Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 3

Due on 14:59 OCT 10, 2020

请尽量使用提供的 tex 模板, 单纯形法的表格可手绘拍照加入文档.

1 单纯形法

以下均考虑非退化线性规划问题即可。

(i) 考虑一线性规划问题的规范型如下:

以(p,q)元转轴后，新规范形的系数

Pivot, 意味着以此消元

$$
\begin{array}{llllll}
1\cdot x_1 & & & +y_{1q}x_q+\ldots+y_{1n}x_n & =\bar{b}_1 \\
 & 1\cdot x_p & & +\boxed{y_{pq}}x_q+\ldots+y_{pn}x_n & =\bar{b}_p \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & 1\cdot x_m & +y_{mq}x_q+\ldots+y_{mn}x_n & =\bar{b}_m
\end{array}
$$

Pivot后, 意味此列出基

记进基变量的下标为 q, 转轴前分量 j 对应的 reduced cost 为 r_j, 转轴后对应的 reduced cost 为 r'_j。试证明 reduced cost 的更新公式为 $r'_j=r_j-\frac{y_{pj}}{y_{pq}}r_q$(参考 Lecture 3 中 17 页)。 [20pts]

解答: 注: 题目有一定开放性, 只要分析合理即可. (以下给出两种证明方式)

方法一: 根据 r' 定义, 对任意 r'_j $(j=1,\cdots,n)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
r'_j =& c_j - z'_j \\
=& c_j - \sum_{i=1}^{m} y'_{ij} c_{\hat{B}_{(i)}} \\
=& c_j - \sum_{i=1,i\neq p}^{m} (y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}) c_{\hat{B}_{(i)}} + \frac{y_{pj}}{y_{pq}} c_q \\
=& c_j - z_j - \left(\frac{y_{pj}}{y_{pq}}(c_q - z_q)\right) \\
=& r_j - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} r_q.
\end{aligned}
$$

方法二: 从单纯形法的机制考虑 (参考 Lecture 3 中 17 页): 若非基变量 x_q 进基, 要将其对应的 reduced cost r'_q 消成 0. 对应操作为: 单纯形表的第 p(出基变量下标) 行乘以 $-\frac{y_{pj}}{y_{pq}}r_q$ 加到 reduced cost 对应的那一列. 则对应的 reduced cost 的更新公式为 $r'_j=r_j-\frac{y_{pj}}{y_{pq}}r_q$.

(ii) 单纯形表中右下角的-f 对应当前基本可行解的目标函数值的相反数。试证明, 经过一次转轴后更新的-f 对应更新后基本可行解对应的目标函数值的相反数 (参考 Lecture 3 中 20 页)。 [20pts]

Simplex Method in Tableau Format

单纯形表(tableau)：**BFS**对应规范形的表格＋

既约费用系数和**BFS**目标值的相反数

	x_1	$\cdots$	x_p	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	$B^{-1}b$
	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\cdots$	y_{1q}	$\cdots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
		$\ddots$				$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$y_{p,m+1}$	$y_{p,m+2}$	$\cdots$	y_{pq}	$\cdots$	y_{pn}	$\bar{b}_p$
				$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\cdots$	y_{mq}	$\cdots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
r^{T}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	r_{m+1}	r_{m+2}	$\cdots$	r_q	$\cdots$	r_n	$\boxed{-f}$

单纯形表可以提供计算需要的所有信息!

why?

解答:

注: 题目有一定开放性, 只要分析合理即可.

目标函数的变化量 $f - f'$ 即为进基变量 x_q 的值 $\bar{b}_p/y_{pq}$ 乘以对应的 reduced cost r_q, 即

$$f' = f - \frac{\bar{b}_p}{y_{pq}} r_q.$$

从单纯形法的机制考虑: 若非基变量 x_q 进基, 要将其对应的 reduced cost r_q' 消成 0. 因此目标函数位置 (正方形虚线框处) 的值由 $-f$ 变为 $-f - \frac{\bar{b}_p}{y_{pq}} r_q$, 即为 $-f'$.

2 修正单纯形法

2.1 证明题

试证明 Lecture 4 中 20 页 λ 的更新公式为: $\hat{\lambda}^T = \lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}} \boldsymbol{u}_p$。 [20pts]

解答:

由定义可知:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}^T =& c_{\hat{B}}^T \hat{B}^{-1} = c_{\hat{B}}^T E_{pq} B^{-1} \quad \text{由}\hat{B}\text{定义} \\
=& c_{\hat{B}}^T B^{-1} + c_{\hat{B}}^T [v_1, \cdots, v_{p-1}, v_p - 1, v_{p+1}, \cdots, v_m] u_p \quad E_{pq}\text{分离出一个单位矩阵} \\
=& c_{\hat{B}}^T B^{-1} + (c_{\hat{B}}^T v) u_p - c_q u_p \\
=& c_B^T B^{-1} + (c_q - c_p) u_p + (c_{\hat{B}}^T v) u_p - c_q u_p \quad \text{由} c_{\hat{B}}, c_B \text{的关系得} \\
=& \lambda^T - c_p u_p + (c_B^T v + (c_q - c_p) v_p) u_p \\
=& \lambda^T - c_p u_p + \frac{1}{y_{pq}} \left((c_q - c_p) + (1 + y_{pq}) c_p - \sum_{i=1}^{m} c_i y_{iq} \right) u_p \quad \text{把} v_p \text{代入} \\
=& \lambda^T + \frac{(c_q - z_q)}{y_{pq}} u_p \\
=& \lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}} \boldsymbol{u}_p.
\end{aligned}$$

2.2 计算题

试用两阶段法求解如下线性规划问题 (详见 Lecture 4 第 13 页), 给出各个步骤的单纯形表。 [40pts]

$$\begin{array}{ll} \textbf{minimize} & x_1 - x_2 \\ \textbf{subject to} & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & -4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ & -5x_1 + 6x_2 = 6 \\ & x_1 - x_3 = 0 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

解答:

注意到, 本题的线性规划问题为标准型, 且有 3 个变量和 4 个等式约束 (积极约束), 故一定有冗余约束, 因此可以先对系数矩阵高斯消去, 去掉冗余约束后再做两阶段法 (这里不给出详细过程)。这里给出参考的答案, 考虑在 "两阶段法" 过程中排除冗余约束。

引入辅助变量 y_1, y_2, y_3, y_4 得到辅助问题:

$$\begin{aligned} \min_{y_1,y_2,y_3,y_4} \quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ s.t. \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 2 \\ & -4x_1 + 4x_2 - x_3 + y_2 = 4 \\ & -5x_1 + 6x_2 + y_3 = 6 \\ & x_1 - x_3 + y_4 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

单纯形表法求解 "第一阶段" 问题:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
	-1	2	1	1	0	0	0	2
	-4	4	-1	0	1	0	0	4
	-5	6	0	0	0	1	0	6
	1	0	-1	0	0	0	1	0
c^T	0	0	0	1	1	1	1	0

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
	-1	$\boxed{2}$	1	1	0	0	0	2
	-4	4	-1	0	1	0	0	4
	-5	6	0	0	0	1	0	6
	1	0	-1	0	0	0	1	0
r^T	9	-12	1	0	0	0	0	-12

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
	-0.5	1	0.5	0.5	0	0	0	1
	$\boxed{-2}$	0	-3	-2	1	0	0	0
	-2	0	-3	-3	0	1	0	0
	1	0	0	0	0	0	1	0
r^T	3	0	6	6	0	0	0	0

辅助问题最优值为 0, 故原问题有可行解. 但人工变量没有全部出基, 故继续转轴使 x_1 进基, y_2 出基 (这里选择不唯一)

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
	0	1	1.25	1	-0.25	0	0	1
	1	0	1.5	1	-0.5	0	0	0
	0	0	0	-1	-1	1	0	0
	0	0	$\boxed{-2.5}$	-1	0.5	0	1	0

此时 y_3 对应行中 x_1, x_2, x_3 对应系数均为 0, 故为冗余约束, 直接删去. 继续转轴

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_4	
	0	1	0	0.5	0	0.5	1
	1	0	0	0.4	-0.2	0.6	0
	0	0	1	0.4	-0.2	-0.4	0

"第一阶段" 得到基本可行解 $\boldsymbol{x} = [0, 1, 0]^T$. 删去辅助变量开始 "第二阶段"

	x_1	x_2	x_3	
	0	1	0	1
	1	0	0	0
	0	0	1	0
c^T	1	-1	0	0

	x_1	x_2	x_3	
	0	1	0	1
	1	0	0	0
	0	0	1	0
r^T	0	0	0	1

得到最优单纯性表, 原问题最优解为 $\boldsymbol{x} = [0, 1, 0]^T$.

注: 若题目没有限定用 "两阶段法", 该问题其实只有唯一可行解故即为最优解。