Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Tecnicatura Universitaria en Inteligencia Artificial

Matemática

Autora: Lic Sofía Leegstra

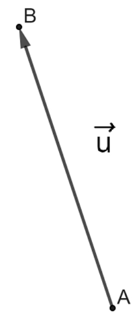
Febrero 2024

Unidad 1

Vectores en el plano y en el espacio

1. Vectores

Definición 1.1. *Dados dos puntos A y B, se llama* ***segmento orientado*** $\overrightarrow{AB}$ *al segmento que tiene origen en A y extremo en B.*
A un segmento orientado le llamaremos ***vector****. El punto A es el origen del vector y el punto B es el extremo del mismo.*



Notación: usualmente notaremos a los vectores con las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, etc.

Hay tres cuestiones que definen implicitamente a un vector, y son las siguientes:

- Dirección: esta dada por la recta que determinan los extremos.
- Sentido: es el que indica cuál es el origen y cuál el extremo del vector.
- Módulo: es la longitud del segmento determinado por el punto origen y el punto extremo.

Definición 1.2. *Un vector nulo es todo aquel de módulo cero. Su imagen geométrica es un punto.*

Observación: El vector nulo no tiene ni dirección ni sentido. Se indica como $\vec{0}$.

Definición 1.3. *Diremos que dos vectores son* ***iguales*** *si y sólo si:*

- *ambos tienen módulo cero; o bien,*
- *ambos tienen igual dirección, sentido y módulo.*

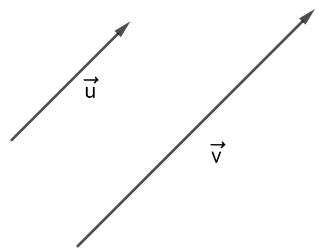
Definición 1.4. *Se llama* ***versor*** *a todo vector de módulo 1.*

Definición 1.5. *Se denomina* ***versor asociado a un vector*** $\vec{v}$ *a un vector que tenga igual sentido y dirección que* $\vec{v}$*, pero de módulo 1.*

Observación: Por lo visto anteriormente, podemos deducir que dado un vector $\vec{v}$ no nulo, existe un único versor asociado a él. Lo notaremos $\vec{v_0}$.

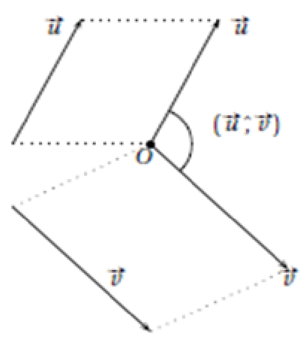
Definición 1.6. *Dado un vector* $\vec{u}$*, se llama vector* ***opuesto*** *de* $\vec{u}$ *y lo designamos como* $-\vec{u}$ *al vector que tenga igual dirección y módulo, pero sentido contrario.*

Definición 1.7. *Dos vectores son* ***paralelos*** *cuando tienen igual dirección. Para indicar que* $\vec{u}$ *es paralelo al vector* $\vec{v}$*, usaremos la notación* $\vec{u} \parallel \vec{v}$*.*



Observación: De lo anterior concluimos que un vector no nulo $\vec{u}$ es paralelo a su versor asociado $\vec{u_0}$ y también a $-\vec{u}$.

Definición 1.8. *Dados dos vectores no nulos* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*, se define el ángulo entre ambos vectores y se lo representa por* $(\vec{u} \widehat{,} \vec{v})$*, al ángulo convexo determinado por dichos vectores cuando sus orígenes se aplican en un punto en común. Si* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son paralelos se define el ángulo entre ellos de* $0°$ *o* $180°$*, según sean de igual sentido o de sentido opuesto.*



Observación: Consecuencias inmediatas de la definición:

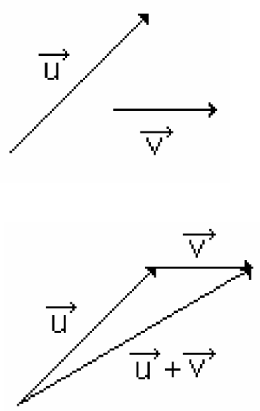
- $0 \leq (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \leq \pi$
- $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$
- $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = \pi$

Definición 1.9. *Diremos que $\vec{u}$ es* ***perpendicular*** *a $\vec{v}$ si entre ellos forman un ángulo recto. Usaremos la notación $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

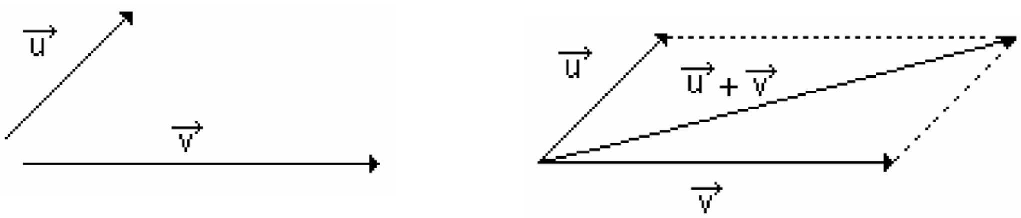
2. Operaciones entre vectores

Suma

La suma de dos vectores es otro vector que se obtiene como resultante de la poligonal de dos lados formada por los vectores dados. Se dibuja el vector $\vec{u}$ y se traslada la representación del vector $\vec{v}$ de manera que su origen coincida con el extremo de $\vec{u}$. El vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ tiene origen en el origen de $\vec{u}$ y extremo en el extremo de $\vec{v}$.



La suma también puede efectuarse a través de la regla del paralelogramo. Se dibuja un paralelogramo considerando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con un origen común y lados del mismo. El vector $\vec{u}+\vec{v}$ es el que resulta con origen en el punto común y determina la diagonal del paralelogramo.



Teorema: *Propiedades de la suma*

Cualesquiera sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se verifica:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. [Propiedad Conmutativa]

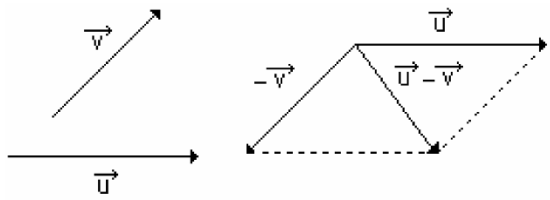
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$. [Propiedad Asociativa]

3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$. [Existencia del elemento neutro]

4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$. [Existencia del elemento opuesto]

Resta

La resta o diferencia entre dos vectores es otro vector que se define como $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Producto de un vector por un escalar

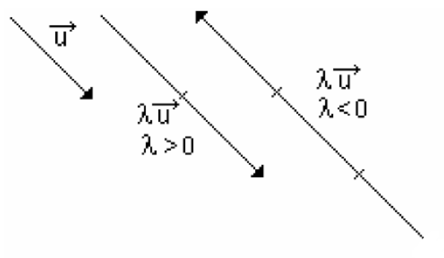
El producto de un vector $\vec{u}$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, es otro vector, que notaremos $\lambda\vec{u}$, y que tiene las siguientes características:

- $|\lambda\vec{u}| = |\lambda|\,|\vec{u}|$

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\lambda \neq 0$, entonces los vectores $\vec{u}$ y $\lambda\vec{u}$ tienen la misma dirección.

- Si $\lambda > 0$ entonces $\lambda\vec{u}$ tiene igual sentido que $\vec{u}$.

  Si $\lambda < 0$ entonces $\lambda\vec{u}$ tiene sentido contrario a $\vec{u}$.



Observaciones:

1. $\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda\vec{u} = \vec{0}$

2. $\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda\vec{u} = \vec{u}$

3. $\lambda = -1 \Longrightarrow \lambda\vec{u} = -\vec{u}$

Observación: Por la definición dada anteriormente, podemos afirmar que, si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda\vec{u}$ y $\vec{u}$ son vectores paralelos.

Teorema: *Condición de paralelismo entre vectores.*

Dos vectores no nulos son paralelos si y solamente si uno puede expresarse como el producto del otro vector por un número real.

En símbolos: Dados $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \vec{u} = \lambda\vec{v}$$

Teorema: *Propiedades del producto de un vector por un escalar*

Cualesquiera sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y sean α, β en $\mathbb{R}$ se verifica:

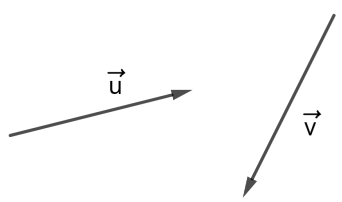
(a) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ [Propiedad distributiva respecto de la suma de números]

(b) $\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ [Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores]

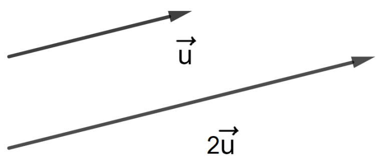
(c) $(\alpha\beta)\,\vec{u} = \alpha\,(\beta\vec{u})$. [Propiedad asociativa mixta]

(d) $1.\vec{u} = \vec{u}$. [Existencia del elemento neutro]

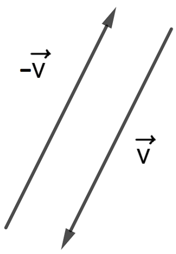
Ejemplo: Grafique dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no paralelos y halle $2\vec{u} - \vec{v}$:



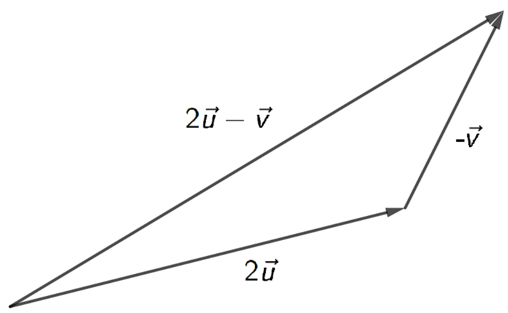
Para realizar esta operación debemos hallar primero $2\vec{u}$. Lo hacemos considerando un vector de igual dirección y sentido que $\vec{u}$, pero de módulo doble.



Luego calcularmos $-\vec{v}$, que es el vector de igual dirección y módulo pero de sentido opuesto a $\vec{v}$:



Para hallar $2\vec{u} - \vec{v}$ le sumamos a $2\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$, o sea $2\vec{u} + (-\vec{v})$. Gráficamente:



Producto escalar entre vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se denomina **producto escalar** (o producto punto) al número real que se obtiene de la siguiente manera:

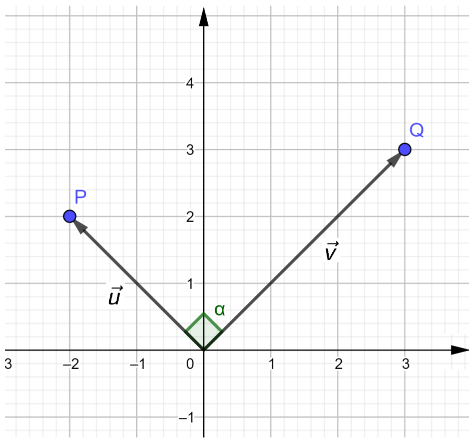
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \ \vee \ \vec{v} = \vec{0} \\ |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \ \wedge \ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Ejercicio: Considere los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, donde O es el origen de coordenadas, $P(-2, 2)$ y $Q(3, 3)$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Respuesta: Vemos que $\vec{u} \perp \vec{v}$, es decir, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Además $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



(Observar que en este caso no fue necesario calcular los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$)

Observación: Para todo vector $\vec{u}$ resulta

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = |\vec{u}|^2 \cos(0) = |\vec{u}|^2$$

Teorema: *Propiedades del producto escalar*

Cualesquiera sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. [Propiedad Conmutativa]
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. [Propiedad Distributiva]
3. $\alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$.
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, valiendo la igualdad si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$.

Teorema: *Condición de perpendicularidad entre vectores.*

Dos vectores no nulos son perpendiculares si y solamente si el producto escalar entre ambos es cero.

En símbolos: Dados $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$

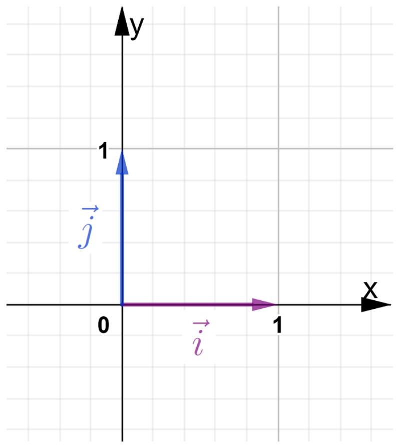
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Demostración: Ejercicio.

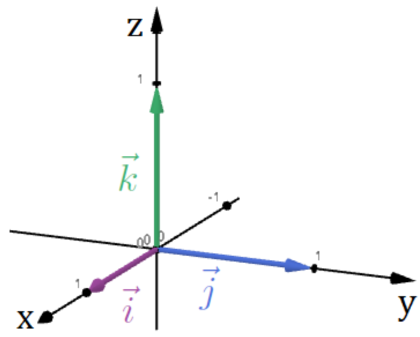
3. Versores fundamentales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los versores fundamentales son vectores de módulo uno, con origen en el origen de coordenadas, incluidos en los ejes y cuyo sentido señala el sentido positivo sobre los ejes.

En $\mathbb{R}^2$



En $\mathbb{R}^3$



Teorema: *Descomposición canónica de un vector*

Todo vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de los versores fundamentales.

Es decir, dado $\vec{v}$ vector de $\mathbb{R}^2$, existen únicos números reales v_1 y v_2 de manera tal que

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$

Usaremos la notación $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Análogamente para un vector $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, existen únicos números reales u_1, u_2 y u_3 tales que

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

A tales números se los llama **componentes** del vector en la base canónica.

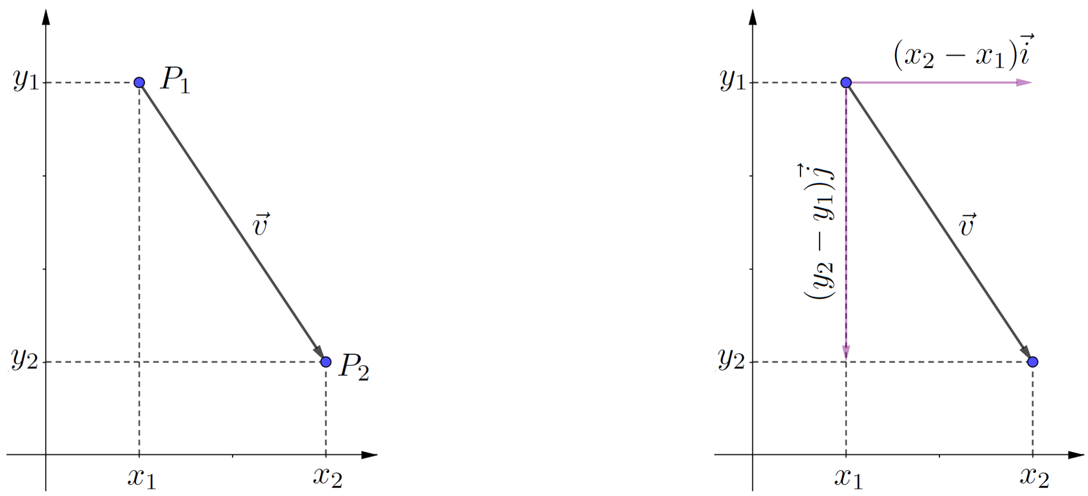
Sea $P(x, y)$ y supongamos que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, es decir, $\vec{v}$ es el vector posición del punto P.

Si hacemos $x\vec{i}$, después $y\vec{j}$, y luego los sumamos, obtendremos en efecto el vector $\vec{v}$. Con lo cual

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

¿Cómo hacemos para obtener las componentes de un vector cuyo origen no está en el origen de coordenadas?

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Consideremos el vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$.



Realizamos primero $(x_2 - x_1)\vec{i}$ y a continuación $(y_2 - y_1)\vec{j}$.

Si sumamos estos dos vectores, resultará

$$\vec{v} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Analogamente para vectores de $\mathbb{R}^3$:

Si $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ y $P(x, y, z)$, entonces

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Si $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ donde $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ entonces las componentes de $\vec{v}$ están dadas por

$$\vec{v} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Igualdad entre vectores

Dos vectores dados en función de sus componentes son iguales si y sólo si son iguales sus componentes homólogas.

En $\mathbb{R}^2$: Dados $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ se tiene que

$$\vec{v} = \vec{u} \iff \begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \end{cases}$$

En $\mathbb{R}^3$: Dados $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ se tiene que

$$\vec{v} = \vec{u} \iff \begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \\ v_3 = u_3 \end{cases}$$

Módulo de un vector

Dado un vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ su módulo se calcula mediante la fórmula

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Si el vector está en el espacio, se utilizará la fórmula

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

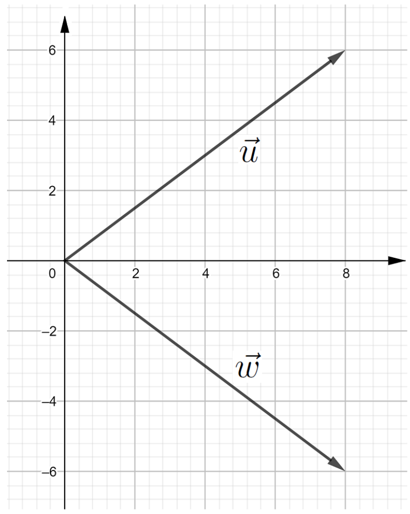
Ejemplo 1: Halle el módulo del vector $\vec{v} = 3\vec{k} - 2\vec{j} + \vec{i}$

Respuesta: $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Ejemplo 2: Sea el vector $\vec{u} = 8\vec{i} + \alpha\vec{j}$. Determine el valor de α de modo que su módulo sea 10. Represente gráficamente.

Respuesta: $|\vec{u}| = \sqrt{8^2 + \alpha^2} = 10 \iff 8^2 + \alpha^2 = 100 \iff \alpha^2 = 100 - 64 = 36 \iff |\alpha| = 6$

Entonces $\alpha = 6$ o $\alpha = -6$. Es decir, por lo tanto hay dos posibles vectores que cumplen el requisito solicitado. Ellos son: $\vec{u} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ y $\vec{w} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$



Teorema: *Operaciones con vectores dados por componentes*

Dados los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, las operaciones vistas anteriormente, se calculan de la siguiente manera:

Suma de vectores

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

Resta de vectores

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix}$$

Producto de un vector por un escalar

$$\lambda\vec{u} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, calcule analíticamente:

(a) $\vec{v} + 3\vec{u}$

(b) $-(\vec{u} - \vec{v})$

Respuesta:

(a) $\vec{v} + 3\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+9 \\ 1+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

(b) $-(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-3 \\ 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Versor asociado a un vector

Supongamos que queremos calcular el versor asociado al vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

Sabemos, por definición, que el versor asociado $\vec{u_0}$ tiene la misma dirección de $\vec{u}$, el mismo sentido y módulo 1.

Por tener la misma dirección, entonces existe un número real λ tal que $\vec{u_0} = \lambda\vec{u}$, y por tener el mismo sentido, deducimos que $\lambda > 0$.

Para hallar el valor de λ, usaremos el dato sobre el módulo, es decir que $|\vec{u_0}| = 1$.

Reemplazamos $\vec{u_0} = \lambda \vec{u}$ en $|\vec{u_0}| = 1$:

$|\vec{u_0}| = 1 \Longrightarrow |\lambda \vec{u}| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\lambda|\,|\vec{u}| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| = \dfrac{1}{|\vec{u}|} \overset{\lambda > 0}{\Longrightarrow} \lambda = \dfrac{1}{|\vec{u}|}$

Por lo tanto $\vec{u_0} = \dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{|\vec{u}|} \\ \frac{u_2}{|\vec{u}|} \end{bmatrix}$

Análogamente, si $\vec{u}$ es un vector tridimensional, entonces $\vec{u_0} = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{|\vec{u}|} \\ \frac{u_2}{|\vec{u}|} \\ \frac{u_3}{|\vec{u}|} \end{bmatrix}$

Ejemplo: Hallar el versor asociado al vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ \sqrt{11} \end{bmatrix}$

Respuesta: Primero calculamos el módulo de $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + \sqrt{11}^2} = \sqrt{1 + 4 + 11} = \sqrt{16} = 4$$

Luego el versor asociado a $\vec{u}$ es

$$\vec{u_0} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ \sqrt{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{11}}{4} \end{bmatrix}$$

Condición de paralelismo entre vectores.

Recordemos que, dados $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Si los vectores fueron dados en función de sus componentes, entonces la condición de paralelismo resulta de la siguiente manera:

En $\mathbb{R}^2$: Dados $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ se tiene que $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \end{cases}$

En $\mathbb{R}^3$: Dados $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ se tiene que $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \\ u_3 = \lambda v_3 \end{cases}$

Ejemplo: Determine si los pares de vectores dados son o no paralelos

(a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} + 5\vec{k} - \vec{j}$ (b) $\vec{m} = -5\vec{j} + 4\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$; $\vec{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$

Respuesta:

(a) Nos preguntamos si existe un número real λ tal que $\begin{cases} -4 = \lambda.\,\frac{2}{3} \\ 6 = \lambda.\,(-1) \\ 10 = \lambda.\,5 \end{cases}$

De las dos primeras ecuaciones, podríamos deducir que $\lambda = -6$, pero la tercera ecuación no se cumpliría. Con lo cual, el sistema no tiene solución. Luego, concluimos que $\vec{u}$ no es paralelo a $\vec{v}$.

(b) Nos preguntamos si existe un número real λ tal que $\begin{cases} 4 = \lambda.\,8 \\ -5 = \lambda.\,(-10) \\ \frac{1}{2} = \lambda.\,1 \end{cases}$

En cada ecuación puede verse que $\lambda = \frac{1}{2}$. Es decir, $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{p}$. Luego, probamos que $\vec{m} \parallel \vec{p}$

Teorema: *Producto escalar entre vectores*

Dados $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$, el producto escalar se calcula haciendo $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2$

Dados $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$, el producto escalar resulta $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$

Ejemplo: Determine $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sabiendo que:

(a) $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$

(b) $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{k}$; $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{k} + 2\vec{j}$

Respuesta:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3.\,\frac{1}{2} + 2.\,(-5) = -\frac{3}{2} - 10 = -\frac{23}{2}$

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4.\,(-3) + 0.\,2 + (-1).\,5 = -12 - 5 = -17$

Condición de perpendicularidad entre vectores.

Recordamos que, dos vectores no nulos son perpendiculares si y solamente si el producto escalar entre ambos es cero.

Ejemplo: Indique si los siguientes pares de vectores son perpendiculares:

1. $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + \vec{k} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$
2. $\vec{m} = 2\vec{j} - \vec{k} + 5\vec{i}$; $\vec{p} = 2\vec{j} - \vec{i} + \vec{k}$

Respuesta:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{2}.\,(-4) + 2.\,3 + 1.\,0 = -6 + 6 = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}$.
2. $\vec{m} \cdot \vec{p} = 5.\,(-1) + 2.\,2 + (-1).\,1 = -5 + 4 - 1 = -2 \neq 0$, por lo tanto $\vec{u}$ no es perpendicular a $\vec{v}$.

Ángulo que forman dos vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos. Por un lado, tenemos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}})$$

y por el otro, sabemos que podemos calcular el producto escalar haciendo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Entonces, despejando el coseno de la primera ecuación, deducimos que

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

y luego

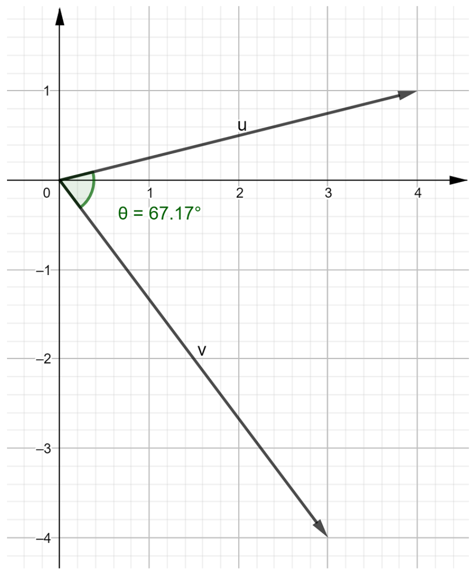
$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\right)$$

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = \vec{j} + 4\vec{i}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, calcule el ángulo determinado por los mismos.

Respuesta:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{4.\,3 + 1.\,(-4)}{\sqrt{4^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

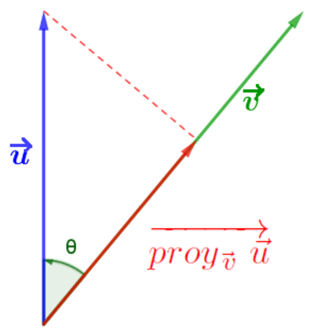
$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{8}{\sqrt{17}\sqrt{25}} \cong 0{,}38806$$

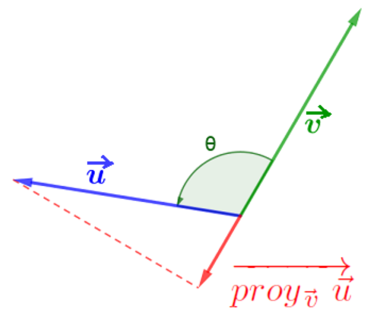


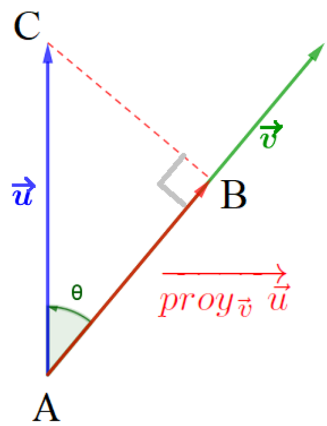
El ángulo que forman los dos vectores es $\theta = 67°9'59''$

Proyección ortogonal de un vector sobre otro

Llamamos *vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$* y lo indicamos $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}$ al vector que tiene la misma dirección que $\vec{v}$, y se obtiene proyectando perpendicularmente el origen y el extremo de $\vec{u}$ sobre la dirección del vector $\vec{v}$.







Analicemos el primer caso, donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo agudo. Observamos que tenemos un triángulo rectángulo, al que llamaremos $A\widehat{B}C$.

Podemos escribir la siguiente identidad trigonométrica para el ángulo θ:

$$\cos(\theta) = \frac{AB}{CA} = \frac{\left|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right|}{|\vec{u}|}$$

Por otro lado, vimos que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Entonces

$$\frac{\left|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

y por lo tanto

$$\left|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\,|\vec{u}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Luego de analizar el segundo caso (ejercicio para el lector), se concluye que

$$\left|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}\right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Teniendo en cuenta que, además, $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{v}$, podemos deducir la siguiente fórmula para calcular el vector proyección:

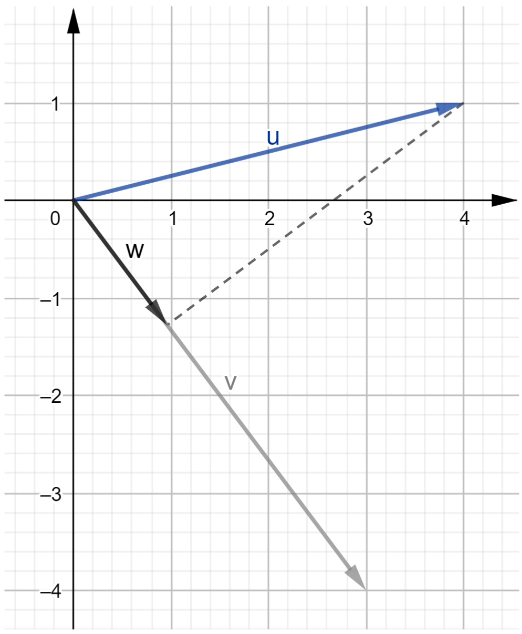
Vector proyección

$$\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

Observaciones:

1. Si $(\vec{u}\widehat{\ ,\ }\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$, entonces $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}} = \vec{0}$
2. Vemos que el sentido del vector $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}$ dependerá del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si el ángulo que forman es agudo, entonces $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}}$ y $\vec{v}$ tendrán el mismo sentido. Si por el contrario, el ángulo es obtuso, entonces tendrán sentido opuesto.

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = \vec{j}+4\vec{i}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, halle el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ e interprete gráficamente.



Respuesta: Calculamos primero el producto escalar entre ambos vectores

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4.\,3 + 1.\,(-4) = 12 - 4 = 8$$

luego el módulo de $\vec{v}$ al cuadrado

$$|\vec{v}|^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$$

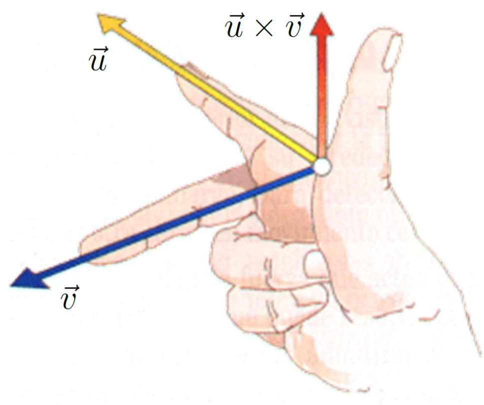
y por lo tanto, el vector proyección resulta

$$\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\ \vec{u}} = \frac{8}{25}\vec{v} = \frac{8}{25}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{25} \\ -\frac{32}{25} \end{bmatrix}$$

Producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$, definimos el **producto vectorial** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como un nuevo vector, que indicaremos $\vec{u} \times \vec{v}$, tal que

1. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
2. el vector resultante es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, es decir, es perpendicular al plano que los contiene.
3. el sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ es tal que la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ tiene la misma orientación que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. *(Regla de la mano derecha)*



Ejercicio: Realizar el producto vectorial entre los versores fundamentales.

Observación 1: El producto vectorial no es conmutativo.

Observación 2: La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean paralelos es que su producto vectorial sea nulo.

En símbolos: Dados $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Demostración: Ejercicio.

Teorema: *Cálculo del producto vectorial*

Si $\vec{u}$ y $\vec{u}$ están dados por componentes, entonces el producto vectorial entre ellos se calcula de la siguiente manera

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

Observación: El producto vectorial se puede obtener mediante el desarrollo del siguiente determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Calcule el producto vectorial entre $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

Respuesta:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0.\,(-3) - 2.\,2 \\ -\left((-1).\,(-3) - 1.\,2\right) \\ (-1).\,2 - 1.\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Teorema: *Propiedades del producto vectorial*

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores tridimensionales, y α un número real.

(1) $\vec{u} \times \vec{v} = -\left(\vec{v} \times \vec{u}\right)$ [El producto vectorial NO es conmutativo]

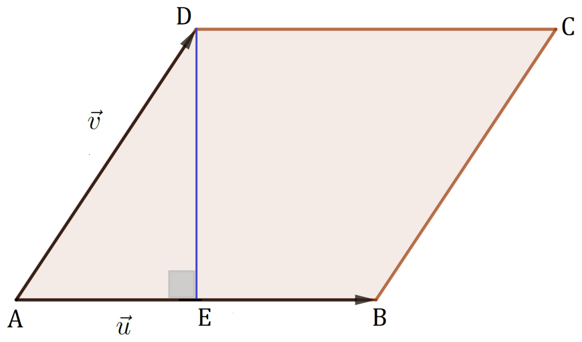
(2) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ [Propiedad Distributiva]

(3) $\alpha\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v}$

(4) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

(5) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

Veremos a continuación una aplicación del producto vectorial:



Consideremos el paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sabemos que el área de un paralelogramo se calcula multiplicando la medida de la base por la medida de la altura. En la figura, la altura está dada por el segmento ED y la base por AB.

En el triángulo rectángulo $A\widehat{E}D$, es válida la siguiente identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{ED}{AD}$$

y por lo tanto $ED = \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\, AD = \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\, |\vec{v}|$

Luego

$$Area(ABCD) = ED.AB = |\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|\, |\vec{v}|\, |\vec{u}| = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

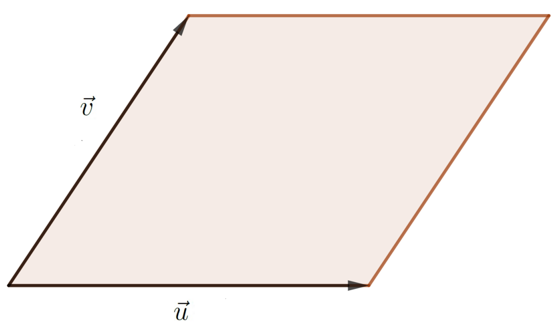
Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema: *Interpretación geométrica del producto vectorial*

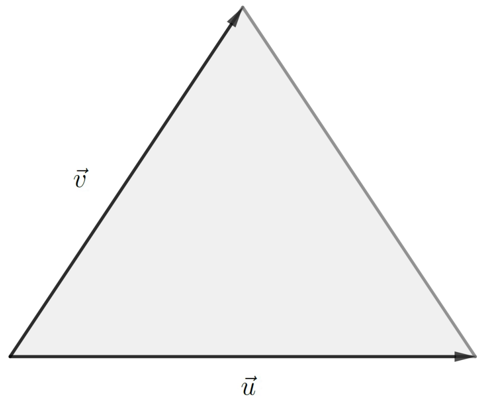
El módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados dichos vectores.

Área del paralelogramo

$$\text{área}(P) = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



y por lo tanto, podremos calcular también el área del triángulo

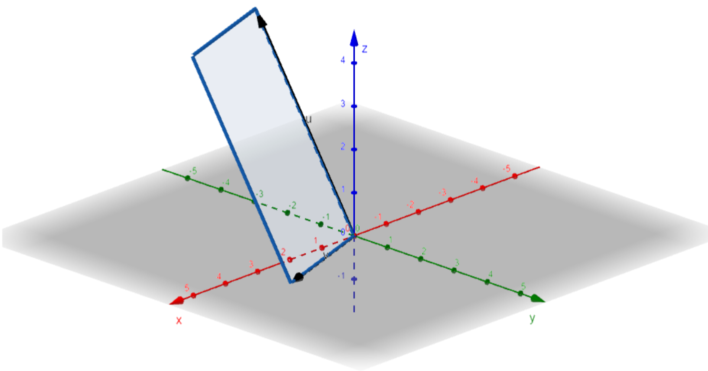


Área del triángulo

$$\text{área}(T) = \frac{1}{2}\,|\vec{u} \times \vec{v}|$$

Ejemplo: Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Respuesta: Hallemos primero el producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

después calculamos el módulo de este vector

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 15^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 225 + 49} = \sqrt{299}$$

Luego, el área del paralelogramo es $\sqrt{299}$.

Producto mixto

Dados tres vectores tridimensionales $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (en ese orden), se denomina **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, al número real que resulta de efectuar la operación: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

Si estos vectores están dados por componentes, el producto mixto puede calcularse como el siguiente determinante:

Cálculo del producto mixto

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Teorema: *Condición de coplanaridad entre vectores*

Los vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanares (es decir, están incluidos en el mismo plano) si y sólo si su producto mixto es nulo.

Ejemplo: Determine si los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{k} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{k} - \vec{i}$ y $\vec{w} = 2\vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j}$ son coplanares.

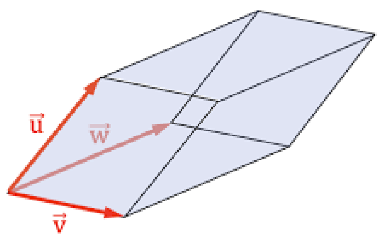
Respuesta: Primero calculamos $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Después hacemos $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 3.\,1 + (-1).\,4 + 1.\,1 = 3 - 4 + 1 = 0$

Como el producto mixto dió cero, concluimos que los vectores pertenecen a un mismo plano.

Teorema: *Interpretación geométrica del producto mixto*

Si tres vectores son no coplanares, podemos considerar que están apoyados sobre las aristas de un paralelepípedo. El valor absoluto del producto mixto será igual al volumen de dicho sólido.



Ejemplo: Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u} = \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{k} - \vec{j} + 6\vec{i}$ y $\vec{w} = 4\vec{i} + \vec{j}$

Respuesta: Primero calculamos $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

Después hacemos $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0.(-1) + 1.4 + (-3).10 = 0 + 4 - 30 = -26.$

Luego, el volumen del paralelepípedo es igual a $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |-26| = 26.$