Prátcica 1: Lógica Proposicional

1. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son proposiciones.

   a) El pizarrón es verde.
   b) 4 es múltiplo de 8.
   c) El 3 es un número irracional.
   d) $4x + y$.
   e) Si $x > 0$ entonces $y < 4$.
   f) A es un conjunto vacío.
   g) ¿Qué hora es?
   h) ¡Cuánto falta!
   i) A tiene al menos un elemento y $B \subseteq A$.
   j) Desde la tarde hasta la noche.
   k) $x \in A$ o $x > 5$.
   l) Si el árbol tiene hojas y $2 = 4$, entonces la casa está vacía.

2. Identifique las proposiciones primitivas en el ejercicio anterior.

3. Complete las siguiente tablas de verdad:

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg q \wedge (p \vee \neg q)$	$(p \to q) \wedge (\neg q \wedge (p \vee \neg q))$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$p \to \neg r$	$(p \vee q) \wedge (p \to \neg r)$	$p \wedge [(p \vee q) \wedge (p \to \neg r)]$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

4. Construya tablas de verdad para cada una de las siguientes expresiones, donde p, q y r son proposiciones primitivas:

   a) $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$,
   b) $(p \to q) \to r$,
   c) $p \to (q \to r)$,
   d) $(p \wedge q) \to p$,
   e) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$,
   f) $\neg(p \to q) \vee r$,
   g) $(p \vee q) \to (q \vee r)$,
   h) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$,
   i) $(p \vee q) \vee (p \vee \neg q)$,
   j) $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \vee r)$,
   k) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,
   l) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$,
   m) $(p \vee (q \to r)) \wedge (\neg p \vee q)$,
   n) $((p \vee q) \wedge \neg r) \to (\neg p \vee r)$.

5. ¿Cuáles de las proposiciones anteriores son tautologías? ¿Cuáles son contradicciones?

6. Dadas dos proposiciones primitivas p, q se define la **disyunción exclusiva** de p y q como la proposición $p \veebar q$ cuyos valores de verdad están dados por la tabla

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a) Construya la tabla de verdad de la proposición de $\neg(p \leftrightarrow q)$. ¿Qué relación existe entre esta proposición y $p \veebar q$?

b) Construya la tabla de verdad de la proposición $q \leftrightarrow (\neg p \veebar \neg q)$.

7. Escriba la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca de cada una de las siguientes implicaciones:

   a) Si $x > y$ entonces $2y > 2x$.

   b) Si Juan va a la playa, el departamento se llenará de arena.

   c) Si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$.

   d) Si hoy llueve, entonces no iremos al parque.

   e) Si una figura es un cuadrado, entonces la figura tiene cuatro lados.

   f) Si Luciano aprueba los parciales, entonces Luciano promueve la materia.

8. Verifique la validez de las siguientes implicaciones lógicas, mediante tabla de verdad. En cada caso, determine las filas de la tabla que son cruciales para evaluar la validez del argumento y las que pueden dejarse de lado.

   a) $p \wedge q \Rightarrow p$,

   b) $p \Rightarrow p \vee q$,

   c) $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$,

   d) $(p \to r) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \vee q) \to r$.

9. Exprese en la lógica proposicional los siguientes razonamientos:

   a) Hay almendras y hay conversación. Hay bocadillos y la cena es a las ocho. Si la cena es a las ocho y hay almendras, entonces es la vigilia de Navidad. Por tanto es la vigilia de Navidad y hay conversación.

   b) Si hoy es martes y el partido se suspende, entonces hoy no es martes. El partido no se suspende. Hoy es martes o la pared es azul. Por lo tanto la pared es azul y hoy no es martes.

   c) Los árboles tienen hojas o el aula está vacía. Si el aula está vacía y venta está abierta, entonces los árboles no tienen hojas. Los árboles tienen hojas y la ventana no está abierta. Por lo tanto, la ventana no está abierta.

   d) Rita está horneando un pastel. Si Rita está horneando un pastel, entonces no está tocando la flauta. Si Rita no está tocando la flauta, entonces su padre no pagará el seguro de su automóvil. Por lo tanto, el padre de Rita no pagará el seguro de su automóvil.

   e) Si la banda no pudiera tocar rock o las bebidas no llegasen a tiempo, entonces la fiesta de Año Nuevo tendría que cancelarse y Alicia se enojaría. Si la fiesta se cancelara, habría que devolver el dinero. No se devolvió el dinero. Por lo tanto, la banda pudo tocar rock.

10. Decida si los siguientes razonamientos son válidos o no, justificando adecuadamente.

    a) Si estudio mucho, entonces apruebo. Por lo tanto, si apruebo, es porque estudié mucho.

    b) Si estudio mucho, entonces apruebo. Por lo tanto, si no estudio, no apruebo.

    c) Si no lo digo, no me critican. Por lo tanto, si lo digo, me criticarán.

    d) Si lo digo, me critican. Por lo tanto, si no lo digo, no me critican.

    e) Si lo digo, me critican. Me criticaron. Por lo tanto, lo dije.

    f) Si llueve, el piso está mojado. El piso no está mojado. Por lo tanto, no está lloviendo.

    g) Si llueve, el piso está mojado. El piso está mojado. Por lo tanto, está lloviendo.

    h) Si llueve, el piso está mojado. Por lo tanto, no es posible que llueva y el piso esté seco.

11. Verifique con un contraejemplo que las siguientes proposiciones no son implicaciones lógicas:

    a) $(p \wedge q) \to \neg p$,

    b) $(p \vee \neg q) \to (p \wedge r)$,

    c) $((p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)) \to (p \vee (q \wedge s))$,

    d) $((p \wedge \neg q) \wedge (p \to (q \to r))) \to \neg r$,

    e) $(((p \wedge q) \to r) \wedge (\neg q \vee r)) \to p$,

    f) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \to q)] \to \neg s$,

    g) $[\neg p \wedge (p \to r) \wedge (p \to (q \vee \neg r)) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \to \neg s$.

12. Dé las razones para los pasos que verifican la validez de los siguientes razonamientos:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \wedge r \\ \hline \therefore q \wedge r \end{array}$$

Razones

1) $p \to q$
2) $p \wedge r$
3) p
4) r
5) q
6) $\therefore\ q \wedge r$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg r \vee s \\ p \vee r \\ \neg q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

Razones

1) $p \to q$
2) $\neg q$
3) $\neg p$
4) $p \vee r$
5) r
6) $\neg r \vee s$
7) $\therefore\ s$

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \to r \\ r \to (s \vee t) \\ \neg s \wedge \neg u \\ \neg u \to \neg t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Razones

1) $(\neg p \vee q) \to r$
2) $r \to (s \vee t)$
3) $\neg s \wedge \neg u$
4) $\neg u \to \neg t$
5) $\neg u$
6) $\neg t$
7) $\neg s$
8) $\neg s \wedge \neg t$
9) $\neg(s \vee t)$
10) $\neg r$
11) $\neg(\neg p \vee q)$
12) $\neg\neg p \wedge \neg q$
13) $\neg\neg p$
14) $\therefore\ p$

13. Pruebe por deducción natural los siguientes razonamientos:

a) $$\begin{array}{l} (p \wedge \neg s) \to t \\ s \to q \\ \neg q \wedge p \\ \hline \therefore t \wedge p \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} \neg(p \vee q) \to r \\ r \to s \\ (\neg p \vee t) \to u \\ \neg p \wedge \neg q \\ \hline \therefore s \wedge u \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} d \wedge \neg f \\ a \vee f \\ e \to \neg c \\ (a \vee b) \to (c \wedge d) \\ \hline \therefore \neg(e \wedge d) \end{array}$$

d) $$\begin{array}{l} s \to q \\ \neg r \vee s \\ r \wedge t \\ \hline \therefore q \wedge t \end{array}$$

e) $$\begin{array}{l} (p \wedge q) \to (r \vee s) \\ p \vee t \\ s \to t \\ \neg t \wedge q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

f) $$\begin{array}{l} (r \wedge s) \to t \\ \neg t \wedge s \\ (\neg r \vee p) \to u \\ \hline \therefore u \end{array}$$

g) $$\begin{array}{l} (b \to a) \wedge c \\ b \\ c \to \neg d \\ \hline \therefore \neg d \wedge c \end{array}$$

h) $$\begin{array}{l} (m \vee n) \to p \\ \neg p \\ \neg m \to k \\ \hline \therefore k \end{array}$$

i) $$\begin{array}{l} (x \wedge y) \to z \\ \neg z \vee w \\ x \wedge \neg w \\ \hline \therefore \neg y \end{array}$$

j) $$\begin{array}{l} s \to q \\ \neg q \\ r \wedge t \\ t \to (u \vee s) \\ \hline \therefore u \wedge r \end{array}$$

14. Sean p, q, r proposiciones primitivas.

a) Use las tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias lógicas.

1) $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$,
2) $((p \vee q) \to r) \Leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r))$,
3) $(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow (\neg r \to (p \to q))$.

b) Use las leyes de la lógica para ver que $(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to r)$.

15. Para las proposiciones primitivas p, q, se pide:

    a) Verifique que $p \to (q \to (p \wedge q))$ es una tautología.

    b) Verifique que $(p \vee q) \to (q \to q)$ es una tautología, usando el resultado de la parte $15a$, y las leyes de la lógica.

    c) ¿Es $(p \vee q) \to (q \to (p \wedge q))$ una tautología? Justifique.

16. Verifique la Ley de Absorción $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ mediante una tabla de verdad.

17. Dé las razones para cada paso de las siguientes simplificaciones de proposiciones compuestas.

    a)

	Razones
$((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee q$	
$\Leftrightarrow (p \vee (q \wedge \neg q)) \vee q$	
$\Leftrightarrow (p \vee F_0) \vee q$	
$\Leftrightarrow p \vee q$	

    b)

	Razones
$\neg(p \vee q) \vee ((\neg p \wedge q) \vee \neg q)$	
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee (\neg p \wedge q))$	
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee ((\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q))$	
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee ((\neg q \vee \neg p) \wedge T_0)$	
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p)$	
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \neg(q \wedge p)$	
$\Leftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge (q \wedge p)]$	
$\Leftrightarrow \neg[(q \wedge p) \wedge (p \vee q)]$	
$\Leftrightarrow \neg[q \wedge (p \wedge (p \vee q))]$	
$\Leftrightarrow \neg(q \wedge p)$	

    c)

	Razones
$(p \to q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q))$	
$\Leftrightarrow (p \to q) \wedge \neg q$	
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q$	
$\Leftrightarrow \neg q \wedge (\neg p \vee q)$	
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$	
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee F_0$	
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p)$	
$\Leftrightarrow \neg(q \vee p)$	

18. Sean p, q, r, s y t proposiciones primitivas. Use las leyes de la lógica para verificar que cada una de las siguientes proposiciones es una tautología.

    a) $(p \vee (q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge \neg(q \wedge r))$,

    b) $[\neg q \wedge (p \wedge q)] \to q$,

    c) $((p \vee q) \to r) \leftrightarrow (\neg r \to \neg(p \vee q))$,

    d) $(((p \vee q) \to r) \vee (s \wedge t)) \leftrightarrow ((((p \vee q) \to r) \vee s) \wedge (((p \vee q) \to r) \vee t))$.

19. Para las proposiciones primitivas p, q, r y s, simplifique las siguientes proposiciones compuestas:

    a) $(p \wedge q) \vee \neg(q \to p)$,

    b) $[(p \vee q) \wedge p] \vee [p \wedge \neg(q \wedge r)]$,

    c) $[(((p \wedge q) \wedge r) \vee ((p \wedge r) \wedge \neg r)) \vee \neg q] \to s$.

20. Pruebe las siguientes equivalencias lógicas usando las leyes de la lógica. En cada paso, detalle las leyes utilizadas.

    a) $p \vee (p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$,

    b) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$,

    c) $((\neg p \vee \neg q) \to (p \wedge q \wedge r)) \Leftrightarrow p \wedge q$,

    d) $p \wedge ((\neg q \to (r \wedge r)) \vee \neg(q \vee ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)))) \Leftrightarrow p$.

21. Dadas las proposiciones compuestas

P: $p \wedge (q \vee r)$,

Q: $p \to (t \wedge r)$,

R: $(p \vee q) \leftrightarrow r$,

se pide:

a) De ser necesario, escriba proposiciones lógicamente equivalentes que solo contengan los operadores lógicos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.

b) Escriba la proposición dual a partir de lo obtenido en el ítem anterior.