

多重网格方法简介

教师: 胡俊

北京大学数学科学学院

November 12, 2019

- 1 两点边值问题的差分方法
- 2 迭代方法（一维情形）
- 3 提升算子
- 4 限制算子
- 5 V-循环多重网格方法
- 6 大作业
- 7 代数多重网格方法简介
- 8 作业

1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0, 1) = \Omega \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

将区域剖分成 N 段, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N$, $h = \frac{1}{N}$. 离散格式为

$$\begin{cases} -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f_j = f(x_j), & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

即求解 $A_h U_h = F_h$, 其中

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, U_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, F_h = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

数值计算矩阵的存储方式：由于矩阵 \mathbf{A} 是稀疏矩阵，每行只有少量非零元，存储时只需存储每个非零元的行标，列标和值即可，记为 (I_R, I_C, A) 。例如对于矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

存储方法一

$$I_R = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$$

$$I_C = (1, 2, 1, 2, 4, 2, 3, 4)$$

$$A = (1, 3, 2, 5, 7, 1, 2, 4)$$

存储方法二

$$I_R = (1, 3, 6, 9)$$

$$I_C = (1, 2, 1, 2, 4, 2, 3, 4)$$

$$A = (1, 3, 2, 5, 7, 1, 2, 4)$$

1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

$$u_j \leftarrow \frac{1}{2}(u_{j-1} + u_{j+1} + h^2 f_j) \quad 1 \leq j \leq N-1$$

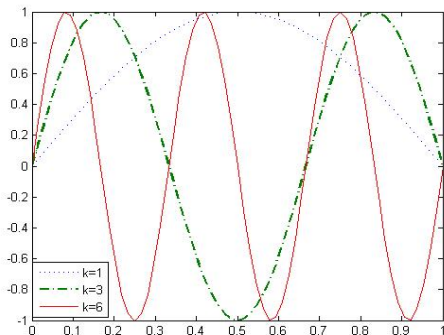
Gauss-Seidel 迭代法矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

迭代法的磨光性质

$$u_k = \left[0, \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right), \sin\left(\frac{3k\pi}{N}\right), \dots, \sin\left(\frac{(N-1)k\pi}{N}\right), 0 \right]^T$$

当 k 取值为1,3,6 时的图像如下图所示:



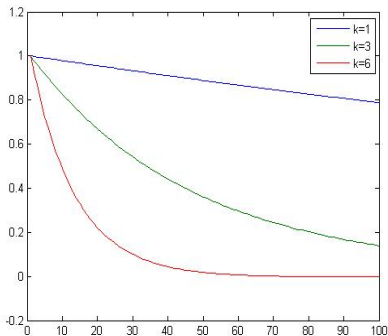
Gauss-Seidel 迭代:

下图画的是对于一维问题:

$$-u''(x) = 0 \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

用Gauss-Seidel 迭代进行求解, 取初始值为 $\sin(k\pi x)$, $k = 1, 3, 6$ 时, 每步的误差的最大值, 即 $\|u_h\|_\infty$

Figure: 迭代次数100次, $N=64$



初值: $U_0 = 1/4(u_1 + u_3 + u_6 + u_{20})$, 使用Gauss-Seidel迭代0, 1, 3, 5, 20步之后的误差图如下:

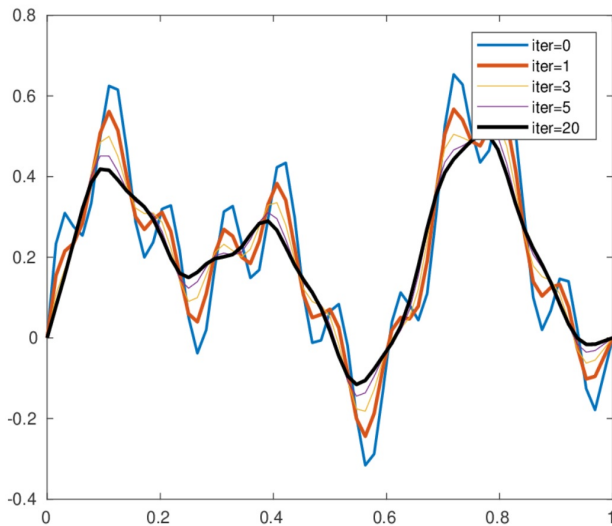


Figure: Gauss-Seidel迭代误差(一)

初值: $U_0 = 1/4(u_1 + u_3 + u_6 + u_{20}) + u_{40}$, 使用 Gauss-Seidel 迭代 0, 1, 3, 5, 20 步之后的误差图如下:

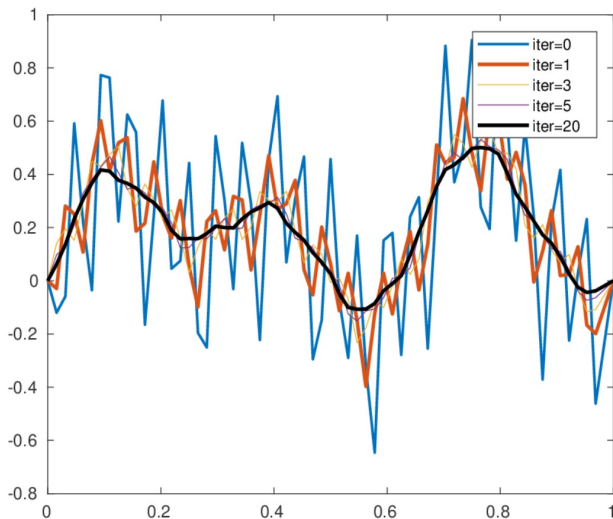


Figure: Gauss-Seidel 迭代误差(二)

Gauss-Seidel迭代矩阵的特征值和特征向量

设 $x \in \mathbb{R}^n$ 为特征向量，则有

$$(D - L)^{-1}Ux = \lambda x$$

即

$$x_{j+1} = \lambda(2x_j - x_{j-1}), \lambda x_j = \frac{1}{2}(x_{j+1} + \lambda x_{j-1})$$

作变换

$$x_j = \lambda^{\frac{j}{2}} u_j$$

得

$$\lambda \lambda^{\frac{j}{2}} u_j = \frac{1}{2}(\lambda^{\frac{j+1}{2}} u_{j+1} + \lambda \lambda^{\frac{j-1}{2}} u_{j-1}) \text{ 即 } \lambda^{\frac{1}{2}} u_j = \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_{j-1})$$

也就是说, $\lambda^{\frac{1}{2}}$ 是Jacobi迭代矩阵得特征值, 且 $\lambda \geq 0$.

于是

$$\lambda_k^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{k\pi}{N}, k = 1, \dots, \frac{N}{2}$$

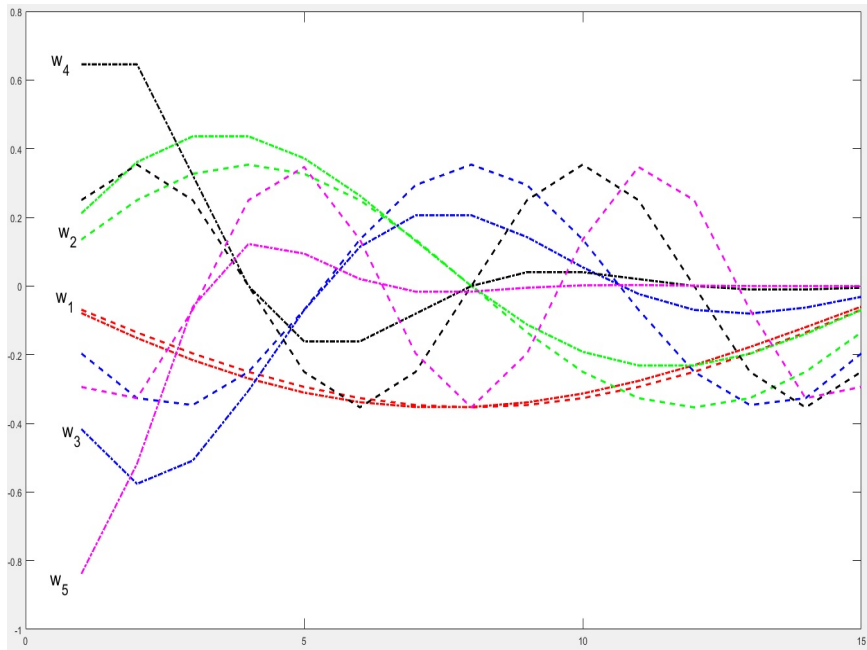
此时A和Jacobi迭代矩阵的特征向量都为:

$$\left(\sin \frac{k\pi}{N}, \sin \frac{2k\pi}{N}, \dots, \sin \frac{(N-1)k\pi}{N} \right)^T,$$

而Gauss-Seidel迭代矩阵的特征向量为:

$$\left(\cos \frac{k\pi}{N} \sin \frac{k\pi}{N}, (\cos \frac{k\pi}{N})^2 \sin \frac{2k\pi}{N}, \dots, (\cos \frac{k\pi}{N})^{N-1} \sin \frac{(N-1)k\pi}{N} \right)^T.$$

这说明**G-S**迭代矩阵大特征值对应的特征向量与系数A小特征值对应的特征向量有相当大的正相关性, 从某种意义上说, 这就是**G-S**迭代法磨光性的由来



低频与高频的相对性

例如,向量

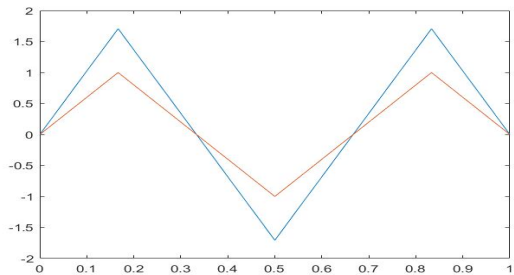
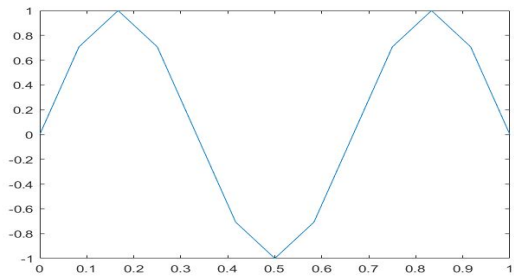
$$u_3 = \left[0, \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{3 \times 2\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{3 \times 3\pi}{12}\right), \dots, \sin\left(\frac{3 \times 11\pi}{12}\right), 0 \right]^T$$

对矩阵 $A_{11 \times 11}$ 而言, 是相对的小特征值对应的特征向量, 但是其限制

$$I_{1/12}^{1/6} u_3 = \left[0, \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) + 2 \sin\left(\frac{3 \times 2\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{3 \times 3\pi}{12}\right) \right), \right. \\ \left. \dots, \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{3 \times 9\pi}{12}\right) + 2 \sin\left(\frac{3 \times 10\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{3 \times 11\pi}{12}\right) \right), 0 \right]^T$$

却含有矩阵 $A_{5 \times 5}$ 相对大的特征值对应的特征向量. 实际上,
 $A_{5 \times 5}$ 的第三个特征向量为

$$\left[0, \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{3 \times 2\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{3 \times 3\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{3 \times 4\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{3 \times 5\pi}{6}\right), 0 \right]^T.$$



1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

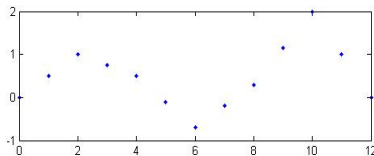
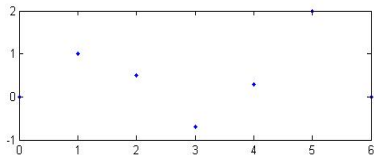
提升算子，将粗网格上 $\mathbb{R}^{N/2-1}$ 维的向量插值到细网格上成为 \mathbb{R}^{N-1} 维向量，即

$$I_{2h}^h v^{2h} = v^h$$

一维情形下，可以如下定义提升算子：

$$v_{2j}^h = v_j^{2h}$$

$$v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}) \quad 0 \leq j \leq N/2 - 1$$



$$I_{2h}^h v^{2h} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 2 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_{2h} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}$$

二维情形:

$$v_{2i,2j}^h = v_{ij}^{2h}$$

$$v_{2i+1,2j}^h = \frac{1}{2}(v_{ij}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h})$$

$$v_{2i,2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_{ij}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h}) \quad 0 \leq i, j \leq N/2 - 1$$

$$v_{2i+1,2j+1}^h = \frac{1}{4}(v_{ij}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h} + v_{i+1,j+1}^{2h})$$

1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

限制算子，是将细网格上的 \mathbb{R}^{N-1} 维向量投影到粗网格上成为 $\mathbb{R}^{N/2-1}$ 维向量，即

$$I_h^{2h} v^h = v^{2h}$$

一维情形： $v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h)$

N=8时

$$I_h^{2h} v^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = v^{2h}$$

二维情形:

$$\begin{aligned} v_{ij}^{2h} = & \frac{1}{16} [v_{2i-1,2j-1}^h + v_{2i-1,2j+1}^h + v_{2i+1,2j-1}^h + v_{2i+1,2j+1}^h \\ & + 2(v_{2i,2j-1}^h + v_{2i,2j+1}^h + v_{2i-1,2j}^h + v_{2i+1,2j}^h) \\ & + 4v_{2i,2j}^h] \quad 1 \leq i, j \leq N/2 - 1 \end{aligned}$$

对应系数:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

两层网格方法

1. 给定初始值 $u_h^{(0)}$, 做 ν 步 Gauss-Seidel 迭代, 得到近似解 $u_h^{(\nu)}$, 计算残量

$$r_h = F_h - A_h u_h^{(\nu)} \quad (\text{注: } A_h e_h = r_h, \quad e_h = u_h - u_h^{(\nu)})$$

2. 在粗网格上求解下面方程

$$A_{2h} u_{2h} = F_{2h}$$

这儿

$$A_{2h} = I_h^{2h} A_h I_{2h}^h, \quad F_{2h} = I_h^{2h} r_h$$

3. 把粗网格上得到的解 u_{2h} (理解为细网格上误差 e_h 的近似) 提升到细网格上 $I_{2h}^h u_{2h}$, 然后校正

$$u_h^{(\nu+1)} = u_h^{(\nu)} + I_{2h}^h u_{2h}$$

4. 计算新的残量

$$r_h = F_h - A_h u_h^{(\nu+1)}$$

5. 若 $\|r_h\|_2$ 小于允许误差, 停止迭代; 否则以 $u_h^{(\nu+1)}$ 为迭代初始值, 回到第一步.

关于两层网格方法的注解

1. 两层网格方法有效的前提: $e_h \doteq I_{2h}^h e_{2h}$, 即 e_h 是相对光滑的, 能够被粗网格空间(低维) 很好地近似, 是细网格上初始误差相对低频的部分, 这要求迭代方法能够很快地将细网格上初始误差相对高频的部分逮住.
2. 低频或者光滑(高频或者震荡快) 是相对的, 这是根据矩阵的特征值对应的特征向量来划分的. 一般来说, 我们要求迭代矩阵能快速将初始误差中对应大特征值的特征向量的那些分量即高频部分(震荡快的部分) 逮住, 变得很小, 通常称之为迭代方法的磨光性. 这样的迭代法一般对初始误差中对应小特征值的特征向量的那些分量即低频部分(震荡慢的部分) 效果不好或者较差. 好比常用的**Gauss-Seidel**迭代方法就具有这性质(对椭圆偏微分方程基于网格的离散系统). 而将这些小特征值对应的特征向量限制到粗网格, 其中就有一部分和粗网格上矩阵的大特征值的特征向量相似甚至相同. 对初始误差中这一部分, 如果在粗网格上用相同的迭代方法, 就能很快将他们逮住, 变得很小. 将这思想递归做下去, 就得到多重网格方法.

1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

1. 在 Ω^h 上, 以 $u_h^{(0)}$ 为初值, 用**G-S**迭代法, 对 $A_h U_h = F_h$, 迭代 ν_1 次 ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), 得到 $u_h^{(\nu_1)}$, 并计算残量

$$r_h = F_h - A_h u_h^{(\nu_1)}$$

2. 将残量限制到网格 Ω^{2h} 上, 即

$$F_{2h} = I_h^{2h} r_h$$

3. 在 Ω^{2h} 上, 以 $u_{2h}^{(0)} = 0$ 为初值, 用**G-S**迭代法, 对 $A_{2h} u_{2h} = F_{2h}$ 迭代 ν_1 次, 得到 $u_{2h}^{(\nu_1)}$, 并计算残量

$$r_{2h} = F_{2h} - A_{2h} u_{2h}^{(\nu_1)}$$

4. 将残量 r_{2h} 限制到网格 Ω^{4h} 上, 即

$$F_{4h} = I_{2h}^{4h} r_{2h}$$

5. 在 Ω^{4h} 上, 以 $u_{4h}^{(0)} = 0$ 为初值, 用G-S迭代法,
对 $A_{4h}u_{4h} = F_{4h}$ 迭代 ν_1 次, 得到 $u_{4h}^{(\nu_1)}$, 并计算残量

$$r_{4h} = F_{4h} - A_{4h}u_{4h}^{(\nu_1)}$$

6. 重复上述过程直到, 在 Ω^{Lh} 上, 以 $u_{Lh}^{(0)} = 0$ 为初值, 用G-S迭代法, 对 $A_{Lh}u_{Lh} = F_{Lh}$ 迭代 ν_1 次, 得到 $u_{Lh}^{(\nu_1)}$, $L = 2^r$ 并计算残量

$$r_{Lh} = F_{Lh} - A_{Lh}u_{Lh}^{(\nu_1)}$$

7. 将 u_{Lh} 提升到网格 $\Omega^{L/2,h}$ 上, 并更新 $\Omega^{L/2,h}$ 网格上的误差

$$u_{L/2,h}^{(v_1+1)} = u_{L/2,h}^{(v_1)} + I_{Lh}^{L/2,h} u_{Lh}$$

8. 在 $\Omega^{L/2,h}$ 上, 以 $u_{L/2,h}^{(v_1+1)}$ 为初值, 对

$$A_{L/2,h} u_{L/2,h} = F_{L/2,h}$$

迭代 v_2 次, 得到 $u_{L/2,h}^{(v_1+v_2+1)}$

9. 将 $u_{L/2,h}^{(v_1+v_2+1)}$ 提升到网格 $\Omega^{L/4,h}$ 上, 并更新 $\Omega^{L/4,h}$ 网格上的误差

$$u_{L/4,h}^{(v_1+1)} = u_{L/4,h}^{(v_1)} + I_{L/2,h}^{L/4,h} u_{L/2,h}^{(v_1+v_2+1)}$$

10. 重复上述过程，直到将将 $u_{2h}^{(v_1+v_2+1)}$ 提升到网格 Ω^h 上，并更新 Ω^h 网格上的误差

$$u_h^{(v_1+1)} = u_h^{(v_1)} + I_{2h}^h u_{2h}^{(v_1+v_2+1)}$$

11. 以 $u_h^{(v_1+1)}$ 为初值，在 Ω^h 上，对 $A_h u_h = F_h$ 迭代 v_2 次，得到 $u_h^{(v_1+v_2+1)}$.
12. 计算残量 $r_h = F_h - A_h u_h^{(v_1+v_2+1)}$ ，若 $\|r_h\|_2 \leq$ 允许误差，停止；否则，回到第二步.

1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

$$-\Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{F},$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = b, y = 0; \frac{\partial u}{\partial \nu} = t, y = 1,$$

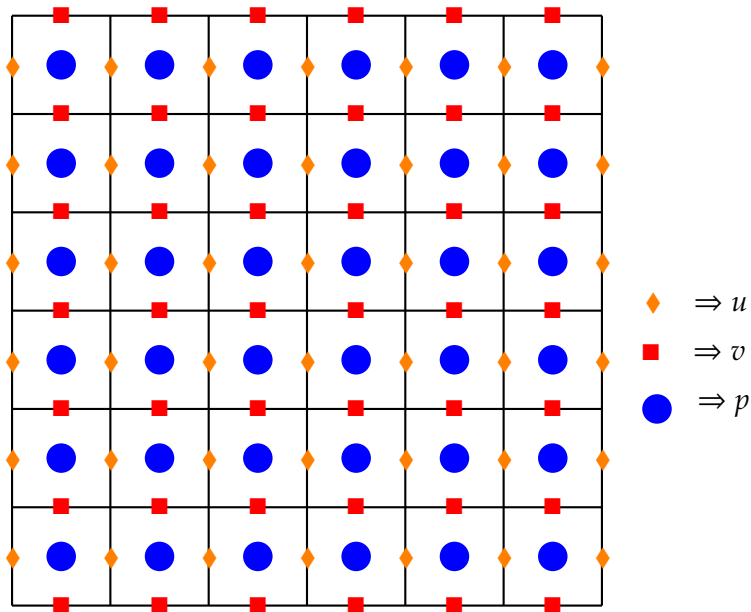
$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = l, x = 0; \frac{\partial v}{\partial \nu} = r, x = 1,$$

$$u = 0, x = 0, 1; v = 0, y = 0, 1,$$

其中 $\vec{u} = (u, v)$ 为速度, p 压力, $\vec{F} = (f, g)$ 外力, ν 为外法向方向.

- Stokes flow is a type of fluid flow where advective inertial forces are small compared with viscous forces. The Reynolds number is low.
- This is a typical situation in flows where the fluid velocities are very slow, the viscosities are very large, or the length-scales of the flow are very small.
- The equations of motion for Stokes flow, called the Stokes Equations, are a linearization of the Navier-Stokes Equations.

MAC Scheme on Stagger Grids



关于 u 的方程 ($h = 1/N$):

(1) 当 $2 \leq i \leq N, 2 \leq j \leq N-1$,

$$\begin{aligned} & -\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}}{h^2} \\ & + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h} = f_{i,j+\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

(2) 当 $2 \leq i \leq N (j = 1)$,

$$-\frac{u_{i,\frac{5}{2}} - u_{i,\frac{3}{2}}}{h^2} - \frac{b_{i,1}}{h} - \frac{u_{i+1,\frac{3}{2}} - 2u_{i,\frac{3}{2}} + u_{i-1,\frac{3}{2}}}{h^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},\frac{3}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},\frac{3}{2}}}{h} = f_{i,\frac{3}{2}};$$

(3) 当 $2 \leq i \leq N (j = N)$,

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,N+\frac{1}{2}} - u_{i,N-\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{t_{i,N+1}}{h} - \frac{u_{i+1,N+\frac{1}{2}} - 2u_{i,N+\frac{1}{2}} + u_{i-1,N+\frac{1}{2}}}{h^2} \\ & + \frac{p_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}}}{h} = f_{i,N+\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

(4) 当 $i = 1$ 和 $i = N+1, 1 \leq j \leq N, u_{i,j+\frac{1}{2}} = 0$.

关于 v 的方程 ($h = 1/N$):

(1) 当 $2 \leq j \leq N, 2 \leq i \leq N-1$,

$$-\frac{v_{i+\frac{3}{2},j} - 2v_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2v_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i+\frac{1}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{i+\frac{1}{2},j};$$

(2) 当 $2 \leq j \leq N (i = 1)$,

$$-\frac{v_{\frac{5}{2},j} - v_{\frac{3}{2},j}}{h^2} - \frac{l_{1,j}}{h} - \frac{v_{\frac{3}{2},j+1} - 2v_{\frac{3}{2},j} + v_{\frac{3}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{\frac{3}{2},j};$$

(3) 当 $2 \leq j \leq N (i = N)$,

$$\frac{v_{N+\frac{1}{2},j} - v_{N-\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{r_{N+1,j}}{h} - \frac{v_{N+\frac{1}{2},j+1} - 2v_{N+\frac{1}{2},j} + v_{N+\frac{1}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{N+\frac{1}{2},j};$$

(4) 当 $j = 1$ 和 $j = N+1, 1 \leq i \leq N, v_{i+\frac{1}{2},j} = 0$.

不可压条件($1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$):

$$\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - v_{i+\frac{1}{2},j}}{h} = 0.$$

将这些方程整理, 可得到如下线性代数方程组.

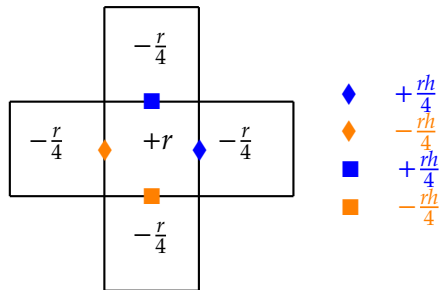
$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Distributive Gauss-Seidel (DGS) 迭代法

给定初始值 $U_0 = (u_0^T, v_0^T)^T$ 和 P_0 , 令 $k = 0$, $A = D_A - L_A - U_A$,
DGS迭代法定义如下 (A. Brandt & N. Dinar 1979):

1. 用 Gauss-Seidel 迭代方法更新速度分量

$$U_{k+1/2} = U_k + (D_A - L_A)^{-1}(F - BP_k - AU_k).$$



2. 对内部单元 (i,j) (四个顶点 $((i-1)h, (j-1)h)$, $(ih, (j-1)h)$, (ih, jh) , $((i-1)h, jh)$), $2 \leq i, j \leq N-1$, 计算散度方程的残量

$$r_{i,j} = -\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h},$$

并令 $\delta = r_{i,j}h/4$.

3. 更新内部单元速度:

$$u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} - \delta, \quad u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} + \delta,$$

$$v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+1} = v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+1/2} - \delta, \quad v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+1} = v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+1/2} + \delta.$$

4. 更新内部单元的压力:

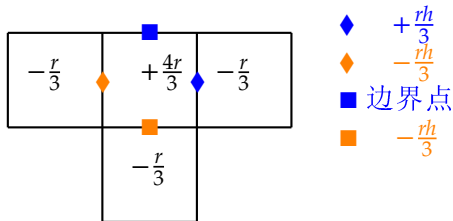
$$p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^k + r_{ij},$$

$$p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^k - r_{ij}/4,$$

$$p_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^k - r_{ij}/4,$$

$$p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k - r_{ij}/4,$$

$$p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^{k+1} = p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^k - r_{ij}/4.$$



5. 对边界单元 (i, N) (四个顶点 $((i-1)h, (j-1)h)$, $(ih, (j-1)h)$, (ih, jh) , $((i-1)h, jh)$), $2 \leq i, j \leq N-1$, 先计算散度的残量 $r_{i,N}$, 计算公式如前, 并令 $\delta = r_{i,N}h/3$. 速度更新如下:

$$u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} - \delta, \quad u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} + \delta,$$

$$v_{i-\frac{1}{2},N-1}^{k+1} = v_{i-\frac{1}{2},N-1}^{k+1/2} - \delta.$$

6. 更新边界单元 (i, N) 的压力:

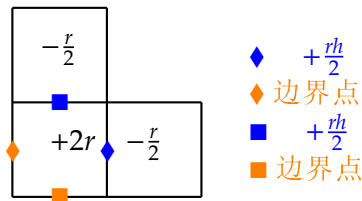
$$p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^k + 4/3 * r_{i,N},$$

$$p_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^k - r_{i,N}/3,$$

$$p_{i-\frac{3}{2},N-\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{i-\frac{3}{2},N-\frac{1}{2}}^k - r_{i,N}/3,$$

$$p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{3}{2}}^{k+1} = p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{3}{2}}^k - r_{i,N}/3.$$

7. 类似更新边界单元 (N, j) 和 $(1, j)$, $2 \leq j \leq N-1$, $(i, 1)$, $2 \leq i \leq N-1$ 的速度和压力.



8. 对顶点单元(1,1), 计算三度残量 $r_{1,1}$, 计算公式如前, 令 $\delta = r_{1,1}h/2$. 更新速度如下: 更新内部单元速度:

$$u_{1,\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{1,\frac{1}{2}}^{k+1/2} + \delta, \quad v_{\frac{1}{2},1}^{k+1} = v_{\frac{1}{2},1}^{k+1/2} + \delta.$$

更新压力如下:

$$p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^k + 2 * r_{1,1},$$

$$p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{k+1} = p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^k - r_{1,1}/2,$$

$$p_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^{k+1} = p_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^k - r_{1,1}/2.$$

9. 对其他顶点单元(1,N), (N,1)和(N,N), 类似更新速度和压力.

Uzawa Iteration Method (Hirofumi Uzawa 1958)

给定 P_0 , 令 $k = 0$

1. 求解 $AU_{k+1} = F - BP_k$;
2. 更新压力 $P_{k+1} = P_k + \alpha(B^T U_{k+1})$;
3. 判断误差是否小于允许的值: 如果小于, 则停止迭代, 否则回到第一步.

参数 α 的选取: 因为

$$\begin{aligned}P_{k+1} &= P_k + \alpha(B^T A^{-1}(F - BP_k)) \\&= (I - \alpha B^T A^{-1} B)P_k + \alpha B^T A^{-1} F\end{aligned}$$

因此, 关于压力的更新方法, 相当于下面的线性代数方程组

$$B^T A^{-1} B P = B^T A^{-1} F$$

的迭代格式. 因而, (作业: 证明使谱半径 $\rho(I - \alpha B^T A^{-1} B)$ 最小的) 最优参数为

$$\alpha_* = \frac{2}{\lambda_{\min}(B^T A^{-1} B) + \lambda_{\max}(B^T A^{-1} B)}$$

Howard C Elman & Gene H. Golub 1994, SINUM, 1645–1661.

给定 P_0 , 令 $k = 0$

1. 近似求解 $AU_{k+1} = F - BP_k$, 得到近似解 \hat{U}_{k+1} ;
2. 更新压力 $P_{k+1} = P_k + \alpha(B^T \hat{U}_{k+1})$;
3. 判断误差是否小于允许的值: 如果小于, 则停止迭代, 否则回到第一步.

设 \hat{U}_{k+1} 是方程 $AU_{k+1} = F - BP_k$ 的近似解. 定义

$$\delta_k = A\hat{U}_{k+1} - F + BP_k$$

若

$$\|\delta_k\|_2 \leq \tau \|B^T \hat{U}_k\|$$

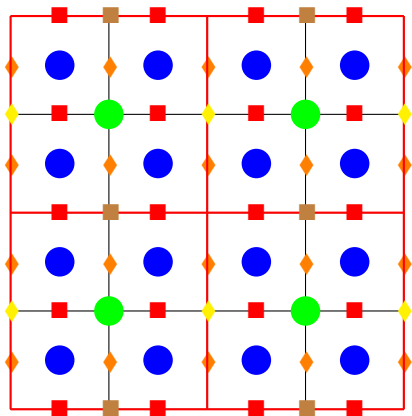
则(适当选取 α) 当 τ 充分小时, 上述迭代方法是收敛的.

提升、限制算子

限制算子:

速度: $\blacklozenge = 0.25 \times \text{最近两个} \blacklozenge + 0.125 \times \text{周围四个} \blacklozenge$

压力: $\bullet = 0.25 \times \text{最近的四个} \bullet$



提升算子:

内部粗网格线上: $\blacklozenge = 0.25 \times \text{远} \blacklozenge + 0.75 \times \text{近} \blacklozenge$ 上、下边界粗网格线上: $\blacklozenge = 0.5 \times \text{最近} \blacklozenge$

细网格线上: $\blacklozenge = 0.5 \times \text{最近} \blacklozenge + 0.5 \times \text{最近} \blacklozenge$ 压力: $\bullet = \text{最近} \bullet$

区域 $\Omega = (0,1)^2$, 外力为

$$f(x, y) = -4\pi^2(2 \cos(2\pi x) - 1) \sin(2\pi y) + x^2,$$

$$g(x, y) = 4\pi^2(2 \cos(2\pi y) - 1) \sin(2\pi x).$$

真解为:

$$u(x, y) = (1 - \cos(2\pi x)) \sin(2\pi y),$$

$$v(x, y) = (1 - \cos(2\pi y)) \sin(2\pi x),$$

$$p(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{12}.$$

大作业要求

1. 分别取 $N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$, 以DGS为磨光子, 用基于V-cycle的多重网格方法求解离散问题(*), 停机标准为 $\|r_h\|_2 \leq 10^{-8}$, 对不同 v_1 、 v_2 、 L , 比较V-cycle的次数和CPU时间, 并计算误差

$$e_N = h \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i,j-\frac{1}{2}} - u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N |v_{i-\frac{1}{2},j} - u(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

这儿 $x_i = (i-1)h, y_{j-\frac{1}{2}} = (j-\frac{3}{2})h, x_{i-\frac{1}{2}} = i-\frac{3}{2}h, y_j = (j-1)h$.

2. 分别取 $N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$, 以Uzawa Iteration Method 为磨光子, 用基于V-cycle的多重网格方法求解离散问题(*), 停机标准为 $\|r_h\|_2 \leq 10^{-8}$, 对不同 α 、 v_1 、 v_2 、 L , 比较V-cycle的次数和CPU时间, 并计算误差

$$e_N = h \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i,j-\frac{1}{2}} - u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N |v_{i-\frac{1}{2},j} - v(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

3. 分别取 $N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$, 以Inexact Uzawa Iteration Method 为磨光子, 用基于V-cycle的多重网格方法求解离散问题(*), 停机标准为 $\|r_h\|_2 \leq 10^{-8}$, 对不同 α 、 τ 、 ν_1 、 ν_2 、 L , 比较V-cycle的次数和CPU时间, 并计算误差

$$e_N = h \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i,j-\frac{1}{2}} - u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N |v_{i-\frac{1}{2},j} - v(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

4. 分别取 $N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$, 以Inexact Uzawa Iteration Method 为迭代法求解离散问题(*), 停机标准为 $\|r_h\|_2 \leq 10^{-8}$, 其中以V-cycle多重网格方法为预条件子求解每一步的子问题 $AU_{k+1} = F - BP_k$, 对不同 α 、 τ 、 ν_1 、 ν_2 、 L , 比较外循环的迭代次数和CPU 时间, 并计算误差

$$e_N = h \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i,j-\frac{1}{2}} - u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N |v_{i-\frac{1}{2},j} - v(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

Theorem 7.1

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵, 并假定 A 的特征值 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, 则有

$$\lambda_k = \min_{W \subset \mathbb{R}^n \text{ \& dim } W=k} \max_{x \in W \text{ \& } x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x},$$

且

$$\lambda_k = \max_{W \subset \mathbb{R}^n \text{ \& dim } W=n-k+1} \min_{x \in W \text{ \& } x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

证明: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 对应的特征向量为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.
取 $W = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, 得

$$\min_{W \subset \mathbb{R}^n \text{ \& dim } W=k} \max_{x \in W \text{ \& } x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_k$$

对任意 k 维子空间 W , 若 $W \neq \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, 则存在 $\xi \in W$, 使得 $\xi \perp \xi_i, i = 1, \dots, k$. 故有

$$\min_{W \subset \mathbb{R}^n \text{ \& dim } W=k} \max_{x \in W \text{ \& } x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \lambda_k.$$

设 B 为 A (假设 A 对称)的近似逆, 给定初始值 x_0 , 定义如下迭代格式:

$$\begin{aligned}x_{k+1/2} &= x_k + B(b - Ax_k) \\x_{k+1} &= x_{k+1/2} + B^T(b - Ax_{k+1/2})\end{aligned}$$

这样,

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \bar{B}(b - Ax_k), \bar{B} = B + B^T - B^T A B \\ \|I - BA\|_A^2 &= \lambda_{\max}(I - \bar{B}A) = 1 - \lambda_{\min}(\bar{B}A) \\ &= 1 - \left(\max_{\|x\|_A=1} (\bar{B}^{-1}x, x) \right)^{-1}\end{aligned}$$

设 $V = \mathbb{R}^n$, $V_c = \text{span}\{P_1, \dots, P_{n_c}\}$. 令 $A_c = P^T A P$. 给定初始值 $x_0 \in V$, 定义如下两网格方法:

1 粗网格校正 $r = b - Ax_0$, $x_{1/2} = x_0 + PA_c^{-1}P^T r$;

2 后磨光 $x_1 = x_{1/2} + R(b - Ax_{1/2})$.

令 $\Pi_c = PA_c^{-1}P^T A$, 则误差传播子或者迭代矩阵

$$E = (I - RA)(I - \Pi_c),$$

且有

$$\|(I - RA)(I - \Pi_c)\|_A^2 = 1 - \frac{1}{K(P)},$$

其中 $K(P) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \max_{C \in \mathbb{R}^{n_c}} \frac{\|v\|_A^2}{\|v - PC\|_{R^{-1}}^2}$.

(证明见: [Theorem 5.3, Jinchao Xu and Ludmil Zikatanov, Algebraic multigrid methods, Acta Numerica \(2017\), pp. 591–721](#))

$$\begin{aligned} \frac{1}{K(P)} &= \min_{v \in V} \max_{C \in \mathbb{R}^{n_c}} \frac{\|v\|_A^2}{\|v - PC\|_{\bar{R}^{-1}}^2} = \min_{v \in V} \max_{v_c \in V_c} \frac{\|v\|_A^2}{\|v - v_c\|_{\bar{R}^{-1}}^2} \\ &\leq \min_{v \in V_c^\perp} \max_{v_c \in V_c} \frac{\|v\|_A^2}{\|v - v_c\|_{\bar{R}^{-1}}^2} = \min_{v \in V_c^\perp} \frac{\|v\|_A^2}{\|v\|_{\bar{R}^{-1}}^2}, \end{aligned}$$

其中 V_c^\perp 与 V_c 在 $(\cdot, \cdot)_{\bar{R}^{-1}}$ 下正交. 设 $\{(\mu_j, \xi_j)\}_{j=1}^n$ 是 $\bar{R}A$ 的特征对, 且特征向量在 $(\cdot, \cdot)_{\bar{R}^{-1}}$ 下正交. 由极小极大定理, 由

$$\max_{\dim V_c = n_c} \frac{1}{K(P)} \leq \max_{\dim V_c = n_c} \min_{v \in V_c^\perp} \frac{\|v\|_A^2}{\|v\|_{\bar{R}^{-1}}^2} = \mu_{n_c+1}.$$

代数低频:

$$\|v\|_A^2 \leq \epsilon \|v\|_{\bar{R}^{-1}}^2$$

若 $(\bar{R}Av, v)_A \leq \epsilon \|v\|_A^2$, 则 v 是代数低频的(即对应于 $\bar{R}A$ 小特征值对应的特征向量).

代数高频:

$$\|v\|_A^2 \geq \delta \|v\|_{\bar{R}^{-1}}^2$$

(即对应于 $\bar{R}A$ 大特征值对应的特征向量).

经典代数低频误差:

$$\|e\|_A^2 \leq \epsilon \|e\|_D^2.$$

(即对应于 $D^{-1}A$ 小特征值对应的特征向量).

Theorem 7.2

若 $V = V_c + V_{hf}$, 其中 V_{hf} 是 δ 代数高频的, 且对任意 v , 存在 $v_c \in V_c$, $v_{hf} \in V_{hf}$, 有

$$v = v_c + v_{hf}, \|v_{hf}\|_A^2 \leq c_1 \|v\|_A^2,$$

则有

$$\|E\|_A^2 \leq 1 - \frac{\delta}{c_1}.$$

空间分解与子空间校正

将空间作如下分解:

$$\mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^N V_j.$$

为了表述简单起见, 这里假设了 V_j 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 设 V_j , $j = 1, \dots, N$, 的基为

$$P_j = (\phi_{j,1}, \phi_{j,2}, \dots, \phi_{j,\ell_j}), 1 \leq \ell_j \leq n.$$

因此 P_j 是一个 $n \times \ell_j$ 的矩阵.

给定方程 $Ax = b$ 近似解 x_k , 定义残量

$$r = b - Ax_k,$$

则误差 $e = x_* - x_k$ 满足残量方程

$$Ae = r.$$

并行子空间校正

假设误差 e 在子空间 V_j 中的分量为 $e_j = P_j C_j$, 其中 $C_j \in \mathbb{R}^{\ell_j}$ 为未知向量. 假设其余误差分量为零, 则 e_j 满足如下方程:

$$Ae_j = r \quad \Rightarrow \quad AP_j C_j = r.$$

定义 $A_j = P_j^T A P_j$, $r_j = P_j^T r$, 得 $C_j = A_j^{-1} r_j$. 新的近似解定义为

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{j=1}^N e_j = x_k + \sum_{j=1}^N P_j A_j^{-1} P_j^T r.$$

令 $B_{\text{PSC}} = \sum_{j=1}^N P_j A_j^{-1} P_j^T$, 有

$$x_{k+1} = (I - B_{\text{PSC}} A) x_k + B_{\text{PSC}} b.$$

这样

$$(x_* - x_{k+1}) = (I - B_{\text{PSC}} A)^{k+1} (x_* - x_0).$$

串行子空间校正

- 1 定义 $u^{(0)} = x_k$.
- 2 已知 $u^{(j-1)}$, 定义残量 $R^{(j-1)} = b - Au^{(j-1)}$. 令 $r_j = P_j^T R^{(j-1)}$, $C_j = A_j^{-1} r_j$, 定义 $e_j = P_j C_j$.
- 3 更新 $u^{(j)} = u^{(j-1)} + e_j$.
- 4 循环直到 $j = N$.
- 5 定义新的近似解为 $x_{k+1} = u^{(N)}$

因为

$$\begin{aligned} u^{(j)} &= u^{(j-1)} + e_j = u^{(j-1)} + P_j A_j^{-1} P_j^T (b - Au^{(j-1)}) \\ &= (I - P_j A_j^{-1} P_j^T A) u^{(j-1)} + P_j A_j^{-1} P_j^T b, \end{aligned}$$

因此

$$x_* - x_{k+1} = \prod_{i=1}^N (I - P_i A_i^{-1} P_i^T A) (x_* - x_k).$$

$$\text{定义 } I - B_{\text{SSC}} A = \prod_{j=1}^N (I - P_j A_j^{-1} P_j^T A).$$

1. 在上面并行和串行子空间校正方法中, 常取 A_j^{-1} 的近似逆, 即

$$B_{\text{PSC}} = \sum_{j=1}^N P_j R_j P_j^T$$

$$I - B_{\text{SSC}} A = \prod_{j=1}^N (I - P_j R_j P_j^T A)$$

2. 若取 $V_j = \text{span}\{e_j\}$, $j = 1, \dots, N$, 则**Jacobi**迭代法是并行子空间校正方法, **Gauss-Seidel**迭代法是串行子空间校正方法.
3. 记网格 Ω^h 上的空间为 $V = \tilde{V}_1$, Ω^{2h} 上的空间为 \tilde{V}_2, \dots , $\Omega^{2^{N_h}h}$ 上的空间为 \tilde{V}_N , 定义 $V_j = I_{2h}^h \cdots I_{2^j h}^{2^{j-1}h} \tilde{V}_j$, 则有

$$V = \sum_{j=0}^N V_j.$$

$$\begin{aligned}
u_h^{(v+\frac{1}{N})} &= u_h^{(v)} + I_{2h}^h \bar{R}_{2h} I_h^{2h} (b_h - A_h u_h^{(v)}) \\
&\quad (u_{2h}^{(v)} = \bar{R}_{2h} I_h^{2h} (b_h - A_h u_h^{(v)})) \\
&= (I - I_{2h}^h \bar{R}_{2h} I_h^{2h} A_h) u_h^{(v)} + I_{2h}^h \bar{R}_{2h} I_h^{2h} b_h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_h^{(v+\frac{2}{N})} &= u_h^{(v+\frac{1}{N})} + I_{2h}^h I_{4h}^{2h} \bar{R}_{4h} I_{2h}^{4h} (b_{2h} - A_{2h} u_{2h}^{(v)}) \\
&= u_h^{(v+\frac{1}{N})} + I_{2h}^h I_{4h}^{2h} \bar{R}_{4h} I_{2h}^{4h} (I_h^{2h} r_h - I_h^{2h} A_h I_{2h}^h u_{2h}^{(v)}) \\
&= u_h^{(v+\frac{1}{N})} + I_{2h}^h I_{4h}^{2h} \bar{R}_{4h} I_{2h}^{4h} (I_h^{2h} b_h - I_h^{2h} A_h (u_h^{(v)} + I_{2h}^h u_{2h}^{(v)})) \\
&= (I - I_{2h}^h I_{4h}^{2h} \bar{R}_{4h} I_{2h}^{4h} I_h^{2h} A_h) u_h^{(v+\frac{1}{N})} + I_{2h}^h I_{4h}^{2h} \bar{R}_{4h} I_{2h}^{4h} I_h^{2h} b_h.
\end{aligned}$$

令 $P_j = I_{2h}^h \cdots I_{2^j h}^{2^{j-1}h}$, $p_j^T = I_{2^{j-1}h}^{2^j h} \cdots I_h^{2h}$, $\bar{R}_j = \bar{R}_{2^j h}$, $P_0 = P_0^T = I$, 有

$$u_h^{(v+\frac{j}{N})} = (I - P_j \bar{R}_j P_j^T A_h) u_h^{(v+\frac{j-1}{N})} + P_j \bar{R}_j P_j^T b_h,$$

$$(u_h - u_h^{(v+\frac{N}{N})}) = \prod_{j=0}^N (I - P_j \bar{R}_j P_j^T A_h) (u_h - u_h^{(v)}).$$

因此

$$I - B_{SSC} A_h = \left(\prod_{j=1}^N (I - P_j \bar{R}_j P_j^T A_h) \right) (I - \bar{R}_0 A_h).$$

4. 对于前面讨论的拟奇异问题, 相应的空间分解为

$$\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

其中 $V_j = \text{span}\{e_j\}$, $j = 1, 2, 3$, $V_4 = \text{span}\{(1, 1, 1)^T\}$. 然后用串行子空间校正.

1 两点边值问题的差分方法

2 迭代方法（一维情形）

3 提升算子

4 限制算子

5 V-循环多重网格方法

6 大作业

7 代数多重网格方法简介

8 作业

1 证明

$$\frac{1}{4}(B_{psc}^{-1}v, v) \leq (\bar{B}_{ssc}^{-1}v, v) \leq C(B_{psc}^{-1}v, v), \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $c = \max_{1 \leq k \leq N} [M(k)]^2$,

$$M(k) = \left\{ j \in \{1, 2, \dots, N\} \mid V_j \cap V_k \neq \{0\} \right\}.$$

2 证明

$$\|(I - RA)(I - \Pi_c)\|_A^2 = 1 - \frac{1}{K(P)},$$

其中 $K(P) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \max_{C \in \mathbb{R}^{nc}} \frac{\|v\|_A^2}{\|v - PC\|_{R^{-1}}^2}.$

谢谢!