Kapitel 1

Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet

Ziel. $\int_\Sigma K \; dA = 2\pi\chi(\Sigma)$

1.1 Isometrien

“Isometrien sind Diffeomorphismen, welche die erste Fundamentalform, und deshalb interne Distanzen erhalten.” Seien $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen und $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$ offen.

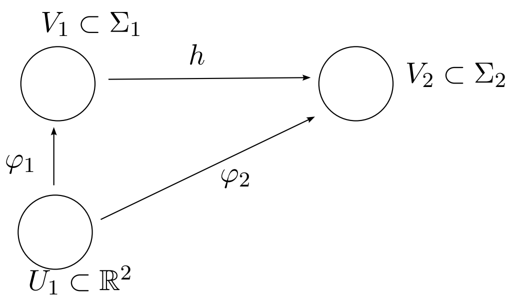
Definition. Ein (C^2)-Diffeomorphismus $h : V_1 \to V_2$ heisst *lokale Isometrie*, falls für alle $p \in V_1$ und alle $v, w \in T_p\Sigma$ gilt:

$$\langle (Dh)_p(v), (Dh)_p(w) \rangle_{h(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

Im Fall $V_1 = \Sigma_1, V_2 = \Sigma_2$ heisst $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ eine (globale) Isometrie.

Proposition 1. *Seien $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$ offen, $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ eine lokale (C^2)-Parametrisierung, und $h : V_1 \to V_2$ ein (C^2)-Diffeomorphismus. Dann ist h eine lokale Isometrie, genau dann, wenn die Koeffizientenfunktionen $E_i, F_i, G_i : U_1 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ bzgl. der lokalen Parametrisierungen $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 = h \circ \varphi_1 : U_1 \to V_2$ übereinstimmen:*

$$E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$$



Beweis. " $\Longrightarrow$ " Sei $h : V_1 \to V_2$ eine lokale Isometrie. Berechne $E_1(u,v) = \langle \varphi_{1u}, \varphi_{1u} \rangle_{\varphi_1(u,v)}$ und $E_2(u,v) = \langle \varphi_{2u}, \varphi_{2u} \rangle_{\varphi_2(u,v)}$

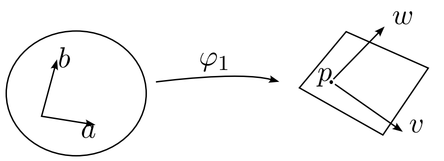
Bemerke

$$\begin{aligned} \varphi_{2u}(u,v) &= \frac{d}{du}\varphi_2(u,v) = \frac{d}{du}(h \circ \varphi_1)(u,v) \\ &= (Dh)_{\varphi_1(u,v)}\left(\frac{d}{du}\varphi_1(u,v)\right) = (Dh)_{\varphi_1(u,v)}(\varphi_{1u}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E_2(u,v) = \langle (Dh)_{\varphi_1(u,v)}(\varphi_{1u}), (Dh)_{\varphi_1(u,v)}(\varphi_{1u}) \rangle_{h\circ\varphi_1(u,v)} = \langle \varphi_{1u}, \varphi_{1,u} \rangle_{\varphi_1(u,v)}$$

Beim letzen Schritt wird benutzt, dass h eine lokale Isometrie ist! Also gilt $E_1 = E_2$, analog $F_1 = F_2, G_1 = G_2$.
" $\Longleftarrow$ " Seien $p \in V, v, w \in T_p\Sigma_1$. Wähle (die eindeutigen) $q \in U_1, a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi_1(q) = p, (D\varphi_1)_q(a) = v, (D\varphi_1)_q(b) = w$



Schreibe $a = a_1e_1 + a_2e_2, b = b_1e_1 + b_2e_2$. Berechne

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_p &= \langle (D\varphi_1)_q(a), (D\varphi_1)_q(b) \rangle_{\varphi_1(q)} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Def. von } E,F,G}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle (Dh)_p(v), (Dh)_p(w) \rangle_{h(p)} &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel } D(h\circ\varphi_1)_q = (Dh)_{\varphi_1(q)} \circ (D\varphi_1)_q}}{=} \langle D(\overbrace{h \circ \varphi_1}^{\varphi_2})_q(a), D(\overbrace{h \circ \varphi_1}^{\varphi_2})_q(b) \rangle_{h\circ\varphi_1(q)} \\ &= \langle a_1\varphi_{2u} + a_2\varphi_{2v}, b_1\varphi_{2u} + b_2\varphi_{2v} \rangle \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_1 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Beispiel (Kreiskegel)**.** Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\} \subset \mathbb{R}^3$ der Kreiskegel mit (lokaler) Parametrisierung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi) &\to K \\ (u,v) &\mapsto (\frac{u}{\sqrt{2}}\cos(v), \frac{u}{\sqrt{2}}\sin(v), \frac{u}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ das Bild der lokalen Parametrisierung

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}^2 \qquad (\subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}) \\ (u,v) &\mapsto (u\cos\frac{v}{\sqrt{2}}, u\sin\frac{v}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

Berechne die Koeffizientenfunktionen E, F, G (bzgl. φ) und $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ (bzgl. ψ).

$$\begin{aligned}E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle &= 1 = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \tilde{E} \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle &= 0 = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = \tilde{F} \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle &= \frac{u^2}{2} = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = \tilde{G}\end{aligned}$$

$h = \varphi \circ \psi^{-1} : S \to K$ ist eine lokale Isometrie (aus Proposition).

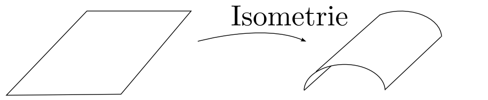
Korollar 1. *Seien $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$ offen und $h : V_1 \to V_2$ eine lokale Isometrie. Dann gilt für alle $p \in V_1$*

$$K(p) = K(h(p))$$

"Isometrien erhalten die Krümmung"

Beweis. Benutze Theorema Egregium (K ist durch E, F, G bestimmt) und obige Proposition. □

Bemerkung. Die mittlere Krümmung ist nicht invariant unter (lokalen) Isometrien.



$H = 0, K = 0$ $\qquad$ $H \neq 0, K = 0$

Interne Distanzen

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine wegzusammende reguläre Fläche.

Definition. Für $p, q \in \Sigma$ definiere $d_\Sigma(p,q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to \Sigma\ C^1 \text{ mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$ Hier ist

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 ||\dot{\gamma}(t)||\, dt$$

Lemma 1. *Sei $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ eine Isometrie. Dann gilt für alle $p, q \in \Sigma_1$*

$$d_{\Sigma_1}(h(p), h(q)) = d_{\Sigma_1}(p, q)$$

"Isometrien erhalten interne Distanzen".

Beweis. Sei $\gamma : [0,1] \to \Sigma_1$ C^1. Berechne

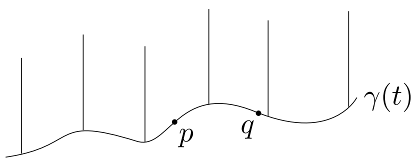
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(h \circ \gamma) &= \int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{d}{dt} h \circ \gamma(t), \frac{d}{dt} h \circ \gamma(t) \right\rangle_{h(\gamma(t))}} \\
&= \int_0^1 \sqrt{\langle (Dh)_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)), (Dh)_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) \rangle_{h(\gamma(t))}}\, dt \\
&= \int \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle_{\gamma(t)}}\, dt \\
&= \mathcal{L}(\gamma)
\end{aligned}$$

$\implies \inf\{\mathcal{L}(h \circ \gamma) | \dots\} = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) | \dots\}$ $\square$

Bemerkung. Isometrien $h : \Sigma_1 \to Sigma_2$ erhalten Distanzen in R^3 im allgemeinen nicht!

Beispiel. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine injektive, nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve (d.h. $\dot a^2 + \dot b^2 = 1$). Schreibe $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ und definiere $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ als Bild von

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \\
(u, v) &\mapsto (a(u), b(u), v)
\end{aligned}$$



durchgehender Vorhang als Isometrie

Berechne

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1$$

Also ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ eine Isometrie! Im allgemeinen gilt für $(u_1, 0), (u_2, 0) \in \mathbb{R}^2(\implies K = 0$ für alle $p \in \Sigma)$

$$d_{\mathbb{R}^2}(\underbrace{(u_1, 0), (u_2, 0)}_{=|u_1 - u_2|}) \neq d_{\mathbb{R}^3}(\underbrace{\varphi(u_1, 0)}_{p}, \underbrace{\varphi(u_2, 0)}_{q})$$

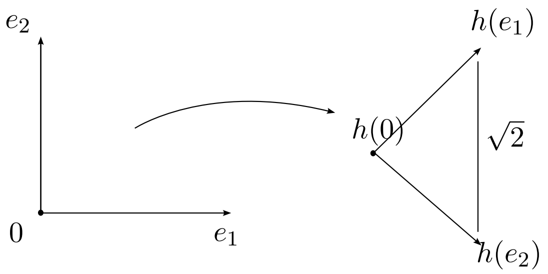
Isometrien der Ebene

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie (bzgl. Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$). Dann existieren (eindeutige) $A \in O(\mathbb{R}^2), b \in \mathbb{R}^2$ mit $h(p) = A(p) + b$.

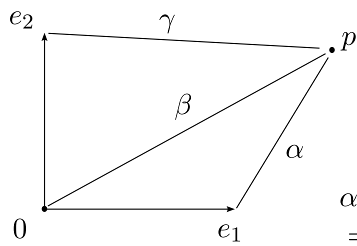
Bemerkung. Jede Abbildung der Form $p \mapsto A(p) + b$ mit $A \in O(\mathbb{R}^2)$ ist eine Isometrie:

$$(Dh)_p = A \text{ und } \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

Sei nun $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie. Dann erhält h Distanzen in $\mathbb{R}^2$ (wende obiges Lemma an). Betrachte nun die Punkte $0, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ und deren Bilder $h(0), h(e_1), h(e_2) \in \mathbb{R}^2$. Setze $b = h(0)$



Geometrisch:



α, β, γ bestimmen p
$\implies h^{-1} \circ \tilde{h}(p) = 0$

Es existiert $A \in O(\mathbb{R}^2)$ mit $A(0) + b = h(0), A(e_1) + b = h(e_1), A(e_2) + b = h(e_2)$. Setze $\tilde{h}(p) = A(p) + b$. Dann ist $h^{-1} \circ \tilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie mit Fixpunkten $0, e_1, e_2 \implies h^{-1} \circ \tilde{h} = Id_{\mathbb{R}^2}$, also $\tilde{h} = h$.

Lemma 2. *Seien $\varphi, \psi : \Sigma \to \Sigma$ Isometrien. Dann sind φ^{-1} und $\varphi \circ \psi : \Sigma \to \Sigma$ Isometrien.*

Beweis. Benutze $(D\varphi^{-1})_p = (D\varphi)^{-1}_{\varphi^{-1}(p)}$ und $(D\varphi \circ \psi)_p = (D\varphi)_{\psi(p)} \circ (D\psi)_p$. □

Konsequenz. Die Isometrien von Σ bilden unter der Komposition eine Gruppe mit neutralem Element Id_Σ. $\mathrm{Iso}(\Sigma) = \{h : \Sigma \to \Sigma \mid h \text{ ist eine Isometrie}\}$ Isometriegruppe von Σ.

Beispiele.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$). Sei $\varphi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$. Dann existiert (eindeutige) $A \in O(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $h(p) = A(p) + b$.

   Frage. Gilt $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \simeq O(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$? (D.h. isomorph)

   Nein! Grund: Schreibe $h_1(p) = A_1(p) + b_1$, bzw. $h_2(p) = A_2(p) + b_2$. Dann gilt

$$h_1 \circ h_2(p) = h_1(A_2 p + b_2) = A_1 A_2 p + \overbrace{A_1 b_2 + b_1}^{\neq b_1 + b_2}$$

$\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \simeq O(\mathbb{R}^2) \ltimes_\alpha \mathbb{R}^2$ ist ein *semidirektes Produkt.*

$$\begin{aligned} \alpha : O(\mathbb{R}^2) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2) \text{ Automorphismus} \\ A &\mapsto h_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, b \mapsto Ab \end{aligned}$$

Multiplikationsvorschrift in einem semidirekten Produkt.

$$\begin{aligned} &G \ltimes_\alpha H, \alpha : G \to \mathrm{Aut}(H) \\ &(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 \alpha(g_1)(h_2)) \end{aligned}$$

Im Spezialfall $\alpha = Id$ ist es ein direktes Produkt.

2. $\Sigma = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Iso}(S^2) \underset{\uparrow}{\simeq} O(\mathbb{R}^3)$$

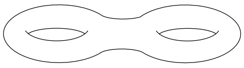
$h \in \mathrm{Iso}(S^2)$ ist durch die Bilder dieser (allgemeiner) Punkte bestimmt

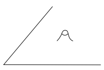
3. $\Sigma = S^1 \times S^1$

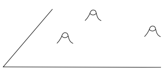
$$\mathrm{Iso}(S^1 \times S^1) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{=\{Id, s\}} \ltimes O(\mathbb{R}^2)$$

4. Γ_f für $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\mathrm{Iso}(\Gamma_f) = O(\mathbb{R}^2)$$

5. $\Sigma =$  $\mathrm{Iso}(\Sigma) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ erzeugt von drei Spiegelungen an Koordinatenebenen.

6.  $\to O(\mathbb{R}^2)$

7.  $\mathrm{Iso}(\Sigma) = \begin{cases} S_3 & \text{gleichseitiges Dreieck} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{gleichschenkliges Dreieck} \\ \{id\} & \text{sonst} \end{cases}$

Weiterführend:

Theorem 1 (Hurwitz)**.** *Sei Σ eine geschlossene Fläche mit konstanter Krümmung -1 (insbesondere ist dies keine reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$). Dann gilt:*

$$|\mathrm{Iso}(\Sigma)| \leq 84(g - 1) \qquad g \textit{ Geschlecht der Fläche}$$

1.2 Paralleltransport und Geodäten

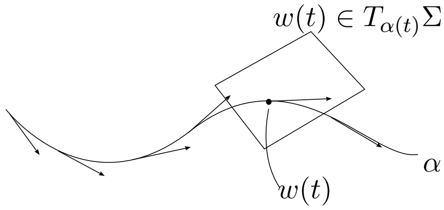
Ziel. Beschreibe Geodäten $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$

Frage. Dazu stellen werden wir folgendes benötigen: Was bedeutet $\dot{\gamma}(t)$ ist konstant?

- In $\mathbb{R}^2$ $\quad \ddot{\gamma}(t) = 0$
- In Σ $\quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ - die kovariante Ableitung

Definition. Ein glattes Vektorfeld *entlang* einer glatten Kurve $\alpha : [a,b] \to \Sigma$ ist eine glatte Abbildung $w : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mit $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$.
Die *horizontale Ableitung* oder (*kovariante Ableitung*) von w im Punkt $\alpha(t)$ ist die orthogonale Projektion der Abbildung $\frac{dw}{dt}(t)$ auf $T_{\alpha(t)}\Sigma$:

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t) - \left\langle \frac{dw}{dt}(t), N(\alpha(t)) \right\rangle N(\alpha(t))$$



Bemerkung. Wir betrachten glatte Kurven und Vektorfelder (aber C^2 reicht praktisch immer).

Berechnung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale (glatte) Parametrisierung mit $\alpha([a,b]) \subset \varphi(U) = V$. Schreibe $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$. Sei $w : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang α. Schreibe $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma = \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$ als $w(t) = \alpha(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$. Es gilt

$$\frac{dw}{dt}(t) = \dot{a}(t)\varphi_u + \dot{b}\varphi_v + a\dot{u}\varphi_{uu} + a\dot{v}\varphi_{vu} + b\dot{v}\varphi_{vv}$$

Dazu erinnere dass $\frac{d}{dt}(\varphi_u = \varphi_{uu}\dot{u} + \varphi_{vu}\dot{v}$
Mit $\varphi_{uu} = eN + \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v$ etc.. erhalten wir

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \left(\dot{a} + \Gamma^1_{11}a\dot{u} + \Gamma^1_{12}a\dot{v} + \Gamma^1_{21}b\dot{u} + \Gamma^1_{22}b\dot{v}\right)\varphi_u + \left(\dot{b} + \Gamma^2_{11}a\dot{u} + \Gamma^2_{12}a\dot{v} + \Gamma^2_{21}b\dot{u} + \Gamma^2_{22}b\dot{v}\right)\varphi_v$$

Definition. w heisst *parallel*, falls $\dfrac{Dw}{dt} \equiv 0$
"keine Änderung in Richtung der Tangentialebene"

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

Sei $w(t) = a(t)e_1 + b(t)e_2$.

$$\frac{dw}{dt} = \dot{a}(t)e_1 + \dot{b}e_2 \perp e_3 = N \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

2. Betrachte $\alpha : [0, 2\pi] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$
$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$
Dann ist $w(t) \equiv e_3$ ein paralleles Vektorfeld entlang α.

$$\frac{dw}{dt} = 0 \implies \frac{Dw}{dt} = 0$$

beachte hier $e_3 \in T_{\alpha(t)}S^2$ für alle t. Weiteres Beispiel $\bar{w}(t) = \dot{\alpha}(t)$

$$\frac{d\bar{w}}{dt}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \mid\mid N(\alpha(t)) \implies \frac{D\bar{w}}{dt}(t) = 0 \text{ (da } \frac{d\bar{w}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}S^2 \text{)}$$

Bemerkung. Die Bedingung $\frac{Dw}{dt} = 0$ ist unabhängig von der Parametrisierung von $\alpha : [a, b] \to \Sigma$

Sei $\sigma : [a, b] \to [a, b]$ ein Diffeomorphismus mit $\sigma(a) = a$ und $\sigma(b) = b$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(w(\alpha(\sigma(t))) = \frac{d}{d\sigma}w(\alpha(\sigma))\dot{\sigma}(t) \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{Dw}{d\sigma}\dot{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \sigma \text{ Diffeomorphismus } &\implies \dot{\sigma}(t) \neq 0 \\ &\implies \frac{Dw}{dt} = 0 \iff \frac{Dw}{d\sigma} = 0 \end{aligned}$$

Definition. Eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to \Sigma$ heisst *geodätisch*, falls $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$. Das Bild von γ bezeichnen wir mit *Geodäte*.

Beachte hier $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$, also ist $\dot{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang $\gamma(t)$.

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt $\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$ (siehe oben), also

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \iff \frac{d\dot{\gamma}}{dt}(t) = \ddot{\gamma}(t) = 0$$

Also parametrisieren geodätische Kurven in der Ebene Geradenabschnitte.

2. $\Sigma = S^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \gamma : \mathbb{R} \to S^2$ ist geodätisch, da $\frac{D\dot\gamma}{dt}(t) = 0$.
(Siehe oben: $\frac{d\dot\gamma}{dt} = \ddot\gamma(t)$ ist parallel zu $N(\gamma(t))$, also senkrecht zu $T_{\gamma(t)}S^2 \implies \frac{D\dot\gamma}{dt} = 0$.) Analog sind alle *Grosskreisenabschnitte* mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert Geodäten. Wir werden später sehen, dass *alle* Geodäten von dieser Form sind.

3. $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ Betrachte die lokal *isometrische* Parametrisierung.
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to Z$
$(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$

   Behauptung. *Die Bilder von Geodäten in $\mathbb{R}^2$ unter φ sind Geodäten.*

   Spezialfall. Geraden durch $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Erinnerung. Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ glatt heisst *geodätisch*, falls $\dfrac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$

In lokalen Koordinaten bezüglich einer Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$, schreibe $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. (falls $\gamma(\mathbb{R}) \subset \varphi(U)$)

Geodätengleichung

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0$$
$$\ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0$$

Führe Koordinaten $w = \dot{u}, z = \dot{v}$ ein. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen mit glatten Koeffizienten, (d.h. lokal lipschitz) erster Ordnung auf $\mathbb{R}^4$

- $\dot{u} = w$
- $\dot{v} = z$
- $\dot{w} = \ddot{u} = -(...)$
- $\dot{z} = \ddot{v} = -(...)$

Es seien Anfangsbedingungen $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ vorgegeben ($p \in \varphi(U)$).
Seien $(u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4$ mit $\varphi(u_0, v_0) = p,\ v = w_0\varphi_u + z_0, \varphi_v$ Nach Picard Lindelöf existiert eine *eindeutige* Lösungskurve $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^4$ zur Anfangsbedingung $\bar{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0, z_0)$; $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))$. Dann ist $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ unsere gesuchte Lösung.

$\Longrightarrow$

Proposition 3. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, $p \in \Sigma$ und $v \in T_p\Sigma$ vorgegeben. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige geodätische Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Zusatz. Für vollständige Flächen (d.h. abgeschlossen und ohne Rand) lässt sich γ auf $\mathbb{R}$ erweitern.

Bemerkungen.

1. Die Geodätengleichungen sind invariant unter Isometrien.
   Tätsächlich sind Γ^k_{ij} durch die Koeffizientenfunktionen E, F, G bestimmt, welche invariant unter Isometrien sind. $\Longrightarrow$ Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab (auch lokal gültig).

2. Nach Proposition 3 existiert für alle $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ (Σ vollständig), genau eine geodätische Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. Falls wir für alle Paare (p, v) schon eine Geodäte kennen, dann haben wir alle Geodäten gefunden.
   Anwendung: Geodäten auf S^2 sind *Grosskreise*.
   Geodäten auf dem Zylinder Z sind *Helixen, Meridiane, Mantellinien.*

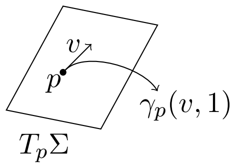
1.3 Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ glatt und vollständig, sowie $p \in \Sigma,\ v \in T_p\Sigma, \gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$

Notation. $\gamma_p(v,t) = \gamma(t)$

Definition. $\exp : T_p\Sigma \to \Sigma$

$$v \mapsto \gamma_p(v,1)$$



Bemerkungen.

1. Es gilt für alle $\lambda > 0, t \in \mathbb{R}$: $\gamma_p(\lambda v, t) = \gamma_p(v, \lambda t)$
2. Eine Verschärfung des Satzes von Picard-Lindelöf nach Cauchy zeigt, dass die Lösung $\gamma_p(v,t)$ glatt von den Parametern $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$, und $t \in \mathbb{R}$ abhängt. Daraus folgt, dass $\exp : T_p\Sigma \to \Sigma$ glatt ist!
3. Wieso heisst diese Abbildung exp? Die Antwort kommt aus der Lietheorie: Betrachte die Gruppe $GL(\mathbb{C}^n)$. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ haben wir die Abbildung $\gamma(t) = e^{tA} \in GL(\mathbb{C}^n)$. Diese Kurve ist geodätisch bezüglich der Killingform auf $GL(\mathbb{C}^n)$
   $\ulcorner$ Sei $X \in GL(\mathbb{C}^n)$ und $A, B \in T_X G(\mathbb{C}^n)$
   $\langle A, B\rangle = spur(X^{-1}AX^{-1}B)$? Stimmt für $X = Id$ $\lrcorner$

Berechung des Differentials von exp

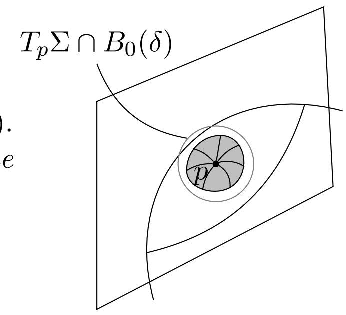
Sei $p \in \Sigma$ und $h \in T_p\Sigma$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = h$, also $\exp(th) = \gamma_p(th, 1) = \gamma_p(h,t) = \gamma(t)$. Berechne nun:

$$(D\exp)_0(h) = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(th) - \exp(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dot{\gamma}(t) = h$$

$$\implies D(\exp)_0 = \mathrm{Id}_{T_p\Sigma}$$

Nach Umkehrsatz existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass die Einschränkung von exp auf $U = T_p\Sigma \cap B_0(\delta) = \{v \in T_p\Sigma \mid ||v||_2 < \delta\}$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $\varphi = \exp|_U : U \to \varphi(U) \subset \Sigma$ eine lokale Parametrisierung.

Wähle auf $T_p\Sigma$ Polarkoordinaten (r,θ) (Wahl ist wo ist $\theta = 0$?). Die entsprechenden Koordinaten auf $\exp(U) \subset \Sigma$ heissen *geodätische Polarkoordinaten.*



Proposition 2. *Bezüglich der lokalen Parametrisierung $\varphi = \exp : U \to \Sigma$ und Koordinaten $(u, v) = (r, \theta)$ gilt:*

$$E = 1, F = 0, \lim_{r\to 0} G(r,\theta) = 0 \text{ und } \lim_{r\to 0} \frac{d}{dr}\sqrt{G(r,\theta)} = 1$$

Beweis. Fixiere einen Winkel $\theta \in S^1 = [0, 2\pi]/0 = 2\pi$. Es gilt $E(r,\theta) = \left\langle \frac{d}{dr}\exp, \frac{d}{dr}\exp \right\rangle$.
Da die Kurve $t \to \exp(t,\theta)$ geodätisch mit Geschwindigkeit 1 ist, folgt

$$\left|\left| \frac{d}{dr}\exp(r,\theta) \right|\right| = 1 \implies E(r,\theta) = 1$$

Das Paar (r, θ) erfüllt die Geodätengleichung:

$$\ddot{\theta} + \Gamma^2_{11}\dot{r}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{r}\dot{\theta} + \Gamma^2_{22}\dot{\theta}^2 = 0$$

Da θ konstant ist, folgt $\Gamma^2_{11} = 0$. Weiterhin gilt (siehe Abschnitt Theorema Egregium)

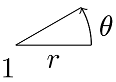
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_r \\ F_r - \frac{1}{2}E_\theta \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \Gamma^2_{11} = 0$$

$E = 1 \implies E_r = E_\theta = 0 \implies \Gamma^1_{11} = 0$ und $F_r = 0$. Also hängt $F(r,\theta) = \langle \exp_r, \exp_\theta \rangle$ nicht von von r ab!

Mit $\lim_{r\to 0} || \exp_\theta || = 0$ folgt also $F = 0$. Ausserdem folgt mit $\lim_{r\to 0} || \exp_\theta || = 0$ auch $\lim_{r\to 0} G(r,\theta) = \lim_{r\to 0}\langle \exp_\theta, \exp_\theta \rangle = 0$.

Genauer: In erster Ordnung in r gilt $|| \exp_\theta(r,\theta)|| = r$ (+höhere Terme) also

$$\lim_{r\to 0} \frac{d}{dr}\sqrt{G(r,\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{d}{dr} || \exp_\theta(r,\theta)|| = 1$$



□

Krümmung in geodätischen Polarkoordinaten

Wir betrachten eine lokale Parametrisierung $\exp : U \to \Sigma$. Bezüglich Polarkoordinaten (r, θ) auf $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt:
$E = 1, F = 0, \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$.

Weiterhin gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\theta \\ \frac{1}{2}G_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}G_r \end{pmatrix} \implies G\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}G_r$$

Berechnung der Krümmung mittels der Formel (Lemma, Theorema Egregium).

$$\begin{aligned} -EK = -K &= (\Gamma^2_{12})_r + (\Gamma^2_{12})^2 \qquad \text{Viele Terme streichen sich weg} \\ &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{G}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{G}\right)^2 \text{ benutze } G \neq 0, \text{ da } \det \neq 0 \end{aligned}$$

Proposition 3. $K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$

Beweis.

$$\begin{aligned}
K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{\sqrt{G}}\right)_r \\
&= -\frac{1}{2}\frac{G_{rr}}{G} + \frac{1}{4}\frac{(G_r)^2}{G^2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{G_r}{G}\right)_r - \frac{1}{4}\frac{G_r^2}{G^2} = K
\end{aligned}$$

□

Anwendung. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, und $\exp : U \to \Sigma$ eine lokale Parametrisierung. Wir machen für die Koeffizientenfunktion $\sqrt{G(r,\theta)}$ eine Taylorentwicklung.

Ansatz. Unter Berücksichtigung von $\lim_{r\to 0}\sqrt{G} = 0, \lim_{r\to 0}\sqrt{G}_r = 1$, sowie Prop. 4 $\sqrt{G} = r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + ...$, (Restterm $R(r,\theta)$ erfüllt $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^3}R(r,\theta) = 0$)

$$\implies \sqrt{G}_{rr} = 2a(\theta) + 6b(\theta)r + \text{höhere Terme}$$

Prop. 5

$$\implies K = -\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}} = \frac{2a(\theta) + 6b(\theta)r + ...}{r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + ...}$$

Die Grenzbetrachtung $r \to 0$ liefert:

- $a(\theta) = 0$ (da K nicht $\to \infty$ gehen darf wegen Glattheit)
- $b(\theta) = \frac{K}{6}$.

Damit erhalten wir $\sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + R(r,\theta)$ Sei $p \in \Sigma$ und $r > 0$.

Definition. Definiere $K^\Sigma(p,r) = \exp(K_0(r))$, wobei $K_0(r) = \{z \in T_p\Sigma \mid |z| = r\}$
"Kreis um p in Σ mit Radius r, *den Kreis runterlegen*"

Setze $U^\Sigma(p,r)$ =Länge($K^\Sigma(p,r)$) $= \int_0^{2\pi}\sqrt{G}\,d\theta$. Weglänge war definiert $\int_0^t\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dt$ hier $u = r, v = \theta$.

Theorem 2 (Umfangdefektformel)**.**

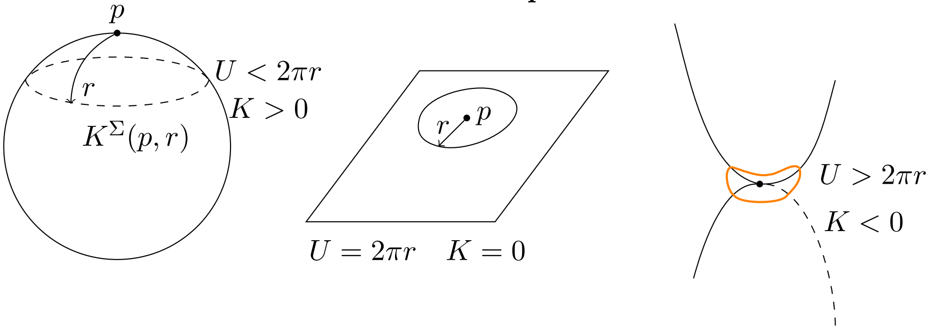
$$K(p) = \lim_{r\to\theta}\frac{2\pi r - U^\Sigma(p,r)}{r^3}\frac{3}{\pi}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned} U^{\Sigma}(p,r) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r,\theta)}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [r - \frac{K(p)}{6} r^3 + R(r,\theta)]\, d\theta \\ &= 2\pi r - \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 + \int_0^{2\pi} R(r,\theta)\, d\theta \\ &\implies \lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - U^{\Sigma}(p,r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(p) \end{aligned}$$

□

Geometrische Interpretation.



Anwendung (Flächen konstanter Krümmung)**.** Falls K konstant ist, dann hat die Differentialgleichung $K\sqrt{G} = -\sqrt{G}_{rr}$ zur Anfangsbedingung $\sqrt{G}(0,\theta) = 0$ $\sqrt{G}_r(0,\theta) = 1$ siehe Prop. 4 eine eindeutige Lösung:

1. $K = 0 \implies \sqrt{G(r,\theta)} = r$ also $G = r^2$
2. $K > 0 \implies \sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} r)$ also $G = \frac{1}{K} \sin(\sqrt{K} r)^2$
3. $K < 0 \sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} r)$ wobei $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

In allen Fällen ist G unabhängig von θ!

Kreisumfang:

- $K = 0$ siehe Weglänge $\int_0^T \sqrt{\dot{r}^2 E + \dot{u}\dot{v} F + \dot{v}^2 G}\ dt$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\ d\theta = \int_0^{2\pi} r\ d\theta = 2\pi r$$

- $K = 1$ mit $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\ d\theta = 2\pi \sin(r)$$

- $K = -1$ “Umfang wächst exponentiell”

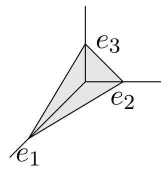
$$U(r) = 2\pi \sinh(r) \sim e^r$$

Theorem 3 (Minding 1839)**.** *Seien Σ_1, Σ_2 reguläre Flächen mit derselben konstanten Krümmung K, und $p_1 \in \Sigma_1, p_2 \in \Sigma_2$. Dann existiert $U_1 \subset \Sigma_1, U_2 \subset \Sigma_2$ offen mit $p_i \in U_i$ und eine lokale Isometrie $h : U_1 \to U_2$.*

Beweis. Bezüglich geodätischer Polarkoordinaten um p_1, p_2 sind die Koeffizientenfunktionen $E = 1, F = 0, G$ durch K bestimmt, also identisch. Wir folgern, dass Σ_1, Σ_2 lokal isometrisch sind (siehe Abschnitt Isometrien). $\square$

1.4 Der Satz von Gauss-Bonnet

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche. Wir betrachten das Standarddreieck $\triangle \subset \mathbb{R}^3$ mit Eckpunkten e_1, e_2, e_3.



Ein Dreieck in Σ ist das Bild von $\triangle$ unter einer glatten Abbildung $\varphi : \triangle \to \Sigma$. Falls die Kanten von $\varphi(\triangle)$ Segmente von Geodäten sind, dann heisst das Dreieck geodätisch.

Definition. Ein *geodätisches Dreieck* in $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ist ein eingebettetes Dreieck, welches von drei geodätischen Segmenten begrenzt wird.

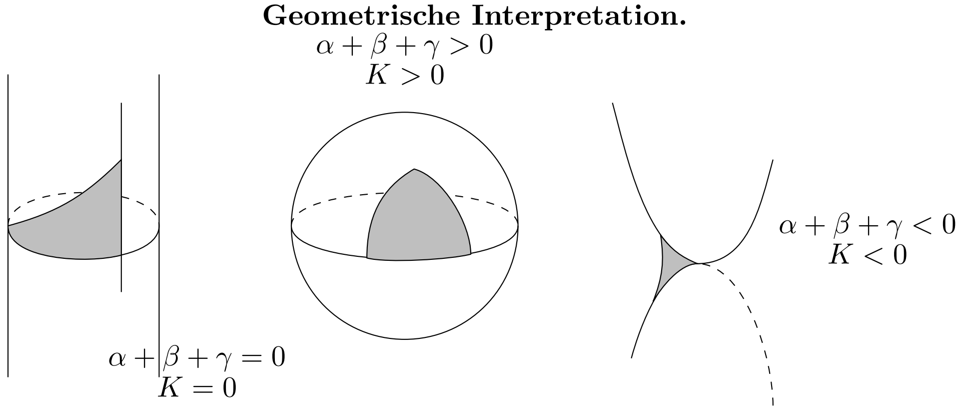
Theorem 4 (Lokale Version von Gauss-Bonnet)**.** *Sei $\triangle \subset \Sigma$ ein geodätisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ. Dann gilt*

$$\int_{\triangle} K\, dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

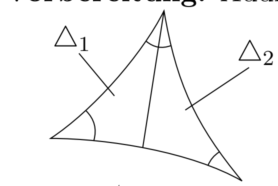
Erinnerung. *Flächenelement $dA = \sqrt{EG - F^2}$*

Bemerkung. Bei konstanter Krümmung $K = 0$ haben alle geodätischen Dreiecke die Innenwinkelsumme π

Geometrische Interpretation.

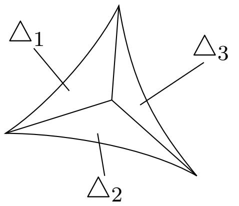


Vorbereitung. Additivität der Formel: $\triangle = \triangle_1 \cup \triangle_2$



$$\underbrace{\int_{\triangle} K\ dA}_{\alpha+\beta+\gamma-\pi} = \underbrace{\int_{\triangle_1} K\ dA}_{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-\pi} + \underbrace{\int_{\triangle_2} K\ dA}_{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2-\pi}$$

Ok, da $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi$



$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \alpha + \beta + \gamma + 2\pi \implies \int_{\triangle} K\ dA = \sum_{i=1}^{3} \int_{\triangle_i} K\ dA$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine lokale Parametrisierung der Form $\varphi = exp : U \to \Sigma$ mit $\triangle_A \subset \varphi(U)$ und $\varphi(0)$ sei ein Eckpunkt von $\triangle$, ebenso sei $B \in \varphi(U \cap \mathbb{R} \times \{0\})$

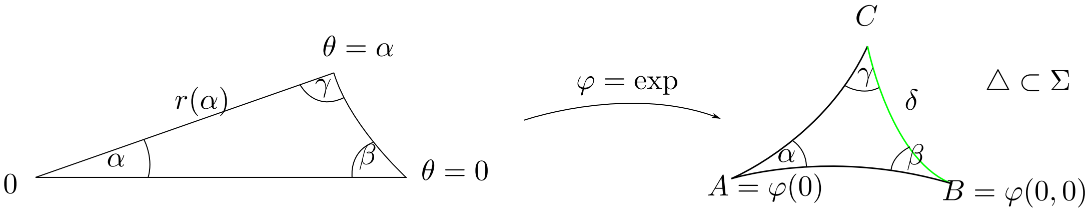


Abbildung 1.1: Interpretation von exp

Parametrisiere den Weg $\delta : [0, \alpha] \to \Sigma$ durch $\delta(\theta) = \exp(r(\theta), \theta)$. Berechne

$$\begin{aligned}
\int_{\triangle} K\, dA &= \int_{\varphi^{-1}(\triangle)} K(r, \theta) \sqrt{EG - F^2}\, dr d\theta \\
&\overset{E=1, F=0, \text{ da } \varphi = \exp}{=} \int_{\varphi^{-1}(\triangle)} K \sqrt{G}\, dr d\theta \\
&\overset{\text{Prop. 5}}{=} \int_{\varphi^{-1}(\triangle)} -\sqrt{G}_{rr}\ dr d\theta \\
&= -\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} \sqrt{G}_{rr}\, dr d\theta \\
&= -\int_0^{\alpha} \left[\sqrt{G}_r(r(\theta), \theta) - \sqrt{G}_r(0, \theta) \right] d\theta \\
&= \alpha - \int_0^{\alpha} \sqrt{G}_r(r(\theta, \theta))\, d\theta
\end{aligned}$$

Lemma.

$$-\sqrt{G}_r(r(\theta, d\theta)) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

wobei $\psi(\theta)$ der Winkel zwischen e_r und $\dot{\delta}(\theta)$ ist.

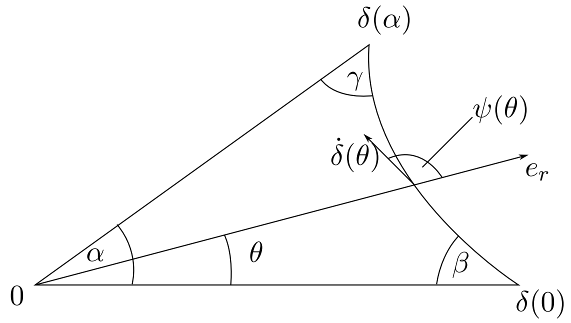


Abbildung 1.2: Darstellung von Lemma

Insbesondere gilt $\psi(0) = \pi - \beta$ und $\psi(\alpha) = \gamma$. Mit dem Lemma folgt also

$$\begin{aligned} \int_\triangle K\, dA &= \alpha + \int_0^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\, d\theta \\ &= \alpha + \psi(\alpha) - \psi(0) \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi \end{aligned}$$

□

Lemma. Berechne

$$\begin{aligned} \sqrt{G}_r &= \frac{1}{2}\frac{G_r}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\langle \varphi_\theta, \varphi_\theta\rangle}_{=G} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\langle \varphi_{r\theta}, \varphi_{\varphi_\theta}\rangle = \langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{||\varphi_\theta||}\rangle \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $\varphi_{r\theta} = \varphi_{\theta r}$ und $\sqrt{G} = ||\varphi_\theta||$ verwendet wird. Wir erinnern uns daran, dass

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{||\varphi_\theta||} \right\rangle = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

"Die Winkeländerung von ψ und φ_r stimmen überein." □

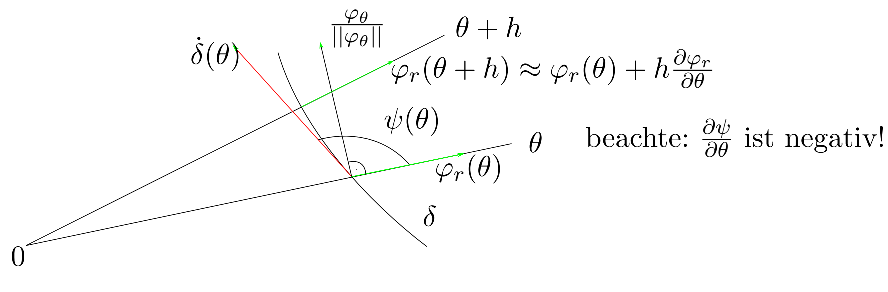


Abbildung 1.3: Beweis geometrisch

Bemerkung. Falls $\triangle \subset \Sigma$ nicht im Bild einer Parametrisierung $\varphi = \exp : U \to \Sigma$ liegt, unterteile $\triangle$ iteriert, bis alle Teildreiecke diese Eigenschaft haben.

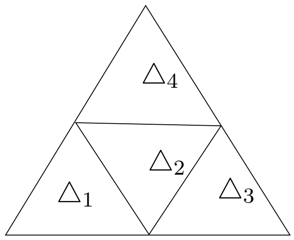


Abbildung 1.4: Iterationsschritt (Seiten halbieren)

Alle Flächen die wir betrachten sind abgeschlossen und kompakt.
Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, glatte Fläche ohne Rand.

Definition. Eine *Triangulierung* T von Σ ist eine endliche Vereinigung von Dreiecken in Σ, $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$ mit folgenden Eigenschaften.

1. $\bigcup_{i=1} \triangle_i = \Sigma$
2. $\triangle_i \cap \triangle_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, *ein* gemeinsamer Eckpunkt, eine, zwei, oder drei gemeinsame Kanten

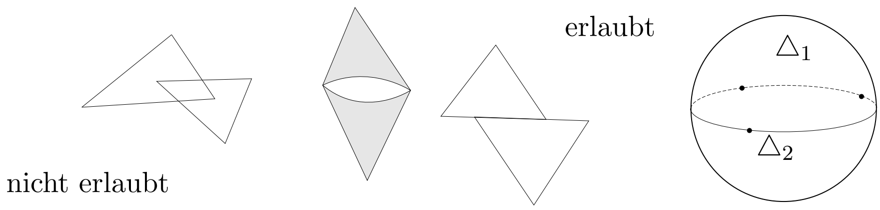


Abbildung 1.5: Nicht erlaubte Triangulierungen

Beispiel. 4 Dreiecke 2 Eckpunkte, 6 Kanten

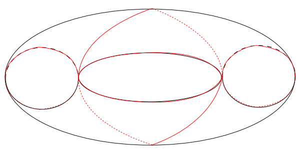


Abbildung 1.6: Triangulierung eines Torus

Falls alle Katen geodäsche Segmente sind, dann heisst die Triangulierung *geodätisch.*

Theorem 5 (Gauss-Bonnet globale Version)**.**

$$\int_\Sigma K\ dA = 2\pi * \chi(\Sigma)$$

wobei $\chi(\Sigma)$ *die* Eulercharakteristik *von* Σ*, zu berechnen wie folgt:* $\chi(\Sigma) = e - k + n$ *mit* $e = \#Eckpunkte, k = \#Kanten, n = \#Dreiecke$ *für irgendeine Triangulierung von* Σ*.*

Theorem 6. *Jede reguläre kompakte Fläche besitzt eine geodätische Triangulierung.*

Beweis. siehe Ahlfors-Sari: Riemann Surfaces □

Beweis von Gauss-Bonnet. Sei $T = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \dots \cup \triangle_n$ eine geodätische Triangulierung von Σ. Berechne

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma K\ dA &= \sum_{i=1}^n \int_{\triangle_i} K\ dA \\
&= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) \\
&= 2\pi e - n\pi \qquad (2\pi \text{ für jeden Eckpunkt}) \\
&= 2\pi(e - \frac{3}{2}n + n) \\
&= 2\pi(e - k + n) \\
&= 2\pi\chi(\Sigma)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wird, dass jedes Dreieck drei Kanten hat. Jede Kante gehört zu zwei Dreiecken. $\implies k = \frac{3}{2}n$ □

Bemerkung. Aus dem obigen Beweis folgt, dass $\chi(\Sigma)$ unabhängig von T ist, zumindest für geodätische Triangulierungen. Dies gilt auch für allgemeine, nicht geodätische Triangulierungen.

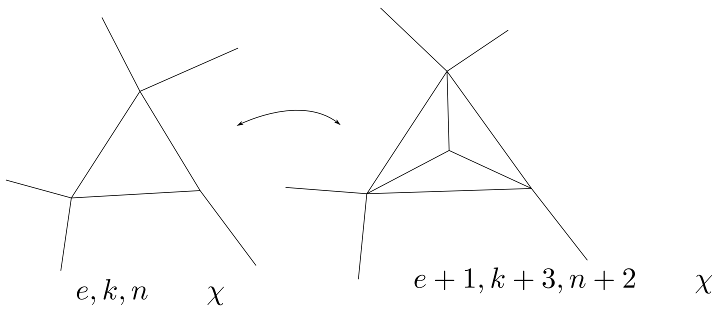
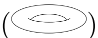


Abbildung 1.7: Ändere die Triangulierung

Beispiele (sehr wichtig). 1. $\chi(S^2) = 3 - 3 + 2 = 2 \implies \int_{S^2} K\ dA = 4\pi$ (klar, da $K = 1$ und $\text{Area}(S^2) = 4\pi$)

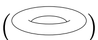
Wir folgern daraus, dass Oberflächen, welche topologisch gleich sind, die gleiche Krümmung haben. "Ingwersphäre"

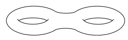
$$\int K\ dA = 4\pi$$

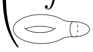
2. $\chi(S^1 \times S^1) = \chi($$) = 2 - 6 + 4 = 0$ siehe oben. $\implies \int$$K\ dA = 0$.

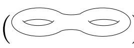
Was tun, falls wir das nicht gewusst hätten? *Trick*: Schneide und klebe!

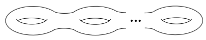
$\int$$K\ dA = 2 \int$$K\ dA = 2 \Big(\underbrace{\int}_{4\pi\ \text{GB}}$$K\ dA - 2 \underbrace{\int}_{4\pi}$$K\ dA \Big) = 0$

Daraus folgt auch $\chi($$) = 0$.

3. Betrachte $\Sigma_2 =$ 

$\int$$K\ dA = 2 \int$$K\ dA = 2 \Big(\int$$K\ dA - \int$$K\ dA \Big) = -4\pi$

Daraus folgt $\chi($$) = -2$

Induktiv erhalten wir für $\Sigma_g =$  g Henkel:

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

Dabei haben wir schon Spezialfälle davon gesehen:

- $g = 0$ Sphäre $\chi = 2$
- $g = 1$ Torus $\chi = 0$