数值代数上机作业 5

陈奕行

November 7, 2019

Contents

1 希尔伯特矩阵求解

- conjugate_gradient, Jacobi, Gauss_Seidel 三个函数均以 (A,b,epsilon,k_max) 为输入，求解 $Ax = b$，迭代终止条件为残量为初始残量 epsilon 倍，并给出最大迭代步数 k_max(一般设为 inf)。输出均为 (x,k,t)，其中 x 为解，k 为迭代步数，t 为迭代时间。
- test1 以 n 作为输入生成 n 为 Hilbert 矩阵求解。设定 epsilon = 1e-14, k_max = inf。用如下代码

```
x = 1:200;
for i = 2:100
[y(i),z(i),w(i)] = test1(i);
end
plot(x,y)
plot(x,z)
plot(x,w)
```

可以得到结果 不难发现除了迭代次数稳定增长之外，其他的变化没有什么规律。

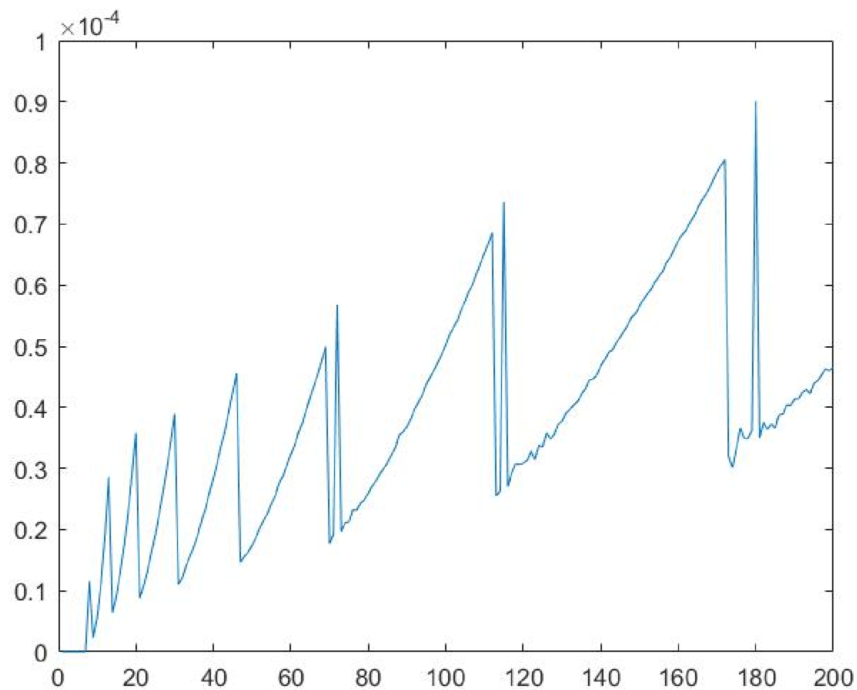

Figure 1: 误差

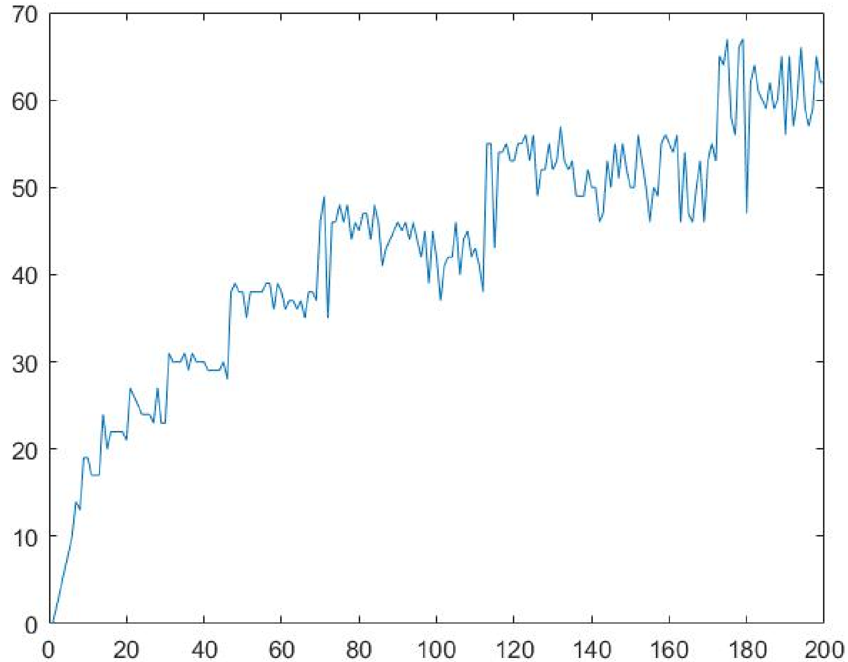

Figure 2: 迭代次数

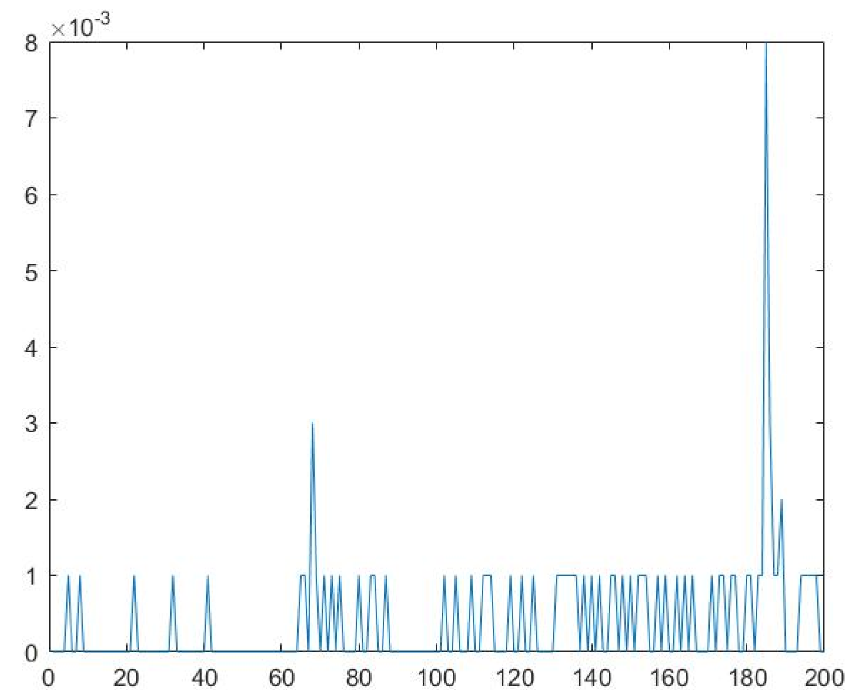

Figure 3: 用时

- 尽管此方法远远好于 MATLAB 内置的反斜线求解[1]，但是我们发现在一些特殊情况，例如 n=104 时候，共轭梯度在 epsilon= 1e-15 时无法收敛，尽管 n=103，105 时均有很好表现。

- 如果采用 PCG，且 $M = diag(A)$。代码见 preconditioned_conjugate_gradient.m，并设 epsilon=1e-14, k_max = inf。并对 x = 1∼200 做实验，可以得到结果。不难发现此时并无太大优势。

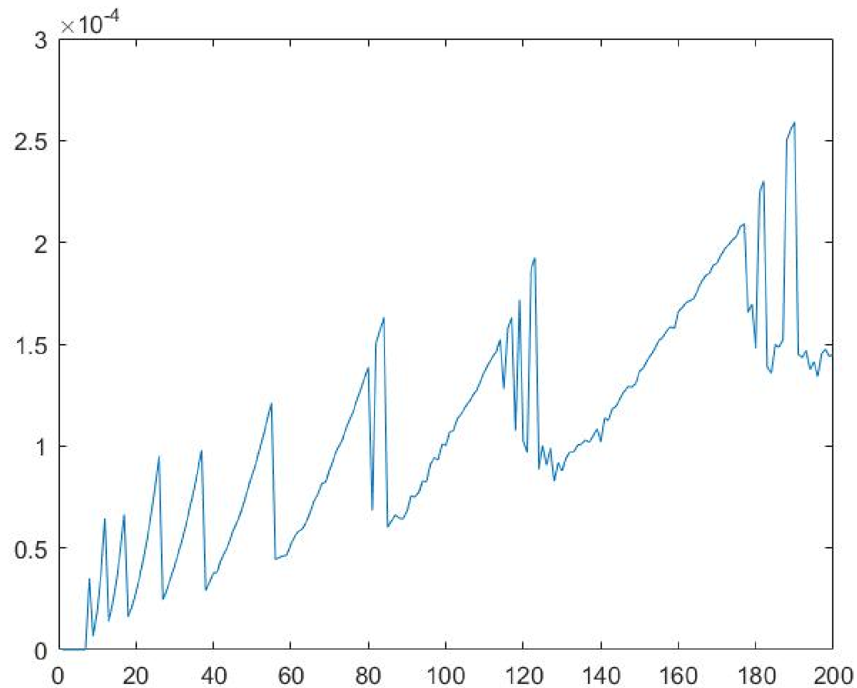

Figure 4: PCG 误差

2 三种迭代法比较

- test2.m 比较三种方法的误差，迭代次数和用时。我们设置 epsilon=1e-15, k_max = inf。直接运行 test2.m 即可。结果列表如下(1)

这里时间过短没有比较意义。CG 无论在误差还是迭代次数上都显著优于 GS 和 Jacobi 方法。我们算的 A 的特征值为 [1.6553, 6.9948, 9.3656, 15.8089, 19.1754] 根据课

[1]例如 n=100 时，内置求解器误差 2 范数为 859.0138，而共轭梯度为 2.0422e-05

	GS	Jacobi	CG
数值解 2 范数误差	1.9115e-13	2.2040e-13	5.4897e-15
迭代次数	86	158	5
用时	0.0030	0	0

Table 1: 三种方法比较

本习题 8 的结论，我们可以知道至多 5 步即可得到精确解，与这里的实验相符合。此时的误差更多的是机器计算精度带来的误差。

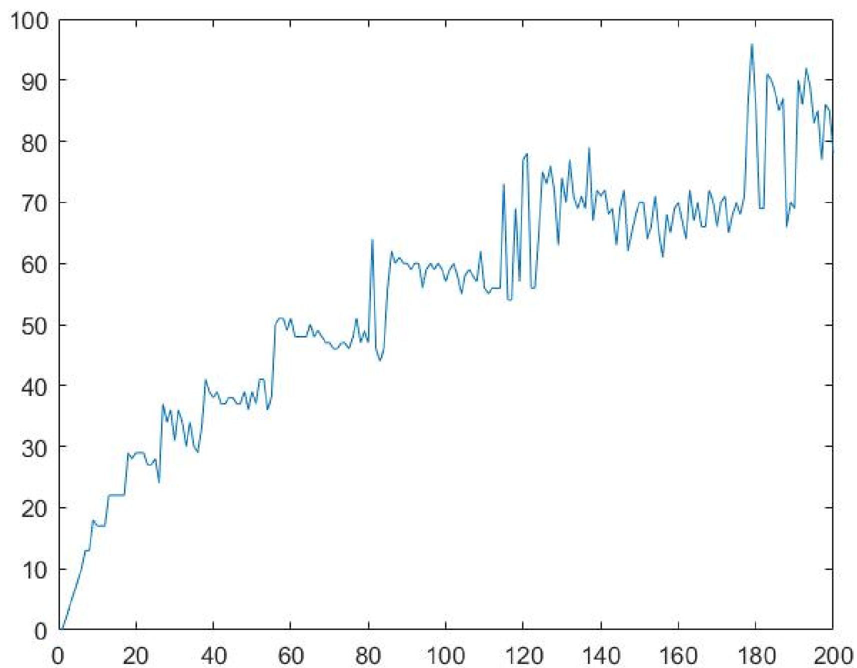

Figure 5: PCG 迭代次数

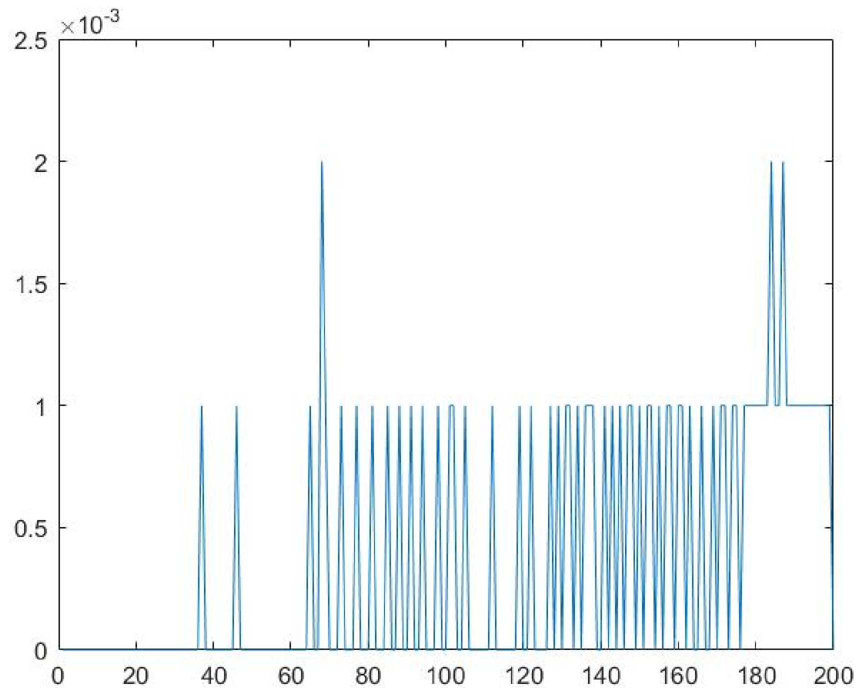

Figure 6: PCG 用时