Unidad 2: Lógica de predicados

Lógica (IA1.1)

Tecnicatura Universitaria en Inteligencia Artificial

Branco Blunda

2025

Índice

1. Introducción

La lógica proposicional permite formalizar y validar razonamientos, pero es insuficiente para razonamientos simples que dependen de la estructura interna de las proposiciones.

Ejemplo 1.1 (Razonamiento de Sócrates)**.** "Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal..En lógica proposicional: $(p \wedge q) \rightarrow r$, donde p= "Sócrates es un hombre", q= "Todos los hombres son mortales", r= "Sócrates es mortal". La validez no se captura bien, depende de la estructura interna y la relación "Todos los A son B", Ç es un A", ∴ Ç es un B".

Para analizar esta estructura, extendemos la lógica proposicional con:

- Predicados.
- Cuantificadores universal ($\forall$) y existencial ($\exists$).
- Reglas para cuantificadores.

Esta nueva lógica se llama **lógica de predicados** o **lógica de primer orden**.

2. Lógica de Predicados

Consideremos proposiciones como "Nico es albañil", "Bruno es albañil". Tienen en común afirmar que un individuo tiene una propiedad.

Podemos definir una función (predicado) $a(x)$ = "x es albañil. Al sustituir x por nombres (Nico, Bruno), obtenemos las proposiciones originales: $a(\text{Nico}), a(\text{Bruno})$.

Definición 2.1. Un **predicado** es una función f que devuelve un valor de verdad (1 para Verdadero, 0 para Falso). Se escribe $f : A \rightarrow \{1, 0\}$, donde A representa un conjunto (universo).

Ejemplo 2.1.

- $f(x) = x > 5$ (predicado unario, universo podría ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$)
- $g(x) = \text{div } x \ 2 = 0$ (es decir, "x es par", predicado unario)
- $h(x, y)$ = "x es múltiplo de y (predicado binario)
- $m(x)$ = "x es mortal
- $h(x)$ = "x es un hombre

Aplicados a valores específicos, los predicados forman proposiciones: $f(6)$ es V, $f(3)$ es F, $h(\text{Sócrates})$, $m(\text{Pepe})$.

2.1. Cuantificador Universal ($\forall$)

Para expresar "todos los hombres son mortales", necesitamos cuantificar sobre la variable x. Usamos el **cuantificador universal** ($\forall$), que se lee "para todo".

Ejemplo 2.2. Usando $h(x)$ = "x es un hombre y $m(x)$ = "x es mortal:

$$\forall x.(h(x) \rightarrow m(x))$$

Se lee "Para todo x, si x es un hombre, entonces x es mortal".

Definición 2.2. El **cuantificador universal** ($\forall$) se antepone a una variable y se lee "para todo x", "para cada x.º "para cualquier x". La variable x pertenece a un **conjunto universo** U (ej. números, personas). A menudo, definimos U aparte en lugar de escribir $x \in U$.

Ejemplo 2.3 (Formalizaciones con $\forall$)**.**

- "Para todo número real x, si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$."
  - Universo U = $\mathbb{R}$
  - Predicados: $p(x) = x > 0$, $t(x) = x^2 > 0$
  - Formalización: $\forall x.(p(x) \to t(x))$
- Çualquier número real positivo no es par."
  - Universo U = $\mathbb{R}$
  - Predicados: $p(x) = x > 0$, $par(x) =$ "x es par
  - Formalización: $\forall x.(p(x) \to \neg par(x))$
- .El cuadrado de un número entero es mayor a 2 o el número es par."
  - Universo U = $\mathbb{Z}$
  - Predicados: $c(x) = x^2 > 2$, $par(x) =$ "x es par
  - Formalización: $\forall x.(c(x) \vee par(x))$
- "No todos los números pares son positivos."(Equivale a: Es falso que todos los números pares son positivos)
  - Universo U = $\mathbb{Z}$
  - Predicados: $par(x) =$ "x es par, $p(x) = x > 0$
  - Formalización: $\neg(\forall x.(par(x) \to p(x)))$

Observación 2.1. La formalización de este tipo de proposiciones tiene 3 partes:

1. Definición de universo (si lo hubiera).
2. Definición de predicados.
3. Traducción de la expresión.

Ejemplo 2.4 (Razonamiento de Sócrates Formalizado)**.** Universo: Seres. Predicados: $h(x)$="x es hombre", $m(x)$="x es mortal".

$$\frac{\forall x.(h(x) \to m(x)) \quad h(\text{Sócrates})}{\therefore m(\text{Sócrates})}$$

2.2. Cuantificador Existencial ($\exists$)

Para expresar .Algún hombre es técnico en inteligencia artificial", necesitamos el **cuantificador existencial** ($\exists$), que se lee .existe".

Ejemplo 2.5. Usando $h(x)$="x es hombre", $t(x)$="x es técnico en IA":

$$\exists x.(h(x) \wedge t(x))$$

Se lee .Existe un x tal que x es hombre y x es técnico en IA". (Nota: Se usa $\wedge$, no $\to$).

Definición 2.3. El **cuantificador existencial** ($\exists$) se antepone a una variable y se lee .existe x", "para algún x.o "para al menos un x".

Ejemplo 2.6 (Formalizaciones con $\exists$)**.**

- .Existe un número real par distinto de dos."

- Universo U = $\mathbb{R}$
- Predicados: $par(x)$, $q(x) = (x \neq 2)$
- Formalización: $\exists x.(par(x) \wedge q(x))$

- .Algunos animales tienen garras o dientes afilados."
  - Universo U = Animales
  - Predicados: $g(x)$="x tiene garras", $d(x)$="x tiene dientes afilados"
  - Formalización: $\exists x.(g(x) \vee d(x))$
- .Existe un número x positivo que es solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$."
  - Universo U = $\mathbb{R}$
  - Predicados: $pos(x) = (x > 0)$, $s(x) = (x^2 - 3x - 4 = 0)$
  - Formalización: $\exists x.(pos(x) \wedge s(x))$
- "Ningún número x positivo es solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$."(Equivale a: Es falso que existe un x positivo...)
  - Mismos U, predicados.
  - Formalización: $\neg(\exists x.(pos(x) \wedge s(x)))$

2.3. Verdad y Falsedad de Proposiciones Cuantificadas

Proposición	**¿Cuándo es Verdadera?**	**¿Cuándo es Falsa?**
$\exists x.p(x)$	$p(a)$ es V para *al menos un* a del universo.	$p(a)$ es F para *cualquier* a del universo.
$\forall x.p(x)$	Para *cada* reemplazo de a en el universo, $p(a)$ es V.	Existe *al menos un* reemplazo a en el universo para el cual $p(a)$ es F.

Ejemplo 2.7 (Evaluación de Verdad)**.** Universo U = $\mathbb{Z}$. Predicado $f(x, y) = (x \geq y)$.

- $\forall x.f(x, 0)$ ("Todos los enteros son ≥ 0"): Falso (contraejemplo: $x = -3$, $f(-3, 0)$ es F).
- $\exists x.\neg f(0, x)$ (.Existe un entero x tal que $0 < x$"): Verdadero (ejemplo: $x = 3$, $\neg f(0, 3)$ es V).
- $\neg(\forall x.\neg f(0, x))$ ("No todos los enteros son ≤ 0"): Verdadero (es la negación de una falsedad).
- $\forall x.(\exists y.f(x, y))$ (Çualquier entero es mayor o igual a algún entero"): Verdadero (para cualquier x, podemos elegir $y = x$, y $f(x, x)$ es V).
- $\neg(\exists x.(\forall y.f(x, y)))$ ("Ningún entero es mayor o igual a todos los enteros"): Verdadero (no existe un entero máximo).

2.4. Cuantificadores Anidados

Es necesario cuantificar sobre múltiples variables para ciertas proposiciones.

Ejemplo 2.8.
- "La suma de dos números reales positivos es positiva."
  - Universo U = $\mathbb{R}$
  - Predicado: $pos(x) = (x > 0)$

- Formalización: $\forall x.\forall y.((pos(x) \wedge pos(y)) \rightarrow pos(x+y))$
- El orden de $\forall x.\forall y$ se puede intercambiar sin cambiar el significado: $\forall y.\forall x.(\dots)$.

- "Todos aman a alguna otra persona."
  - Universo U = Personas
  - Predicado: $a(x, y) =$ "x ama a y
  - Formalización: $\forall x.\exists y.a(x, y)$
- .Alguien es amado por todos."
  - Mismos U, predicado.
  - Formalización: $\exists y.\forall x.a(x, y)$

Importante: El orden de cuantificadores distintos ($\forall$ y $\exists$) altera el significado. $\forall x.\exists y.P(x, y)$ no es lo mismo que $\exists y.\forall x.P(x, y)$.

3. Deducción Natural con Cuantificadores

Las tablas de verdad no son viables para la lógica de predicados. Extendemos el sistema de deducción natural.

3.1. Reglas de Inferencia para Cuantificadores

- **Introducción de** $\forall$ **(**$i_\forall$**):** $\boxed{\begin{array}{l} a \\ \vdots \\ p(a) \end{array}}$

$$\frac{}{\therefore \forall x.p(x)}$$

  Restricción: La constante a (que representa un elemento arbitrario del universo) **no** debe ocurrir fuera de la çaja"(subdemostración).

- **Eliminación de** $\forall$ **(**$e_\forall$**):**

$$\frac{\forall x.p(x)}{\therefore p(a)}$$

  Donde a es *cualquier* elemento (constante o término) del universo.

- **Introducción de** $\exists$ **(**$i_\exists$**):**

$$\frac{p(a)}{\therefore \exists x.p(x)}$$

  Donde a es un elemento (constante o término) del universo para el cual se sabe $p(a)$.

- **Eliminación de** $\exists$ **(**$e_\exists$**):** $\boxed{\begin{array}{l} a \quad [p(a)] \\ \vdots \\ q \end{array}}$

$$\frac{\exists x.p(x)}{\therefore q}$$

  Restricciones:
  - La constante a **no** debe ocurrir fuera de la caja.

- a **no** debe ocurrir en $\exists x.p(x)$.
- a **no** debe ocurrir en q.

(Idea: Si sabemos que existe un x tal que $p(x)$, podemos llamarlo a temporalmente. Si de suponer $p(a)$ podemos derivar q (sin usar a en q), entonces q se sigue de $\exists x.p(x)$.)

Ejemplo 3.1 (Demostración Razonamiento Sócrates)**.** 1. $\forall x.(h(x) \to m(x))$ (Premisa)

2. $h(\text{Sócrates})$ (Premisa)
3. $h(\text{Sócrates}) \to m(\text{Sócrates})$ ($e_\forall$ (1), instanciando con $a =$ Sócrates)
4. $m(\text{Sócrates})$ ($e_\to$ (3), (2))

Ejemplo 3.2 (Demostración 2 del PDF)**.** Premisas: $\forall x.(p(x) \to q(x))$, $\forall x.p(x)$. Conclusión: $\forall x.q(x)$.

1. $\forall x.(p(x) \to q(x))$ (Premisa)
2. $\forall x.p(x)$ (Premisa)
3. | a (fresh constant)

[resume]$p(a)$ ($e_\forall$ (2)) $p(a) \to q(a)$ ($e_\forall$ (1)) $q(a)$ ($e_\to$ (5), (4)) |
   |---|

4) $\forall x.q(x)$ ($i_\forall$ (3-6))

Ejemplo 3.3 (Demostración 3 del PDF)**.** Premisa: $\forall x.p(x)$. Conclusión: $\exists x.p(x)$. (Requiere universo no vacío).

1. $\forall x.p(x)$ (Premisa)
2. $p(a)$ ($e_\forall$ (1), para algún a del universo)
3. $\exists x.p(x)$ ($i_\exists$ (2))

Ejemplo 3.4 (Demostración 4 del PDF)**.** Premisas: $\forall x.(p(x) \to q(x))$, $\exists x.p(x)$. Conclusión: $\exists x.q(x)$.

1. $\forall x.(p(x) \to q(x))$ (Premisa)
2. $\exists x.p(x)$ (Premisa)
3. | a [$p(a)$] (Hipótesis para $e_\exists$, a es fresh)

[resume]$p(a) \to q(a)$ ($e_\forall$ (1)) $q(a)$ ($e_\to$ (4), (3)) $\exists x.q(x)$ ($i_\exists$ (5)) |
   |---|

4) $\exists x.q(x)$ ($e_\exists$ (2), (3-6))

4. Equivalencias Lógicas con Cuantificadores

Existen equivalencias lógicas conocidas que involucran cuantificadores. Se pueden probar con las herramientas vistas (deducción natural).

- **Negación de Cuantificadores:**
  - $\neg(\forall x.p(x)) \Leftrightarrow \exists x.\neg p(x)$ (Ej: ”No todas las aves vuelan”$\Leftrightarrow$ .Existe un ave que no vuela”)
  - $\neg(\exists x.p(x)) \Leftrightarrow \forall x.\neg p(x)$ (Ej: ”Ningún ave vuela”$\Leftrightarrow$ Çualquier ave no vuela”)

- **Leyes Distributivas (parciales):**
  - $\forall x.(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\forall x.p(x)) \wedge (\forall x.q(x))$
  - $\exists x.(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists x.p(x)) \vee (\exists x.q(x))$
  - *Nota:* $\forall$ no distribuye sobre $\vee$, $\exists$ no distribuye sobre $\wedge$.

Ejemplo 4.1 (Uso de Equivalencias en Deducción)**.** Demostrar: $\forall x.(p(x) \vee q(x)), \neg(\forall x.p(x)) \implies \exists x.q(x)$.

1. $\forall x.(p(x) \vee q(x))$ (Premisa)
2. $\neg(\forall x.p(x))$ (Premisa)
3. $\exists x.\neg p(x)$ (Negación de $\forall$ (2))
4. | |
   |---|
   | a $[\neg p(a)]$ (Hipótesis para $e_\exists$, a es fresh) |
   | [resume]$p(a) \vee q(a)$ ($e_\forall$ (1)) $q(a)$ (Silogismo Disyuntivo (SD) (5), (4)) $\exists x.q(x)$ ($i_\exists$ (6)) |
5. $\exists x.q(x)$ ($e_\exists$ (3), (4-7))