FDS for 2D Poisson Equation

THz@PKU

October 9, 2020

1 2D Poisson equation

考虑2D的Poisson方程

$$-\Delta u = f(x, y)$$

的有限差分离散. δ_x^2为x方向的二阶中心差分算子: $\delta_x^2 u_i =$

$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$.

$$u_c := u_{i,j}, u_n := u_{i,j+1}, u_s := u_{i,j-1}, u_w := u_{i-1,j}, u_e := u_{i+1,j},$$

$$u_{ne} := u_{i+1,j+1}, u_{nw} := u_{i-1,j+1}, u_{se} := u_{i+1,j-1}, u_{sw} := u_{i-1,j-1}.$$

下标：c=center, w=west, n=north, e=east, s=south

1.1 正方形网格

正方形网格下, x, y方向的网格步长$h_x = h_y = h$为常数.

2D Poisson 方程的5点离散

$$\mathcal{L}_h u_\mathrm{c} := \frac{1}{h^2}\left[4u_\mathrm{c} - u_\mathrm{n} - u_\mathrm{s} - u_\mathrm{w} - u_\mathrm{e}\right] = f_\mathrm{c},$$

或者

$$\mathcal{L}_h u_{i,j} := \frac{1}{h^2}\left[4u_{\mathrm{i,j}} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}\right] = f_{i,j}. \tag{1.1}$$

2D Poisson 方程的5点离散

$$\mathcal{S}_h u_{\mathrm{c}} := \frac{1}{2h^2}\left[4u_{\mathrm{c}} - u_{\mathrm{ne}} - u_{\mathrm{nw}} - u_{\mathrm{se}} - u_{\mathrm{sw}}\right] = f_{\mathrm{c}}$$

上述$f_{i,j}$等于$f(x_i, y_j)$. 实际中$f_{i,j}$也可以近似计算, 例如

$$f_{i,j} := \frac{1}{4}\big(f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_i, y_{j-1})\big).$$

4阶9点格式

$$\mathcal{N}_h u_{\mathrm{c}} := \left[\frac{2}{3}\mathcal{L}_h + \frac{1}{3}\mathcal{S}_h\right] u_{\mathrm{c}} = f_{\mathrm{c}} - \frac{h^2}{12}\mathcal{L}_h f_{\mathrm{c}}$$

6阶9点格式

$$\left[\frac{2}{3}\mathcal{L}_h+\frac{1}{3}\mathcal{S}_h\right]u_{\mathrm{c}}=f_{\mathrm{c}}-\frac{h^2}{12}\mathcal{L}_hf_{\mathrm{c}}-\frac{1}{240}\left(\delta_x^4+\delta_y^4\right)f_c+\frac{1}{90}\delta_x^2\delta_y^2f_c$$

$\Omega=(0,1)\times(0,1)$上考虑Poisson方程的Dirichlet零边值问题的求解. 给定正整数N，定义正方形网格$\{(x_i,y_j):x_i=ih,y_j=jh,h=1/N\}$，基于网格节点的5点差分离散(1.1)后的线性方程组系数矩阵A的谱条件数是

$$\operatorname{cond}(A):=\frac{\max_{p,q}\lambda^{(p,q)}}{\min_{p,q}\lambda^{(p,q)}}=\cot^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)=\mathcal{O}\left(h^{-2}\right),$$

其中

$$\lambda^{(p,q)}=\lambda^{(p)}+\lambda^{(q)},\quad p=1:N-1,\quad q=1:N-1,$$
$$\lambda^{(s)}=\tfrac{4}{h^2}\sin^2\left(\tfrac{s\pi}{2N}\right)=\tfrac{4}{h^2}\sin^2\left(\tfrac{sh\pi}{2}\right),\quad s=1:N-1.$$

格式(1.1)的迭代：Jacobi迭代(For $i, j = 1, 2, \cdots, N-1$)

$$\frac{1}{h^2}\left[4u_{\mathrm{i,j}}^{(\nu+1)} - u_{i,j+1}^{(\nu)} - u_{i,j-1}^{(\nu)} - u_{i-1,j}^{(\nu)} - u_{i+1,j}^{(\nu)}\right] = f_{i,j}.$$

上标(ν)为迭代步数.

GS迭代(For $i, j = 1, 2, \cdots, N-1$)

$$\frac{1}{h^2}\left[4u_{\mathrm{i,j}}^{(\nu+1)} - u_{i,j+1}^{(\nu)} - u_{i,j-1}^{(\nu+1)} - u_{i-1,j}^{(\nu+1)} - u_{i+1,j}^{(\nu)}\right] = f_{i,j},$$

这不适合并行计算. 可以采用红黑排序：对于$i + j = odd$,

$$\frac{1}{h^2}\left[4u_{\mathrm{i,j}}^{(\nu+1)} - u_{i,j+1}^{(\nu)} - u_{i,j-1}^{(\nu)} - u_{i-1,j}^{(\nu)} - u_{i+1,j}^{(\nu)}\right] = f_{i,j},$$

对于$i + j = even$,

$$\frac{1}{h^2}\left[4u_{\mathrm{i,j}}^{(\nu+1)} - u_{i,j+1}^{(\nu+1)} - u_{i,j-1}^{(\nu+1)} - u_{i-1,j}^{(\nu+1)} - u_{i+1,j}^{(\nu+1)}\right] = f_{i,j},$$

在前述的正方形网格上, 也可以考虑所谓的格心离散, 即将Poisson方程在$(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ 差分近似. 此时需要注意区域边界条件的实现不同于上面的格点型离散.

1.2 均匀的长方形网格

均匀的长方形网格下, x, y方向的网格步长$h_x \neq h_y$，它们为常数. 2D Poisson 方程的9点离散

$$-\left[\frac{\delta_x^2}{(h_x)^2} + \frac{\delta_y^2}{(h_y)^2} + \frac{(h_x)^2 + (h_y)^2}{12(h_x)^2(h_y)^2}\delta_x^2\delta_y^2\right] u_c = \left[1 + \frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{12}\right] f_c.$$

此时, 格式是四阶精度的. 如果网格步长满足限制要求$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_x}{h_y} \leq \sqrt{5}$, 则格式具有最大值原理.

1.3 非均匀的长方形网格

非均匀的长方形网格下, 网格节点(x_i, y_j). x方向的网格步长$(h_x)_{i+1/2} := x_{i+1} - x_i$, $(h_x)_{i-1/2} \neq (h_x)_{i+1/2}$; y方向的网格步长$(h_y)_{j+1/2} := y_{j+1} - y_j$, $(h_y)_{j-1/2} \neq (h_y)_{j+1/2}$, 它们不为常数. 在网格节点$(x_i, y_j)$处Poisson方程可离散为

$$-\frac{2}{x_{i+1}-x_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{x_{i+1}-x_i}-\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{x_i-x_{i-1}}\right)$$
$$-\frac{2}{y_{j+1}-y_{j-1}}\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{y_{j+1}-y_j}-\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{y_j-y_{j-1}}\right)=f_{i,j}.$$

1.4 一般的结构网格

假设区域Ω不是长方形区域, 例如两个同心圆所围的圆

环区域. 此时可以进行极坐标变换$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 把Poisson方程变换到极坐标$(r,\theta)$下

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=f(r,\theta). \tag{1.2}$$

此时计算区域就是长方形区域$\Omega_c := \{r \in (r_L, r_R), \theta \in [0,2\pi)\}$. 将$\Omega_c$剖分为矩形网格: $r_i = r_L + i\Delta r i$, $\Delta r = (r_R - r_L)/M$; $\theta_j = j\Delta\theta$, $\Delta\theta = 2\pi/N$. 再用有限差分离散变换后的Poisson方程(1.2). 例如

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_i}\left(r_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta r}-r_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta r}\right)\frac{1}{\Delta r}\\+\frac{1}{r_i^2}\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta\theta^2}=f_{i,j}.\end{aligned}$$

如果$r_L = 0$, 则需要注意此处的数值边界条件.

1.5 其它理论分析方法

(1) 直接法: 估计矩阵范数$||L_h^{-1}||$. 参见[1, §4.4].

例如: 正方形网格上的5点有限差分公式的矩阵

$$
\begin{array}{ccc} & -h^{-2} & \\ L_h := -h^{-2} & 4h^{-2} & -h^{-2} \\ & -h^{-2} & \end{array}
$$

有如下性质: L_h是一个M-矩阵, 是一个正定矩阵, 满足

$$||L_h||_\infty \le 8h^{-2}, \quad ||L_h^{-1}||_\infty \le 1/8.$$

$$||L_h||_2 \le 8h^{-2}\cos^2(\pi h/2) < 8h^{-2},$$

$$||L_h^{-1}||_2 \le \frac{1}{8}h^2\sin^{-2}(\pi h/2) = \frac{1}{2\pi^2} + \mathcal{O}(h^2) \le \frac{1}{16}.$$

另外，上述5点有限差分公式的矩阵L_h的$(n-1)^2$个特征向量$(1 < \nu, \mu < n-1)$:

$$u^{\nu\mu}(x,y) = \sin(\nu\pi x)\sin(\mu\pi y), \quad (x,y) \in \Omega_h,$$

相应的特征值是

$$\lambda_{\nu\mu} = 4h^{-2}\left(\sin^2(\nu\pi h/2) + \sin^2(\mu\pi h/2)\right),\ 1 \le \nu, \mu \le n-1.$$

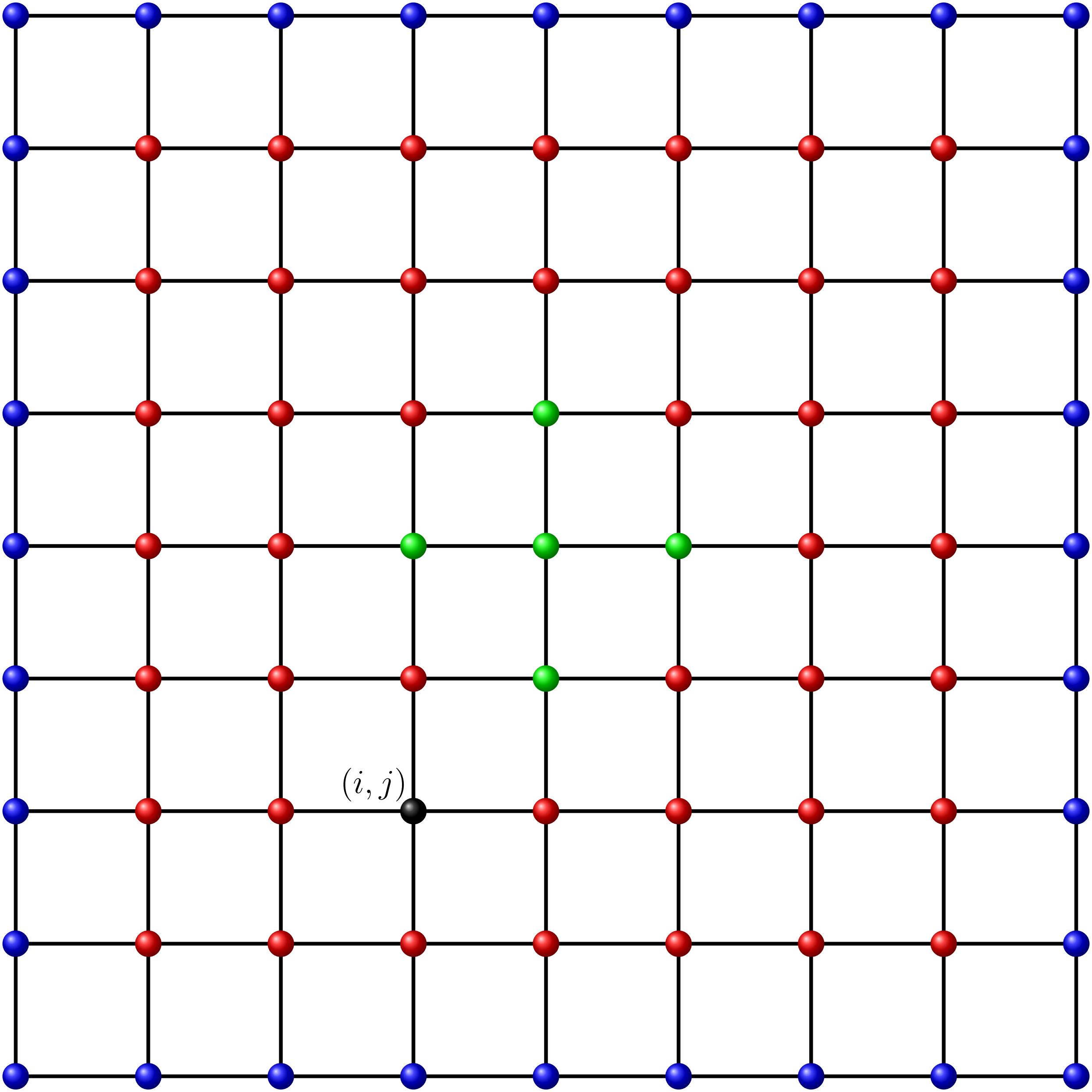
对于正定矩阵A, 有$||A||_2 = \rho(A) = \lambda_{\max}$, $||A^{-1}||_2 = \rho(A^{-1}) = \lambda_{\min}$, 其中$\lambda_{\max}$和$\lambda_{\min}$分别是$A$的最大和最小特征值.

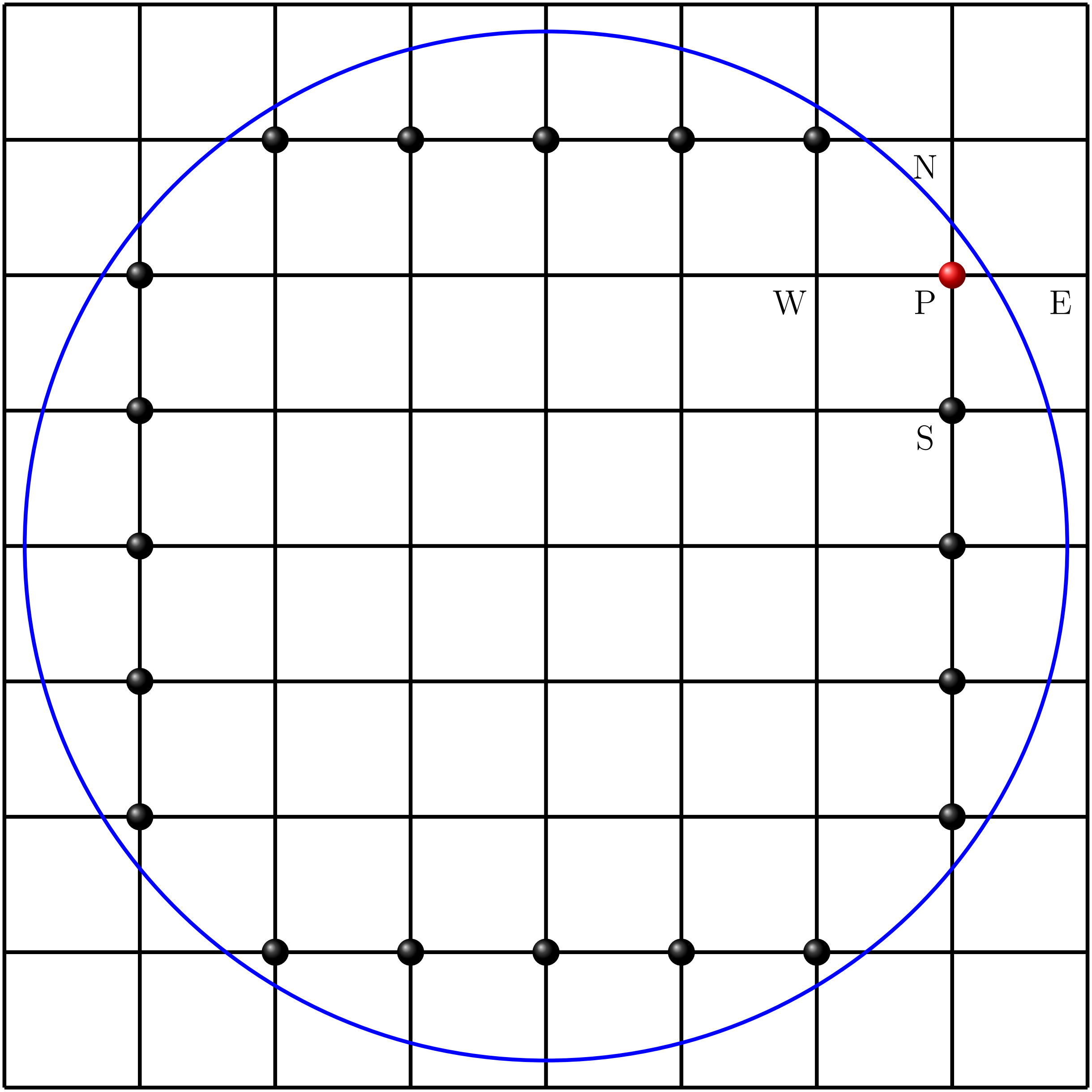
(2) 能量方法: 参见[2, §4.6]

References

[1] W. Hackbusch, *Elliptic Differential Equations: Theory and Numerical Treatment*, 2nd ed., Springer-Verlag, 2017.

[2] 李荣华和冯果忱, 微分方程数值解法, 第3版, 高等教育出版社, 1996.


(i, j)


N
W
P
E
S