Numerical Optimization

Lecture 3: Simplex Method

王浩

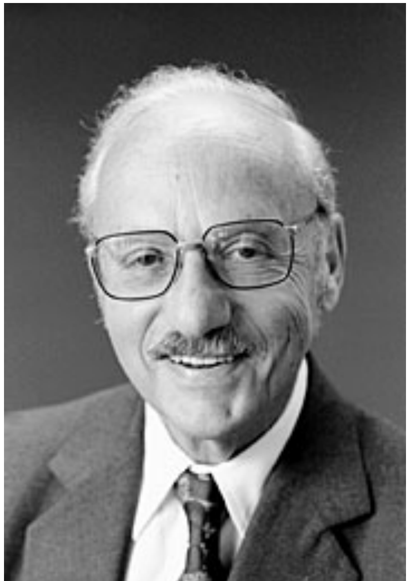
信息科学与技术学院

Email: wanghao1@shanghaitech.edu.cn

线性规划的历史

- 渊源要追溯到**Euler**、**Leibniz**、**Lagrange**等
- **二战期间， G. Dantzig, Von Neumann**和 **L. Kantorovich**在**1940's**创建了线性规划
- **1947**年**, George Bernard Dantzig**于发明了单纯形法
- 以后接着说……

单纯形法的历史



- **George Bernard Dantzig**

1914-2005
University of Maryland (BS)
University of Michigan (MS)
University of California, Berkeley (PhD)
mathematical adviser to the military (1946-1952),
a research mathematician at the RAND Corp. (1952-1960)
chair and professor of the Operations Research Center at UC-Berkeley (1960-1966).

The recipients of the Dantzig Prize are:

- 1982: Michael J.D. Powell, R. Tyrell Rockafellar
- 1985: Ellis Johnson, Manfred Padberg
- 1988: Michael J. Todd
- 1991: Martin Grotschel, Arkady S. Nemirovskii
- 1994: Claude Lemarechal, Roger J.B. Wets
- 1997: Roger Fletcher, Stephen M. Robinson
- 2000: Yurii Nesterov
- 2003: Jong-Shi Pang, Alexander Schrijver
- 2006: Eva Tardos
- 2009: Gérard Cornuéjols
- 2012: Jorge Nocedal, Laurence Wolsey
- 2015: Dimitri P. Bertsekas
- 2018: Andrzej Piotr Ruszczyński, Alexander Shapiro

本节内容

- 规范型、既约费用系数、既约线性规划 – 基本概念
- 最优性判别、无界判别、BFS的改进 – 原理(重点)
- 单纯形法的表格实现 – 方法
- 单纯形法的有限步收敛性 – 难点
  - 非退化的线性规划，单纯形法有限步收敛
  - 退化的线性规划
    - ✓ 退化BFS与退化转轴
    - ✓ 单纯形法循环的例子
    - ✓ 避免循环的Bland法则

Simplex Method（单纯形法）

- 适用形式：标准形(BFS等价于极点)
- 理论基础：线性规划的基本定理!
- 基本思想：从约束集的某个极点/BFS开始，依次移动到相邻极点/BFS，直到找出最优解，或判断问题无界.

- 迭代规则：如何从一个极点/BFS迭代到相邻的（更好的）极点/BFS? （转轴）
- 判断准则：何时最优？何时无界？（即约费用）
- 初始化：如何找到一个BFS? （启动）
- 退化：如何避免死循环? （Bland法则）

1. Pivot（转轴）

标准形 $\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ s.t. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_{B(1)} & \boldsymbol{a}_{B(2)} & \cdots & \boldsymbol{a}_{B(m)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{bmatrix}$$

$\mathscr{B}$: set of basis

$\mathscr{N}$: set of nonbasic

基本解

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

求逆

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

规范形(Canonical form) $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b,\ x \geq 0$

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & & & & + \boxed{y_{1,m+1}} x_{m+1} + \ldots + y_{1,n}x_n & = \bar{b}_1 \\
& x_2 & & & + y_{2,m+1} x_{m+1} + \ldots + y_{2,n}x_n & = \bar{b}_2 \\
& & \ddots & & \qquad\qquad \cdots & \quad \cdots \\
& & & x_m & + y_{m,m+1} x_{m+1} + \ldots + y_{m,n}x_n & = \bar{b}_m
\end{array}
$$

这代表了什么?

不妨设$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n]$和$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$，则有第 j 列的系数向量$\mathbf{y}_j = [y_{1j}, \ldots, y_{mj}]^T$为

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \implies \mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \ldots + y_{mj}\mathbf{a}_m$$

第 j 列的系数是用当前基表示 $\boldsymbol{a}_j$ 时的系数!

一般的, $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_i]_{i\in\mathscr{B}} = [\mathbf{a}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(m)}]$，则有

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i\in\mathscr{B}} y_{ij}a_i = y_1\mathbf{a}_{B(1)j} + y_2\mathbf{a}_{B(2)j} + \ldots + y_m\mathbf{a}_{B(m)j}$$

将 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 $\boldsymbol{x}$ 用非基变量表示为

$$x_1 = \bar{b}_1 - \sum_{j=m+1}^{n} y_{1j}x_j$$

$$x_2 = \bar{b}_2 - \sum_{j=m+1}^{n} y_{2j}x_j$$

$$\vdots$$

$$x_m = \bar{b}_m - \sum_{j=m+1}^{n} y_{mj}x_j$$

一般形式

$$x_{B(1)} = \bar{b}_1 - \sum_{j\in\mathcal{N}} y_{1j}x_j$$

$$x_{B(2)} = \bar{b}_2 - \sum_{j\in\mathcal{N}} y_{2j}x_j$$

$$\vdots$$

$$x_{B(m)} = \bar{b}_m - \sum_{j\in\mathcal{N}} y_{mj}x_j$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = f_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \boxed{(c_j - z_j)}x_j$$

$$f_0 = \bar{b}_1c_1 + \ldots + \bar{b}_mc_m,$$

$$z_j = y_{1j}c_1 + \ldots + y_{mj}c_m$$

Reduced Cost

$$\boxed{r_j = c_j - z_j}$$

- 既约费用系数的经济解释！(合成费用、相对费用)
- What if you have all reduced costs being nonnegative?
- What is the values of $r_j, j \in \mathscr{B}$?

Reduced Linear Programming（既约线性规划）

$$\text{minimize} \quad r_{m+1}x_{m+1} + \ldots + r_n x_n + f_0$$

$$\text{subject to} \quad (x_1 = \,)\ \bar{b}_1 - \sum_{j=m+1}^{n} y_{1j}x_j \geq 0$$

原问题相对**basis**

B的等价表述

$$\ldots$$

$$(x_m = \,)\ \bar{b}_m - \sum_{j=m+1}^{n} y_{mj}x_j \geq 0$$

- **定理(optimality criterion最优性判别)**

> 在某基本**可行**解处，如果对所有 j 有 $r_j = c_j - z_j \geq 0$,
> 则这个基本可行解是最优的.

- 如果没有达到最优，该怎么办?

基本可行解的改进

定理 (BFS的改进)

给定目标值为 f_0 的非退化基本可行解，且假设存在 q 使得 $r_q < 0$，则

(i) 用 a_q 替换基中某列得到了新的BFS，则新BFS处的目标值比当前目标值严格小. (why?)

(ii) 否则，即任何替换都产生不了新的BFS ($y_q \le 0$) ，问题无界. (why?)

严格增大，则目标严格下降

minimize $\quad r_{m+1}0 + \ldots r_{q-1}0 + r_q \boxed{x_q} + r_{q+1}0 + \ldots + r_n 0 + f_0$

非退化，则这些都是正数

subject to

$$
\begin{aligned}
(x_1 =)\ &\bar{b}_1 - y_{1q}x_q \geq 0 \\
&\vdots \\
(x_m =)\ &\bar{b}_m - y_{mq}x_q \geq 0
\end{aligned}
$$

x_q可以严格增大

基本可行解的改进

当前选取基为：$A=[B\ N],\ x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}c_B\\c_N\end{bmatrix},$

在选定的基上把x_B用x_N来表示：$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

把x_N设置为0，则得基本解（假设其可行）为：$x^{(0)}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$

在$x^{(0)}$的目标函数值为：$f_0=c^Tx^{(0)}=[c_B^T,c_N^T]\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}=c_B^TB^{-1}b$

现在换一个不同的可行解：$x=\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}$

$$f=c^Tx=[c_B^T,c_N^T]\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=c_B^Tx_B+c_N^Tx_N$$

带入，目标函数变为：

$$=c_B^T(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N)+c_Nx_N$$

$$=\underbrace{\boxed{c_B^TB^{-1}b}}_{f_0}+(c_N-c_B^TB^{-1}N)x_N$$

基本可行解的改进

目标函数变为：$f = f_0 + \sum_{i \in \mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j = f_0 + \sum_{i \in \mathcal{N}} r_j x_j$

如果换为新的基本可行解，则选某x_j从0变为非0

令$r_q = \min_j \{r_j, j \in \mathcal{N}\}$，选$q$进基，但开除哪个基变量?

原基变量：$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}[\ldots \mathbf{a}_q \ldots] \begin{bmatrix} \vdots \\ x_q \\ \vdots \end{bmatrix}$

$$= \boxed{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}} - \boxed{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_q} x_q = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_q x_q$$

当增加x_q，f下降，但是持续增加x_q，还能保证$\mathbf{x}_B \geq 0$?

如果$\mathbf{y}_q \leq 0$，则令$x_q \to +\infty$，问题无界$f \to -\infty$

如果存在$p \in \{1,\ldots,m\}$有$y_{pq} > 0$，则x_q不可能无限制增大

一直增大x_q，使得某$x_i, i \in \mathcal{B}$变成0（即，出基）

基本可行解的改进

$$\mathbf{x_B} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_q x_q = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1q} \\ y_{2q} \\ \vdots \\ y_{mq} \end{bmatrix} x_q = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_q x_q = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 - x_q y_{1q} \\ \bar{b}_2 - x_q y_{2q} \\ \vdots \\ \bar{b}_m - x_q y_{mq} \end{bmatrix} \geq 0$$

所以x_q最大可以是$\boxed{\max?\min?}\{\frac{\bar{b}_i}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0,\ i = 1,\ldots,m\} = \frac{\bar{b}_p}{y_{pq}}$

Pivot(转轴)：x_q进基后导致$x_{B(p)}$出基，得到新的基本可行解

从一个基本可行解，得到了一个临近的基本可行解

并且带来了目标函数的（严格）下降

何时终止算法?

以(p,q)元转轴后，新规范形的系数

Pivot, 意味着以此消元

$$
\begin{array}{llllll}
1\cdot x_1 & & & +y_{1q}x_q+\ldots+y_{1n}x_n & =\bar{b}_1 \\
& 1\cdot x_p & & +\boxed{y_{pq}}x_q+\ldots+y_{pn}x_n & =\bar{b}_p \\
& & \ddots & \vdots & \vdots \\
& & 1\cdot x_m & +y_{mq}x_q+\ldots+y_{mn}x_n & =\bar{b}_m
\end{array}
$$

Pivot后, 意味此列出基

对$j=1,\ldots,n$，新系数：$y'_{ij}=\begin{cases} y_{ij}-\dfrac{y_{pj}}{y_{pq}}y_{iq} & i\neq p \\ \dfrac{y_{pj}}{y_{pq}} & i=p \end{cases}$

$$\mathscr{B} \to \widehat{\mathscr{B}}, \quad \mathscr{N} \to \widehat{\mathscr{N}}$$

Reduced Cost的更新

[1] (3.1.16)

$$r_j' = c_j - z_j', \quad z_j' = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}' c_{\hat{B}(i)}$$

- 以(p,q)元转轴后，新reduced cost：$r_j' = r_j - \dfrac{y_{pj}}{y_{pq}} r_q$
- 特别的：$r_q' = r_q - \dfrac{y_{pq}}{y_{pq}} r_q = 0,\ r_p' = r_p - \dfrac{y_{pp}}{y_{pq}} r_q = 0 - \dfrac{1}{y_{pq}} r_q > 0$

why?

$$
\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 \cdot x_1 & & & & +y_{1q}x_q & +\ldots+ & y_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
 & 1 \cdot x_p & & & +\boxed{y_{pq}}x_q & +\ldots+ & y_{pn}x_n & = \bar{b}_p \\
 & & \ddots & & \cdots & \cdots & & \\
 & & & 1 \cdot x_m & +y_{mq}x_q & +\ldots+ & y_{mn}x_n & = \bar{b}_m \\
\hline
0 & \boxed{0} & \ldots & 0 & \boxed{r_q} & \ldots & \boxed{r_n} & \\
\hline
0 & \boxed{-\dfrac{1}{y_{pq}} r_q} & \ldots & 0 & \boxed{0} & \ldots & \boxed{r_n - \dfrac{y_{pn}}{y_{pq}} r_q} & \\
\hline
\end{array}
$$

转轴后，还是一组基吗？(算法是良好定义的吗？)

- 转轴前的基是： $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B(1)}, \mathbf{a}_{B(2)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(p)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(m)}]$
  这是一组线性无关的向量
- 转轴后的基是： $\widehat{\mathbf{B}} = [\mathbf{a}_{B(1)}, \mathbf{a}_{B(2)}, \ldots, \mathbf{a}_{q}, \ldots, \mathbf{a}_{B(m)}]$
  这还是一组线性无关的向量吗？
- $\mathbf{y}_q = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_q \implies \mathbf{a}_q = \mathbf{B}\mathbf{y}_q = \sum_{i=1}^{m} y_{iq}\mathbf{a}_{B(i)}$
- 转轴后是：
  $$\widehat{\mathbf{B}} = [\mathbf{a}_{B(1)}, \mathbf{a}_{B(2)}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} y_{iq}\mathbf{a}_{B(i)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(m)}]$$
  故而还是线性无关
- 规范型 $\overset{\text{Pivot}}{\Longrightarrow}$ 规范型

2. Simplex Method
（单纯形法）

Simplex Method in Tableau Format

单纯形表(tableau)：**BFS**对应规范形的表格+

既约费用系数和**BFS**目标值的相反数

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_p & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_q & \cdots & x_n & B^{-1}b \\
\hline
 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \cdots & y_{1q} & \cdots & y_{1n} & \bar{b}_1 \\
 & & \ddots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & y_{p,m+1} & y_{p,m+2} & \cdots & y_{pq} & \cdots & y_{pn} & \bar{b}_p \\
 & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{mq} & \cdots & y_{mn} & \bar{b}_m \\
r^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & r_{m+1} & r_{m+2} & \cdots & r_q & \cdots & r_n & -f
\end{array}
$$

单纯形表可以提供计算需要的所有信息！

why?

❖ 有的教材在底端采用判别数/检验数(Optimality Test)，其为即约费用的相反数。

如何得到第一张单纯形表

- 初始表格： **BFS**对应规范形的表格$+(c^T,0)$

	x_1	$\cdots$	x_p	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	$B^{-1}b$
	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\cdots$	y_{1q}	$\cdots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
		$\ddots$				$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$y_{p,m+1}$	$y_{p,m+2}$	$\cdots$	y_{pq}	$\cdots$	y_{pn}	$\bar{b}_p$
				$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\cdots$	y_{mq}	$\cdots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
c^{T}	c_1	$\cdots$	c_p	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	$\cdots$	c_q	$\cdots$	c_n	0

- 用转轴运算(初等行变换)将最后一行与基变量对应的元素化为零，即得第一张单纯形表！(Why?)

例1. $\textbf{maximize} \quad 3x_1 + x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned}
\textbf{subject to} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5, \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6, \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

化标准形

得标准形的初始表格/第一张单纯形表

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{b} \\
\hline
 & \underline{2} & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
 & 1 & 2 & \underline{3} & 0 & 1 & 0 & 5 \\
 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
\mathbf{c}^T/\mathbf{r}^T & -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

转轴

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	1	1	1	0	0	2
-3	0	$\boxed{1}$	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
-1	0	-2	1	0	0	2

转轴

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\boxed{5}$	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
-7	0	0	-3	2	0	4

转轴

0

↓

-2

↓

-4

↓

-27/5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	1/5	0	3/5	−1/5	0	1/5
0	3/5	1	−1/5	2/5	0	8/5
0	1	0	−1	0	1	4
0	7/5	0	6/5	3/5	0	27/5

最优解:

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_3 = \frac{8}{5}, x_6 = 4, x_2 = x_4 = x_5 = 0$$

最优值: $-\frac{27}{5}$　　原问题的极大值: $\frac{27}{5}$

单纯形法的步骤

步0 形成与初始BFS对应的初始表格.

通过行变换求出第一张单纯形表.

步1 若对每个 j 都有 $r_j \geq 0$ ，停；当前BFS是最优的.

步2 选取q满足 $r_q = \min\{r_j \mid r_j < 0,\ j = 1,\dots,n\}$

步3 若$y_q = (y_{1q}, y_{2q}, \dots, y_{mq})^T \leq 0$, 停，问题无界；

否则，选 p 满足

$$\frac{\bar{b}_p}{y_{pq}} = \min\{\frac{\bar{b}_i}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0, i = 1,\dots,m\}$$

步4 以 y_{pq} 为转轴元进行转轴，更新单纯形表，返回步1.

转轴规则：

进基变量：最小既约费用系数规则；出基变量：最小指标规则！

3、Convergence and Degeneracy (收敛性、退化)

单纯形法的收敛性

- 非退化的线性规划问题

称任意一个基本可行解都非退化的线性规划问题是非退化的.

- 收敛性定理

对于非退化的线性规划问题，利用单纯形法，从任一BFS出发，可在有限步内得到最优解或判断问题无界（why？）.

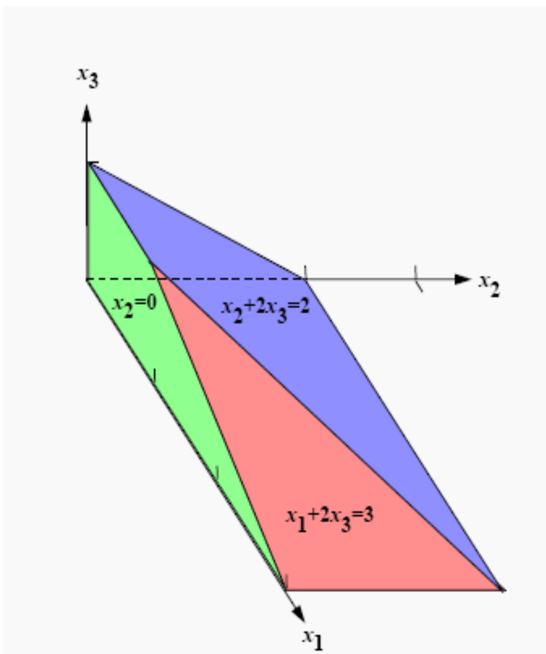
- 退化情况呢?

退化的基本可行解→退化的线性规划问题(几何解释)

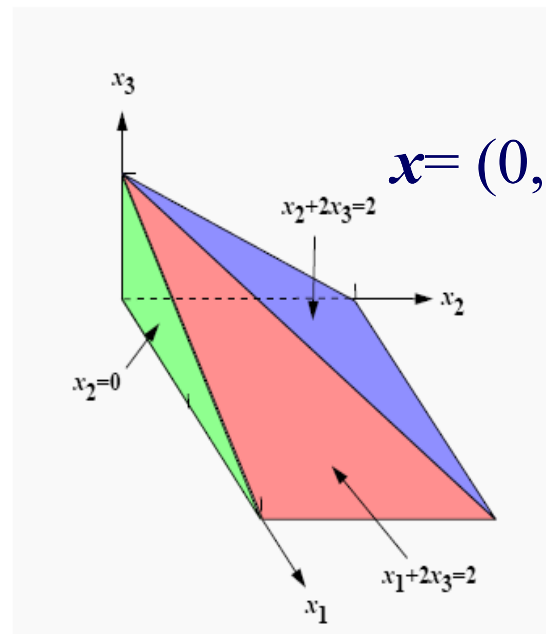
对于标准形而言，当**BFS**仅对应一个基时，是非退化的；

当**BFS**对应多个基时，是退化的

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximize} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{subject to} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 3 \\
& & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
& & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximize} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{subject to} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
& & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
& & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$



对于三维问题(非标准形，如图)，若极点是三个平面的交点，是非退化的；否则，是退化的。

退化的基本可行解→退化转轴→循环

非退化转轴

0	2	1	-3	0	2	0	0	1
0	-1	0	3	1	-1	0	0	4
1	0	0	0	0	2	0	0	3
0	0	0	1	0	-1	1	0	2
0	1	0	-1	0	0	0	1	0
0	-5	0	-4	0	-1	0	0	-6

退化转轴！

退化基本可行解

基本可行解是退化的当且仅当单纯形表最后一列有一个或者多个零！

退化转轴指转轴后目标函数的值没有发生变化！

退化(degenerate) →循环(cycling)

- 退化问题

  单纯形法可能出现循环(从某张单纯形表开始，若干次转轴迭代后又返回到该单纯形表的一串转轴)

- 循环的例子　E. M. L. Beale 的例子（[1]例3.3.1）

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_1 \geq 0, \cdots, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 转轴规则(进基出基变量的选取规则)

  进基变量：最小既约费用系数(平局时采用最小指标)规则

  出基变量：最小正比率(平局时采用最小指标)规则

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \boxed{1/4} & -8 & -1 & 9 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0
\end{array}$$

$B = (\, a_1, a_2, a_3)$

$x = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
4 & 0 & 0 & 1 & -32 & -4 & 36 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & \boxed{4} & 3/2 & -15 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & -4 & -7/2 & 33 & 0
\end{array}$$

$B = (\, a_4, a_2, a_3)$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
-12 & 8 & 0 & 1 & 0 & \boxed{8} & -84 & 0 \\
-1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1 & 3/8 & -15/4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 18 & 0
\end{array}$$

$B = (\, a_4, a_5, a_3)$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
-3/2 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 1 & -21/2 & 0 \\
1/16 & -1/8 & 0 & -3/64 & 1 & 0 & \boxed{3/16} & 0 \\
3/2 & -1 & 1 & -1/8 & 0 & 0 & 21/2 & 1 \\
\hline
-2 & 3 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -3 & 0
\end{array}
$$

最小既约费用系数原则

$$B = (a_6, a_5, a_3)$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
\boxed{2} & -6 & 0 & -5/2 & 56 & 1 & 0 & 0 \\
1/3 & -2/3 & 0 & -1/4 & 16/3 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & 6 & 1 & 5/2 & -56 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & -1/2 & 16 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$B = (a_6, a_7, a_3)$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & -3 & 0 & -5/4 & 28 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1/3} & 0 & 1/6 & -4 & -1/6 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -2 & 0 & -7/4 & 44 & 1/2 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$B = (a_1, a_7, a_3)$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1/4 & -8 & -1 & 9 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0
\end{array}
$$

第七张单纯形表 $B = (a_1, a_2, a_3)$，又回来了！循环！

注：循环时，转轴序列中所有**BFS**都是退化的，是同一个**BFS**，但每张表对应这个**BFS**的互不相同的基！

避免循环的方法

- 实际中经常碰到退化问题，但很少出现循环
- 避免出现循环的措施：摄动法、字典序法、**Bland**法则
- 摄动法(**Charnes, 1954**)、字典序法(**Dantzig，Orden, Wolfe，1954**)
- **Bland**法则(**Bland, 1977**)—最小指标法则

    ◆进基后使目标值减小的变量中，选指标最小者进基(负既约费用系数中指标最小者规则)

    ◆出基后使新的基本解保持可行的变量中，选指标最小者出基(最小正比率规则，平局时取最小指标者)

New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method. *Mathematics of Operations Research.* Vol. 2, No. 2 (May, 1977), pp. 103-107 (5 pages)

利用**Bland**法则作为转轴规则求解**Beale**的例子！

前四张单纯形表相同！但在第四张单纯形表：

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r}
-3/2 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 1 & -21/2 & 0 \\
\boxed{1/16} & -1/8 & 0 & -3/64 & 1 & 0 & \boxed{3/16} & 0 \\
3/2 & -1 & 1 & -1/8 & 0 & 0 & 21/2 & 1 \\
\hline
-2 & 3 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -3 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & -2 & 0 & -1 & 24 & 1 & -6 & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3/4 & 16 & 0 & 3 & 0 \\
0 & \boxed{2} & 1 & 1 & -24 & 0 & 6 & 1 \\
\hline
0 & -1 & 0 & -5/4 & 32 & 0 & 3 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1/4 & -8 & 0 & 9 & 1 \\
0 & 1 & 1/2 & \boxed{1/2} & -12 & 0 & 3 & 1/2 \\
\hline
0 & 0 & 1/2 & -3/4 & 20 & 0 & 6 & 1/2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1/2 & 3/4 & 0 & -2 & 0 & 15/2 & 3/4 \\
0 & 2 & 1 & 1 & -24 & 0 & 6 & 1 \\
\hline
0 & 3/2 & 5/4 & 0 & 2 & 0 & 21/2 & 5/4
\end{array}
$$

最后一张单纯形表/最优单纯形表

$x^* = (3/4, 0, 0, 1, 0, 1, 0)^T$, $z^* = -5/4$