Exercícios Análise de Dados - Estatística

Lucas Brasil de Cerqueira

Outubro de 2024

1 Exercício 1

Segundo o livro Estimativas e erros em experimentos de Física, para ajustar a reta $y(x) = ax + b$ aos N pares de dados (x_i, y_i) , no qual as incertezas entre os pares são diferentes umas das outras, temos os resíduos sendo ponderados pela função:

$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - ()ax_i + b)]^2}{\sigma_i^2}$

Expandindo em quadrados:

$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i^2}{\sigma_i^2} - 2a\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - 2b\frac{y_i}{\sigma_i^2} + a^2\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} + 2ab\frac{x_i}{\sigma_i^2} + b^2\frac{1}{\sigma_i^2} \right)$

E posteriormente escrevendo em termos das médias ponderadas:
$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} - 2a\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - 2b\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} + a^2\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} + 2ab\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b^2\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$

calculando as derivadas parciais de χ^2 em relção a a a e b e igualando a zero para obter a e b:

$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i(y_i - ax_i - b)}{\sigma_i^2} = 0$
$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - ax_i - b)}{\sigma_i^2} = 0$

$\implies$

$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - a\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - b\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} = 0$
$\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} - a\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} - b\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} = 0$

$\implies$

$\overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{xy}$
$\overline{x}a + b = \overline{y}$

$\Longrightarrow$

$a = \frac{\overline{xy} - \overline{y}\overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$
$b = \overline{y} - a\overline{x}$

2 Exercício 2

Vamos usar: $\sigma = \frac{N_{Total} - N_{background}}{L}$

Onde $N_{Total}(= 2567)$ é o número total de eventos observados, $N_{background}(= 1223.5)$ é o número de eventos de background esperado e $L(= 25\, fb^{-1})$.
$\Longrightarrow$

$\sigma = \frac{2567 - 1223.5}{25} = \frac{1343.5}{25} = 53.74\, fb$

E usando a distribuição de Poisson para calcular a incerteza estatística, obtemos:

$\sigma_{stat}^2 = \left(\frac{\sqrt{N_{Total}}}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{N_{background}}}{L}\right)^2$

$\Longrightarrow$

$\sigma_{stat}^2 = \left(\frac{\sqrt{2567}}{25}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1223.5}}{25}\right)^2$

$\sigma_{stat} = \sqrt{6.07} \approx 2.46\, fb$

O cálculo da incerteza sistemática é dada por percentual da seção de choque.

$\sigma_{sist} = 0.10 \times \sigma = 0.10 \times 53.74 = 5.37\, fb$

$\Longrightarrow$

$\sigma = 53.74 \pm 2.46_{stat} \pm 5.37_{sist}\, fb$

3 Exercício 3

Consideremos a probalbilidade (λ) de observar um número de eventos esperados (k):

$P(k;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Para k=0,

$P(0;\lambda) = e^{-\lambda}$

Para um nível de confiança de 95%:

$P(0;\lambda) \geq 0.05 \Longrightarrow e^{-\lambda} \geq 0.05$

Aplicando Ln

$-\lambda \geq \ln(0.05) \Longrightarrow -\lambda \geq \ln(0.05)$
$-\ln(0.05) \approx 2.9957$

Para 95% de confiança, podemos excluir 3 everntos esperados.