2019 年春季学期应用数学导论大作业

有限元方法简介

考虑

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad \Omega = (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $f \in C^0([0, L])$.

变分问题

定义空间 V_0

$$V_0 = \{v : \int_0^L v^2 \ dx < \infty, \int_0^L (\frac{dv}{dx})^2 \ dx < \infty, v(0) = v(L) = 0\}$$

在方程 $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$ 两端同时乘以测试函数 (test function)v(假设 $v \in V_0$)，再使用分部积分：

$$\begin{aligned} \int_0^L fv \ dx &= -\int_0^L \frac{d^2u}{dx^2} v \ dx \\ &= \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \ dx - \frac{du}{dx} v|_{x=L} + \frac{du}{dx} v|_{x=0} \\ &= \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \ dx \end{aligned} \tag{0.2}$$

得到问题 (0.1) 的变分形式：求 $u \in V_0$，使得

$$\int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \ dx = \int_0^L fv \ dx, \quad \forall v \in V_0 \tag{0.3}$$

有限元问题

对区域 [0,L] 进行剖分，节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$，由此 $n+1$ 个节点定义的剖分记作 $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L \tag{0.4}$$

如图所示

$\mathcal{T}$

子区域 $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$，$i = 1, 2, 3, ..., n$，称作第 i 个单元，区间长度 $h_i = x_i - x_{i-1}$.

在网格 $\mathcal{T}$ 上，定义分片线性函数空间

$$V_h = \{v : v \in C^0(\Omega), v|_{\Omega_i} \in P_1(\Omega_i)\} \tag{0.5}$$

其中 $P_1(\Omega_i)$ 代表 Ω_i 上的线性函数空间. 定义空间

$$V_{h,0} = \{v \in V_h : v(0) = v(L) = 0\}$$

问题 (0.1) 有限元问题为: 求 $u_h \in V_{h,0}$，使得

$$\int_0^L \frac{du_h}{dx}\frac{dv}{dx}\ dx = \int_0^L fv\ dx \qquad \forall v \in V_{h,0} \tag{0.6}$$

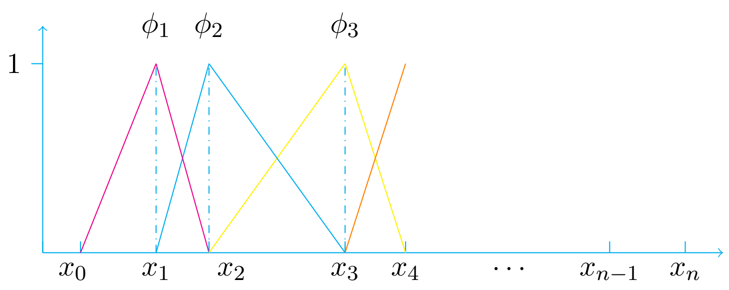
线性系统的导出

基函数

函数空间 $V_{h,0}$ 的一组基函数 $\{\phi_i\}_{i=1}^{n-1}$ 由如下定义

$$\phi_i = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i, & if\ x \in \Omega_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1}, & if\ x \in \Omega_{i+1} \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{0.7}$$

如图所示



$\{\phi_j\}_{j=1}^{n-1}$

因此，任意 $u_h \in V_{h,0}$，u_h 可以写成

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \phi_i(x) \tag{0.8}$$

线性系统

数值求解有限元问题 (0.6), 求 $u_h \in V_{h,0}$, 等价于求解

$$\int_0^L \frac{du_h}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}\ dx = \int_0^L f\phi_i\ dx \quad\quad i = 1,2,...,n-1 \tag{0.9}$$

其中，任意 $u_h \in V_{h,0}$ 可以写成

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \phi_j \tag{0.10}$$

ϕ_j 如式（0.7）定义，$\mu_j, j = 1,2,...,n-1$ 是 n-1 个未知系数（待求，求得之后，便有了 u_h 的表达式）. 将式（0.10）带入到式（0.9）可得

$$\begin{aligned}\int_0^L f\phi_i\ dx &= \int_0^L (\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \frac{d\phi_j}{dx})\frac{d\phi_i}{dx}\ dx \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}\ dx \quad i = 1,2,...,n-1\end{aligned} \tag{0.11}$$

记

$$A_{ij} = \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}\ dx, \quad i,j = 1,2,...,n-1$$

$$b_i = \int_0^L f\phi_i\ dx, \quad i = 1,2,...,n-1$$

有

$$b_i = \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}\mu_j, \quad i = 1,2,...,n-1$$

得到一个 $(n-1)\times(n-1)$ 的线性系统

$$A\mu = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n-1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

数值积分

首先简单介绍梯形公式

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h$$

考虑系统

$$A\mu = b$$

考虑到每个基函数仅在有限个小区域不为 0，因此上面的线性系统可以进一步化简

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \int_0^L (\frac{d\phi_i}{dx})^2\ dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\frac{d\phi_i}{dx})^2\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\frac{d\phi_i}{dx})^2\ dx \\ &\approx \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \quad i = 1,2,...,n-1 \end{aligned} \tag{0.12}$$

$$\begin{aligned} A_{ii+1} &= \int_0^L (\frac{d\phi_{i+1}}{dx})(\frac{d\phi_i}{dx})\ dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\frac{d\phi_{i+1}}{dx})(\frac{d\phi_i}{dx})\ dx \\ &\approx -\frac{1}{h_{i+1}} \quad i = 1,...,n-1 \end{aligned} \tag{0.13}$$

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^L f\phi_i\ dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\phi_i\ dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\phi_i\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\phi_i\ dx \\ &\approx f(x_i)(h_i + h_{i+1})/2 \quad i = 1,...,n-1 \end{aligned} \tag{0.14}$$

因此

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & & & \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}}+\frac{1}{h_n} & \end{bmatrix} \tag{0.15}$$

$$b = \begin{bmatrix} f(x_1)(h_1+h_2)/2 \\ f(x_2)(h_2+h_3)/2 \\ \vdots \\ f(x_{n-1})(h_{n-1}+h_n)/2 \end{bmatrix} \tag{0.16}$$

所求

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix}$$

后验无差估计子 η_i

有如下后验误差估计结果:

定理： 问题 (0.6) 的有限元解 u_h 满足如下估计

$$\|\frac{d(u-u_h)}{dx}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(u_h) \tag{0.17}$$

其中

$$\eta_i(u_h) = h_i\|f + \frac{d^2u_h}{dx^2}\|_{L^2(\Omega_i)}$$

证明： 令 $e = u - u_h$ 为误差，定义插值算子 $\Pi : V_0 \to V_{h,0}$ 为连续分片线性插值, 根据前面（b）题的结论，有

$$\begin{aligned} \|\frac{de}{dx}\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (\frac{de}{dx})^2\ dx \\ &= \int_\Omega \frac{de}{dx}\frac{d(e-\Pi e)}{dx}\ dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{de}{dx}\frac{d(e-\Pi e)}{dx}\ dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\frac{d^2e}{dx^2})(e-\Pi e)\ dx + [\frac{de}{dx}(e-\Pi e)]|_{x_{i-1}}^{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\frac{d^2e}{dx^2})(e-\Pi e)\ dx \end{aligned} \tag{0.18}$$

因为

$$-\frac{d^2e}{dx^2} = -\frac{d^2(u-u_h)}{dx^2} = -\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u_h}{dx^2} = f + \frac{d^2u_h}{dx^2}$$

又由 Cauchy-Schwarz 不等式，以及标准误差估计，有

$$
\begin{aligned}
\|\frac{de}{dx}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f + \frac{d^2 u_h}{dx^2})(e - \Pi e)\ dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|f + \frac{d^2 u}{dx^2}\|_{L^2(\Omega_i)} \|e - \Pi e\|_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|f + \frac{d^2 u}{dx^2}\|_{L^2(\Omega_i)} C h_i \|\frac{de}{dx}\|_{L^2(\Omega_i)} \\
&= C \sum_{i=1}^n h_i \|f + \frac{d^2 u_h}{dx^2}\|_{L^2(\Omega_i)} \|\frac{de}{dx}\|_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leq C (\sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + \frac{d^2 u_h}{dx^2}\|_{L^2(\Omega_i)}^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^n \|\frac{de}{dx}\|_{L^2(\Omega_i)}^2)^{1/2} \\
&= C (\sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + \frac{d^2 u_h}{dx^2}\|_{L^2(\Omega_i)}^2)^{1/2} \|\frac{de}{dx}\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{0.19}
$$

因此

$$
\|\frac{de}{dx}\|_{L^2(\Omega)} \leq C (\sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + \frac{d^2 u_h}{dx^2}\|_{L^2(\Omega_i)}^2)^{1/2} \tag{0.20}
$$

1 问题与思考

1.1 有限元方法的基本概念

(a) 证明：若 $f \in C^0([0, L])$, $u \in V \cap C^2([0, L])$ 是问题 (0.3) 的解，则它也是问题 (0.1) 的解. 称 (0.3) 为 (0.1) 的变分问题.

(b) 证明：有限元问题 (0.6) 的解 u_h，满足

$$
\int_\Omega \frac{d(u - u_h)}{dx} \frac{dv_h}{dx}\ dx = 0 \quad \forall v_h \in V_{h,0}
$$

（选做）

(c) 写出当 L=1，f=1 时，问题（0.1）的变分形式；仍然使用有限元空间 $V_{h,0}$ 进行离散，写出相应线性系统的刚度矩阵 A，并使用追赶法求解 $A\mu = b$. 要求：

- 写出变分形式;
- 写出当单元个数为 5 的时候 A 的具体形式;
- 写一个有限元程序，在单元数 n=10,20,40,80 的时候，采用均匀剖分，计算相应的 A，并用追赶法求解线性系统 $A\mu = b$，分别画出有限元解 μ 的图像.（数值积分公式仍然使用梯形公式）

- n=2,4,8,16,32,64 时（均匀剖分），真解 $u=x(1-x)/2$, 计算误差 $\|\frac{d(u-u_h)}{dx}\|^2_{L^2(\Omega)}$, 观察 n 增加时，误差变化情况，并做表格，其中

$$\|\frac{d(u-u_h)}{dx}\|^2_{L^2(\Omega)} = (\int_0^1 (\frac{d(u-u_h)}{dx})^2 \ dx)^{1/2}$$

(数值积分公式仍然使用梯形公式).

1.2 数值方法与自适应

注: 以下是一整道题拆分成了若干问，报告中简单写最终你的自适应算法，计算结果和自适应网格加密情况（画图即可），并与 f=1 时的网格加密情况进行对比。

(e1) step1: L=1，$f=exp(-100(x-0.5)^2)$ $0<x<1$，且 $u(0)=u(1)=0$，考虑方程 (0.1); 当 n=10 时用有限元程序求解该问题，并画出有限元解；

(e2) step2: while $n<20$, 编程计算各个单元（小区间 $[x_i,x_{i+1}]$）上的 $\eta_i = h_i(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^2(x)\ dx)^{1/2}$ 的值（数值积分仍然使用梯形公式）, 将所有 η_i 存入向量 η，$\eta=[\eta_1,\eta_2,...,\eta_n]$.

(e3) step3: 设加密参数为 α，取 $\alpha=0.5$，如果

$$\eta_i > \alpha \max_{i=1,..,n}(\eta_i)$$

将所在区间对分加密（将 $[x_i,x_{i+1}]$ 中点作为一个新的节点），计算有限元解（转 step2）;

(e4) 考虑 step2 中，$n<40,80$，$\alpha=0.5$ 不变，观察有限元解及其网格的图像；

(e5) 考虑 step3 中，n=40 不变，$\alpha=0.1,0.25,0.5,0.9$，观察有限元解及其网格的图像；

1.3 自适应

(f) 考虑方程:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad \Omega=[0,1] \\ \frac{du}{dx}|_{x=0} = \kappa_0 u(0) \\ \frac{du}{dx}|_{x=1} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $f=exp(-100(x-0.5)^2)$,$\kappa_0=10^6$.

- 请写出该问题的变分形式（Hint: $u(0)\neq 0$,$u(1)\neq 0$）
- 令 V_h 为分片线性有限元空间，最多单元个数分别为 8,16,32,64 时，使用题目（e）中的自适应有限元算法，观察自适应有限元解及其网格变化情况

2 二维热传导方程的数值方法

已知如下热传导方程：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad 0 < x, y < 1, 0 < t \leq 1, \\ u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, \Omega = (0,1) \times (0,1), 0 < t \leq 1, \\ u(x, y, 0) = sin(\pi x) sin(\pi y). \end{cases}$$

问题的真解为:$u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} sin(\pi x) sin(\pi y)$.

要求如下：

1. 分别用显式、隐式（见讲义）和 Crank-Nicolson 格式离散方程计算方程的近似解，选择不同的网格比，比较三种格式的稳定性.
2. 对隐式格式，取空间步长 $h = h_x = h_y = \frac{1}{128}$, 时间步长 $k = \frac{1}{512}$, 比较用平方根法、Gauss-Seidel 迭代法、共轭梯度法（多重网格方法，选做）求解线性方程时从初始时间层计算到最后时间层的总计算时间. 对于迭代法，用稀疏存储方法存储矩阵，使用上一个时间层的离散解为初始值，迭代的终止条件是残量 (向量) 的 2 范数小于等于初始残量 (向量) 的 2 范数的 10^{-6} 倍.
3. 对三种离散格式，取空间步长为 $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{512}$，选取适当的时间步长 k 使得既能保持格式的稳定性，又有最优收敛性 (对空间步长), 在最后一个时间层上，对离散解 (向量), 用插值方法 (见讲义) 得到一个分片双线性函数，分别记为 $u_h^{(i)}(x, y, 1)$, $i = 1, 2, 3$, 再利用数值积分方法计算误差

$$\|u(x,y,1) - u_h^{(i)}(x,y,1)\|_0 = \Big(\int_\Omega (u(x,y,1) - u_h^{(i)}(x,y,1))^2 dxdy \Big)^{1/2},$$

   并画出误差图 (横坐标为空间步长, 纵坐标为误差，取对数坐标).

3 非线性方程求根

函数

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} - \frac{1}{2} \qquad -5 \leq x \leq 5 \tag{3.1}$$

函数图像如下

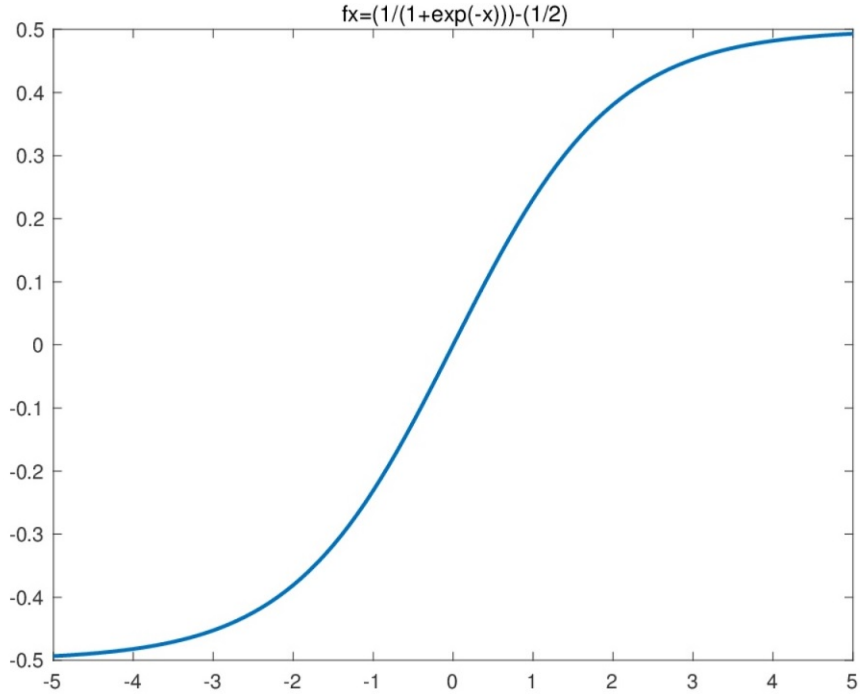


图 1: $f(x)$ 函数图像

使用下列方法求非线性方程 $f(x)=0$ 的根。

一. 当 $x_0=-2.17731898$ 时

(1) 使用 Newton 法，令 $tol=10^{-3}$，当 $|f(x)|<tol$ 时，迭代步数为多少，并写出求得的近似解 x.

(2) 使用同伦法求解. 分别使用显式 Euler，隐式 Euler，梯形公式（或其它积分公式），4 阶 Runge-Kutta 方法求解常微分方程，取步长 $h=0.1$，求得 $\hat{x}$. 以 $\hat{x}$ 为初值，进行 Newton 迭代，此时考虑 $tol=10^{-16}$，求相应迭代步数，并写出求得的近似解.

二. 当 $x_0=-4$ 时

(1) 令 $tol=10^{-3}$，Newton 法的收敛情况如何?

(2) 使用同伦法求解，分别使用显式 Euler，隐式 Euler，梯形公式（或其它积分公式），4 阶 Runge-Kutta 方法求解常微分方程，取步长 $h=0.1$，求得 $\hat{x}$. 以 $\hat{x}$ 为初值，进行 Newton 迭代，仍旧考虑 $tol=10^{-16}$，求相应迭代步数，并写出求得的近似解.

注： 请根据计算结果对上述方法进行简要总结.

4 指派问题

考虑指派 n 个员工去完成 n 个任务, 每个人恰好完成一个任务. 已知第 i 个员工完成第 j 个任务的成本为 $c_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \cdots, n$. 求一个指派方案, 使得总成本之和最小.

用数学语言表述: 给定成本矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c_{ij} \geq 0$, 求解如下优化问题:

$$\begin{aligned}
\min_{\{x_{ij}\}_{i,j=1}^n} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \\
& \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

要求:

1. 问题规模 n 至少为 512.
2. 成本矩阵 C 的元素 c_{ij} 为 $(0, 100)$ 中均匀分布的随机数.
3. 使用课程第 9 节的嵌套分划方法求解该问题, 详细描述你的算法的分划、采样、终止准则等细节.
4. 实现另一个求解指派问题的经典方法 (如: 匈牙利算法等) 并进行效率和最优解的对比.

如果你不是毕业生，提交大作业的时间是 **2019** 年 **7** 月 **31** 日前；如果你是毕业生，提交大作业的时间是 **2019** 年 **6** 月 **24** 日前**.**