocurre a través del campo eléctrico o magnético del dispositivo de conversión. A pesar de que los diferentes dispositivos de conversión de energía operan sobre la base de los mismos principios, sus estructuras dependen de su funcionamiento. A los dispositivos de medida y control con frecuencia se les denomina *transductores*; estos dispositivos generalmente operan bajo condiciones lineales de entrada y salida, así como señales relativamente pequeñas. En esta categoría se incluyen, entre otros, micrófonos, escobillas, detectores y altavoces. Una segunda categoría es la de *dispositivos de producción de fuerza*, que incluye a los solenoides, relés y electroimanes. Una tercera categoría comprende a los *equipos de conversión energética continua*, como los motores y los generadores.

Asimismo, en este capítulo se estudian los principios de conversión de energía electromecánica y se analizan los dispositivos que desempeñan esta función. Además, se destaca la importancia del análisis de sistemas que emplean campos magnéticos como medio de conversión, ya que en los siguientes capítulos se analizan dichos dispositivos. Sin embargo, las técnicas analíticas para los sistemas de campos eléctricos son muy similares.

El objetivo de dicho análisis consta de tres aspectos fundamentales: 1) comprender cómo se lleva a cabo la conversión de energía, 2) suministrar las técnicas para la fabricación y la optimización de los dispositivos con requisitos específicos y 3) desarrollar modelos de dispositivos de conversión de energía electromecánica que puedan utilizarse en el análisis de su desempeño como componentes dentro de los sistemas industriales. En este capítulo también se estudian los dispositivos denominados transductores y de producción de fuerza; en el resto del libro se analizan los dispositivos de conversión de energía continua.

Los conceptos y técnicas que se presentan en este capítulo son muy sólidos y se aplican a una amplia variedad de situaciones técnicas que implican la conversión energética electromecánica. Las secciones 3.1 y 3.2 presentan un planteamiento cuantitativo de las fuerzas dentro de los sistemas electromecánicos y un panorama general del método de energía que conforma los fundamentos de las derivaciones que se presentan aquí. Con base en el método de energía, en el resto del capítulo se presentan expresiones para las fuerzas y los pares de torsión en los sistemas electromecánicos que se apoyan en los campos magnéticos.

3.1 FUERZAS Y PARES EN LOS SISTEMAS DE CAMPOS MAGNÉTICOS

Ley de fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.1)$$

esta expresión suministra la fuerza \mathbf{F} sobre una partícula de carga q en presencia de campos eléctricos y magnéticos. En unidades SI, la \mathbf{F} se mide en *newtons*, q en *coulombs*, \mathbf{E} en *volts por metro*, \mathbf{B} en *teslas* y \mathbf{v} , que es la velocidad de una partícula relativa al campo magnético, se mide en *metros por segundo*.

De esta manera, en un sistema de campo eléctrico puro, la fuerza se determina simplemente mediante la carga de la partícula y el campo eléctrico

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (3.2)$$

La fuerza actúa en la dirección del campo eléctrico y es independiente de cualquier movimiento de las partículas.

En los sistemas de campo magnético puros, la situación es de alguna manera más compleja. En este caso la fuerza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.3)$$

se determina mediante la magnitud de la carga sobre una partícula, de la magnitud del campo \mathbf{B} y de la velocidad de la partícula. De hecho, la dirección de la fuerza siempre es perpendicular a la dirección del movimiento de la partícula y al campo magnético. En términos matemáticos, lo anterior se indica por medio del producto cruz vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que se muestra en la ecuación 3.3. La magnitud de este producto es igual al producto de las magnitudes de \mathbf{v} y \mathbf{B} , así como al seno del ángulo que hay entre ambos. Su dirección se determina a partir de la regla de la mano derecha, la cual establece que cuando el pulgar de la mano derecha señala en la dirección de \mathbf{v} y el dedo índice señala en la dirección de \mathbf{B} , la fuerza, que es perpendicular a las direcciones de \mathbf{B} y \mathbf{v} , señalará en la dirección usual de la palma de la mano, como se muestra en la figura 3.1.

En situaciones en las que un gran número de partículas cargadas se encuentran en movimiento, es conveniente reelaborar la ecuación 3.1 en términos de la *densidad de carga* ρ (dimensionada en unidades *coulombs por metro cúbico*) como se indica a continuación

$$\mathbf{F}_v = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.4)$$

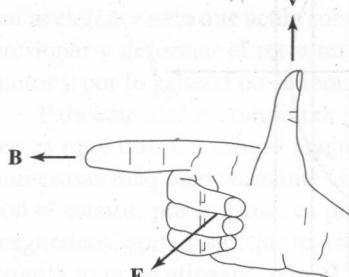
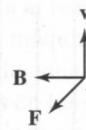


Figura 3.1

La regla de la mano derecha es útil para determinar la dirección de los componentes del campo magnético de la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.



donde el subíndice v indica que \mathbf{F}_v es la *densidad de fuerza* (fuerza por unidad de volumen) que en unidades SI se mide en *newtons por metro cúbico*.

El producto ρv se denomina *densidad de corriente*

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (3.5)$$

cuyas unidades son los *amperes por metro cuadrado*. La densidad de fuerza en un sistema magnético que corresponde a la ecuación 3.3 puede escribirse así:

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.6)$$

Para corrientes que fluyen en medios de conducción, la ecuación 3.6 se utiliza para determinar la densidad de fuerza que actúa en el material mismo. Advierta que una considerable cantidad de leyes físicas se ocultan en lo que parece ser una simple expresión, no obstante que el mecanismo mediante el cual la fuerza se transfiere de las cargas en movimiento hacia los medios de conducción es realmente complejo.

EJEMPLO 3.1

Se coloca un rotor no magnético que contiene una bobina de vuelta única dentro de un campo magnético uniforme de magnitud B_0 , como se ilustra en la figura 3.2. Los costados de la espiral son de radio R y el cable lleva un corriente I como se indica. Determine el par dirigido a θ como una función de la posición del rotor α cuando $I = 10$ A, $B_0 = 0.02$ T y $R = 0.05$ m. Suponga que el rotor es de longitud $l = 0.3$ m.

Solución

La fuerza por unidad de longitud en el conductor que lleva la corriente I se determina al multiplicar la ecuación 3.6 por el área de la sección transversal del conductor. Cuando se reconoce que el producto del área de la sección transversal de la densidad de corriente es simplemente la corriente \mathbf{I} , la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre el conductor se da mediante la ecuación

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}$$

Campo magnético uniforme, $B_0\hat{\mathbf{y}}$

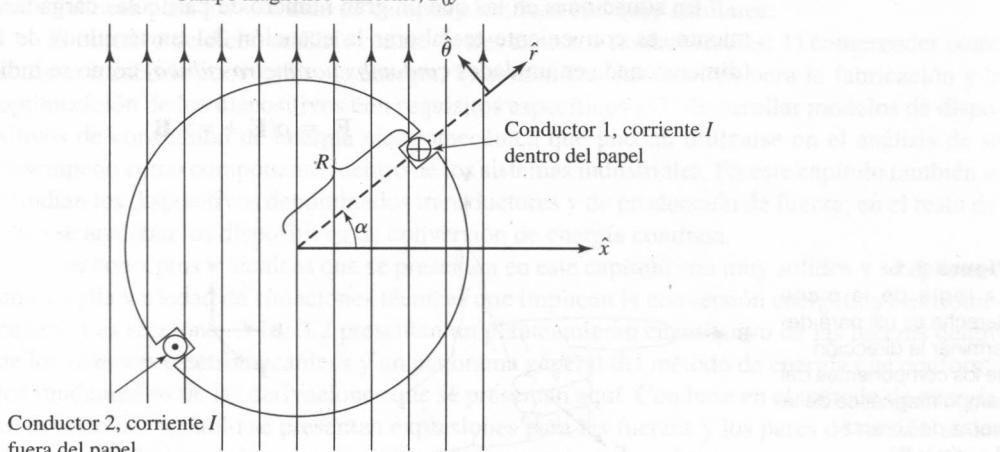


Figura 3.2

Rotor de bobina única esquematizada para el ejemplo 3.1.

Así, para el conductor 1 que lleva la corriente I dentro del papel, la fuerza dirigida hacia θ se da mediante la ecuación

$$F_{1\theta} = -IB_0l \operatorname{sen} \alpha$$

y para el conductor 2 (que lleva la corriente en dirección opuesta y se localiza a 180° del conductor 1)

$$F_{2\theta} = -IB_0l \operatorname{sen} \alpha$$

donde l es la longitud del rotor. El par T que actúa sobre el rotor se da mediante la suma de los productos de fuerza por brazo de momento para cada conductor

$$T = -2IB_0Rl \operatorname{sen} \alpha = -(10)(0.02)(0.05)(0.03) \operatorname{sen} \alpha = -0.006 \operatorname{sen} \alpha \text{ N} \cdot \text{m}$$

Problema práctico 3.1

Repita el ejemplo 3.1 y considere que para este caso el campo magnético uniforme señala a la derecha en vez de hacerlo de manera vertical hacia arriba como en la figura 3.2.

Solución

$$T = -0.006 \operatorname{cos} \alpha \text{ N} \cdot \text{m}$$

En el caso de situaciones en donde las fuerzas actúan sólo en elementos que llevan corriente y donde son geométricamente simples (como los que se citan en el ejemplo 3.1), la ecuación 3.6 por lo general es la más simple y la más sencilla para calcular las fuerzas que actúan sobre el sistema. Desafortunadamente, muy pocas situaciones prácticas están dentro de esta categoría. De hecho, como se analizó en el capítulo 1, la mayoría de los dispositivos de conversión de energía electromecánica contienen material magnético; en estos sistemas las fuerzas actúan de manera directa sobre el material magnético y es claro que no pueden calcularse a partir de la ecuación 3.6.

Las técnicas para calcular las fuerzas precisas y localizadas que actúan sobre los materiales magnéticos son extremadamente complejas y requieren de conocimientos detallados acerca de la distribución del campo a través de todo el sistema. Por fortuna, la mayoría de los dispositivos de conversión de energía electromecánica se construyen a partir de estructuras rígidas que no se deforman. El funcionamiento de estos dispositivos generalmente se determina por medio de la fuerza neta o par que actúa en los componentes en movimiento, y rara vez es necesario calcular los detalles de la distribución de la fuerza interna. Por ejemplo, en un motor diseñado de forma apropiada, las características del mismo se determinan mediante el par acelerador neto que actúa sobre el rotor; asimismo, las fuerzas que se añaden y actúan para presionar y deformar el rotor no desempeñan un papel importante en el funcionamiento del motor y por lo general no se toman en cuenta al realizar los cálculos.

Para entender el comportamiento de las máquinas de rotación, una ilustración física simple es muy útil. Un campo magnético se relaciona con la estructura del rotor (producido en numerosas máquinas mediante las corrientes en los devanados del rotor), y de manera similar con el estator; por lo tanto, es posible imaginar estos elementos como un conjunto de polos magnéticos, norte y sur, que se asocian con cada estructura. De igual modo que la aguja de una brújula trata de alinearse con el campo magnético terrestre, estos dos conjuntos de campos

tratan de alinearse. Por su parte, el par es el responsable del desplazamiento de la alineación. De esta forma, en un motor, el campo magnético del estator gira antes que el rotor, tirando de éste y realizando el trabajo. En el caso de un generador sucede lo contrario, es decir, el rotor realiza el trabajo sobre el estator.

Un gran número de técnicas han evolucionado para calcular las fuerzas netas que son importantes en los procesos de conversión de energía electromecánica. La técnica que se desarrolla en este capítulo y que se utiliza en todo el libro se conoce como *método de la energía* y se basa en el principio de la *conservación de la energía*. Los fundamentos de este método pueden comprenderse mejor al referirse a la ecuación 3.3a, donde un dispositivo de conversión de energía electromecánica basado en un campo magnético se ilustra de manera esquemática como un sistema de almacenamiento de energía magnética con dos terminales. La terminal eléctrica presenta dos variables, un voltaje e y una corriente i , y la terminal mecánica también presenta dos variables, una fuerza f_{fld} y una posición x .

Este tipo de representación se utiliza en situaciones donde los mecanismos de pérdida pueden separarse (al menos en términos conceptuales) del mecanismo de almacenamiento de energía. En estos casos, tanto las pérdidas eléctricas, como las pérdidas óhmicas en los devanados, se representan como elementos externos (por ejemplo, resistores) que se conectan a las terminales eléctricas; las pérdidas mecánicas, como la fricción y la resistencia con el viento, se incluyen de manera externa a las terminales mecánicas. La figura 3.3b muestra un ejemplo de un sistema como el que se acaba de citar; un dispositivo de producción de fuerza simple de bobina única que conforma la terminal eléctrica, junto con un émbolo móvil que sirve como terminal mecánica.

La interacción que existe entre las terminales eléctricas y mecánicas (por ejemplo, la conversión de energía electromecánica), ocurre a través de los medios de la energía magnética almacenada. Dado que el sistema de almacenamiento de energía no tiene pérdidas, resulta simple formular que la razón de cambio de W_{fld} y la energía acumulada en el campo magnético, es igual a la entrada de potencia eléctrica (dada por el producto de la terminal de voltaje y corriente) menos la salida de potencia mecánica del sistema de almacenamiento de energía (dada por el producto de la fuerza mecánica y de la velocidad mecánica)

$$\frac{dW_{\text{fld}}}{dt} = ei - f_{\text{fld}} \frac{dx}{dt} \quad (3.7)$$

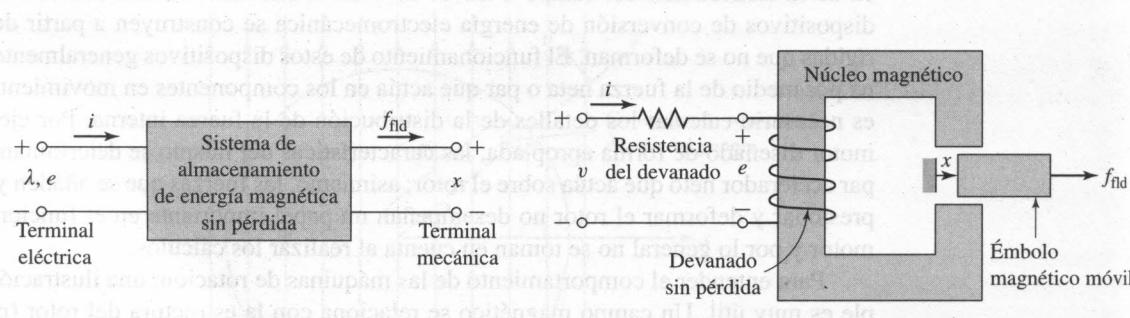


Figura 3.3

- a) Esquema de un dispositivo de conversión energética electromecánica de campo magnético;
b) dispositivo de producción de fuerza simple.

Y se deberá reconocer que a partir de la ecuación 1.27, el voltaje en las terminales del devanado sin pérdida se da mediante la derivada del tiempo de las dispersiones de flujo del devanado

$$e = \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.8)$$

y al multiplicar la ecuación 3.7 por dt , se obtiene la siguiente expresión

$$dW_{\text{fld}} = i \, dl - f_{\text{fld}} \, dx \quad (3.9)$$

Como se observa en la sección 3.4, la ecuación 3.9 permite despejar la fuerza simplemente como una función del flujo λ y de la posición terminal mecánica x . Advierta que este resultado es una consecuencia de la suposición de que es posible separar las pérdidas del problema físico, lo que dará como resultado un sistema de almacenamiento de energía sin pérdida, como se muestra en la figura 3.3a.

Las ecuaciones 3.7 y 3.9 conforman los fundamentos para el método de la energía. Esta técnica es bastante útil para calcular fuerzas y pares en sistemas complejos de conversión de energía electromecánica. El lector deberá reconocer que esta potencia surge a expensas de una idea detallada del mecanismo productor de fuerza. Las fuerzas mismas se producen por medio de fenómenos físicos reconocidos como la fuerza de Lorentz en las corrientes que llevan los elementos, la cual se describe en la ecuación 3.6, así como en la interacción de los campos magnéticos con los dipolos en el material magnético.

3.2 ENERGÍA BALANCEADA

El principio de la conservación de la energía establece que la energía ni se crea ni se destruye; sólo se transforma. Por ejemplo, una pelota de golf abandona, con una cierta cantidad de energía cinética al final, el soporte donde descansa; esta energía es disipada como calor debido a la fricción con el aire o a la fricción por rodamiento al tiempo que la pelota se detiene sobre el campo. De manera similar, la energía cinética de un martillo es finalmente disipada como calor mientras se introduce el clavo en una pieza de madera. Para sistemas aislados con límites claramente identificables, este hecho nos permite seguirle la pista a la energía de una manera simple: el flujo neto de energía en el sistema a través de sus límites es igual a la razón de cambio de energía acumulada en el sistema.

Este resultado, que es un enunciado de la primera ley de la termodinámica, es bastante general. En este capítulo se aplicará este enunciado a los sistemas electromecánicos donde el mecanismo de almacenamiento de energía se realiza principalmente dentro de los campos magnéticos. En dichos sistemas es posible considerar la transferencia de energía de la siguiente manera

$$\left(\begin{array}{l} \text{Entrada de energía} \\ \text{a partir de fuentes} \\ \text{eléctricas} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Salida} \\ \text{de energía} \\ \text{mecánica} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Incremento en la energía} \\ \text{acumulada dentro del} \\ \text{campo magnético} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{convertida} \\ \text{en calor} \end{array} \right) \quad (3.10)$$

La ecuación 3.10 está elaborada de manera que los términos mecánicos y eléctricos tengan valores positivos en el movimiento. La ecuación se aplica de igual modo a la acción del gene-

rador: estos términos simplemente adquieren valores negativos. En cualquiera de los dos casos, el signo del término de la generación de calor es tal, que la generación de calor dentro de los sistemas dará como resultado un flujo de energía térmica fuera del sistema.

En los sistemas que se consideran en esta sección, la conversión de energía en calor ocurre por medio de mecanismos como el calor óhmico debido a la corriente de flujo en los devanados de las terminales eléctricas y a la fricción mecánica ocasionada por el movimiento de los componentes del sistema que conforman las terminales mecánicas. Como se analizó en la sección 3.1, en términos matemáticos es posible separar estos mecanismos de pérdida del mecanismo de almacenamiento de energía. En dichos casos, el dispositivo se representa como un sistema de almacenamiento de energía magnética sin pérdida con terminales eléctricas y magnéticas, como se ilustra en la figura 3.3a. Entonces, los mecanismos de pérdida se representan mediante elementos externos conectados a estas terminales, o por medio de resistencias conectadas a las terminales eléctricas y amortiguadores mecánicos conectados a las terminales mecánicas. La figura 3.3a puede generalizarse para casos con cualquier número de terminales eléctricas o mecánicas. Para este tipo de sistema, el campo magnético sirve como vínculo entre las terminales eléctricas y mecánicas.

La capacidad para identificar un sistema de almacenamiento de energía sin pérdida es la esencia del método de la energía. Es importante reconocer que este hecho se lleva a cabo matemáticamente como parte del proceso de modelado. No es posible, por lo tanto, remover la resistencia de los devanados o la fricción de los cojinetes. En su lugar consideramos como dada la suposición de que un modelo en donde estos hechos son posibles es una representación válida del sistema físico.

Para el sistema de almacenamiento de energía sin pérdida que se ilustra en la figura 3.3a, al volver a realizar el planteamiento de la ecuación 3.9 en función de la ecuación 3.10 se formula la siguiente expresión

$$dW_{\text{eléc}} = dW_{\text{mec}} + dW_{\text{fld}} \quad (3.11)$$

donde

$dW_{\text{eléc}} = i d\lambda$ = diferencial de la entrada de energía eléctrica

$dW_{\text{mec}} = f_{\text{fld}} dx$ = diferencial de la salida de energía mecánica

dW_{fld} = diferencial del cambio en la energía magnética acumulada

A partir de la ecuación 3.8, se formula que

$$dW_{\text{eléc}} = ei dt \quad (3.12)$$

Donde e es el voltaje inducido en las terminales eléctricas mediante el cambio en la energía magnética acumulada. Es a través de este voltaje de reacción que el circuito eléctrico externo suministra potencia al campo magnético de acoplamiento y por lo tanto a las terminales mecánicas de salida. Así, el proceso de conversión de energía es uno de los procesos que implican al campo de acoplamiento así como su acción y reacción sobre los sistemas mecánicos y eléctricos.

Al combinar las ecuaciones 3.11 y 3.12 resulta la siguiente expresión

$$dW_{\text{eléc}} = ei dt = dW_{\text{mec}} + dW_{\text{fld}} \quad (3.13)$$

La ecuación 3.13 y la ley de Faraday para el voltaje inducido (ecuación 1.27), conforman los fundamentos del método de la energía; las siguientes secciones tratan de su uso en los análisis de los dispositivos de conversión energética electromecánica.

3.3 ENERGÍA EN SISTEMAS DE CAMPO MAGNÉTICO DE EXCITACIÓN ÚNICA

En los capítulos 1 y 2 el punto principal de estudio son los circuitos magnéticos arreglados geométricamente, así como los empleados en transformadores e inductores. La energía en dichos dispositivos se acumula en los campos de dispersión y en algunas extensiones del núcleo mismo. Sin embargo, la energía acumulada no entra de forma directa en los procesos de transformación. En este capítulo se analizarán los sistemas de conversión energética, los circuitos magnéticos que poseen entrehierros entre las partes móviles y las partes fijas en donde se acumula considerable energía dentro del campo magnético. Este campo actúa como el medio de la conversión energética, y su energía es la reserva entre los sistemas mecánicos y eléctricos.

Considere el relé electromagnético que se ilustra en el esquema de la figura 3.4. La resistencia de la bobina de excitación se presenta como una resistencia externa R , y las variables de la terminal mecánica se muestran como una fuerza f_{fd} producida mediante el campo magnético dirigido del relé hacia el sistema mecánico externo y un desplazamiento x ; en tanto, las pérdidas mecánicas se incluyen como elementos externos conectados a la terminal mecánica. De manera similar, el armazón móvil aparece sin masa; su masa representa la energía mecánica acumulada y puede incluirse como una masa externa conectada a la terminal mecánica. Como consecuencia, el núcleo magnético y el armazón constituyen un sistema de almacenamiento energético magnético sin pérdida, como se representa en el esquema de la figura 3.3a.

Esta estructura del relé es esencialmente igual que las estructuras magnéticas analizadas en el capítulo 1. En el capítulo 1 se analizó que el circuito magnético de la figura 3.4 se describe mediante una inductancia L que es una función de la geometría de la estructura magnética, así como de la permeabilidad del material magnético. Los dispositivos de conversión energética electromecánica contienen entrehierros dentro de sus circuitos magnéticos para separar sus partes móviles. Como se analizó en la sección 1.1, en la mayoría de estos casos la reluctancia del entrehierro es mucho mayor que la que se encuentra dentro del material magnético. Así, el almacenamiento predominante de energía se lleva a cabo en el entrehierro y las propiedades del circuito magnético se determinan por medio de las dimensiones del entrehierro.

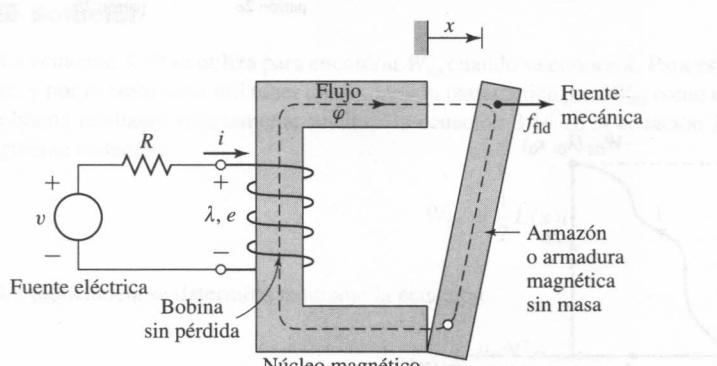


Figura 3.4
Diagrama esquemático de un relé electromagnético.

Debido a la simplicidad de las ecuaciones resultantes, con frecuencia no se toman en cuenta la no linealidad magnética y las pérdidas del núcleo en los análisis de los dispositivos reales. Los resultados finales de tales análisis aproximados pueden, si es necesario, corregirse para considerar los efectos de estos factores ignorados mediante métodos semiempíricos. Como consecuencia, dichos análisis se llevan a cabo bajo la suposición de que el flujo y la fmm son directamente proporcionales al circuito magnético completo. De esta forma, las dispersiones de flujo λ y la corriente i se consideran lineales y se relacionan mediante una inductancia que depende sólo de la geometría y por lo tanto de la posición del armazón o armadura x .

$$\lambda = L(x)i \quad (3.14)$$

donde se indica la dependencia explícita de L sobre x .

Dado que se ha definido que la fuerza magnética f_{fld} actúa a partir del relé sobre el sistema mecánico externo y dW_{mec} se define como la salida de energía mecánica del relé, se formula que

$$dW_{\text{mec}} = f_{\text{fld}} dx \quad (3.15)$$

De esta manera, al aplicar la ecuación 3.15 y al sustituir $dW_{\text{elec}} = i d\lambda$, se formula la ecuación 3.11 de la siguiente forma

$$dW_{\text{fld}} = i d\lambda - f_{\text{fld}} dx \quad (3.16)$$

Ya que el sistema de almacenamiento de energía es sin pérdida, es un *sistema conservativo* y el valor de W_{fld} , determinado sólo por los valores de λ y x ; λ y x se refieren a un estado variable, puesto que los valores determinan el estado del sistema.

En cuanto a este análisis observe que W_{fld} es determinado por los valores λ y x , *es el mismo sin importar cómo se determinen los valores finales de λ y x* . Observe la figura 3.5, donde se muestran dos patrones separados sobre los que es posible integrar la ecuación 3.16 para determinar W_{fld} en el punto (λ_0, x_0) . El patrón 1 es el caso general y es difícil de integrar a menos que tanto i como f_{fld} se conozcan explícitamente como una función de λ y x . Sin embargo, debido a que la integración de la ecuación 3.16 es un patrón independiente, el patrón 2 suministra el mismo resultado y es mucho más fácil de integrar. A partir de la ecuación 3.16 se obtiene la siguiente expresión

$$W_{\text{fld}}(\lambda_0, x_0) = \int_{\text{patrón } 2a} dW_{\text{fld}} + \int_{\text{patrón } 2b} dW_{\text{fld}} \quad (3.17)$$

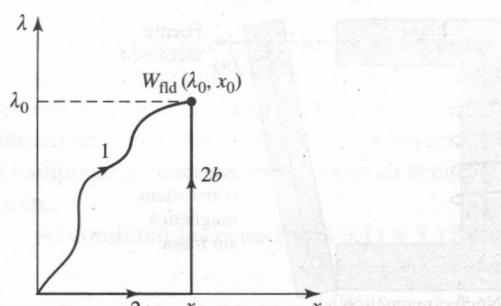


Figura 3.5

Integración del patrón para W_{fld} .

Observe que sobre el patrón 2a, $d\lambda = 0$ y $f_{\text{fld}} = 0$ (ya que $\lambda = 0$ y no pueden existir fuerzas magnéticas en la ausencia de campos magnéticos). De esta forma, a partir de la ecuación 3.16, $dW_{\text{fld}} = 0$ sobre el patrón 2a. Sobre el patrón 2b, $dx = 0$, y por lo tanto, a partir de la ecuación 3.16, la ecuación 3.17 reduce a la integral de $i d\lambda$ sobre el patrón 2b (para el que $x = x_0$).

$$W_{\text{fld}}(\lambda_0, x_0) = \int_0^{\lambda_0} i(\lambda, x_0) d\lambda \quad (3.18)$$

Para un sistema no lineal en donde λ es proporcional a i , de igual modo que en la ecuación 3.14, la ecuación 3.18 da como resultado la siguiente expresión

$$W_{\text{fld}}(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} i(\lambda', x) d\lambda' = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda'}{L(x)} d\lambda' = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} \quad (3.19)$$

Es posible demostrar que la energía magnética acumulada puede expresarse en términos de la densidad de energía del campo magnético integrando sobre el volumen V del campo magnético. En este caso

$$W_{\text{fld}} = \int_V \left(\int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' \right) dV \quad (3.20)$$

Para el caso de material magnético de permeabilidad constante ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$), se reduce a la siguiente expresión:

$$W_{\text{fld}} = \int_V \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) dV \quad (3.21)$$

EJEMPLO 3.2

El relé que se ilustra en la figura 3.6a está fabricado de material magnético de permeabilidad infinita con un émbolo móvil, también de material de permeabilidad infinita. La altura del émbolo es mucho mayor que la longitud del entrehierro ($h \gg g$). Calcule la energía magnética acumulada W_{fld} como una función de la posición del pistón ($0 < x < d$) para $N = 1\,000$ vueltas, $g = 2.0 \text{ mm}$, $d = 0.15 \text{ m}$, $l = 0.1 \text{ m}$ e $i = 10 \text{ A}$.

Solución

La ecuación 3.19 se utiliza para encontrar W_{fld} cuando se conoce λ . Para este caso, i se mantiene constante, y por lo tanto sería útil tener una expresión matemática para W_{fld} como una función de i y de x . Ésta se obtiene mediante simplemente sustituir la ecuación 3.14 en la ecuación 3.19, lo que resultará en la siguiente ecuación

$$W_{\text{fld}} = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

La inductancia se determina mediante la ecuación:

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 A_{\text{entrehierro}}}{2g}$$

donde $A_{\text{entrehierro}}$ es el área de la sección transversal del entrehierro. A partir de la figura 3.6b, se observa $A_{\text{entrehierro}}$ es

$$A_{\text{entrehierro}} = l(d - x) = ld\left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

Por lo tanto,

$$\text{Dependiendo de flujo} \quad L(x) = \frac{\mu_0 N^2 ld(1 - x/d)}{2g}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{fld}} &= \frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_0 ld(1 - x/d)}{2g} i^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1000^2)(4\pi \times 10^{-7})(0.1)(0.15)}{2(0.002)} \times 10^2 \left(1 - \frac{x}{d}\right) \\ &= 236 \left(1 - \frac{x}{d}\right) \text{ J} \end{aligned}$$

Problema práctico 3.2

Se modifica el relé que se ilustra en la figura 3.6 de tal manera que los entrehierros que rodean al émbolo ya no son uniformes. La longitud máxima del entrehierro se incrementa a $g_{\text{máx}} = 3.5 \text{ mm}$ y la del entrehierro inferior se incrementa a $g_{\text{inf}} = 2.5 \text{ mm}$. El número de vueltas se incrementa a $N = 1500$. Calcule la energía acumulada como una función de la posición del émbolo ($0 < x < d$) para una corriente de $i = 5 \text{ A}$.

Solución

$$W_{\text{fld}} = 88.5 \left(1 - \frac{x}{d}\right) \text{ J}$$

En esta sección se ha analizado la relación que existe entre la energía magnética acumulada y las variables terminales mecánicas y eléctricas para un sistema que se representa en términos de la figura 3.6.

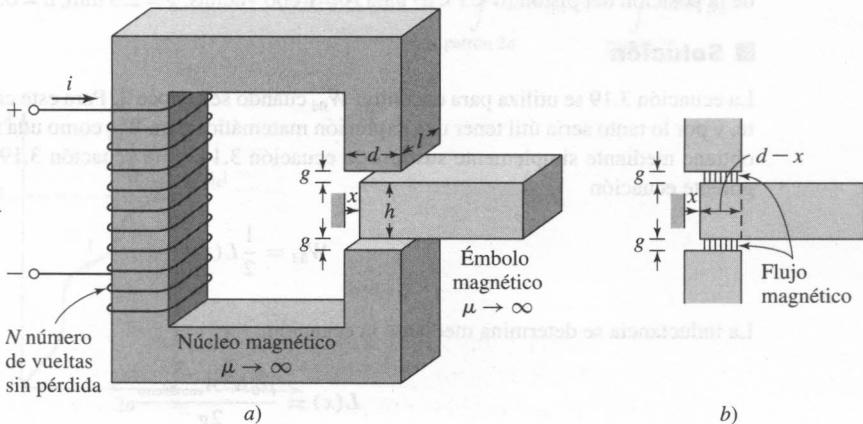


Figura 3.6

- a) Relé con émbolo móvil ilustrado para el ejemplo 3.2. b) Observe qué muestra la configuración del entrehierro con el pistón parcialmente removido.

nos de un elemento de acumulación de energía magnética sin pérdidas. Si se hubiese elegido para el ejemplo un dispositivo con una terminal mecánica de rotación en vez de una con desplazamiento lineal, los resultados hubieran sido idénticos a menos que se hubiera reemplazado la fuerza por un par de torsión y sustituido el desplazamiento lineal por uno angular. En la sección 3.4 se analiza cómo el conocer la energía magnética acumulada permite resolver los casos de fuerza mecánica.

3.4 DETERMINACIÓN DE FUERZAS MAGNÉTICAS Y PARES A PARTIR DE LA ENERGÍA

Como se analizó en la sección 3.3, para un sistema de acumulación de energía magnética sin pérdida, la energía magnética acumulada W_{fld} es una *función de estado*, determinada sólo por medio de los valores de las variables de estado independientes λ y x . Este hecho se muestra de manera explícita al reformular la ecuación 3.16 en la siguiente forma

$$dW_{\text{fld}}(\lambda, x) = i d\lambda - f_{\text{fld}} dx \quad (3.22)$$

Para cualquier función de estado con dos variables independientes, por ejemplo, $F(x_1, x_2)$, la diferencial total de F con respecto a las dos variables de estado x_1 y x_2 se formula de la siguiente manera

$$dF(x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Big|_{x_2} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Big|_{x_1} dx_2 \quad (3.23)$$

Es muy importante reconocer que las derivadas parciales en la ecuación 3.23 son tomadas al mantener constante la variable de estado opuesta.

La ecuación 3.23 es válida para cualquier función de F y por lo tanto, es válida para W_{fld} ; entonces,

$$dW_{\text{fld}}(\lambda, x) = \frac{\partial W_{\text{fld}}}{\partial \lambda} \Big|_x d\lambda + \frac{\partial W_{\text{fld}}}{\partial x} \Big|_\lambda dx \quad (3.24)$$

Ya que λ y x son variables independientes, las ecuaciones 3.22 y 3.24 deberán ser iguales para todos los valores de $d\lambda$ y dx , por lo tanto,

$$i = \frac{\partial W_{\text{fld}}(\lambda, x)}{\partial \lambda} \Big|_x \quad (3.25)$$

donde, al mantener x constante se toma a la derivada parcial y

$$f_{\text{fld}} = -\frac{\partial W_{\text{fld}}(\lambda, x)}{\partial x} \Big|_\lambda \quad (3.26)$$

en este caso, se mantiene constante λ mientras se toma a la derivada parcial.

Éste es el resultado que se había buscado. Una vez que se conoce W_{fld} como una función de λ y de x , es posible aplicar la ecuación 3.25 para resolver $i(\lambda, x)$. Más importante aún, la

ecuación 3.26 puede emplearse para resolver la fuerza mecánica $f_{\text{fld}}(\lambda, x)$. No se le debe dar demasiada importancia al hecho de que *se toma a la derivada parcial de la ecuación 3.26 mientras se mantienen constantes los flujos de dispersión λ* . Este hecho se realiza fácilmente si W_{fld} es una función conocida de λ y x . Advierta que esto es sólo un requisito matemático y no tiene nada que ver con si a λ se le mantiene constante al operar el dispositivo real.

La fuerza f_{fld} se determina directamente a partir de la ecuación 3.26 en términos de la variable de estado eléctrica λ . Cuando se desea expresar la fuerza como una función de i , es posible hacerlo al sustituir la expresión apropiada para λ como una función de i dentro de la ecuación para f_{fld} que se obtiene al utilizar la ecuación 3.26.

Para los sistemas magnéticos lineales en los que $\lambda = L(x)i$, la energía se expresa mediante la ecuación 3.19 y la fuerza se determina por medio de sustitución directa en la ecuación 3.26

$$f_{\text{fld}} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} \right) \Big|_{\lambda} = \frac{\lambda^2}{2L(x)^2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (3.27)$$

En este momento, la fuerza puede expresarse en términos de la corriente i simplemente al sustituir $\lambda = L(x)i$

$$f_{\text{fld}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (3.28)$$

EJEMPLO 3.3



La tabla 3.1 contiene datos de un experimento en donde la inductancia de un solenoide se dimensionó como una función de la posición de x , donde $x = 0$ corresponde a que el solenoide se retiró por completo.

Tabla 3.1 Datos para el ejemplo 3.3.

x [cm]	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
L [mH]	2.8	2.26	1.78	1.52	1.34	1.26	1.20	1.16	1.13	1.11	1.10

Grafique la fuerza del solenoide como una función de la posición para una corriente de 0.75 A sobre un rango de $0.2 \leq x \leq 1.8$ cm.

Solución

La solución se obtiene con más facilidad al emplear MATLAB.¹ Primero, al utilizar la función *polyfit* de MATLAB se obtiene un ajuste de polinomios de cuarto orden de la inductancia como una función de x . El resultado es el siguiente

$$L(x) = a(1)x^4 + a(2)x^3 + a(3)x^2 + a(4)x + a(5)$$

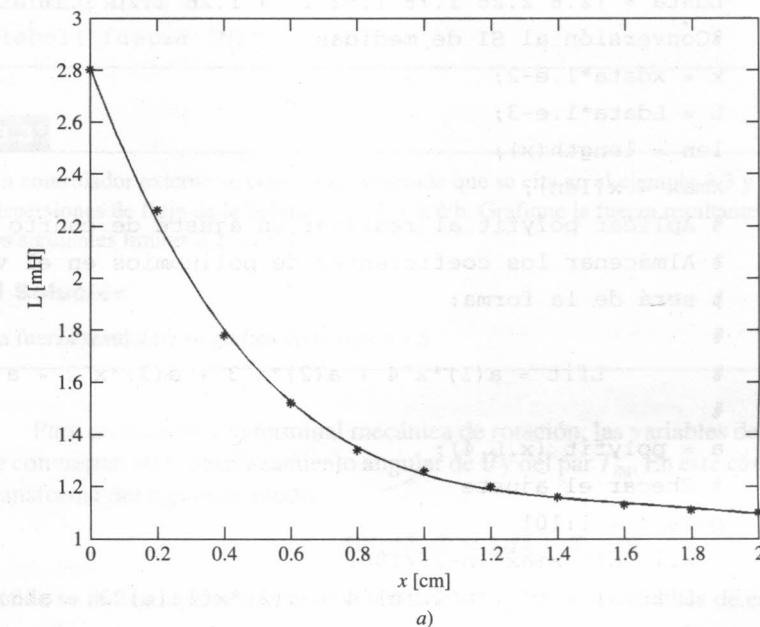
La figura 3.7a muestra una gráfica de los datos, además de los resultados del ajuste de polinomios.

¹ MATLAB es una marca registrada de The MathWorks, Inc.

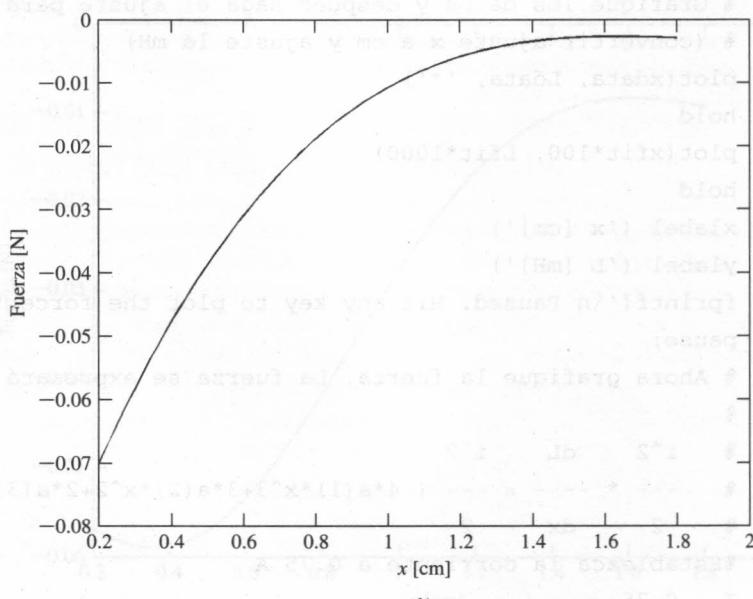
Una vez que se ha obtenido este ajuste, es indispensable calcular la fuerza a partir de la ecuación 3.28

$$f_{\text{fd}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} = \frac{i^2}{2} (4a(1)x^3 + 3a(2)x^2 + 2a(3)x + a(4))$$

Esta fuerza se gráfica en la figura 3.7b. Observe que la fuerza es negativa, lo que significa que actúa en una dirección tal como si jalara el solenoide hacia adentro $x = 0$.



a)



b)

Figura 3.7

Ejemplo 3.3. a) Ajuste de la curva de polinomios de inductancia.
b) Fuerza como una función de la posición x para $i = 0.75$ A.

En esta sección se presenta un programa MATLAB:

```

clc
clear
% Aquí se encuentran los datos: x in cm, L en mH
xdata = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0];
Ldata = [2.8 2.26 1.78 1.52 1.34 1.26 1.20 1.16 1.13 1.11 1.10];
% Conversión al SI de medidas
x = xdata*1.e-2;
L = Ldata*1.e-3;
len = length(x);
Xmax = x(len);
% Aplicar polyfit al realizar un ajuste de cuarto orden de L a x.
% Almacenar los coeficientes de polinomios en el vector a. El ajuste
% será de la forma:
%
%          Lfit = a(1)*x^4 + a(2)*x^3 + a(3)*x^2 + a(4)*x + a(5);
%
a = polyfit (x,L,4);
% Checar el ajuste
para n = 1:101
    xfit(n)= Xmax*(n-1)/100;
    Lfit(n) = a(1)*xfit(n)^4 + a(2)*xfit(n)^3 + a(3)*xfit(n)^2 ...
end
% Grafique los datos y después haga el ajuste para comparar
% (convertir ajuste x a cm y ajuste la mH)
plot(xdata, Ldata, '*')
hold
plot(xfit*100, Lfit*1000)
hold
xlabel ('x [cm]')
ylabel ('L [mH]')
fprintf('\n Paused. Hit any key to plot the force.\n')
pause;
% Ahora grafique la fuerza. La fuerza se expresará en
%
%   i^2   dL   i^2
% --- * ---- = --- ( 4*a(1)*x^3+3*a(2)*x^2+2*a(3)*x+a(4))
%   2      dx   2
%Establezca la corriente a 0.75 A
I = 0.75;

```

```

para n = 1:101
xfit(n) = 0.002 + 0.016*(n-1)/100;
F(n)=4*a(1)*xfit(n)^3+3*a(2)*xfit(n)^2+2*a(3)*xfit(n)+a(4);
F(n)=(I^2/2)*F(n);
end
plot(ajuste x*100,F)
xlabel('x[cm]')
ylabel('fuerza [N]')

```

(08.E)

Problema práctico 3.3

Un controlador externo se conecta al solenoide que se cita en el ejemplo 3.3 y mantiene constantes las dispersiones de flujo de la bobina a $\lambda = 1.5 \text{ mWb}$. Grafique la fuerza resultante del solenoide dentro de los siguientes límites $0.2 \leq x \leq 1.8 \text{ cm}$.

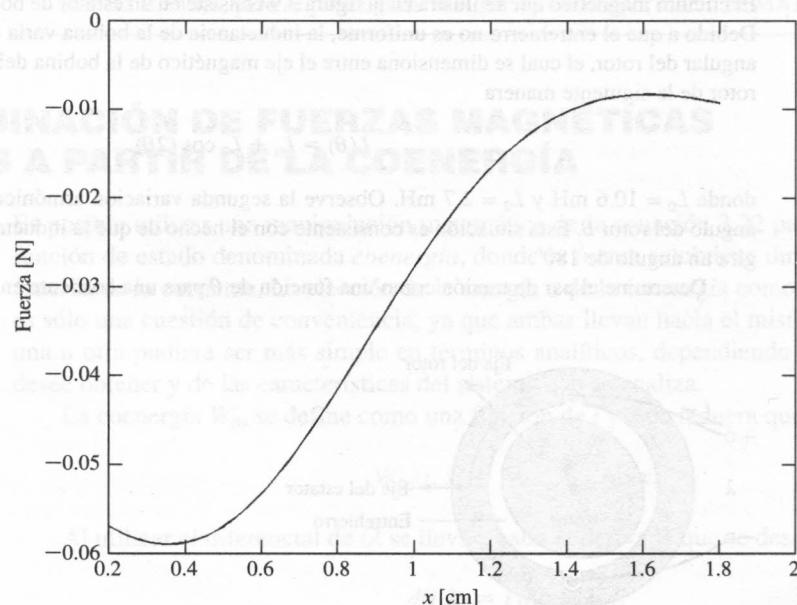
Solución

La fuerza resultante se grafica en la figura 3.8.

Para un sistema con terminal mecánica de rotación, las variables de la terminal mecánica se convierten en el desplazamiento angular de θ y del par T_{fld} . En este caso, la ecuación 3.22 se transforma del siguiente modo:

$$dW_{\text{fld}}(\lambda, \theta) = i d\lambda - T_{\text{fld}} d\theta \quad (3.29)$$

donde se indica la dependencia explícita de W_{fld} sobre las variables de estado λ y θ .

**Figura 3.8**

Problema práctico 3.3.
Grafique la fuerza fren-
te a x para $\lambda = 1.5 \text{ mWb}$.

Mediante una analogía con el desarrollo de la ecuación 3.26, es posible determinar el par a partir de la expresión negativa de la derivada parcial de la energía con respecto a θ al mantener constante a λ

$$T_{\text{fld}} = -\frac{\partial W_{\text{fld}}(\lambda, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\lambda} \quad (3.30)$$

Para sistemas magnéticos lineales donde $\lambda = L(\theta)i$, por medio de una analogía con la ecuación 3.19, la energía se suministra mediante la siguiente ecuación

$$W_{\text{fld}}(\lambda, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(\theta)} \quad (3.31)$$

Por lo tanto, el par se suministra mediante la siguiente expresión matemática

$$T_{\text{fld}} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(\theta)} \right) \Big|_{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(\theta)^2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (3.32)$$

que se expresa indirectamente en términos de la corriente i , como se indica a continuación

$$T_{\text{fld}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (3.33)$$

EJEMPLO 3.4

El circuito magnético que se ilustra en la figura 3.9 consiste en un estator de bobina única y un rotor oval. Debido a que el entrehierro no es uniforme, la inductancia de la bobina varía con respecto a la posición angular del rotor, el cual se dimensiona entre el eje magnético de la bobina del estator y el eje mayor del rotor de la siguiente manera

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta)$$

donde $L_0 = 10.6 \text{ mH}$ y $L_2 = 2.7 \text{ mH}$. Observe la segunda variación armónica de la inductancia con el ángulo del rotor θ . Esta situación es consistente con el hecho de que la inductancia no cambia si el rotor gira un ángulo de 180° .

Determine el par de torsión como una función de θ para una corriente en la espiral de 2 A.

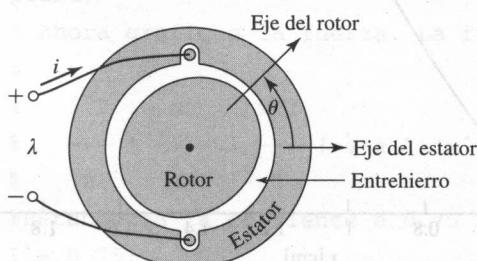


Figura 3.9

Círculo magnético esquematizado para el ejemplo 3.4.

Solución

A partir de la ecuación 3.33

$$T_{\text{fd}}(\theta) = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} (-2L_2 \sin(2\theta))$$

La sustitución numérica da como resultado

$$T_{\text{fd}}(\theta) = -1.08 \times 10^{-2} \sin(2\theta) \text{ N} \cdot \text{m}$$

En este caso, advierta que el par actúa en dirección de jalar el eje del rotor en alineación con el eje de la bobina y por lo tanto trabaja para maximizar la inductancia de la bobina.

Problema práctico 3.4

Se determina la inductancia de la bobina en un circuito magnético similar al que se presenta en la figura 3.9 con el objetivo de que varíe con la posición del rotor como se muestra a continuación

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta) + L_4 \sin(4\theta)$$

donde $L_0 = 25.4 \text{ mH}$, $L_2 = 8.3 \text{ mH}$ y $L_4 = 1.8 \text{ mH}$. a) Determine el par como una función de θ para una corriente de devanado de 3.5 A. b) Determine la posición del rotor $\theta_{\text{máx}}$, la cual produce el par más negativo.

Solución

- a) $T_{\text{fd}}(\theta) = -0.1017 \sin(2\theta) + 0.44 \cos(4\theta) \text{ N} \cdot \text{m}$
- b) El par de torsión más negativo ocurre cuando $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 225^\circ$. Esto puede determinarse de manera analítica, pero se puede graficar el par de torsión por medio de MATLAB.

3.5 DETERMINACIÓN DE FUERZAS MAGNÉTICAS Y PARES A PARTIR DE LA COENERGÍA

Es posible utilizar una manipulación matemática de la ecuación 3.22 para definir una nueva función de estado denominada *coenergía*, donde la fuerza se obtiene directamente como una función de la corriente. La elección de la energía o de la coenergía como la función de estado es sólo una cuestión de conveniencia, ya que ambas llevan hacia el mismo resultado, aunque una u otra pudiera ser más simple en términos analíticos, dependiendo del resultado que se deseé obtener y de las características del sistema que se analiza.

La coenergía W'_{fd} se define como una función de i y x de manera que

$$W'_{\text{fd}}(i, x) = i\lambda - W_{\text{fd}}(\lambda, x) \quad (3.34)$$

Al utilizar el diferencial de $i\lambda$ se lleva a cabo la derivada que se desea

$$d(i\lambda) = i d\lambda + \lambda di \quad (3.35)$$

y la diferencial de dW'_{fld} (λ, x) a partir de la ecuación 3.22. De la ecuación 3.34

se parte de la expresión de la diferencia de la derivada parcial de la energía con respecto a f'_{fld} manteniendo constante a i

$$dW'_{\text{fld}}(i, x) = d(i\lambda) - dW_{\text{fld}}(\lambda, x) \quad (3.36)$$

La sustitución de las ecuaciones 3.22 y 3.35 en la ecuación 3.36 da como resultado la siguiente expresión

$$dW'_{\text{fld}}(i, x) = \lambda di + f'_{\text{fld}} dx \quad (3.37)$$

De la ecuación 3.37, la coenergía W'_{fld} (i, x) se advierte como una función de estado con dos variables independientes, i y x . Así, su diferencial se expresa de la siguiente forma

$$dW'_{\text{fld}}(i, x) = \left. \frac{\partial W'_{\text{fld}}}{\partial i} \right|_x di + \left. \frac{\partial W'_{\text{fld}}}{\partial x} \right|_i dx \quad (3.38)$$

Las ecuaciones 3.37 y 3.38 deberán ser iguales para todos sus valores de di y dx ; por lo tanto,

$$\lambda = \left. \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i, x)}{\partial i} \right|_x \quad (3.39)$$

$$f'_{\text{fld}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i, x)}{\partial x} \right|_i \quad (3.40)$$

La ecuación 3.40 proporciona el valor de la fuerza mecánica en términos de i y x . Advierta que la derivada parcial en la ecuación 3.40 se toma en consideración al mantener constante i ; por lo tanto, W'_{fld} deberá ser una función conocida de i y x . Para cualquier sistema dado, las ecuaciones 3.26 y 3.40 llevarán al mismo resultado; la elección entre cuál de ellas utilizar para calcular la fuerza se determina por la preferencia del usuario y por la conveniencia.

Mediante una analogía de la obtención de la ecuación 3.18, la coenergía se determina a partir de la integral de λdi

$$W'_{\text{fld}}(i, x) = \int_0^i \lambda(i', x) di' \quad (3.41)$$

Para los sistemas magnéticos lineales donde $\lambda = L(x)i$, el valor de la coenergía se suministra mediante la siguiente expresión

$$W'_{\text{fld}}(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad (3.42)$$

y la fuerza puede determinarse a partir de la ecuación 3.40

$$f'_{\text{fld}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (3.43)$$

como se esperaba, es idéntica a la expresión dada mediante la ecuación 3.28.

De manera similar, para un sistema con un desplazamiento mecánico de rotación, la coenergía se expresa en términos de la corriente y del desplazamiento angular θ

$$W'_{\text{fld}}(i, \theta) = \int_0^i \lambda(i', \theta) di' \quad (3.44)$$

y el par se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$T_{\text{fld}} = \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i, \theta)}{\partial \theta} \Big|_i \quad (3.45)$$

Si el sistema es magnéticamente lineal,

$$W'_{\text{fld}}(i, \theta) = \frac{1}{2} L(\theta) i^2 \quad (3.46)$$

y

$$T_{\text{fld}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (3.47)$$

que es idéntica a la ecuación 3.33.

En términos de la teoría de campos, para el caso de los materiales magnéticos (donde $\mathbf{B} = 0$ cuando $\mathbf{H} = 0$), es posible demostrar que

$$W'_{\text{fld}} = \int_V \left(\int_0^{H_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right) dV \quad (3.48)$$

Para el caso de los materiales magnéticos que presentan permeabilidad constante ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$), la expresión matemática se reduce a la siguiente ecuación

$$W'_{\text{fld}} = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV \quad (3.49)$$

Para el caso de los materiales de imán permanente (duros) como los que se analizaron en el capítulo 1 y donde $B = 0$ cuando $H = H_c$, la energía y la coenergía son igual a cero cuando $B = 0$ y por consiguiente cuando $H = H_c$. De esta forma, aunque la ecuación 3.20 todavía es aplicable para obtener los cálculos de la energía, la ecuación 3.48 deberá modificarse de la siguiente manera

$$W'_{\text{fld}} = \int_V \left(\int_{H_c}^{H_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right) dV \quad (3.50)$$

Advertia que es posible suponer que la ecuación 3.50 es adecuada en términos generales, dado que a los materiales magnéticos suaves se les puede considerar simplemente como materiales magnéticos duros cuando $H_c = 0$, en cuyo caso la ecuación 3.50 se reduce a la ecuación 3.48.

En algunos casos es difícil elaborar representaciones de circuitos magnéticos o quizás no sea posible producir soluciones con la precisión deseada. Dichas situaciones con frecuencia se caracterizan mediante geometrías complejas y/o al llevar a los materiales a una saturación máxima. En estos casos, se aplican técnicas numéricas para evaluar la energía del sistema por medio de la ecuación 3.20 o en el caso de la coenergía al emplear las ecuaciones 3.48 o 3.50.

Una de dichas técnicas, conocida con el nombre de *método del elemento finito*,² se ha convertido en una de las más utilizadas. Por ejemplo, algunos de los programas que se encuen-

² Véase, por ejemplo, P.P. Sylvester y R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Nueva York, 1983.

tran disponibles comercialmente, se utilizan para calcular la coenergía del sistema para diferentes valores del desplazamiento x de un actuador de desplazamiento lineal (al asegurarse de mantener la corriente constante mientras que x varía). Entonces es posible obtener la fuerza mediante la ecuación 3.40, con la derivada de la coenergía respecto del valor de x calculado numéricamente a partir de los resultados del análisis del elemento finito.

EJEMPLO 3.5

Para el relé que se cita en el ejemplo 3.2, determine la fuerza sobre el émbolo como una función de x cuando se maneja la bobina mediante un controlador que produce una corriente como función de x de la forma

$$i(x) = I_0 \left(\frac{x}{d} \right) A$$

Solución

A partir del ejemplo 3.2

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 l d (1 - x/d)}{2g}$$

Éste es un sistema magnéticamente lineal donde la fuerza se calcula de la siguiente manera

$$f_{\text{fd}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} = -\frac{i^2}{2} \left(\frac{\mu_0 N^2 l}{2g} \right)$$

Al sustituir para $i(x)$, la expresión matemática para la fuerza como función de x se determina de la siguiente forma

$$f_{\text{fd}} = -\frac{I_0^2 \mu_0 N^2 l}{4g} \left(\frac{x}{d} \right)^2$$

Observe que en la ecuación 3.46, la coenergía para este sistema es igual a

$$W'_{\text{fd}}(i, x) = \frac{i^2}{2} L(x) = \frac{i^2 N^2 \mu_0 l d (1 - x/d)}{2g}$$

Al sustituir por $i(x)$, esta ecuación se elabora de la siguiente manera

$$W'_{\text{fd}}(i, x) = \frac{I_0^2 N^2 \mu_0 l d (1 - x/d)}{4g} \left(\frac{x}{d} \right)^2$$

Advierte que, aunque esta expresión es correcta para la coenergía como función de x bajo condiciones de operación específicas, si se intentara calcular la fuerza a partir de la derivada parcial de esta expresión para W'_{fd} con respecto a x , la expresión resultante no sería correcta para la fuerza. La razón de este hecho es muy simple: como se observó en la ecuación 3.40, la derivada parcial deberá considerarse al mantener la corriente constante. Después de sustituir la expresión para $i(x)$ con el fin de obtener la ecuación, la corriente ya no es constante, por lo tanto no se puede cumplir dicho requisito. Este hecho muestra los problemas que surgen cuando las diferentes ecuaciones de fuerza y pares se aplican de manera incorrecta.

Problema práctico 3.5

Considere un émbolo cuya inductancia varía de la siguiente forma

$$L(x) = L_0(1 - (x/d)^2)$$

Determine la fuerza en un émbolo como función de x cuando se maneja la bobina mediante un controlador que produce una corriente como función de x de la forma

$$i(x) = I_0 \left(\frac{x}{d}\right)^2 A$$

Solución

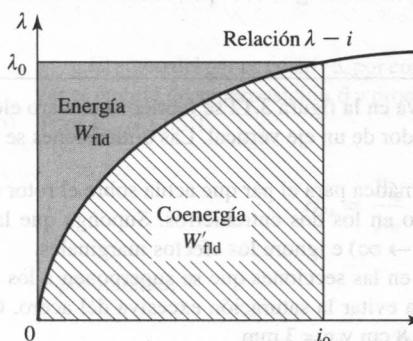
$$f_{\text{fd}} = - \left(\frac{2L_0 I_0^2}{d}\right) \left(\frac{x}{d}\right)^3$$

Para un sistema magnéticamente lineal, la energía y la coenergía son numéricamente iguales: $\frac{1}{2}\lambda^2/L = \frac{1}{2}Li^2$. Lo mismo ocurre con las densidades de la energía y coenergía: $\frac{1}{2}B^2/\mu = \frac{1}{2}\mu H^2$. Para el caso de sistemas no lineales en donde λ e i o B y H no son linealmente proporcionales, las dos funciones ni siquiera son numéricamente iguales. En la figura 3.10 se muestra una interpretación gráfica de la energía y coenergía para un sistema no lineal. El área que hay entre la curva $\lambda - i$ y el eje vertical, que es igual a la integral de $id\lambda$, representa la energía. El área que se encuentra por arriba del eje horizontal dada por la integral de λdi es la coenergía. Para este sistema de excitación única, la suma de la energía y coenergía es, por definición (véase la ecuación 3.34).

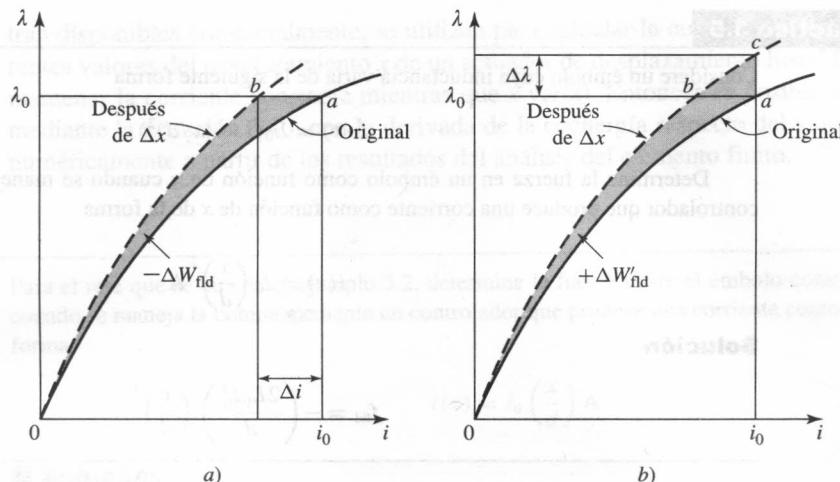
$$W_{\text{fd}} + W'_{\text{fd}} = \lambda i \quad (3.51)$$

La fuerza producida por el campo magnético en un dispositivo como el que se presenta en la figura 3.4 para algún valor particular de x e i o λ es obvio que no puede depender de si el cálculo es en función de la energía o de la coenergía. Un ejemplo gráfico demostrará que ambos métodos deben llegar al mismo resultado.

Suponga que el armazón del relé de la figura 3.4 se encuentra en una posición x de manera que el dispositivo opera en el punto a en la figura 3.11a. La derivada parcial de la ecuación 3.26 puede interpretarse como el límite de $-\Delta W_{\text{fd}}/\Delta x$ con λ constante mientras $\Delta x \rightarrow 0$. Si se permite un cambio Δx , el cambio $-\Delta W_{\text{fd}}$ se muestra mediante un área sombreada en la figura 3.11a. Como consecuencia, la fuerza $f_{\text{fd}} = (\text{área sombreada})/\Delta x$ mientras $\Delta x \rightarrow 0$. Por otra

**Figura 3.10**

Interpretación gráfica de la energía y de la coenergía en un sistema de excitación única.

**Figura 3.11**

Efecto de Δx sobre la energía y coenergía de un sistema de excitación única: a) cambio de energía al mantener constante el valor de λ ; b) cambio de la coenergía al mantener constante el valor de i .

parte, la derivada parcial de la ecuación 3.40 se interpreta como el límite de $\Delta W'_{\text{fld}}/\Delta x$ con un valor constante de i mientras $\Delta x \rightarrow 0$. Esta perturbación en el dispositivo se ilustra en la figura 3.11b; la fuerza, $f_{\text{fld}} = (\text{área sombreada})/\Delta x$ mientras $\Delta x \rightarrow 0$. Las áreas sombreadas difieren sólo por un diminuto triángulo abc con lados Δi y $\Delta\lambda$, de modo que el límite de las áreas sombreadas que resultan de Δx con λ constante o con el valor de i constante son iguales. Por lo tanto, la fuerza producida mediante un campo magnético es independiente de que la determinación se realice con base en la energía o la coenergía.

Las ecuaciones 3.26 y 3.40 expresan la fuerza mecánica de origen eléctrico en términos de las derivadas parciales de las funciones de la energía y la coenergía $W_{\text{fld}}(\lambda, x)$ y $W'_{\text{fld}}(i, x)$. Es importante notar dos factores acerca de éstas: determinar cuál de estas variables deberá expresarse con sus signos algebraicos. En lo físico, claro está, la fuerza depende de la dimensión x y del campo magnético. El campo (y como consecuencia, la energía o coenergía) puede especificarse en términos de la dispersión de flujo λ , la corriente i o las variables relacionadas.

De nuevo se enfatiza que la elección de la función de la energía o coenergía como base para el análisis es una cuestión de conveniencia.

Los signos algebraicos que se presentan en las ecuaciones 3.26 y 3.40 muestran que la fuerza trabaja en una dirección que disminuye la energía acumulada del campo magnético, con flujo constante o para incrementar la coenergía a corriente constante. En un dispositivo de excitación única, la fuerza actúa para aumentar la inductancia por medio de factores como la reducción de la reluctancia del patrón magnético que vincula al devanado.

EJEMPLO 3.6

El circuito magnético que se observa en la figura 3.12 se fabricó con acero eléctrico de alta permeabilidad. El rotor gira libremente alrededor de un eje vertical. Las dimensiones se muestran en la figura.

- Obetenga una expresión matemática para el par que actúa sobre el rotor en términos de las dimensiones y del campo magnético en los dos entrehiellos. Suponga que la reluctancia del acero es insignificante (por ejemplo, $\mu \rightarrow \infty$) e ignore los efectos marginales.
- La máxima densidad de flujo en las secciones que se superponen a los entrehiellos se limitará a, aproximadamente, 1.65 T para evitar la saturación excesiva del acero. Calcule el máximo par de torsión para $r_1 = 2.5$ cm, $h = 1.8$ cm y $g = 3$ mm.

Longitud axial (perpendicular a la página) = h

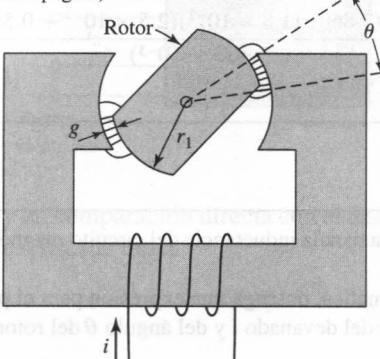


Figura 3.13
Sistema de campo de un motor con nuplo.

Figura 3.12

Sistema magnético del ejemplo 3.6.

Solución

- a) Existen dos entrehierros en serie, cada uno de longitud g , por lo tanto la intensidad del campo del entrehierro H_{ag} es igual a

$$H_{ag} = \frac{Ni}{2g}$$

Debido a que la permeabilidad del acero se considera infinita y B_{acero} deberá conservarse finita, $H_{acero} = B_{acero}/\mu$ es cero y la densidad de la coenergía (ecuación 3.49) en el acero es cero ($\mu H_{acero}^2/2 = B_{acero}^2/2\mu = 0$). Por lo tanto, la coenergía del sistema es igual a la que presentan los entrehierros, en donde la densidad de la coenergía en el entrehierro es $\mu_0 H_{ag}^2/2$. El volumen de los dos entrehierros superpuestos es $2gh(r_1 + 0.5g)\theta$. Como consecuencia, la coenergía es igual al producto de la densidad de coenergía del entrehierro y al volumen del entrehierro

$$W'_{ag} = \left(\frac{\mu_0 H_{ag}^2}{2} \right) (2gh(r_1 + 0.5g)\theta) = \frac{\mu_0 (Ni)^2 h (r_1 + 0.5g)\theta}{4g}$$

y por lo tanto, a partir de la ecuación 3.40

$$T_{fd} = \frac{\partial W'_{ag}(i, \theta)}{\partial \theta} \Big|_i = \frac{\mu_0 (Ni)^2 h (r_1 + 0.5g)}{4g}$$

El signo del par es positivo, por consiguiente, actúa en la dirección correspondiente al incrementar el ángulo de superposición θ y producir la alineación del rotor con las caras polares del estator.

- b) Para $B_{ag} = 1.65$ T,

$$H_{ag} = \frac{B_{ag}}{\mu_0} = \frac{1.65}{4\pi \times 10^{-7}} = 1.31 \times 10^6 \text{ A/m}$$

y por lo tanto,

$$Ni = 2gH_{ag} = 2(3 \times 10^{-3})1.31 \times 10^6 = 7860 \text{ A vueltas}$$

Ahora, T_{fld} se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_{\text{fld}} &= \frac{4\pi \times 10^{-7}(7860)^2(1.8 \times 10^{-2})(2.5 \times 10^{-2} + 0.5(3 \times 10^{-3}))}{4(3 \times 10^{-3})} \\ &= 3.09 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Problema práctico 3.6

- Escriba una expresión matemática para la inductancia del circuito magnético de la figura 3.12 como función de θ .
- Al utilizar dicha expresión matemática, obtenga una expresión para el par que actúa sobre el rotor como una función de la corriente del devanado i y del ángulo θ del rotor.

Solución

a)

parte, la derivada parcial de la ecuación 3.29 con respecto a θ es

$$L(\theta) = \frac{\mu_0 N^2 h(r_1 + 0.5g)\theta}{2g}$$

b)

$$T_{\text{fld}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \left(\frac{\mu_0 N^2 h(r_1 + 0.5g)}{2g} \right)$$

3.6 SISTEMAS DE CAMPO MAGNÉTICO DE EXCITACIÓN MÚLTIPLE

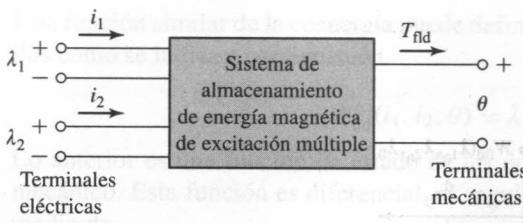
Existen varios dispositivos electromecánicos que presentan múltiples terminales eléctricas. En los sistemas de medición con frecuencia es aconsejable obtener pares proporcionales a dos señales eléctricas; por ejemplo, un medidor que determine la potencia como el producto del voltaje y la corriente. De manera similar, la mayoría de los dispositivos de conversión de energía electromecánica consisten en sistemas de campo magnético de excitación múltiple.

Los análisis de este tipo de sistemas se realiza a partir de las técnicas que se plantearon en secciones anteriores. Esta sección ilustra tales técnicas con base en un sistema con dos terminales eléctricas. En la figura 3.13 se muestra una representación esquemática de un sistema simple con dos terminales eléctricas y una terminal mecánica. En este caso se representa un sistema con movimiento rotatorio, donde las variables de la terminal mecánica son el par de torsión T_{fld} y el desplazamiento angular θ . Dado que existen tres terminales, el sistema deberá describirse en términos de tres variables independientes; éstas pueden ser el ángulo mecánico θ además de los flujos de dispersión λ_1 y λ_2 , las corrientes i_1 e i_2 , o un conjunto híbrido que incluya una corriente y un flujo.³

Cuando se emplean los flujos, la función de energía diferencial $dW_{\text{fld}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ correspondiente a la ecuación 3.29 es

$$dW_{\text{fld}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 - T_{\text{fld}} d\theta \quad (3.52)$$

³ Véase, por ejemplo, H.H. Woodson y J.R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*, Wiley, Nueva York, 1968, pt. I, capítulo 3.

**Figura 3.13**

Sistema de almacenamiento de energía magnética de excitación múltiple.

y en comparación directa con el desarrollo que se realizó en el caso anterior para un sistema de excitación única

$$i_1 = \frac{\partial W_{\text{fld}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda_2, \theta} \quad (3.53)$$

$$i_2 = \frac{\partial W_{\text{fld}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda_1, \theta} \quad (3.54)$$

$$T_{\text{fld}} = -\frac{\partial W_{\text{fld}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (3.55)$$

Observe que en cada una de estas ecuaciones *la derivada parcial con respecto a cada variable independiente deberá considerarse manteniendo constantes las otras dos variables independientes.*

Es posible determinar la energía W_{fld} por medio de integrar la ecuación 3.52. Como sucedió en el caso del sistema de excitación única, es más conveniente mantener fijas las constantes λ_1 y λ_2 con un valor de cero al integrar primero sobre θ ; bajo estas condiciones, T_{fld} es cero, por lo tanto, dicha integral también es cero. Entonces se puede integrar sobre λ_2 (mientras se mantiene λ_1 con valor de cero) y al final sobre λ_1 . Así,

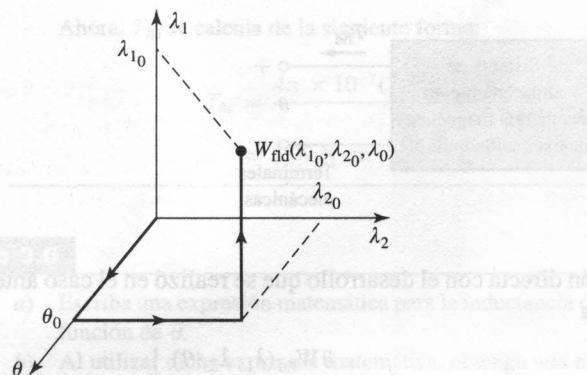
$$\begin{aligned} W_{\text{fld}}(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \theta_0) &= \int_0^{\lambda_{20}} i_2(\lambda_1 = 0, \lambda_2, \theta = \theta_0) d\lambda_2 \\ &\quad + \int_0^{\lambda_{10}} i_1(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_{20}, \theta = \theta_0) d\lambda_1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

En la figura 3.14 se ilustra este patrón de integración, el cual es análogo al que se ilustra en la figura 3.5. Es obvio que cabe la posibilidad de intercambiar el orden de la integración para λ_2 y λ_1 . Sin embargo, es de suma importancia reconocer que las variables de estado se integran sobre un patrón específico donde sólo una variable de estado varía a la vez; por ejemplo, en la ecuación 3.56, λ_1 se mantiene con un valor de cero mientras se integra sobre λ_2 . Este hecho se indica de forma explícita en la ecuación 3.56 y también puede observarse en la figura 3.14. Uno de los errores más frecuentes al analizar estos sistemas es equivocarse al observar este requisito.

En un sistema magnéticamente lineal las relaciones entre λ e i pueden especificarse en términos de las inductancias tal como se analizó en la sección 1.2.

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (3.57)$$

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \quad (3.58)$$

**Figura 3.14**

Patrón de integración para obtener $W_{\text{fld}}(\lambda_1_0, \lambda_2_0, \theta_0)$.

donde

$$L_{12} = L_{21} \quad (3.59)$$

Aquí las inductancias son, en general, funciones de la posición angular θ .

Estas ecuaciones pueden invertirse para obtener ecuaciones para los valores de i como una función de los valores de θ

$$i_1 = \frac{L_{22}\lambda_1 - L_{12}\lambda_2}{D} \quad (3.60)$$

$$i_2 = \frac{-L_{21}\lambda_1 + L_{11}\lambda_2}{D} \quad (3.61)$$

donde

$$D = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \quad (3.62)$$

La energía para este sistema lineal se determina a partir de la ecuación 3.56

de conversión de energía electromecánica contenida en sistemas de campo magnético de excitación múltiple.

Los análisis de este tipo de sistemas parten de las técnicas que se plantearon en el Capítulo 2 para sistemas con dos terminales eléctricos. En la figura 3.14 se representa esquemáticamente un sistema con el par de terminales eléctricos, por ejemplo, un motor que suministra la potencia como el producto

$$\begin{aligned} W_{\text{fld}}(\lambda_1_0, \lambda_2_0, \theta_0) &= \int_0^{\lambda_2_0} \frac{L_{11}(\theta_0)\lambda_2}{D(\theta_0)} d\lambda_2 \\ &\quad + \int_0^{\lambda_1_0} \frac{(L_{22}(\theta_0)\lambda_1 - L_{12}(\theta_0)\lambda_{20})}{D(\theta_0)} d\lambda_1 \\ &= \frac{1}{2D(\theta_0)} L_{11}(\theta_0)\lambda_{20}^2 + \frac{1}{2D(\theta_0)} L_{22}(\theta_0)\lambda_{10}^2 \\ &\quad - \frac{L_{12}(\theta_0)}{D(\theta_0)} \lambda_{10}\lambda_{20} \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde la dependencia de las inductancias y el determinante $D(\theta)$ sobre el desplazamiento angular θ se indicó de manera explícita.

En la sección 3.5, la función de la coenergía se definió para permitir la determinación de la fuerza y par de forma directa en términos de la corriente para un sistema de devanado único.

Una función similar de la coenergía puede definirse en el caso de los sistemas con dos devanados como se indica a continuación

$$W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 - W_{\text{fld}} \quad (3.64)$$

Lo anterior es una función de estado de las dos corrientes terminales y del desplazamiento mecánico. Esta función es diferencial, al seguir la sustitución de la ecuación 3.52, se da por medio de

$$dW'_{\text{fld}}(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + T_{\text{fld}} d\theta \quad (3.65)$$

A partir de la ecuación 3.65 se observa que

$$\lambda_1 = \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_1} \Big|_{i_2, \theta} \quad (3.66)$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_2} \Big|_{i_1, \theta} \quad (3.67)$$

De forma más significativa, el par ahora puede determinarse de manera directa en términos de la corriente, como se indica a continuación

$$T_{\text{fld}} = \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{i_1, i_2} \quad (3.68)$$

En comparación con la ecuación 3.56, la coenergía se determina de la siguiente forma

$$W'_{\text{fld}}(i_{10}, i_{20}, \theta_0) = \int_0^{i_{20}} \lambda_2(i_1 = 0, i_2, \theta = \theta_0) di_2 + \int_0^{i_{10}} \lambda_1(i_1, i_2 = i_{20}, \theta = \theta_0) di_1 \quad (3.69)$$

Para el sistema lineal de las ecuaciones 3.57 a 3.59

$$W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_{11}(\theta) i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}(\theta) i_2^2 + L_{12}(\theta) i_1 i_2 \quad (3.70)$$

Para el caso de dicho sistema lineal, el par puede determinarse ya sea a partir de la energía que plantea la ecuación 3.63 al aplicar la ecuación 3.55 o por medio de la coenergía que establece la ecuación 3.70 al aplicar la ecuación 3.68. Es en este punto en que la utilidad de la función de la coenergía se hace presente. La expresión de la energía que se plantea en la ecuación 3.63 es una función compleja de desplazamiento, y su derivada lo es aún más. De manera alternativa, la función de la coenergía es una función de desplazamiento relativamente simple; además, de su derivada es posible obtener una expresión matemática más directa para el par como una función de las corrientes del devanado i_1 e i_2 ,

$$T_{\text{fld}} = \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{i_1, i_2} = \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}(\theta)}{d\theta} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(\theta)}{d\theta} \quad (3.71)$$

Los sistemas con más de dos terminales eléctricas se manejan de un modo similar. Como el caso anterior del sistema con dos pares de terminales, la aplicación de la función de la coenergía de las terminales de corriente simplifica en gran medida la obtención del par o de la fuerza.

EJEMPLO 3.7



En el sistema que se ilustra en la figura 3.15, las inductancias en henrys se proporcionan como $L_{11} = (3 + \cos 2\theta) \times 10^{-3}$; $L_{12} = 0.3 \cos \theta$; $L_{22} = 30 + 10 \cos 2\theta$. Determine y grafique el par $T_{fd}(\theta)$ para la corriente $i_1 = 0.8 \text{ A}$ e $i_2 = 0.01 \text{ A}$.

Solución

El par de torsión se determina a partir de la ecuación 3.71.

$$\begin{aligned} T_{fd} &= \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}(\theta)}{d\theta} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(\theta)}{d\theta} \\ &= \frac{i_1^2}{2} (-2 \times 10^{-3}) \operatorname{sen} 2\theta + \frac{i_2^2}{2} (-20 \operatorname{sen} 2\theta) - i_1 i_2 (0.3) \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Para $i_1 = 0.8 \text{ A}$ $i_2 = 0.01 \text{ A}$, el par de torsión es

$$T_{fd} = -1.64 \times 10^{-3} \operatorname{sen} 2\theta - 2.4 \times 10^{-3} \operatorname{sen} \theta$$

Observe que la expresión del par consiste en términos de dos tipos. Un término, proporcional a $i_1 i_2 \operatorname{sen} \theta$, el cual se debe a la interacción mutua entre el rotor y las corrientes del estator; esta interacción actúa en una dirección que alinea el rotor y el estator de manera que maximiza su inductancia mutua. De manera alternativa, es posible pensar que se debe a la tendencia de dos campos magnéticos (en este caso los del rotor y el estator) que se alinean.

La expresión del par de torsión también presenta dos términos cada uno proporcional al seno 2θ y al cuadrado de una de las corrientes de la bobina. Estos términos se deben a la acción de las corrientes individuales de devanado y corresponden a los pares que se analizaron en los sistemas de excitación única. En este caso, el par se debe al hecho de que las autoinductancias son una función de la posición del rotor y a que el correspondiente par actúa en la dirección que contribuya a incrementar la coenergía. La

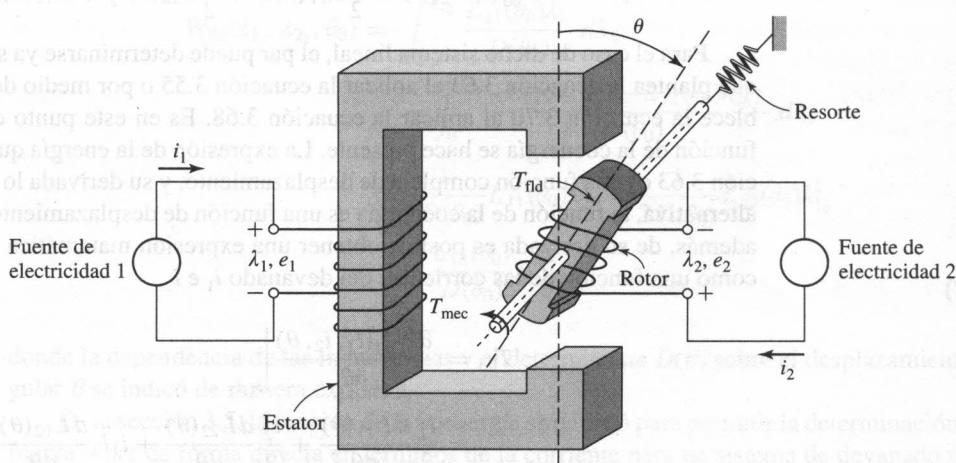
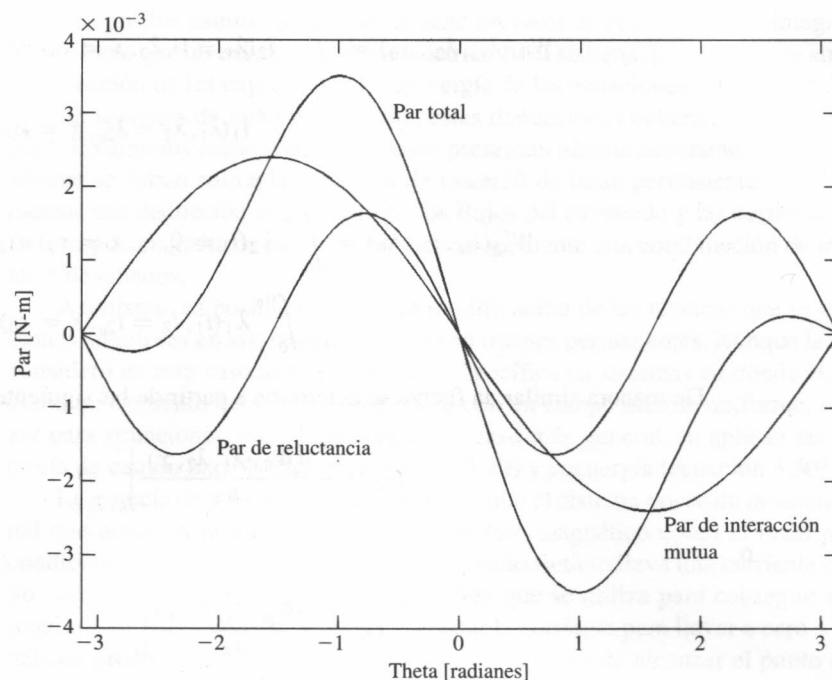


Figura 3.15

Sistemas de energía de campo magnético de excitación múltiple para el ejemplo 3.7.

**Figura 3.16**

Gráfica de los componentes del par para el sistema de excitación múltiple que se cita en el ejemplo 3.7.

variación 2θ se debe a la variación correspondiente en las autoinductancias (exactamente de la misma forma que se analizó con anterioridad en el ejemplo 3.4), que en cambio se debió a la variación de la reluctancia del entrehierro; advierta que la rotación de 180° del rotor en cualquier posición suministra la misma reluctancia del entrehierro (por lo tanto, proporciona doble variación angular). Este componente del par se denomina *par de reluctancia*. Los dos componentes del par (mutua y de reluctancia), además del par total, se grafican con MATLAB en la figura 3.16.

Problema práctico 3.7

Formule una expresión matemática para el par de un sistema con dos devanados simétricos cuyas inductancias varían de la siguiente manera

$$L_{11} = L_{22} = 0.8 + 0.27 \cos 4\theta$$

$$L_{12} = 0.65 \cos 2\theta$$

para la condición de que $i_1 = -i_2 = 0.37$ A.

Solución

$$T_{\text{fld}} = -0.296 \sin(4\theta) + 0.178 \sin(2\theta)$$

La deducción que se presenta en este caso para desplazamiento angular puede repetirse de forma análoga para los sistemas con desplazamiento lineal. Si lo anterior se realiza, las expresiones para la energía y la coenergía serán las siguientes

$$W_{\text{fld}}(\lambda_{1_0}, \lambda_{2_0}, x_0) = \int_0^{\lambda_{2_0}} i_2(\lambda_1 = 0, \lambda_2, x = x_0) d\lambda_2 + \int_0^{\lambda_{1_0}} i_1(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_{2_0}, x = x_0) d\lambda_1 \quad (3.72)$$

$$W'_{\text{fld}}(i_{1_0}, i_{2_0}, x_0) = \int_0^{i_{2_0}} \lambda_2(i_1 = 0, i_2, x = x_0) di_2 + \int_0^{i_{1_0}} \lambda_1(i_1, i_2 = i_{2_0}, x = x_0) di_1 \quad (3.73)$$

De manera similar, la fuerza se determina a partir de las siguientes ecuaciones

$$f_{\text{fld}} = - \frac{\partial W_{\text{fld}}(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial x} \Big|_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (3.74)$$

o

$$f_{\text{fld}} = \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, x)}{\partial x} \Big|_{i_1, i_2} \quad (3.75)$$

En el caso de un sistema lineal, la ecuación 3.70 para la coenergía se convierte en la siguiente expresión

$$W'_{\text{fld}}(i_1, i_2, x) = \frac{1}{2} L_{11}(x) i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}(x) i_2^2 + L_{12}(x) i_1 i_2 \quad (3.76)$$

y por lo tanto, el valor de la fuerza se obtiene mediante la siguiente expresión

$$f_{\text{fld}} = \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}(x)}{dx} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}(x)}{dx} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(x)}{dx} \quad (3.77)$$

3.7 FUERZAS Y PARES EN SISTEMAS CON IMANES PERMANENTES

Las deducciones de la fuerza y las expresiones para pares de torsión que aparecen en las secciones 3.4 a 3.6 se enfocan en sistemas en donde los campos magnéticos se producen mediante una excitación eléctrica con devanados específicos en el sistema. Sin embargo, en la sección 3.5 se observa que debe tenerse especial cuidado al considerar los sistemas que contienen imanes permanentes (también denominados materiales magnéticos *duros*). De manera específica, el análisis asociado con la deducción de la ecuación de coenergía indicada con el número 3.50, que señala que en dichos sistemas la densidad de flujo magnético es cero cuando $H = H_c$ pero no cuando $H = 0$.

Por esta razón, la deducción de las expresiones matemáticas para la fuerza y el par dentro de las secciones 3.4 a 3.6 deberá modificarse para los sistemas que contengan imán permanente. Por ejemplo, considere que la deducción de la ecuación 3.18 depende de que en la ecuación

3.17 sea posible asumir que la fuerza tiene un valor de cero cuando se integra sobre el patrón 2a debido a que no existe excitación eléctrica en el sistema. Un argumento similar se aplica en la deducción de las expresiones de coenergía de las ecuaciones 3.41 y 3.69.

En sistemas de imán permanente, estas deducciones deberán revisarse de manera cuidadosa. En algunos casos tales sistemas no presentan ningún devanado, ya que sus campos magnéticos se deben sólo a la presencia de material de imán permanente, y no es posible fundamentar una deducción únicamente en los flujos del devanado y las corrientes. En otros casos, los campos magnéticos pudieran producirse mediante una combinación de imanes permanentes y devanados.

Asimismo, es posible utilizar una modificación de las técnicas que se analizaron en secciones anteriores en sistemas que contienen imanes permanentes. Aunque la deducción que se consideró en este caso aplica de manera específica en sistemas en donde el imán se presenta como un elemento del circuito magnético con un campo interno uniforme, se puede generalizar para situaciones más complejas; en el caso más general, se aplican las ecuaciones de la teoría de campo para la energía (ecuación 3.20) y coenergía (ecuación 3.50).

La esencia de esta técnica es considerar que el sistema posee un *devanado ficticio* adicional que actúa en la misma sección del circuito magnético como el imán permanente. Bajo condiciones normales de operación, el devanado ficticio lleva una corriente con valor de cero. Su función es simplemente la de una *muleta* que se utiliza para conseguir el análisis que se requiere. En este devanado es posible ajustar la corriente para llevar a cero a los campos magnéticos producidos por el imán permanente con el fin de alcanzar el punto de partida *fuerza cero* para realizar los análisis como es el caso de la transformación de la ecuación 3.17 a 3.18.

Con el objetivo de calcular la energía y la coenergía del sistema, este devanado es considerado como cualquier otro, con su propio conjunto de corriente y flujos de dispersión. Como consecuencia, es posible obtener las ecuaciones para la energía y la coenergía como funciones de todos los flujos de dispersión de los devanados o de las corrientes, incluyendo las del devanado ficticio. Bajo condiciones normales de operación la corriente en este devanado se establecerá en un valor de cero, por lo que es útil obtener o deducir la expresión matemática para la fuerza a partir de la coenergía del sistema ya que las corrientes del devanado se expresan de forma explícita en esta representación.

La figura 3.17a muestra un circuito magnético con un imán permanente y un émbolo móvil. Para determinar la fuerza en el pistón como una función de la posición del émbolo, se asumirá que existe un devanado ficticio de N_f número de vueltas y que lleva una corriente de i_f , que produce un flujo a través del imán permanente, como se ilustra en la figura 3.17b.

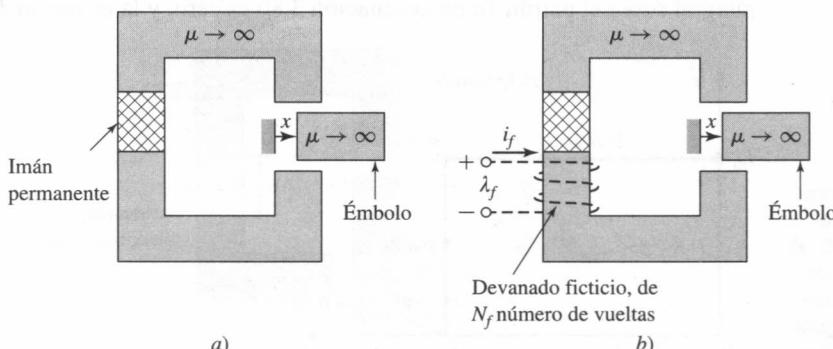


Figura 3.17
a) Circuito magnético con imán permanente y émbolo móvil; b) Con devanado ficticio añadido.

Para este sistema de devanado simple se formula la ecuación o el diferencial de coenergía a partir de la ecuación 3.37 como se muestra a continuación

$$dW'_{\text{fld}}(i_f, x) = \lambda_f di_f + f_{\text{fld}} dx \quad (3.78)$$

donde el subíndice f indica el devanado ficticio. Correspondiente a la ecuación 3.40, la fuerza en este sistema se escribe de la siguiente forma

$$f_{\text{fld}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i_f = 0, x)}{\partial x} \right|_{i_f} \quad (3.79)$$

donde la derivada parcial se toma en consideración mientras se mantiene constante el valor de $i_f = 0$, donde es equivalente a establecer $i_f = 0$ en la ecuación para W'_{fld} antes de tomar a la derivada. Como se ha estudiado, mantener constante el valor de i_f es un requisito en el método de la energía para la derivada en la ecuación 3.79; de tal manera, debe establecerse con valor de cero para calcular de forma apropiada la fuerza debida al imán sólo con el fin de no incluir un componente de la fuerza a partir de la corriente en el devanado ficticio.

Para calcular la coenergía $W'_{\text{fld}}(i_f, x)$ en este sistema, es necesario integrar la ecuación 3.78. Dado que W'_{fld} es una función de estado de i_f y x , la elección de cualquier patrón de integración es libre. La figura 3.18 ilustra un patrón en el que esta integración es particularmente simple.

En este patrón es posible elaborar una expresión para la coenergía en este sistema como

$$\begin{aligned} W'_{\text{fld}}(i_f = 0, x) &= \int_{\text{patrón } 1a} dW'_{\text{fld}} + \int_{\text{patrón } 1b} dW'_{\text{fld}} \\ &= \int_0^x f_{\text{fld}}(i_f = I_{f0}, x') dx' + \int_{I_{f0}}^0 \lambda_f(i_f, x) di_f \end{aligned} \quad (3.80)$$

que corresponda directamente a la expresión análoga para la energía determinada en la ecuación 3.17.

Advierta que la integración se encuentra de manera inicial sobre x con la corriente i_f fija en $i_f = I_{f0}$. Ésta es una corriente muy específica, igual a la corriente del devanado ficticio que reduce el flujo magnético dentro del sistema a cero. En otras palabras, I_{f0} es la corriente en el devanado ficticio, la cual contrarresta por completo al campo magnético producido por medio del imán permanente. De esta forma, la fuerza f_{fld} es cero en el punto A indicado en la figura 3.18 y permanece de esa manera para la integral sobre x del patrón 1a. Por consiguiente, la integral sobre el patrón 1a en la ecuación 3.80 es cero, y la ecuación 3.80 se reduce a

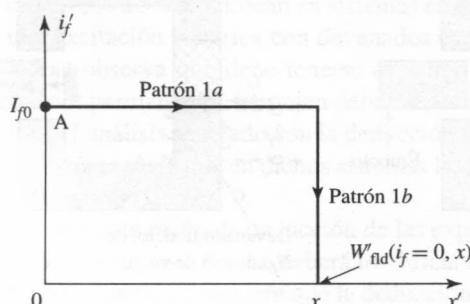


Figura 3.18

Trayectoria de integración para elaborar el cálculo de $W'_{\text{fld}}(i_f = 0, x)$ dentro del sistema de imán permanente que se muestra en la figura 3.17.

$$W'_{\text{fld}}(i_f = 0, x) = \int_{I_f 0}^0 \lambda_f(i'_f, x) di'_f \quad (3.81)$$

Observe que la ecuación 3.81 es muy general y no requiere ni de imán permanente ni de material magnético para que el circuito magnético sea lineal. Una vez que la ecuación 3.81 se ha evaluado, la fuerza en una posición x dada del émbolo se determina a partir de la ecuación 3.79. También advierta que, como era de esperar, debido a la presencia del imán permanente, ni la coenergía ni la fuerza tienen valor de cero cuando i_f es cero.

EJEMPLO 3.8

El circuito magnético de la figura 3.19 se excita mediante un imán permanente de samario-cobalto y presenta un émbolo móvil. También se muestra un devanado ficticio de N_f número de vueltas que lleva una corriente i_f que se incluye en este caso para los fines del análisis. Las dimensiones son:

$$\begin{aligned} W_m &= 2.0 \text{ cm} & W_g &= 3.0 \text{ cm} & W_0 &= 2.0 \text{ cm} \\ d &= 2.0 \text{ cm} & g_0 &= 0.2 \text{ cm} & D &= 3.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Determine a) una ecuación para la coenergía del sistema como una función de la posición x del émbolo; b) una ecuación para la fuerza que actúa sobre el émbolo como función de x . Por último, c) calcule la fuerza en $x = 0$ y $x = 0.5 \text{ cm}$. Ignore cualquiera de los efectos de los flujos marginales en este cálculo.

Solución

- a) Debido a que este sistema es lineal en la mayoría de sus niveles de operación, la curva de magnetización de corriente directa para el samario-cobalto se representa como una línea recta con la forma de la ecuación 1.61

$$B_m = \mu_R(H_m - H'_c) = \mu_R H_m + B_r$$

donde se emplea el subíndice m para designar específicamente los campos dentro del imán de samario-cobalto y

$$\mu_R = 1.05 \mu_0$$

$$H'_c = -712 \text{ kA/m}$$

$$B_r = 0.94 \text{ T}$$

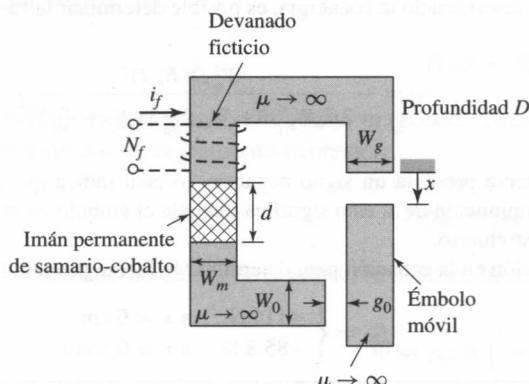


Figura 3.19
Círculo magnético ilustrado para el ejemplo 3.8.

Advierta que en la figura 1.19 se muestra una curva de magnetización de corriente directa para el samario-cobalto, la cual no es completamente lineal; se inclina ligeramente hacia abajo debido a las densidades de flujo bajas. Por lo tanto, en la curva B - H que se representó en la figura anterior, la coercitividad aparente H'_c es de cierto modo mayor que la coercitividad real del samario-cobalto.

A partir de la ecuación 1.5 se formula lo siguiente

$$N_f i_f = H_m d + H_g x + H_0 g_0$$

donde el subíndice g se refiere a las variables del entrehierro y el subíndice 0 al entrehierro fijo. De manera similar, a partir de la continuidad de la condición del flujo en la ecuación 1.3, se formula la siguiente ecuación

$$B_m W_m D = B_g W_g D = B_0 W_0 D$$

Al reconocer que en los entrehierros $B_g = \mu_0 H_g$ y $B_0 = \mu_0 H_0$, es posible resolver las ecuaciones citadas en los párrafos anteriores para B_m ,

$$B_m = \frac{\mu_R (N_f i_f - H'_c d)}{d + W_m \left(\frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left(\frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right)}$$

Por último, para los flujos de dispersión λ_f del devanado ficticio se resuelve de la siguiente manera

$$\lambda_f = N_f W_m D B_m = \frac{N_f W_m D \mu_R (N_f i_f - H'_c d)}{d + W_m \left(\frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left(\frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right)}$$

De esta forma, se observa que los flujos de dispersión λ_f tendrán un valor de cero cuando $i_f = I_{f0} = H'_c d / N_f = -B_m d / (\mu_R N_f)$ y de la ecuación 3.81 se determinará el valor de la coenergía como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} W'_{\text{fld}}(x) &= \int_{H'_c d / N_f}^0 \left[\frac{N_f W_m D \mu_R (N_f i_f - H'_c d)}{d + W_m \left(\frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left(\frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right)} \right] di_f \\ &= \frac{W_m D (B_r d)^2}{2 \mu_R \left[d + W_m \left(\frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left(\frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right) \right]} \end{aligned}$$

Advierta que la respuesta no depende de N_f ni de i_f como se esperaría, ya que el devanado ficticio no existe realmente en el sistema.

- b) Una vez que se ha determinado la coenergía, es posible determinar la fuerza a partir de la ecuación 3.79

$$f_{\text{fld}} = -\frac{W_m^2 D (B_r d)^2}{2 \mu_0 W_g \left[d + W_m \left(\frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left(\frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right) \right]^2}$$

Observe que la fuerza presenta un signo negativo, lo cual indica que actúa en la dirección que contribuye a la disminución de x , esto significa que jala el émbolo en la dirección que favorece la disminución del entrehierro.

- c) Al final, la sustitución en la ecuación para determinar la fuerza proporciona los siguientes valores

$$f_{\text{fld}} = \begin{cases} -115 \text{ N} & \text{a } x = 0 \text{ cm} \\ -85.8 \text{ N} & \text{a } x = 0.5 \text{ cm} \end{cases}$$

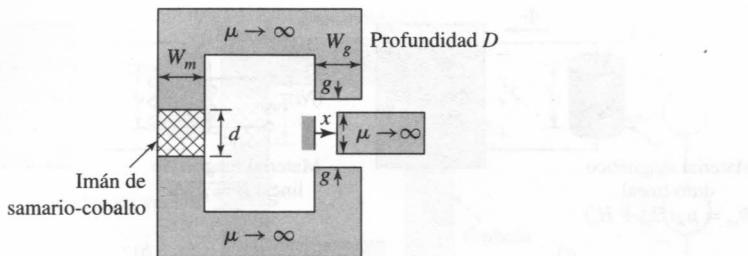


Figura 3.20
Círculo magnético para el problema práctico 3.8.

Problema práctico 3.8

- a) Dérive una expresión para determinar la coenergía dentro del circuito magnético que se muestra en la figura 3.20 como una función de la posición x del émbolo. b) Obtenga una expresión para la fuerza dirigida a x en el pistón y evalúela con $x = W_g/2$. Ignore cualquiera de los efectos marginales de los flujos. Las dimensiones son:

$$W_m = 2.0 \text{ cm} \quad W_g = 2.5 \text{ cm} \quad D = 3.0 \text{ cm}$$

$$d = 1.0 \text{ cm} \quad g_0 = 0.2 \text{ cm}$$

Solución

a)

$$W'_{\text{fld}} = \frac{W_m D (B_r d)^2}{2\mu_R [d + (\frac{\mu_R}{\mu_0}) (\frac{2gW_m}{(W_g - x)})]}$$

b)

$$f_{\text{fld}} = -\frac{g W_m^2 D B_r^2}{\mu_0 (W_g - x)^2 \left[1 + \left(\frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left(\frac{w g W_m}{(W_g - x)} \right) \right]^2}$$

$$Ax = W_g/2, f_{\text{fld}} = -107 \text{ N.}$$

Considere el esquema del circuito magnético de la figura 3.21a. Este circuito magnético consiste en una sección de material magnético lineal ($B_m = \mu_R (H_m - H'_c)$) de área A y de longitud d . Se conecta en serie con un circuito magnético externo de fmm \mathcal{F}_e .

A partir de la ecuación 1.21, ya que no existen amperes vueltas que actúen en este circuito magnético,

$$H_m d + \mathcal{F}_e = 0 \quad (3.82)$$

El flujo producido en el circuito magnético externo mediante el imán permanente se obtiene por medio de la siguiente expresión

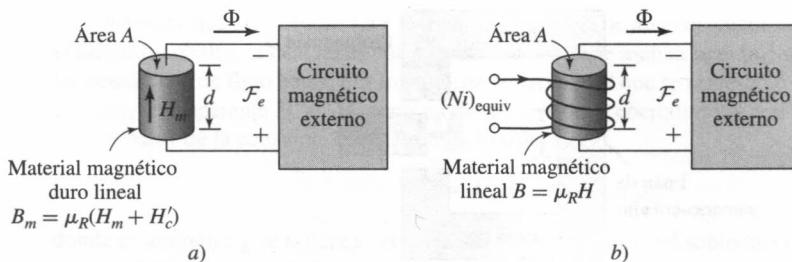
$$\Phi = AB_m = \mu_R A (H_m - H'_c) \quad (3.83)$$

La sustitución de H_m de la ecuación 3.82 en la ecuación 3.83 nos proporciona

$$\Phi = \mu_R A \left(-H'_c - \frac{\mathcal{F}_e}{d} \right) \quad (3.84)$$

Figura 3.21

a) Circuito magnético genérico que contiene una sección de material de imán permanente lineal. b) Circuito magnético genérico en donde el material de imán permanente se ha reemplazado con una sección de material magnético lineal y un devanado ficticio.



Ahora considere el esquema del circuito magnético que se muestra en la figura 3.21b donde el material magnético duro lineal de la figura 3.21a se ha reemplazado con un material magnético lineal suave que presenta la misma permeabilidad ($B = \mu_R H$) y las mismas dimensiones, longitud d y área A . Además, se incluye un devanado con $(Ni)_{\text{equiv}}$ número de amperes vueltas.

Para este circuito magnético, el flujo se demuestra mediante la siguiente ecuación

$$\Phi = \mu_R A \left(\frac{(Ni)_{\text{equiv}}}{d} - \frac{\mathcal{F}_e}{d} \right) \quad (3.85)$$

Al comparar las ecuaciones 3.84 y 3.85, se observa que el mismo flujo se produce en el circuito magnético externo si los amperes vueltas, $(Ni)_{\text{equiv}}$, en el devanado de la figura 3.21b es igual a $-H'_c d$.

Éste es un resultado útil al analizar estructuras de circuitos magnéticos que contienen material de imán permanente lineal, cuyas curvas características $B-H$ se representan en la forma de la ecuación 1.61. En dichos casos, al reemplazar la sección del imán permanente por una sección de material magnético lineal que presente la misma permeabilidad μ_R , geometría y un devanado equivalente de amperes vueltas

$$(Ni)_{\text{equiv}} = -H'_c d \quad (3.86)$$

da como resultado un mismo flujo en el circuito magnético externo. Como consecuencia, tanto el imán permanente como la combinación de material magnético lineal y el devanado no se distinguen entre sí con relación a la producción de campos magnéticos en el circuito magnético externo, por lo tanto, estos factores producen fuerzas idénticas. De esta manera, el análisis de dichos sistemas se simplifica mediante una sustitución, como se muestra en el ejemplo 3.9. Esta técnica es especialmente útil al analizar circuitos magnéticos que contienen tanto materiales de imán permanente como uno o más devanados.

EJEMPLO 3.9

La figura 3.22a muestra un actuador que consiste de una armadura (o núcleo) de permeabilidad infinita y un pistón, que se excita por medio de una sección de imán de neodimio-hierro-boro y un devanado de excitación de $N_1 = 1500$ vueltas.

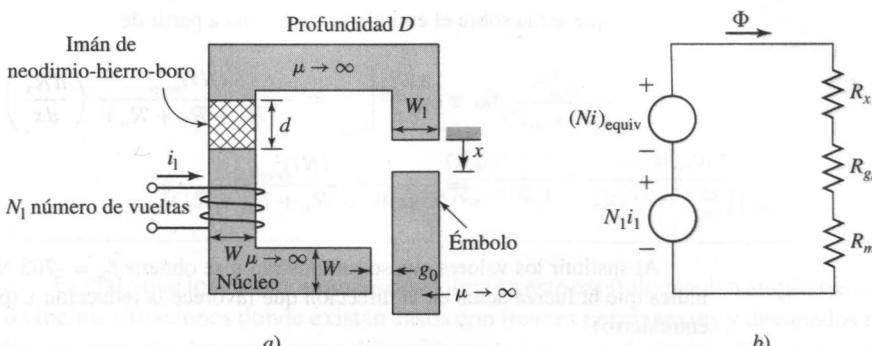
Las dimensiones son las siguientes:

$$W = 4.0 \text{ cm} \quad W_1 = 4.5 \text{ cm} \quad D = 3.5 \text{ cm}$$

$$d = 8 \text{ mm} \quad g_0 = 1 \text{ mm}$$

Figura 3.22

a) Actuador para el ejemplo 3.9. b) Circuito equivalente para el brazo de lectura con el imán permanente reemplazado mediante un material lineal y un devanado equivalente ($(Ni)_{\text{equiv}}$) de amperes vueltas.



Determine a) la fuerza dirigida a x que actúa sobre el émbolo cuando la corriente en el devanado de excitación equivale a cero y $x = 3$. b) Calcule la corriente en el devanado de excitación que se necesita para reducir la fuerza del pistón a cero.

Solución

- a) Como se consideró en la sección 1.6, la magnetización de corriente directa característica del neodimio-hierro-boro se representa mediante una ecuación lineal

$$B = \mu_R (H - H'_c) = B_r + \mu_R H$$

donde $\mu_R = 1.06\mu_0$, $H'_c = -940 \text{ kA/m}$ y $B_r = 1.25 \text{ T}$. Como se analizó en esta sección, es posible reemplazar el imán con una porción de material lineal con permeabilidad μ_R y un devanado equivalente de amperes vueltas

$$(Ni)_{\text{equiv}} = -H'_c d = -(-9.4 \times 10^5)(8 \times 10^{-3}) = 7520 \text{ ampe vueltas}$$

Con base en esta sustitución, el circuito equivalente para este sistema es el de la figura 3.22b. En ésta se presentan dos fuentes de fmm en serie con tres reluctancias: la variable del entrehierro \mathcal{R}_x , el entrehierro fijo \mathcal{R}_0 y el imán \mathcal{R}_m .

$$\mathcal{R}_x = \frac{x}{\mu_0 W D}$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{g_0}{\mu_0 W D}$$

$$\mathcal{R}_m = \frac{d}{\mu_R W D}$$

Con $i_1 = 0$, el actuador es equivalente a un sistema de devanado simple cuyo valor de coenergía se obtiene mediante la siguiente ecuación

$$W'_{\text{fld}} = \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{(Ni)_{\text{equiv}}^2}{\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_m} \right)$$

La fuerza que actúa sobre el émbolo se determina a partir de

$$\begin{aligned} f_{\text{fld}} &= \frac{\partial W'_{\text{fld}}}{\partial x} \Big|_{i_{\text{equiv}}} = -\frac{(Ni)_{\text{equiv}}^2}{(\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_m)^2} \left(\frac{d\mathcal{R}_x}{dx} \right) \\ &= -\frac{(Ni)_{\text{equiv}}^2}{\mu_0 W_1 D (\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_m)^2} \end{aligned}$$

Al sustituir los valores que se suministraron se obtiene $f_{\text{fld}} = -703$ N, donde el signo negativo indica que la fuerza actúa en la dirección que favorece la reducción x (por ejemplo, para cerrar el entrehierro).

- b) El flujo en el actuador de lectura es proporcional al número de amperes vueltas efectivo total $(Ni)_{\text{equiv}} + N_1 i_1$ que actúa sobre el circuito magnético. De esta forma, la fuerza será equivalente a cero cuando el valor neto de los amperes vueltas sea cero o cuando

$$i_1 = \frac{(Ni)_{\text{equiv}}}{N_1} = \frac{7520}{1500} = 5.01 \text{ A}$$

Sin embargo, advierta que el signo de la corriente (por ejemplo, en cuya dirección deberá aplicarse al devanado de excitación) no puede determinarse a partir de la información suministrada en este caso, ya que no se conoce la dirección de magnetización del imán. Dado que la fuerza depende del cuadrado de la densidad de flujo magnético, el imán puede orientarse para producir un flujo ascendente o descendente en la columna izquierda del circuito magnético, y la fuerza que se calculó en el inciso a) presentará el mismo valor. Para reducir la fuerza a cero, la corriente del devanado de excitación de 5.01 amperes deberá aplicarse en la dirección que favorezca la reducción del flujo a cero; si se aplica la corriente opuesta, la densidad de flujo se incrementará y lo mismo sucederá con la fuerza.

Problema práctico 3.9

Se repetirán los cálculos efectuados en el problema 3.8 y se reemplazará el imán de sumario-cobalto con una porción de material lineal y un devanado equivalente. Formule a) expresiones matemáticas para \mathcal{R}_m , la reluctancia de la sección de material lineal; \mathcal{R}_g , la reluctancia del entrehierro; y $(Ni)_{\text{equiv}}$, el número de amperes vueltas del devanado equivalente; y b) una ecuación para calcular la inductancia del devanado equivalente, así como la coenergía

$$W_m = 2.0 \text{ cm} \quad W_g = 2.5 \text{ cm} \quad D = 3.0 \text{ cm}$$

$$d = 1.0 \text{ cm} \quad g_0 = 0.2 \text{ cm}$$

Solución

a)

$$\mathcal{R}_m = \frac{d}{\mu_R W_m D}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{2g}{\mu_0 (W_g - x) D}$$

$$(Ni)_{\text{equiv}} = -H'_c d = \frac{(B_r d)}{\mu_R}$$

b)

$$L = \frac{N_{\text{equiv}}^2}{(\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_g)}$$

$$W'_{\text{fld}} = \frac{Li_{\text{equiv}}^2}{2} = \frac{(B,d)^2}{2\mu_R^2(\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_g)} = \frac{W_m D(B,d)^2}{2\mu_R [d + (\frac{\mu_R}{\mu_0}) (\frac{2g W_m}{W_g - x})]}$$

Es claro que los métodos que se describen en este capítulo pueden ampliarse con el objetivo de incluir situaciones donde existan casos con imanes permanentes y devanados múltiples que lleven corriente. En numerosos dispositivos de interés práctico, la disposición geométrica es muy compleja, independientemente del número de devanados y/o de imanes permanentes, estos análisis de circuitos magnéticos no son necesariamente aplicables, y puede esperarse que las soluciones analíticas no sean precisas, si es que es posible obtenerlas de algún modo. En estos casos, es apropiado aplicar las técnicas numéricas, como el método de elemento finito que se analizó con anterioridad. Al aplicar este método, se puede evaluar numéricamente la coenergía que se observa en las ecuaciones 3.48 o 3.50 cuando se involucran imanes permanentes al considerar constantes las corrientes del devanado y variantes los valores del desplazamiento.

3.8 ECUACIONES DINÁMICAS

En este capítulo se han efectuado deducciones de ecuaciones para las fuerzas y pares que se llevan a cabo en los dispositivos de conversión de energía electromecánica, como funciones de variables en las terminales eléctricas y mecanismos de desplazamiento. Estas expresiones se dedujeron de los sistemas de conversión de energía conservativa donde es posible asumir que las pérdidas pueden asignarse a elementos externos eléctricos y mecánicos que se encuentran conectados a las terminales del sistema de conversión de energía electromecánica. Tales dispositivos de conversión energética están diseñados para operar como vínculo entre los sistemas eléctrico y mecánico. Como consecuencia, enfocaremos nuestra atención en la operación del sistema electromecánico completo y no sólo en el sistema de conversión de energía electromecánica alrededor del cual se construye dicho sistema.

En la figura 3.23 se esquematiza un modelo de sistema electromecánico simple que ilustra sus componentes, así como los detalles en los que es posible que existan variaciones de un sistema a otro. El sistema que se muestra consiste de tres partes: un sistema eléctrico externo, un sistema de conversión energética electromecánica y un sistema mecánico externo. El sistema

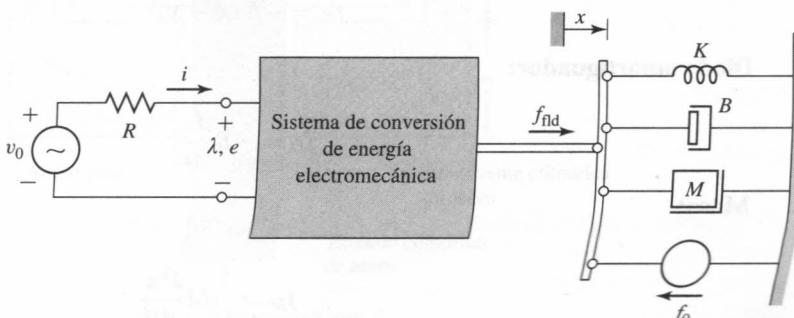


Figura 3.23
Esquema de un sistema electromecánico de excitación única.

ma eléctrico se representa por medio de una fuente de voltaje v_0 y una resistencia R ; la fuente podría representarse también mediante una fuente de corriente y una conductancia paralela G .

Advierta que todas las pérdidas eléctricas en el sistema, incluyendo las relacionadas con el sistema de conversión de energía electromecánica se asignan a la resistencia R en este esquema. Por ejemplo, si la fuente de voltaje presenta una resistencia equivalente R_s y la resistencia del devanado de dicho sistema es R_w , la resistencia R podría igualar la suma de estas dos resistencias; $R = R_s + R_w$.

La ecuación referente al sistema eléctrico de este esquema es

$$v_0 = iR + \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.87)$$

Si la dispersión de flujo λ se expresa como $\lambda = L(x)i$, la ecuación externa se convierte de la siguiente manera

$$v_0 = iR + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (3.88)$$

El segundo término de la derecha, $L(di/dt)$, es el término de voltaje de la autoinductancia. El tercer término $i(dL/dx)(dx/dt)$ incluye al multiplicador dx/dt . Ésta es la velocidad de la terminal mecánica, y el tercer término con frecuencia se denomina simplemente *voltaje por velocidad*. El término voltaje por velocidad es común en todos los sistemas de conversión de energía electromecánica y es el responsable de la transferencia de energía desde y para el sistema mecánico mediante el sistema eléctrico.

En el caso de un sistema de excitación múltiple, las ecuaciones formuladas para el sistema eléctrico que corresponden a la ecuación 3.87 están elaboradas para cada par de entradas. Si las ecuaciones para los términos λ se ampliaran con relación a las inductancias, como sucede en la ecuación 3.88, ambos términos, inductancia mutua y autoinductancia serían necesarios.

El sistema mecánico de la figura 3.23 incluye la representación de un resorte (constante del resorte K), un diodo amortiguador (constante de amortiguamiento B), una masa M y una fuerza de excitación mecánica externa f_0 . Aquí, como en el caso del sistema eléctrico, el amortiguador representa tanto las pérdidas del sistema mecánico externo como cualquier pérdida mecánica dentro del sistema de conversión de energía electromecánica.

Las fuerzas dirigidas hacia x y el desplazamiento x se describen matemáticamente de la siguiente manera

Resorte:

$$f_K = -K(x - x_0) \quad (3.89)$$

Diodo amortiguador:

$$f_D = -B \frac{dx}{dt} \quad (3.90)$$

Masa:

$$f_M = -M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.91)$$

donde x_0 es el valor de x con el resorte en posición de reposo. Entonces, el equilibrio de fuerza requiere que

$$f_{\text{fd}} + f_K + f_D + f_M - f_0 = f_{\text{fd}} - K(x - x_0) - B \frac{dx}{dt} - M \frac{d^2x}{dt^2} - f_0 = 0 \quad (3.92)$$

Al combinar las ecuaciones 3.88 y 3.92, las ecuaciones diferenciales para el sistema global de la figura 3.23 con entradas al azar $v_0(t)$ y $f_0(t)$ son de la siguiente manera

$$v_0(t) = iR + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \quad (3.93)$$

$$f_0(t) = -M \frac{d^2x}{dt^2} - B \frac{dx}{dt} - K(x - x_0) + f_{\text{fd}}(x, i) \quad (3.94)$$

Las funciones $L(x)$ y $f_{\text{fd}}(x, i)$, dependen de las propiedades del sistema de conversión de energía electromecánica y se formulan como se analizó anteriormente.

EJEMPLO 3.10

La figura 3.24 muestra un corte transversal de un imán solenoide cilíndrico donde el émbolo de masa M se mueve de forma vertical dentro de anillos guía de latón con un espesor g y un diámetro principal d .

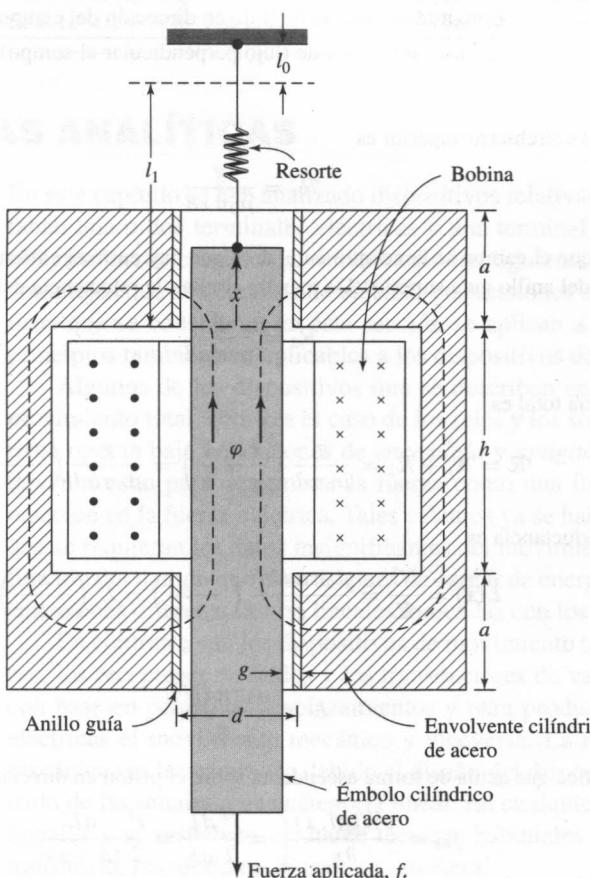


Figura 3.24
Imán solenoide esquematizado para el ejemplo 3.10.

La permeabilidad del latón es la misma que la del espacio libre y es $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m en unidades SI. Al émbolo lo sostiene un resorte cuya constante es K . Su longitud sin estirar es l_0 . Se aplica una fuerza de carga mecánica f_i al pistón procedente del sistema mecánico que se encuentra conectado a éste, como se muestra en la figura 3.24. Suponga que la fuerza de fricción es linealmente proporcional a la velocidad y que el coeficiente de fricción es B . La bobina presenta N número de vueltas y una resistencia R . Su voltaje terminal es v , y su corriente es i . Los efectos de la dispersión magnética y de la reluctancia del acero son insignificantes.

Obtenga las ecuaciones dinámicas del movimiento del sistema electromecánico, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales que consideran a las variables dependientes i y x en términos de v , f_i , y a las dimensiones y constantes suministradas en el problema.

Solución

Se iniciará expresando la inductancia como función de x . Los términos de acoplamiento, por ejemplo, la fuerza magnética f_{fld} y la fem inducida e , se expresan en términos de x e i y se sustituyen en las ecuaciones para los sistemas mecánico y eléctrico.

La reluctancia del circuito magnético es la que presentan los dos anillos guía dispuestos en serie, con el flujo dirigido en forma radial a través de ellos, como se indica en el esquema 3.24 con las líneas de flujo punteadas ϕ . Debido a que $g \ll d$, la densidad de flujo en los anillos guía casi es constante con respecto a la distancia radial. En una región donde la densidad de flujo es constante, la reluctancia es

$$\frac{\text{Longitud del patrón de flujo en dirección del campo}}{\mu (\text{área del patrón de flujo perpendicular al campo})}$$

La reluctancia del entrehierro superior es

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g}{\mu_0 \pi x d}$$

donde se asume que el campo se concentra en el área que hay entre el extremo superior del pistón y el extremo inferior del anillo guía superior. De manera similar, la reluctancia del entrehierro inferior es

$$\mathcal{R}_2 = \frac{g}{\mu_0 \pi ad}$$

La reluctancia total es

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{g}{\mu_0 \pi d} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right) = \frac{g}{\mu_0 \pi ad} \left(\frac{a+x}{x} \right)$$

Por lo tanto, la inductancia es

$$L(x) = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{\mu_0 \pi ad N^2}{g} \left(\frac{x}{a+x} \right) = L' \left(\frac{x}{a+x} \right)$$

donde

$$L' = \frac{\mu_0 \pi ad N^2}{g}$$

La fuerza magnética que actúa de forma ascendente sobre el pistón en dirección x positiva es

$$f_{\text{fld}} = \frac{\partial W'_{\text{fld}}(i, x)}{\partial x} \Big|_i = \frac{i^2}{2} \frac{dL'}{dx} = \frac{i^2}{2} \frac{aL'}{(a+x)^2}$$

La fem inducida en la bobina es

$$e = \frac{d}{dt}(Li) = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt}$$

o

$$e = L' \left(\frac{x}{a+x} \right) \frac{di}{dt} + L' \left(\frac{ai}{(a+x)^2} \right) \frac{dx}{dt}$$

La sustitución de la fuerza magnética en la ecuación diferencial del movimiento en el sistema mecánico (ecuación 3.94) da como resultado la siguiente ecuación

$$f_t = -M \frac{d^2x}{dt^2} - B \frac{dx}{dt} - K(x - l_0) + \frac{1}{2} L' \frac{ai^2}{(a+x)^2}$$

La ecuación del voltaje para el sistema eléctrico es (a partir de la ecuación 3.93)

$$v_t = iR + L' \left(\frac{x}{a+x} \right) \frac{di}{dt} + iL' \left(\frac{a}{(a+x)^2} \right) \frac{dx}{dt}$$

Las dos últimas ecuaciones expresan los resultados deseados. Éstas son válidas únicamente mientras el extremo superior del pistón se encuentre dentro del anillo guía superior, es decir, entre los límites de $0.1a < x < 0.9a$. Estos valores son el nivel normal de funcionamiento del solenoide.

3.9 TÉCNICAS ANALÍTICAS

En este capítulo se han analizado dispositivos relativamente simples. Los dispositivos presentaban una o dos terminales eléctricas y una terminal mecánica, a la que generalmente se le obliga a incrementar su movimiento. En los siguientes capítulos se analizan dispositivos más complejos que son capaces de efectuar conversiones continuas de energía. Las técnicas analíticas que se consideran en esta sección se aplican a dispositivos simples, sin embargo, los principios también son aplicables a los dispositivos de mayor complejidad.

Algunos de los dispositivos que se describen en este capítulo se utilizan para producir movimiento total, como es el caso de los relés y los solenoides, donde en esencia, los dispositivos operan bajo condiciones de *encendido y apagado*. Los análisis de estos dispositivos se llevan a cabo para determinar la fuerza como una función del desplazamiento y como una reacción en la fuente eléctrica. Tales cálculos ya se han efectuado en este capítulo. En caso de que se requieran los datos insignificantes del movimiento, como el desplazamiento como una función del tiempo que pasa después de cargar de energía al dispositivo, deberán resolverse las ecuaciones diferenciales no lineales indicadas con los números 3.93 y 3.94.

En contraste con los dispositivos de movimiento total, otros dispositivos como los altavoces, los receptores de ondas y los transductores de varias clases están diseñados para operar con base en pequeños desplazamientos y para producir una relación lineal entre las señales eléctricas y el movimiento mecánico y viceversa. La relación entre las variables eléctricas y mecánicas es lineal, ya sea debido al diseño del dispositivo o debido a la restricción del recorrido de las señales a una categoría lineal. En cualquier caso, las ecuaciones diferenciales son lineales y se resuelven mediante técnicas habituales formuladas para respuesta en régimen transitorio, respuesta en frecuencia, etcétera.

3.9.1 Movimiento total

Las ecuaciones diferenciales para un dispositivo de excitación única que se presentan en el ejemplo 3.10 son de la siguiente forma

$$\frac{1}{2}L' \left(\frac{ai^2}{(a+x)^2} \right) = M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K(x - l_0) + f_t \quad (3.95)$$

$$v_t = iR + L' \left(\frac{x}{a+x} \right) \frac{di}{dt} + L' \left(\frac{ai}{(a+x)^2} \right) \frac{dx}{dt} \quad (3.96)$$

Un problema común al aplicar este tipo de ecuaciones diferenciales es determinar el recorrido $x(t)$ cuando un voltaje predeterminado $v_t = V_0$ se aplica a $t = 0$. Un problema aún más simple es determinar el tiempo que se necesita para que el armazón se mueva de su posición $x(0)$ con un valor de $t = 0$ hasta un desplazamiento $x = X$ cuando se aplica un voltaje $v_t = V$ con $t = 0$. No existe una solución analítica para estas ecuaciones diferenciales; ya que no son lineales e involucran productos y potencias de las variables x e i y sus derivadas. Es posible resolver este tipo de ecuaciones por medio de técnicas de integración numérica por computadora.

En numerosos casos, la dificultad que se presenta en el caso del movimiento total puede simplificarse y encontrar una solución mediante métodos relativamente sencillos. Por ejemplo, cuando el devanado del dispositivo se conecta a la fuente de voltaje con una resistencia grande, el término iR domina en el lado derecho de la ecuación 3.96 en comparación con el término del voltaje de autoinductancia di/dt y con el término para voltaje por velocidad dx/dt . Es posible suponer que la corriente i es igual a V/R e insertarla directamente a la ecuación 3.95. La misma suposición se efectúa cuando el devanado se maneja a partir de un montaje de circuitos electrónicos de potencia que controlan la corriente al devanado. Al asumir que $i = V/R$, los dos casos pueden resolverse con facilidad.

Caso 1 El primer caso incluye a aquellos dispositivos en donde se domina al movimiento dinámico mediante amortiguaciones en vez de inercia, como en caso de los dispositivos que de manera deliberada presentan una inercia baja o en el caso de los relés que presentan amortiguadores hidráulicos o amortiguadores para disminuir el movimiento. Por ejemplo, bajo tales condiciones, $f_t = 0$, la ecuación diferencial 3.95 se reduce a

$$B \frac{dx}{dt} = f(x) = \frac{1}{2}L' \left(\frac{a}{(a+x)^2} \right) \left(\frac{V}{R} \right)^2 - K(x - l_0) \quad (3.97)$$

donde $f(x)$ es la diferencia entre la fuerza de origen eléctrico y la fuerza del resorte en el dispositivo que se esquematiza en la figura 3.24. La velocidad a cualquier valor de x es $dx/dt = f(x)/B$; de tal manera, el tiempo t para alcanzar $x = X$ está dado mediante la ecuación

$$t = \int_0^X \frac{B}{f(x)} dx \quad (3.98)$$

La integración de la ecuación 3.98 se lleva a cabo tanto de manera analítica como numérica.

Caso 2 En este caso, el movimiento dinámico se gobierna mediante la inercia en vez del amortiguamiento. De nuevo, con $f_t = 0$, la ecuación diferencial 3.95 se reduce a

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = f(x) = \frac{1}{2}L' \left(\frac{a}{(a+x)^2} \right) \left(\frac{V}{R} \right)^2 - K(x - l_0) \quad (3.99)$$

La ecuación 3.99 se formula de la siguiente manera

$$\frac{M}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = f(x) \quad (3.100)$$

y la velocidad $v(x)$ a cualquier valor de x se obtiene mediante la siguiente expresión

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{M} \int_0^x f(x') dx'} \quad (3.101)$$

La integración de la ecuación 3.101 se formula, ya sea de forma analítica o numérica, con el objetivo de determinar $v(x)$ así como el tiempo t necesario para alcanzar cualquier valor de x .

3.9.2 Linealización

Los dispositivos que se caracterizan con ecuaciones diferenciales no lineales, como el caso de las ecuaciones 3.95 y 3.96, entregan respuestas no lineales cuando se les introduce señales de entrada al emplear transductores. Para obtener un comportamiento lineal, en dichos dispositivos se deberán restringir a pequeños desplazamientos las señales eléctricas de entrada casi hasta sus valores más bajos. El desplazamiento de equilibrio se determina ya sea mediante una fmm producida por una corriente del devanado de corriente directa, por un imán permanente que actúa en contra del resorte, o por un par de devanados productores de fmm cuyas fuerzas se cancelan en el punto de equilibrio. El punto de equilibrio deberá ser estable; por su parte, el transductor que siga un pequeño disturbio deberá regresar a la posición de equilibrio.

Al establecer como iguales a la corriente y a la fuerza aplicada en sus valores de equilibrio, I_0 y f_{t0} , respectivamente, el desplazamiento X_0 y el voltaje V_0 de equilibrio se determinan para el sistema que se describió mediante las ecuaciones 3.95 y 3.96 al formular las derivadas del tiempo iguales a cero. De esta forma

$$\frac{1}{2} L' \left(\frac{aI_0^2}{(a+l_0)^2} \right) = K(X_0 - l_0) + f_{t0} \quad (3.102)$$

$$V_0 = I_0 R \quad (3.103)$$

La operación de incremento se describe al expresar cada variable como la suma de sus valores de incremento y de equilibrio; de esta forma, $i = I_0 + i'$, $f_t = f_{t0} + f'$, $v_i = V_0 + v'$, y $x = X_0 + x'$. Entonces, las ecuaciones son lineales al eliminar cualquiera de los productos de los incrementos por ser de segundo orden. Las ecuaciones 3.95 y 3.96 se transforman del siguiente modo

$$\frac{1}{2} \frac{L'(I_0 + i')^2}{(a + X_0 + x')^2} = M \frac{d^2 x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + K(X_0 + x' - l_0) + f_{t0} + f' \quad (3.104)$$

y

$$V_0 + v' = (I_0 + i')R + \frac{L'(X_0 + x')}{a + X_0 + x'} \frac{di'}{dt} + \frac{L'a(I_0 + i')}{(a + X_0 + x')^2} \frac{dx'}{dt} \quad (3.105)$$

Los términos de equilibrio eliminan a los términos de segundo orden y conservan únicamente a los términos incrementales de primer orden que producen un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales en lo que se refiere sólo a las variables incrementales de primer orden como se muestra a continuación:

$$\frac{L'aI_0}{(a + X_0)^2} i' = M \frac{d^2x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + \left[K + \frac{L'aI_0^2}{(a + X_0)^3} \right] x' + f' \quad (3.106)$$

$$v' = i'R + \frac{L'X_0}{a + X_0} \frac{di'}{dt} + \frac{L'aI_0}{(a + X_0)^2} \frac{dx'}{dt} \quad (3.107)$$

Las técnicas habituales pueden aplicarse para obtener la respuesta en el tiempo de este conjunto de ecuaciones diferenciales lineales. Por otra parte, es posible suponer la operación de estado estacionario sinusoidal, y convertir las ecuaciones 3.106 y 3.107 a un conjunto de ecuaciones algebraicas complejas pero lineales y resolverlas en el dominio frecuencial.

3.10 RESUMEN

En los sistemas electromecánicos la energía se acumula en los campos magnéticos y eléctricos. Cuando la energía del campo se ve afectada por los efectos de la configuración de las partes al constituir los límites del campo, se crean fuerzas mecánicas que tienden a mover a los elementos mecánicos de manera que la energía se transmite del campo hacia el sistema mecánico.

En la sección 3.3 se consideran primero a los sistemas magnéticos de excitación única. Al eliminar los elementos de pérdida mecánica y eléctrica del sistema de conversión de energía electromecánica (y al incorporarlos como elementos de pérdida en los sistemas mecánicos y eléctricos externos), el dispositivo de conversión energética puede ser modelado como un sistema conservativo. Entonces su energía se transforma en función de estado, que se determina mediante sus variables de estado λ y x . En la sección 3.4 se derivan expresiones para determinar la fuerza y el par como el negativo de la derivada parcial de la energía con respecto al desplazamiento, mientras la dispersión de flujo λ se mantiene constante.

En la sección 3.5 se introducen variables de estado i y x o θ en la coenergía como función de estado. La fuerza y el par de torsión aparecen como obtenidos mediante la derivada parcial de la coenergía con respecto al desplazamiento, mientras se mantiene constante a la corriente i .

En la sección 3.6 se amplían estos conceptos con el fin de incluir sistemas con devanados múltiples. En la sección 3.7 se realiza un análisis más exhaustivo para considerar a los sistemas con imanes permanentes entre las fuentes del almacenamiento de energía magnética.

Los dispositivos de conversión de energía operan entre los sistemas mecánicos y eléctricos. Su comportamiento se describe mediante ecuaciones diferenciales que incluyen los términos de vinculación entre los sistemas, como se consideró en la sección 3.8. Por lo general, estas ecuaciones no son lineales y se resuelven mediante métodos numéricos, si es necesario. Como se analizó en la sección 3.9, en algunos casos es posible realizar aproximaciones para simplificar las ecuaciones. Por ejemplo, en numerosas ocasiones, los análisis de linealización proporcionan una comprensión útil acerca del diseño del dispositivo así como de su funcionamiento.

Este capítulo se ha enfocado en los principios básicos y se aplica de manera amplia en el proceso de conversión de energía electromecánica, haciendo énfasis en los sistemas de campo

magnético. Básicamente, las máquinas de rotación y los transductores de movimiento lineal trabajan de la misma manera. La parte restante de este texto se dedicará casi en su totalidad a las máquinas de rotación. Este tipo de máquinas generalmente incluye devanados múltiples y también puede incluir a los imanes permanentes. Su desempeño se analiza al aplicar las técnicas y los principios que se consideraron en este capítulo.

3.11 PROBLEMAS

- 3.1** El rotor que se presenta en la figura 3.25 es similar al que se esquematiza en la figura 3.2 (ejemplo 3.1) con excepción de que en este caso el rotor tiene dos bobinas en vez de una.

El rotor es no magnético y se coloca dentro de un campo magnético uniforme de magnitud B_0 . Los costados de la bobina exhiben un radio R y se encuentran espaciados de manera uniforme alrededor de la superficie del rotor. La primera bobina lleva una corriente I_1 y la segunda bobina lleva una corriente I_2 .

Se supone que el rotor tiene 0.30 m de largo, $R = 0.13 \text{ m}$, y $B_0 = 0.85 \text{ T}$, determine el par dirigido hacia θ como función de la posición del rotor α para a) $I_1 = 0 \text{ A}$ e $I_2 = 5 \text{ A}$, b) $I_1 = 5 \text{ A}$ e $I_2 = 0 \text{ A}$, y c) $I_1 = 8 \text{ A}$ e $I_2 = 8 \text{ A}$.

- 3.2** Las corrientes del devanado en el rotor que se considera en el problema 3.1 se manejan como una función del ángulo α del rotor, de manera que

$$I_1 = 8 \sin \alpha \quad \text{e} \quad I_2 = 8 \cos \alpha \quad \text{A}$$

Elabore una expresión matemática para el par del rotor como función de la posición α del rotor.

- 3.3** Calcule la energía magnética acumulada dentro del circuito magnético que se muestra en el ejemplo 1.2.

- 3.4** Un inductor presenta una inductancia que se determina por medio de métodos experimentales y que es de la siguiente forma

$$L = \frac{2L_0}{1 + x/x_0}$$

Campo magnético uniforme, $B_0\hat{y}$

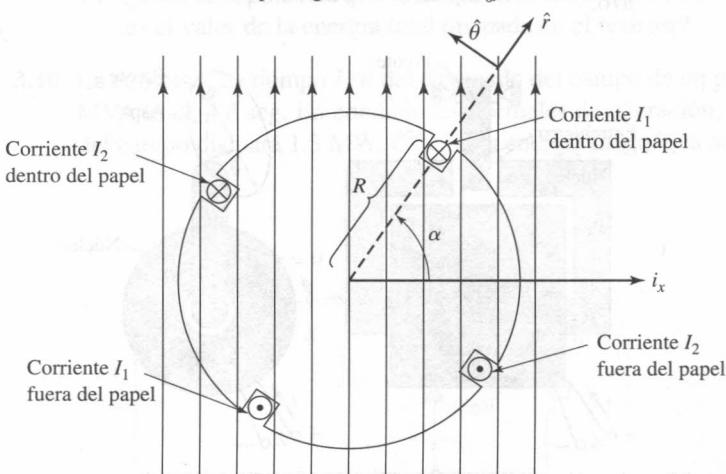


Figura 3.25

Rotor con dos bobinas esquematizado para el problema 3.1.

donde $L_0 = 30 \text{ mH}$, $x_0 = 0.87 \text{ mm}$ y x representa el desplazamiento del elemento móvil. La resistencia del devanado se mide y se determina igual a $110 \text{ m}\Omega$.

- Se mantiene constante al desplazamiento x a 0.90 mm, y se incrementa la corriente de 0 a 6.0 A. Determine la energía magnética acumulada en el inductor.
- La corriente se mantiene constante a 6.0 A, y el desplazamiento se incrementa a 1.80 mm. Determine el cambio correspondiente en la energía magnética acumulada.

3.5 Repita el problema 3.4, y asuma que el inductor se conecta a la fuente de voltaje que incrementa el mismo de 0 a 0.4 V (parte [a]) para después mantenerse constante a 0.4 V (parte [b]). Para ambos cálculos, suponga que es posible ignorar todos los fenómenos eléctricos transitorios.

3.6 El inductor del problema 3.4 se maneja mediante una fuente de corriente sinusoidal de la siguiente forma

$$i(t) = I_0 \operatorname{sen} \omega t$$

donde $I_0 = 5.5 \text{ A}$ y $\omega = 100\pi (50 \text{ Hz})$. Considere un desplazamiento fijo a $x = x_0$, y calcule *a)* el tiempo promedio de energía magnética acumulada (W_{fld}) en el inductor y *b)* el tiempo promedio de dissipación de potencia en la resistencia del devanado.



3.7 En la figura 3.26 se esquematiza un actuador con un vástago de rotación. Es posible asumir que la permeabilidad tanto del núcleo como del aspa son infinitas ($\mu \rightarrow \infty$). La longitud total del entrehierro es de $2g$ y la forma del aspa es de tal forma que el área efectiva del entrehierro se considera de la siguiente forma

$$A_g = A_0 \left(1 - \left(\frac{4\theta}{\pi} \right)^2 \right)$$

(válido únicamente dentro del siguiente rango $|\theta| \leq \pi/6$). Las dimensiones del actuador son $g = 0.8 \text{ mm}$, $A_0 = 6.0 \text{ mm}^2$ y $N = 650$ vueltas.

- Asuma que la bobina lleva una corriente i , elabore una ecuación que determine la energía magnética acumulada en el actuador como función del ángulo θ para $|\theta| \leq \pi/6$.

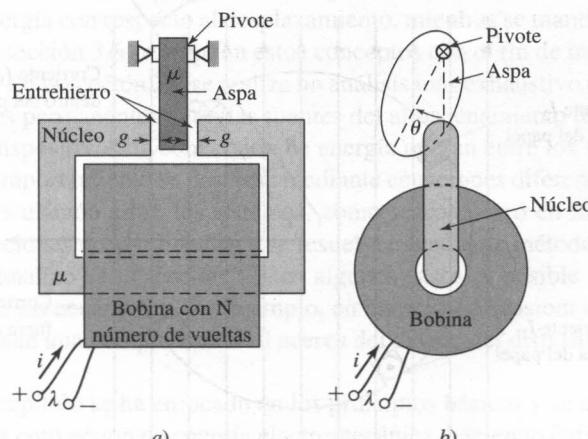
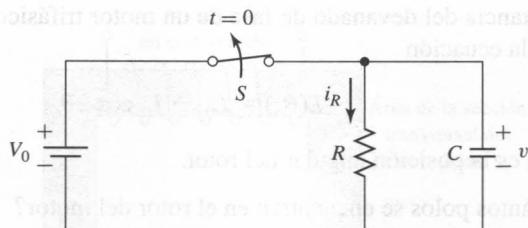


Figura 3.26

Brazo de lectura con aspa de rotación esquematizado para el ejemplo 3.7. *a)* Vista lateral. *b)* Vista del extremo.

**Figura 3.27**

Círculo RC esquematisado para el problema 3.8.

- b) Calcule la inductancia correspondiente $L(\theta)$. Utilice MATLAB para graficar este valor de la inductancia como una función de θ .

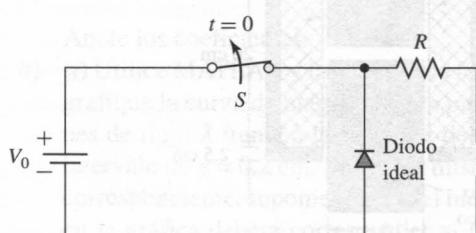
3.8 Un circuito RC se conecta a una batería, como se ilustra en la figura 3.27. El interruptor S se encuentra cerrado al inicio y se abre al tiempo $t = 0$.

- Determine el voltaje del capacitor $v_C(t)$ para $t \geq 0$.
- ¿Cuáles son los valores inicial y final ($t = \infty$) de la energía magnética acumulada en el capacitor? (Indicación: $W_{\text{fd}} = \frac{1}{2}q^2/C$, donde $q = CV_0$). ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor como una función del tiempo?
- ¿Cuál es la potencia que se disipa en el resistor como una función del tiempo? ¿Cuál es el valor de la energía total disipada en el resistor?

3.9 Se conecta un circuito RL a una batería, como se ilustra en la figura 3.28. El interruptor S inicialmente se encuentra cerrado y se abre a un tiempo $t = 0$.

- Determine la corriente del inductor $i_L(t)$ para $t \geq 0$. (Indicación: Observe que mientras el interruptor se encuentra cerrado, el diodo se encuentra polarizado de manera inversa y se asume que es un circuito abierto. Inmediatamente después se abre el interruptor, el diodo adquiere una polarización negativa y se considera que es un corto circuito.)
- ¿Cuáles son los valores iniciales y finales ($t = \infty$) de la energía acumulada en el inductor? ¿Cuál es la energía almacenada como una función del tiempo?
- ¿Cuál es la potencia que se disipa en el resistor como una función del tiempo? ¿Cuál es el valor de la energía total disipada en el resistor?

3.10 La constante de tiempo L/R del devanado del campo de un generador sincrónico de 500 MVA es de 4.8 seg. En condiciones normales de operación, se conoce que el devanado del campo disipará 1.3 MW. Calcule la energía magnética acumulada correspondiente.

**Figura 3.28**

Círculo RL ilustrado para el problema 3.9.

- 3.11** La inductancia del devanado de fase de un motor trifásico de polos salientes se mide a partir de la ecuación

$$L(\theta_m) = L_0 + L_2 \cos 2\theta_m$$

donde θ_m es la posición angular del rotor.

- ¿Cuántos polos se encuentran en el rotor del motor?
- Al suponer que todas las demás corrientes del devanado son cero y que esta fase se excita por medio de una corriente constante I_0 , determine el par de torsión $T_{fd}(\theta)$ que actúa sobre el rotor.



- 3.12** Se utilizan varios actuadores solenoides acorazados cilíndricos con la estructura que se muestra en la figura 3.29 para la desconexión de interruptores automáticos, la operación de válvulas y otras aplicaciones en donde se aplica una fuerza relativamente grande a un miembro que se mueve en cortas distancias. Cuando la corriente de la bobina es cero, el émbolo se detiene de manera que el intervalo g sea de 2.25 cm. Cuando la bobina se carga de energía mediante una corriente directa de magnitud suficiente, el émbolo se eleva hasta que alcanza otro alto establecido para que g sea de 0.2 cm. El émbolo se encuentra dispuesto de tal forma que se puede mover libremente en dirección vertical. Se asume que el entrehierro radial entre la envoltura y el émbolo es uniforme y que su longitud es de 0.05 cm.

Para este problema ignore la dispersión magnética y el efecto marginal en los entrehierros. La bobina de excitación posee 1 300 vueltas y lleva una corriente constante de 2.3 A. Suponga que la fmm en el hierro puede dejar de considerarse y por medio de MATLAB realice lo siguiente:

- Grafique la densidad de flujo en el intervalo variable que hay entre la estructura y el émbolo para el alcance del movimiento del pistón.
 - Grafique los valores correspondientes de la energía total que se acumuló en el campo magnético en μJ , y
 - Grafique los valores correspondientes de la inductancia de la bobina en μH .
- 3.13** Considere el émbolo tubular que aparece en la figura 3.29. Suponga que de manera inicial el émbolo se encuentra completamente abierto ($g = 2.25$ cm) y que se utiliza una batería para abastecer una corriente de 2.5 A al devanado.

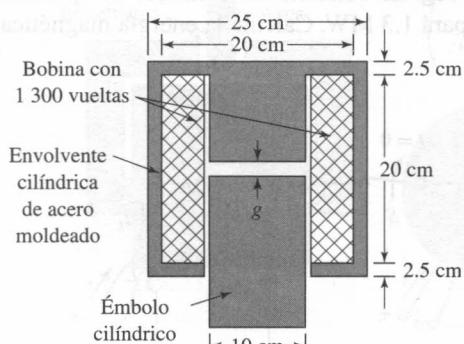
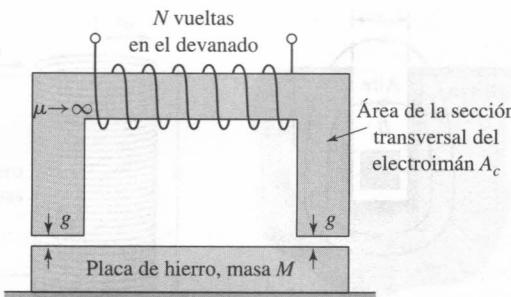


Figura 3.29

Émbolo tubular esquematizado para el problema 3.12

**Figura 3.30**

Electroimán que eleva una placa de hierro (problema 3.14).

- a) Si el émbolo se contrae para moverse de forma lenta (por ejemplo, lenta en comparación con la constante de tiempo eléctrica del actuador), al reducir el intervalo g de 2.25 a 0.20 cm, ¿cuánto trabajo mecánico en joules se suministrará al émbolo?
 b) Para las condiciones citadas en el inciso anterior, ¿cuánta energía abastecerá la batería? (en exceso de la potencia que se disipó en la bobina).

3.14 Como se ilustró en la figura 3.30, se empleará un electroimán con N número de vueltas para levantar una placa de hierro de masa M . La superficie presenta tal rugosidad que cuando el hierro entra en contacto con el electroimán, existe un entrehierro mínimo de $g_{\min} = 0.18$ mm en cada columna. El área de la sección transversal del electroimán es de $A_c = 32$ cm y la resistencia de la bobina es de 2.8Ω . Calcule el voltaje de bobina mínimo que deberá aplicarse para levantar la placa con masa de 95 kg en contra de la fuerza de gravedad. Ignore la reluctancia del hierro.

3.15 A continuación se presentan algunos datos de la curva de magnetización de la sección de hierro del circuito magnético del émbolo tubular del problema 3.12:



Flujo (mWb)	5.12	8.42	9.95	10.6	10.9	11.1	11.3	11.4	11.5	11.6
mmf (A · vueltas)	68	135	203	271	338	406	474	542	609	677

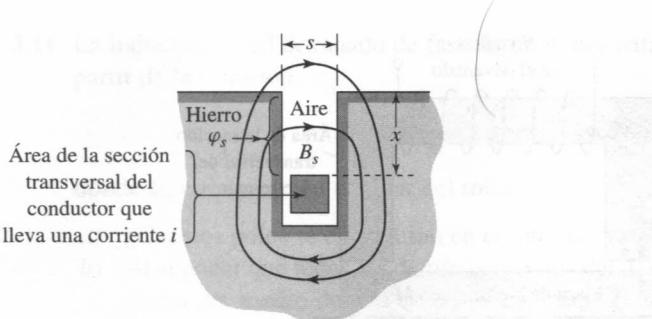
- a) Utilice la función de *polyfit* de MATLAB para obtener un ajuste de tercer orden de la reluctancia y el flujo total contra la fmm de las secciones de hierro del circuito magnético. Sus ajustes serán de la siguiente forma:

$$\mathcal{R}_{\text{hierro}} = a_1 \mathcal{F}_{\text{hierro}}^3 + a_2 \mathcal{F}_{\text{hierro}}^2 + a_3 \mathcal{F}_{\text{hierro}} + a_4$$

$$\phi_{\text{hierro}} = b_1 \mathcal{F}_{\text{hierro}}^3 + b_2 \mathcal{F}_{\text{hierro}}^2 + b_3 \mathcal{F}_{\text{hierro}} + b_4$$

Anote los coeficientes.

- b) (i) Utilice MATLAB y las diferentes formas funcionales encontradas en el inciso a), grafique la curva de magnetización para el circuito magnético completo (dispersiones de flujo λ frente a la corriente del devanado (i) para una longitud variable del intervalo de $g = 0.2$ cm. Sobre los mismos ejes, grafique la curva de magnetización correspondiente, suponiendo que el hierro es de permeabilidad infinita. La corriente en la gráfica deberá corresponder al flujo en el circuito magnético de 600 mWb.

**Figura 3.31**

Conductor en una ranura (problema 3.17).

(ii) Calcule la energía y coenergía del campo magnético para cada uno de estos casos que corresponden a la corriente del devanado de 2.0 A.

- c) Repita el inciso b) para una longitud de intervalo variable de $g = 2.25$ cm. En la parte (ii), calcule la energía y coenergía correspondientes a la corriente del devanado de 20 A.

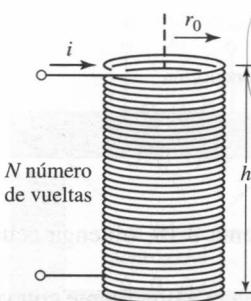
3.16 Se fabrica un inductor con una bobina de 525 vueltas sobre un núcleo con área de sección transversal de 14 cm^2 y un intervalo de 0.16 mm. La bobina se conecta directamente a una fuente de voltaje de 120 V 60 Hz. Ignore la resistencia de la bobina y la inductancia de dispersión. Suponga que la reluctancia de la bobina es insignificante y calcule la fuerza con el promedio de tiempo que actúa sobre el núcleo y que tiende a cerrar el entrehierro. ¿Cómo variará esta fuerza si la longitud del entrehierro es doble?

3.17 La figura 3.31 esquematiza una descripción general del flujo de dispersión de la ranura que produce la corriente i en un conductor rectangular empotrado en la ranura rectangular en el hierro. Suponga que la reluctancia del hierro es insignificante y que el flujo de dispersión de la ranura atraviesa la ranura en la zona que hay entre la parte superior del conductor y la parte superior de la ranura.

- Obtenga una ecuación para la densidad de flujo B_s en la zona entre la parte superior del conductor y la parte superior de la ranura.
- Obtenga una expresión para la dispersión φ_s que se deposita a través de la ranura sobre el conductor, en términos de la altura x de la ranura sobre el conductor, el ancho de la ranura s y la longitud del empotramiento l perpendicular al papel.
- Obtenga una ecuación para la fuerza f que crea este campo magnético sobre un conductor de longitud l . ¿En qué dirección actúa la fuerza sobre el conductor?
- Cuando la corriente del conductor alcanza los 850 A, calcule la fuerza por metro sobre un conductor en una ranura de 2.5 cm de ancho.

3.18 En la figura 3.32 se presenta un esquema de un solenoide largo y delgado de radio r_0 y de altura h . El campo magnético dentro de un solenoide como el que se describe en este problema se dirige a favor de los ejes, esencialmente es uniforme e igual a $H = Ni/h$. El campo magnético fuera del solenoide puede ser insignificante. Calcule la presión radial en newtons por metro cuadrado que actúa sobre los costados del solenoide para una corriente de bobina constante de $i = I_0$.

3.19 Un sistema electromecánico en el que el almacenamiento de energía eléctrica se realiza dentro de los campos eléctricos, se analiza mediante técnicas análogas a las que se efectuaron en este capítulo para los sistemas de campo magnético. Considere un sistema en

**Figura 3.32**

Bobina del solenoide
(problema 3.18).

el que sea posible separar el mecanismo de pérdida por medios matemáticos, del mecanismo de almacenamiento de energía en los campos eléctricos. Entonces, el sistema se representa como se muestra en la figura 3.33. Para una terminal eléctrica simple, es posible aplicar la ecuación 3.11, donde

$$dW_{\text{eléc}} = vi \, dt = v \, dq$$

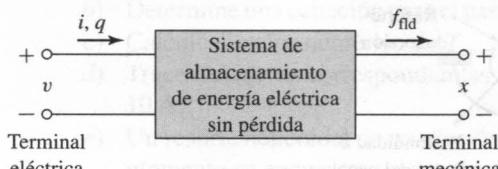
donde v es el voltaje en la terminal eléctrica y q es la carga neta asociada con el almacenamiento de energía eléctrica. Por lo tanto, por analogía con la ecuación 3.16,

$$dW_{\text{fld}} = v \, dq - f_{\text{fld}} \, dx$$

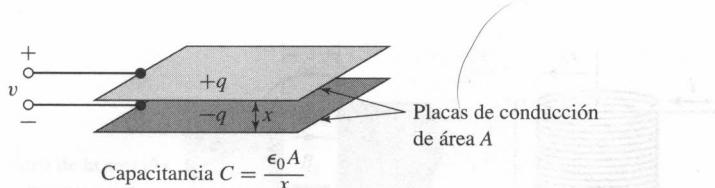
- Obtenga una expresión para la energía eléctrica almacenada $W_{\text{fld}}(q, x)$ que es parecida a la energía magnética almacenada que se muestra en la ecuación 3.18.
 - Obtenga una ecuación para la fuerza de origen eléctrico f_{fld} parecida a la de la ecuación 3.26. Establezca de forma clara qué variable deberá mantenerse constante cuando se toma a la derivada.
 - Por analogía a la deducción que se realizó en las ecuaciones 3.34 a 3.41, obtenga una ecuación para la coenergía $W'_{\text{fld}}(v, x)$ y la fuerza correspondiente de origen eléctrico.
- 3.20** Se fabrica un capacitor (figura 3.34) con dos placas de área A separadas por aire de un espacio x . El voltaje terminal es v , y la carga sobre las placas es q . La capacitancia C , que se define como la proporción de la carga con respecto al voltaje, es

$$C = \frac{q}{v} = \frac{\epsilon_0 A}{x}$$

donde ϵ_0 es la constante dieléctrica del espacio libre (en unidades SI $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$).

**Figura 3.33**

Sistema de almacenamiento de energía eléctrica sin pérdida.

**Figura 3.34**

Placas de un capacitor (problema 3.20).

- Al utilizar los resultados del problema 3.19, obtenga ecuaciones para la energía $W_{\text{fld}}(q, x)$ y la coenergía $W'_{\text{fld}}(v, x)$.
- Las terminales del capacitor se conectan a una fuente con voltaje constante V_0 . Obtenga una ecuación para la fuerza que se requiere para mantener separadas ambas placas por un espacio constante de $x = \delta$.

- 3.21** La figura 3.35 muestra el esquema de un *voltímetro* (*o volímetro*) electrostático, un sistema capacitivo que consiste en un electrodo fijo y un electrodo móvil. El electrodo móvil se conecta a un vástago que gira sobre un pivote de manera que el entrehierro entre los dos electrodos fijo permanece mientras que el vástago gira. La capacitancia de este sistema se obtiene mediante la siguiente ecuación

$$C(\theta) = \frac{\epsilon_0 R d (\alpha - |\theta|)}{g} \quad (|\theta| \leq \alpha)$$

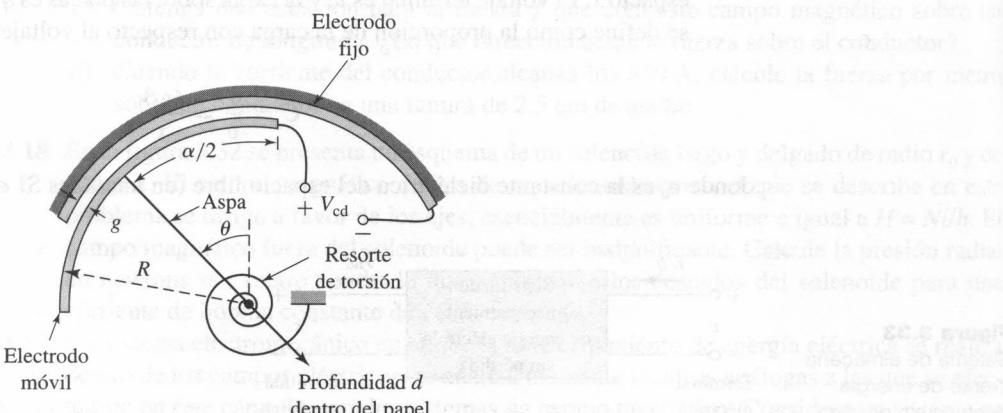
Se conecta un resorte de torsión al vástago móvil que produce un par

$$T_{\text{resorte}} = -K(\theta - \theta_0)$$

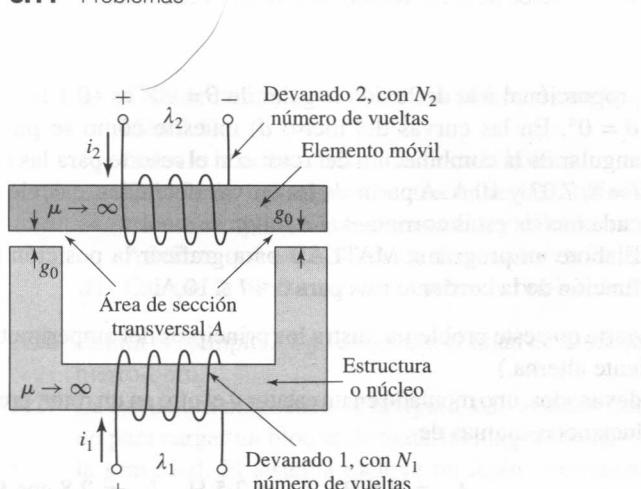
- Para $0 \leq \theta \leq \alpha$, utilice los resultados del problema 3.19, obtenga una expresión para el par electromagnético T_{fld} en términos del voltaje que se aplica V_{cd} .
- Determine una ecuación para la posición angular del vástago móvil como función del voltaje aplicado V_{cd} .
- Para un sistema con las siguientes características

$$R = 12 \text{ cm}, \quad d = 4 \text{ cm}, \quad g = 0.2 \text{ mm}$$

$$\alpha = \pi/3 \text{ rad}, \quad \theta_0 = 0 \text{ rad}, \quad K = 3.65 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

**Figura 3.35**

Esquema de un voltímetro electrostático (problema 3.21).

**Figura 3.36**

Círculo magnético de dos devanados esquematizado para el problema 3.22.

Grafique la posición del vástago en grados como función del voltaje que se aplica para $0 \leq V_{cd} \leq 1\,500$ V.

- 3.22** El circuito magnético con dos devanados que se muestra en la figura 3.36 tiene un devanado en el núcleo principal (o estructura) y un devanado en el elemento móvil. El elemento móvil se restringe al movimiento de manera que las longitudes de ambos entrehiertos permanecen constantes.

- Determine las autoinductancias de los devanados 1 y 2 en términos de las dimensiones del núcleo y del número de vueltas.
- Determine la inductancia mutua que existe entre los dos devanados.
- Calcule el valor de la coenergía W'_{fd} (i_1, i_2).
- Determine una ecuación para la fuerza que actúa sobre el elemento móvil como función de las corrientes del devanado.

- 3.23** Dos bobinas, una montada sobre el estator y la otra sobre el rotor, presentan autoinductancias e inductancias mutuas de

$$L_{11} = 3.5 \text{ mH} \quad L_{22} = 1.8 \text{ mH} \quad L_{12} = 2.1 \cos \theta \text{ mH}$$

donde θ es el ángulo entre los ejes de las bobinas. Las bobinas se conectan en serie y llevan una corriente de

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t$$

- Obtenga una ecuación para el par instantáneo sobre el rotor como una función de la posición angular θ .
- Determine una ecuación para el par con promedio de tiempo T_{prom} como función de θ .
- Calcule el valor numérico de T_{prom} para $I = 10$ A y $\theta = 90^\circ$.
- Trace las curvas correspondientes a T_{prom} frente a θ para las corrientes $I = 5, 7.07$ y 10 A.
- Un resorte helicoidal de restricción que tiende a mantener el rotor a $\theta = 90^\circ$, en este momento se encuentra unido al rotor. El par de torsión de restricción del resorte es

proporcional a la deflexión angular de $\theta = 90^\circ$ es $-0.1 \text{ N} \cdot \text{m}$ cuando el rotor gira a $\theta = 0^\circ$. En las curvas del inciso d) muestre cómo se puede calcular la posición angular de la combinación del rotor con el resorte para las corrientes de las bobinas $I = 5, 7.07$ y 10 A . A partir de las curvas obtenidas, calcule el ángulo del rotor para cada una de estas corrientes.

- f) Elabore un programa MATLAB para graficar la posición angular del rotor como función de la corriente rms para $0 \leq I \leq 10 \text{ A}$.

(Advierta que este problema ilustra los principios del amperímetro tipo dinamómetro de corriente alterna.)

- 3.24** Dos devanados, uno montado en un estator y el otro en un rotor, presentan autoinductancias e inductancias mutuas de

$$L_{11} = 4.5 \text{ H} \quad L_{22} = 2.5 \text{ H} \quad L_{12} = 2.8 \cos \theta \text{ H}$$

donde θ es el ángulo entre los ejes de los devanados. Las resistencias de los devanados son insignificantes. El devanado 2 se encuentra en corto circuito, y la corriente en el devanado 1 como función del tiempo es $i_1 = 10 \operatorname{sen} \omega t \text{ A}$.

- Obtenga una expresión para obtener el valor numérico en newton metros del par instantáneo en el rotor en términos del ángulo θ .
- Calcule el par con promedio de tiempo en newton metros cuando $\theta = 45^\circ$.
- Si el rotor se puede mover, ¿girará de forma continua o tenderá a detenerse? Si la respuesta es la segunda, ¿a qué valor de θ_0 ?

- 3.25** Se fabrica un altavoz con un núcleo magnético de permeabilidad infinita y de simetría circular, similar al que se muestra en la figura 3.37a y b). La longitud del entrehierro g es mucho menor que el radio r_0 del núcleo central. La bobina de audio se restringe para moverse únicamente en la dirección x y se fija al cono de la bocina, que no aparece en la figura. Asimismo, se produce un campo magnético radial constante en el entrehierro mediante una corriente directa en la bobina 1, $i_1 = I_1$. Se aplica una señal en frecuencia de audio $i_2 = I_2 \cos \omega t$ a la bobina audio. Suponga que la bobina de audio presenta un espesor insignificante y se compone de N_2 número de vueltas distribuidas de manera uniforme sobre su altura h . También suponga que su desplazamiento es tal que permanece en el entrehierro ($0 \leq x \leq l - h$).

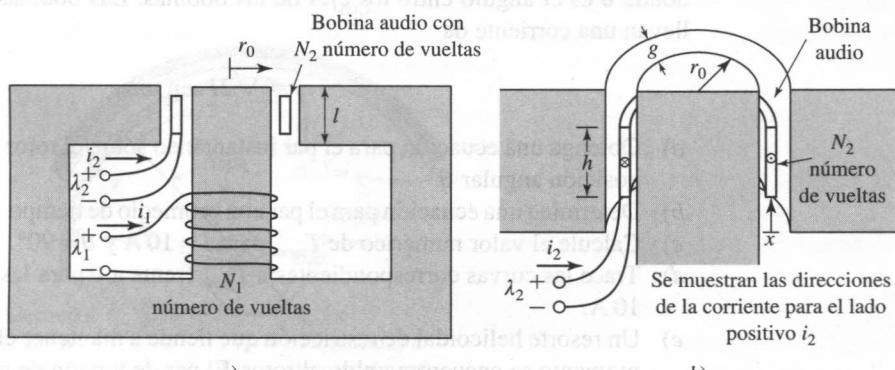


Figura 3.37

Altavoz para el problema 3.25.

- a) Calcule la fuerza en la bobina audio, al emplear la ley de fuerza de Lorentz (ecuación 3.1).
- b) Calcule la autoinductancia de cada bobina.
- c) Calcule la inductancia mutua entre las bobinas. (Indicación: Suponga que la corriente se aplica a la bobina audio, y calcule los flujos de dispersión de la bobina 1. Advierta que estos flujos de dispersión varían con el desplazamiento x).
- d) Calcule la fuerza que actúa sobre la bobina de audio a partir de la coenergía W_{fd} .
- 3.26** Repita el ejemplo 3.8 y reemplace el imán de samario-cobalto por un imán de neodimio-hierro-boro.
- 3.27** La estructura magnética de la figura 3.38 es una vista esquemática de un sistema diseñado para cargar un bloque de material magnético ($\mu \rightarrow \infty$) de masa M contra la fuerza de la gravedad. El sistema incluye un imán permanente y un devanado. En condiciones normales, la fuerza se suministra únicamente mediante un imán permanente. La función del devanado es contrarrestar el campo que se produce mediante un imán, de manera que la masa pueda eliminarse del dispositivo. El sistema está diseñado para que los entrehierros en cada costado de la masa permanezcan constantes a una longitud de $g_0/2$.
 Suponga que el imán permanente se representa mediante una expresión lineal de la siguiente forma
- $$B_m = \mu_R(H_m - H_c)$$
- y que la dirección del devanado está dispuesta de tal forma que la corriente del devanado positivo reduce el flujo del entrehierro producido por el imán permanente. Ignore los efectos magnéticos marginales.
- a) Suponga que la corriente del devanado equivale a cero. (i) Determine la fuerza f_{fd} que actúa sobre la masa en la dirección x debida únicamente al imán permanente como una función de x ($0 \leq x \leq h$). (ii) Determine la masa máxima $M_{\text{máx}}$ que puede soportarse en contra de la gravedad para $0 \leq x \leq h$.
- b) Para $M = M_{\text{máx}}/2$, determine la corriente mínima que se requiere para asegurar que la masa caerá fuera del sistema cuando se aplica la corriente.

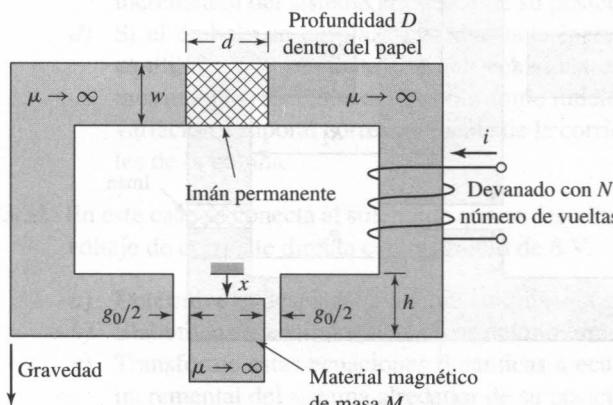
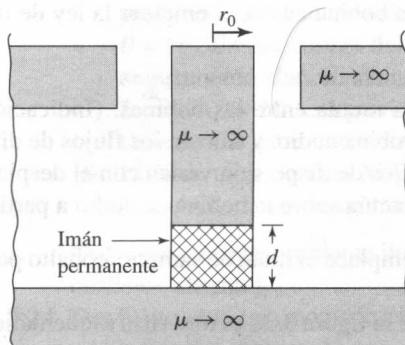


Figura 3.38
Sistema de soporte magnético esquematisado para el problema 3.27.

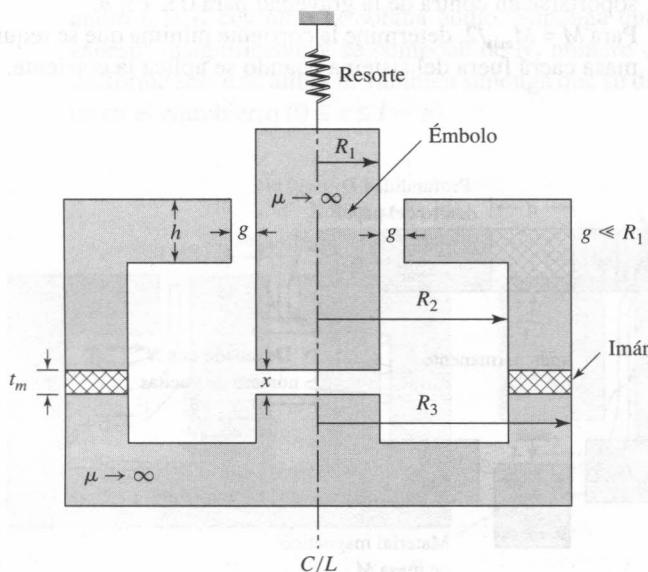
**Figura 3.39**

Núcleo central del altavoz que se esquematiza en la figura 3.37 con el devanado 1 reemplazado por un imán permanente (problema 3.28).

- 3.28** El devanado 1 en el altavoz que se describe en el problema 3.25 (figura 3.37) se reemplaza por un imán permanente como se ilustra en la figura 3.39. El imán se representa por medio de una ecuación lineal $B_m = \mu_R (H_m - H_c)$.

- Al asumir que la corriente de la bobina de audio equivale a cero, ($i_2 = 0$), calcule la densidad de flujo magnético en el entrehierro.
- Calcule la dispersión de flujo de la bobina de audio debido al imán permanente como una función del desplazamiento x .
- Calcule el valor de la coenergía $W'_{fld}(i_2, x)$ al suponer que la corriente de la bobina de audio es suficientemente pequeña, de manera que el componente de W'_{fld} , debido a la autoinductancia de la bobina audio, pueda ignorarse.
- Calcule la fuerza en la bobina de audio.

- 3.29** La figura 3.40 muestra un sistema circular simétrico con un émbolo móvil (restringido a moverse únicamente en dirección vertical) soportado por un resorte con la constante del resorte $K = 5.28 \text{ N/m}$. El sistema se excita mediante un imán permanente de samario-

**Figura 3.40**

Sistema de imán permanente ilustrado para el ejemplo 3.29.

cobalto en forma de arandela con un radio exterior R_3 , un radio interior R_2 y un espesor t_m . Las dimensiones del sistema son las siguientes:

$$R_1 = 2.1 \text{ cm}, \quad R_2 = 4 \text{ cm}, \quad R_3 = 4.5 \text{ cm}$$

$$h = 1 \text{ cm}, \quad g = 1 \text{ mm}, \quad t_m = 3 \text{ mm}$$

Se observa que la posición de equilibrio del pistón es de $x = 1.0 \text{ mm}$.

- Determine la densidad de flujo magnético B_g en el intervalo fijo y B_x en el intervalo variable.
- Calcule la fuerza magnética dirigida a x atrayendo el émbolo.
- La fuerza del émbolo es de la siguiente forma: $f_{\text{resorte}} = K(X_0 - x)$. Determine X_0 .

3.30 El émbolo de un solenoide se conecta al resorte. La fuerza del resorte se suministra mediante $f = K_0(0.9a - x)$ donde x representa la longitud del entrehierro. La inductancia del solenoide es de la siguiente forma $L = L_0(1 - x/a)$, y su resistencia de devanado es R .

De manera inicial el émbolo es estacionario en una posición $x = 0.9a$ cuando se aplica un voltaje de corriente directa de magnitud V_0 al solenoide.

- Determine una ecuación para la fuerza como una función del tiempo que se requiere para mantener al émbolo en la posición $a/2$.
- Si se suelta al émbolo y se le permite llegar al equilibrio, determine esta posición de equilibrio X_0 . Es posible asumir que esta posición cae dentro de los siguientes límites $0 \leq X_0 \leq a$.

3.31 Considere el sistema solenoide que se describe en el problema 3.30. Suponga los siguientes parámetros en sus valores:

$$L_0 = 4.0 \text{ mH} \quad a = 2.2 \text{ cm} \quad R = 1.5 \Omega \quad K_0 = 3.5 \text{ N/cm}$$

El émbolo tiene una masa de $M = 0.2 \text{ kg}$. Suponga que la bobina se conecta a una fuente de corriente directa de magnitud 4 A. Ignore los efectos de la gravedad.

- Determine el desplazamiento de equilibrio X_0 .
- Elabore las ecuaciones dinámicas del movimiento del sistema.
- Transforme estas ecuaciones dinámicas a ecuaciones lineales para el movimiento incremental del sistema alrededor de su posición de equilibrio.
- Si el émbolo se desplaza una distancia incremental ϵ a partir de su posición de equilibrio X_0 y se suelta con una velocidad cero al tiempo $t = 0$, determine (i) el movimiento resultante del émbolo como función del tiempo, y (ii) el componente de variación temporal correspondiente de la corriente inducida a través de las terminales de la bobina.

3.32 En este caso se conecta al solenoide que se describe en el problema 3.31 a una fuente de voltaje de corriente directa con magnitud de 6 V.

- Determine el desplazamiento de equilibrio X_0 .
- Elabore las ecuaciones dinámicas del movimiento del sistema.
- Transforme estas ecuaciones dinámicas a ecuaciones lineales para el movimiento incremental del sistema alrededor de su posición de equilibrio.

3.33 Considere el rotor con una bobina que se describe en el ejemplo 3.1. Asuma que el devanado del rotor lleva una corriente constante de $I = 8 \text{ A}$ y que el rotor presenta un momento de inercia $J = 0.0125 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- Determine la posición de equilibrio del rotor. ¿Es estable?
- Elabore las ecuaciones dinámicas para el sistema.
- Determine la frecuencia natural en hertz para el movimiento incremental del rotor alrededor de su posición de equilibrio.

3.34 Considere un imán solenoide similar al que se describe en el ejemplo 3.10 (figura 3.24) con excepción de que la longitud del émbolo cilíndrico se reduce a $a + h$. Realice la deducción de las ecuaciones dinámicas para calcular el movimiento del sistema.