数值代数上机作业 3

陈奕行

October 22, 2019

Contents

1 程序说明

1. house.m 实现 householder 变换，使得输入向量除第一项外均为 0。

2. QR.m 实现 QR 分解。

3. least_square.m 基于 QR 分解解最小二乘问题。

4. cho.m 实现 Cholesky 分解，存储方式与书上相同

5. improved_cho.m 实现改进的 Cholesky 分解。

6. guass.m, gauss_band.m, gauss_max.m 分别为 Gauss 消去，带状 Gauss 消去，列主元 Gauss 消去。

7. 余下.m 文件利用上述函数输出结果，将会在下面几个部分中说明用途。

8. 第一问中比较真解和计算解的误差均使用 2-范数。

2 第一问

此问中可以将 least_square.m 看作解线性方程组。

运行 main1.m，知使用 QR 分解的三种情况的误差为 err1 = NaN，err2 = 1.0563e-16，err3 = 636.9076；残量为 r1=NaN, r2=1.0117e-15, r3 = 2.3730e-14。

对于第一小问，比较第一次上机报告种结果种使用带状 Gauss 消去为 err11=5.0724e-06，使用 Gauss 消去为 err12=7.2594e+08。不难发现 QR 分解无法得到结果。对于这种问题我们更应该采取带状 Gauss 消去法。

运行 main10.m，得到对第二小问，Cholesky 和改进 Cholesky 误差分别为 0.0568 和 6.5670e-17；残量为 5.3993 和 5.4143e-16；第三小问，Cholesky 和改进 Cholesky 误差分别为 4.0597e+12，

167.7229；残量为 12.3553 和 4.1437e-15。不难发现 QR 方法残量和解的误差均与改进 Cholesky 相当，比 Cholesky 分解好不少。

运行 main11.m，得到对第二问，使用 Gauss，带状 Guass 的误差均为 6.8711e-17；残量均为 4.4515e-16。第三问不为带状矩阵，从而使用 Gauss 方法和列主元 Gauss 方法可知误差为 467.7335 和 677.0954，残量为 6.3166e-15 和 8.7228e-15。不难发现也与 QR 分解相当。

从而我们发现，一般而言求解带状方程较好的方法时带状 Gauss 法，而若有正定对称的条件，亦可使用改进的 Cholesky 分解法或 QR 分解法。接下来比较时间，运行 speed.m，对第二小问取矩阵为 1000×1000，则分别用时 0.023078 秒，5.077435 秒和 0.926540 秒不难发现带状 Gauss 方法优势较大，QR 分解法最慢。

QR 分解的优势在于某些特殊情况下的稳定性，见 advantage.m。此函数复现了书中例 3.3.1，体现 QR 分解在此条件下的优越性。

3 第二问

运行 main2.m，得到结果

$$(a, b, c) = (1, 1, 1) \tag{1}$$

4 第三问

运行 main3.m，得到结果

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{11}) = (2.0775, 0.7189, 9.6802, 0.1535, 13.6796, 1.9868, -0.9582, -0.4840, \tag{2}$$

$$-0.0736, 1.0187, 1.4435, 2.9028) \tag{3}$$