数值代数上机作业 4

陈奕行

November 5, 2019

Contents

1 程序说明

程序 poisson_choice.m 输入为 f, e, n, choice. 求解如下椭圆方程

$$-(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\epsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2})u = f \tag{1}$$

其中 f = f, $e=\epsilon$, n 为每一个方向节点数目，choice 为字符串'G-S', 'Jacobi', 'SOR' 分别代表 Gauss-Seidel 迭代，Jacobi 迭代和 SOR 迭代。输出 [err, iter] 其中 err 为数值解与真是解误差，iter 为迭代步数。

f.m 和 real_sol.m 分别给出方程非齐次项和方程精确解。

2 确定 SOR 最佳松弛因子

设离散化后方程为 $Au=b$，其中 $A\in\mathbb{R}^{(n-1)^2\times(n-1)^2}, u\in\mathbb{R}^{(n-1)^2}$。仿照课本 4.4.3 节分析可知

$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B)^2}} \tag{2}$$

其中 B 为 Jacobi 迭代矩阵。

$$B = I-\frac{1}{2(1+\epsilon)}A \tag{3}$$

试验发现 $\omega=1.8$ 效果较好。

3 程序结果

运行 main.m 即可，约需 40min。其中 poisson_choice.m 给出三种方法的实现，判断方法利用字符串"GS", "Jacobi" 和 “SOR”。

由于 Latex 输入表格过于麻烦，结果在 result.xlsx 中，分为三个 Sheet。实验发现与 ϵ 几乎无关。但是 SOR 确实能显著减少迭代步数。

注意到误差关于 N 并无很好的收敛性，实际上，由于网格本身就有二阶精度，真解次数较低，这里的误差并无多大意义，增大网格反倒增加了求解线性方程中误差导致最后误差增加。但是由于题目要求，仍然使用题中函数运行程序得到答案，

在测试收敛性的时候，我们一般使用类似 $\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)$ 的函数，对于真解 $u=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$，为节省时间，我们不取 $N=256$，结果在 result2.xlsx 中。此时 SOR 同样网格，同样误差时减小迭代步数时的优势更加明显，误差的收敛性也较好。并且，可以看出 Jacobi 迭代次数约为 Gauss Seidel 迭代的两倍，符合理论预测。