有限元的定义 & 插值和基函数

有限元的定义

在 R^n 中的有限元是一个三重集合 (K, Σ, P)，这里 K，Σ 和 P 有下列意义和关系：

(i) K 是 R^n 中的一个子集，有非空内部和有 Lipschitz-连续的边界；

(ii) Σ 是一组定义在空间 $C^\infty(K)$ 上的线性独立的线性形式 φ_i，$1\leqslant i\leqslant N$，的一个有限集，这称为问题中的有限元的自由度；

(iii) P 是函数 p: $K\to R$ 的函数空间，它使集合 Σ 按下述意义 P-唯一可解：给定任何一组实标量 α_i，$1\leqslant i\leqslant N$，存在唯一的一个函数 $p\in P$，满足

西阿莱Ciarlet-有限元素法的数值分析, 上海科学技术出版社，1978

有限元的定义

(1) $$\varphi_i(p)=\alpha_i,\quad 1\leqslant i\leqslant N;$$

等价地，存在 N 个函数 $p_i\in P$，$1\leqslant i\leqslant N$，满足

(2) $$\varphi_j(p_i)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant j\leqslant N,$$

它们称为有限元的基函数，因为我们有

(3) $$\forall p\in P,\quad p=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(p)p_i.$$

作几点关于定义的说明．有时我们常称 K 本身是一个有限元．关于集合 K 和边界的假设(i)保证了(ii)中的空间 $C^\infty(K)$ 可以不含糊地定义．另外，集 Σ 的 P-唯一可解性，等价于这样的事实：N 个线性形式 φ_i 对空间 P 的约束，形成 P 的共轭空间中的一组基．因此，$\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ 和 $\{p_i\}_{i=1}^{N}$ 可设想为在代数意义下的一组对偶基．最后，我们偶而把 Σ，P，φ_i，p_i 写成 Σ_K，P_K，φ_{iK}，p_{iK}．

P-插值

给出一个有限元(K, Σ, P)，我们可以考虑对任何充分光滑的函数 v: $K \to R$ 的 P-插值(函数)，记为 Πv 或 $\Pi_K v$，确定如下：

(5) $\Pi v \in P$ ① 且 $\varphi_i(\Pi v) = \varphi_i(v)$， $1 \leqslant i \leqslant N$.

所以，P-插值可以表示成

(6) $$\Pi v = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(v) p_i.$$

这样，我们定义了一个 P-插值算子 Π: $C^\infty(K) \to P$，也记为

插值和基函数

采用插值函数作位移模式是有限元法的一个重要特点. 提高插值精度(即用高次插值)是提高有限元法精度的重要手段. 在应

逼近定理 设 $f(x)$ 是给定在 Ω 上的函数, 它使得 $|f|_{t,\Omega}$ $(0\leqslant t\leqslant k+1)$ 有意义, Πf① 是函数 $f(x)$ 的插值函数, 它在足够光滑的区域 $\bar{\Omega}$ 上有 $l-1$ 阶连续微商, 而 l 阶微商在 $\bar{\Omega}$ 上分块连续. 如果它对于 k 次多项式 $p_k(x)$ 是准确的, 即 $\Pi p_k=p_k(x)$, 则有估计式

$$|\Pi f(x)-f(x)|_{s,\Omega}\leqslant Mh^{k+1-s}|f|_{k+1,\Omega}$$

$$0\leqslant s\leqslant \min(k+1,\ l) \tag{2.1}$$

其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, h 是所有插值单元的最大直径, M 是与 h, f 无关的常数.

$$|f|_{s,\Omega}=\sqrt{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=s}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1\cdots dx_n}$$

姜礼尚-庞之垣,FEM及其理论基础,人教社, 1979

插值和基函数

1.1 线性插值(Lagrange 型)与长度坐标

我们把插值分成两大类，如果只要求插值多项式本身在插值点上取已知值，那么我们称它为 Lagrange 型插值. 如果还要求插值多项式的微商（包括一阶、二阶微商或法向微商…）在插值点上取已知值，那么称它为 Hermite 型插值.

设区间$[a, b]$被分成若干单元，节点是$a=x_1<x_2<\cdots<x_N=b$，已知函数 $f(x)\in C_{[a,b]}$在各节点的值，试求插值函数 $L_f^{(1)}(x)$②，使得

1° $L_f^{(1)}(x_i)=f(x_i) \quad (i=1, 2, \cdots, N)$

2° 在每一单元 $e_i=[x_i, x_{i+1}]$ $(i=1, 2, \cdots, N-1)$ 上 $L_f^{(1)}(x)$ 是一次式.

显然要构造 $L_f^{(1)}(x)$只须写出它在每个单元 e_i 上的表达式.

插值和基函数

$$L_f^{(1)}(x)=f(x_i)\frac{x_{i+1}-x}{L_i}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{L_i}\quad(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1})$$

其中 L_i 表示单元 e_i 的长度 $x_{i+1}-x_i$.

线性插值函数 $L_f^{(1)}(x)$ 具有以下性质:

(i) $L_f^{(1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有分段连续微商.

(ii) 若 $f(x)$ 取作一次多项式, 则 $L_f^{(1)}(x)$ 就是它本身. 即 $L_{p_1}^{(1)}(x)=p_1(x)$, 从而由逼近定理我们有估计:

$$|L_f^{(1)}(x)-f(x)|_{s,[a,b]}\leqslant Mh^{2-s}|f|_{2,[a,b]}\quad(0\leqslant s\leqslant 1)$$

其中 $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1} L_i$. 当然, 我们这里要假定不等式左右两端出现的量都要有意义, 即 $|f(x)|_{s,[a,b]}(0\leqslant s\leqslant 2)$ 有意义. 以后凡在谈到逼近度时都蕴含此类假定, 不再赘述.

(iii) $L_f^{(1)}(x)$ 的总体自由度: N.

插值和基函数

若用 Q_1, Q_2 和 Q 分别表示坐标为 x_i, x_{i+1} 和 x 的点，并令

$$\lambda_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{L_i}, \qquad \lambda_2(x) = \frac{x - x_i}{L_i}$$

则 $L_f^{(1)}(x)$ 的表达式可改写成

$$L_f^{(1)}(Q) = \sum_{j=1}^{2} f(Q_j)\lambda_j(Q) \quad Q \in e_i$$

λ_1, λ_2 就是在单元 e_i 上线性插值的基函数．它们恰好等于长度比 $\lambda_1 = |\overline{QQ_2}| / |\overline{Q_1Q_2}|, \lambda_2 = |\overline{QQ_1}| / |\overline{Q_1Q_2}|$.

线性插值基函数 λ_1, λ_2 在一维插值中起着重要作用．在讨论高次插值之前，我们先看看它们的性质．

(1) 若记点 Q_1, Q_2 的坐标为 x_1, x_2 则有

$$\begin{cases} x = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

插值和基函数

这两个关系式可由线性插值对一次式准确而得到. 它说明坐标 x 与满足关系式 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的 (λ_1, λ_2) 之间有 1—1 对应关系, 从而 (λ_1, λ_2) 和 x 一样可作为坐标. 由于它们正好等于两长度之比, 故亦称为长度坐标. 当然长度坐标中只有一个变量是独立的.

(2) 单元顶点 Q_1, Q_2 和形心的长度坐标分别是 $(1, 0)$, $(0, 1)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(3) 任一 k 次多项式 $p_k(x)$ 是 λ_1, λ_2 的齐 k 次多项式, 反之亦然.

只须对 $p_k(x)$ 的任一项 x^r $(r\leqslant k)$ 乘以 $(\lambda_1+\lambda_2)^{k-r}=1$ 便可得到 λ_1, λ_2 的齐 k 次式. 反之显然.

顺便指出, 把 k 次多项式 $p_k(x)$ 化成 λ_1, λ_2 的 k 次多项式时虽可以有多种不同的形式, 但齐 k 次多项式却是唯一的. 为此只须证明若对任何 $\lambda_1\in[0, 1]$ 有 $\sum_{n=0}^{k} a_n\lambda_1^n(1-\lambda_1)^{k-n}=0$, 便必有 $a_n=0$ $(n=0, 1, \cdots, k)$. 事实上, 在开区间 $(0, 1)$ 中任取 $k+1$ 个不同点 α_i $(i=0, 1, \cdots, k)$, 由于

插值和基函数

$$\sum_{n=0}^{k} a_n \alpha_i^n (1-\alpha_i)^{k-n} = 0 \quad (i=0,1,\cdots,k) \qquad (2$$

而系数行列式为

$$\begin{vmatrix} (1-\alpha_0)^k & (1-\alpha_0)^{k-1}\alpha_0 & \cdots & \alpha_0^k \\ (1-\alpha_1)^k & (1-\alpha_1)^{k-1}\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-\alpha_k)^k & (1-\alpha_k)^{k-1}\alpha_k & \cdots & \alpha_k^k \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=0}^{k} (1-\alpha_i)^k \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_0} & \cdots & \left(\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^k \\ 1 & \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1} & \cdots & \left(\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \dfrac{\alpha_k}{1-\alpha_k} & \cdots & \left(\dfrac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\right)^k \end{vmatrix}$$

插值和基函数

$$=\prod_{i=0}^{k}(1-\alpha_i)^k\prod_{0\leqslant i<j\leqslant k}\left(\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}-\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right)\neq 0$$

这只须注意 $i\neq j$ 时 $\alpha_i\neq\alpha_j$，便有$\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\neq\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}$. 故齐次方程组(2.2)的解 $a_n=0$ $(n=0, 1, \cdots, k)$.

（4）若取 λ_1 为独立变量($\lambda_2=1-\lambda_1$)，则

$$\frac{dx}{d\lambda_1}=x_1-x_2=-L$$

其中 L 是以 Q_1, Q_2 为顶点的单元的长度.

一般说来，把对 x 的积分换成对长度坐标的积分常常是方便的. 特别，当被积函数本身已由长度坐标表出的时候.

$$\int_{\overline{Q_1Q_2}}F(\lambda_1(x), \lambda_2(x))\,dx=\int_0^1 F(\lambda_1, 1-\lambda_1)\left|\frac{dx}{d\lambda_1}\right|d\lambda_1$$

插值和基函数

$$=L\int_0^1 F(\lambda_1,1-\lambda_1)d\lambda_1 \tag{2.3}$$

从而把任一区间$\overline{Q_1Q_2}$上的积分换到了标准区间[0, 1]上.

注意 Euler 积分公式

$$\int_0^1 t^m(1-t)^n dt=\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}dt$$

$$=\cdots=\frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)}\int_0^1 t^{m+n}dt$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!} \tag{2.4}$$

利用式(2.3)直接可得

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\overline{Q_1Q_2}}\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}dx&=L\int_0^1\lambda_1^{\alpha_1}(1-\lambda_1)^{\alpha_2}d\lambda_1\\&=\frac{\alpha_1!\alpha_2!}{(\alpha_1+\alpha_2+1)!}L\end{aligned}} \tag{2.5}$$

这个公式在计算线单元的“刚度系数”和“荷载向量”时常常是很有

插值和基函数

用的.

1.2 高次 Lagrange 型插值

设已知函数 $f(x)\in C_{[a,b]}$ 在各单元顶点和中点的函数值 $f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 和 $f(\bar{x}_i)$ $(i=1,2,\cdots,N-1)$，试求二次插值函数 $L_f^{(2)}(x)$ 使得

1° $L_f^{(2)}(x_i)=f(x_i)\quad(i=1,2,\cdots,N)$

$L_f^{(2)}(\bar{x}_i)=f(\bar{x}_i)\quad(i=1,2,\cdots,N-1)$

2° 在每个单元 $e_i:[x_i,\ x_{i+1}]$ $(i=1,\ \cdots,\ N-1)$ 上 $L_f^{(2)}(x)$ 是二次式.

这里所以要给出在单元中点 $\bar{x}_i$ 的函数值，是因为一个二次多项式 $a_1+a_2x+a_3x^2$ 有三个参数，若只给定两端点的函数值，它们不可能唯一确定.

插值和基函数

在每个单元中给定了三点的函数值(两端及中点)以后，二次多项式便可唯一确定了．通常证明唯一性的方法是先直接写出 a_1, a_2, a_3 应满足的代数方程组

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 = f(x_i) \\ a_1 + a_2 x_{i+1} + a_3 x_{i+1}^2 = f(x_{i+1}) \\ a_1 + a_2 \bar{x}_i + a_3 \bar{x}_i^2 = f(\bar{x}_i) \end{cases}$$

再证明其系数行列式不为零

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 \\ 1 & \bar{x}_i & \bar{x}_i^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

但这种办法一般说来是比较复杂的，特别在处理高维插值时更加明显．下面我们给出一个另外的证明方法，它既简便又容易推广．

插值和基函数

要证明插值函数 $L_f^{(2)}(x)$ 的唯一性，只须指出：若

$$f(x_i)=f(x_{i+1})=f(\bar{x}_i)=0$$

则在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上二次插值函数 $L_f^{(2)}(x)\equiv 0$. 事实上，注意 $L_f^{(2)}(x)$ 是一多项式且由假设有

$$L_f^{(2)}(x_i)=f(x_i)=0$$

$$L_f^{(2)}(x_{i+1})=f(x_{i+1})=0$$

$$L_f^{(2)}(\bar{x}_i)=f(\bar{x}_i)=0$$

故其必然同时含有因子 $(x-x_i)$, $(x-x_{i+1})$, $(x-\bar{x}_i)$, 即

$$L_f^{(2)}(x)=C(x)(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-\bar{x}_i)$$

但因 $L_f^{(2)}(x)$ 是二次式，故必有 $C(x)\equiv 0$, 从而 $L_f^{(2)}(x)\equiv 0$.

欲构造 $L_f^{(2)}(x)$ 只须在每个单元 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造二次函数 $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$, 它满足

$$\boxed{\begin{aligned}&N_1(x_i)=1, \quad N_1(x_{i+1})=N_1(\bar{x}_i)=0\\&N_2(x_{i+1})=1, \quad N_2(x_i)=N_2(\bar{x}_i)=0\\&N_3(\bar{x}_i)=1, \quad N_3(x_i)=N_3(x_{i+1})=0\end{aligned}}$$

插值和基函数

有了这组函数以后，在单元$[x_i, x_{i+1}]$上立即有

$$L_f^{(2)}(x)=f(x_i)N_1(x)+f(x_{i+1})N_2(x)+f(\bar{x}_i)N_3(x)$$

这里，我们把$N_1(x)$，$N_2(x)$，$N_3(x)$称为单元 e_i 上**二次插值的基函数**，它很容易直接从长度坐标得出.

以 $N_1(x)$为例， 因要满足 $N_1(x_{i+1})=N_1(\bar{x}_i)=0$. 由长度坐标性质(2)它必含有因子 $\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)$. 乘以适当系数使其再满足 $N_1(x_i)=1$, 便有

$$N_1(x)=\frac{\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)}{\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)\Big|_{\lambda_1=1}}=2\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)$$

同理

$$N_2(x)=2\lambda_2\left(\lambda_2-\frac{1}{2}\right),\quad N_3(x)=4\lambda_1\lambda_2$$

插值和基函数

二次插值函数 $L_f^{(2)}(x)$ 具有如下性质:

(i) $L_f^{(2)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且有分段连续微商.

(ii) 当 $f(x)$ 是二次多项式时，$L_f^{(2)}(x)$ 就是 $f(x)$ 本身，即

$$L_{p_2}^{(2)}(x)=p_2(x)$$

(与线性插值相仿，这里插值算子 Π: $f(x)\to L_f^{(2)}(x)$，由于以下对于插值算子 Π 的定义都是相仿的，我们就不一一声明了). 从而由逼近定理有估计

$$|L_f^{(2)}(x)-f(x)|_{s,[a,b]}\leqslant Mh^{3-s}|f|_{3,[a,b]}\quad(0\leqslant s\leqslant 1)$$

(iii) $L_f^{(2)}$ 的总体自由度: $2N-1$.

一般说来，如果在每个单元 $e_i=[x_i,\ x_{i+1}]$ 上给定了函数在 $k+1$ 个节点 $x=x_i^{(j)}$ $(j=1,2,\cdots,\ k+1,\ \ x_i^{(1)}=x_i,\ \ x_i^{(k+1)}=x_{i+1})$ 上的值，总可构造 k 次 Lagrange 型插值函数 $L_f^{(k)}(x)$ 使得

1° $L_f^{(k)}(x_i^{(j)})=f(x_i^{(j)})\quad(i=1,\cdots,N;\ j=1,\cdots,k+1)$

2° 在每个单元 e_i 上 $L_f^{(k)}(x)$ 是 k 次式.

插值和基函数

相应的基函数亦不难用长度坐标表出. 随着次数 k 的增加, 插值函数逼近的精度会有所提高, 但光滑性却未增加, 一般仍只能属于 $C_{[a,b]}$. 如果把它取作位移模式, 那么只有位移连续, 而转角(即位移的微商)一般仍是不连续的, 因此以它作为梁单元的位移模式显然是不合适的. 为此, 我们需要在单元顶点上增加微商的条件, 即采用 Hermite 型插值.

1.3 三次 Hermite 型插值

已知函数 $f(x)\in C^1_{[a,b]}$ 在每单元端点的函数值 $f(x_i)$ 和微商值 $f'(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$, 求 $H_f(x)$ 使得

1° $H_f(x_i)=f(x_i), H_f'(x_i)=f'(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$

2° 在每一单元 $e_i=[x_i,x_{i+1}]$ $(i=1,\cdots,N-1)$ 上 $H_f(x)$ 是三次式.

在每一单元 e_i 上三次式 $H_f(x)$ 可由单元两端的四个条件唯一确定. 事实上, 由

插值和基函数

$$H_f(x_i)=H_f'(x_i)=0$$

知多项式 $H_f(x)$ 必含有因子 $(x-x_i)^2$. 同理, 还必含有因子 $(x-x_{i+1})^2$. 从而必有 $H_f(x)\equiv 0$, 否则它至少是一四次式.

为构造 $H_f(x)$, 只须在每单元 e_i 上构造四个基函数 $N_1(x)$, $N_2(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$. 它们都是三次式, 且满足:

$$\boxed{\begin{aligned}
&N_1(x_i)=1, \quad N_1(x_{i+1})=N_1'(x_i)=N_1'(x_{i+1})=0\\
&N_2(x_{i+1})=1, \quad N_2(x_i)=N_2'(x_i)=N_2'(x_{i+1})=0\\
&M_1'(x_i)=1, \quad M_1(x_i)=M_1(x_{i+1})=M_1'(x_{i+1})=0\\
&M_2'(x_{i+1})=1, \quad M_2(x_i)=M_2(x_{i+1})=M_2'(x_i)=0
\end{aligned}}$$

我们仍采用长度坐标. 注意到 $\dfrac{d\lambda_1}{dx}=-\dfrac{1}{L_i}$, 则由

$$N_1(x_{i+1})=N_1'(x_{i+1})=0$$

知

$$N_1|_{\lambda_1=0}=\left.\frac{dN_1}{d\lambda_1}\right|_{\lambda_1=0}=0$$

插值和基函数

故 N_1 必含有因子 λ_1^2，再从长度坐标性质(3)知

$$N_1=\lambda_1^2(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)$$

$$N_1'=\frac{dN_1}{d\lambda_1}\cdot\frac{d\lambda_1}{dx}=-\frac{1}{L_i}[2\lambda_1(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)+\lambda_1^2(\alpha-\beta)]$$

利用条件 $N_1|_{\lambda_1=1}=1$, $N_1'|_{\lambda_1=1}=0$ 有

$$\alpha=1,\quad \beta=3\alpha=3$$

即

$$N_1=\lambda_1^2(\lambda_1+3\lambda_2)$$

类似可得

$$N_2=\lambda_2^2(\lambda_2+3\lambda_1)$$

$$M_1=L_i\lambda_1^2\lambda_2,\quad M_2=-L_i\lambda_1\lambda_2^2$$

(见图 2-1, 2-2) 有了这四个基函数后，在单元 e_i 上便有

$$\boxed{\begin{aligned}H_f(x)=&f(x_i)N_1(x)+f(x_{i+1})N_2(x)\\&+f'(x_i)M_1(x)+f'(x_{i+1})M_2(x)\end{aligned}}$$

插值和基函数

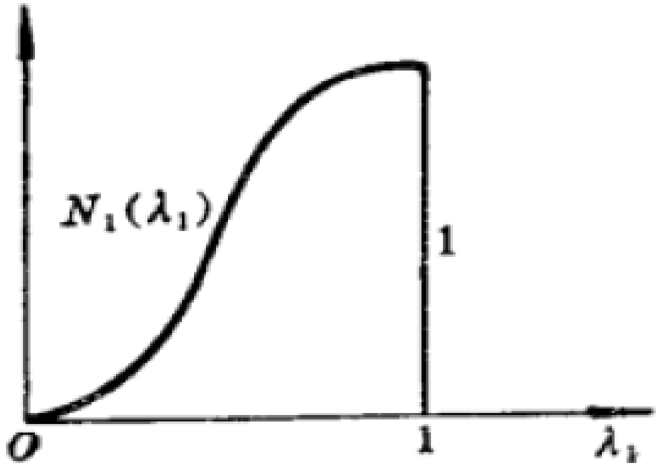

图 2-1

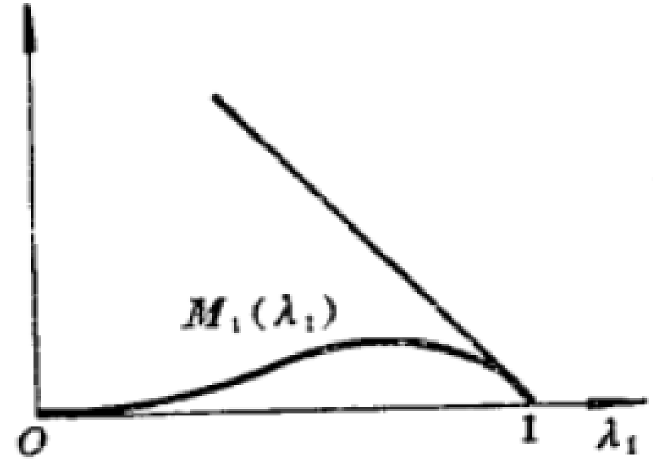

图 2-2

Hermite 三次插值函数 $H_f(x)$ 具有以下性质:

(i) $H_f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续微商和分段连续的二阶微商.

(ii) 如果 $f(x)$ 是三次多项式，则 $H_f(x)$ 就是 $f(x)$ 本身，即 $H_{p_3}(x)=p_3(x)$. 从而有估计式

$$|H_f(x)-f(x)|_{s,[a,b]}\leqslant Mh^{4-s}|f|_{4,[a,b]}\quad(0\leqslant s\leqslant 2)$$

(iii) $H_f(x)$ 的总体自由度: $2N$.

插值和基函数

二维插值是一维插值的自然推广. 它们有许多相同之处, 如唯一性的证明方法和基函数的构造. 但区域维数升高了, 势必对插值带来新的特点和困难. 例如

1° 二维插值与区域剖分紧密相关, 主要有三角形、矩形和任意四边形三种剖分.

2° 连接两个单元的将不只是给定插值条件的节点, 而是一条含有节点的公共边, 因此插值函数在节点上的连续可微性, 不能保证它在整个公共边上的连续可微性. 从而对每个插值函数在整个区域上的连续可微性必须认真考虑.

3° 插值点既可以是单元顶点, 又可以是单元的边界点, 甚至

插值和基函数

内点. 因此如何根据已给的剖分和插值函数, 估计插值函数的总体自由度就需要新的知识. 这里我们给出下面的引理:

引理 设 NP, NE, NS 分别表示剖分后顶点、单元和边的数目, 则有

三角形剖分: $NP:NE:NS \approx 1:2:3$,

四边形剖分: $NP:NE:NS \approx 1:1:2$.

2.1 线性插值(Lagrange 型)与面积坐标

已知 $f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ 在各单元顶点的函数值, 求函数 $L_f^{(1)}(x,y)$, 使在任一单元 $e = \triangle Q_1Q_2Q_3$ 上满足

1° $L_f^{(1)}(Q_i) = f(Q_i)$ $(i=1,2,3)$,

2° $L_f^{(1)}(x,y)$ 是一次式.

插值和基函数

唯一可解性 因一次式 $z=a_1+a_2x+a_3y$ 表示空间平面，而根据插值条件，要求它通过三个定点 $(x_i, y_i, f(Q_i))$ $(i=1,2,3)$ ((x_i, y_i) 是点 Q_i 的坐标)，从几何上看，由于 Q_1, Q_2, Q_3 三点不在一条直线上，这样的平面显然是唯一确定的。

表达式 只须对单元 e 建立基函数 $N_i^{(1)}(x,y)$ $(i=1,2,3)$，它们都是一次式且满足

$$N_i^{(1)}(Q_j)=\delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

基函数可取为

$$N_i^{(1)}(x,y)=\frac{1}{2\triangle_e}(a_ix+b_iy+c_i) \quad (i=1,2,3)$$

从而在单元 e 上有

$$L_f^{(1)}(x,y)=\sum_{i=1}^{3} f(Q_i)N_i^{(1)}(x,y)$$

插值和基函数

若在 e 上定义 $[N]_e=[N_1^{(1)}\quad N_2^{(1)}\quad N_3^{(1)}]$

则

$$L_f^{(1)}(x,y)=[N]_e\{F_1\}_e$$

其中

$$\{F_1\}_e=[f(Q_1)\quad f(Q_2)\quad f(Q_3)]^T$$

连续性 我们已经知道，三角形上的线性插值在一条边上的值就等于由这条边两端节点所作的线性插值．由一维插值的唯一性即知在任何两个三角形单元的公共边界上 $L_f^{(1)}(x,y)$ 连续，从而在整个 $\overline{\Omega}$ 上亦连续．

逼近度 由插值的唯一性有

$$L_{p_1}^{(1)}(x,y)=p_1(x,y)$$

从而由逼近定理有估计

$$|L_f^{(1)}(x,y)-f(x,y)|_{s,\Omega}\leqslant Mh^{2-s}|f|_{2,\Omega}\quad(0\leqslant s\leqslant 1)$$

总体自由度 NP

插值和基函数

面积坐标 同一维插值相类似，线性插值基函数 $N_i^{(1)}$ $(i=1, 2, 3)$ 在三角形剖分中也起着重要作用. 在考虑高次插值之前，我们先对它们作较深入的讨论. 以 $N_1^{(1)}$ 为例，由(1.37)

$$N_1^{(1)}(x,y)=\frac{1}{2\triangle_e}(a_1x+b_1y+c_1)$$

$$=\frac{1}{2\triangle_e}\left(\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2\triangle_e}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=\frac{\text{三角形 } Q\,Q_2Q_3 \text{ 的面积}}{\text{三角形 } Q_1Q_2Q_3 \text{ 的面积}}$$

同理

$$N_2^{(1)}(x,y)=\frac{\text{三角形} Q_1QQ_3 \text{ 的面积}}{\text{三角形} Q_1Q_2Q_3 \text{ 的面积}}$$

插值和基函数

$$N_3^{(1)}(x,y)=\frac{\text{三角形}Q_1Q_2Q\text{ 的面积}}{\text{三角形}Q_1Q_2Q_3\text{ 的面积}}$$

命

$$\lambda_i(x,y)\equiv N_i^{(1)}(x,y)$$

$$(i=1,2,3)$$

再由(1.40)—(1.42)有

$$\begin{cases}1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & (2.6)\\ x=x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+x_3\lambda_3 & (2.7)\\ y=y_1\lambda_1+y_2\lambda_2+y_3\lambda_3 & (2.8)\end{cases}$$

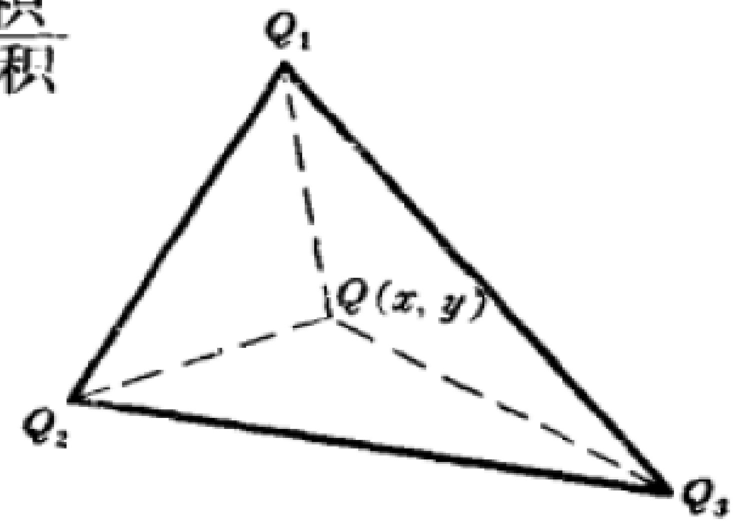

图 2-3

由此易见满足(2.6)式的$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$和$(x,y)$是1—1对应的，从而也可以把$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$作为坐标。考虑到它们的几何意义，通常称为**面积坐标**。有时也称为**重心坐标**或**齐次坐标**。当然，还要强调指出面积坐标中独立的自变量只有两个，它们须受方程

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

插值和基函数

的约束．若以 λ_1, λ_2 为独立变量，则正如在第一章 § 3 所见，它就相当于作线性变换(1.43)，以把 $x-y$ 平面中的各单元 e 都变为 $\lambda_1-\lambda_2$ 平面上的标准三角形 OAB.

面积坐标还有如下性质：

(1) 三角形三顶点 Q_1, Q_2, Q_3 和形心的面积坐标分别是

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 和 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(2) 三角形三条边 $\overline{Q_1Q_2}$，$\overline{Q_2Q_3}$，$\overline{Q_3Q_1}$ 的方程分别是

$$\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0$$

(3) 设过三角形内任一点 Q 作平行于 $\overline{Q_2Q_3}$ 的直线分别交 $\overline{Q_1Q_2}$，$\overline{Q_1Q_3}$ 两边于 B_3, B_2 两点，则在线段 $\overline{B_3B_2}$ 上恒有

$$\lambda_1 = \frac{|\overline{B_3Q_2}|}{|\overline{Q_1Q_2}|} = \frac{|\overline{B_2Q_3}|}{|\overline{Q_1Q_3}|} = \text{const}$$

插值和基函数

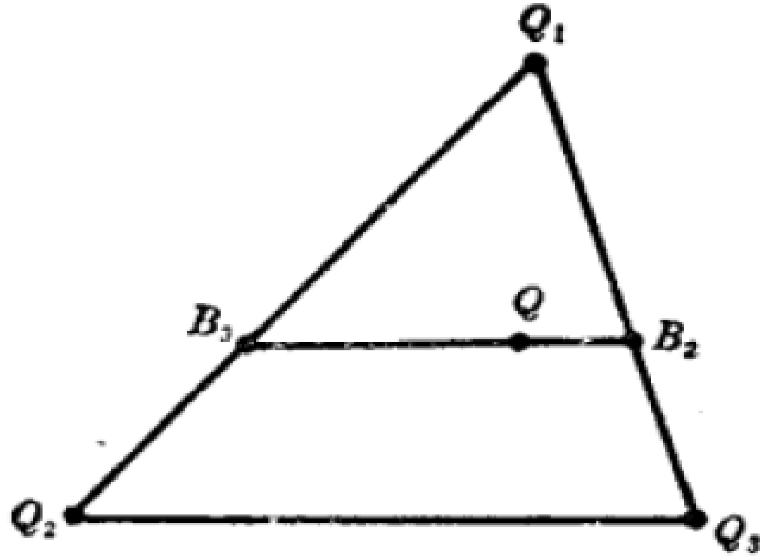

图 2-4

作平行于另外两边的直线有完全类似的结果.

（4）任一 x, y 的 k 次多项式是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的齐 k 次多项式, 反之亦然.

事实上, 只须对每个 r $(r \leqslant k)$ 次单项式乘以 $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^{k-r}$ 再展开便得到 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的齐 k 次多项式. 反之是显然的.

与一维长度坐标的情况类似, 这样的齐 k 次式是唯一的.

插值和基函数

（5）若取 λ_1, λ_2 为独立变量，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_1}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda_1}=(x_1-x_3)\dfrac{\partial}{\partial x}+(y_1-y_3)\dfrac{\partial}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda_2}=(x_2-x_3)\dfrac{\partial}{\partial x}+(y_2-y_3)\dfrac{\partial}{\partial y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}1=(x_1-x_3)\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}+(y_1-y_3)\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y}\\[2ex]0=(x_2-x_3)\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}+(y_2-y_3)\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y}\end{cases}$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}=\frac{1}{2\triangle_e}(y_2-y_3),\quad \frac{\partial\lambda_1}{\partial y}=\frac{1}{2\triangle_e}(x_3-x_2) \tag{2.9}$$

同理有

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}=\frac{1}{2\triangle_e}(y_3-y_1),\qquad \frac{\partial\lambda_2}{\partial y}=\frac{1}{2\triangle_e}(x_1-x_3) \tag{2.10}$$

在有限元法计算中，如果把插值函数用面积坐标表示，则在进

插值和基函数

行积分计算时常带来极大方便. 这时有

$$\iint_e F(\lambda_1(x,y),\lambda_2(x,y),\lambda_3(x,y))dxdy$$

$$=\iint_{OAB} F(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right|d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$=2\triangle_e\int_0^1 d\lambda_1\int_0^{1-\lambda_1}F(\lambda_1,\lambda_2,1-\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_2 \qquad (2.11)$$

再利用 Euler 积分公式(2.4)便可得到一个十分有用的公式

$$\iint_e \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\lambda_3^{\alpha_3}dxdy=2\triangle_e\int_0^1 d\lambda_1\int_0^{1-\lambda_1}\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}(1-\lambda_1-\lambda_2)^{\alpha_3}d\lambda_2$$

$$=2\triangle_e\int_0^1 d\lambda_1\int_0^1 \lambda_1^{\alpha_1}(1-\lambda_1)^{\alpha_2+\alpha_3+1}t^{\alpha_2}(1-t)^{\alpha_3}dt$$

•

$$=\frac{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2)!}2\triangle_e \qquad (2.12)$$

在上面第二步中, 是作了置换 $\lambda_2=(1-\lambda_1)t$.

插值和基函数

2.2 高次 Lagrange 型插值

1. 二次插值

设已知 $f(x,\ y)\in C(\overline{\Omega})$ 在各单元顶点和各边中点上的值，求函数 $L_f^{(2)}(x, y)$ 使得在任一单元 $e=\triangle A_1A_2A_3$ 上有

1° $L_f^{(2)}(A_i)=f(A_i)$,

$L_f^{(2)}(B_i)=f(B_i)$

$(i=1, 2, 3)$

其中 A_i 是单元 e 的三顶点，B_i 是 A_i 对边上的中点.

2° $L_f^{(2)}(x, y)$ 是二次式.

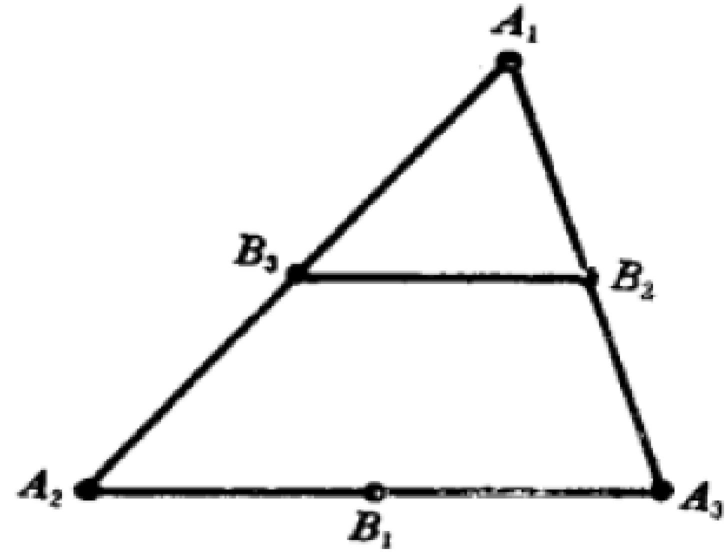

图 2-5

唯一可解性 设 $f(A_i)=f(B_i)=0$ $(i=1, 2, 3)$. 在边 $\overline{A_2A_3}$ 上，因 $\lambda_1=0$，故 $L_f^{(2)}(x, y)$ 是 λ_2 二次式. 但此二次式在 $A_2(0, 1, 0)$,

插值和基函数

插值名称	连续性	单元自由度	总自由度	逼近度 $\lvert \Pi f - f \rvert_{s,\Omega} \leqslant M h^{k+1-s} \lvert f \rvert_{k+1,\Omega}$
一次(L型)	$C_{[a,b]}$	2	NP	$k=1, 0\leqslant s\leqslant 1$
二次(L型)	$C_{[a,b]}$	3	$2NP-1$	$k=2, 0\leqslant s\leqslant 1$
三次(H型)	$C^1_{[a,b]}$	4	$2NP$	$k=3, 0\leqslant s\leqslant 2$

插值和基函数

单元形式	插值名称	连续性	单元自由度	总自由度	逼近度 $\|\Pi f-f\|_{s,\Omega}\leqslant Mh^{k+1-s}\|f\|_{k+1,\Omega}$
三角形	一次(L型)	$C(\overline{\Omega})$	3	NP	$k=1, 0\leqslant s\leqslant 1$
	二次(L型)	$C(\overline{\Omega})$	6	$4NP$	$k=2, 0\leqslant s\leqslant 1$
	三次(L型)	$C(\overline{\Omega})$	10	$9NP$	$k=3, 0\leqslant s\leqslant 1$

单元形式	插值名称	连续性	单元自由度	总自由度	逼近度 $\|\Pi f-f\|_{s,\Omega}\leqslant Mh^{k+1-s}\|f\|_{k+1,\Omega}$
	受限制三次(L型)	$C(\overline{\Omega})$	9	$7NP$	$k=2, 0\leqslant s\leqslant 1$
	三次(H型)	$C(\overline{\Omega})$	10	$5NP$	$k=3, 0\leqslant s\leqslant 1$
	受限制三次(H型)	$C(\overline{\Omega})$	9	$3NP$	⊛
	五次(H型)	$C^1(\overline{\Omega})$	21	$9NP$	$k=5, 0\leqslant s\leqslant 2$
	受限制五次(H型)	$C^1(\overline{\Omega})$	18	$6NP$	$k=4, 0\leqslant s\leqslant 2$
	Clough	$C^1(\overline{\Omega})$	12	$6NP$	$k=3, 0\leqslant s\leqslant 2$

插值和基函数

	修正的Clough	$C^1(\overline{\Omega})$	9	$3NP$	$k=2, 0\leqslant s\leqslant 2$
	Morley		6	$4NP$	⊛
矩形	双线性(L型)	$C(\overline{\Omega})$	4	NP	$k=1, 0\leqslant s\leqslant 1$
	双二次(L型)	$C(\overline{\Omega})$	9	$4NP$	$k=2, 0\leqslant s\leqslant 1$
	不完全双二次(L型)	$C(\overline{\Omega})$	8	$3NP$	$k=2, 0\leqslant s\leqslant 1$
	双三次(H型)	$C^1(\overline{\Omega})$	16	$4NP$	$k=3, 0\leqslant s\leqslant 2$
	不完全双三次(H型)(Adini)	$C(\overline{\Omega})$	12	$3NP$	⊛
任意四边形	4 节点等参	$C(\overline{\Omega})$	4	NP	$k=1, 0\leqslant s\leqslant 1$
	8 节点等参	$C(\overline{\Omega})$	8	$3NP$	$k=2, 0\leqslant s\leqslant 1$

⊛ 作为非协调元，考虑在区域Ω上的整体逼近度是没有意义的，需要的只是单元逼近度，它只依赖性质$\Pi p_k = p_k$而与整体连续性无关，具体结果见第三章§4插值逼近定理.

插值和基函数

单元形式	插值名称	连续性	单元自由度	总自由度	逼近度 $\lvert \Pi f - f \rvert_{s,\Omega} \leqslant M h^{k+1-s} \lvert f \rvert_{k+1,\Omega}$
四面体	线性(L型)	$C(\overline{\Omega})$	4	NP	$k=1, 0 \leqslant s \leqslant 1$
六面体	8节点等参	$C(\overline{\Omega})$	8	NP	$k=1, 0 \leqslant s \leqslant 1$
	20节点等参	$C(\overline{\Omega})$	20		$k=2, 0 \leqslant s \leqslant 1$