偏微分方程数值解

上机作业1, 2019.09.18

September 30, 2019

上机作业: 考虑BVP

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x,y) = u_D(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega, \tag{0.2}$$

的数值计算, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

根据实际情况, 可以考虑是否使用矩形网格剖分Ω? 在选定的网格上对BVP(0.1)有限差分离散(可以发挥各自的"想象"做些可能讨论), 然后再考虑选用适当的线性方程组的求解方法编程序求解离散问题获得近似解.

为了验证程序和计算结果的正确性, 可以有些必要的数值上的分析和讨论.

以下三个Case可以选做.

- Case 1. 区域$\Omega = (0,1) \times (0,1)$, 右端项$f(x,y) = -36x - 6$, 边界

条件

$$u(0,y)=3y^2,\ u(1,y)=6+3y^2,\quad y\in[0,1];$$
$$u(x,0)=6x^3,\ u(x,1)=6x^3+3,\quad x\in[0,1].$$

鉴于上述问题的解(它是次数不超过3的多项式)对测试精度或收敛率的效果不是很好, 可以考虑编造Poisson方程(0.1)的边值问题一个解, 例如

$$u(x,y)=0.1\sin(6\pi x)\cos(8\pi y), \tag{0.3}$$

然后用程序计算对应的边值问题(将编造的解$u(x,y)$, 例如(0.3), 代入(0.1)-(0.2)中获得其中的右端函数f和边界条件u_D的相应定义). 这就是所谓的Method of manufactured solutions, 见文件lect-chap1-01.pdf

- Case 2. 可以测试PDF文档[1] 里的例子, 见(9.4.11)-(9.4.12).

[1]https://www.ldeo.columbia.edu/~mspieg/mmm/BVPs.pdf

- Case 3 [尝试]. Ω是一个扇形区域

$$\{(x,y)|x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0<r<1, \theta\in(0,\pi/2)\}.$$

参照Case 2.中提及的PDF文档, 构造右端项, 第一类边界条件等.

可以参阅下列书的第4章:

余德浩和汤华中, 《微分方程数值解法》, 第二版, 中国科学院大学研究生教材系列, 科学出版社, 2018年3月.