探讨傅里叶级数的应用

华南理工大学 李泊含

一、傅里叶级数的起源与发展

傅里叶级数的提出和发展是数学史上的一个重要里程碑，其起源可以追溯到法国数学家约瑟夫·傅 里叶(Joseph Fourier)在 19 世纪初对热传导问题的研究。傅里叶在研究热传导现象时，发现这一物理过程 可以通过偏微分方程来描述。在求解这一方程的过程中，他提出了一个革命性的思想：任何周期函数都 可以表示为一系列正弦和余弦函数的无穷级数之和，这些正弦和余弦函数按照频率的倍数排列。傅里叶 选择正弦和余弦函数作为基函数，是因为它们在数学上具有正交性，即不同频率的正弦和余弦函数相互 独立，能够为周期函数的表示提供独特的贡献。1807 年，傅里叶向巴黎科学院提交了他的论文《热的传 播》，首次公开了他的级数理论，并展示了如何利用这一理论求解热传导方程。尽管傅里叶的理论最初受到了一些数学家的质疑，特别是拉格朗日对其表示所有函数的能力持怀疑态度，但随着时间的推移，傅里叶级数逐渐被接受，并得到了进一步的发展和完善。

傅里叶级数最初是针对周期函数的，但后来被推广到非周期函数，形成了傅里叶变换这一重要工具。 傅里叶变换不仅在数学理论上具有重要意义，还成为信号处理、图像分析、量子物理等领域的核心技术。 例如，在信号处理中，傅里叶变换被用于将时域信号转换为频域信号，从而分析信号的频率成分；在图 像处理中，傅里叶变换被用于图像压缩和滤波；在量子力学中，波函数的分析也依赖于傅里叶变换。此 外，快速傅里叶变换(FFT)算法的提出，进一步提高了傅里叶变换的计算效率，使其在实时信号处理和现 代通信技术中得以广泛应用

二、傅里叶系数与傅里叶级数的推导

该部分先对一个确定周期2π的函数进行傅里叶级数展开，确定傅里叶系数，再使用归纳法将所得结论推广至周期为 2T 的函数，从而推导具有广泛意义的周期函数的傅里叶级数，并说明使用傅里叶级数的条件。

1. 推导周期为2π的函数的傅里叶级数

对于周期为2π的函数可以表示为以下形式

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为了确定a_n和b_n的值，对上式同时在区间$[-\pi,\pi]$取积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}A\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\ nx+b_n\sin\ nx)\right]\mathrm{d}x$$

得到

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

同理，在$f(x)$的左右两边同时乘$\cos nx$，并在区间$[-\pi,\pi]$上积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nx\mathrm{d}x = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\ nx\mathrm{d}x = a_n\pi$$

所以得到

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nx\mathrm{d}x(n = 0,1,2,\cdots)$$

当$n = 0$时，得到

$$A = \frac{a_0}{2}.$$

同理得到b_n的表达式。因此:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nx\mathrm{d}x(n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\ nx\mathrm{d}x(n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

由上式确定的系数为$f(x)$的傅里叶级数，可写为如下级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos\ nx + b_n\sin\ nx)$$

即为傅里叶级数。

2. 周期为$2T$的函数的傅里叶级数

由以上结论推广至周期为 2l 的函数的傅里叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$

上式的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x(n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x(n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

3. 使用傅里叶级数满足条件

为了使用傅里叶级数，$f(x)$需要满足收敛定理，也就是狄利克雷充分条件。以下是详细说明。

设$f(x)$是周期为 2π 的周期函数，如果它满足:

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

(2) 在一个周期内至多有有限个极值点，那么$f(x)$的傅里叶级数收敛，并且当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$

三、傅里叶级数的应用

1. 电路分析应用

频谱分析是傅里叶变换最直接的应用之一。许多信号在时域中可能显得杂乱无章，但通过傅里叶变换，可以将其分解为不同频率的正弦波分量，从而清晰地观察到信号的频率成分。例如，在音频处理中，一段音乐信号可以通过傅里叶变换分解为不同频率的音调，帮助我们

分析其频谱特性。在音频处理中，它可以分析音乐的音调组成，如将钢琴曲分解为基频和泛音；在通信领域，能识别信号中的载波频率和调制成分等等。

在电路分析中，许多实际信号（如方波、三角波）是非正弦的周期性信号。通过傅里叶级数，可以将其分解为一系列正弦/余弦分量。所以在分析线性电路的时候，我们可以根据电路的叠加定理（电流电压等电路特性满足线性可叠加性）来对电流电压等参数进行拆解分析，最后得到结果。

以下是一个周期为2π的方波电流信号，

$$z(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\le t<0\\ 1, & 0\le t<\pi\end{cases}$$

使用 MATLAB 作图如下，

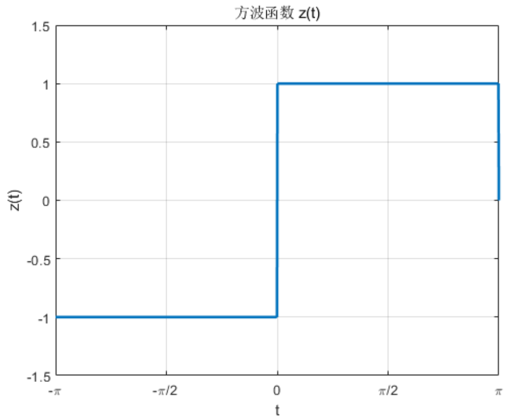

图 1

使用傅里叶级数展开，带入公式得到以下式子，

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin\ t+\frac{1}{3}\sin\ 3t+\cdots+\frac{1}{2n+1}\sin\left(2n+1\right)t+\cdots\right]$$

该式子将一个信号分成多个正弦信号的叠加形式，直接看式子可能感受不明显。在此使用 matlab 作图，得到以下结果，可以看出，该方波信号是由多个不同频率的正弦函数组成，这对于电路参数的分析（电流电压等）领域来说意义重大。

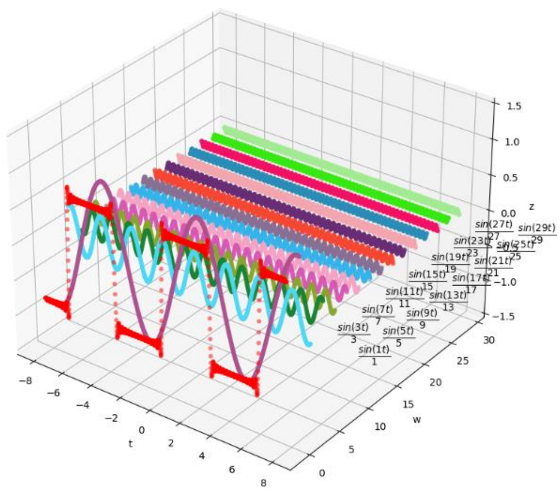

图 2

由上述例子可以看出，当把一个在时间域下的信号使用傅里叶级数展开成多个含有不同频率的正弦函数的叠加时，在电路分析当中也就是将一个总的电流信号转变为不同频率的交

流电信号。在频率域当中会非常直观的看出不同该函数包含哪些频率成分，这也就叫频谱分析。

2. 耳机降噪应用

接下来列举一个生活当中常见的例子。降噪耳机的工作原理就是基于傅里叶级数在信号处理方面的优势，将周期性噪声信号分解为不同频率的正弦/余弦分量。

总的来说，耳机的麦克风采集声音，这个声音信号包含人声和环境噪声，在时间域范围内无法直接对环境噪声进行削弱。应用傅里叶级数，将信号转换到频率域，将噪声所在的频率范围（噪声通常是高频信号）给消除，留下来的声音即是人声部分，从而达到了降噪的效果。

以下是具体例子，使用 Matlab 实现。

下面的信号类比与现实生活中降噪耳机麦克风接收到的信号，里面包含环境噪声。

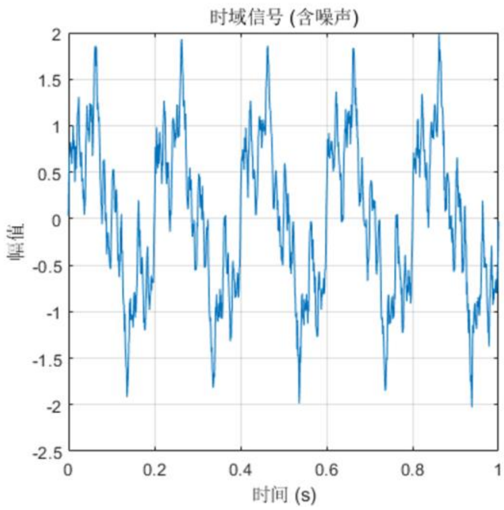

图 3

对这个信号使用傅里叶级数，得到在频率域当中的图：

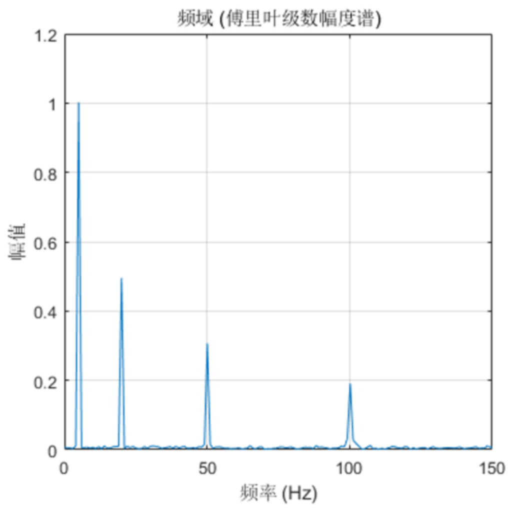

图 4

接着将环境噪音所有的频率的部分给去除，然后再变回时间域，就得到了降噪耳机降噪后的结果。

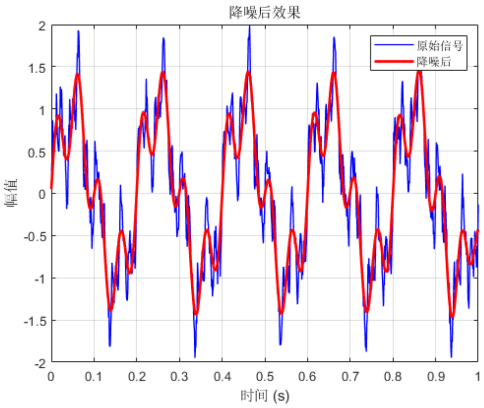

图 5

可以看出，这个环境的声音在极值区域没有之前那么强，也就是噪音部分被削弱，可以看出耳机实现了降噪功能。这也就是傅里叶级数在耳机降噪方面的应用。

3. 机械振动分析应用

傅里叶级数在机械振动分析当中依旧发挥着重要的作用，在工程机械，桥梁设计，建筑设计等应用领域发挥着重要作用。其中最常用的就是共振频率分析。

由于机械振动信号通常是周期性或近似周期性的，傅里叶级数可将其分解为不同频率的正弦分量，从而识别系统的固有频率和共振峰。通过傅里叶级数，可将杂乱时域信号转为频域，快速定位共振频率，从而利于工程师对建筑物进行安全性设计和建造。

举个例子，假如下面是一个跨海大桥受到外部风的干扰所造成位置的微小偏移的测量函数。

$$x(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t) + 2.0 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t) + 0.3 \cdot \sin(2\pi \cdot 120 \cdot t) + n(t)$$

使用 matlab 作图后，时间域的信号如下，

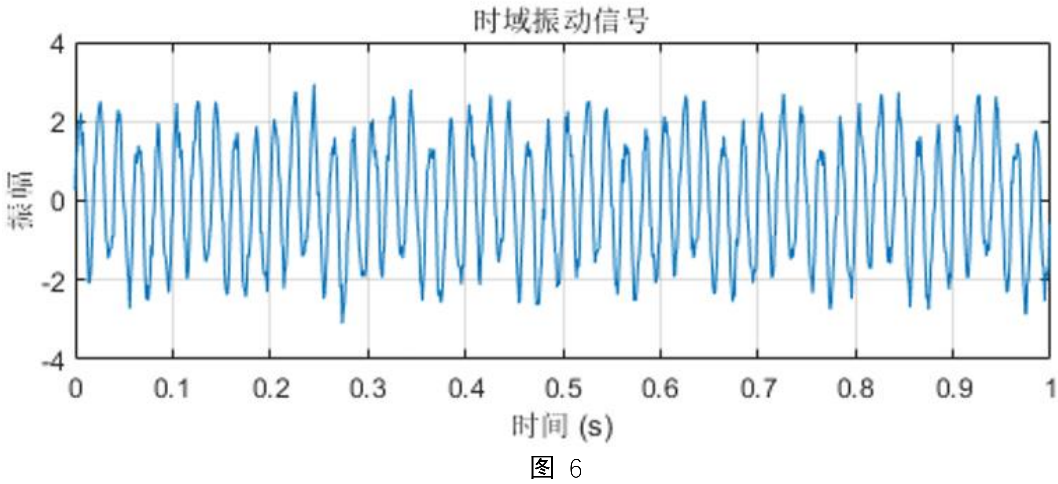

图 6

使用傅里叶级数之后，得到在频率域内，大桥的共振频率可以清晰的看出为 50Hz。

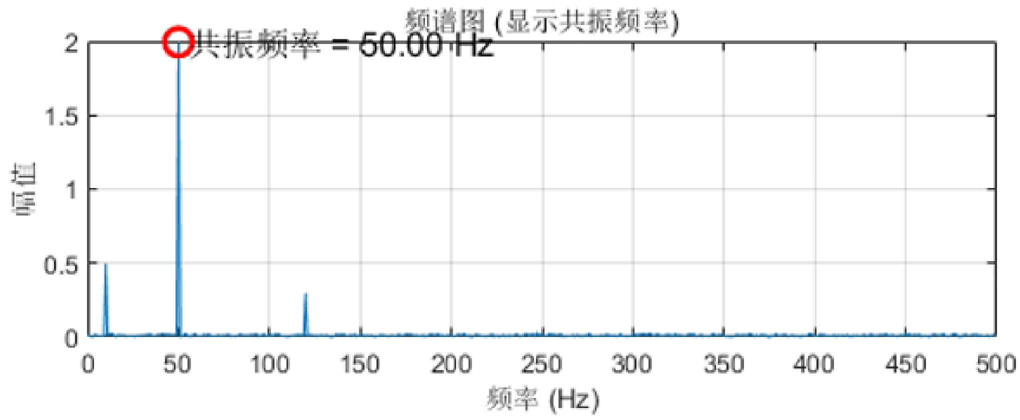

图 7

由此可见，傅里叶级数和傅里叶分析是振动监测与安全优化的数学基石，将抽象信号转化为可行动的频率指标，为工业设备可靠性保驾护航。

四、结论

傅里叶级数作为数学分析中的重要工具，自 19 世纪被提出以来，已经发展成为信号处理、工程分析和科学研究中不可或缺的理论基础。本文从傅里叶级数的起源与发展出发，详细阐述了其数学原理及收敛性证明，并通过具体实例展示了其在电路分析、耳机降噪和机械振动分析三大领域的实际应用价值。

在电路分析中，傅里叶级数成功将复杂的非正弦周期信号分解为简单的正弦分量，为线性电路的频域分析提供了有效方法。耳机降噪技术则巧妙地利用傅里叶变换进行噪声分析，通过生成反向声波实现噪声消除，展现了傅里叶分析在实时信号处理中的强大能力。而在机械振动分析领域，傅里叶级数帮助我们快速识别系统的共振频率，为预防机械故障、保障结构安全提供了可靠依据。

通过 MATLAB，直观地展示了傅里叶级数在各个应用场景中的具体实现过程。这些可视化结果不仅验证了理论分析的正确性，更凸显了傅里叶分析方法在解决实际问题时的实用性和高效性。