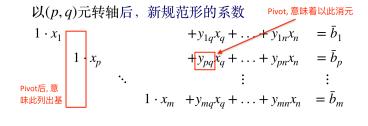
Numerical Optimization, 2020 Fall Homework 3

Due on 14:59 OCT 10, 2020 请尽量使用提供的 tex 模板, 单纯形法的表格可手绘拍照加入文档.

1 单纯形法

以下均考虑非退化线性规划问题即可。

(i) 考虑一线性规划问题的规范型如下:



记进基变量的下标为 q, 转轴前分量 j 对应的 reduced cost 为 r_j , 转轴后对应的 reduced cost 为 r_j' 。试证明 reduced cost 的更新公式为 $r_j'=r_j-\frac{y_{pj}}{y_{pq}}r_q$ (参考 Lecture 3 中 17 页)。 [20pts]

解答: 注: 题目有一定开放性, 只要分析合理即可. (以下给出两种证明方式)

方法一: 根据 r' 定义, 对任意 r'_j $(j=1,\cdots,n)$, 我们有

$$\begin{split} r'_{j} &= c_{j} - z'_{j} \\ &= c_{j} - \sum_{i=1}^{m} y'_{ij} c_{\hat{B}_{(i)}} \\ &= c_{j} - \sum_{i=1, i \neq p}^{m} (y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}) c_{\hat{B}_{(i)}} + \frac{y_{pj}}{y_{pq}} c_{q} \\ &= c_{j} - z_{j} - \left(\frac{y_{pj}}{y_{pq}} (c_{q} - z_{q})\right) \\ &= r_{j} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} r_{q}. \end{split}$$

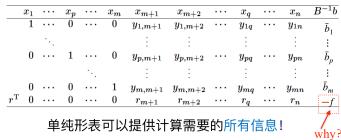
方法二: 从单纯形法的机制考虑 (参考 Lecture 3 中 17 页): 若非基变量 x_q 进基, 要将其对应的 reduced cost r_q' 消成 0. 对应操作为: 单纯形表的第 p(出基变量下标) 行乘以 $-\frac{y_{pi}}{y_{pq}}r_q$ 加到 reduced cost 对应的那一列. 则对应的 reduced cost 的更新公式为 $r_j' = r_j - \frac{y_{pj}}{y_{pq}}r_q$.

(ii) 单纯形表中右下角的-f 对应当前基本可行解的目标函数值的相反数。试证明, 经过一次转轴后更新的-f 对应更新后基本可行解对应的目标函数值的相反数 (参考 Lecture 3 中 20 页)。[20pts]

Simplex Method in Tableau Format

单纯形表(tableau): BFS对应规范形的表格+

既约费用系数和BFS目标值的相反数



解答:

注: 题目有一定开放性, 只要分析合理即可.

目标函数的变化量 f - f' 即为进基变量 x_q 的值 \bar{b}_p/y_{pq} 乘以对应的 reduced cost r_q , 即

$$f' = f - \frac{\bar{b}_p}{y_{pq}} r_q.$$

从单纯形法的机制考虑: 若非基变量 x_q 进基, 要将其对应的 reduced cost r_q' 消成 0. 因此目标函数位 置 (正方形虚线框处) 的值由 -f 变为 $-f - \frac{\bar{b}_p}{g_{pq}} r_q$, 即为 -f'.

修正单纯形法

2.1 证明题

试证明 Lecture 4 中 20 页 λ 的更新公式为: $\hat{\lambda}^T = \lambda^T + \frac{r_q}{u_{pq}} \boldsymbol{u}_p$ 。 [20pts]

解答:

由定义可知:

$$\begin{split} \hat{\lambda}^T &= c_{\hat{B}}^T \hat{B}^{-1} = c_{\hat{B}}^T E_{pq} B^{-1} \quad \text{由} \hat{B} 定义 \\ &= c_{\hat{B}}^T B^{-1} + c_{\hat{B}}^T [v_1, \cdots, v_{p-1}, v_p - 1, v_{p+1}, \cdots, v_m] u_p \quad E_{pq}$$
 为离出一个单位矩阵
$$&= c_{\hat{B}}^T B^{-1} + (c_{\hat{B}}^T v) u_p - c_q u_p \\ &= c_{\hat{B}}^T B^{-1} + (c_q - c_p) u_p + (c_{\hat{B}}^T v) u_p - c_q u_p \quad \text{h} c_{\hat{B}}, c_B$$
 的关系得
$$&= \lambda^T - c_p u_p + (c_B^T v + (c_q - c_p) v_p) u_p \\ &= \lambda^T - c_p u_p + \frac{1}{y_{pq}} \left((c_q - c_p) + (1 + y_{pq}) c_p - \sum_{i=1}^m c_i y_{iq} \right) u_p \quad \text{把} v_p$$
 代人
$$&= \lambda^T + \frac{(c_q - z_q)}{y_{pq}} u_p \\ &= \lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}} u_p. \end{split}$$

2.2 计算题

试用两阶段法求解如下线性规划问题 (详见 Lecture 4 第 13 页), 给出各个步骤的单纯形表。 [40pts]

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1-x_2\\ \text{subject to} & -x_1+2x_2+x_3=2\\ & -4x_1+4x_2-x_3=4\\ & -5x_1+6x_2=6\\ & x_1-x_3=0\\ & x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0 \end{array}$$

解答:

注意到,本题的线性规划问题为标准型,且有3个变量和4个等式约束(积极约束),故一定有冗余约束,因此可以先对系数矩阵高斯消去,去掉冗余约束后再做两阶段法(这里不给出详细过程)。这里给出参考的答案,考虑在"两阶段法"过程中排除冗余约束。

引入辅助变量 y_1, y_2, y_3, y_4 得到辅助问题:

$$\begin{aligned} & \min_{y_1, y_2, y_3, y_4} & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ & s.t. & -x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 2 \\ & -4x_1 + 4x_2 - x_3 + y_2 = 4 \\ & -5x_1 + 6x_2 + y_3 = 6 \\ & x_1 - x_3 + y_4 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0. \end{aligned}$$

单纯形表法求解"第一阶段"问题:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
	-1	2	1	1	0	0	0	2
	-4	4	-1	0	1	0	0	4
	-5	6	0	0	0	1	0	6
	1	0	1 -1 0 -1	0	0	0	1	0
c^T	0	0	0	1	1	1	1	0

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
	-1	2	1	1	0	0	0	2
	-4	4	-1	0	1	0	0	4
	-5	6	0	0	0	1	0	6
	1	2 4 6 0	-1	0	0	0	1	0
r^T	9	-12	1	0	0		0	-12

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
	-0.5	1	0.5	0.5	0	0	0	1
	-2	0	-3	-2	1	0	0	0
	-2	0	-3	-3	0	1	0	0
	$ \begin{array}{c c} -0.5 \\ \hline -2 \\ -2 \\ 1 \end{array} $	0	0	0	0	0	1	0
r^T		0		6				0

辅助问题最优值为 0, 故原问题有可行解. 但人工变量没有全部出基, 故继续转轴使 x_1 进基, y_2 出基 (这里选择不唯一)

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	
0	1	1.25	1	-0.25	0	0	1
1	0	$ \begin{array}{c} 1.5 \\ 0 \\ \hline -2.5 \end{array} $	1	-0.5	0	0	0
0	0	0	-1	-1	1	0	0
0	0	-2.5	-1	0.5	0	1	0

此时 y_3 对应行中 x_1, x_2, x_3 对应系数均为 0, 故为冗余约束, 直接删去. 继续转轴

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_4	
0	1	0	0.5	0	0.5	1
1	0	0	0.4	-0.2	0.6	0
0	0	1	0.4	-0.2	0.5 0.6 -0.4	0

"第一阶段"得到基本可行解 $x = [0, 1, 0]^T$. 删去辅助变量开始"第二阶段"

	x_1	x_2	x_3	
	0	1	0	1
	1	0	0	0
	0	0	1	0
c^T	1	-1	0	0

	x_1	x_2	x_3	
	0	1	0	1
	1	0	0	0
	0	0	1	0
r^T	0	0	0	1

得到最优单纯性表, 原问题最优解为 $\boldsymbol{x} = [0,1,0]^T$.

注: 若题目没有限定用"两阶段法",该问题其实只有唯一可行解故即为最优解。