№4. $\eta(A) = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$ $\quad 1 \le i, \; j \le n$

1. $\|A\| \ge 0$ $\boxed{V}$

2. $\|\alpha A\| = \max\limits_{i,j} |\alpha \cdot a_{ij}| = \alpha \cdot \max |a_{ij}| = \alpha \cdot \|A\|$ $\boxed{V}$

3. $\|A+B\| = \max\limits_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \le \max\limits_{i,j} |a_{ij}| +$

$+ \max\limits_{i,j} |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|$ $\boxed{V}$

4. $\|A \cdot B\| = \max\limits_{i,j} \|\sum\limits_{i,j} a_{ij} b_{ij}\| \cancel{\le} \max\limits_{i,j} \|a_{ij}\| \cdot \max\limits_{i,j} \|b_{ij}\|$ $\boxed{X}$

не подходит.

Ответ: нет, $\eta(A)$ не матр. норма

№3

$$Ax = \lambda x$$

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\lambda \leq \|A\| \quad \blacksquare$$

Д2-1.

$$\|A\|_{\cancel{?}} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_V}{\|y\|_V}$$ — норма матрицы A —?

Св-ва матричной нормы:
1) $\|B\| \geq 0$, $\|B\| = 0$ при $B_{ij} = 0$
2) $\|\alpha \cdot B\| = |\alpha| \cdot \|B\|$ для $\forall \alpha$ $\forall B$
3) $\|B + C\| \leq \|B\| + \|C\|$ $\forall B, C$
4) $\|B \cdot C\| \leq \|B\| \cdot \|C\|$

Док-во.
1) очевидно
2) $\|\alpha \cdot A\| = \sup \frac{\|\alpha \cdot A \cdot y\|_V}{\|y\|_V} = |\alpha| \cdot \sup \frac{\|Ay\|_V}{\|y\|_V}$ ■
3) $\|A + B\| = \sup \frac{\|(A+B)y\|_V}{\|y\|_V} \leq \underbrace{\sup \frac{\|Ay\|_V}{\|y\|_V}}_{\|A\|} + \underbrace{\sup \frac{\|By\|_V}{\|y\|_V}}_{\|B\|}$ ■

4). $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ для $\|x\| \neq 0$; для $\|x\| = 0 \to 0 \leq 0$.

$$\downarrow$$

$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ■

Д2-2. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$ $\quad$ $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \left[\sum_{i=1}^{m} (x_i^2)\right]^{1/2}$ $\quad$ $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$

$$\downarrow$$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ $\quad$ $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

$$\|Ax\|_2 = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j = \sum_i \lambda_i u_i u_i^T \cdot x_i$$

$$\|A\|_2 = \sup \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = \sup \frac{\sqrt{(Ay, Ay)}}{\sqrt{(y, y)}} = \sup \frac{\sqrt{(A^T A y, y)}}{\sqrt{(y, y)}} \ominus$$

$\cancel{A^TA}$ $\quad$ $y = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e}_i$ в базисе с.в. $A^T A$ $\vec{e}_i, \vec{e}_j$: $\quad$ $A^T A = \sum_i \lambda_i \vec{e}_i \Rightarrow A^T A \cdot y = \sum c_i \lambda_i \vec{e}_i$

$(A^T A \cdot y, y) = \sum c_i^2 \lambda_i$

$$\ominus \sup \sqrt{\frac{\sum c_i^2 \lambda_i}{\sum c_i^2}} \leq \sup \left[\max \lambda_i \frac{\sum c_i^2}{\sum c_i^2}\right]^{1/2} = \cancel{\sup} \sqrt{\max \lambda_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\|A\|_2 = \cancel{\max} \sqrt{\sup_i \lambda_{i\, A^T A}}$$ ■