

\pagebreak

Modelagem, Simulação e Implementação de Sistemas

Lista II - Revisão de Funções de Transferência

Guilherme Brandão da Silva

In [27]:

```
1 % Carrega módulos para operações simbólicas e operações em frequência
2 pkg load control
3 pkg load symbolic
4
5 % Variáveis Simbólicas
6 syms s t x(t) a b xi wn A
7
8 % Function para Plotar a Inversa de Laplace (Simbólica)
9 function plot_ilap(f, l)
10     p = ezplot(f);
11     axis(l);
12     set(p, 'linewidth', 5, 'color', 'k');
13 end;
```

\pagebreak

Exemplo 1: Ache as transformadas de Laplace inversa de:

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2}$$

In [54]:

```

1 % Resolvendo algebricamente
2 num = a*s + b + 3*a;
3 den = s^2 + 3*s + 2;
4
5 % Obtendo a inversa de Laplace
6 X = partfrac(num/den)
7
8 % Obtendo a Inversa de Laplace
9 x = ilaplace(X)

```

X = (sym)

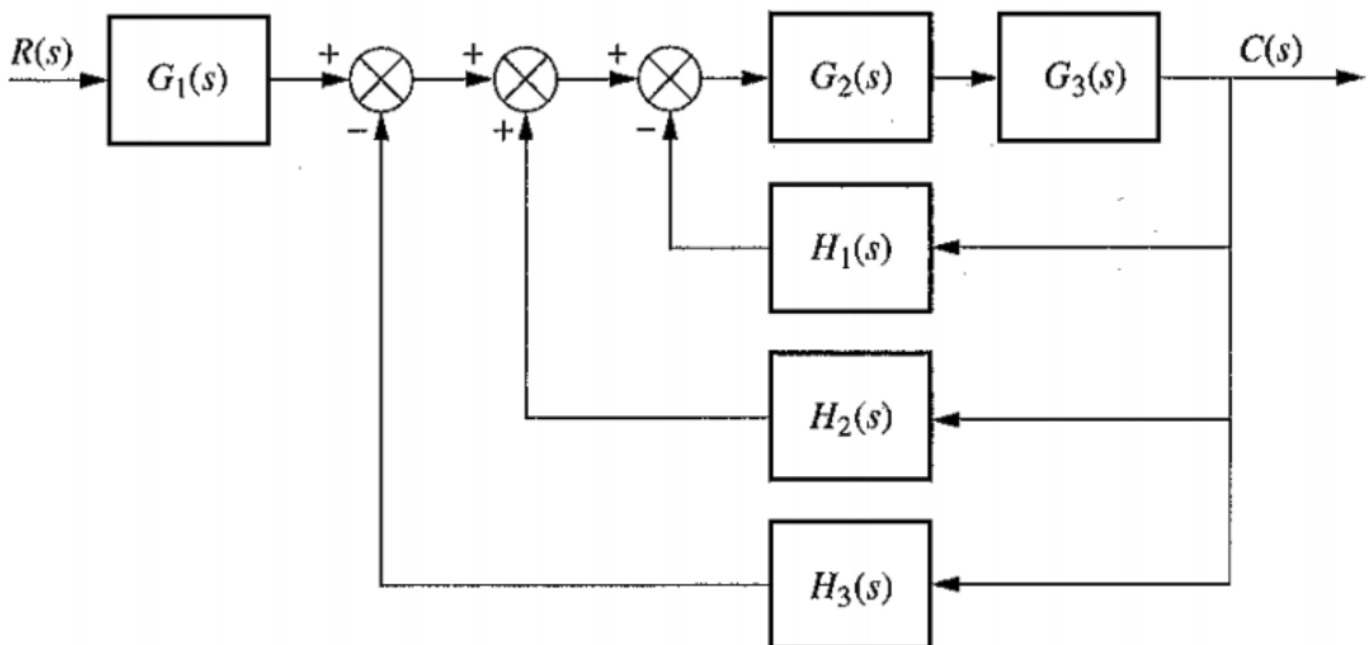
$$-\frac{a+b}{s+2} + \frac{2 \cdot a + b}{s+1}$$

x = (sym)

$$\left(-a - b + (2 \cdot a + b) \cdot e^t \right) \cdot e^{-2 \cdot t}$$

\pagebreak

Exemplo 2: Simplifique o Digrama de Blocos e Obtenha a Função de Transferência da Figura:



In [44]:

```

1 syms g1 g2 g3 h1 h2 h3 x1 x2 x3
2
3 x1 = g2*g3/(g2*g3*h1 + 1);
4 x2 = x1/(x1*h2 - 1);
5 x3 = g1*x2/(x2*h3 + 1);
6
7 x3 = simplify(x3)

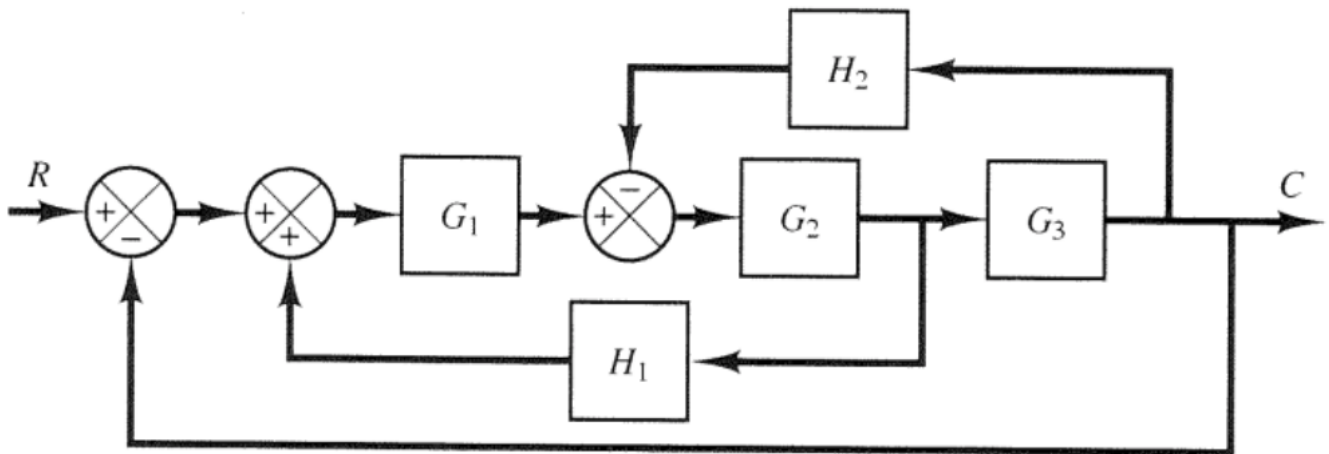
```

x3 = (sym)

$$\frac{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3}{-g_2 \cdot g_3 \cdot h_1 + g_2 \cdot g_3 \cdot h_2 + g_2 \cdot g_3 \cdot h_3 - 1}$$

\pagebreak

Exemplo 3: Simplifique o Digrama de Blocos e Obtenha a Função de Transferência da Figura:



In [46]:

```

1 x1 = g2/(h2*g3*g2 + 1);
2 x2 = g1*x1/(g1*x1*h1 - 1);
3 x3 = x2*g3/(x2*g3 - 1);
4
5 x3 = simplify(x3)
6

```

x3 = (sym)

$$\frac{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3}{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 - g_1 \cdot g_2 \cdot h_1 + g_2 \cdot g_3 \cdot h_2 + 1}$$

\pagebreak

Exemplo 4: Obtenha a Resposta ao Degrau da Função de Transferência:

$$T(s) = \frac{s^3 + 1}{2s^4 + s^2 + 2s}$$

In [52]:

```

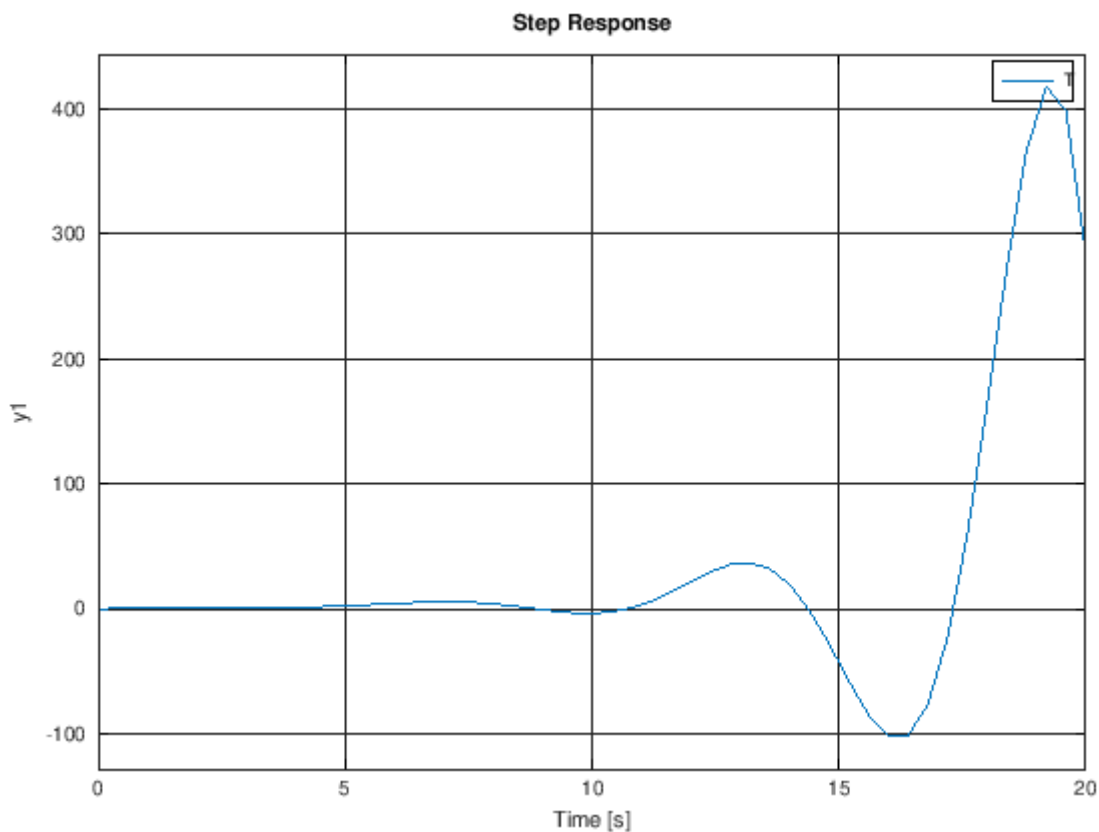
1 % Declaração da Função de Transferência
2 T = tf([1 0 0 1], [2 0 1 2 0])
3
4 % Resposta ao Degrau
5 step(T)

```

Transfer function 'T' from input 'u1' to output ...

$$y1: \frac{s^3 + 1}{2s^4 + s^2 + 2s}$$

Continuous-time model.



\pagebreak

Exercício 1: Determine a Inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

In [5]:

```

1 % Resolvendo algebricamente
2 num = 2*s + 12;
3 den = s^2 + 2*s + 5;
4
5 % Obtendo a inversa de Laplace
6 X = partfrac(num/den)
7
8 % Obtendo a Inversa de Laplace
9 x = ilaplace(X)

```

X = (sym)

$$\frac{2 \cdot (s + 6)}{s^2 + 2 \cdot s + 5}$$

x = (sym)

$$(5 \cdot \sin(2 \cdot t) + 2 \cdot \cos(2 \cdot t)) \cdot e^{-t}$$

\pagebreak

Exercício 2: Determine a Inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

In [8]:

```

1 % Resolvendo algebricamente
2 num = s^2 + 2*s + 3;
3 den = (s+1)^3;
4
5 % Obtendo a inversa de Laplace
6 X = partfrac(num/den)
7
8 % Obtendo a Inversa de Laplace
9 x = ilaplace(X)

```

X = (sym)

$$\frac{1}{s + 1} + \frac{2}{(s + 1)^3}$$

x = (sym)

$$\left(\frac{2}{t} + 1 \right) \cdot e^{-t}$$

\pagebreak

Exercício 3: Determine a Inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}{s(s + 1)}$$

In [11]:

```

1 % Resolvendo algebricamente
2 num = s^4 + 2*s^3 + 3*s^2 + 4*s + 5;
3 den = (s+1)*s;
4
5 % Obtendo a inversa de Laplace
6 X = partfrac(num/den)
7
8 % Obtendo a Inversa de Laplace
9 x = ilaplace(X)

```

X = (sym)

$$s^2 + s + 2 - \frac{3}{s + 1} + \frac{5}{s}$$

Waiting...

x = (sym)

$$\text{InverseLaplaceTransform}(s, s, t, \text{None}) + \text{InverseLaplaceTransform}\left(s^2, s, t, \text{Non}\right. \\ \left. e\right) + 5 - 3 \cdot e^{-t}$$

\pagebreak

Exercício 4: Determine a Inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

In [12]:

```

1 % Resolvendo algebricamente
2 num = 3;
3 den = s*(s^2 + 2*s + 5);
4
5 % Obtendo a inversa de Laplace
6 X = partfrac(num/den)
7
8 % Obtendo a Inversa de Laplace
9 x = ilaplace(X)

```

X = (sym)

$$-\frac{3 \cdot (s + 2)}{5 \cdot \left(s^2 + 2 \cdot s + 5\right)} + \frac{3}{5 \cdot s}$$

x = (sym)

$$\frac{\left(-6 \cdot e^t + 3 \cdot \sin(2 \cdot t) + 6 \cdot \cos(2 \cdot t)\right) \cdot e^{-t}}{10}$$

\pagebreak

Exercício 5: Qual a Solução da Equação Diferencial:

$$2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 3, \quad \dot{x} = 0$$

In [20]:

```

1 % Equação Diferencial
2 eqn = 2*diff(x,t, t) + 7*diff(x, t) + 3*x == 0;
3
4 % Condições Iniciais
5 cond1 = diff(x)(0) == 0;
6 cond2 = x(0) == 3;
7
8 % Solução da Equação Diferencial
9 r = dsolve(eqn, cond1, cond2)

```

r = (sym)

$$x(t) = -\frac{3 \cdot e^{-3 \cdot t}}{5} + \frac{18}{5 \cdot \sqrt{e^t}}$$

\pagebreak

Exercício 6: Qual a Solução da Equação Diferencial:

$$\dot{x} + 2x = 1, \quad x(0) = 0$$

In [21]:

```

1 % Equação Diferencial
2 eqn = diff(x, t) + 2*x == 1;
3
4 % Condições Iniciais
5 cond1 = x(0) == 0;
6
7 % Solução da Equação Diferencial
8 r = dsolve(eqn, cond1)

```

r = (sym)

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2 \cdot t}}{2}$$

\pagebreak

Exercício 7: Qual a Solução da Equação Diferencial:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0, \quad x(0) = a, \dot{x} = b$$

In [26]:

```

1 % Equação Diferencial
2 eqn = diff(x,t, t) + 2*xi*wn*diff(x, t) + (wn^2)*x == 0;
3
4 % Condições Iniciais
5 cond1 = diff(x)(0) == b;
6 cond2 = x(0) == a;
7
8 % Solução da Equação Diferencial
9 r = dsolve(eqn, cond1, cond2)

```

warning: worked around octave bug #42735

warning: called from

mtimes at line 55 column 5

warning: worked around octave bug #42735

warning: called from

mtimes at line 55 column 5

r = (sym)

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{\left(a \cdot wn \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) + b \right) \cdot e^{t \cdot wn \cdot \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \left(-a \cdot w \right)}{n \cdot \xi + a \cdot wn} + \frac{\left(a \cdot wn \cdot \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) + b \right) \cdot e^{t \cdot wn \cdot \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \left(-a \cdot w \right)}{2 \cdot wn \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \\
 & - \frac{\left(a \cdot wn \cdot \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) + b \right) \cdot e^{t \cdot wn \cdot \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \left(-a \cdot w \right)}{2 \cdot wn \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

\pagebreak

Exercício 8: Qual a Solução da Equação Diferencial:

$$\dot{x} + ax = A \sin(\omega t), \quad x(0) = b$$

```
1 % Equação Diferencial
2 eqn = diff(x, t) + a*x == A*sin(wn*t);
3
4 % Condições Iniciais
5 cond1 = x(0) == b;
6
7 % Solução da Equação Diferencial
8 r = dsolve(eqn, cond1)
```

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a \cdot t}{a^2 + \omega_n^2} \cdot \sin(t \cdot \omega_n) - \frac{\omega_n \cdot t}{a^2 + \omega_n^2} \cdot \cos(t \cdot \omega_n) & \text{for } a \neq 0 \wedge \omega_n \neq 0 \\ \frac{A}{2 \cdot \omega_n} + b & \text{for } (a = 0 \vee a = -i \cdot \omega_n) \wedge \omega_n \neq 0 \\ \frac{A \cdot \omega_n}{2 \cdot \omega_n} + b & \text{for } a = i \cdot \omega_n \wedge \omega_n \neq 0 \\ \frac{a^2}{a^2 + \omega_n^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$v_{wn} = 0) \left(\begin{array}{l} -a \cdot t \\ \cdot e \end{array} \right)$$



\pagebreak

Exercício 9: Qual a Solução da Equação Diferencial:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 6x = 0, \quad x(0) = 0, \dot{x} = 3$$

In [30]:

```
1 % Equação Diferencial
2 eqn = diff(x,t, t) + 3*diff(x, t) + 6*x == 0;
3
4 % Condições Iniciais
5 cond1 = diff(x)(0) == 3;
6 cond2 = x(0) == 0;
7
8 % Solução da Equação Diferencial
9 r = dsolve(eqn, cond1, cond2)
```

r = (sym)

$$x(t) = \frac{2 \cdot \sqrt{15} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{15} \cdot t}{2}\right)}{5 \cdot \left(e^{\frac{3}{2}t}\right)}$$

In []:

1

