Unidad 1: Lógica Proposicional

1. Introducción

¿Qué es la lógica?

"Logic is the business of evaluating arguments, sorting good ones from bad ones.". P. D. Magnus, *forall χ, An introduction to formal logic.*

"Logic is concerned mainly with two concepts: truth and provability." Gallier, *Logic For Computer Science, Foundations of Automatic Theorem Proving.*

"Symbolic logic is a mathematical model of deductive thought." H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.*

" The aim of logic in computer science is to develop languages to model the situations we encounter as computer science professionals, in such a way that we can reason about them formally." Ryan - Hutt. *Logic in computer science.*

"Mathematical logic is concerned with formalizing and analyzing the kinds of reasoning used in the rest of mathematics." Stephan Bilaniuk. *A problem course in mathematical logic.*

Definición. Un razonamiento es una lista de proposiciones (oraciones que pueden ser verdaderas o falsas). La última proposición de la lista es la conclusión del razonamiento, y todas las anteriores, si las hay, son las premisas.

Observemos algunos ejemplos de razonamientos.

Lógica es una materia de primer año

El invierno comienza el 21 de junio

$\therefore$ A Rafael Nadal le gustaba jugar al truco

El ejemplo anterior cumple con la definición a pesar de ser un muy mal razonamiento. Veamos otro ejemplo.

Ustedes asisten a esta clase

Esta es una clase de lógica

$\therefore$ Ustedes son estudiantes de lógica

Si bien parece un argumento razonable, desde el punto de vista de la lógica no es válido, ya que la veracidad de la conclusión no se desprende necesariamente de la veracidad de las premisas.

Un razonamiento es deductivamente válido si y sólo si es imposible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa.

Las naranjas son frutas o instrumentos musicales

Las naranjas no son frutas

$\therefore$ Las naranjas son instrumentos musicales

En el ejemplo anterior, aunque se obtiene una conclusión ridícula, observemos que el razonamiento es válido ya que si ambas premisas son ciertas, la conclusión debe ser cierta. Sabiendo que la conclusión es falsa y el razonamiento válido, ¿qué se puede concluir de las premisas?

Todos alguna vez hemos dado argumentos para defender nuestras ideas o nos hemos convencido a partir de los razonamientos dados por otras personas. Una tarea del curso será poder, formalmente, distinguir los razonamientos válidos de los que no lo son y sacar conclusiones sobre la veracidad de las proposiciones involucradas.

2. Lógica proposicional

Definición. La lógica proposicional es un sistema formal que tiene como objetivo el estudio de los razonamientos.

Para definir un sistema formal se necesita de un alfabeto, este está formado por:

- Variables proposicionales: p, q, r, etc.
- Operadores lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Símbolos auxiliares: (,)

También son necesarios axiomas y teoremas que veremos más adelante.

2.1. Proposiciones

Definición. Las proposiciones (o enunciados) son oraciones a las que se les puede asignar un valor de verdad. En este curso simbolizaremos al valor "verdadero" con el número 1 y al valor "falso" con el número 0.

Ejemplo.
- "En esta clase hay 45 alumnos" es una proposición.
- "Rosario es la capital de Santa Fe." es una proposión.
- "Hacé la tarea inmediatamente" no es una proposión. En general las oraciones interrogativas, exclamativas e imperativas no suelen ser proposiciones.

Observemos la primera proposición del ejemplo anterior: "En esta clase hay 45 alumnos". ¿Es verdadera o falsa? ¿Y si nos hacemos esta pregunta la semana que viene o el próximo mes?

Definición. Llamamos contingencia a una proposición cuyo valor de verdad no es siempre el mismo, depende del contexto.
Llamamos tautología a una proposición que siempre es verdadera.
Llamamos contradicción a una proposición que siempre es falsa.

Ejemplo.
- "En esta clase hay 45 alumnos" es una contingencia.
- "En este aula hay 45 personas, o no" es una tautología.
- "En este aula hay 45 personas, y además la cantidad de personas es par" es una contradicción.

Definición. Una proposición es primitiva si no puede subdividirse en proposiciones más simples.

Denotaremos a las proposiciones primitivas con letras: p, q, r, s, etc.

Ejemplo. La oración: "3 es un número impar y los gatos tienen 4 patas." contiene dos proposiciones primitivas, las cuales definimos como:

- p: 3 es un número impar.
- q: Los gatos tienen 4 patas.

2.2. Operadores booleanos

Definición. Las proposiciones primitivas se combinan usando conectores, como "y" y "o", que se expresan en la lógica con operadores booleanos.

Sean p y q proposiciones,

- La conjunción de p y q es una proposición que se denota como $p \wedge q$ y se lee "p y q". Es verdadera solo si las dos proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ejemplo: "Hoy fui a trabajar y preparé mis cosas para cursar."

- La disyunción entre p y q es una proposición que se denota como $p \vee q$ y se lee p o q. Es verdadera solo si una o ambas proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

  Ejemplo: “Mañana estudiaré lógica o miraré una serie.”

- La negación de p es una proposición que se denota como $\neg p$ y se lee ”no p”.

p	$\neg p$
1	0
0	1

  Ejemplo: “Ayer no comí milanesas.”

- Decimos que “p implica a q” y escribimos $p \to q$, para designar la proposición que es la implicancia de q por p.

  Llamamos a p hipótesis y a q conclusión de la implicación $p \to q$.

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

  Ejemplo: “Si me saco un 6 en todos los parciales, entonces apruebo Lógica.”

  Formas alternativas de leer la implicación $p \to q$:

  - Si p, entonces q.
  - p es suficiente para q.
  - q es necesario para p.

  Dada una implicancia (proposición de la forma $p \to q$) se pueden definir 3 implicancias asociadas a esta:

  - La proposición $q \to p$ se llama recíproca de $p \to q$.
    “Si apruebo Lógica, entonces me saco un 6 en todos los parciales.”
  - La proposición $\neg p \to \neg q$ se llama inversa de $p \to q$.
    “Si no me saco un 6 en todos los parciales, entonces no apruebo Lógica.”
  - La proposición $\neg q \to \neg p$ se llama contrarrecíproca de $p \to q$.
    “Si no apruebo Lógica, entonces no me saco un 6 en todos los parciales.”

  ¿Las proposiciones anteriores, tendrán el mismo valor de verdad que la implicancia original?

- El bicondicional de p y q es una proposición que se denota como $p \leftrightarrow q$ y se lee “p si y solo si q” o “p es necesario y suficiente para q”.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

  Ejemplo: “Bruno andará en bicicleta si y solo si sale el sol.”

Ejercicio. Dadas las siguientes variables proposicionales:

p: Nicolás sale a dar un paseo,

q: Hay luna llena,

r: Está nevando.

Escribir en lenguaje natural las siguientes expresiones de la lógica proposicional:

- $(q \wedge \neg r) \rightarrow p$
- $q \rightarrow (\neg r \rightarrow p)$
- $\neg(p \leftrightarrow (r \vee q))$

Observación. Para traducir una frase del lenguaje natural a la lógica proposicional se procede como sigue:

1. Se identifican las variables proposicionales, es decir, las proposiciones primitivas.
2. Se unen las variables proposicionales con los operadores lógicos asociados a los conectivos del lenguaje.

Ejemplo. "Si la variable y es mayor a 5 durante la ejecución del programa, entonces $x < 0$ al finalizar la ejecución o se produce un error."

Identificamos las proposiciones primitivas:

- p: La variable y es mayor a 5 durante la ejecución del programa.
- q: $x < 0$ al finalizar la ejecución del programa.
- r: Se produce un error en el programa.

Unimos las variables proposicionales con los operadores lógicos:

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

2.3. Tablas de verdad

Dada una expresión e, la tabla de verdad para dicha expresión se construye siguiendo los siguientes pasos:

- Se agrega una columna a la tabla por cada variable proposicional que hay en e.
- Se agrega una fila por cada combinación de estados posibles para las variables. La cantidad de filas debe ser 2^n, donde n es la cantidad de variables en e.
- Se agrega una columna por cada subexpresión de e, la última columna corresponde a e.
- Se completan los valores de las filas, usando las tablas asociadas a cada operador lógico.

Ejemplo.

p	q	r	$p \wedge q$	$r \vee p$	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee p)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1

Probamos que $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee p)$ es una tautología.

Definición. Una proposición es una tautología si es verdadera en cualquier asignación de valores de sus variables. Se denota T_0.

Una proposición es una contradicción si es falsa en cualquier asignación de valores de sus variables. Se denota F_0 .

3. Implicaciones lógicas

Definición. Si p y q son proposiciones arbitrarias tales que $p \to q$ es una tautología, entonces decimos que p implica lógicamente a q, y escribimos $p \Rightarrow q$.

Usamos la notación $p \not\Rightarrow q$ para indicar que $p \to q$ no es una tautología.

Ejemplo. Probemos que $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$.

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

A este resultado se lo conoce como Modus Ponens.

Definición. Para demostrar que dos proposiciones no son lógicamente equivalentes, encontraremos un estado en el cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Llamamos a este estado contraejemplo.

Ejemplo. Dada la implicación $(((p \wedge r) \to q) \wedge r) \to q$ como la proposición es falsa en el estado:
$p : 0$
$q : 0$
$r : 1$
diremos que $((p \wedge r) \to q) \wedge r \not\Rightarrow q$

Ejercicio. Encontrar contraejemplos para probar los siguientes enunciados.

1. $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge \neg p \not\Rightarrow \neg r$

2. $(p \to r) \wedge (q \to s) \wedge \neg r \not\Rightarrow p \vee q$

3. $(s \vee r) \wedge (q \to r) \wedge (r \wedge p) \not\Rightarrow p \wedge q$

Definición. Como mencionamos en la introducción, un razonamiento es un conjunto de proposiciones donde hay una distinguida llamada conclusión, que se infiere de las restantes, llamadas premisas.

Representaremos un razonamiento con premisas P_0 , P_1 , . . . , P_n y conclusión C en la lógica proposicional como:

$$(P_0 \wedge P_1 \wedge \cdots \wedge P_n) \to C$$

El razonamiento es válido si podemos derivar la conclusión a partir de las premisas. Es decir, que es válido si siempre que las premisas sean verdaderas la conclusión también es verdadera.

Probamos que un razonamiento con premisas P_0 , . . . , P_n y conclusión C es válido mostrando que

$$(P_0 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow C$$

Es decir, si $(p_0 \wedge p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ es una tautología.

Ejemplo. "Si no disminuimos la quema de combustibles fósiles, el cambio climático no se detendrá. Si no detenemos el cambio climático no habrá un mañana para muchas personas. La quema de combustibles fósiles no disminuye, por lo tanto no habrá un mañana para muchas personas."

Usando lógica proposición podemos representar este razonamiento de la siguiente forma.
p : "Disminuímos la quema de combustibles fósiles."
q : "El cambio climático se detendrá."
r : "Habrá un mañana para muchas personas."

$$R : ((\neg p \to \neg q) \wedge (\neg q \to \neg r) \wedge \neg p) \to \neg r$$

Veamos si es válido:

p	q	r	E: $\neg p \to \neg q$	F: $\neg q \to \neg r$	G: $\neg p$	$E \wedge F \wedge G$	$\neg r$	R
1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Como R es una tautología, podemos cocluir que el razonamiento es válido.

Definición. La deducción natural es una aproximación a la teoría de la demostración en la que se busca capturar la manera en que las personas razonan naturalmente al construir demostraciones matemáticas.

Propone el uso de reglas de inferencia, introduciendo dos reglas para cada operador lógico:

- una para introducirlo y
- otra para eliminarlo.

Cada regla de inferencia tiene su origen en una implicación lógica.

- *Trivial (t)*

$$\frac{p}{\therefore p}$$

  Implicancia lógica relacionada: $p \Rightarrow p$

- *Introducción de la Conjunción ($i_\wedge$)*

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{\therefore p \wedge q}$$

  Implicancia lógica relacionada: $(p \wedge q) \Rightarrow p \wedge q$

- *Eliminación de la Conjunción ($e_\wedge$)*

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \qquad \frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

  Implicancias lógicas relacionadas: $(p \wedge q) \Rightarrow p, \qquad (p \wedge q) \Rightarrow q$

- *Introducción de la implicancia ($i_\to$)*

$$\frac{\begin{array}{c} [p] \\ \vdots \\ q \end{array}}{\therefore p \to q}$$

  Implicancia lógica relacionada: $(p \to q) \Rightarrow p \to q$

- *Eliminación de la implicancia ($e_\to$)*

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ p \end{array}}{\therefore q}$$

  Implicancia lógica relacionada: $((p \to q) \wedge p) \Rightarrow q$

  A esta regla se la suele llamar “Modus Ponens”.

- *Introducción de la Disyunción ($i_\vee$)*

$$\frac{p}{\therefore p \vee q} \qquad \frac{q}{\therefore p \vee q}$$

  Implicancias lógicas relacionadas: $p \Rightarrow p \vee q \qquad q \Rightarrow p \vee q$

- *Eliminación de la Disyunción ($e_\vee$)*

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \to r \\ q \to r \\ \hline \therefore r \end{array}$$

Implicancia lógica relacionada: $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \Rightarrow r$

- *Introducción de la Negación ($i_\neg$)*

$$\begin{array}{l} p \to F_0 \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Implicancia lógica relacionada: $p \to F_0 \Rightarrow \neg p$

- *Eliminación de la Negación ($e_\neg$)*

$$\begin{array}{l} \neg\neg p \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Implicancia lógica relacionada: $\neg\neg p \Rightarrow p$

- *Introducción de la Contradicción (i_{F_0})*

$$\begin{array}{l} p \\ \neg p \\ \hline \therefore F_0 \end{array}$$

Implicancia lógica relacionada: $(p \wedge \neg p) \Rightarrow F_0$

- *Eliminación de la Contradicción (e_{F_0})*

$$\begin{array}{l} F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Implicancia lógica relacionada: $F_0 \Rightarrow p$

A la lista de reglas dadas añadiremos una regla extra que nos ayudará a acortar algunas demostraciones, cuya demostración se deduce de las anteriores pero no realizaremos por su complejidad.

- *Tercero excluido (TND)*

$$\begin{array}{l} \\ \hline \therefore p \vee \neg p \end{array}$$

Una demostración se construye partiendo de las premisas y aplicando las reglas para llegar a la conclusión deseada.

Ejemplo. Probaremos por deducción natural otras reglas de inferencia conocidas, lo haremos usando las reglas de inferencia dadas:

1. *Modus Tollens (MT)*

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Demostración:

	Razones
1) $p \to q$	premisa
2) $\neg q$	premisa

3) p	hipótesis
4) q	$e_{\rightarrow}$ (1) y (3)
5) F_0	i_{F_0} (4) y (2)
6) $p \rightarrow F_0$	$i_{\rightarrow}$ (3-5)
7) $\neg p$	$i_{\neg}$ (6)

2. *Silogismo Hipotético (SH)*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Demostración:

	Razones
1) $p \rightarrow q$	premisa
2) $q \rightarrow r$	premisa
3) p	hipótesis
4) q	$e_{\rightarrow}$ (1) y (3)
5) r	$e_{\rightarrow}$ (2) y (4)
6) $p \rightarrow r$	$i_{\rightarrow}$ (3-5)

3. *Silogismo Disyuntivo (SD)*

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Realizamos la demostración de una de las reglas, la otra es análoga y queda como ejercicio.

Demostración:

	Razones
1) $p \vee q$	premisa
2) $\neg p$	premisa
3) p	hipótesis
4) F_0	i_{F_0} (3) y (2)
5) q	e_{F_0} (4)
6) $p \rightarrow q$	$i_{\rightarrow}$ (3-5)
7) q	hipótesis
8) $q \rightarrow q$	$i_{\rightarrow}$ (7)
9) q	$e_{\vee}$ (1), (6) y (8)

Ejercicio. Probar usando deduccíon natural que:

$$\begin{array}{l} p \vee (r \rightarrow q) \\ \neg p \\ q \rightarrow s \\ \hline \therefore r \rightarrow s \end{array} \qquad \begin{array}{l} (q \vee s) \rightarrow t \\ p \rightarrow s \\ p \wedge r \\ \hline \therefore (t \wedge r) \wedge s \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow (r \rightarrow (\neg t \vee s)) \\ p \wedge \neg s \\ \neg t \rightarrow u \\ r \\ \hline \therefore u \end{array}$$

4. Equivalencias lógicas

Consideremos las siguientes frases:

- "Si la humedad se va podré secar la ropa este fin de semana."
- "Si no puedo secar la ropa este fin de semana es porque la humedad no se va."

Ambas frases son contingencias, pero se puede observar que si una es cierta la otra también. En este caso decimos que las proposiciones son lógicamente equivalentes.

Definición. Dos proposiciones e_1 y e_2 son lógicamente equivalentes (y escribimos $e_1 \Leftrightarrow e_2$) cuando $e_1 \leftrightarrow e_2$ es una tautología. En palabras, cuando la proposición e_1 es verdadera (respectivamente, falsa) si y solo si la proposición e_2 es verdadera (respectivamente, falsa).

Ejemplo. Probemos que las dos proposiciones anteriores son lógicamente equivalentes, para ello realizamos la tabla de verdad.

Sean:

p: La humedad se va este fin de semana.

q: Puedo secar la ropa este fin de semana.

La formalización de la primer proposición es: $p \to q$, y de la segunda: $\neg q \to \neg p$

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Observemos que hemos probado que la implicancia es lógicamente equivalente a la contrarrecíproca.

Ejercicio. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes?

- $\neg p \vee q$
- $\neg p \to \neg q$
- $p \to q$
- $p \vee \neg q$

Observación. Podemos probar que $p \Leftrightarrow q$, probando que $p \Rightarrow q$ y que $q \Rightarrow p$, esto es puede observar fácilmente de la realización de las tablas de verdad.

Es posible entonces valerse de las reglas de deducción natural para probar equivalencias lógicas.

Ejemplo. Probemos que $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ usando deducción natural.

- $\neg\neg p \Rightarrow p$

	Razones
1) $\neg\neg p$	premisa
2) p	$e_\neg$ (1)

$\therefore \neg\neg p \Rightarrow p$

- $p \Rightarrow \neg\neg p$

	Razones
1) p	premisa
2) $\neg p$	hipótesis
3) F_0	i_{F_0} (1) y (2)
4) $\neg p \to F_0$	$i_\to$ (2-3)
5) $\neg\neg p$	$i_\neg$ (4)

$\therefore p \Rightarrow \neg\neg p$

$\therefore \neg\neg p \Leftrightarrow p$

Observación. Dos equivalencias lógicas conocidas son:

- $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

Concluímos que los operadores lógicos $\to$ y $\leftrightarrow$ pueden ser eliminados de cualquier proposición utiizando las equivalencias anteriores.

Es decir que podemos representar cualquier proposición con este conjunto de los operadores lógicos: $\{\wedge, \vee, \neg\}$

5. Leyes de la lógica

Ya hemos visto dos formas de probar equivalencias lógicas, mediante tablas de verdad y utilizando las reglas de deducción natural. Para simplificar y acortar las pruebas en adelante podremos usar las siguientes leyes de la lógica. Las mismas se pueden probar con las herramientas ya vistas hasta el momento.

Sean p, q y r proposiciones, τ una tautología y F_0 una contradicción.

- *Ley de la doble negación:*
$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$
Ejemplo : "No es cierto que no va a jugar Messi el mundial" es equivalente a "Messi va a jugar el mundial"

- *Leyes de De Morgan:*
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
Ejemplo: "No es cierto que llueve y hace frío" es equivalente a "No llueve o no hace frío"

- *Leyes conmutativas:*
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$
$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

- *Leyes de asociativas:*
$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

- *Leyes de distributivas:*
$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- *Leyes idempotentes:*
$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$
$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

- *Leyes del neutro:*
$$p \wedge \tau \Leftrightarrow p$$
$$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$$

- *Leyes inversas:*
$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$$
$$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$$

- *Leyes de dominación:*
$$p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$$
$$p \vee \tau \Leftrightarrow T_0$$

- *Leyes de absorción:*
$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$
$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

- *Negación de tautología:*
$$\neg\tau \Leftrightarrow F_0$$

- *Negación de contradicción:*
$$\neg F_0 \Leftrightarrow \tau$$

Ejemplo.
- Probemos que $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p$

	Razones
$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow$	
$(p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow$	Ley de De Morgan
$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Leftrightarrow$	Ley de doble negación
$p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow$	Ley distributiva
$p \vee F_0 \Leftrightarrow$	Ley inversa
p	Ley del neutro

- Probemos que $\neg((p \vee (q \wedge r)) \vee \neg p) \vee ((q \to r) \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg q$

	Razones
$\neg((p \vee (q \wedge r)) \vee \neg p) \vee ((q \to r) \wedge \neg q) \Leftrightarrow$	
$\neg(((q \wedge r) \vee p) \vee \neg p) \vee ((q \to r) \wedge \neg q) \Leftrightarrow$	Ley conmutativa
$\neg((q \wedge r) \vee (p \vee \neg p)) \vee ((q \to r) \wedge \neg q) \Leftrightarrow$	Ley asociativa
$\neg((q \wedge r) \vee \tau) \vee ((q \to r) \wedge \neg q) \Leftrightarrow$	Ley inversa
$\neg \tau \vee ((q \to r) \wedge \neg q) \Leftrightarrow$	Ley de dom. y conmut.
$F_0 \vee ((q \to r) \wedge \neg q) \Leftrightarrow$	
$(q \to r) \wedge \neg q \Leftrightarrow$	Ley del neutro
$(\neg q \vee r) \wedge \neg q \Leftrightarrow$	Definición de $\to$
$\neg q \wedge (\neg q \vee r) \Leftrightarrow$	Ley conmutativa
$\neg q$	Absorción

Ejercicio. Demostrar usando las leyes de la lógica:

1. $\neg(\neg((p \vee q) \wedge r) \vee \neg q) \Leftrightarrow q \wedge r$
2. $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
3. $(p \wedge ((q \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r))) \vee r \Leftrightarrow r$
4. $\neg p \leftrightarrow \neg q \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg q \wedge p)$

Definición. Sea s una proposición. Si s no contiene conectos lógicos distintos de $\wedge$ y $\vee$, entonces el dual de s, que se denota como s^d, es la proposición que se obtiene de s al reemplazar cada ocurrencia de $\wedge$ y $\vee$ con $\vee$ e $\wedge$, respectivamente, y cada ocurrencia de τ y F_0 con F_0 y τ, respectivamente.

Ejemplo.

- Sea $s : p \vee q \vee T_0$

  Es posible obtener el dual de s ya que solo posee el conectivo $\vee$.

  Su dual es $s^d : p \wedge q \wedge F_0$

- Sea $s : (p \vee q) \wedge (p \wedge F_0)$

  Es posible obtener el dual de s ya que solo posee los conectivos $\wedge$ y $\vee$.

  Su dual es $s^d : (p \wedge q) \vee (p \vee \tau)$

- Sea $s : (p \to q) \wedge r$

  No es posible obtener el dual de s ya que posee el conectivo $\to$. ¿Se puede encontrar una proposición equivalente a s que sí posea dual?

6. Principio de dualidad

Sean s y t proposiciones como las descritas en la definición de dual. Si $s \Leftrightarrow t$, entonces $s^d \Leftrightarrow t^d$.

Ejemplo. Un ejemplo de la validez del principio se puede observar en las *Leyes conmutativas*.

Sean $s : p \wedge q$, y $t : q \wedge p$. Sabemos por la primera ley conmutativa que $s \Leftrightarrow t$. El principio de dualidad nos dice que $s^d \Leftrightarrow t^d$. Esto nos demuestra la segunda ley conmutativa ya que $s^d = p \vee q$ y $t^d = q \vee p$.

El principio de dualidad es una herramienta más para probar equivalencias lógicas.

Observación. Dado que si $P \Leftrightarrow Q$, la propoción $P \leftrightarrow Q$ es una tautología, por cada ley de la forma $P \Leftrightarrow Q$ podemos derivar dos reglas de inferencia correspondientes a las implicaciones $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$:

$$\frac{P}{\therefore Q} \qquad \frac{Q}{\therefore P}$$

Por ejemplo, por las leyes de De Morgan podemos decir que son ciertas las siguientes reglas:

$$\frac{\neg(p \wedge q)}{\therefore \neg p \vee \neg q} \qquad \frac{\neg p \vee \neg q}{\therefore \neg(p \wedge q)} \qquad \frac{\neg(p \vee q)}{\therefore \neg p \wedge \neg q} \qquad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\therefore \neg(p \vee q)}$$

Por esta razón, se podrían usar usar las leyes de la lógica en las demostraciones de implicaciones lógicas.