

Kapitel 1

Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet

Ziel. $\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$

1.1 Isometrien

“Isometrien sind Diffeomorphismen, welche die erste Fundamentalform, und deshalb interne Distanzen erhalten.” Seien $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen und $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$ offen.

Definition. Ein (C^2) -Diffeomorphismus $h : V_1 \rightarrow V_2$ heisst *lokale Isometrie*, falls für alle $p \in V_1$ und alle $v, w \in T_p\Sigma$ gilt:

$$\langle (Dh)_p(v), (Dh)_p(w) \rangle_{h(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

Im Fall $V_1 = \Sigma_1, V_2 = \Sigma_2$ heisst $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ eine (globale) Isometrie.

Proposition 1. Seien $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$ offen, $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ eine lokale (C^2) -Parametrisierung, und $h : V_1 \rightarrow V_2$ ein (C^2) -Diffeomorphismus. Dann ist h eine lokale Isometrie, genau dann, wenn die Koeffizientenfunktionen $E_i, F_i, G_i : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) bzgl. der lokalen Parametrisierungen $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2 = h \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow V_2$ übereinstimmen:

$$E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$$

isometrie grafik

Beweis. “ \implies ” Sei $h : V_1 \rightarrow V_2$ eine lokale Isometrie. Berechne $E_1(u, v) = \langle \varphi_{1u}, \varphi_{1u} \rangle_{\varphi_1(u, v)}$ und $E_2(u, v) = \langle \varphi_{2u}, \varphi_{2u} \rangle_{\varphi_2(u, v)}$

Bemerke

$$\begin{aligned} \varphi_{2u}(u, v) &= \frac{d}{du} \varphi_2(u, v) = \frac{d}{du} (h \circ \varphi_1)(u, v) \\ &= (Dh)_{\varphi_1(u, v)} \left(\frac{d}{du} \varphi_1(u, v) \right) = (Dh)_{\varphi_1(u, v)}(\varphi_{1u}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E_2(u, v) = \langle (Dh)_{\varphi_1(u, v)}(\varphi_1 u), (Dh)_{\varphi_1(u, v)}(\varphi_1 v) \rangle_{h \circ \varphi_1(u, v)} = \langle \varphi_1 u, \varphi_1 v \rangle_{\varphi_1(u, v)}$$

Beim letzten Schritt wird benutzt, dass h eine lokale Isometrie ist! Also gilt $E_1 = E_2$, analog $F_1 = F_2, G_1 = G_2$.

“ \Leftarrow ” Seien $p \in V, v, w \in T_p \Sigma_1$. Wähle (die eindeutigen) $q \in U_1, a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi_1(q) = p, (D\varphi_1)_q(a) = v, (D\varphi_1)_q(b) = w$

bildchen für beweis prop 1

Schreibe $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2$. Berechne

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_p &= \langle (D\varphi_1)_q(a), (D\varphi_1)_q(b) \rangle_{\varphi_1(q)} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{siehe Def. von } E, F, G \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle (Dh)_p(v), (Dh)_p(w) \rangle_{h(p)} &= \langle D(\overbrace{h \circ \varphi_1}^{\varphi_2})_q(a), D(\overbrace{h \circ \varphi_1}^{\varphi_2})_q(b) \rangle_{h \circ \varphi_1(q)} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Kettenregel } D(h \circ \varphi_1)_q = (Dh)_{\varphi_1(q)} \circ (D\varphi_1)_q \\ &= \langle a_1 \varphi_{2u} + a_2 \varphi_{2v}, b_1 \varphi_{2u} + b_2 \varphi_{2v} \rangle \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_1 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Beispiel (Kreiskegel). Sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3$ der Kreiskegel mit (lokaler) Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) &\rightarrow K \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \cos(v), \frac{u}{\sqrt{2}} \sin(v), \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Illustration Kegel, Isometrie, etc.

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ das Bild der lokalen Parametrisierung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}) \\ (u, v) &\mapsto \left(u \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u \sin \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Berechne die Koeffizientenfunktionen E, F, G (bzgl. φ) und $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ (bzgl. ψ).

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \tilde{E} \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = \tilde{F} \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \frac{u^2}{2} = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = \tilde{G} \end{aligned}$$

$h = \varphi \circ \psi^{-1} : S \rightarrow K$ ist eine lokale Isometrie (aus Proposition).

1.2 Paralleltransport und Geodäten

Ziel. Beschreibe Geodäten $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$

Frage. Dazu stellen werden wir folgendes benötigen: Was bedeutet $\dot{\gamma}(t)$ ist konstant?

- In \mathbb{R}^2 $\ddot{\gamma}(t) = 0$
- In Σ $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ - die kovariante Ableitung

Definition. Ein glattes Vektorfeld entlang einer glatten Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ ist eine glatte Abbildung $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$.

Die horizontale Ableitung oder (kovariante Ableitung) von w im Punkt $\alpha(t)$ ist die orthogonale Projektion der Abbildung $\frac{dw}{dt}(t)$ auf $T_{\alpha(t)}\Sigma$:

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t) - \left\langle \frac{dw}{dt}(t), N(\alpha(t)) \right\rangle N(\alpha(t))$$

Vektorfeld entlang einer Kurve

Bemerkung. Wir betrachten glatte Kurven und Vektorfelder (aber C^2 reicht praktisch immer).

Berechnung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale (glatte) Parametrisierung mit $\alpha([a, b]) \subset \varphi(U) = V$. Schreibe $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$. Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang α . Schreibe $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma = \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$ als $w(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$. Es gilt

$$\frac{dw}{dt}(t) = \dot{a}(t)\varphi_u + \dot{b}(t)\varphi_v + a\dot{u}\varphi_{uu} + a\dot{v}\varphi_{vu} + b\dot{u}\varphi_{uv} + b\dot{v}\varphi_{vv}$$

Dazu erinnere dass $\frac{d}{dt}(\varphi_u = \varphi_{uu}\dot{u} + \varphi_{vu}\dot{v})$

Mit $\varphi_{uu} = eN + \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v$ etc.. erhalten wir

$$\frac{Dw}{dt}(t) = (\dot{a} + \Gamma_{11}^1 a\dot{u} + \Gamma_{12}^1 a\dot{v} + \Gamma_{21}^1 b\dot{u} + \Gamma_{22}^1 b\dot{v})\varphi_u + (\dot{b} + \Gamma_{11}^2 a\dot{u} + \Gamma_{12}^2 a\dot{v} + \Gamma_{21}^2 b\dot{u} + \Gamma_{22}^2 b\dot{v})\varphi_v$$

Definition. w heisst parallel, falls $\frac{Dw}{dt} \equiv 0$
 ”keine Änderung in Richtung der Tangentialebene“

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

Sei $w(t) = a(t)e_1 + b(t)e_2$.

$$\frac{dw}{dt} = \dot{a}(t)e_1 + \dot{b}(t)e_2 \perp e_3 = N \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

2. Betrachte $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

Dann ist $w(t) \equiv e_3$ ein paralleles Vektorfeld entlang α .

$$\frac{dw}{dt} = 0 \implies \frac{Dw}{dt} = 0$$

beachte hier $e_3 \in T_{\alpha(t)}S^2$ für alle t . Weiteres Beispiel $\bar{w}(t) = \dot{\alpha}(t)$

$$\frac{d\bar{w}}{dt}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \parallel N(\alpha(t)) \implies \frac{D\bar{w}}{dt}(t) = 0 \text{ (da } \frac{d\bar{w}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}S^2 \text{)}$$

Bemerkung. Die Bedingung $\frac{Dw}{dt} = 0$ ist unabhängig von der Parametrisierung von $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$

Sei $\sigma : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ein Diffeomorphismus mit $\sigma(a) = a$ und $\sigma(b) = b$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(w(\alpha(\sigma(t)))) = \frac{d}{d\sigma}w(\alpha(\sigma))\dot{\sigma}(t) \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{Dw}{d\sigma}\dot{\sigma}$$

$$\sigma \text{ Diffeomorphismus} \implies \dot{\sigma}(t) \neq 0$$

$$\implies \frac{Dw}{dt} = 0 \iff \frac{Dw}{d\sigma} = 0$$

Definition. Eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$ heisst geodätisch, falls $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$. Das Bild von γ bezeichnen wir mit Geodäte.

Beachte hier $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$, also ist $\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang $\gamma(t)$.

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt $\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$ (siehe oben), also

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \iff \frac{d\dot{\gamma}}{dt}(t) = \ddot{\gamma}(t) = 0$$

Also parametrisieren geodätische Kurven in der Ebene Geradenabschnitte.

2. $\Sigma = S^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ ist geodätisch, da $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$.
 (Siehe oben: $\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t)$ ist parallel zu $N(\gamma(t))$, also senkrecht zu $T_{\gamma(t)}S^2 \implies \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$.) Analog sind alle Grosskreisenabschnitte mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert Geodäten. Wir werden später sehen, dass alle Geodäten von dieser Form sind.
3. $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ Betrachte die lokal isometrische Parametrisierung.
 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Z$
 $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$

Behauptung. *Die Bilder von Geodäten in \mathbb{R}^2 unter φ sind Geodäten.*

Spezialfall. Geraden durch $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Erinnerung. Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ glatt heisst *geodätisch*, falls $\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$

In lokalen Koordinaten bezüglich einer Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow \Sigma$, schreibe $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. (falls $\gamma(\mathbb{R}) \subset \varphi(U)$)

Geodätengleichung

$$\begin{aligned}\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 &= 0 \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 &= 0\end{aligned}$$

Führe Koordinaten $w = \dot{u}, z = \dot{v}$ ein. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen mit glatten Koeffizienten, (d.h. lokal lipschitz) erster Ordnung auf \mathbb{R}^4

- $\dot{u} = w$
- $\dot{v} = z$
- $\dot{w} = \ddot{u} = -(\dots)$
- $\dot{z} = \ddot{v} = -(\dots)$

Es seien Anfangsbedingungen $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ vorgegeben ($p \in \varphi(U)$).

Seien $(u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4$ mit $\varphi(u_0, v_0) = p, v = w_0\varphi_u + z_0\varphi_v$. Nach Picard Lindelöf existiert eine *eindeutige* Lösungskurve $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^4$ zur Anfangsbedingung $\bar{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0, z_0)$; $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))$. Dann ist $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ unsere gesuchte Lösung.

\implies

Proposition 3. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, $p \in \Sigma$ und $v \in T_p\Sigma$ vorgegeben. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige geodätische Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Zusatz. Für vollständige Flächen (d.h. abgeschlossen und ohne Rand) lässt sich γ auf \mathbb{R} erweitern.

Bemerkungen.

1. Die Geodätengleichungen sind invariant unter Isometrien.
Tatsächlich sind Γ_{ij}^k durch die Koeffizientenfunktionen E, F, G bestimmt, welche invariant unter Isometrien sind. \implies Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab (auch lokal gültig).
2. Nach Proposition 3 existiert für alle $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ (Σ vollständig), genau eine geodätische Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. Falls wir für alle Paare (p, v) schon eine Geodäte kennen, dann haben wir alle Geodäten gefunden.
Anwendung: Geodäten auf S^2 sind *Grosskreise*.
Geodäten auf dem Zylinder Z sind *Helixen, Meridiane, Mantellinien*.

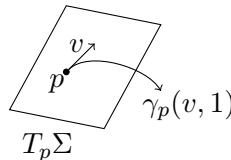
1.3 Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ glatt und vollständig, sowie $p \in \Sigma$, $v \in T_p\Sigma$, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$

Notation. $\gamma_p(v, t) = \gamma(t)$

Definition. $\exp : T_p\Sigma \rightarrow \Sigma$

$$v \mapsto \gamma_p(v, 1)$$



Bemerkungen.

1. Es gilt für alle $\lambda > 0, t \in \mathbb{R}$: $\gamma_p(\lambda v, t) = \gamma_p(v, \lambda t)$
2. Eine Verschärfung des Satzes von Picard-Lindelöf nach Cauchy zeigt, dass die Lösung $\gamma_p(v, t)$ glatt von den Parametern $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$, und $t \in \mathbb{R}$ abhängt. Daraus folgt, dass $\exp : T_p\Sigma \rightarrow \Sigma$ glatt ist!
3. Wieso heisst diese Abbildung \exp ? Die Antwort kommt aus der Liethorie: Betrachte die Gruppe $GL(\mathbb{C}^n)$. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ haben wir die Abbildung $\gamma(t) = e^{tA} \in GL(\mathbb{C}^n)$. Diese Kurve ist geodätisch bezüglich der Killingform auf $GL(\mathbb{C}^n)$
 \lceil Sei $X \in GL(\mathbb{C}^n)$ und $A, B \in T_X G(\mathbb{C}^n)$
 $\langle A, B \rangle = \text{spur}(X^{-1}AX^{-1}B)$? Stimmt für $X = Id$ \lrcorner

Berechnung des Differentials von \exp

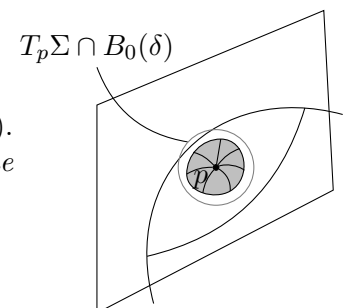
Sei $p \in \Sigma$ und $h \in T_p\Sigma$ und $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = h$, also $\exp(th) = \gamma_p(th, 1) = \gamma_p(h, t) = \gamma(t)$. Berechne nun:

$$(D\exp)_0(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(th) - \exp(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dot{\gamma}(t) = h$$

$$\implies D(\exp)_0 = \text{Id}_{T_p\Sigma}$$

Nach Umkehrsatz existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass die Einschränkung von \exp auf $U = T_p\Sigma \cap B_0(\delta) = \{v \in T_p\Sigma \mid \|v\|_2 < \delta\}$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $\varphi = \exp|_U : U \rightarrow \varphi(U) \subset \Sigma$ eine lokale Parametrisierung.

Wähle auf $T_p\Sigma$ Polarkoordinaten (r, θ) (Wahl ist wo ist $\theta = 0$?). Die entsprechenden Koordinaten auf $\exp(U) \subset \Sigma$ heissen *geodätische Polarkoordinaten*.



Proposition 2. *Bezüglich der lokalen Parametrisierung $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$ und Koordinaten $(u, v) = (r, \theta)$ gilt:*

$$E = 1, F = 0, \lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0 \text{ und } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \sqrt{G(r, \theta)} = 1$$

Beweis. Fixiere einen Winkel $\theta \in S^1 = [0, 2\pi]/0 = 2\pi$. Es gilt $E(r, \theta) = \left\langle \frac{d}{dr} \exp, \frac{d}{dr} \exp \right\rangle$. Da die Kurve $t \rightarrow \exp(t, \theta)$ geodätisch mit Geschwindigkeit 1 ist, folgt

$$\left\| \frac{d}{dr} \exp(r, \theta) \right\| = 1 \implies E(r, \theta) = 1$$

Das Paar (r, θ) erfüllt die Geodätengleichung:

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta}^2 = 0$$

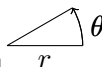
Da θ konstant ist, folgt $\Gamma_{11}^2 = 0$. Weiterhin gilt (siehe Abschnitt Theorema Egregium)

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_r \\ F_r - \frac{1}{2} E_\theta \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \Gamma_{11}^2 = 0$$

$E = 1 \implies E_r = E_\theta = 0 \implies \Gamma_{11}^1 = 0$ und $F_r = 0$. Also hängt $F(r, \theta) = \langle \exp_r, \exp_\theta \rangle$ nicht von r ab!

Mit $\lim_{r \rightarrow 0} \|\exp_\theta\| = 0$ folgt also $F = 0$. Ausserdem folgt mit $\lim_{r \rightarrow 0} \|\exp_\theta\| = 0$ auch $\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \langle \exp_\theta, \exp_\theta \rangle = 0$.

Genauer: In erster Ordnung in r gilt $\|\exp_\theta(r, \theta)\| = r$ (+höhere Terme) also

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \sqrt{G(r, \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \|\exp_\theta(r, \theta)\| = 1$$


□

Krümmung in geodätischen Polarkoordinaten

Wir betrachten eine lokale Parametrisierung $\exp : U \rightarrow \Sigma$. Bezüglich Polarkoordinaten (r, θ) auf $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt:

$$E = 1, F = 0, \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Weiterhin gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_\theta \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} \implies G \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G_r$$

Berechnung der Krümmung mittels der Formel (Lemma, Theorema Egregium).

$$\begin{aligned} -EK = -K &= (\Gamma_{12}^2)_r + (\Gamma_{12}^2)^2 \quad \text{Viele Terme streichen sich weg} \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \frac{G_r}{G} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{G_r}{G} \right)^2 \text{ benutze } G \neq 0, \text{ da } \det \neq 0 \end{aligned}$$

Proposition 3. $K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$

Beweis.

$$\begin{aligned} K &= -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{1}{2} \frac{G_r}{\sqrt{G}} \right)_r \\ &= -\frac{1}{2} \frac{G_{rr}}{G} + \frac{1}{4} \frac{(G_r)^2}{G^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{G_r}{G} \right)_r - \frac{1}{4} \frac{G_r^2}{G^2} = K \end{aligned}$$

□

Anwendung. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, und $\exp : U \rightarrow \Sigma$ eine lokale Parametrisierung. Wir machen für die Koeffizientenfunktion $\sqrt{G(r, \theta)}$ eine Taylorentwicklung.

Ansatz. Unter Berücksichtigung von $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G}_r = 1$, sowie Prop. 4 $\sqrt{G} = r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + \dots$, (Restterm $R(r, \theta)$ erfüllt $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} R(r, \theta) = 0$)

$$\implies \sqrt{G}_{rr} = 2a(\theta) + 6b(\theta)r + \text{höhere Terme}$$

Prop. 5

$$\implies K = -\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}} = \frac{2a(\theta) + 6b(\theta)r + \dots}{r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + \dots}$$

Die Grenzbetrachtung $r \rightarrow 0$ liefert:

- $a(\theta) = 0$ (da K nicht $\rightarrow \infty$ gehen darf wegen Glattheit)
- $b(\theta) = \frac{K}{6}$.

Damit erhalten wir $\sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + R(r, \theta)$ Sei $p \in \Sigma$ und $r > 0$.

Definition. Definiere $K^\Sigma(p, r) = \exp(K_0(r))$, wobei $K_0(r) = \{z \in T_p \Sigma \mid |z| = r\}$ "Kreis um p in Σ mit Radius r , den Kreis runterlegen"

Setze $U^\Sigma(p, r) = \text{Länge}(K^\Sigma(p, r)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta$. Weglänge war definiert $\int_0^t \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$ hier $u = r, v = \theta$.

Theorem 1 (Umfangdefektformel).

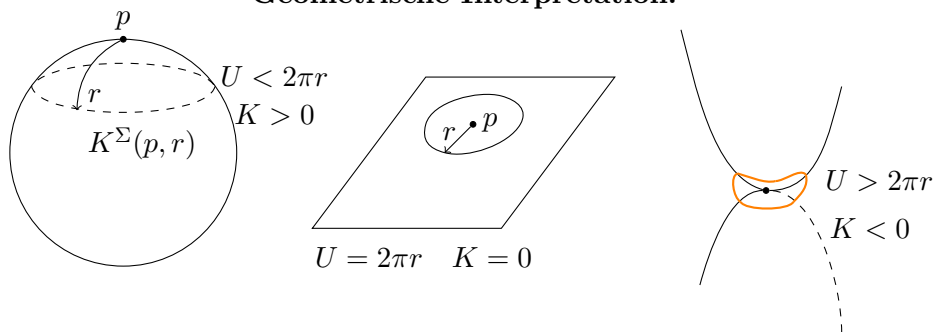
$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - U^\Sigma(p, r)}{r^3} \frac{3}{\pi}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned}
 U^\Sigma(p, r) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[r - \frac{K(p)}{6} r^3 + R(r, \theta) \right] d\theta \\
 &= 2\pi r - \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 + \int_0^{2\pi} R(r, \theta) d\theta \\
 &\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - U^\Sigma(p, r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(p)
 \end{aligned}$$

□

Geometrische Interpretation.



Anwendung (Flächen konstanter Krümmung). Falls K konstant ist, dann hat die Differentialgleichung $K\sqrt{G} = -\sqrt{G_{rr}}$ zur Anfangsbedingung $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$ $\sqrt{G_r}(0, \theta) = 1$ siehe Prop. 4 eine eindeutige Lösung:

1. $K = 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = r$ also $G = r^2$
2. $K > 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r)$ also $G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}r)$
3. $K < 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}r)$ wobei $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

In allen Fällen ist G unabhängig von θ !

Kreisumfang:

- $K = 0$ siehe Weglänge $\int_0^T \sqrt{\dot{r}^2 E + \dot{u} \dot{v} F + \dot{v}^2 G} dt$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$$

- $K = 1$ mit $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta = 2\pi \sin(r)$$

- $K = -1$ "Umfang wächst exponentiell"

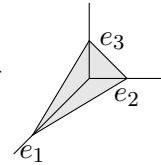
$$U(r) = 2\pi \sinh(r) \sim e^r$$

Theorem 2 (Minding 1839). Seien Σ_1, Σ_2 reguläre Flächen mit derselben konstanten Krümmung K , und $p_1 \in \Sigma_1, p_2 \in \Sigma_2$. Dann existiert $U_1 \subset \Sigma_1, U_2 \subset \Sigma_2$ offen mit $p_i \in U_i$ und eine lokale Isometrie $h : U_1 \rightarrow U_2$.

Beweis. Bezüglich geodätischer Polarkoordinaten um p_1, p_2 sind die Koeffizientenfunktionen $E = 1, F = 0, G$ durch K bestimmt, also identisch. Wir folgern, dass Σ_1, Σ_2 lokal isometrisch sind (siehe Abschnitt Isometrien). \square

1.4 Der Satz von Gauss-Bonnet

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche. Wir betrachten das Standarddreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ mit Eckpunkten e_1, e_2, e_3 .



Ein Dreieck in Σ ist das Bild von Δ unter einer glatten Abbildung $\varphi : \Delta \rightarrow \Sigma$. Falls die Kanten von $\varphi(\Delta)$ Segmente von Geodäten sind, dann heisst das Dreieck geodätisch.

Definition. Ein *geodätisches Dreieck* in $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ist ein eingebettetes Dreieck, welches von drei geodätischen Segmenten begrenzt wird.

Theorem 3 (Lokale Version von Gauss-Bonnet). Sei $\Delta \subset \Sigma$ ein geodätisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ . Dann gilt

$$\int_{\Delta} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

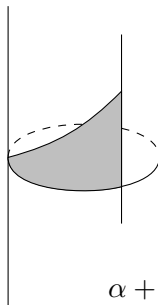
Erinnerung. Flächenelement $dA = \sqrt{EG - F^2}$

Bemerkung. Bei konstanter Krümmung $K = 0$ haben alle geodätischen Dreiecke die Innenwinkelsumme π

Geometrische Interpretation.

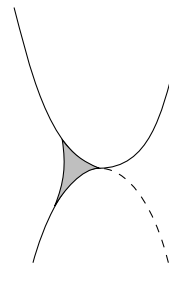
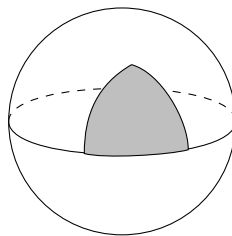
$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

$$K > 0$$



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

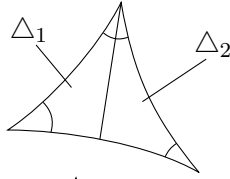
$$K = 0$$



$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

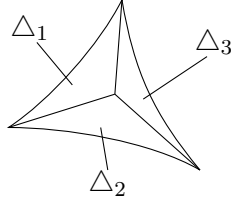
$$K < 0$$

Vorbereitung. Additivität der Formel: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$



$$\underbrace{\int_{\Delta} K dA}_{\alpha + \beta + \gamma - \pi} = \underbrace{\int_{\Delta_1} K dA}_{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi} + \underbrace{\int_{\Delta_2} K dA}_{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi}$$

Ok, da $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi$



$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \alpha + \beta + \gamma + 2\pi \implies \int_{\Delta} K dA = \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta_i} K dA$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine lokale Parametrisierung der Form $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$ mit $\Delta_A \subset \varphi(U)$ und $\varphi(0)$ sei ein Eckpunkt von Δ , ebenso sei $B \in \varphi(U \cap \mathbb{R} \times \{0\})$

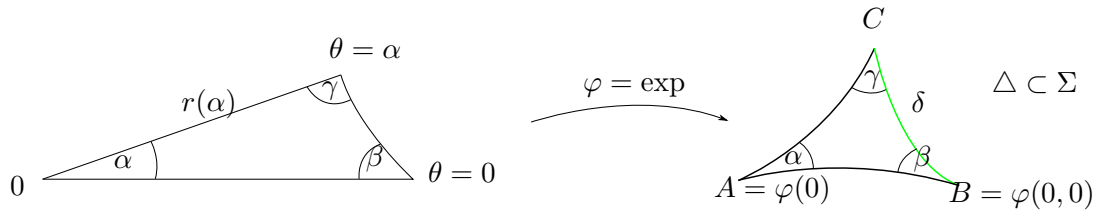


Abbildung 1.1: Interpretation von \exp

Parametrisiere den Weg $\delta : [0, \alpha] \rightarrow \Sigma$ durch $\delta(\theta) = \exp(r(\theta), \theta)$. Berechne

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} K dA &= \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} K(r, \theta) \sqrt{EG - F^2} dr d\theta \\ &\stackrel{E=1, F=0, \text{ da } \varphi=\exp}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} K \sqrt{G} dr d\theta \\ &\stackrel{\text{Prop. 5}}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} -\sqrt{G_{rr}} dr d\theta \\ &= - \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} \sqrt{G_{rr}} dr d\theta \\ &= - \int_0^\alpha \left[\sqrt{G_r}(r(\theta), \theta) - \sqrt{G_r}(0, \theta) \right] d\theta \\ &= \alpha - \int_0^\alpha \sqrt{G_r}(r(\theta), \theta) d\theta \end{aligned}$$

Lemma.

$$-\sqrt{G_r}(r(\theta), \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

wobei $\psi(\theta)$ der Winkel zwischen e_r und $\dot{\delta}(\theta)$ ist.


$$\begin{aligned}\int_{\Delta} K \, dA &= \alpha + \int_0^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \, d\theta \\ &= \alpha + \psi(\alpha) - \psi(0) \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi\end{aligned}$$
☐
$$\begin{aligned}\sqrt{G_r} &= \frac{1}{2} \frac{G_r}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle}_{=G} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \langle \varphi_{r\theta}, \varphi_{\varphi_\theta} \rangle = \langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{\|\varphi_\theta\|} \rangle\end{aligned}$$
$$\left\langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{||\varphi_\theta||} \right\rangle = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
☐

Bemerkung. Falls $\Delta \subset \Sigma$ nicht im Bild einer Parametrisierung $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$ liegt, unterteile Δ iteriert, bis alle Teildreiecke diese Eigenschaft haben.

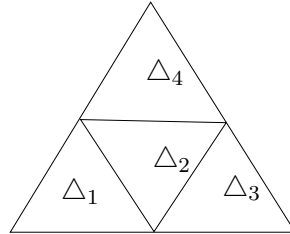


Abbildung 1.4: Iterationsschritt (Seiten halbieren)

Alle Flächen die wir betrachten sind abgeschlossen und kompakt.
Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, glatte Fläche ohne Rand.

Definition. Eine *Triangulierung* T von Σ ist eine endliche Vereinigung von Dreiecken in Σ , $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ mit folgenden Eigenschaften.

1. $\bigcup_{i=1} \Delta_i = \Sigma$
2. $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, ein gemeinsamer Eckpunkt, eine, zwei, oder drei gemeinsame Kanten

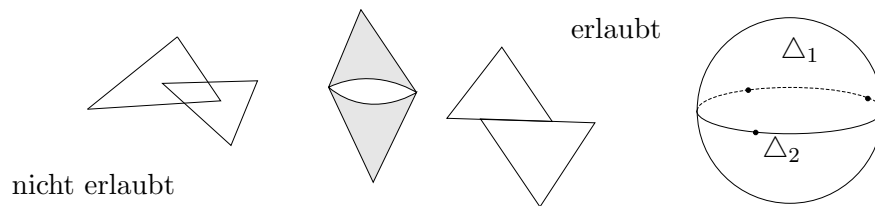


Abbildung 1.5: Nicht erlaubte Triangulierungen

Beispiel. 4 Dreiecke 2 Eckpunkte, 6 Kanten

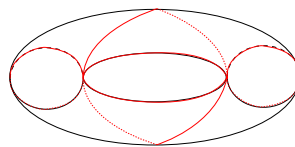


Abbildung 1.6: Triangulierung eines Torus

Falls alle Katen geodäsche Segmente sind, dann heisst die Triangulierung *geodätisch*.

Theorem 4 (Gauss-Bonnet globale Version).

$$\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi * \chi(\Sigma)$$

wobei $\chi(\Sigma)$ die Eulercharakteristik von Σ , zu berechnen wie folgt: $\chi(\Sigma) = e - k + n$ mit $e = \# \text{Eckpunkte}$, $k = \# \text{Kanten}$, $n = \# \text{Dreiecke}$ für irgendeine Triangulierung von Σ .

Theorem 5. Jede reguläre kompakte Fläche besitzt eine geodätische Triangulierung.

Beweis. siehe Ahlfors-Sari: Riemann Surfaces □

Beweis von Gauss-Bonnet. Sei $T = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \dots \cup \triangle_n$ eine geodätische Triangulierung von Σ . Berechne

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} K \, dA &= \sum_{i=1}^n \int_{\triangle_i} K \, dA \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) \\ &= 2\pi e - n\pi \quad (2\pi \text{ für jeden Eckpunkt}) \\ &= 2\pi(e - \frac{3}{2}n + n) \\ &= 2\pi(e - k + n) \\ &= 2\pi\chi(\Sigma) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wird, dass jedes Dreieck drei Kanten hat. Jede Kante gehört zu zwei Dreiecken. $\implies k = \frac{3}{2}n$ □

Bemerkung. Aus dem obigen Beweis folgt, dass $\chi(\Sigma)$ unabhängig von T ist, zumindest für geodätische Triangulierungen. Dies gilt auch für allgemeine, nicht geodätische Triangulierungen.

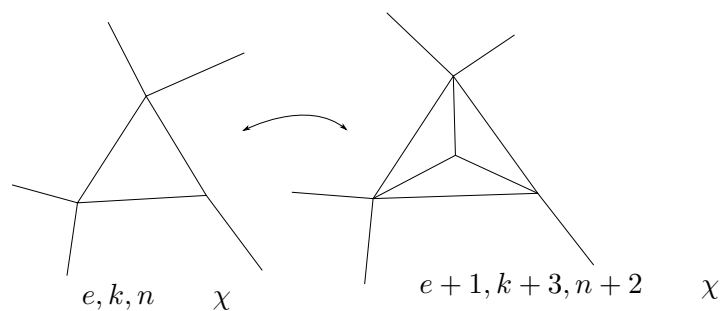


Abbildung 1.7: Ändere die Triangulierung

Beispiele (sehr wichtig). 1. $\chi(S^2) = 3 - 3 + 2 = 2 \implies \int_{S^2} K \, dA = 4\pi$ (klar, da $K = 1$ und $\text{Area}(S^2) = 4\pi$)

Wir folgern daraus, dass Oberflächen, welche topologisch gleich sind, die gleiche Krümmung haben. "Ingwersphäre"

$$\int_{\text{Ingwersphäre}} K \, dA = 4\pi$$

2. $\chi(S^1 \times S^1) = \chi(\text{Torus}) = 2 - 6 + 4 = 0$ siehe oben. $\implies \int_{\text{Torus}} K \, dA = 0$.

Was tun, falls wir das nicht gewusst hätten? *Trick*: Schneide und klebe!

$$\int_{\text{Torus}} K \, dA = 2 \int_{\text{Zylinder}} K \, dA = 2 \left(\underbrace{\int_{\text{Zylinder}} K \, dA}_{4\pi \text{ GB}} - \underbrace{2 \int_{\text{Kreis}} K \, dA}_{4\pi} \right) = 0$$

Daraus folgt auch $\chi(\text{Torus}) = 0$.

3. Betrachte $\Sigma_2 = \text{Zwei Henkel}$

$$\int_{\Sigma_2} K \, dA = 2 \int_{\text{Zylinder}} K \, dA = 2 \left(\int_{\text{Zylinder}} K \, dA - \int_{\text{Kreis}} K \, dA \right) = -4\pi$$

Daraus folgt $\chi(\Sigma_2) = -2$

Induktiv erhalten wir für $\Sigma_g = \text{g Henkel}$:

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

Dabei haben wir schon Spezialfälle davon gesehen:

- $g = 0$ Sphäre $\chi = 2$
- $g = 1$ Torus $\chi = 0$