网格雷诺数问题

Huazhong Tang

北京大学数学科学学院

October 25, 2019

1 网格雷诺数问题

- 考虑在均匀网格上离散模型问题(设a和ν为常数, $\nu > 0$)

$$u_t + a u_x = \nu u_{xx},$$

显式中心差分离散

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \tag{1.1}$$

- 如果$u_t = 0$或$u_j^{n+1} = u_j^n, \forall n \geq 0$, 则离散方程写为

$$\frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}) - \frac{\nu}{ah}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) = 0. \tag{1.2}$$

- 定义网格雷诺数(cell Reynolds number):

$$Re_h \triangleq \frac{|a|h}{\nu}$$

如果ν是热扩散系数, 则称$\frac{|a|h}{\nu}$为网格佩克莱数(Péclet数),记为Pe_h.

- 定常格式(1.3)又可写为

$$4u_j = (2 - Re_h)u_{j+1} + (2 + Re_h)u_{j-1}.$$

当$|Re_h| > 2$时, 上式不满足非负条件(元素前系数为非负), 进而不满足极值原理或最大值原理.

- 因此, 要求网格雷诺数限制:

$$Re_h \equiv \frac{|a|h}{\nu} \leq 2.$$

这意味着, 如果$\nu \ll 1$, $a \sim \mathcal{O}(1)$, 则网格步长$h \sim \mathcal{O}(\nu)$. 这对于对流占优问题的显式中心差分近似是一个很苛刻的限制.

- 如果设$a > 0$, 且用偏心差分离散代替前面的中心差分, 则

$$\frac{1}{h}(u_j - u_{j-1}) - \frac{\nu}{h^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) = 0.$$

或

$$(2+Re_h)u_j = u_{j+1} + (1+Re_h)u_{j-1}.$$

没有网格雷诺数限制, 但是精度低.

- 对非定常格式, 也有类似的结果: 显式中心差分离散除了有正常的稳定性限制外还有网格雷诺数限制.

Fourier方法或von Neumann方法: 令$r := \frac{\nu\tau}{h^2}$, $\sigma := \frac{a\tau}{h}$, $u_j^n = \xi_l^n e^{i2\pi ljh} =: \xi_l^n e^{ij\beta}$, $i = \sqrt{-1}$. 将u_j^n代入(1.1)得

$$\xi_l^{n+1} e^{ij\beta} = \xi_l^n e^{ij\beta}\phi(\beta),$$

其中增长因子$\phi(\beta) := 1 - 2r + 2r\cos\beta - i\sigma\sin\beta$. 稳定性要求

$$|\phi(\beta)| \le 1, \qquad \text{或} \quad (1-2r+2r\cos\beta)^2 + (\sigma\sin\beta)^2 \le 1. \tag{1.3}$$

由此可知, $r = \nu\tau/h^2 \le 1/2$, $|\sigma| = |a|\tau/h \le 1$. 另外, (1.3)是复平面中的椭圆$\{(x,y)|x = 1-2r+2r\cos\beta, y = \sigma\sin\beta, \beta \in [0, 2\pi]\}$区域, 椭圆的中心在实轴$1-2r$处, 与实轴的交点是$(1-4r, 0)$和$(1, 0)$, 横轴和纵

轴分别是$2r$和$|\sigma|$. 格式稳定性要求该椭圆落在以原点为中心的单位圆内, 所以除了前述条件外, 点$(1,0)$处椭圆的曲率还须大于单位圆的(见图3-7[1]): $2r|\sigma|/|\sigma|^3 \geq 1$. 因此, 稳定性条件是

$$r \leq 1/2, \quad |\sigma|^2 \leq 2r.$$

事实上, 令$\theta = \frac{1}{2}\beta$, (1.3)又等价于

$$f(\theta) := 4r^2 \sin^2\theta + \sigma^2\cos^2\theta \leq 2r. \tag{1.4}$$

$f(\theta)$的极值点发生在$\theta = 0$或$\pi/2$处, 这是因为

$$\frac{df}{d\theta} = (4r^2 - \sigma^2)\sin(2\theta) = (4r^2 - \sigma^2)\sin(\beta) = 0.$$

如果$\beta = 0$, 则(1.4)简化为$\sigma^2 \leq 2r$即$\tau \leq 2\nu/a^2$; 如果$\beta = \pi$, 则(1.4)简化为$4r^2 \leq 2r$即$2r \leq 1$.

[1] 陶文铨, 数值传热学, 第2版, 西安交通大学出版社, 2001, Pages 61-62

- 在相当一段时间内，人们普遍认为，格式(1.1)的稳定性条件为

$$2r \le 1, \qquad |\sigma| \le 2r \text{ 或 } Re_h := \frac{|a|h}{\nu} \le 2. \tag{1.5}$$

- 历史上，对初值问题的显式格式(1.1)的稳定性条件一直有争议。例如Leonard(1980)和Thompson(1985)等进一步阐明，初值问题的显式格式的稳定性条件不应该取决于Re_h的大小，因为Re_h中不包含时间步长τ，而初值问题的显式格式的不稳定性实质上是由于时间步长取得太大引起的.

- 如何正确理解网格雷诺数的限制？将(1.1)改写为

$$u_j^{n+1} = (1-2r)u_j^n + (r - \frac{1}{2}\sigma)u_{j+1}^n + (r + \frac{1}{2}\sigma)u_{j-1}^n.$$

为使格式具有正性或极值原理，需要

$$1 - 2r \ge 0, \quad |\sigma| \le 2r \text{ 或 } Re_h := \frac{|a|h}{\nu} \le 2.$$

- 采用高阶(≥ 3)显式Runge-Kutta时间离散可以放松显式中心差分离散的网格雷诺数限制.

- 考虑中心差分半离散

$$\frac{du_j(t)}{dt} = -a\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + \nu\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}.$$

- 设解是2π周期的, 具有形式

$$u_j(t) = \hat{u}(t)e^{i2\pi jh}, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

将其代入上式, 得

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \left(-i\frac{a}{h}\sin(2\pi h) + \frac{\nu}{h^2}(\cos(2\pi h) - 1)\right)\hat{u}(t),$$

或

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = -\frac{2a}{h}\cos(\pi h)\left(i\sin(\pi h) + \frac{1}{Re_h}\cos(\pi h)\right)\hat{u}(t) \triangleq \lambda\hat{u}(t).$$

- 一阶显式Runge-Kutta时间离散，即向前Euler离散$\hat{u}^{n+1} = (1+\tau\lambda)\hat{u}^n$ 的绝对稳定性区域是:

$$|1+\lambda\tau| \leq 1.$$

- 当$Re_h \gg 1$或$\nu \ll 1$时，$\tau\lambda =: c+ib$ 几乎是纯虚数$(|c| \ll |b|)$，上述不等式恒不成立，即不稳定.

- 二阶显式Runge-Kutta时间离散

$$\begin{aligned}\hat{u}^* =&(1+\tau\lambda)\hat{u}^n,\\ \hat{u}^{n+1} =&\frac{1}{2}\left(\hat{u}^n+(1+\tau\lambda)\hat{u}^*\right),\end{aligned}$$

的绝对稳定性区域是:

$$\left|1+\lambda\tau+\frac{1}{2}\tau^2\lambda^2\right| \leq 1.$$

- 当$Re_h \gg 1$或$\nu \ll 1$时, $|c| \ll |b|$, 则

$$\left|1+\lambda\tau+\frac{1}{2}\tau^2\lambda^2\right| \sim (1-\frac{b^2}{2})^2+b^2=1+\frac{b^4}{4}>1,$$

所以上述不等式恒不成立, 即格式不稳定.

- 三阶显式Runge-Kutta时间离散

$$\begin{aligned}\hat{u}^* =&(1+\tau\lambda)\hat{u}^n,\\ \hat{u}^{**} =&\frac{3}{4}\hat{u}^n+\frac{1}{4}(1+\tau\lambda)\hat{u}^*,\\ \hat{u}^{n+1} =&\frac{1}{3}\hat{u}^n+\frac{2}{3}(1+\tau\lambda)\hat{u}^{**},\end{aligned}$$

的绝对稳定性区域是:

$$\left|1+\lambda\tau+\frac{1}{2}\tau^2\lambda^2+\frac{1}{6}\tau^3\lambda^3\right| \le 1.$$

- 当$Re_h \gg 1$或$\nu \ll 1$时，$|c| \ll |b|$，则

$$\left|1+\lambda\tau+\frac{1}{2}\tau^2\lambda^2+\frac{1}{6}\tau^3\lambda^3\right| \sim \left(1-\frac{b^2}{2}\right)^2+\left(b-\frac{b^3}{6}\right)^2 = 1-\frac{b^4}{12}+\frac{b^6}{36}.$$

当$|b|^2 \le 3$时，上式最右端项不超过1．所以，在适当条件下，格式是绝对稳定的，且Re_h可以任意大(即对网格雷诺数没限制)．

- 四阶显式Runge-Kutta时间离散

$$\begin{aligned}
\hat{u}^* =&(1+\frac{1}{2}\tau\lambda)\hat{u}^n,\\
\hat{u}^{**} =&\hat{u}^n+\frac{1}{2}\tau\lambda\hat{u}^*,\\
\hat{u}^{***} =&\hat{u}^n+\tau\lambda\hat{u}^{**},\\
\hat{u}^{n+1} =&\frac{1}{3}\left(\hat{u}^*+2\hat{u}^{**}+\hat{u}^{***}-\hat{u}^n+\frac{1}{2}\tau\lambda\hat{u}^{***}\right),
\end{aligned}$$

的绝对稳定性区域是:

$$\left|1+\lambda\tau+\frac{1}{2}\tau^2\lambda^2+\frac{1}{6}\tau^3\lambda^3+\frac{1}{24}\tau^4\lambda^4\right|\leq 1.$$

- 由类似的分析知, 在适当条件下, 格式是绝对稳定的, 且Re_h可以任意大.

思考题:

- 当时间用向前Euler方法, u_{xx}用中心差分近似, 而au_x用二阶迎风

$$a\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j \approx \frac{1}{2h}\begin{cases}3au_j-4au_{j-1}+au_{j-2}, & a>0,\\ -au_{j+2}+4au_{j+1}-3au_j, & a<0,\end{cases}$$

近似时, 格式是L^2稳定的, 无网格雷诺数限制?

- 当时间用向前Euler方法, u_{xx}用中心差分近似, 而au_x用QUICK[2]

$$a\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j \approx \frac{1}{8h}\begin{cases} 3au_{i+1}+3au_j-7au_{j-1}+au_{j-2}, & a>0, \\ -au_{j+2}+7au_{j+1}-3au_j-3au_{j-1}, & a<0, \end{cases}$$

近似时, 格式是L^2稳定的, 有网格雷诺数限制($|Re_h|\leq 8/3$)?

References

[1]

---

[2]QUICK: Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics scheme, 见[B.P. Leonard, A stable and accurate convection modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 19(1979), 59-98.]