数值偏微分方程第一次大作业

陈奕行

October 13, 2019

1 问题重述

需要利用数值求解的第一类边值条件二维 Poisson 方程为

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ u = g, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

在此问题中，$\Omega = [0,1]^2$ 或 $\{(x,y)|x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 < r < 1, \theta \in (0, \pi/2)\}$.

2 情形 1：$\Omega = [0,1]^2$

2.1 网格离散格式

我们建立空间步长为 $\Delta x = \Delta y = h = 1/N$ 的一致网格，$N \geq 2$，将 u, f, g 和网格函数 U 在节点 $(x_i = ih, y_j = jh)$ 上取值分别为 $u_{i,j}, f_{i,j}, g_{i,j}, U_{i,j}$. 在内点集 $J_{int} = \{(x_i, y_j)|1 \leq i, j \leq N-1\}$ 上，可以使用二阶中心差商算子 L_h 代替二阶微分算子

$$-L_h U_{i,j} = \frac{4U_{i,j} - U_{i-1,j} - U_{i+1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{h^2} \tag{2}$$

于是

$$f_i, j\frac{4U_{i,j} - U_{i-1,j} - Ui+1,j - Ui,j+1 - Ui,j-1}{h^2} = f_{i,j} \tag{3}$$

边值条件可以将相应值在右侧修改，例如，在左侧边界上，$U_{1,j}(2 \leq j \leq N-2)$ 的中心差商可以修改为

$$\begin{bmatrix} & -1 & \\ 0 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} U_{1,j} = f_{1,j} + g_{0,j}/h^2 \tag{4}$$

余下边界条件可以类似修改，得到线性方程 $Ax = b$. 由于 A 对称正定，我们采取共轭梯度法初始值为 b，终止条件为二范数小于初始误差的 10^{-6}.

2.2 误差分析

利用 Taylor 展开可知

$$T_h(u) = L_h(u) - L(u) = \frac{\partial_x^4 u + \partial_y^4 u}{12} h^2 + \mathcal{O}(h^4) \tag{5}$$

因此

$$max_{(i,j)\in J_{\Omega_1}} |L_h u_{i,j} - f_{i,j}| \le Kh^2, K = sup_{x\in\Omega} |\frac{\partial_x^4 u + \partial_y^4 u}{12}| \tag{6}$$

显然具有二阶收敛性。设 $-L_h u = f$ 的计算解为 U，精确解为 $\hat{U}$，从而

$$||e_h||_\infty \le ||U - \hat{U}||_\infty + ||\hat{U} - u||_\infty \tag{7}$$

我们不对 $||U - \hat{U}||$ 做先验分析。可直接认为 e_h 具有二阶收敛性。

3 情形 2：$\Omega = \{(r,\theta)|0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/2\}$

3.1 网格离散格式

利用极坐标变换可知

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -f(r,\theta) \tag{8}$$

注意到该方程仅仅在 $r = 0$ 处出现奇性，从而仅仅在 $r > 0$ 时才有意义。从而我们需要补充 $u(x,y)$ 在 $r = 0$ 处的边界条件。一般所来，当 $r \longrightarrow 0^+$ 时，方程左侧第一项有界，即

$$\lim_{r\longrightarrow 0^+} r\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \tag{9}$$

在 (r,θ) 平面内引入网格

$$\{r_j = (j+0.5)h_r,\ \theta_k = kh_\theta,\ 0 \le j \le M,\ 0 \le k \le N\}$$

其中 $h_r = \frac{1}{M}, h_\theta = \frac{\pi}{2N}$ 为 r 方向和 θ 方向的网格步长。此处进行平移是为了避免 $r = 0$ 落在网格线上。利用中心差商可知

$$r_j\frac{(r_{j+1/2} + r_{j-1/2})u_{j,k} - r_{j+1/2}u_{j+1,k} - r_{j-1/2}u_{j-1,k}}{h_r^2} + \frac{2u_{j,k} - u_{j,k-1} - u_{j,k+1}}{h_\theta^2} = r_j^2 f_{j,k} \tag{10}$$

整理后即知

$$(j+0.5)h_\theta^2((2j+1)u_{j,k} - (j+1)u_{j+1,k} - ju_{j-1,k}) + 2u_{j,k} - u_{j,k-1} - u_{j,k+1} = r_j^2 h_\theta^2 f_{j,k} \tag{11}$$

此时 $2 \leq j \leq M-1, 1 \leq k \leq N-1, f_{j,k} = f(r_j, \theta_k)$. 另外 $\theta = 0, \pi/2$ 处的边界条件类似(4)加入.
对 $j = 0$, 将(8)改写为

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial^2(u/r)}{\partial \theta^2} = rf(r,\theta) \tag{12}$$

在区域 $I_\epsilon = [\epsilon, h_r] \times [\theta_{k-1/2}, \theta_{k+1/2}]$ 上积分后令 $\epsilon \longrightarrow 0$. 利用中心差商近似偏导数，并用矩形公式计算积分并整理可知

$$(2 + \frac{h_\theta^2}{2})u_{0,k} - u_{0,k-1} - u_{0,k+1} - \frac{h_\theta^2}{2}u_{1,k} = \frac{1}{4}h_r^2 h_\theta^2 f_{0,k} = r_0^2 h_\theta^2 f_{0,k} \tag{13}$$

对 $j = M-1$，我们利用一阶外推计算 $u_{M,k} = 2u_{M+1/2,k} - u_{M-1,k},$. 此时(11)可以写为

$$(M-0.5)h_\theta^2((3M-1)u_{M-1,k} - (M-1)u_{M-2,k}) + 2u_{M-1,k} - u_{M-1,k-1} - u_{M-1,k+1} \tag{14}$$

$$= r_j^2 h_\theta^2 f_{M-1,k} + (2M-1)Mh_\theta^2 u(1, kh_\theta) \tag{15}$$

综上写成矩阵即可知可以写成矩阵 $A\vec{u} = b$，其中 $\vec{u}(M(k-1)+j) = u_{j,k}$，其中 $0 \leq j \leq M-1,\ 1 \leq k \leq N-1$. 对应地解出 $\vec{u}$ 即可.

3.2 误差分析

首先, (10)处的截断误差为 $\mathcal{O}(h_r^2+h_\theta^2)$, 一阶外推法导致的(14)的阶段误差为 $\mathcal{O}(h_r+h_\theta^2)$. 由于 Poisson 方程具有极大值原理，利用教材例子 1.2 的结论可知，收敛阶仍为 $\mathcal{O}(h^2)$. [1], 即网格一致。从而该格式仍然具有二阶收敛性。
此时由于 A 不再具有对称性，因而不能采取共轭梯度法。[2]，我们采取带状 Gauss 消去法，得出的误差 $||U - \hat{U}||$ 较小。

4 实验结果

4.1 情形 1: $\Omega = [0, 1]^2$

对题目 Case 1，取 100×100 网格，输出结果见图 (1)
此时真解答为 $u = 6x^3 + 3y^2$, 验算可知误差收敛效果较差。为测试程序的收敛性，我们构造解 u 以计算误差 l_∞ 范数。
构造 $u = 0.1\sin(6\pi x)\cos(8\pi y)$，并对应构造 f, g。图中横坐标为网格 $N \in [50, 99]$ 的自然对数，纵轴为无穷范数的自然对数，可验证二阶收敛性.

[1]此处我们假设 $h_r, h_\theta \sim \mathcal{O}(h)$
[2]对称化(10)后误差显著增大

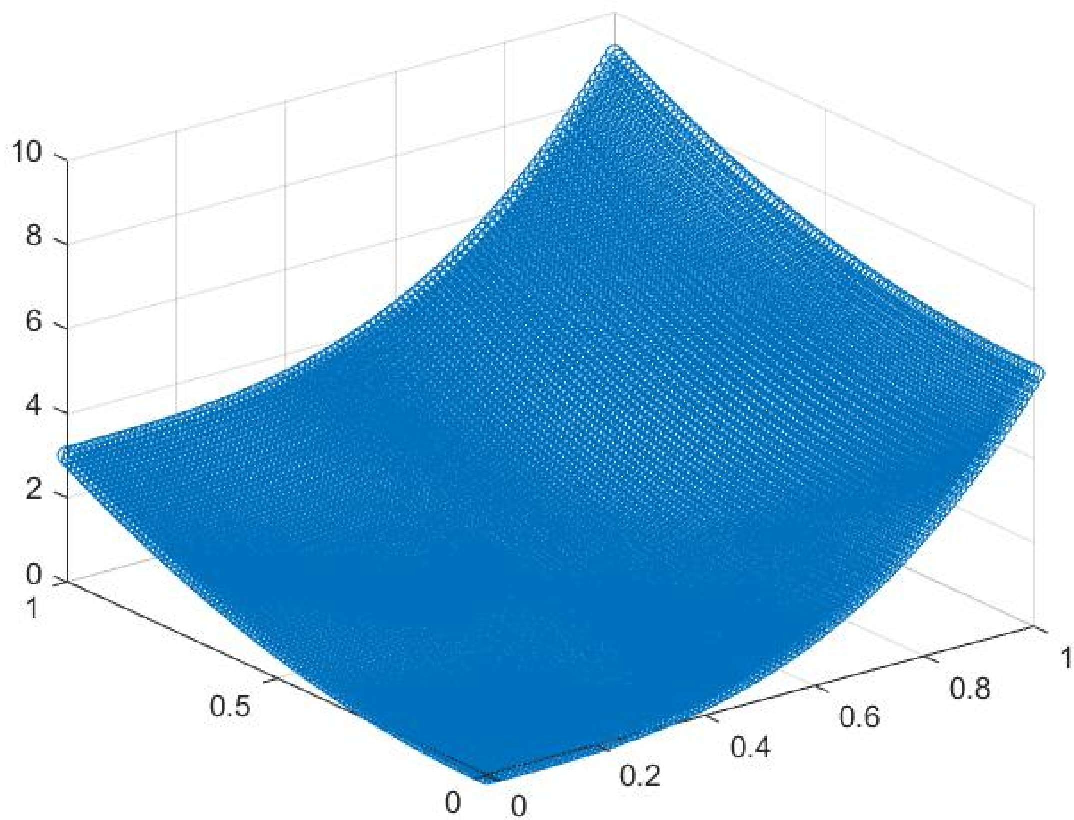

Figure 1: 题目 Case 1 解答

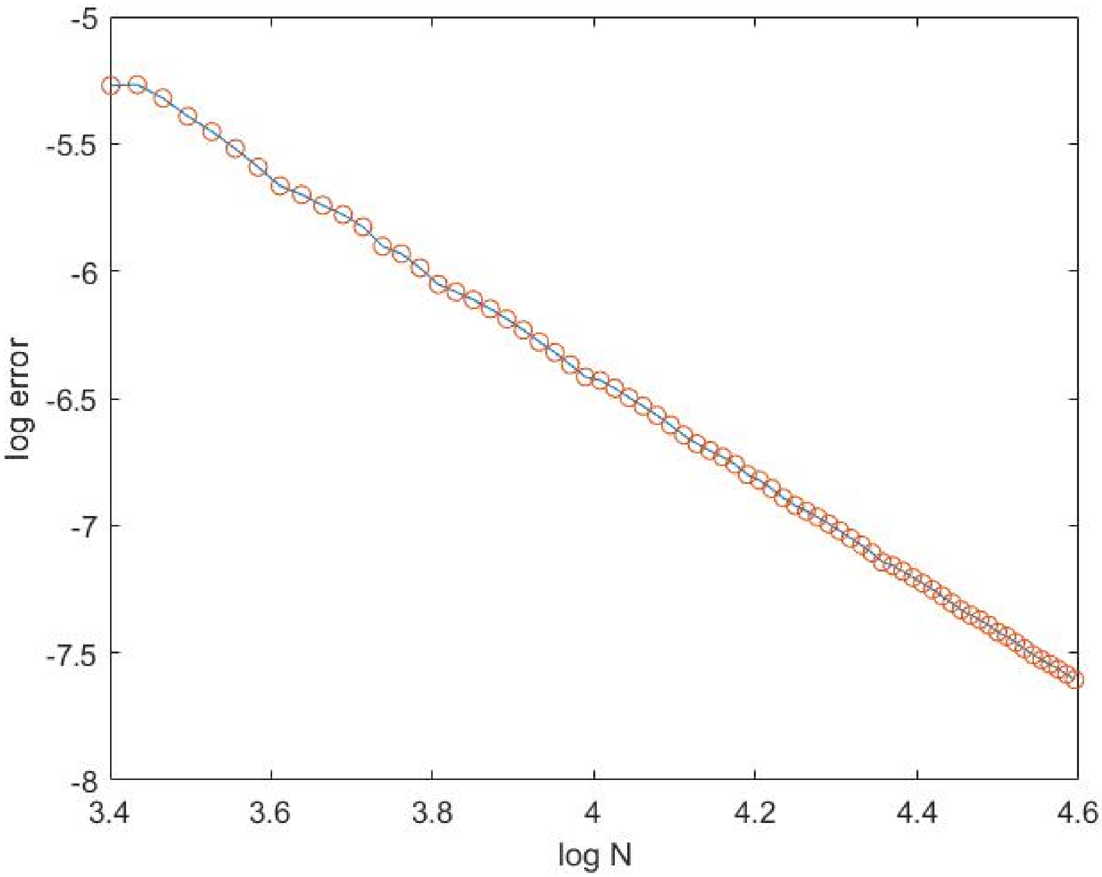

Figure 2: 情形 1 误差

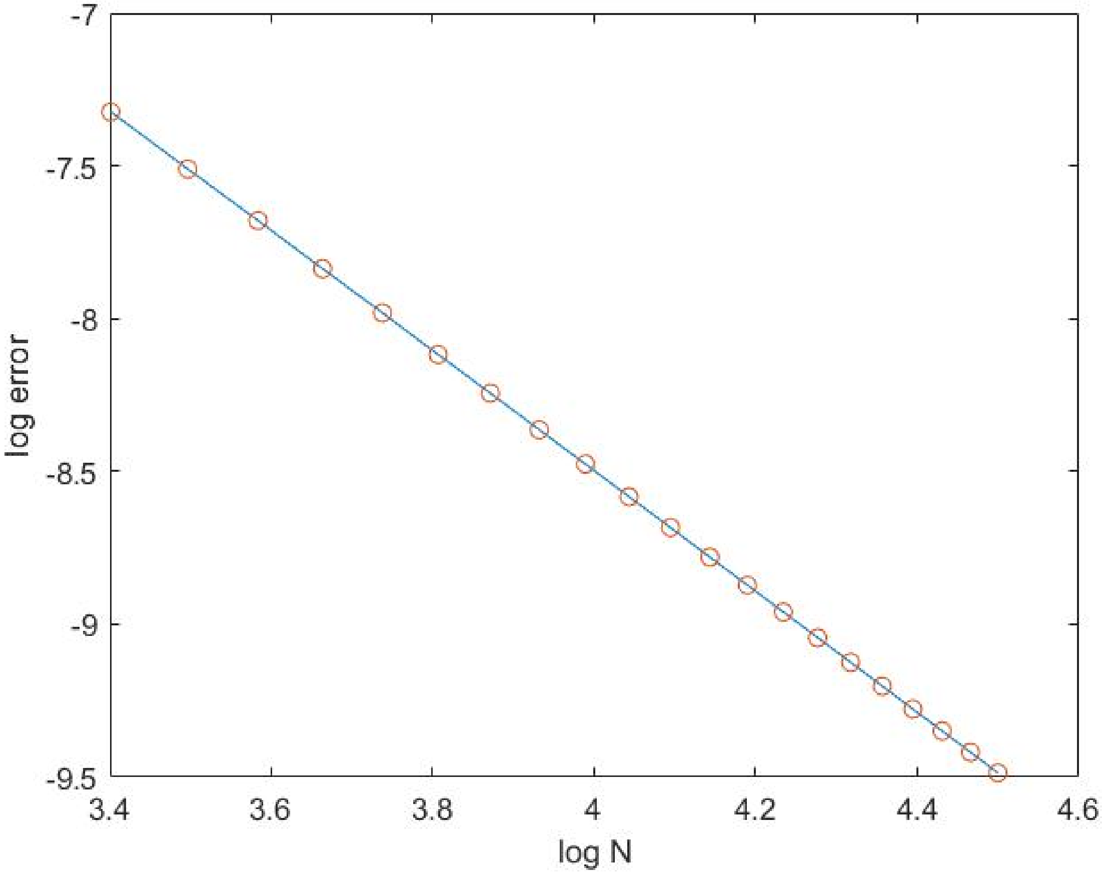

Figure 3: 情形 2 误差

4.2 情形 2：$\Omega = \{(r, \theta) | 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/2\}$

考虑函数 $u = xy(2 - x^2 - y^2)$, 则 $f = 12xy$. 由于带状 Gauss 消去显著慢于共轭梯度法，因而我们取 $M = N = 30, 33, 36, \ldots, 90$ 共 21 个值计算误差。所得误差如图 3，可验证二阶收敛性.

此外，我们可视化 $M = N = 100$ 时的误差如图 4，此时 $||\text{err}||_\infty = 6.1569 \times 10^{-5}$.

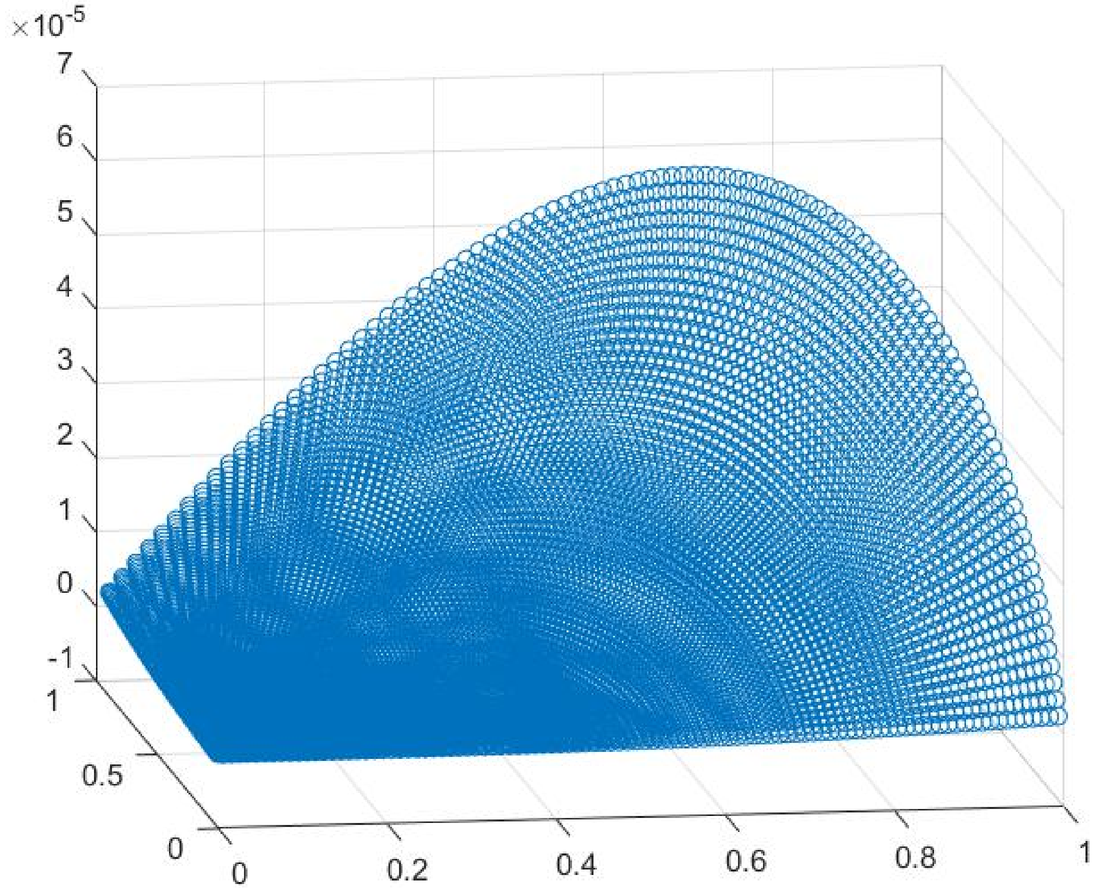

Figure 4: $M = N = 100$ 的误差图像

5 程序使用说明

- 直接执行 plot_err.m 和 plot_err_r.m 即可绘出图形. 后者运行时间较长, 约为 5min.
- poisson.m 及 poisson_radius.m 分别处理情形 1 及 2. 类似地, 文件名后加上"_r"的.m 文件均为了处理情形 2.
- poisson.m 及 poisson_radius.m 中矩阵及向量若干参数的设置均按照此文档中分析. 但注意在 poisson_radius.m 中，由于 MATLAB 下标的原因，j 取值为 $1 \le j \le M$.