Numerical Optimization, 2020 Fall
Homework 1

Tao Huang
2018533172

Due on 14:59 Sep 15, 2020

1 优化问题的应用

给出目前业界线性规划的一个应用场景. 介绍模型 (变量、约束、目标). 一般的规模是多大?

解:

- 应用场景: 发电企业需要在满足发电量的情况下尽可能减小煤炭采购的成本
- 模型描述: 某发电企业管理 n 个燃煤电厂, 当月总发电量目标为 G; 可从 m 个煤矿采购煤炭; a_i 为第 i 个煤矿的最大供应能力, d_j 为第 j 个电厂的供电煤耗, f_j 为第 j 个电厂当月的最大发电能力 $[i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n; (i, j)$ 代表一对供需组合]; 从第 i 个煤矿到第 j 个电厂的采购成本为 c_{ij}
- 优化变量: 每对供需组合的运输量 x_{ij}
- 目标函数: 使该企业的总采购成本 Z 最小, 即 $\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$。
- 优化约束:
  1. 不突破每个煤矿的供应能力, $\sum_{j=1} n_{ij} \leq a_i$;
  2. 各电厂的发电量不突破当月发电能力, $d_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq f_j$;

3. 满足总发电量目标,$\sum_{j=1}^{n}(d_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}) = G$;
4. 采购量非负，$x_{ij} \geq 0$.

- 一般规模：该模型的规模由电厂和煤矿的数量决定 (即 i，j 的离散取值总对数)，因此在实际中的规模大致在 $10^1 - 10^2$ 数量级范围内。

Reference: 田森. 基于线性规划技术的发电量—燃煤成本模型研究 [J]. 企业管理,2017(S2):249-251.

2 将下述问题建模成线性规划问题

一个原油精练场有 8 百万桶原油 A 和 5 百万桶原油 B 用以安排下个月的生产. 可用这些资源来生产售价为 38 元/桶的汽油, 或者生产售价为 33 元/桶的民用燃料油. 有三种生产过程可供选择, 各自的生产参数如下: 除成

	过程1	过程2	过程3
输入原油A	3	1	5
输入原油B	5	1	3
输出汽油	4	1	3
输出燃料油	3	1	4
成本(单位：元)	51	11	40

本外, 所有的量均以桶为单位. 例如, 对于第一个过程而言, 利用 3 桶原油 A 和 5 桶原油 B 可以生产 4 桶汽油和 3 桶民用燃料油, 成本为 51 元. 表格中的成本指总的成本 (即原油成本和生产过程的成本). 将此问题建模成线性规划, 其能使管理者极大化下个月的净利润.

解：

- 模型描述：记原油 A、B 在单次过程 i 中消耗量分别为 a_i, b_i，输出汽油和燃料油分别为 m_i, n_i，过程 i 的成本为 c_i, 单位汽油与燃料油的售价分别为 g, h, 原油 A、B 的总量为 A, B.

- 优化变量：每种生产过程的生产次数 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$.
- 目标函数：最大化月利润，$\max_x \left(\sum_{i=1}^{3}(gm_ix_i+hn_ix_i)-\sum_{i=1}^{3}c_ix_i\right)$.
- 优化约束：
  1. 消耗原油 A 的量不超过总量，$\sum_{i=1}^{3}a_ix_i\le A$.
  2. 消耗原油 B 的量不超过总量，$\sum_{i=1}^{3}b_ix_i\le B$.
  3. 生产过程次数非负，$x\ge 0$.

因此，该问题可以建模成如下线性规划问题，其中记 $p_i=gm_i+hn_i-c_i$:

$$\begin{aligned}\max_x\quad & p^Tx\\ s.t.\quad & a^Tx\le A\\ & b^Tx\le B\\ & x\ge 0\end{aligned}\tag{1}$$

将题中所给数值带入:

$$\begin{aligned}\max_x\quad & (200,60,206)^Tx\\ s.t.\quad & (3,1,5)^T\cdot x\le 8000000\\ & (5,1,3)^T\cdot x\le 5000000\\ & x\ge 0\end{aligned}\tag{2}$$

3 线性规划的等价转换

(i) 考虑如下线性回归问题. 令 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 为样本点和对应标签, a 和 b 为线性模型的参数. 线性回归模型可表示为 $y_i=ax_i+b,\ i=1,\cdots,n$. 用 L_∞ 范数作为该线性模型的损失函数, 则对应的数学规划问题可建模为:

$$\min_{a,b}\ \max_i\ |y_i-(ax_i+b)|.\tag{3}$$

将(3)改写成等价的线性规划模型.

解:

$$\begin{aligned} \min_{a,b} \quad & z \\ s.t. \quad & y_i - (ax_i + b) \le z, \quad i = 1, ..., n \\ & -y_i + (ax_i + b) \le z, \quad i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(ii) 极小化如下绝对值和问题:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & |x_1| + |x_2| \\ s.t. \quad & x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 5. \end{aligned} \tag{4}$$

(a) 引入新变量 $x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-$, 将问题(4)转换为线性规划问题.

(b) 分析为何只有当互补条件 (即 $x_1^+x_1^- = 0, x_2^+x_2^- = 0$) 成立时, 问题取得最优解.

(c) 图解法求解问题(4).

解:

(a) 问题可转换为

$$\begin{aligned} \min_{x^+,x^-} \quad & \mathbf{1}^T \cdot (x^+ + x^-) \\ s.t. \quad & (x_1^+ - x_1^-) + 3(x_2^+ - x_2^-) \ge 5 \\ & 2(x_1^+ - x_1^-) + (x_2^+ - x_2^-) \ge 5 \\ & x^+ \ge 0, x^- \ge 0 \\ & x^+ \cdot x^- = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

(b) 假设互补条件不成立，即 $x^+ \cdot x^- = 0$ 不是该优化问题下的一个约束条件。首先根据线性特征，对于任意一个可行解 (x^+, x^-)，$(x^+, x^-)+$

$k\mathbf{1}, k \in R$ 也是一个可行解, 那么当原目标函数中 $\sum_{i=1}^{n} c_i|x_i|$ 的常系数 $c_i < 0$ 的情况下，令 $k \to \infty$, 此优化问题可以取到无穷小，无解。因此在 $c_i < 0$ 情况下, 假设不成立，即互补条件必需满足。

(c) 由图解法求得最优解为 $(x_1, x_2) = (2, 1)$，对应的最小值为 3。

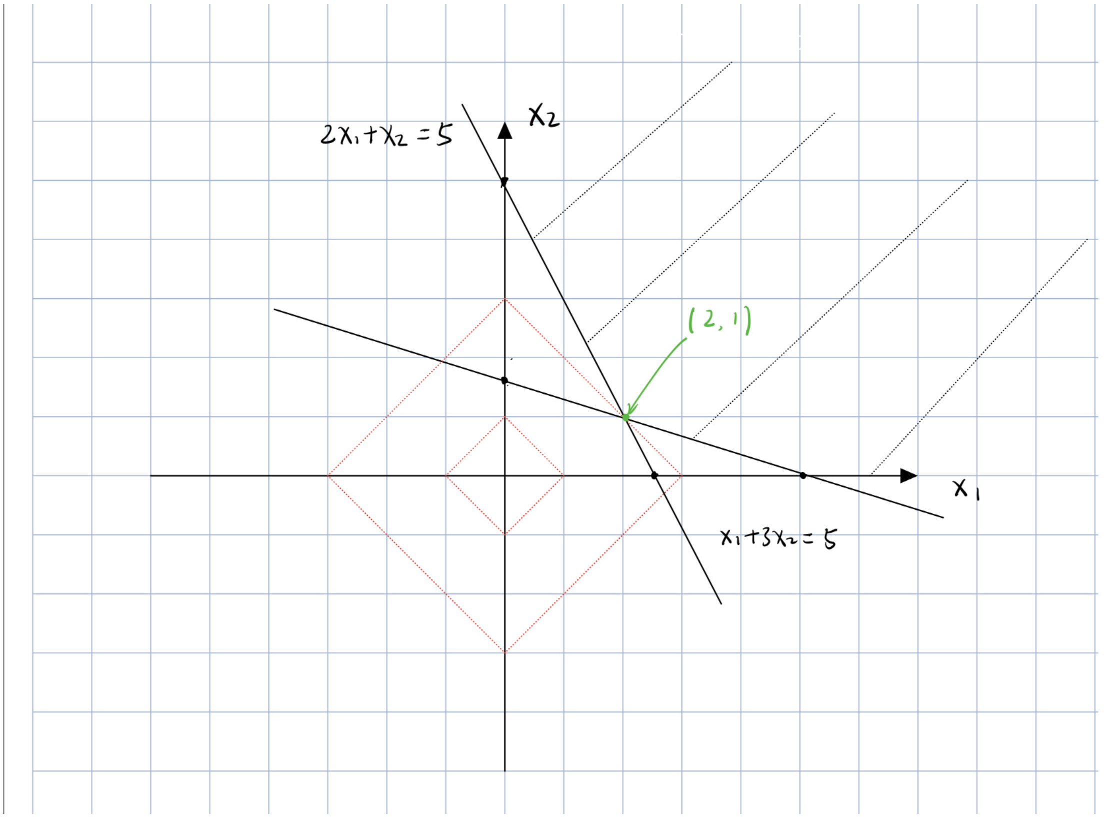

图 1: 图解法