Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 2

Due on 14:59, Sep 24, 2020

1 线性规划标准型

考虑如下为标准型的线性规划:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 给定.

(1) 上述标准型 (1) 中关于 $\boldsymbol{A}$ 满秩 (full rank) 的假设是否合理? 请给出你判断的理由. [10pts]

(2) 在标准型里, 一个基本可行解 (basic feasible solutions) 是否与一组基 (basis) 一一对应? [15pts]

Solution:

(1) $\boldsymbol{A}$ 满秩 (full rank) 的假设是合理的. 因为 $\text{rank}(A) = m, m < n$, 所以线性系统 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 是一致的 (consistent), 也就是说, 系统至少有一个解, 保证了我们解的问题是有意义的.

(2) 否. 不同的基本解必定对应不同的一组基, 这是因为一组基唯一地决定了一个基本解. 但是, 不同的两组基可能会导致同样的基本解, 进一步地, 也可能会导致同样的基本可行解.

2 基本解和基本可行解

考虑如下线性规划问题 (具体地, 请参考 Lecture 2 中 37 页的例 3)

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 \leq 3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

请回答此问题中有多少个基本解 (basic solutions), 有多少个基本可行解? 请分别写出相应的解. [25pts]

Solution: 通过引入松弛变量, 我们考虑如下的标准型:

$$\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + \frac{8}{3}x_2 + x_3 = 4, \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\
& 2x_1 + x_5 = 3, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

我们把可行域所成的多面体 (Polyhedra) 中的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, 具体地

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据我们教材构造基本解的方法, 我们可以

1. $\boldsymbol{A}$ 中选取 3 个线性独立的列.
2. 对于没有选到的列所关联的变量, 将其置为 0.
3. 求解选到的 3 个变量所在的方程组, 得到基本解.

然后, 将所得到的基本解进行验证, 看其是否为基本可行解.

- 基本解: $(0,0)$, $(0,3/2)$, $(0,2)$, $(4/5,6/5)$, $(3/2,15/16)$, $(3/2,1/2)$, $(3/2,0)$,$(2,0)$, $(4,0)$.
- 基本可行解: $(0,0)$, $(0,3/2)$, $(4/5,6/5)$, $(3/2,1/2)$, $(3/2,0)$.

3 极点

1. 证明如下两个集合的极点一一对应. [12pts]

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}, \\
S_2 &= \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

2. 如图 1 所示, 请回答
   (1) 集合 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1\}$ 有极点吗? [3pts]
   (2) 它的标准型是什么? [5pts]
   (3) 它的标准型有极点吗? 若有, 则给出一个极点, 并解释为什么是极点. [5pts]

Solution:

1. 注意, 此处我们说一一对应指的是, 给定一个集合的任意一极点, 我们可以构造出另一个集合的极点.

证明. 为了操作方便, 我们转而证明两个集合的基本可行解一一对应. 首先考虑集合 S_1. 我们用 $\boldsymbol{x}^*$ 表示 S_1 的一个极点. 不失一般性, 令 $\boldsymbol{A}^{\text{eq}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\text{eq}}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ 的一个子系统, 即在 $\boldsymbol{x}^*$ 满足等式约束, 且 $\boldsymbol{x}^{\text{eq}}$ 表示 $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ 中要求等式成立的约束. 那这样我们就得到了 n 个线性无关的积极约束, 进而由这 n 个约束可以唯一地确定 $\boldsymbol{x}^*$. 近一步地, 集合 S_2 的等式约束具有特殊形式 $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{I}]$, 其中, 前 n 列由 S_1 中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 组成, 后 m 列是单位矩阵. 同样地, 我们可以通过选取 m 个线性无关的列 (注意, 选取与 S_1 中等式 $\boldsymbol{A}^{\text{eq}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\text{eq}}$ 相对应的下标列), 然后令其他 $n-m$ 个位置的元素为 0.

另一方面, 我们可以先构造出 S_2 的极点, 然后说明与 S_1 的极点对应. □

2. (1) 集合 P 没有极点. 极点的存在性可以通过多面体是否包含直线来进行判断.

   (2) 注意到, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ 中 x_2 是一个自由变量, 因此我们引进 x_2^+, x_2^- 进行替代. 另外将原不等式约束通过引进松弛变量 s 变为等式约束. 那么, P 的标准型可以表示为

$$P = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2^+, x_2^-, s) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + s = 1, x_1, x_2^+, x_2^-, s \ge 0\}. \tag{5}$$

   .

   (3) 它的标准型有极点. 这个极点可以是 $\bar{\boldsymbol{x}} = (1, 0, 0, 0)^\top$.

   - 首先, 等式 $x_1 + s = 1$ 是积极的.
   - 另外, 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处积极的约束中, 有 1 列是线性无关的 (注意, $\boldsymbol{A} = [1\ 0\ 0\ 1] \in \mathbb{R}^{1\times 4}$). 然后, 这里我们令 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的指标 $\{2, 3, 4\}$ 索引的相应变量 (i.e., $\boldsymbol{x}$) 为 0, 也就是说, $x_2^+ = 0$, $x_2^- = 0$, $s = 0$, 可以求解出 $x_1 = 1$.
   - 最后, $\bar{\boldsymbol{x}} \ge 0$ 均成立.

   由上, 我们得出 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是一个基本可行解, 再由极点和基本可行解的等价性可知, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是一个极点.

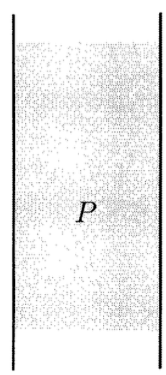


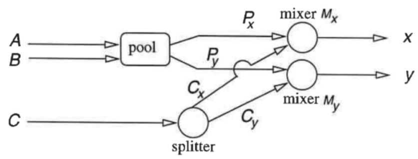
图 1: 集合 P

4 AMPL 实现

考虑如下 Haverly pooling 问题, 如图 2 示, 请使用 AMPL 实现并求解.

(注意: 使用 AMPL solver 或者 NEOS solver 均可. 另外, 请在提交的作业中注明使用的求解器类型, 把求解结果呈现出来 (截图附在 PDF 文件即可), 并把源代码一起提交. 提交的作业请打包为.zip 文件, 包含你的 PDF 以及源码.) [25pts]

Solution:



A, B, C : quantities of crude oil A, B, C, respectively
x, y : quantities of products x and y
p : sulfur content of outstream of the pool
P_x, P_y : outstreams of the pool
C_x, C_y : outstreams of the splitter

sulfur content of A=3
sulfur content of B=1
sulfur content of C=2
sulfur content of x ≤ 2.5
sulfur content of y ≤ 1.5
Demands of x and y are ≤ 200
Supplies of A, B, C_x, C_y, P_x, P_y ≤ 500

$$\max_{x,y,A,B,p,C_x,C_y,P_x,P_y} \quad 9x + 15y - 6A - 8B - 10(C_x + C_y)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} P_x + P_y - A - B &= 0 \\ x - P_x - C_y &= 0 \\ y - P_y - C_y &= 0 \\ pP_x + 2C_x - 2.5x &\le 0 \\ pP_y + 2C_y - 1.5y &\le 0 \\ pP_x + pP_y - 3A - B &= 0 \\ 0 \le x \le 200, 0 \le y \le 200, 0 \le p &\le 100 \\ 0 \le A, B, C_x, C_y, P_x, P_y &\le 500 \end{aligned}$$

图 2: Example: Haverly Pooling Problem.

```
var x;
var y;
var A;
var B;
var p;
var Cx;
var Cy;
var Px;
var Py;

maximize Profit: 9 * x + 15 * y - 6 * A - 8 * B - 10 * (Cx + Cy);

subject to pool: Px + Py - A - B = 0;
subject to mixer_x: x - Px - Cx = 0;
subject to mixer_y: y - Py - Cy = 0;
subject to sulfur_content_x: p * Px + 2 * Cx - 2.5 * x <= 0;
subject to sulfur_content_y: p * Py + 2 * Cy - 1.5 * y <= 0;
subject to sulfur_content_pool: p * Px + p * Py - 3 * A - B = 0;
subject to x_limit: 0 <= x <= 200;
subject to y_limit: 0 <= y <= 200;
subject to p_limit: 0 <= p <= 100;
subject to A_limit: 0 <= A <= 500;
subject to B_limit: 0 <= B <= 500;
subject to Cx_limit: 0 <= Cx <= 500;
subject to Cy_limit: 0 <= Cy <= 500;
subject to Px_limit: 0 <= Px <= 500;
subject to Py_limit: 0 <= Py <= 500;
```

图 3: 参考代码.