FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

TECNICATURA UNIVERSITARIA EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

MATEMÁTICA 2023

PRÁCTICA: **Unidad 1**

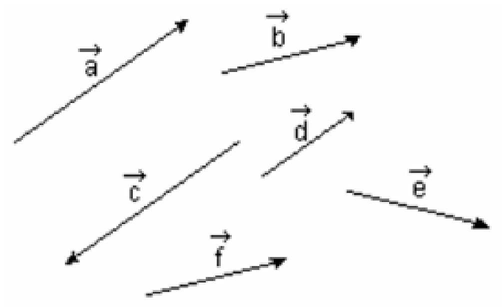
1. Observe los vectores definidos gráficamente y nombre aquellos que:

   a) tienen la misma dirección,

   b) poseen el mismo sentido,

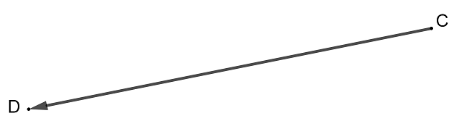
   c) tienen el mismo módulo,

   d) son iguales



2. Dibuje un vector con sentido contrario a $\overrightarrow{AB}$

3. Dibuje un vector paralelo a $\overrightarrow{CD}$, de distinto módulo.



4. Dados los puntos $M(1,3)$, $N(3,7)$, $P(5,1)$ y $Q(2,6)$, determine si los siguientes pares de vectores son iguales:

a) $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{NQ}$

b) $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$

5. Grafique tres vectores cualesquiera, no paralelos, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y halle:

a) $\vec{u}+\vec{v}$

b) $\vec{v}-\vec{w}$

c) $2\vec{u}$

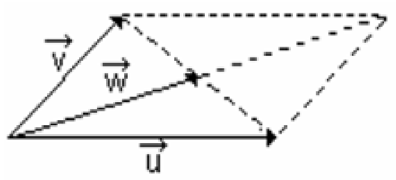
d) $-3\vec{v}$

e) $\frac{1}{2}\vec{w}$

f) $\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{w}$

6. Grafique tres vectores cualesquiera, no paralelos, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Halle $3\vec{u}-\vec{w}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

7. La figura dada es un paralelogramo. Exprese $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



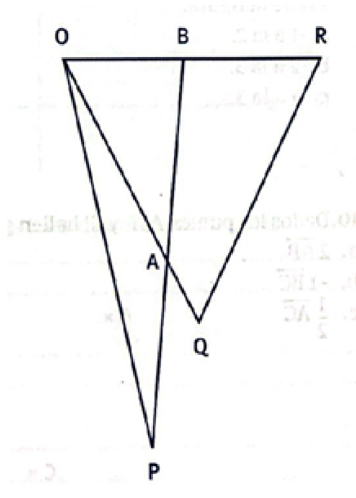
8. Sabiendo que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$; $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{u}$; $\overrightarrow{BR}=\vec{v}$ y que $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BA}$, expresen los siguientes vectores en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

a) $\overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{BP}$

c) $\overrightarrow{RQ}$

d) $\overrightarrow{QA}$



9. En el paralelepípedo recto de la figura se consideran los vectores que coinciden con las siguientes aristas $\vec{m}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{n}=\overrightarrow{AD}$; $\vec{p}=\overrightarrow{AE}$. Obtenga gráficamente los vectores:

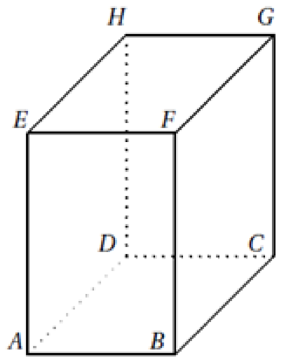
a) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$

b) $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$

c) $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}.\vec{p}$

d) $\frac{1}{2}.\vec{m}+\frac{1}{2}.\vec{n}+\vec{p}$

e) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}.\vec{p}$



10. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) $|\vec{v}| > |\vec{v_0}|$

    b) Si $|\vec{v}| > |\vec{u}|$ entonces $|\vec{v_0}| > |\vec{u_0}|$

    c) Si $\vec{u}$ es un vector no nulo, entonces el vector $\dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ es un versor.

    d) Cualesquiera sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vale que $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$

11. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores cualesquiera, pruebe analíticamente que $\left(\vec{v}-\frac{1}{5}\vec{w}\right)$ y $(\vec{w}-5\vec{v})$ son paralelos.

12. En base a los datos $|\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 2$, $(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$, calcule:

    a) $\vec{u}\cdot\vec{u}$

    b) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

    c) $\vec{u}\cdot(-\vec{v})$

    d) $\vec{u}\cdot\vec{v_0}$

    e) $(3\vec{u})\cdot(-2\vec{v})$

    f) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

    g) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

    h) $(3\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$

13. Determine $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$; $|\vec{v}| = 4$ y $(\vec{u}\,\widehat{,}\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

14. Determine $|\vec{u}+\vec{v}|$, sabiendo que $|\vec{u}| = 11$, $|\vec{v}| = 23$ y $|\vec{u}-\vec{v}| = 30$

Vectores por componentes

15. Grafique los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$ en un mismo sistema de ejes coordenados:

a) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ *b*) $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{w} = \vec{j} - \vec{i}$ *d*) $\vec{s} = -\vec{i} - 3\vec{j}$

16. Grafique en Geogebra 3D los siguientes vectores del espacio:

a) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ *b*) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k} + \vec{j}$ *c*) $\vec{w} = 2\vec{k} - \vec{j} + \vec{i}$

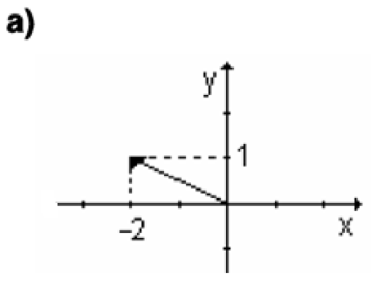
17. Dados los puntos A y B, determine las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$:

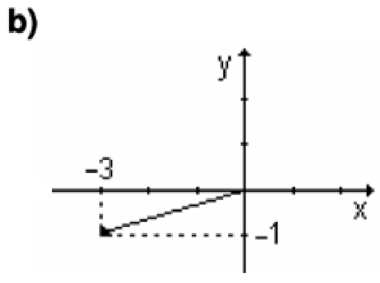
a) $A(-4,-2)$ y $B(5,1)$ *b*) $A(7,0)$ y $B(-5,0)$

c) $A(3,4,-2)$ y $B(5,7,8)$ *d*) $A(1,-1,2)$ y $B(-3,1,1)$

18. Halle el valor de α y β para que los puntos $A(\alpha,3)$ y $B(-2,\beta)$ determinen el vector $\overrightarrow{BA} = 5\vec{i} - \vec{j}$.

19. Determine las componentes del vector $\vec{v}$ representado gráficamente:





20. Dados los puntos $P(-2,1,0)$ y $Q(3,-3,1)$ obtenga el vector $\overrightarrow{QP}$ y represéntelo gráficamente.

21. Calcule x para que los vectores dados sean iguales:

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 9 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = 9\vec{j} - 7\vec{i}$

b) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 5 \\ 3x-1 \end{bmatrix}$

22. Halle el módulo de los siguientes vectores:

a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *b)* $\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$ *d)* $\vec{d} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

23. Halle en cada caso el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ sabiendo que

a) $P(-2, 0, 1)$ y $Q(3, -1, 1)$ *b)* $P(2, 1, -1)$ y $Q(-1, 2, 1)$

c) $P(-2, 0)$ y $Q(1, 3)$ *d)* $P(1, 5)$ y $Q(4, 1)$

24. Calcule

a) el o los valores de m para que el módulo del vector determinado por $P(4, 5, m)$ y $Q(3, -2, 1)$ sea $\sqrt{51}$.

b) el o los valores de t para que el módulo del vector determinado por los puntos $A(-5, 6)$ y $B(t, 3)$ sea $\sqrt{10}$.

c) el o los valores de α para que el módulo del vector $\vec{v} = \vec{i} + (1 + \alpha)\vec{j} + (2 + \alpha)\,\vec{k}$ sea igual a $\sqrt{14}$.

25. Halle el versor asociado para cada uno de los siguientes vectores. Grafique.

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *b)* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ *c)* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

26. Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}$ en $\mathbb{R}^2$, calcule:

a) $\vec{u} - 2\vec{v}$ *b)* $2\vec{w} - \vec{u}$ *c)* el versor de $\vec{v} + \vec{w}$

27. Dados los vectores $\vec{m} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{n} = -2\vec{i} + 5\vec{k}$ y $\vec{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$, calcule:

a) $\vec{m} + \vec{n}$ *b)* $\vec{m} - \vec{p}$ *c)* $3\vec{m}$ *d)* $\frac{1}{2}\vec{n}$ *e)* $2\vec{m} - \vec{n}$

28. Determine $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabiendo que

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$ *b)* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

29. Sabiendo que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{3}{2}$, $\vec{u}=\begin{bmatrix}k\\-3\end{bmatrix}$ y $\vec{v}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$, calcule el valor de k.

30. Determine si los vectores $\vec{u}=-3\vec{i}-5\vec{j}$ y $\vec{v}=10\vec{j}+6\vec{i}$ son perpendiculares. Grafique.

31. Indique si los vectores $\vec{u}=-2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{v}=-6\vec{k}-10\vec{j}+4\vec{i}$ son paralelos. Grafique.

32. Sean los vectores $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ y $\vec{v}=\vec{i}+\alpha\vec{j}$, halle α para que resulten paralelos.

33. Encuentre las coordendas de un vector paralelo a $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\sqrt{12}\,\vec{k}$ de módulo 2, pero de sentido contrario.

34. Dados los vectores $\vec{u}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ y $\vec{v}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$, halle α y β para que sean paralelos y su producto escalar sea seis.

35. Sean los vectores $\vec{u}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ y $\vec{v}=\alpha\vec{i}-2\vec{j}$, determine el valor de α para que los dos vectores sean perpendiculares. Grafique.

36. Dados los vectores $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{k}$ y $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ en $\mathbb{R}^3$, halle un vector paralelo a $\vec{u}-\vec{v}$ de módulo tres.

37. Obtenga las componentes de un vector paralelo al vector $\vec{u}=5\vec{i}+12\vec{j}$ de módulo dos y de sentido opuesto.

38. Dado el vector $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$, halle un vector paralelo a $\vec{v}$ de igual sentido, y que mida la mitad.

39. Halle dos vectores perpendiculares a $\vec{w}=-\vec{i}+3\vec{j}$. Grafique.

40. Halle un versor perpendicular a $\vec{u}=6\vec{i}-3\vec{j}$. Grafique.

41. Calcule el ángulo que forman los vectores $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ y $\vec{v}=-\vec{i}+4\vec{j}$.

42. Dado el vector $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$, halle el ángulo que forma con el semieje positivo de las abscisas.

43. Encuentre el ángulo que determinan los vectores $\vec{w}=\vec{i}-\vec{j}$ y $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

44. Dados los vectores $\vec{u}=5\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{v}=-4\vec{i}+\vec{k}$, halle $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}$ y $\overrightarrow{proy_{\vec{u}}\ \vec{v}}$.

45. Obtenga el valor de α sabiendo que $\left|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right|=2$, $\vec{u}=\begin{bmatrix}\alpha\\2\end{bmatrix}$ y $\vec{v}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$

46. Calcule en cada caso el producto vectorial indicado. Utilice Geogebra 3D o algún software similar para comprobar gráficamente el resultado obtenido.

   a) $\vec{i} \times \vec{j}$

   b) $\vec{j} \times \vec{i}$

   c) $\vec{j} \times \vec{k}$

   d) $\vec{k} \times \vec{j}$

   e) $\vec{k} \times \vec{i}$

   f) $\vec{i} \times \vec{k}$

   g) $\vec{u} \times \vec{v}$ donde $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}$

   h) $\vec{u} \times \vec{v}$ donde $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   i) $\vec{u} \times \vec{v}$ donde $\vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

47. Sabiendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ y que $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$, calcule $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

48. Sabiendo que $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 3$ y que $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$, calcule $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

49. Sabiendo que $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ y que $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$, calcule $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

50. Resuelva analíticamente cada uno de los siguientes items. Luego, utilice Geogebra 3D para comprobar gráficamente el resultado obtenido.

   a) Encuentre un vector perpendicular a $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y a $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$.

   b) Encuentre un vector perpendicular a $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y a $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$ ***cuyo módulo sea 1***.

c) Encuentre un vector perpendicular a $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ y a $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

d) Encuentre un vector perpendicular a $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ y a $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ***cuyo módulo sea 2***.

51. Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

52. Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

53. Calcule el producto mixto $(\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}))$ entre las siguientes ternas de vectores:

a) $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

b) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$

c) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$

d) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{k} - 2\vec{j} + 3\vec{i}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$

54. Determine, en cada item, cuáles de los vectores del ejercicio anterior son coplanares. Justifique adecuadamente.

55. Para los vectores del ejercicio 54 que no son coplanares, considere el paralelepípedo construido a partir de dichos vectores. Halle el volumen.

56. Halle el valor de x para que los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ resulten coplanares. Represente gráficamente.

57. Determine si los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(2, -1, 0)$ y $D(-2, 3, 4)$ están en un mismo plano.