Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 4

Due on 14:59, Oct. 15, 2020

1. 请按要求写出下列线性规划问题对应的对偶问题.

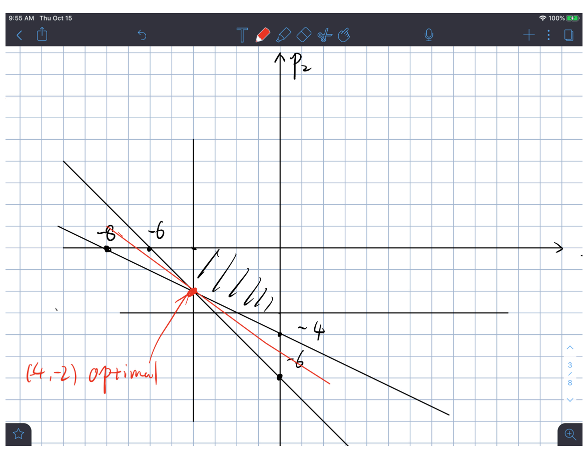
(1) 请参考 Lecture 5 提供的原-对偶表格法, 写出如下问题对应的对偶问题并使用**图解法**求解. [15pts]

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 12x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 12x_4 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 - x_2 - 4x_3 \le -2 \\
& -2x_1 - 2x_2 - 4x_4 \le -3 \\
& x_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, 4.
\end{aligned} \tag{1}
$$

解

根据表格我们写出对应的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2p_1 - 3p_2 \\
\text{s.t.} \quad & -2p_1 - 2p_2 \le 12 \\
& -p_1 - 2p_2 \le 8 \\
& -4p_1 \le 16 \\
& -4p_2 \le 12 \\
& p_1, p_2 \le 0
\end{aligned} \tag{2}
$$



解得 $p_1 = -4, p_2 = -2$, 最优值为 14。

(2) 请使用 Lagrange 方法写出如下问题对应的对偶问题. [10pts]

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 0 \\
& 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 3 \\
& -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 \le 0 \\
& x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

解

首先写出拉格朗日函数

$$
\begin{aligned}
L(x,\lambda) = {} & x_1 - x_2 + \lambda_1(2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4) + \lambda_2(-3x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3) \\
& + \lambda_3(-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 6) + \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 - \mu_3 x_3 \\
& = (1 + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 + \mu_1)x_1 + (-1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \mu_2)x_2 \\
& + (-\lambda_1 - 4\lambda_2 + 2\lambda_3 - \mu_3)x_3 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)x_4 + 3\lambda_2 - 6\lambda_3 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3\, free, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

因此我们写出对偶问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3\lambda_2 - 6\lambda_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 \le -1 \\
& 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \ge 1 \\
& -\lambda_1 - 4\lambda_2 + 2\lambda_3 \ge 0 \\
& \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda 3 = 0 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

2. 考虑如下的两阶段法中第一阶段的辅助问题

$$
\begin{aligned}
\min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}} \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 给定.

(1) 写出问题 (5) 的对偶问题. [15pts]

解

x,y 为优化变量，根据原-对偶表格可得

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i=1}^{m} p_i b_i \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{p}^T A \le 0 \\
& \boldsymbol{p}^T \le \boldsymbol{1}^T
\end{aligned} \tag{6}
$$

(2) 对于上述问题 (1) 中得到的对偶问题, 请问它有最优解吗? 请给出充分的理由. [15pts]

解

有最优解，原因如下。首先我们考虑原问题的最优解是否存在，由于 $\boldsymbol{x}=0, \boldsymbol{y}=b$ 是原问题的一个基本可行解（b 在两阶段法中会被处理为非负，非负基本解即为基本可行解），因此根据线性规划基本定理，原问题必定存在一个最优解在基本可行解中。在此基础上，根据强对偶定理：原问题有最优解能得出对偶问题也有最优解，并且最优值相等，因此我们得到 (1) 中得到的对偶问题有最优解。

3. 如图 1 示. 请解释: 为什么该定理成立? (提示: 利用强对偶定理.) [15pts]

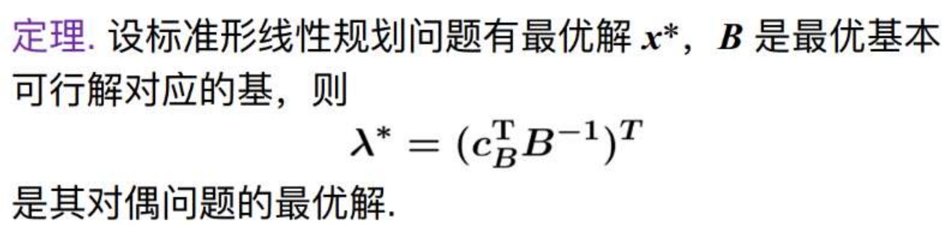


图 1: Lecture 5 第 11 页给出的定理.

解

根据强对偶定理，对于原函数 $f(x)$ 和对偶函数 $g(\lambda)$ 我们有

$$f(x^\star) = g^(\lambda^\star)$$

进一步得到

$$\begin{aligned} c^T x^\star &= \lambda^{\star T} b \\ c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}N x_N) &= \lambda^{\star T} b \\ \Leftrightarrow c_B^T B^{-1} b &= \lambda^{\star T} b \text{ (因为非基变量为 0，利用基本定义即可得到)} \\ \Leftrightarrow \lambda^\star &= (c_B^T B^{-1})^T \end{aligned}$$

4. 如图 2 示. 请解释: 如果初始单纯型表格含有单位阵, 为什么转轴完成后对应的最下方的位置是最优乘子? (注意: 回答需要针对一般的线性规划问题转轴, 不能仅仅解释给出的例子.) [15pts]

解

我们在单纯形表的最下行所存储的是 reduced cost，定义是

$$r_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j$$

其中 c_j 代表着 cost，a_j 代表原矩阵的第 j 列。初始的单纯形表单位阵中的所有基变量对应的 $c_I = 0, a_I = I$（下标 I 代表着由单位阵中变量对应的下标），因此我们进一步可以得到在最优变量对应基 B 下的 reduced cost

$$r_I = c_I - c_B^T B^{-1} a_I = -c_B^T B^{-1}$$

即为最优的拉格朗日乘子的相反数。

5. 证明: 线性规划问题求解等价于求解一个线性可行性问题.(提示: 请参考 Lecture 5 第 14 页.) [15pts]

解首先我们先分别写出原对偶问题，原问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

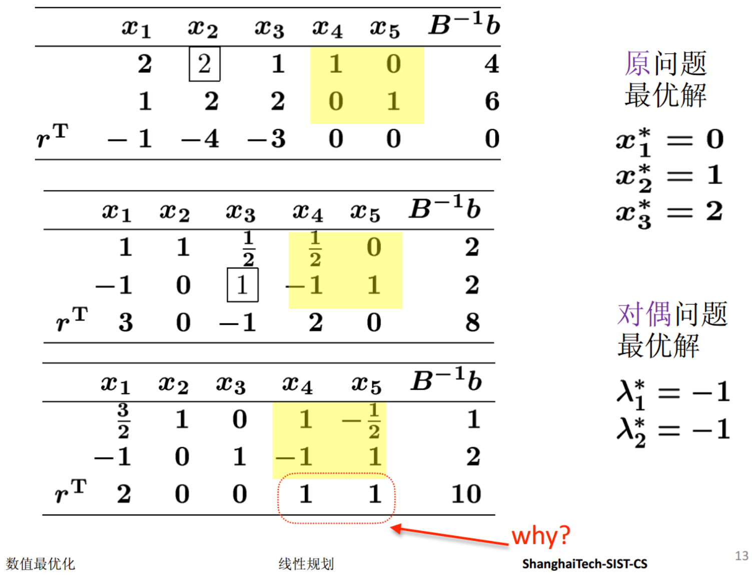


图 2: Lecture 5 第 13 页给出的单纯型表示例.

对偶问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b^T y \\
\text{s.t.} \quad & A^T y \le c
\end{aligned} \tag{8}
$$

根据强对偶定理，原问题若有最优解，那么对偶问题也有最优解，并且最优值相等。即下述线性系统中要存在可行解

$$
\begin{aligned}
Ax \quad & = b \\
x \quad & \ge 0 \\
A^T y + s \quad & = c \\
s \quad & \ge 0 \\
b^T y \quad & = c^T x
\end{aligned} \tag{9}
$$

由于 $0 = c^T x - b^T y = (c - A^T y)^T x = s^T x$, 因此上述线性系统等价于

$$
\begin{aligned}
s^T x \quad & = 0 \\
s, x \quad & \ge 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

因此下面我们对是否存在最优解两种情况进行分类讨论

- 若该线性规划问题有最优解, 则对应10中存在一个可行解，该可行解即为原对偶问题中对偶间隙为 0 的一个最优解。
- 若该线规划问题没有最优解，则根据线性规划基本定理，原问题不存在一个可行解，此时10无法满足 (不可能存在 $b^T y = c^T x$，否则问题存在最优解)，即10中无法找到一个可行解。

综上所述，线性规划问题等价于由原问题可行性条件、对偶问题可行性条件和互补条件组成的线性可行性问题。