Prátcica 2: Lógica de Predicados

1. En el universo de los insectos, considere los siguientes predicados:

   $h(x)$: x es una hormiga,
   $i(x)$: x es un mantis,
   $j(x)$: x tiene cuatro patas.

   Formalice a expresiones de la lógica de predicados:

   a) Todas las hormigas son mantis.
   b) Las hormigas son mantis.
   c) Ninguna hormiga tiene cuatro patas.
   d) Algunos insectos tienen cuatro patas.
   e) Ciertos insectos tienen cuatro patas.
   f) Todos los insectos tienen cuatro patas y son hormigas.
   g) Existen algunos insectos que son mantis y tienen cuatro patas.
   h) Todo insecto tiene cuatro patas.

2. Traduzca las siguientes frases a la lógica de predicados:

   a) Todo es perecedero.
   b) No todo es perecedero.
   c) Si Nico llega, saldremos todos.
   d) Si llega alguno, nadie saldrá.
   e) Si todo es rojo, hay algo rojo.
   f) Algo es rojo si y solo si algo no es rojo.

3. Sean $p(x)$: *"x es un contador"* y $q(x)$: *"x tiene un Porsche"* en el universo de todas las personas. Escriba en símbolos cada afirmación en los siguientes ítems:

   a) Todos los contadores tienen un Porsche.
   b) Algunos contadores tienen un Porsche.
   c) Todos los dueños de Porsches son contadores.
   d) Alguien que tiene un Porsche es contador.

4. Dados los predicados

   $p(x)$: $x^2 - 2x + 1 = 0$,
   $q(x)$: x es par,
   $r(x)$: $x^2 = 1$,

   en el universo de los números reales, determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   a) $p(0)$,
   b) $q(3) \vee p(1)$,
   c) $r(1) \to q(1)$,
   d) $\forall x \,.\, p(x) \to r(x)$,
   e) $\forall x \,.\, r(x) \to p(x)$,
   f) $\exists x \,.\, p(x) \to r(x)$,
   g) $\neg(q(3) \vee r(2))$,
   h) $\forall x \,.\, q(x)$,
   i) $\exists x \,.\, q(x) \to r(x)$.

5. En el universo $U = \{x : x \text{ es una letra del abecedario español o } x \in \{0, 1, 2, ..., 9\}\}$, considere los siguientes predicados:

   $p(x)$: x es una letra,
   $q(x)$: x es una vocal,
   $w(x)$: x es un número,
   $t(x)$: x es una consonante,

   Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a) $p(\text{a})$,

b) $q(\text{x})$,

c) $w(0) \to (t(\text{k}) \wedge q(\text{i}))$,

d) $\exists x \,.\, p(x) \wedge q(x)$,

e) $\forall x \,.\, q(x) \to q(x)$,

f) $\forall x \,.\, w(x)$

g) $\exists x \,.\, p(x) \wedge w(x)$,

h) $\exists x \,.\, \neg t(x) \wedge \neg t(x)$,

i) $\exists x \,.\, w(x) \leftrightarrow \neg t(x)$.

6. Dado el predicado $m(x, y) : x \geq y$, en el universo de los números reales, traduzca al lenguaje natural las siguientes proposiciones y decida si son verdaderas o falsas.

   a) $\forall\, x \,.\, \exists\, y \,.\, m(x, y)$

   b) $\exists\, x \,.\, \forall\, y \,.\, m(x, y)$

   c) $\exists\, x \,.\, \forall\, y \,.\, m(y, x)$

   d) $\neg(\exists\, x \,.\, m(x, 3))$

7. Considere el universo de los enteros positivos. Exprese en palabras cada afirmación en los siguientes ítems. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

   a) $\exists x \,.\forall y \,.\, (x \leq y)$,

   b) $\exists x \,.\forall y \,.\, (x \geq y)$,

   c) $\exists x \,.\exists y \,.\, ((x > 1) \wedge (y > 1) \wedge (x \cdot y = 6))$,

   d) $\exists x \,.\exists y \,.\, ((x > 1) \wedge (y > 1) \wedge (x \cdot y = 7))$.

8. Negar y simplificar las siguientes proposiciones cuantificadas:

   a) $\forall x \,.\, p(x) \wedge \neg q(x)$,

   b) $\exists x \,.\, r(x) \to (p(x) \wedge r(x))$,

   c) $\exists x \,.\, p(x) \wedge (p(x) \vee q(x))$,

   d) $\forall x \,.\forall z \,.\, p(x, y)$,

   e) $\forall x \,.\exists y \,.\, m(x, y) \to j(x, y)$,

   f) $\forall x \,.\exists y \,.\, (p(x, y) \wedge q(x, y)) \wedge p(x, y)$.

9. ¿Cuáles de las siguientes cuantificaciones es equivalente a $\neg(\forall\, x \,.\, \exists\, y \,.\, p(x, y))$?

   a) $\exists x \,.\, \neg(\forall y \,.\, p(x, y))$,

   b) $\forall x \,.\, \neg(\exists y \,.\, p(x, y))$,

   c) $\exists x \,.\forall y \,.\, \neg p(x, y)$,

   d) $\exists x \,.\exists y \,.\, \neg p(x, y)$.

   Pruebe las equivalencias con las leyes. Para aquellas que no sean equivalentes, proponga una interpretación, es decir un universo y un significado para p para el cual sea claro que la equivalencia no vale. Demuestre con un contraejemplo la NO equivalencia.

10. Defina un universo y traduzca a la lógica de primer orden los siguientes razonamientos:

    a) Todos los rinocerontes tienen un cuerno. Todos los plantígrados son rinocerontes. Así pues, todos los plantígrados tienen un cuerno.

    b) Todos los caballos no saben silbar. Todos los cerdos tienen alas. Todos caballos que no saben silbar tienen alas. Por consiguiente, ningún caballo es cerdo.

    c) Todos los detectives americanos pueden desentrañar asesinatos. Cualquier detective que desentrañe un asesinato obtendrá una recompensa. Spencer es un detective americano. Por tanto, Spencer obtendrá una recompensa.

    d) Ningún cuadrúpedo reina en Europa. Algunos mamíferos son cuadrúpedos. Por tanto, hay mamíferos que no reinan en Europa.

11. Demostrar los siguientes razonamientos de la lógica de primer orden:

    a) $$\begin{array}{l} \forall x \,.\, i(x) \to \neg p(x) \\ \forall x \,.\, e(x) \to p(x) \\ \hline \therefore \forall\, x \,.e(x) \to \neg i(x) \end{array}$$

    b) $$\begin{array}{l} \forall x \,.\, c(x) \to \neg r(x) \\ \exists x \,.\, m(x) \wedge c(x) \\ \hline \therefore \exists\, x \,.m(x) \wedge \neg r(x) \end{array}$$

    c) $$\begin{array}{l} \forall x \,.\, d(x) \to t(x) \\ \forall x \,.\, (d(x) \wedge t(x)) \to r(x) \\ d(a) \\ \hline \therefore r(a) \end{array}$$

    d) $$\begin{array}{l} \forall x \,.\, c(x) \to \neg s(x) \\ \forall x \,.\, d(x) \to \neg a(x) \\ \forall x \,.\, s(x) \wedge a(x) \\ \hline \therefore \forall x \,.\, \neg c(x) \wedge \neg d(x) \end{array}$$

    e) $$\begin{array}{l} \forall x \,.\, r(x) \to u(x) \\ \forall x \,.\, p(x) \to r(x) \\ \hline \therefore \forall\, x \,.\, p(x) \to u(x) \end{array}$$

    f) $$\begin{array}{l} \forall x \,.\, p(x) \to q(x) \\ \forall x \,.\, \neg r(x) \vee w(x) \\ \forall x \,.\, p(x) \wedge r(x) \\ \hline \therefore\ \forall x \,.\, q(x) \wedge w(x) \end{array}$$

$$g)\quad \begin{array}{l} \forall x\,.\,[p(x) \lor q(x)] \\ \exists x\,.\,\neg p(x) \\ \forall x\,.\,[\neg q(x) \lor r(x)] \\ \forall x\,.\,[s(x) \to \neg r(x)] \\ \hline \exists x\,.\,\neg s(x) \end{array}$$

$$h)\quad \begin{array}{l} \forall x\,.\,p(x) \lor q(x) \\ \forall x\,.\,r(x) \to \neg q(x) \\ \exists x\,.\,r(x) \land (\neg s(x)) \\ \hline \therefore\ \exists x\,.\,(\neg s(x)) \land p(x) \end{array}$$

$$i)\quad \begin{array}{l} f(a) \\ \forall x\,.\,p(x) \lor r(x) \\ \forall x\,.\,f(x) \to \neg r(x) \\ \forall x\,.\,(p(x) \lor m(x)) \to (q(x) \land f(x)) \\ \hline \therefore\ q(a) \end{array}$$

$$j)\quad \begin{array}{l} \forall x\,.\,r(x) \to s(x) \\ \forall x\,.\,\neg p(x) \land \neg q(x) \\ \exists x\,.\,(\neg p(x) \lor t(x)) \to u(x) \\ \forall x\,.\,\neg(p(x) \lor q(x)) \to r(x) \\ \hline \therefore\ \exists x\,.\,s(x) \land u(x) \end{array}$$