Unidad 2: Lógica de Predicados

1. Introducción

Con la lógica proposicional pudimos formalizar y demostrar la validez de algunos razonamientos, sin embargo su poder expresivo no es suficiente para demostrar algunos razonamientos simples.

Veamos el siguiente razonamiento:

"Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal."

En la lógica proposicional formalizamos este razonamiento como:
p : "Sócrates es un hombre."
q : "Todos los hombres son mortales."
r : "Sócrates es mortal."

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

La validez del razonamiento anterior depende de la relación entre partes de las premisas y la forma de estas. Necesitamos poder analizar la estructura interna de las proposiciones.

Intuitivamente la estructura del razonamiento es de la forma:

Todos los **As** son **B**.
C es un **A**.
$\therefore$ **C** es un **B**

En esta unidad veremos, entre otras cosas, la naturaleza de expresiones de la forma "Todos los **As** son **B**".

Podremos razonar sobre una clase más amplia de expresiones booleanas extendiendo la lógica proposicional con:

- Predicados.
- Los cuantificadores universal y existencial.
- Reglas para cuantificadores.

A esta nueva lógica se la llama lógica de predicados o lógica de primer orden.

2. Lógica de Predicados

Las siguientes proposiciones tienen algo en común:

"Nico es albañil."

"Bruno es albañil."

"Guido es albañil."

Las tres afirman que cierto individuo es albañil.

Definiremos la siguiente función: $a(x)$ ="x es albañil". Sustituyendo la variable por nombres obtenemos proposiciones. Por ejemplo, a(Nico), a(Bruno) y a(Guido) son las proposiciones enunciadas anteriormente.

Definición. Un predicado es una función f que devuelve un valor 1 (V) o 0 (F) (escribimos $f : A \rightarrow \{1, 0\}$, donde A representa a cualquier conjunto).

Ejemplo.

- $f(x) = x > 5$
- $g(x) = \text{div } x\ 2 \equiv 0$
- $h(x, y) =$ "x es múltiplo de y"

- $m(x) =$ " x es mortal"
- $h(x) =$ "x es un hombre"
Observamos que $f(6)$, $f(8)$ son proposiciones verdaderas, mientras que $f(3)$ y $f(2)$ son proposiciones falsas.

Un predicado puede depender de más de una variable, como el predicado h.

Podríamos utilizar el predicado m para representar las proposiciones: "Pepe es mortal" o "Catalina es mortal". Estas se representarían como m(Pepe) o m(Catalina).

Pero si quisiéramos represenar la proposición "todos los hombres son mortales" necesitamos cuantificar la variable x con el cuantificador universal ($\forall$), el cual se lee "para todo".

En el ejemplo, lo usamos así:

$$\forall\, x \,.\, h(x) \rightarrow m(x)$$

Definición. El cuantificador universal se denota con $\forall$, y antepuesto a una variable se lee: "para todo x", o "para cada x", o "para cualquier x".

Generalmente la variable x pertenece a un conjunto universo $\mathbb{U}$. Por ejemplo x puede ser un número, una persona, etc.

En lugar de escribir $x \in \mathbb{U}$ dentro de la proposición, definimos aparte el universo.

Ejemplo. En los siguientes ejemplos veremos cómo formalizar diferentes proposiciones mediante el uso del cuantificador universal.

- "Para todo número real x, si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$"

  Suponemos que el universo es el conjunto de los números reales.

  Los predicados involucrados son:

  $p(x) = x > 0$

  $t(x) = x^2 > 0$

  Finalmente la propocisión se puede formalizar como:

  $$\forall\, x \,.\, p(x) \rightarrow t(x).$$

- "Cualquier nuḿero real positivo no es par."

  Suponemos que el universo es el conjunto de los números reales. ($\mathbb{U} = \mathbb{R}$)

  A los predicados anteriormente definidos, agregamos:

  $par(x) =$ "x es par"

  Formalización:

  $$\forall\, x \,.\, p(x) \rightarrow \neg par(x).$$

- "El cuadrado de un número entero es mayor a 2 o el número es par."

  Suponemos: $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$

  $c(x) = x^2 > 2$

  Formalización:

  $$\forall\, x \,.\, c(x) \vee par(x).$$

- "No todos los números pares son positivos."

  Suponemos $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$

  Formalización:

  $$\neg(\forall\, x \,.\, par(x) \rightarrow p(x)).$$

Observación. Notar que la formalización de este tipo de proposiciones tiene 3 partes:

1. Definición de universo (si lo hubiera).
2. Definición de predicados.
3. Traducción de la expresión.

Ejercicio. Formalizar las siguientes expresiones:

1. Todos los números pares son múltiplos de 2.

2. Todas las personas pueden cambiar el mundo.
3. Cualquier ser vivo que come carne es carnívoro.
4. No todas las aves pueden volar.
5. Los números primos no son divisibles por 10.

Ejemplo de razonamiento:
Ahora podemos formalizar el razonamiento introductorio.
Usaremos los predicados:
$h(x)$ = "x es un hombre"
$m(x)$ = "x es mortal"
Traducimos el razonamiento:

$$\begin{array}{l} \forall\, x\,.\, h(x) \rightarrow m(x) \\ h(\text{Sócrates}) \\ \hline \therefore\, m(\text{Sócrates}) \end{array}$$

Más adelante, veremos reglas que nos permitirán determinar la validez o invalidez de razonamientos con cuantificadores.
¿Es posible formalizar la siguiente proposición?

"Algún hombre es técnico en inteligencia artificial."

En primer lugar definimos el predicado $t(x)$ = "x es técnico en inteligencia artificial".
Luego, necesitamos cuantificar la variable x con el cuantificador existencial ($\exists$), el cual se lee "Existe".
En el ejemplo, lo usamos así:

$$\exists\, x . h(x) \rightarrow t(x)$$

Definición. El cuantificador existencial se denota con $\exists$, y antepuesto a una variable se lee: "existe x", o "para algún x", o "para al menos un x".

Ejemplo. En los siguientes ejemplos veremos cómo formalizar diferentes proposiciones mediante el uso del cuantificador existencial.

- "Existe un número real par distinto de dos."

  Suponemos $\mathbb{U} = \mathbb{R}$.

  $par(x)$ = "x es par"

  $q(x) = x \neq 2$

  Formalización:

  $$\exists\, x\,.\, par(x) \wedge q(x)$$

- "Algunos animales tienen garras o dientes afilados."

  Suponemos que el universo es el conjunto de los animales.

  $g(x)$ = "x tiene garras"

  $d(x)$ = "x tiene dientes afilados"

  Formalización:

  $$\exists\, x\,.\, g(x) \vee d(x)$$

- "Existe un número x positivo que es solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$"

  Suponemos $\mathbb{U} = \mathbb{R}$.

  $pos(x)$ = "$x > 0$"

  $s(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$

  Formalización:

  $$\exists\, x\,.\, pos(x) \wedge s(x)$$

- "Ningún número x positivo es solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$"

  Mismo universo y predicados que en el ejemplo anterior

  Formalización:

  $$\neg(\exists\, x\,.\, p(x) \wedge s(x))$$

Observación.

Proposición	¿Cuándo es Verdadera?	¿Cuándo es Falsa?
$\exists\, x\,.\, p(x)$	$p(a)$ es V para al menos un a del universo	$p(a)$ es F para cualquier a del universo
$\forall\, x\,.\, p(x)$	Para cada reemplazo de a en el universo, $p(a)$ es V.	Existe al menos un reemplazo a en el universo para el cual $p(a)$ es F.

Ejemplo. En los siguientes ejemplos veremos como traducir al lenguaje natural y analizaremos el valor de verdad de cada una de las proposiciones cuantificadas.

Suponemos como universo $\mathbb{Z}$. Dado el siguiente predicado:

$$f(x,y) = x \geq y$$

- $\forall\, x\,.\, f(x,0)$

  "Todos los enteros son positivos o iguales a 0. "

  Esta proposición es falsa ya que existe el $-3 \in \mathbb{Z}$ que no es positivo o igual a cero.

- $\exists\, x\,.\, \neg f(0,x)$

  "Algún entero es positivo."

  Esta proposición es verdadera ya que existe el $3 \in \mathbb{Z}$ que es positivo.

- $\neg(\forall\, x\,.\, \neg f(0,x))$

  "No todos los enteros son positivos. "

- $\forall\, x\,.\, (\exists\, y\,.\, f(x,y))$

  "Cualquier entero es mayor a algún entero."

- $\neg(\exists\, x\,.\, (\forall\, y\,.\, f(x,y)))$

  "Ningún entero es mayor a todos los enteros."

Ejercicio.

1. Traducir las siguientes frases a la lógica de predicados y determinar su valor de verdad (si es necesario, definir el universo para cada una de ellas):

   a) No cualquier función tiene derivada.

   b) Existe una función que es continua pero no tiene derivada.

   c) Si algunos trenes se retrazan entonces todos los trenes se retrazan.

   d) Todo número es par o impar.

   e) Ningún número es par e impar a la vez.

2. Traducir al lenguaje natural, donde $x \in$ *Peces* y $n(x) =$ "x nada"

   a) $\forall\, x\,.\, n(x)$

   b) $(\exists\, x\,.\, n(x)) \rightarrow (\forall\, x\,.\, n(x))$

   c) $(\forall\, x\,.\, n(x)) \rightarrow n(Nemo)$

Observación. Para representar determinadas proposiciones es necesario cuantificar sobre dos o más variables.

Veamos los siguientes ejemplos de cuantificadores anidados:

- "La suma dos números reales positivos es positiva."

  Si $x \in \mathbb{R}$ y $pos(x) =$ "x es positiva":

  $$\forall\, x\,.\, \forall\, y\,.\, (pos(x) \wedge pos(y)) \rightarrow pos(x+y)$$

  Si no hay paréntesis el alcance de ambas cuantificaciones es hasta el final.

  En este ejemplo podemos intercambiar el orden de las cuantificaciones manteniendo el significado.

  $$\forall\, y\,.\, \forall\, x\,.\, (pos(x) \wedge pos(y)) \rightarrow pos(x+y)$$

- "Todos aman a alguna otra persona."
  Si $x \in$ Personas y $a(x, y) =$ "x ama a y"

$$\forall\, x \,.\, \exists\, y \,.\, a(x, y)$$

  Si intercambiamos el orden de los cuantificadores obtenemos:

$$\exists\, y \,.\, \forall\, x \,.\, a(x, y)$$

  el cual se traduce a "alguien es amado por todos". El orden de los cuantificadores altera el significado.

3. Deducción natural

Para demostrar razonamientos con cuantificaciones no es posible extender el uso de las tablas de verdad. Para ello extenderemos el sistema de reglas de inferencia con reglas para cuantificadores.

- *Introducción de* $\forall$ *(*$i_\forall$*)*

$$\frac{\boxed{\begin{array}{r} a \\ \vdots \\ p(a) \end{array}}}{\therefore \forall\, x \,.\, p(x)}$$

  donde a no ocurre afuera de la caja.

- *Eliminaión de* $\forall$ *(*$e_\forall$*)*

$$\frac{\forall\, x \,.\, p(x)}{\therefore p(a)}$$

  donde a es un elemento del universo de la cuantificación.

- *Introducción de* $\exists$ *(*$i_\exists$*)*

$$\frac{p(a)}{\therefore \exists x . p(x)}$$

  donde a es un elemento del universo de la cuantificación.

- *Eliminación de* $\exists$ *(*$e_\exists$*)*

$$\frac{\begin{array}{c} \exists x . p(x) \\ \boxed{\begin{array}{r} a \\ [p(a)] \\ \vdots \\ q \end{array}} \end{array}}{\therefore q}$$

  donde a no ocurre afuera de la caja.

Ejemplo. 1. Probaremos por deducción natural el razonamiento introductorio:

$$\frac{\begin{array}{l} \forall\, x \,.\, h(x) \to m(x) \\ h(\text{Sócrates}) \end{array}}{\therefore m(\text{Sócrates})}$$

Demostración:

	Razones
1) $\forall\, x \,.\, h(x) \to m(x)$	premisa
2) $h(\text{Sócrates})$	premisa
3) $h(\text{Sócrates}) \to m(\text{Sócrates})$	$e_\forall$ (1)
4) $m(\text{Sócrates})$	$e_\to$ (2) y (3)

2.

$$\begin{array}{l} \forall\, x\,.\,(p(x) \to q(x)) \\ \forall\, x\,.\,p(x) \\ \hline \therefore \forall\, x\,.\,q(x) \end{array}$$

Demostración:

	Razones
1) $\forall\, x\,.\,(p(x) \to q(x))$	premisa
2) $\forall\, x\,.\,p(x)$	premisa
a	
3) $p(a)$	$e_\forall$ (2)
4) $p(a) \to q(a)$	$e_\forall$ (1)
5) $q(a)$	$e_\to$ (3) y (4)
6) $\forall\, x\,.\,q(x)$	$i_\forall$ (3-5)

3.

$$\begin{array}{l} \forall\, x\,.\,p(x) \\ \hline \therefore \exists\, x\,.\,p(x) \end{array}$$

Demostración:

	Razones
1) $\forall\, x\,.\,p(x)$	premisa
2) $p(a)$	$e_\forall$ (1)
3) $\exists\, x\,.\,p(x)$	$i_\exists$ (2)

4.

$$\begin{array}{l} \forall\, x\,.\,(p(x) \to q(x)) \\ \exists\, x\,.\,p(x) \\ \hline \therefore \exists\, x\,.\,q(x) \end{array}$$

Demostración:

	Razones
1) $\forall\, x\,.\,(p(x) \to q(x))$	premisa
2) $\exists\, x\,.\,p(x)$	premisa
a	
3) $p(a)$	hipótesis
4) $p(a) \to q(a)$	$e_\forall$ (1)
5) $q(a)$	$e_\to$ (3) y (4)
6) $\exists\, x\,.\,q(x)$	$i_\exists$ (5)
7) $\exists\, x\,.\,q(x)$	$e_\exists$ (3-6)

4. Equivalencias lógicas

Al igual que en la lógica proposicional, en la lógica de predicados existen equivalencias lógicas conocidas que nos serán de utilidad para futuras demostraciones. Las mismas se pueden probar con las herramientas ya vistas hasta el momento.

- *Negación de* $\forall$*:*

$$\neg(\forall\, x\,.\,p(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x\,.\,\neg p(x))$$

Ejemplo: "No todas las aves vuelan." es lo mismo que "Algún ave no vuela."

- *Negación de* $\exists$*:*

$$\neg(\exists\, x\,.\,p(x)) \Leftrightarrow (\forall\, x\,.\,\neg p(x))$$

Ejemplo: "Ningún ave vuela." es lo mismo que "Cualquier ave no vuela."

- *Leyes distributivas*

$$(\forall\, x\,.\, p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\forall\, x\,.\, p(x)) \wedge (\forall\, x\,.\, q(x))$$

$$(\exists\, x\,.\, p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x\,.\, p(x)) \vee (\exists\, x\,.\, q(x))$$

  Ejemplo: "Cualquier futbolista gana mucho dinero y entrena mucho tiempo." es lo mismo que "Cualquier futbolista gana mucho dinero y cualquier futbolista entrena mucho tiempo."

Ejemplo. Luego de probar las equivalencias anteriores, estas pueden ser usadas en demostraciones por deducción natural, ya que si vale la equivalencia, entonces valen ambas implicancias.

$$\begin{array}{l} \forall\, x\,.\, p(x) \vee q(x) \\ \neg(\forall\, x\,.\, p(x)) \\ \hline \therefore \exists\, x\,.\, q(x) \end{array}$$

	Razones
1) $\forall\, x\,.\, p(x) \vee q(x)$	premisa
2) $\neg(\forall\, x\,.\, p(x))$	premisa
3) $\exists\, x\,.\, \neg p(x)$	Negación de $\forall$ (2)
	a
4) $\neg p(a)$	hipótesis
5) $p(a) \vee q(a)$	$e_\forall$ (1)
6) $q(a)$	SD (5) y (4)
7) $\exists\, x\,.\, q(x)$	$i_\exists$ (6)
8) $\exists\, x\,.\, q(x)$	$e_\exists$ (4-7)

Ejercicio.

1. Demostrar los siguientes razonamientos de la lógica de predicados:

$$\begin{array}{l} \forall\, x\,.\, p(x) \rightarrow q(x) \\ \forall\, x\,.\, p(x) \vee r(x) \\ \neg r(a) \\ \hline \therefore q(a) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall\, x\,.\, (p(x) \vee q(x)) \rightarrow r(x) \\ \forall\, x\,.\, q(x) \\ \hline \therefore \forall\, x\,.\, r(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg(\forall\, x\,.\, \neg m(x)) \\ \forall\, x\,.\, m(x) \rightarrow s(x) \\ \hline \therefore \exists\, x\,.\, s(x) \end{array}$$

2. Calcular la negación de las siguientes expresiones usando las leyes:

   a) $\exists\, x\,.\, \forall\, y\,.\, p(x,y)$

   b) $\exists\, x\,.\, \exists\, y\,.\, p(x,y) \vee q(x,y)$