Numerical Optimization, 2020 Fall
Homework 2

Due on 14:59, Sep 24, 2020

1 线性规划标准型

考虑如下为标准型的线性规划:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 给定.

(1) 上述标准型 (1) 中关于 $\boldsymbol{A}$ 满秩 (full rank) 的假设是否合理? 请给出你判断的理由. [10pts]

(2) 在标准型里, 一个基本可行解 (basic feasible solutions) 是否与一组基 (basis) 一一对应? [15pts]

解:

1. 合理。引用 MIT 这本教材中的定理 2.5:
   Let $P = \{x|Ax = h, x \geq O\}$ be a nonempty polyhedron, where A is a matrix of dimensions $m \times n$, with rows $a'_1, ..., a'_m$. Suppose that rank(A) = k <m and that the rows $a'_{i_1}, ..., a'_{i_k}$ are linearly independent. Consider the polyhedron

   $$Q = \{x|a'_{i_1}x = b_{i_1}, ..., a'_{i_k}x = b_{i_k}, x \geq 0\}$$

   Then Q=P.（证明思路即利用向量空间中的线性组合的性质，证明 $Q \subset P, P \subset Q$）所以在标准型下的可行域为非空的情况下，A 的冗余约束对应的线性独立行可以被消去，因此行满秩的假设是合理的。
   下为该定理的简略证明：
   假设 $i_1 = 1, ...i_k = k$，即 A 的前 k 行线性独立，如若不然，通过行变换即可，显然任意 P 中的元素均满足 Q 中定义的约束，因此我们可以得到 $P \subset Q$。
   其次，A 中的各行均可表示为前 k 行的线性组合，即 $a'_i = \sum_{j=1} \lambda_{ij} a'_j$. 取 x 为 P 中一个元素，则有

   $$b_i = a'_i x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a'_j x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j$$

   对于 Q 中的任意元素 y，有

   $$a'_i y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a'_j y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j = b_i$$

   因此 $P \subset Q, Q \subset P$, 于是 $Q = P$.

2. 不是一一对应的。一组基对应一个基本解，只有当该非基本解非负的情况下才是一个基本可行解。例如，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

一组基 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 对应的基本解为 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 并不是基本可行解。

2 基本解和基本可行解

考虑如下线性规划问题 (具体地, 请参考 Lecture 2 中 37 页的例 3)

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 \leq 3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

请回答此问题中有多少个基本解 (basic solutions), 有多少个基本可行解? 请分别写出相应的解. [25pts] **解：**

- 基本解 9 个，求解思路为联立每 2 个独立的积极约束确定每一个基本解，求解过程出于简洁性的考虑，在此就例举一种约束组合。

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{8}{3}x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{4}{5}, x_2 = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

  将任意两个积极约束联立,我们得到求解结果: $(x_1, x_2) = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}), (\frac{3}{2}, \frac{15}{16}), (0, \frac{3}{2}), (4, 0), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (0, 2), (2, 0), (\frac{3}{2}, 0), (0, 0)$.

- 基本可行解 5 个，求解思路为，在已经求出基本解的情况下，找出满足所有约束的基本解即为基本可行解，在此例举一种基本可行解的判断

$$\begin{aligned} x_1 = 0, x_2 &= \frac{3}{2} \\ x_1 + \frac{8}{3}x_2 = 4 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} &\leq 2 \\ 2x_1 = 0 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0, x_2 &= \frac{3}{2} \textbf{是基本可行解} \end{aligned}$$

  对每个基本解进行同样的操作，求解结果为: $(x_1, x_2) = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}), (0, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, 0), (0, 0), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

3 极点

1. 证明如下两个集合的极点一一对应. [12pts]

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}, \\ S_2 &= \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

解:

设 P 和 Q 分别是在 R^n, R^m 中的多面体。定义 ispmorphic 为：if there exist affine functions f : P $\rightarrow$ Q and g : Q $\rightarrow$ P such that

$$x = g(f(x)), \forall x \in P, \qquad y = f(g(x)), \forall y \in Q$$

- 首先，先证明如果 P 和 Q 是 isomorphic，那么他们的极点是一一对应的。假设 $x^\star$ 是 P 的一个极点，设 $y^\star = f(x^\star)$。因为 $x^\star$ 是 P 的一个极点，所以存在一个向量 $c \in R^n$ 使得

  $$c^T x < c^T x, \qquad \forall x \in P, x \neq x^\star$$

  那么对于任意 $y \in Q, y \neq y^\star$，我们有

  $$f(g(y)) = y \neq y^\star = f(x^\star) \Rightarrow g(y) \neq x^\star$$

  因此

  $$c^T g(y) \leq c^T g(y^\star), \qquad \forall y \in Q, y \neq y^\star$$

  令仿射函数 g 有 $g(y) = By + d$，其中 B 是 $n \times m$ 的矩阵，$d \in R^n$. 于是我们有

  $$(B^T c)^T y < (B^T c)^T y\star, \qquad \forall y \in Q, y \neq y^\star$$

  如果 $y^\star$ 不是 Q 的极点，那么我们可以得到 $y^\star = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$，其中 $y_1, y_2 \in Q, y_1 \neq y^\star, y_2 \neq y^\star, \alpha \in (0,1)$，所以

  $$(B^T c)^T y^\star = \alpha (B^T c)^T y_1 + (1-\alpha)(B^T c)^T y_2 < (B^T c)^T y^\star$$

  这显然与已知矛盾，所以 $y^\star$ 也是 Q 的极点。相反地，如果 $y^\star$ 是 Q 的极点的话，那么通过相同的论证，我们可以证明 $x^\star$ 也是 P 的极点。因此，如果 P 和 Q 是 isomorphic，那么他们的极点是一一对应的。

- 接着我们证明 S_1 和 S_2 是 isomorphic。令 f 和 g 分别为

  $$\begin{aligned} f(x) &= (x, b - Ax), \qquad \forall x \in S_1, \\ g(x, z) &= x, \qquad \forall (x, z) \in S_2. \end{aligned}$$

  显然，f 和 g 均为仿射函数:

  $$\begin{aligned} f(x) \in S_2, \qquad g(f(x)) &= x, \qquad \forall x \in S_1, \\ g(x, z) \in S_1, \qquad f(g(x, z)) &= (x, z), \qquad \forall (x, z) \in S_2 \end{aligned}$$

  因此,S_1 和 S_2 是 isomorphic。综上对于 S_1, S_2，由于他们是 isomorphic, 所以他们的极点一一对应。

2. 如图 3 所示, 请回答

   (1) 集合 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le 1\}$ 有极点吗? [3pts]

   (2) 它的标准型是什么? [5pts]

   (3) 它的标准型有极点吗? 若有, 则给出一个极点, 并解释为什么是极点. [5pts]

解:

1. 没有极点，因为可行域包含了一条直线。
2. $$\begin{aligned} \min \ & \text{constant k} \\ \text{s.t.} \ & x_1 + s = 1, \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, s \ge 0 \end{aligned}$$
3. 有极点。我们先求解基本解，通过联立四个线性独立的积极约束，例如 $(x_1 + s = 1, x_1 = 0, x_2^+ = 0, x_2^- = 0), (x_1 + s = 1, x_2^+ = 0, x_2^- = 0, s = 0)$。然后取标准型中的非负基本解即基本可行解，根据基本可行解与极点的等价定理，我们即可找到极点:$(x_1, x_2^+, x_2^-, s) = (1,0,0,0), (0,0,0,1)$。因为所求的极点为基本可行解，因此我们能保证极点的正确性。

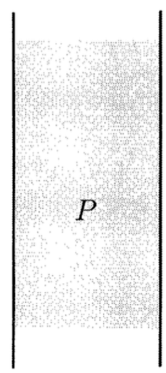
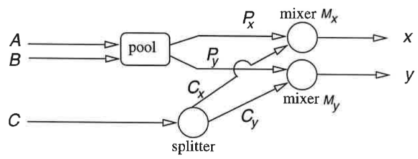


图 1: 集合 P

4 AMPL 实现

考虑如下 Haverly pooling 问题, 如图 2 示, 请使用 AMPL 实现并求解. (注意: 使用 AMPL solver 或者 NEOS solver 均可. 另外, 请在提交的作业中注明使用的求解器类型, 把求解结果呈现出来 (截图附在 PDF 文件即可), 并把源代码一起提交. 提交的作业请打包为.zip 文件, 包含你的 PDF 以及源码.) [25pts]

解: 题目中第二个约束有错误，我将 C_y 改成了 C_x. 求解器的类型是非线性求解器 Baron，求解结果为 1800.



A, B, C : quantities of crude oil A, B, C, respectively
x, y : quantities of products x and y
p : sulfur content of outstream of the pool
P_x, P_y : outstreams of the pool
C_x, C_y : outstreams of the splitter

$$\max_{x,y,A,B,p,C_x,C_y,P_x,P_y} \quad 9x + 15y - 6A - 8B - 10(C_x + C_y)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & P_x + P_y - A - B = 0 \\ & x - P_x - C_y = 0 \\ & y - P_y - C_y = 0 \\ & pP_x + 2C_x - 2.5x \le 0 \\ & pP_y + 2C_y - 1.5y \le 0 \\ & pP_x + pP_y - 3A - B = 0 \\ & 0 \le x \le 200, 0 \le y \le 200, 0 \le p \le 100 \\ & 0 \le A, B, C_x, C_y, P_x, P_y \le 500 \end{aligned}$$

sulfur content of A=3
sulfur content of B=1
sulfur content of C=2
sulfur content of x ≤ 2.5
sulfur content of y ≤ 1.5
Demands of x and y are ≤ 200
Supplies of A, B, C_x, C_y, P_x, P_y ≤ 500

图 2: Example: Haverly Pooling Problem.

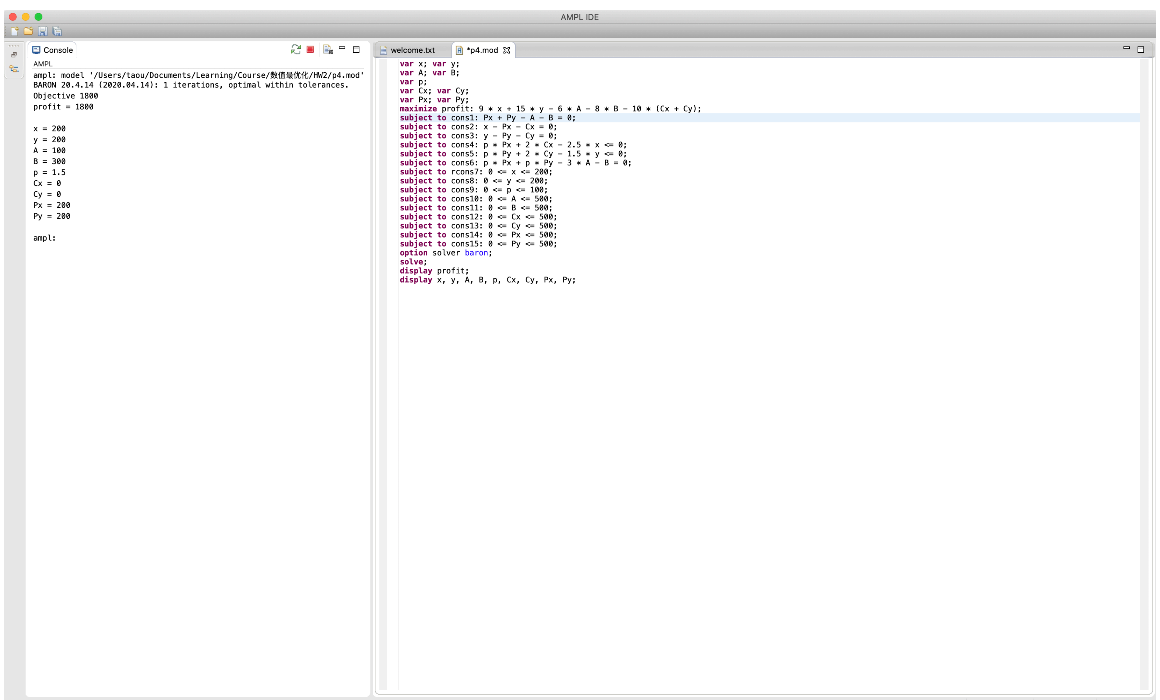


图 3: 集合 P