蒙特卡罗方法在金融品定价中的传统应用和改进

——蒙特卡洛与最小二乘蒙特卡洛、拟蒙特卡洛法的对比

Applications and Optimizations of Monte-Carlo Method in the Valuation of Financial Derivatives using Matlab

** This is project conducted during the course of Statistical Computing in my undergraduate.

** Matlab codes are in the Appendix (1).

目 录

摘要..1

1. 传统蒙特卡洛方法在金融中的应用....................................2

1.1 传统蒙特卡洛方法的简介....................................2

1.1.1 蒙特卡洛方法基本原理....................................2

1.1.2 一般方法....................................2

1.1.3 随机数的生成....................................3

1.2 蒙特卡罗方法在期权定价中的应用....................................3

1.2.1 期权介绍....................................3

1.2.2 现有的几种期权定价方法....................................4

1.2.3 期权定价的蒙特卡洛方法....................................4

2. 最小二乘蒙特卡洛在金融中的应用....................................6

2.1 可转换债券....................................6

2.1.1 可转换债券介绍....................................6

2.1.2 可转换债券定价的理论基础....................................6

2.2 可转债的最小二乘蒙特卡洛模拟方法....................................8

2.2.1 最小二乘蒙特卡洛方法....................................8

2.2.2 最小二乘蒙特卡洛方法在可转债定价中的应用....................................8

3. 拟蒙特卡洛在金融中的应用....................................9

3.1 拟蒙特卡洛方法....................................9

3.1.1 拟蒙特卡洛法基本原理....................................9

3.1.2 计算误差....................................10

3.1.3 低偏差序列..10

3.2 拟蒙特卡洛在金融产品定价中的应用（以期权定价为例）..........11

4. 传统蒙特卡洛法与拟蒙特卡罗法的实证对比研究....................11

4.1 伪随机数序列与 halton 序列性质对比..........................11

4.2 两种蒙特卡罗法的期权定价仿真模拟...........................13

5. 总结...15

6. 附录...17

摘要：

随着生产力水平的提升，人们的财富逐渐累积，越来越多的人们选择使用各种金融工具使自己的财富能够实现套期保值。除了传统的金融产品，如债券、股票等之外，金融衍生品伴随着我国市场经济不断深化也受到更多人的欢迎。金融衍生品(derivatives)，其实指的是某种金融合约，其价值取决于一种或多种标的资产的价格，金融衍生品的基本种类包括远期、期货、互换和期权等。

金融衍生品是二级市场重要的套期保值工具，想要顺利规避风险必须对衍生产品进行精确定价。目前市场上常用的定价方式有：Black-sholves 公式、二叉树定价等，而蒙特卡洛定价方法则通过模拟标的资产价格路径来得到期权的预期收益，并得到期权价格估计值。但蒙特卡洛定价方法仍有样本量和计算量大、收敛速度慢等缺点 。针对这些缺点，我们提出了利用拟蒙特卡洛和最小二乘蒙特卡洛对其改进，并利用 Matlab 对其进行了实现，并通过代入实际的市场数据说明了拟蒙特卡洛、最小二乘蒙特卡洛的优越性。

关键词： 蒙特卡洛方法；拟蒙特卡洛方法；最小二乘蒙特卡洛方法；期权定价；可转换债券定价

1. 传统蒙特卡洛方法在金融中的应用

1.1 传统蒙特卡洛方法的简介

1.1.1 蒙特卡洛方法基本原理

蒙特卡洛（Monte Carlo）方法是一种由概率统计理论为基础的一种十分重要的数值计算方法，也称作统计模拟方法。由于蒙特卡洛方法能够十分真实的描述事物的特点，并能处理很多用传统数值方法很难处理的问题，所以如今在科学与技术的各个领域都得到广泛的应用。

根据概率论可知，某事件发生的概率能够用该事件在数量足够大的实验中发生的频率来近似。在样本容量足够大的时候，便可以将频率看做该事件发生的概率。于是，可以对影响时间的变量进行大量的随机模拟，然后将其带入功能函数式，从而确定事件是否发生，最终得到该过程中事件发生的概率。传统蒙特卡洛方法便是根据此方法进行的。

1.1.2 一般方法

用蒙特卡洛方法求解问题，简言之，就是使用大量随机试验的方式来计算积分。将所要计算的积分看做是服从分布函数$F(x)$的随机变量$g(x)$的期望

$$E(g)=\int g(x)dF(x)$$

之后再通过随机模拟得到N个观察值$x_1,x_2,\ldots,x_N$，再将相应的这N个随机变量的值$g(x_1),g(x_2),\ldots,g(x_N)$求得的算数平均值

$$\hat{g}_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(x_i)$$

由大数定律知，

$$\lim_{N\to\infty}\hat{g}_N=g$$

根据中心极限定理可，当$g(x)$有方差σ^2时，对于$\forall\alpha\in(0,1)$，都有一个λ_α，

当 N 充分大时，使下式成立

$$P\left(\left|\hat{g}_N - g\right| < \frac{\lambda_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_\alpha}^{\lambda_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha$$

由该式可以看出，使用蒙特卡洛方法，则 $\hat{g}_N$ 趋于 g 的收敛速度为 $o(\frac{1}{\sqrt{N}})$，以这样的收敛速度，如果要想把计算结果的精度上升一位，则要成百倍的加大模拟工作量。在实际应用中，可以更加精准地设计模拟模型，升级抽样方法，尽量减小被积函数在该积分域上的方差 σ^2，可以极大地减少工作量，提高收敛速度。

1.1.3 随机数的生成

用蒙特卡洛方法模拟解决问题时，需要用到各种分布的随机变量。蒙特卡洛模拟的基本理论就是通过对大量随机样本的统计分析，因此，随机数的选取在蒙特卡洛方法占据着极其重要的地位。但是真正的随机数是数学理论上的抽象，很难预计，实际操作起来非常困难，所以随机数的选取大多情况下用计算机使用数学方法产生伪随机数来实现。但由于计算机只能显示有限个不同的数，所以当数量达到一定程度时，就会出现周期现象，这和随机数的定义是矛盾的。但是只要产生的伪随机数可以通过随机数的各种统计检验，就可以作为真正的随机数来使用，也并不会影响试验的实际结果。而且这种方法产生随机数速度快，占用内存小，对问题的检验可以反复进行，十分便捷。

1.2 蒙特卡罗方法在期权定价中的应用

1.2.1 期权介绍

期权，是指赋予其购买者在到期日内按双方约定的价格（简称执行价格）购买或出售一定数量某种金融资产（称标的资产）的权利的合约。一份期权合约的主要构成部分包括标的资产、到期日和执行价格。

按照期权购买者的权利划分，期权可分为看涨期权和看跌期权。看涨期权的购买者预期标的资产价格上涨，被赋予购买标的资产的权利；而看跌期权的购买者预期标的资产价格下跌，被赋予了出售标的资产的权利。期权还有其他常见分类，例如：按照期权购买者执行权利的时间划分，期权可分为欧式期权

和美式期权；按照期权合约的标的资产划分，期权可分为现货期权和期货期权。但这些分类对于本篇论文的作用不大，我们在这里不再赘述。

对于期权的购买者来说，期权合约赋予他的只有权利，而没有义务。他可以在到期日或到期日之前，行使其购买或出售标的资产的权利，也可以不行使这个权利。对于持有者来说，在合约到期日以前，可以选择将所持的期权转让以赚取一定的差价。对于期权的出售者来说，他只有履行合约的义务，而没有任何权利。当期权的买者按合约规定行使其买进或卖出标的资产的权利时，期权出售者必须按照合约相应地卖出或买进该标的资产。在一开始，期权买者要支付给期权卖者一定的费用，称为期权费。期权费的确定取决于：期权种类、期限、标的资产价格的易变程度等等因素。

所谓的期权定价，就是通过期权种类、时间、标的资产、波动率、风险等变量确定期权费的过程。

1.2.2 现有的几种期权定价方法

现在，为期权定价比较简便且常用的方法包括二叉树定价和用BlackScholes 模型定价，

由Black和Scholes提出的B-S期权定价模型是期权定价-偏微分方程(PDE）法的典型例子。在标的资产价格服从对数正态分布的假设下，他们通过构造一个由期权空头和标的资产多头构成的无风险的套期保值组合得到了 B-S 公式：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rs\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

其中 f 是期权价格，S 是标的资产价格，r 是无风险利率，σ 是标的资产价格波动率。

当期权定价公式的解析解无法求得时，我们可以求助于数值定价方法，其中，二叉树方法是现在广泛应用的期权定价方法之一。其数学原理是用大量离散的概率价格上涨和概率下降，来模拟连续的标的资产价格运动。然后把预期收益倒推到 0 时刻，即得到期权费。

而蒙特卡罗定价方法则是另一种期权定价数值方法，它的实质是模拟标的资产价格路径来得到期权的预期收益，并得到期权价格估计值。蒙特卡罗方法的一个优势是利用强大数定律使误差边界概率化，并且在多维变量情况下误差收敛率不变，这样就使蒙特卡罗方法非常适宜为高维期权定价。

1.2.3 期权定价的蒙特卡洛方法

一般地，期权定价的蒙特卡罗方法包含如下几步：

（1）假设风险中性的条件下，模拟标的资产的价格

（2）计算上面的价格时期权的到期收益，并代入无风险利率求得收益的现值

（3）重复前两步，得到大量期权收益贴现值的抽样样本

（4）求样本均值，得到期权价格的蒙特卡罗估计值

假设标的资产是无分红的股票，且其价格服从风险中性几何布朗运动，即：

$$\mathrm{dS_t} = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

其中，r 是无风险利率，假设 σ 股票价格波动率为常数，$\mathrm{W_t}$ 是标准布朗运动

$$\mathrm{d(\,lnS_t\,)} = \left(\mathrm{r} - \frac{\sigma^{2}}{2}\right)\mathrm{dt} + \sigma\,\mathrm{dW_t}$$

$$lnS_{t+\Delta t} - lnS_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma Z(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t.\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma Z(\Delta t)^{\frac{1}{2}}\right]$$

其中 Z 是从标准正态分布中抽取的一个样本。

由上式可知标的资产价格蒙特卡罗模拟的过程。若$\mathrm{S_0}$已知，随机抽取一个 Z ，可得Δt时刻的资产价格$S_{\Delta t}$，接着，2Δt时刻的资产价格$S_{2\Delta t}$可由$S_{\Delta t}$和新的

正态分布样本得到，从而通过若干个正态分布的随机抽样可以组建一个标的资产价格路径的蒙特卡罗模拟样本。

在风险中性测度下，期权价格能够表示为其到期收益的贴现的期望值，即：

$$\mathrm{P} = \mathrm{E_q}[e^{-rT} f(S_t)]$$

其中，r 是无风险利率，T 为到期日，$f(S_t)$是到期收益关于标的资产价格的函数，$\mathrm{E_q}$表示期望在风险中性测度下取得。

以标的资产服从风险中性几何布朗运动的标准欧式看涨期权为例，我们用蒙特卡洛方法估计到期收益贴现的期望，得到期权价格：

$$\mathrm{P} = \mathrm{E_Q}[e^{-rT}(S_T - K)^+]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma z\sqrt{T}} - K\right)^+ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \int_0^1 \hbar\left(\Phi^{-1}(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx$$

从第三行到第四行采用了逆变换使$(-\infty, +\infty)$上的映射$[0,1]$区间上的 x，利用上式把期权定价问题转化成了单位区间上的求积分问题。

2 最小二乘蒙特卡洛在金融中的应用

2.1 可转换债券

2.1.1 可转换债券介绍

可转换公司债券（简称可转债），是指发行人，一般为大型公司发行的，可

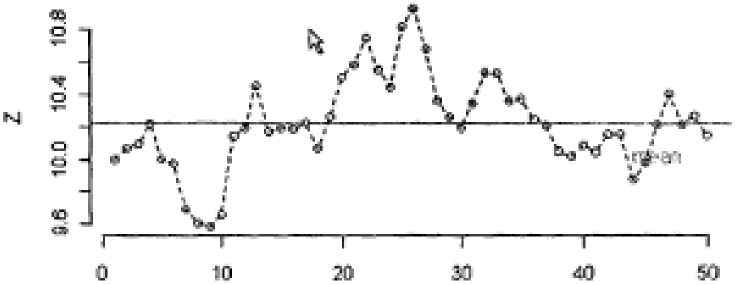
以在一定的期限内依照事先约定的价格转换为股票，并行使股票权利的债券。因此，可转换债券是集债券性、期权性和股票性的三个特点为一身的融合体。

如同任何形式的债券，可转换债券有以下因素：发行规模、发行日期、到期日期、到期价值、票面价值和息率。另外，它还有以下其他特有的要素：（1）转换价格：每可转债转换为股票时的价格。（2）转换比率：是指发行转债的公司向投资者约定比率，按照这一比率，投资者可以将手中的债券转换为相应数量的股票。（3）转换价值：股票市场价格×转化比率。（4）赎回条款：指在到期日前，发行可转债的公司在满足可转债的约定条件下，提前于到期日，以约定的价格，从投资者手中购回可转债的条款。（5）回售条款：相对于赎回条款，是保护投资者的条款，它指投资者可以在一定条件下按约定价格将可转债售回给发行公司。（6）担保条款：指对发行公司的可转债发行进行担保的第三方条款。（7）转换期：是指可转债转换为股票起始日至结束日的期间。

2.1.2 可转换债券定价的理论基础

（1）维纳过程

可转换债券是一种特殊的金融衍生产品，既包含股票的性质，又含有期权的特点。对于其股票的性质，我们知道，股票的当前价格已经体现了所有的过去价格信息，投资者无法通过历史数据去准确预测未来股票价格的走势，即股票价格的波动是一种“维纳过程”见下图①。



基本的维纳过程（图 1）

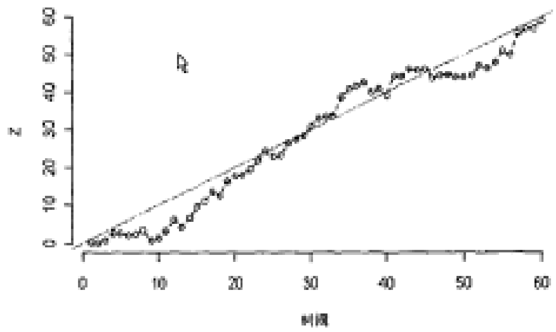
维纳过程是一种特殊形式的马尔科夫随机过程，维纳过程遵循

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

ε 是一个随机数，服从标准正态分布 N（0,1），Δz表示的是 z 在时间Δt内的变化。并且，对于任何的不同时间间隔Δt，Δz相互独立。

基本维纳过程的漂移率是 0，方差为 1。我们设定维纳过程的漂移率为 a，方差为 b，即可得到一般的维纳过程见下图②，$dx = adt + bdz$。若一般化，将 a 和 b 设为随时间而发生变化，即可得到 Ito 过程：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$



一般的维纳过程（图 2）

一般维纳过程的漂移率为常数，与股价的增长无关，为了使股票预期收益和股价增长建立联系，就要修正一般维纳过程。我们可以假设，无论股票价格高或低，在非常短的时间内，股票的百分比收益率方差未变。修正后的 Ito 过程即为：

$$dS = uSdt + \sigma Sdz$$

$$\frac{dS}{S} = udt + \sigma dz$$

其中，变量σ称为股票价格波动率，变量 u 称为股票价格的预期收益率。

（2）无套利定价理论

（3）风险中性定价理论

（4）Black-Scholes 期权定价理论

以上三个理论是基于可转换债券的期权的性质提出的，关于期权的性质和

特点，我们已经在 1.2.3 节中介绍过了，这里省略。

2.2 可转债的最小二乘蒙特卡洛模拟方法

2.2.1 最小二乘蒙特卡洛方法

我们在上文有提到，蒙特卡洛模拟方法在实际运用中具有一些缺点。第一是收敛速度比较慢，对于复杂的衍生证券，想要精确度足够好，就要进行很多的模拟次数，但增加实验次数会有增加时间等麻烦。其次，由于蒙特卡洛模拟方法具有路径依赖性，是前向模拟特点，对于后向迭代搜索特征的美式期权衍生工具的价格估值具有一定的困难。

最小二乘蒙特卡洛模拟（Least Squares Monte Carlo Stimulation，简写为 LSM）在可转债期权定价中的基本原理为：首先利用蒙特卡洛方法来模拟出股价样本的基本路径，再在终止边界条件的基础下，模拟出最后一期的收益。之后依据某些可能执行的路径，按照统计学中的最小二乘方法，再用最后一期收益的前一期贴现值为因变量，对其做线性回归，从而求出前一期继续持有债券的期望收益，在对其与前一期的马上停止时取得的收益作比较。此时，假设期望收益比较高，则保持持有，否则，便可以停止持有债券。在对这一过程做重复回归、比较过程、逐次向前逆推，最终推至第一期，这样便得到了投资者投资可转换债券的模拟行为路径。此时，再将各个路径模拟得到的未来现金流

2.2.2 最小二乘蒙特卡洛方法在可转债定价中的应用

我们假设标的的完全概率空间为（Ω，F，P），确定的时间区间为[o,T]。其中随机变量空间Ω是时刻 0 到 T 之间所有可能的实现集合，F 是区分事件在时间 T 的 θ 区域，P 定义在事件 F 上的概率测度。定义$\mathrm{F} = \{\mathrm{F_t}: \mathrm{t} \in [\mathrm{o}, \mathrm{T}]\}$，是证券在市场中相关价格过程产生的增强过滤，并且设定$\mathrm{F_t} = F$。根据无套利定价，我们假设经济体中存在等价鞅测度。

我们首先研究美式衍生产品的定价，产品在时间[0,T]之间是随机的现金流。

我们严格设定衍生产品的支付是方差可积域或有限差分函数$L^2(\Omega,F,Q)$的元素。美式期权的值等于期权体现现金流的最大值，其中最大值是来自于对应于过滤F的每个可执行时刻。在时刻t_k，投资者能够知道立即执行的现金流，并且立即执行的价格就等于这一现金流。但是，不能知道在时刻t_k的继续持有现金流。然而，无套利定价理论表明继续持有的的价值等于期权只能在t_k后执行的价值，并且表示为对应于风险中性定价测度 Q 下的剩余贴现现金流的期望。具体地讲，我们可以把t_k时刻的继续持有价值表示为：

$$F(w;t_k)=E_Q[\sum_{j=k+1}^{K}\exp\left(-\int_k^j r(w,s)ds\right)C\left(w,t_j;t_k,T\right)|F_{t_k}]$$

其中，$r(w,s)$是无风险利率，并且期望是在以t_k时刻F_{t_k}为条件的条件期望。由这个等式，我们知道最佳执行时刻的问题变为仅仅是比较立即执行价值与条件期望的价值，并且只要立即执行的值为正或者大于等于条件期望值，都可以立即执行。

可转债的情况比美式期权更加复杂，在每一时刻除了可以继续持有外，投资者和发行者还有执行转股权、回售权和赎回权。我们假设Ω_{conv}、Ω_{call}和Ω_{put}分别表示可转换债券发行合约、转股权、回售权和赎回权允许执行的时刻。同时，假设S_{t_k}表示在t_k时刻的股票模拟价格，$F(w;t_k)$表示t_k时刻可转换债券的继续持有期望价值，γ_{t_k}表示每一份债券能够转换为股票的比例，P_{t_k}表示回售权执行的价格，C_{t_k}表示赎回权的执行价格。在路径模拟过程中，我们首先确定能够触发附件条件的各项期权执行的时间点。然后我们利用 LSM 方法得到在可转换债券未被执行或者违约的假定条件下，每个可执行时刻上的可转换债券期望持有价值,根据回归得到的期望持有价值会置于不同的区间。

3 拟蒙特卡洛在金融中的应用

3.1 拟蒙特卡洛方法

3.1.1 拟蒙特卡洛法基本原理

拟蒙特卡洛法，也成为低偏差方法，与传统的模拟随机分布的蒙特卡洛法并不相同，它是以代数学为基础，通过产生偏差率更小，收敛速度更快的均匀分布程度非常高的超均匀分布序列来优化其模型模拟的准确度。拟蒙特卡洛方法的收敛速度为$o(1/n)$，这要比传统的蒙特卡洛方法的收敛速度$o(1/\sqrt{n})$快很多。这说明如果我们要使我们的模拟结果更加精确，拟蒙特卡洛方法的计算次数要比传统蒙特卡洛方法的计算次数少很多这极大地降低了计算时间，提高了模拟效率。

3.1.2 计算误差

拟蒙特卡洛方法的计算误差，可以由 Koksma-Hlawka 不等式给出：

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{\mathrm{k}=1}^{N} f(x_k)-\int_{I^{\mathrm{d}}} f(u)du\right| \le V(f)D_N^*$$

其中D_N^*是星型偏差，d, N分别是序列元素的维数与个数；$V(f)$是函数 F 在空间I^d中 Hardy-Krause 意义下的有界变差函数。该不等式给出了拟蒙特卡洛积分（QMC）的误差限，也解释了计算结果的精确度随着所用点列偏差度的减小而升高。并且最小偏差可达$o((\log N)^{s-1}N^{-\frac{1}{2}})$，所以当维数 s 比较大时，拟蒙特卡洛法的收敛速度要比传统蒙特卡洛法快很多。

3.1.3 低偏差序列

使用拟蒙特卡洛法的重要前提是要生成服从超均匀分布的低偏差序列，如今已经有很多种不同的满足低偏差率、分布均匀的低偏差序列，比如 Halton 序列，Faure 序列和 Sobol 序列等。下面将简单介绍 Halton 序列的基本原理

Halton 序列是将一些整数转换成某个基 b 的数位形式，再将这些数位按照反序排列，最终在序列前面加小数点后得到的值。

首先应明确 b 的概念，b 是任意一个大于一的整数。通俗的讲，一个数的基数为 10，则它就是一个十进制数，基数为 2，则是二进制数。接下来，将 s 维

的 Halton 序列表示成 X_1，$X_2,\ldots$，这里面的每个数都是 s 维向量。确定了基数的概念之后，则每一个正整数 M 都可以被 b 的非负次幂的线性组合所表示：

$$\mathrm{m}=\sum_{k=0}^{t_{mj}} a_{mk} b_j^k,\ j=1,\ldots,s$$

再将数位按照反序排列并在最前面加小数点从而得到新的值

$$X_{ij}=\sum_{k=0}^{t_{mj}} a_{mk} b_j^{k-t_{mj}-1},\ \ j=1,\ldots,s;$$

再令 $m=m+1$，重复上述步骤。

特别的，在 $s=1$ 时，该序列也被称作 Vander Corupt 序列，这也是最简单最基本的拟随机序列,所以 Halton 序列也被称作是 Vander Corupt 序列的推广。

3.2 拟蒙特卡洛在金融产品定价中的应用（以期权定价为例）

通过前文关于期权和蒙特卡罗方法的介绍，我们知道了，期权价值的计算实际上是将风险考虑到期权的预期收益中，并对其求现值的过程。而在计算收益的过程中，我们通常将收益表示成求期望的形式。蒙特卡洛方法利用概率论中的强大数定律，通过对多次离散的模拟实验求均值，在次数趋近于无穷大的时候，此均值近似于期权的收益。而中心极限定理则给出了有限次模拟实验后模拟误差的范围。

蒙特卡罗方法的收敛度是$\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$；收敛速度还是较慢，这个收敛度说明如果要把标准差缩小到原来的一半需要将模拟次数增加到原来的四倍；而提高十分位的精度需要模拟实验的次数增加为原来的 100 倍。相比之下，拟蒙特卡罗方法是对蒙特卡罗方法的一种改进，拟蒙特卡罗方法的收敛率为$\mathrm{O}(\frac{1}{\mathrm{n}})$，比传统蒙特卡罗方法的收敛速度快得多，提高了模拟效率与精度。

4. 传统蒙特卡洛法与拟蒙特卡罗法的实证对比研究

我们在下面对 3.2 节的内容进行算法实现，以此说明拟蒙特卡洛相比于传统

蒙特卡洛的优越性，并在附录（一）提供了具体的程序语句。

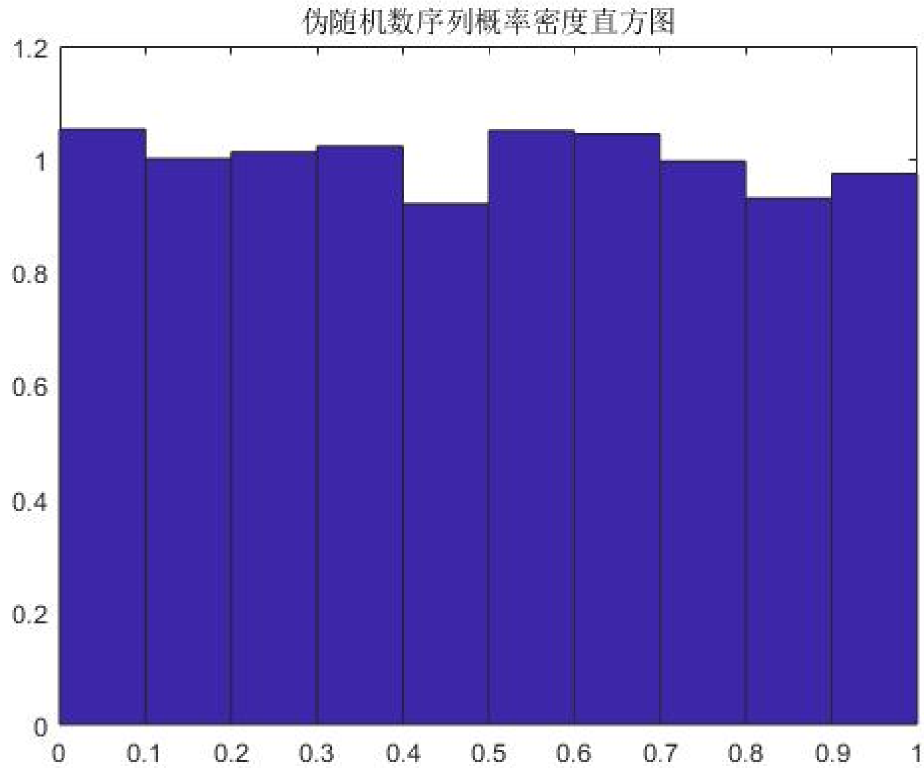
4.1 伪随机数序列与 halton 序列性质对比

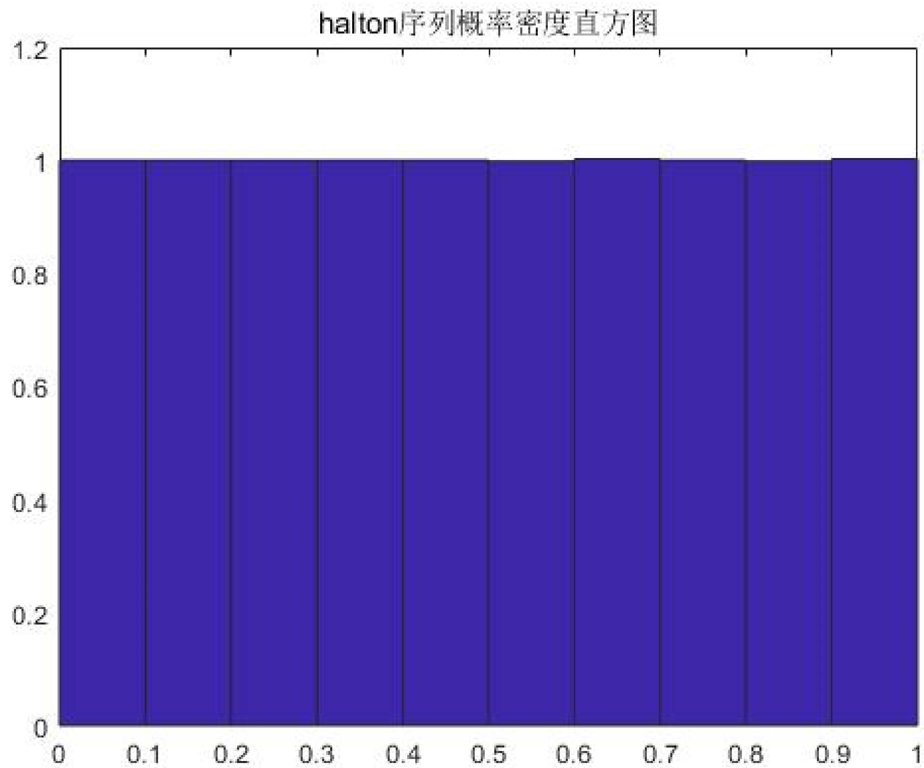
我们首先利用 MATLAB 中 rand 函数生成服从[0,1]区间的均匀分布的 5000 列的伪随机数序列，再根据 halton 序列定义通过编程（代码见附录）得到服从同样分布的 halton 序列。

如下表所示，比较生成的两组模拟数，包括最大值、最小值、均值、方差、中位数、峰度、偏度，并且将这两组模拟数值与服从[0,1]均匀分布的理论值进行比较，可以明显看出 halton 序列在模拟精度上要比传统的伪随机数序列要有更大的优势。

	[0,1]均匀分布	伪随机数序列		Halton 序列	
	理论数值	模拟数值	绝对误差	模拟数值	绝对误差
最大值	1	0.9997	-0.0003	0.9999	-0.0001
中位数	0.5	0.4983	-0.0017	0.5000	0
最小值	0	7.0261e-05	7.0261e-05	6.1035e-05	6.1035e-05
均值	0.5	0.4944	-0.0056	0.5000	0
方差	0.08333	0.0831	-0.0002	0.0834	0.0001
峰度	1.8	1.8041	0.0041	1.8001	0.0001
偏度	0	0.0118	0.0118	-1.0396e-04	-1.0396e-04

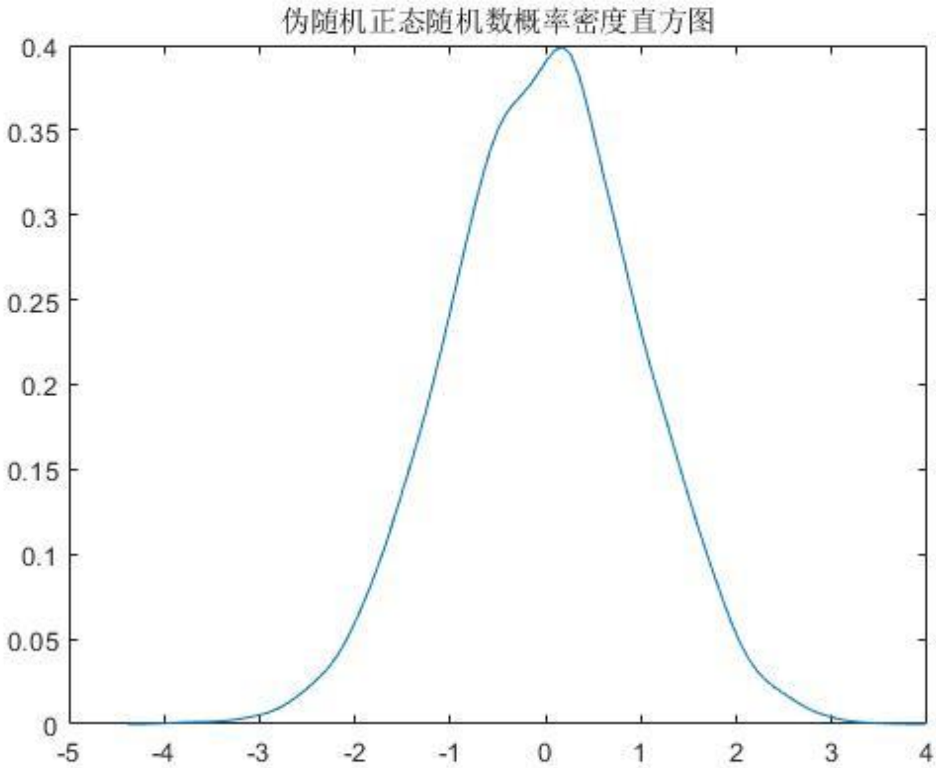
画出这两组数据的概率密度函数直方图。可以看出 halton 序列的要比伪随机数序列分布更加均匀，这也证明了拟蒙特卡洛方法在数据模拟方面的精准度要更优。

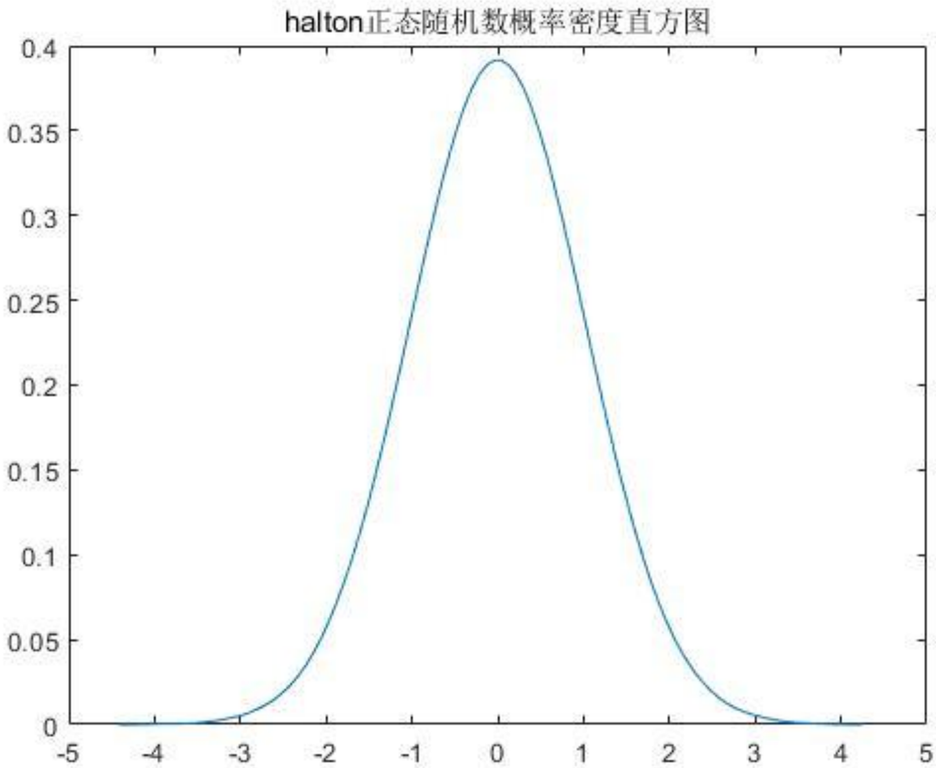




4.2 两种蒙特卡罗法的期权定价仿真模拟

首先利用上一小节生成的伪随机数序列和halton序列分别转换为标准正态分布数，在这里我们直接选用MATLAB中的norminv函数进行实现，再利用所得数据分别求出其概率密度函数如下图。





接下来假设股价的运动服从几何布朗分布，再基于上面模拟得到的正态随机序列，根据股价在每一时刻的数值增量公式：

$$S(\mathrm{t}_{i+1})=S(\mathrm{t}_i)\exp((r-\frac{1}{2}\sigma^2)(\mathrm{t}_{i+1}-\mathrm{t}_i)+\sigma\sqrt{\mathrm{t}_{i+1}-\mathrm{t}_i}Z_{i+1})$$

之后再确定几何布朗运动模型的各个参数，在此次试验中，我们选取

S（0）$=6$，$K=6$，$\mathrm{r}=0.04,\sigma=0.15,T=1.$利用上面提到的增量公式来模拟股票价格路径。由于我们考虑的是欧式期权，到期日的收益只和到期日的股票标的价格有关，与上一路径的各个时刻的价格并没有关系，所以公式可以直接优化为 $$S(T)=S(0)\exp((r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}Z)$$

利用上述公式，在模拟次数达到 1000, 2000, 5000, 10000 次时，分别用蒙特卡洛方法和拟蒙特卡洛方法计算出的期权价格如图所示。此时，我们利用 BS 公式，得到在该条件下欧式看涨期权的理论价格应为 6.5012。可以看到，在模拟次数逐渐增加的过程中，采用 halton 序列模拟得到的结果总是比伪随机数序列得到的结果更加接近于理论值，并且二者的精确度都随着模拟次数的增加而增大，

这一结果是与大数定律相符合的，由此便可以足够看出拟蒙特卡洛方法的巨大优势。

模拟次数	理论值	蒙特卡洛法		拟蒙特卡洛法	
		期权价值	相对误差	期权价值	相对误差
1000	6.5012	6.5127	0.0229	6.5010	0.0003
2000		6.4948	0.0128	6.5013	0.0002
5000		6.5000	0.0024	6.5013	0.0002
10000		6.4965	0.0094	6.5013	0.0002

5. 总结

对于金融分析师来说，他们关心和研究的不是金融市场的波动和证券等的价格涨跌，而是以证券为标的资产的金融衍生品定价问题。针对金融衍生品定价策略，大量的研究者提出了很多方法，蒙特卡罗方法利用统计模拟的原理，将连续性问题转化成为大量、随机的数值问题来研究，在存在着大量可用数据的金融市场中有很大作用。但是，蒙特卡罗方法仍然有计算量太大，高维的时候收敛性不好等一些缺点。针对这些缺点，前人想出了用拟随机数序列代替位随机数序列的拟蒙特卡罗方法和用最小二乘的策略优化蒙特卡罗的 LSM 方法。我们在上文中对这些方法进行了介绍和分析，并利用 MATLAB 将实际数据带入证实了改进方法的优越性。

但是，由于 Black-sholves 公式使用的时候，分析者可以简便而无脑地将相关数据代入公式直接计算。所以目前在金融界使用的大多是 Black-sholves 公式，蒙特卡罗方法在实际市场中应用的并不多，到目前为止基本只是作为一种可行的理论方法存在。

附录（一）

Halton 序列生成函数

```
function result = halton( m,base,seeder )
if nargin < 3
seeder = 0;
if nargin < 2
     error('NotEnoughInputs');
end
end
res=0;
n=length(base);
for i=1:m
    for j=1:n
        element=0;
        temp=seeder+i;
        k=1;
        while temp>0
            element(k)=rem(temp,base(j));
            temp=fix(temp/base(j));
            k=k+1;
        end
        res(i,j)= 0;
        for k=1:length(element)
            res(i,j)=res(i,j)+element(k)/(base(j)^k);
        end
    end
end
```

```
result=res;
```

伪随机数序列和 halton 序列性质的比较

```
>> x=rand(5000,1);

>> y=halton(5000,2,5000);

>> max(x),max(y)

ans =

    0.9997



ans =

    0.9999

>> min(x),min(y)

ans =

   7.0261e-05



ans =

   6.1035e-05
```

```
>> median(x),median(y)

ans =

    0.4983



ans =

    0.5000

>> var(x),var(y)

ans =

    0.0831



ans =

    0.0834

>> mean(x),mean(y)

ans =

    0.4944
```

```
ans =

    0.5000

>> skewness(x),skewness(y)

ans =

    0.0118


ans =

  -1.0396e-04

>> kurtosis(x),kurtosis(y)

ans =

    1.8041


ans =

    1.8001

>>  [f,xi]=ecdf(x);
```

```
ecdfhist(f,xi),title('伪随机数序列概率密度直方图')

>> [f,yi]=ecdf(y);
ecdfhist(f,yi),title('halton 序列概率密度直方图')
```

将两个序列转换为正态随机序列

```
>> x1=norminv(x,0,1);
>> y1=norminv(y,0,1);
>> ksdensity(x1),title('伪随机正态随机数概率密度直方图')
>> ksdensity(y1),title('halton 正态随机数概率密度直方图')
x1=norminv(x);y1=norminv(y);
```

模拟 1000,2000,5000,10000 次的数据

```
 x=rand(1000,1);y=halton(1000,2,1000);
>> x10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*x1));
>> y10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*y1));
>> mean(x10), mean(y10)
ans =

    6.5127
ans =

    6.5010
 x=rand(2000,1);y=halton(2000,2,2000);
x1=norminv(x);y1=norminv(y);
x10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*x1));
```

```
y10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*y1));
mean(x10),mean(y10)

ans =

    6.4948


ans =

    6.5012
>>  x=rand(5000,1);y=halton(5000,2,5000);
x1=norminv(x);y1=norminv(y);
x10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*x1));
y10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*y1));
mean(x10),mean(y10)

ans =

    6.5000


ans =

    6.5013
>>  x=rand(10000,1);y=halton(10000,2,10000);
x1=norminv(x);y1=norminv(y);
x10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*x1));
```

```
y10=6*exp(max(0,0.04-0.5*0.15*0.15+0.15*y1));
mean(x10),mean(y10)

ans =

    6.4965


ans =

    6.5013

>> (6.5127-6.5012)/6.5012

ans =

    0.0018

>> (6.5127-6.5012)/0.5012

ans =

    0.0229

>> (6.5127-6.5012)/0.5012

ans =
```

```
    0.0229

>> (6.4948-6.5012)/0.5012

ans =

   -0.0128

>> (6.5-6.5012)/0.5012

ans =

   -0.0024

>> (6.4965-6.5012)/0.5012

ans =

   -0.0094

>> (6.5010-6.5012)/0.5012

ans =

  -3.9904e-04

>> (6.5013-6.5012)/0.5012
```

```
ans =

   1.9952e-04
```

附录（二）

参考文献

【1】《基于拟蒙特卡洛方法的我国可转债定价研究》——吴鹏程，西南财经大学，2013 年 3 月

【2】《基于拟蒙特卡洛方法的 VAR 计算及其在中国股市中的实证研究》——李擎，复旦大学，2013 年 3 月

【3】《基于最小二乘蒙特卡洛模拟改进方法的可转债定价研究》——孔明明，西南财经大学，2011 年 4 月

【4】《可转换债券的蒙特卡洛定价方法研究》——祝恺，南京理工大学，2015 年 1 月

【5】《美式期权定价的一种蒙特卡罗方法》——张丽虹，《经济研究导刊》2015 年 281 期

【6】《蒙特卡罗方法及其在期权定价中的应用》——李亚妮，陕西师范大学，2007 年 5 月

【7】《蒙特卡罗方法在数量金融中的应用》——何志权，广东工业大学，2016 年 6 月

【8】《蒙特卡洛模拟和拟蒙特卡洛模拟在期权定价中的对比研究》——蒋娇，复旦大学，2013 年 3 月