Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 3

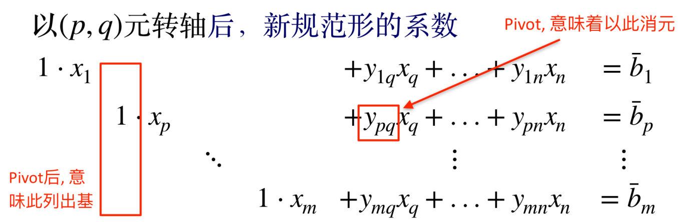
Due on 14:59 OCT 10, 2020

请尽量使用提供的 tex 模板，单纯形法的表格可手绘拍照加入文档.

1 单纯形法

以下均考虑非退化线性规划问题即可。

(i) 考虑一线性规划问题的规范型如下:



记进基变量的下标为 q, 转轴前分量 j 对应的 reduced cost 为 r_j, 转轴后对应的 reduced cost 为 r'_j。试证明 reduced cost 的更新公式为 $r'_j = r_j - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} r_q$(参考 Lecture 3 中 17 页)。 [20pts]

解

$$
\begin{aligned}
r'_j &= c_j - \hat{\lambda}^T a_j (\text{By definition, where } a_j \text{ is the jth coloum of } N) \\
&= c_j - (\lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}} u_p) a_j (\text{By definition. } U_p \text{ is } p^{th} \text{ row of } B^{-1}) \\
&= r_j - \frac{r_q}{y_{pq}} u_p a_j \\
&= r_j - \frac{r_q}{y_{pq}} y_{pj}
\end{aligned}
$$

证毕。

(ii) 单纯形表中右下角的-f 对应当前基本可行解的目标函数值的相反数。试证明, 经过一次转轴后更新的-f 对应更新后基本可行解对应的目标函数值的相反数 (参考 Lecture 3 中 20 页)。 [20pts]

Simplex Method in Tableau Format

单纯形表(tableau)：**BFS**对应规范形的表格＋

既约费用系数和**BFS**目标值的相反数

	x_1	$\cdots$	x_p	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	$B^{-1}b$
	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\cdots$	y_{1q}	$\cdots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
		$\ddots$				$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$y_{p,m+1}$	$y_{p,m+2}$	$\cdots$	y_{pq}	$\cdots$	y_{pn}	$\bar{b}_p$
				$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\cdots$	y_{mq}	$\cdots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
r^{T}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	r_{m+1}	r_{m+2}	$\cdots$	r_q	$\cdots$	r_n	$\boxed{-f}$

单纯形表可以提供计算需要的所有信息！

why?

解

设 f' 为 $-f$ 转轴更新后的值，$f\hat{f}$ 为更新后基本可行解对应的目标函数值得真实值，下证 $f' = \hat{f}$。首先根据高斯消元的性质可得

$$f' = f + \frac{r_q}{y_{pq}}\bar{b}_p$$

根据目标函数的定义我们有

$$\begin{aligned}
f &= \lambda^T b \\
\hat{f} &= \hat{\lambda}^T b \\
&= (\lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}} u_p) b \\
&= \lambda^T b + \frac{r_q}{y_{qp}} u_p b \\
&= f + \frac{r_q}{y_{pq}} \bar{b_p} \text{ (Since } U_p \text{ is } p^{th} \text{ row of } B^{-1}\text{, } u_p b = \bar{b}_p) \\
&= f + \frac{r_q}{y_{pq}} \bar{b}_p
\end{aligned}$$

即 $f' = \hat{f}$。因此经过一次转轴更新后的-f 对应更新后基本可行解对应的目标函数值的相反数。

2 修正单纯形法

2.1 证明题

试证明 Lecture 4 中 20 页 λ 的更新公式为: $\hat{\lambda}^T = \lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}}\boldsymbol{u}_p$。[20pts]

解

首先我们定义初等矩阵 E_{pq}, 设 $B(a_1, a_2, ..., a_m)$, 转轴元为 y_{pq}, 转轴后的基 $\hat{B} = (a_1, ..., a_{p-1}, a_q, a_{p+1}, ..., a_m$

$$E_{pq} = [e_1, ..., v, e_{p+1}, ..., e_m]$$

另定义 v 为

$$v_i = \begin{cases} -\dfrac{y_{iq}}{y_{p1}}, & \text{for } i \neq p \\ \dfrac{1}{y_{pq}}, & \text{for } i = p \end{cases}$$

则有 $\hat{B}^{-1} = E_{pq}B^{-1}$. 下面我们将 $c_{\hat{B}}, \hat{B}^{-1}$ 带入到 $\hat{\lambda}$ 中

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}^T &= (c_B + (0, ..., 0, -c_p + c_q, 0, ..., 0))^T E_{pq} B^{-1} \\
&= C_B^T E_{pq} B^{-1} + (0, ..., 0, -c_p + c_q, 0, ..., 0)^T B^{-1} \\
&= C_B^T (I - (\vec{0}, \vec{0}, .., e_p - v, ..., \vec{0})) B^{-1} + (0, ..., 0, -c_p + c_q, 0, ..., 0)^T B^{-1} \\
&= \lambda^T + (0, ..., 0, -c_p + c_B^T v + (-c_p + c_q) v_p, 0, ..., 0)^T B^{-1} \\
&= \lambda^T + (0, ..., 0, -c_p + c_1 v_1 + c_2 + ... + c_p v_p + ... + c_m v_m - c_p v_p + c_q v_q)^T B^{-1} \\
&= \lambda^T + (0, ..., 0, -\frac{1}{y_{pq}}(c_1 y_{1q} + ... + c_m y_{mq}) + \frac{c_q}{y_{pq}}, 0, ..., 0)^T B^{-1} \\
&= \lambda^T + (0, ..., 0, \frac{c_q - z_q}{y_{pq}}, ..., 0)^T B^{-1} \\
&= \lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}} u_p
\end{aligned}$$

证毕。

2.2 计算题

试用两阶段法求解如下线性规划问题 (详见 Lecture 4 第 13 页), 给出各个步骤的单纯形表。 [40pts]

$$\begin{aligned}
\textbf{minimize} \quad & x_1 - x_2 \\
\textbf{subject to} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\
& -4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\
& -5x_1 + 6x_2 = 6 \\
& x_1 - x_3 = 0 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
	-1	2	1	1	0	0	2
	-4	4	-1	0	1	0	4
	1	0	-1	0	0	1	0
c^T	0	0	0	1	1	1	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
	-1	2	1	1	0	0	2
	-4	4	-1	0	1	0	4
	1	0	-1	0	0	1	0
c^T	4	-6	1	0	0	0	-6

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
	1	-2	-1	-1	0	0	-2
	0	-4	-5	-4	1	0	-4
	0	2	0	1	0	1	2
c^T	0	2	5	4	0	0	2

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
	1	0	1.5	1	-0.5	0	0
	0	1	1.25	1	-0.25	0	1
	0	0	-2.5	-1	0.5	1	0
c^T	0	0	2.5	2	0.5	0	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
	1	0	0	0.4	-0.2	0.6	0
	0	1	0	0.5	0	0.5	1
	0	0	1	0.4	-0.2	-0.4	0
c^T	0	0	0	1	1	1	0

	x1	x2	x3	b
	1	0	0	0
	0	1	0	1
	0	0	1	0
c^T	1	-1	0	0

	x1	x2	x3	b
	1	0	0	0
	0	1	0	1
	0	0	1	0
c^T	1	0	0	1

于是我们有：$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3, 0$，并且最优值是 -1。