2 极坐标下Poisson方程的差分方法

如果二维区域Ω是圆形或扇形区域, 则采用极坐标(r,θ)可以方便区域的离散, 因为此时可以在(r,θ)坐标下采用矩形网格剖分相应的计算区域.

在坐标变换$x=r\cos(\theta), y=r\sin(\theta)$或$r=\sqrt{x^2+y^2}$和$\tan(\theta)=y/x$下, Poisson方程(1.1)被变换为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=f(r,\theta), \tag{2.1}$$

而整个(x,y)平面则变换成(r,θ)平面中的带形区域$\{(r,\theta)|0\le r<\infty, 0\le\theta\le 2\pi\}$. 很明显, 方程(2.1)的系数在$r=0$处出现奇性, 换言之, 它只在$r>0$时才有意义. 为了确定出感兴趣的解, 需要补充解$u(x,y)$在$r=0$处的"边界条件". 一般说来, 当$r\to 0^+$时, 方

程(2.1)的左端第一项应当是有界的, 由此可知

$$\lim_{r\to 0^+} r\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{2.2}$$

在(r,θ)平面内引入两族分别平行于r和θ坐标轴的直线

$$r_j = (j+0.5)h_r, \quad \theta_k = kh_\theta, \quad 0\le j\le M+1,\ 0\le k\le N+1,$$

其中h_r和h_θ分别是r方向和θ方向的网格步长, 这里将r方向的网格线平移$0.5h_r$的目的是避免$r=0$落在网格线上. 如果利用中心差商近似偏导数, 则方程(2.1)在网格结点(j,k)处可以离散为

$$\frac{1}{r_j}\frac{r_{j+1/2}(u_{j+1,k}-u_{j,k})-r_{j-1/2}(u_{j,k}-u_{j-1,k})}{h_r^2}+\frac{1}{r_j^2}\frac{\delta_\theta^2 u_{j,k}}{h_\theta^2}$$
$$= f(r_j,\theta_k),\quad 1\le j\le M+1, 0\le k\le N+1. \tag{2.3}$$

为了导出Poisson方程(2.1)在$j=0$网格线处的差分方程, 将(2.1)改写为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2(u/r)}{\partial\theta^2}=rf(r,\theta), \tag{2.4}$$

并在区域$I_\varepsilon=[\varepsilon,h_r]\times[\theta_{k-1/2},\theta_{k+1/2}]$上积分(2.4), 得

$$\begin{aligned}\int_{\theta_{k-1/2}}^{\theta_{k+1/2}}\left[\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=h_r}-\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\varepsilon}\right]d\theta+\int_{\varepsilon}^{h_r}\Bigg[\left(\frac{\partial(u/r)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_{k+1/2}}\\ -\left(\frac{\partial(u/r)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_{k-1/2}}\Bigg]dr=\iint_{I_\varepsilon}rf(r,\theta)\;drd\theta,\end{aligned}$$

其中ε是充分小的正数, $\theta_{k+1/2}=(k+1/2)h_\theta$. 令$\varepsilon\to 0$, 并应用条

件(2.4), 得

$$\int_{\theta_{k-1/2}}^{\theta_{k+1/2}} \left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=h_r} d\theta + \int_0^{h_r} \left[\left(\frac{\partial(u/r)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_{k+1/2}} - \left(\frac{\partial(u/r)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_{k-1/2}} \right] dr = \iint_{I_\varepsilon} rf(r,\theta)\ drd\theta.$$

如果用中心差商近似上式中的偏导数, 并用矩形公式计算积分, 则得方程(2.1)在网格线$j=0$处的差分方程

$$h_\theta(u_{1,k}-u_{0,k}) + 2\frac{\delta_\theta^2 u_{0,k}}{h_\theta} = \frac{1}{2}h_r^2 h_\theta f(r_0,\theta_k).$$

一旦方程(2.1)的定解条件确定, 就可给出相应的线性方程组.