Numerical Optimization, 2020 Fall
Homework 1 解答

Due on 14:59 Sep 15, 2020

请尽量使用提供的 tex 模板, 画图部分可手绘拍照加入文档.

1 优化问题的应用

给出目前业界线性规划的一个应用场景. 介绍模型 (变量、约束、目标). 一般的规模是多大?

2 将下述问题建模成线性规划问题

一个原油精练场有 8 百万桶原油 A 和 5 百万桶原油 B 用以安排下个月的生产. 可用这些资源来生产售价为 38 元/桶的汽油, 或者生产售价为 33 元/桶的民用燃料油. 有三种生产过程可供选择, 各自的生产参数如下: 除成本外, 所有的量均以桶为单位. 例如, 对于第一个过程而言, 利用 3 桶原油 A 和 5 桶原油 B 可以生产

	过程1	过程2	过程3
输入原油A	3	1	5
输入原油B	5	1	3
输出汽油	4	1	3
输出燃料油	3	1	4
成本(单位：元)	51	11	40

4 桶汽油和 3 桶民用燃料油, 成本为 51 元. 表格中的成本指总的成本 (即原油成本和生产过程的成本). 将此问题建模成线性规划, 其能使管理者极大化下个月的净利润.

解答: 设下个月利用第一个过程生产 x 次, 第二个过程生产 y 次, 第三个过程生产 z 次. 则利润为

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =&(38\times 4+33\times 3-51)x+(38+33-11)y+(38\times 3+33\times 4-40)z \\ =&200x+60y+206z. \end{aligned}$$

其数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y,z} \quad & 200x + 60y + 206z \\
s.t. \quad & 3x + y + 5z \leq 8,000,000 \\
& 5x + y + 3z \leq 5,000,000 \\
& x, y, z \geq 0, \quad x, y, z \text{ 为整数.}
\end{aligned}
$$

3 线性规划的等价转换

(i) 考虑如下线性回归问题. 令 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 为样本点和对应标签, a 和 b 为线性模型的参数. 线性回归模型可表示为 $y_i = ax_i + b,\ i = 1, \cdots, n$. 用 L_∞ 范数作为该线性模型的损失函数, 则对应的数学规划问题可建模为:

$$
\min_{a,b} \ \max_i \ |y_i - (ax_i + b)|. \tag{1}
$$

将(1)改写成等价的线性规划模型.

(ii) 极小化如下绝对值和问题:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2} \quad & |x_1| + |x_2| \\
s.t. \quad & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 5.
\end{aligned} \tag{2}
$$

(a) 引入新变量 $x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-$, 将问题(2)转换为线性规划问题.

(b) 分析为何只有当互补条件 (即 $x_1^+ x_1^- = 0, x_2^+ x_2^- = 0$) 成立时, 问题取得最优解.

(c) 图解法求解问题(2).

解答:

(i) 令 $z = \max_i \ |y_i - (ax_i + b)|$, 则(1)可转化为:

$$
\begin{aligned}
\min_{a,b,z} \quad & z \\
s.t. \quad & z = \max_i \ |y_i - (ax_i + b)|.
\end{aligned}
$$

因为目标是极小化 z 所以上述问题可转化为

$$
\begin{aligned}
\min_{a,b,z} \quad & z \\
s.t. \quad & z \geq y_i - (ax_i + b) \quad i = 1, 2 \cdots n \\
& z \geq -y_i + (ax_i + b) \quad i = 1, 2 \cdots n.
\end{aligned}
$$

(ii) (a)

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1^+, x_1^1, x_2^+, x_2^-} \quad & x_1^+ + x_1^- + x_2^+ + x_2^- \\
s.t. \quad & (x_1^+ - x_1^-) + 3(x_2^+ - x_2^-) \geq 5 \\
& 2(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) \geq 5 \\
& x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0.
\end{aligned}
$$

(b) 假设一组可行解 $x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-$ 不满足互补条件且为最优解. 有

$$\min(x_i^+, x_i^-) = \delta_i > 0,\ i = 1, 2.$$

令

$$
\begin{aligned}
z_1^+ = x_1^+ - \delta_1, z_1^- = x_1^- - \delta_1, \\
z_2^+ = x_2^+ - \delta_1, z_2^- = x_2^- - \delta_1.
\end{aligned}
$$

易验证 $z_1^+, z_1^-, z_2^+, z_2^-$ 是一组可行解. 此外,

$$z_1^+ < x_1^+, z_1^- < x_1^-, z_2^+ < x_2^+, z_2^- < x_2^-.$$

故该组解有更小的目标函数值, 与假设矛盾.

(c) 由于目标函数是绝对值函数, 可以按象限分类讨论, 则每个象限上都可用图解法找到最优解, 最终比较它们的大小. 第一象限最优解为 $(2, 1)$ 点, 对应目标函数值为 3. 第二象限最优解为 $(0, 5)$ 点, 对应目标函数值为 5. 第四象限最优解为 $(5, 0)$ 点, 对应目标函数值为 5. 第三象限不存在可行解. 因此最优解为 $(2, 1)$.