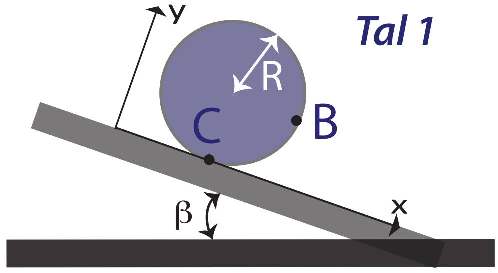
Claes Hedberg

Tentamen Dynamik MT1502, mars, 2018

Betyg: 0-11 = F, 12-14 = E, 15-18 = D, 19-22 = C, 23-26 = B, 27-30 = A .

1.
En boll rullar nedför med vinkelhastighet Ω. Vad är hastigheten hos punkten B, dvs finn $\overline{v}_B$!
Inför ett eget valfritt koordinatsystem.

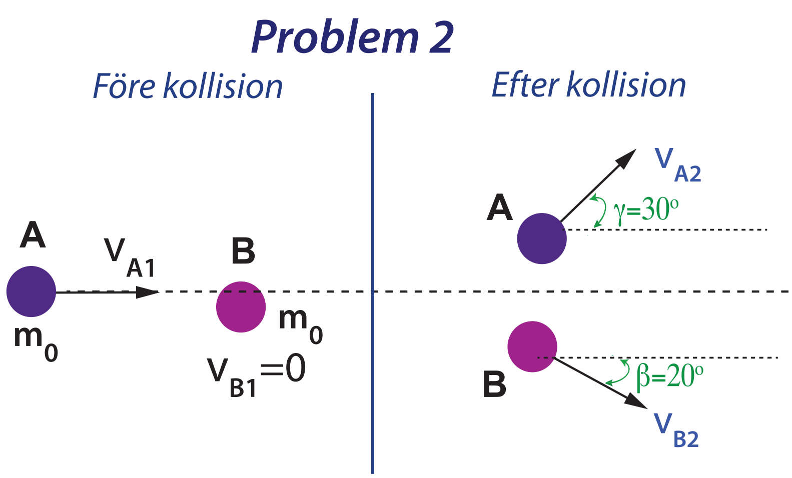


Lösningsutkast Problem 1

Rullning: $\overline{v}_C = 0$; samt, Stel kropp: alla punkter rör sig i cirkel kring alla andra, tex B rör sig i cirkel kring C $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}}$ (1)

Här: $\overline{v}_B = \overline{\Omega} \times \overline{r}_{B/C} = (0, 0, -\Omega) \times (R, R, 0) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & -\Omega \\ R & R & 0 \end{vmatrix} = (\Omega\, R, \Omega\, R, 0)$ med x, y enligt figuren.

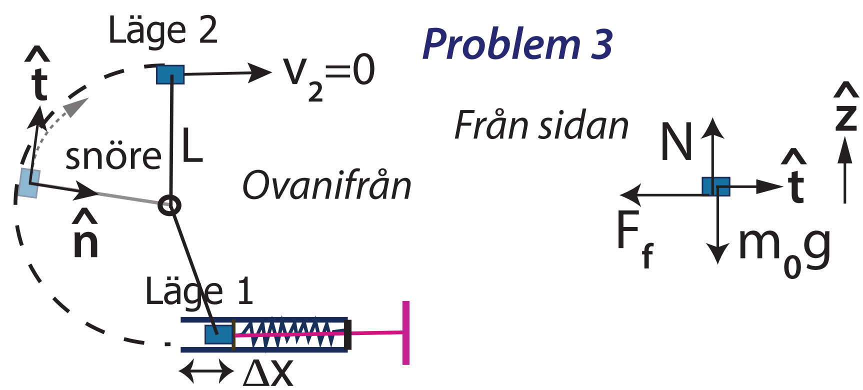
2.
En puck med massa $m_0 = 0.3$ kg kommer in med hastigheten v_{A1}= 1 m/s och kolliderar med en likadan stillaliggande puck B. Efter kollisionen har puck A vinkeln $\gamma = 30°$ och puck B vinkeln $\beta = 20°$ mot As initiala riktning, se figuren ! Hur mycket rörelseenergi har försvunnit i kollisionen ? - dvs finn $T_1 - T_2$!
Se puckarna som partiklar, dvs försumma puckarnas rotation.



Lösningsutkast Problem 2 Stöt: $\boxed{\int \overline{F}\, dt = \Delta(m\overline{v})}$

$\rightarrow$: $v_{A1} = v_{A2} \cdot \cos(\gamma) + v_{B2} \cdot \cos(\beta)$ (1)
$\uparrow$: $0 = v_{A2} \cdot \sin(\gamma) - v_{B2} \cdot \sin(\beta)$ $\Rightarrow v_{A2} = v_{B2} \cdot \sin(\beta)/\sin(\gamma) = v_{B2} \cdot \sin(20°)/\sin(30°)$ (2) ini (1):
$v_{A1} = v_{B2} \cdot [\sin(\beta)/\sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\beta)] \Rightarrow$
$v_{B2} = v_{A1}/[\sin(\beta)/\sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\beta)] = 1/[\sin(20°)/\sin(30°) \cdot \cos(30°) + \cos(20°)] = 0.652$ m/s
(2) : $v_{A2} = 0.652 \cdot \sin(20°)/\sin(30°) = 0.446$ m/s
$T_1 - T_2 = m_0 v_{A1}^2/2 - (m_0 v_{A2}^2/2 + m_0 v_{B2}^2/2) = 0.056$ J

3.
Genom att spänna en fjäder kan man skjuta iväg en liten kloss (som har massan m_0). Klossen sitter fast i ett horisontellt snöre som har längd L, se bilden ! Den statiska friktionskoefficienten mellan underlag och kloss är μ_s, och den kinematiska är μ_k.
Hur mycket ska fjädern med fjäderkonstant k spännas för att klossen precis ska nå fram till punkt 2 och stanna där - dvs finn $\Delta x(v_2 = 0)$!



Lösningsutkast Problem 3

$$\boxed{U^* = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e} \qquad (1)$$

$$\boxed{U^* = \int \overline{F} \cdot d\overline{r}} = \int -F_f \cdot ds = -F_f \cdot \Delta s = \left[\text{ längd halvcirkel: } \pi r \right] = -F_f \cdot \pi L \qquad (2)$$

$$\boxed{T = m\,v^2/2} : T_1 = T_2 = 0. \qquad (3) \qquad \boxed{V_g = m\,g\,h} : V_{g1} = V_{g2} = 0 \qquad (4)$$

$$\boxed{V_e = k\,x^2/2} : V_{e1} = k \cdot (\Delta x)^2/2\,; \; V_{e2} = 0 \qquad (5) \qquad \boxed{\overline{F} = m\bar{a}} : \quad \hat{z} \uparrow : \quad N - m_0 g = 0 \qquad (6)$$

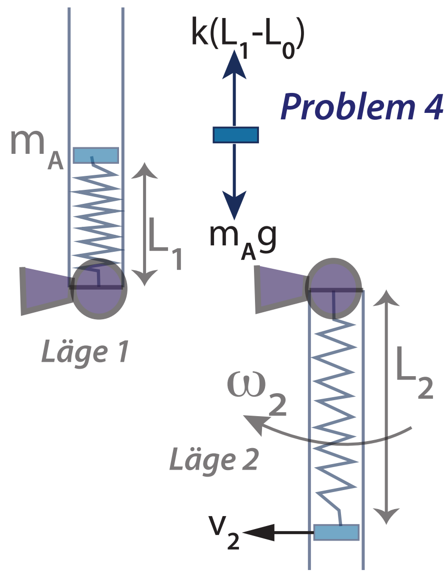
Klossen glider så $\boxed{F_f = \mu_k N}$ som med (6) $\Rightarrow F_f = \mu_k\, m_0\, g \qquad (7)$

(2), (3) (4), (5) och (7) ini (1) ger: $-\mu_k \cdot m_0 \cdot g \cdot \pi L = 0 + 0 - k(\Delta x)^2/2$, och således

$$\Delta x = \sqrt{2\,\mu_k\, m_0\, g \cdot \pi L/k}$$

4.

Ett rör med försumbar massa har en kloss med massa m_A inuti sig som sitter fast i en fjäder. I Läge 1 så pekar röret rakt uppåt, systemet är stilla och fjäderlängden är L_1. Röret faller och roterar friktionsfritt. I Läge 2 så pekar det rakt ned. Vinkelhastigheten är då ω_2, fjäderlängden är L_2, och massan råkar ha hastighet noll relativt röret (dvs den har just då ingen hastighet i radiell led).
Vad är fjäderkonstanten ? - dvs bestäm k **!**



Lösningsutkast Problem 4

Inga yttre krafter utom gravitation och fjäder: Energin bevaras.

$\boxed{U^*_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e}$ (1) Här : $U^*_{1-2} = 0$;

$\Delta T = T_2 - T_1 = \boxed{m\,v^2/2} = m_A\,v_2^2/2$ (2)

$\Delta V_g = \boxed{V_g = mgh} = -m_A g(L_1 + L_2)$ (3)

$\Delta V_e = \boxed{V_e = k\,x^2/2} = k[(L_2 - L_0)^2 - (L_1 - L_0)^2]/2$ (4)

Läge 1: $\boxed{\overline{F} = m\,\overline{a}}$: $\uparrow$: $k(L_0 - L_1) - m_A\,g = 0 \;\Rightarrow L_0 = L_1 + m_A g/k$ (5) = ospända längden på fjädern.

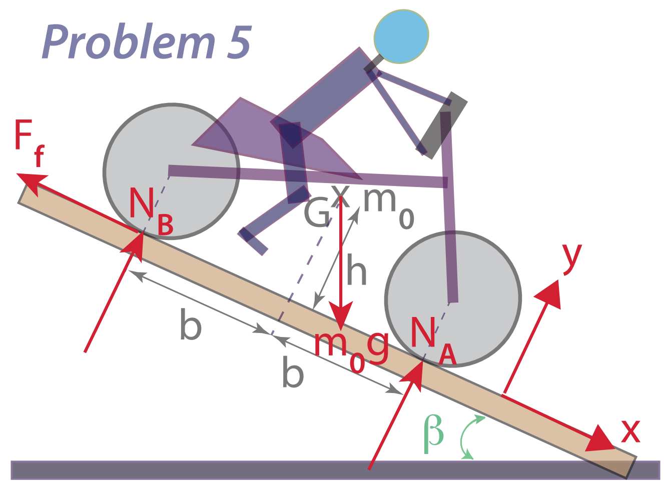
Eftersom ingen radiell hastighet, så rör sig m_A just i Läge 2 i cirkel: $\boxed{\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}} \Rightarrow v_2 = \omega_2 L_2$ (6)

(2)-(4) ini (1): $0 = m_A v_2^2/2 - m_A\,g(L_1 + L_2) + k/2 \cdot [L_2^2 - 2L_0L_2 + L_0^2 - L_1^2 + 2L_0L_1 - L_0^2] =$ (5)+(6) $m_A\omega_2^2 L_2^2/2 - m_A\,g(L_1 + L_2) + k/2 \cdot [L_2^2 - 2(L_1 + m_A g/k)L_2 - L_1^2 + 2(L_1 + m_A g/k)L_1] =$
$m_A\omega_2^2 L_2^2/2 - m_A\,g(L_1 + L_2) + k/2 \cdot [L_2^2 - 2(L_1 + m_A g/k)L_2 - L_1^2 + 2(L_1 + m_A g/k)L_1] = m_A\omega_2^2 L_2^2/2 + m_A\,g(-L_1 - L_2 - L_2 + L_1) + k/2 \cdot [L_2^2 - 2L_1L_2 - L_1^2 + 2L_1^2] = m_A\omega_2^2 L_2^2/2 - m_A\,g\,2L_2 + k/2 \cdot (L_2 - L_1)^2 = 0$. This gives that
$k = 2(-m_A\omega_2^2 L_2^2/2 + m_A\,g 2L_2)/(L_2 - L_1)^2 = m_A L_2(4\,g - \omega_2^2 L_2)/(L_2 - L_1)^2$

5.

En motorcykel körs nedför en backe. Den bromsar med enbart bakhjulet. Vad blir den största möjliga inbromsningen ? - dvs finns a_{max} **!**

Antag att den *inte* kan välta. Friktionskoefficienterna mellan bakhjul och underlag är givna som μ_s och μ_k.



Lösningsutkast Problem 5

$\boxed{\overline{F} = m\,\overline{a}_G}$ $\boxed{M = I\,\ddot{\theta}}$

$\underline{x:}$ $-F_f + m_0 g \cdot \cos(\beta) = m_0 \ddot{x} = ma$ (1)

$\underline{y}:$ $N_A + N_B - m_0 g \cdot \sin(\beta) = m_0 \ddot{y} = 0$ (2)

$\circlearrowleft \underline{G}:$ $N_A\, b - N_B\, b - F_f\, h = I_G \cdot 0 = 0$ (3)

$\boxed{F_f \le \mu_s\, N}$. Störst inbromsning när rullar på gränsen till glidning: $F_{fm} = \mu_s\, N_B$ (4)

(1): $a_{max} = g \cdot \cos(\beta) - F_{fm}/m_0$ (5)

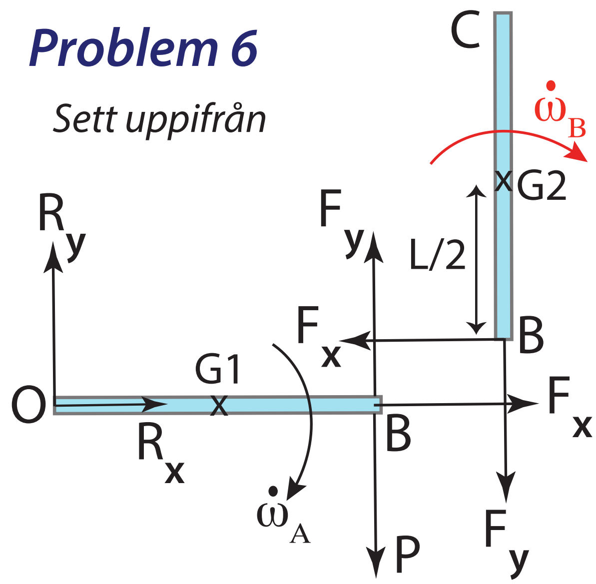
(2) och (3): $N_A = -N_B + m_0 g \cdot \sin(\beta) = N_B + F_f\, h/b \Rightarrow 2N_B = m_0 g \cdot \sin(\beta) - F_f\, h/b$ in i (4):

$F_{fm} = \mu_s N_B = \mu_2\, [m_0 g \sin(\beta)/2 - F_{fm}\, h/(2b)] \;\; \Rightarrow$

$F_{fm}(1 + \mu_s h/(2b)) = m_0\, g \sin(\beta)/2$ in i (6):

$a_{max} = g \cdot \cos(\beta) - g \sin(\beta)/(2 + \mu_s h/b)$

6.
Två smala stänger ligger stilla på ett friktionsfritt bord och sitter ihop med en fritt vridbar länk i B. De har massorna m_0 och längderna L. Den vänstra stångens ände sitter i en fix punkt O och stången är fritt vridbar runt denna. En kraft P påverkar plötsligt systemet i punkt B, se bilden !
Vad blir den övre stångens vinkelacceleration ? - dvs finn $\dot{\omega}$!
Svara med både storlek och riktning (här räcker + eller -).



Lösningsutkast Problem 6

$\boxed{\overline{F} = m\overline{a}_G}$ $\boxed{M = I\,\ddot{\theta}}$ (1)

Stela kroppar - cirkelrörelse: $\boxed{\vec{a} = \dot{\overline{\omega}} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}}$ (2)

Relativ rörelse: $\boxed{\ddot{\overline{r}}_A = \ddot{\overline{r}}_B + \ddot{\overline{r}}_{A/B}}$ (3)

Det finns många ekvationer man kan ställa upp. Det visar sig att vi bara behöver använder några.
Precis när kraften börjar verka är alla hastigheter noll, tex $\omega_A = 0$ (4)
$\underline{\rightarrow BC;\, x:}$ $-F_x = m_0\,\ddot{x}_{G2} = (3) = m_0(\ddot{x}_B + \ddot{x}_{G2/B})$ (5)
B i cirkel kring O: (2)$\Rightarrow$ $\ddot{x}_B = -a_{n\,B} = -L \cdot \omega_A^2 = 0$ (6) och $\ddot{x}_{G2/B} = (2) = a_{t\,G2/B} = L/2 \cdot \dot{\omega}_B$ (7)
$\underline{G2}$: $-F_x \cdot L/2 = I_{G2} \cdot (-\dot{\omega}_B) = -m_0 L^2/12 \cdot \dot{\omega}_B \;\Rightarrow\; -F_x = -m_0\, L/6 \cdot \dot{\omega}_B$ (8)
(5)+(6)+(7): $-F_x = m_0(0 + L/2 \cdot \dot{\omega}_B) = (8) = -m_0\, L/6 \cdot \dot{\omega}_B$
Enda lösningen till detta - att $\dot{\omega}_B/2 = -\dot{\omega}_B/6$ - är $\dot{\omega}_B = \dot{\omega} = 0$.
(Detta gäller precis när kraften börjar verka.)