Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subset \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \to S^3$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gauss-Abbildung), falls

$$\forall p \in V \text{ gilt: } N(q) \perp T_p\Sigma$$

Zusatz. *Flächenelement* $\sqrt{EG - F^2}$

$$EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Existenz. Definiere $N : V \to S^2$

$$q \mapsto \frac{\varphi u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q, da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dan ist $N : V \to S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt : $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \to S^2$, genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche $\mathbb{R}^3$ in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \to S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.

zwei zeichnungen, torus und moebiusband

Sei nun $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^1-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt $\forall q \in V$:

- $N(q) \perp T_q\Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)}\Sigma$

$\implies T_q\Sigma = T_{N(q)}S^2$ für letzteres gilt $\forall p \in S^2 : p \perp T_pS$
Falls $N : V \to S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir $\forall p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p\Sigma \to T_{N(p)}S^2 = T_p\Sigma$$

die *Weingartenabbildung.*

Definition.

$$K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$$
Gaussische Krümmung im Punkt $p \in \Sigma$

Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab,
da $\det -(DN)_p = (-1)^2 \cdot \det (DN)_p$ ist.

Beispiel.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
   $N : \Sigma \to S^2$
   $q \mapsto e_3(\text{oder } -e_3)$
   N ist konstant, also gilt $\forall q \in \Sigma\ (DN)_q = 0; K(q) = 0.$

   K equiv to 1

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)
   $N : S^2 \to S^2$
   $q \mapsto q$

   Einheitssphäre mit Krümmung = 1

   $N = Id_{S^2}$ (oder $-Id_{S^2}$)
   $\forall q \in S^2$ gilt also $(DN)_q = Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma$
   $\implies K(q) = \det Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma = 1$

3. $Z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \in \mathbb{R}^{\nvDash}$
   $N : Z \to S^2$
   $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$
   Wir bemerken: N hängt nicht von z ab.

   Zylinder mit K equiv to 0

Also gilt für alle $q \in Z : (DN)_q(e_3) = \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$
$\implies$ 0 ist ein Eigenwert der Abbildung $(DN)_q : T_qZ \to T_qZ \implies K(q) = 0$.

Zusatz. *Genauere Betrachtung des dritten Beispiels:*

Für $q = (x, y, z) \in Z$ gilt: $T_qZ = span\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^{v}\}$
Wir bestimmen $(DN)_q \overset{(*)}{=} v$
(*) Erklärung: Die Einschränkung von N auf $S' \times \{0\}$ ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von $(DN)_q$ bezüglich der Basis $\{e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2\}$

Definition. Die *mittlere Krümmung* im Punkt $p \in \Sigma$ ist $H(p) = \frac{1}{2}\text{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$, welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist:

$$\text{Spur}(-(DN)_p) = -\text{Spur}(DN)_p$$

Bemerkung. Reguläre Flächen mit $H \equiv 0$ heissen *Minimalflächen.*

Beispiele. 1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}.K \equiv 0$ und $H \equiv 0$.

2. $\Sigma = S^2$. $K \equiv 1$ und $H \equiv 1 \impliedby \frac{1}{2}$ Spur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\Sigma = Z$. $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2} \impliedby \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$

Notation. Ein Punkt $p \in \Sigma$ heisst:

- *elliptisch*, falls $K(p) > 0$
- *hyperbolisch.* falls $K(p) < 0$ (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) = 0$

minibeispiele zu all diesen

Proposition 1. *Sei $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, welche lokale C^2-Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist $\forall p \in \Sigma$ gilt:*

$$\langle (DN)_p(a), b \rangle_p = \langle a, (DN)_p(b) \rangle_p$$

Beweis. Es reicht, dies für die Basisvektoren $a = \varphi_u(p)$ und $b = \varphi_v(p)$ zu prüfen! Sei $\varphi : U \to \Sigma$ eine C^2-Parametrisierung mit $p \in \varphi(U)$. Betrachte die Komposition $N \circ \varphi : U \to S^2$. $\forall q = (u, v) \in U$ gilt: $\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u,v)} \overset{\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^3}{=} 0$ (*)

1 zeichnung mit phiU und phiV usw

Notation. $N_u(u,v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)) = \frac{d}{du}(N\circ\varphi)(u,v)$ und
$N_v(u,v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)) = \frac{d}{dv}(N\circ\varphi)(u,v)$
$\frac{d}{du}(*)_v : \langle N_u, \varphi_v\rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v(\varphi \text{ ist } C^2)}\rangle = 0$
$\frac{d}{dv}(*)_u : \langle N_v, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{vu}\rangle = 0$
φ ist $C^2 \implies \varphi_{uv} = \varphi_{vu}$
$\implies \langle N_u, \varphi_v\rangle = \langle N_v, \varphi_u\rangle$
ausgeschrieben: $\langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v)\rangle = \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)), \varphi_u(u,v)\rangle$
$= \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v)\rangle$

□

Bemerkung. Im Beweis haben wir die Annahme ($\varphi : U \to \Sigma$ ist C^2) benutzt: φ_{uv} ist vorgekommen. Diese Anname ist essenziell, damit $N : \varphi(U) \to S^2$ differenzierbar ist. Tatsächlich gilt $N(\varphi(u,v)) = \pm\frac{\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u\times\varphi_v\|}$ Wir benutzen, dass φ_u und φ_v differenzierbar sind, dass heisst $\varphi : U \to \Sigma$ ist zweimal differenzierbar.

Beispiel. Sei $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, \text{ falls } x \le 0 \\ x^2, \text{ falls } x \ge 0 \end{cases}\end{aligned}$
f ist differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ *nicht* differenzierbar.
Betrachte die Fläche $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_3 | z = f(x)\} - \Gamma f \times \mathbb{R}$", welche die globale C^1-Parametrisierung $\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \Sigma \\ (u,v) &\mapsto (u,v,f(u))\end{aligned}$ besitzt.
Berechne $\varphi_u = (1,0,f'(u)), \varphi_v = (0,1,0)$, und $N(u,v) = \frac{\varphi_u\times\varphi_v}{\|\varphi_u\times\varphi_v\|} = \frac{(-f'(u),0,1)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$
Für $u = 0$ gilt $N(u,v) = (0,0,1) = e_3$ und für $u \ge 0$ gilt $N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2,0,1)$
Versuch, $\frac{d}{du}N(0,0)$ zu berechen:

1. $\lim_{\epsilon\to 0, \epsilon<0} \frac{1}{\epsilon}(\underbrace{N(\epsilon)}_{=e_3} - \underbrace{N(0,0)}_{=e_3}) = 0$

2. $\lim_{\epsilon\to 0, \epsilon>0} \frac{1}{\epsilon}(N(\epsilon,0) - N(0,0)) = \lim_{\epsilon\to 0, \epsilon>0} \frac{1}{\epsilon}(-\frac{2\epsilon}{\sqrt{1+4\epsilon^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon^2}} - 1) = (2,0,\dots) \neq e_3$

Im 2. Punk wird genutzt, dass $\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+\frac{x}{2}}$, somit $\frac{-2\epsilon}{1+4\epsilon^2} \underbrace{\approx}_{\frac{1}{1+x}\approx 1-x} -2\epsilon(1-2\epsilon^2) \approx -2$

Also ist $N(u,v)$ an der Stelle $(0,0)$ nicht differenzierbar!
Hypothese: Ab jetzt besitzen alle regulären Flächen mindestens lokale C^1-Parametrisierungen.

Korollar 1. *$(DN)_p : T_pN \to T_p\Sigma$ lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwelchel diagonalisieren.*

D.h. Die Weingartenabbildung $(DN)_p$ hat zwei orthogonale Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$K(p) = \det((DN)_p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$
$$H(p) = \frac{1}{2} Spur((DN)_p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 \cdot \lambda_2)$$

Definition. Die von den Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ aufgespannten Richtungen heissen *Hauptkrümmungsrichtungen*. Eine C^1-Kurve $\gamma : (a, b) \to \Sigma$ heisst *Krümmungslinie*, falls $\forall t \in (a, b)$ gilt $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$ ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung $(DN)_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)}\Sigma_{\gamma(t)}$.

Beispiele.

1. $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
   Hier gilt $\forall p \in E : (DN)_p = 0$ also sind die Hauptkrümmungsrichtungen nicht wohldefiniert. Alle Geraden in E sind Krümmungslinien. (Sogar alle C^1-Kurven $\gamma : \mathbb{R} \to E$)

2. $Z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1$
   Hier gilt $\forall p \in Z : (DN)_p(e_3) = 0 \implies$ alle (vertikalen) Mantellinien in Z sind Krümmungslinien. Mehr noch: Bezüglich der Basis $e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2$ von $T_{\underbrace{(x,y,z)}_{=p}}\Sigma$ hat $(DN)_p$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten also eine zweite Schar von Krümmungslinien: horizontale Kreise. In Punkten mit $(DN)_p \neq \lambda \cdot Id_{T_p\Sigma}$ stehen die Krümmungslinien *senkrecht* aufeinander.

1.2 Die zweite Fundamentalform

Ziel der nächsten beiden Abschnitte:

$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}$$

wobei I_p, II_p die erste, bzw. die zweite Fundamentalform ist.

Motivation. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}_3$ eine C^2-reguläre Fläche, und $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma$ eine C^2-Kurve mit $\alpha(0) = p \in \Sigma$ und $\dot\alpha(0) = v \in T_p\Sigma$.

Proposition 2. *(Satz von Mensier) Sei $N : V \to S^2$ ein lokales Einheitsnormalenfeld ($p \in V \subset \Sigma$). Dann gilt $\langle \ddot\alpha(0), N(p)\rangle = -\langle v, (DN)_p(v)\rangle$. Insbesondere hängt die* normale *Beschleunigungskomponente $\langle \ddot\alpha(0), N(p)\rangle$ nur von $p = \alpha(0)$ und $v = \dot\alpha(0)$ ab.*

Beweis. $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt:

$$\langle \dot\alpha(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \text{ (per Definition von } T_p\Sigma \text{ und } N(p))$$

$$\text{Ableiten nach t: } \langle \ddot\alpha(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle \dot\alpha(t), \underbrace{\frac{d}{dt} N(\alpha(t))}_{(DN)_{\alpha(t)}(\dot\alpha(t))} \rangle = 0$$

$$\text{Für } t = 0 \text{ erhalten wir } \langle \ddot\alpha(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle.$$

□

Definition. Die *zweite Fundamentalform* von Σ an der Stelle p ist die Abbildung

$$\begin{aligned} II_p : T_p\Sigma &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto -\langle v, (DN)_p(v) \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Vorzeichen von II_p hängt von N ab. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar ist, dann lässt sich eine globale Wahl von N fixieren (Wahl der Orientierung).

Erinnerung. Die erste Fundamentalform, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ hat bezüglich jeder lokalen Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$ eine Matrix $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, bezüglich der Basis φ_u, φ_v von $T_p\Sigma$. $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

Koeffizienten für II_p:

- $e = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$ $(DN)_{\varphi(u,v)}$ ist symmetrisch.
- $e = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle$

Notation.

$$N_u = \frac{d}{du}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)$$

$$N_v = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)$$

Wir erhalten also mit $\langle \varphi_u, N \rangle \equiv 0$ und ableiten nach w: $\langle \varphi_{uu}, N \rangle + \langle \varphi_u, N_u \rangle = 0$, analog für v

- $e = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle$
- $e = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle$

- $e = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$

Beispiel. Funktionsgraph von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (C^2)
$\Gamma_f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \subset \mathbb{R}^3$ Globale C^2-Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \Gamma_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned}
\varphi_u(u, v) &= (1, 0, f_u(u, v)) \\
\varphi_v(u, v) &= (0, 1, f_v(u, v)) \\
\varphi_{uu}(u, v) &= (0, 0, f_{uu}(u, v)) \\
\varphi_{uv}(u, v) &= \varphi_{vu}(u, v) = (0, 0, \underbrace{f_{uv}}_{=f_{vu}}) \\
\varphi_{vv}(u, v) &= (0, 0, f_{vv}(u, v)) \\
N(\varphi(u, v)) &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle &= \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle &= \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}
\end{aligned}$$

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^2-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ das dazugehörige normale Einheitsfeld. Schreibe die Abbildungsmatrix von $(DN)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma = T_{N(p)}S^2$ bezüglich der Basis φ_u, φ_v von $T_p\Sigma$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, d.h.

$$(DN)_p(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$(DN)_p(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Bemerkung. Falls φ_u und φ_v nicht orthogonal sind, dann gilt im Allgemeinen $a_{12} \neq a_{21}$.

Lemma 1. *Mit den oben eingeführten Koeffizienten gilt:*

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{(DN)_p^T} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned} e &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)\rangle \\ &= -\langle \varphi_u, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v\rangle \\ &= -a_{11}E - a_{21}F \\ f &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)\rangle = \cdots = -a_{11}F - a_{21}G \\ f &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)\rangle = \cdots = -a_{12}E - a_{22}F \\ g &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)\rangle = \cdots = -a_{12}F - a_{22}G \end{aligned}$$

□

Korollar 2. $K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ *(Alle Koeffizienten sind vom punkt (u,v) abhängig!)*

Beweis.

$$\det(DN)_p = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = \det(-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix})$$

und $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$ □

Beispiel. Rotationstorus $T \subset \mathbb{R}^3$ mit Radien $0 < a < b$

$$\begin{aligned} &\text{Lokale } C^\infty\text{-Parametrisierung } \varphi : (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to T \\ \varphi(u,v) &= ((b + a \cdot cos(u)) \cdot cos(v), (b + a \cdot cos(u)) \cdot sin(v), a \cdot sin(u)) \\ \varphi_u(u,v) &= (-a \cdot sin(u)cos(v), -a \cdot sin(u)sin(v), a \cdot cos(u)) \\ \varphi_v(u,v) &= (-(b + a \cdot cos(u)) \cdot sin(v), (b + a \cdot cos(u)) \cdot cos(v), 0) \\ \varphi_{uu} &= \dots \\ \varphi_{uv} &= \dots \\ \varphi_{vv} &= \dots \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2$$
$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$$
$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (b + a \cdot cos(u))^2$$
$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} =_{\text{siehe Flächeninhalt}} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{a(b + a \cdot cos(u))}$$
$$\Longrightarrow \; e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = |\varphi_{uu}| = a$$

dies da φ_{uu} und N parallel sind.

$$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0$$
$$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \textit{(Komplizierte einfache Rechnung)}$$
$$= cos(u) \cdot (b + a \cdot cos(u))$$
$$\Longrightarrow \; K(\varphi(u,v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{cos(u)}{a(b + a \cdot cos(u))}$$

rotationstorus mit Krümmungen

Bemerkung. Es gilt

$$K(\varphi(u,v)) \begin{cases} > 0 & u < \frac{\pi}{2} \text{ oder } u > \frac{3\pi}{2} \\ = 0 \text{ falls} & u = \frac{\pi}{2} \text{ oder } u = \frac{3\pi}{2} \\ < 0 & u > \frac{\pi}{2} \text{ und } u < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

elliptisch und hyperbolish evtl.?

Anwendung. Krümmungsformel von Funktionsgraphen:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}C^2$ und $\Gamma_f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = f(x, y)$. Mit der lokalen Parametrisierung $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ erhalten wir

$$e = -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_u) \rangle = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$
$$f = -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$
$$g = -\langle \varphi_v, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

Berechne $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ und erhalte

$$K(\varphi(u,v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

Bemerkung. $f_{uu} \cdot f_{vv} - f_{uv}^2 = \det(Hf)_{(u,v)}$ mit $Hf =$ Hessische Matrix $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}$

Folgerung:

$$\begin{aligned} K(\varphi(u,v)) > 0 &\iff \det(Hf)_{(u,v)} > 0 \\ K(\varphi(u,v)) = 0 &\iff \det(Hf)_{(u,v)} = 0 \\ K(\varphi(u,v)) < 0 &\iff \det(Hf)_{(u,v)} < 0 \end{aligned}$$

In einem Kritischenpunkt p ist die Krümmung $K = \det(Hf)_p$.

Beispiele.

1. $f(x,y) = x^n + y^m$ mit $n, m \geq 2$.
   Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)m = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$

$$\begin{aligned} (Hf)_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix} \\ \implies K(\varphi(0,0)) &= K(0) = 0 \text{ falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ \implies K(\varphi(0,0)) &= K(0) = 4 \text{ falls } m = 2 \text{ und } n = 2 \end{aligned}$$

   Alternative $f(x,y) = -(x^2 + y^2) \implies K(0) = 4$

2. $f(x,y) = x^n - y^n$ mit $n, m \geq 2$

$$\begin{aligned} (Hf)_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & -m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix} \\ \implies K(0) &= \begin{cases} 0, \text{ falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ -4, \text{ falls } m = n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

   Hier gilt $K(\varphi(u,v)) = \dfrac{-4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} = \dfrac{-4}{(1 + 4_u^2 + 4_v^2)^2} < 0$

   Wir folgern $\lim\limits_{n \to \pm\infty} K(\varphi(u,v)) = 0$, ebenso $\lim\limits_{v \to \infty} K(\varphi(u,v)) = 0$.

Frage. Existiert $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2, so dass Γ_f konstant -1 gekrümmt ist?

Antwort. Nein! (Hilbert 1901)
Im Spezialfall $f(x,y) = g(x) + h(y)$ mit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2 können wir ëlementarßeigen, dass Γ_f nicht konstant -1 gekrümmt sein kann (vergleiche Serie 6). Mit der obrigen Formel erhalten wir

$$K(\varphi(u,v)) = \frac{g_{uu} \cdot h_{vv}}{(1 + g_u^2 + h_v^2)^2} \overset{!}{=} -1$$

$\implies g_{uu} \cdot h_{vv} < 0$
Annahme: $h_{vv} < 0, g_{uu} > 0 (\forall (u,v) \in \mathbb{R}^3$ da h, g stetig)
Fixiere (ein beliebiges) $v \in \mathbb{R}$ und erhalte eine Differentialgleichung für g der Form

$$\frac{g_{uu} \cdot a}{(1 + g_u^2 + b^2)} = -1$$

mit $a = h_{vv}(v) < 0$ und $b = h_v(v)^2 \geq 0$

$$\implies g_{uu} = \underbrace{-\frac{1}{a}}_{>0 und = c} \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 = c \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 > c \cdot (1 + 2g_u^2)$$

Schreibe $s(u) = g_u(u) \implies s' > c(1 + 2s^2)$ (evtl. reicht sogar $s' > 2s^2$)
Wir lösen die Differentialgleichung $s' = c \cdot (1 + 2s^2)$ und bemerken, dass diese in endlicher Zeit divergiert.

Beispiel. $s' = s^2$
Lösung zur Anfangsbedingung: $s(0) = 1 : s(t) = \frac{1}{1-t}$

Rotationsflächen

Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine C^2-Kurve. Schreibe $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ mit $r(t)$ der Rotation und $h(t)$ der Höhe. Wir treffen folgende Annahmen:

1. $r(t) > 0$
2. $h'(t) > 0$
3. $|\dot{\gamma}(t)| = 1$, d.h. $\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2 = 1$ ("γ ist nach Bogenlänge parametrisiert")

illustrationen rotationsfläche und dass gamma nicht zweimal auf gleicher x achse höhe durchlaufen darf

Konstruiere eine Rotationsfläche mit folgender Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) &\to \Sigma \\ (u, v) &\mapsto (r(u)cos(v), r(u)sin(v), h(u)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (r'(u)cos(v), r'(u)sin(v), h'(u)) \\ \varphi_v &= (-r(u)sin(v), r(u)cos(v), 0) \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Einheitsnormalenfeld:

$$N(\varphi(u,v)) = (-h'(u)cos(v), -h'(u)sin(v), r'(u))$$

Kontrolle:

- $|N| = 1$, d.h. $\langle N, N \rangle = 1$ (ok, da $h'(u)^2 + r'(u)^2 = 1$)
- $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ (ok)
- $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ (ok)

Berechne

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 \text{ (da } h'^2 + r'^2 = 1) \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = r(u)^2 \end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = h''(u)r'(u) - h'(u)r''(u) \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = r(u)h'(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies K(\varphi(u,v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(h''r' - h'r'') \cdot r \cdot h'}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (h''r'h' - r''h'^2) = \frac{1}{r} \cdot (-r'^2 r'' - h'^2 r'') = -\frac{r''(u)}{r(u)} \end{aligned}$$

Hierbei wurde genutzt, dass $r'^2 + h'^2 = 1 \implies 2r'r'' + 2h'h'' = 0$
$K(\varphi(u,v))$ ist nicht von v abhängig!
Spezialfall: Rotationsflächen mit konstanter Krümmung

1. $K = 0$, d.h. $r''(a) = 0$ ($\to r(a) = a \cdot u + b$)
   Anfangsbedingung: $r(0) = 1, r'(0) = 0, h(0) = 0 \implies r(a) = 1, h(u) = u$ mit $r'^2 + h'^2 = 1$ und $h' > 0 \implies h' = 1$
   Variation der Anfangsbedingung: $r'(0) = a \neq 0$ führt zu einem Kreiskegel:
   (Betrachte hier $\gamma : (x, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ statt $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$)

2. $K = 1$, d.h. $r'' = -r$
   Anfangsbedingung: $r(0) = 1, r'(0) = 0, h(0) = 0 \implies r(u) = cos(u); h(u) = sin(u)$
   Variation der Anfangsbedingung führt zu vertikal verschobenen Einheitssphären, oder keiner Lösung;

   Beispiel. $r(0) = 2, r'(0) = 0, h(0) = 0 \implies r(u) = 2cos(u), h(u) = \int_0^u h'(x)dx = \int_0^u \sqrt{1 - 4(sin(x))^2}dx$ mit $r'^2 + h'2 = 1$, hierbei handelt es sich um ein elliptisches Integral, nicht ausdruckbar durch elementare Funktionen.

   $$r \ gross \implies |r''| \ grossr \ klein \implies |r''| \ klein$$

3. $K = -1$, d.h. r" = r
   Mit $r(0) = 1, h(0) = 0, r'(0) = 0 \implies r(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = cosh(u), h(u) = \dots$ Es gilt: $r'(u) = cosh(u)' = sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - {}^u)$ Folglich existiert auch hier die Fläche Σ nur über einem gewissen Interval der Form $(-h_0, h_0)$. (vgl. Serie 7)

1: ähnlich hourglass figure von ana3 test aber rotierend

2: Lösungen: Sphäre, und flächen mit spitzen oder mit Rand

3: Skizze für Bsp. 3

1.4 Theorema Egregium

Ziel. Die Krümmung ist durch die Koeffizientenfunktionen E, F, G bestimmt. Genauer: durch E, F, G und ihre Ableitungen bestimmt.

Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^2-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ die zugehörige lokale Gaussabbildung. Für alle $p \in V$ gilt.

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Matrix von $(DN)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ bezüglich der Basis

$$\varphi_u, \varphi_v : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

das heisst

$$\begin{aligned} N_u &= (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) = a_{11} \cdot \varphi_u + a_{21} \cdot \varphi_v \\ N_v &= (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) = a_{12} \cdot \varphi_u + a_{22} \cdot \varphi_v \end{aligned}$$

Es gilt: $e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle, g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$ und wir folgern: $\varphi_{uu} - eN \perp N$
$\implies \varphi_{uu} - eN \in \operatorname{span} \varphi_u, \varphi_v$
Ähnlich existieren eindeutige Koeffizienten $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2 \in \mathbb{R}$ sogenannte Christoffelsymbole, mit

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \cdot \varphi_v \end{aligned}$$

Berechne nun

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle}_{=E})\right) = \frac{1}{2} E_u$$

und

$$\langle\varphi_{uu},\varphi_v\rangle = \frac{\partial}{\partial u}\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle - \langle\varphi_u,\varphi_{uv}\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \quad (\frac{\partial}{\partial v}\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle = 2\cdot\langle\varphi_u,\varphi_{vu}\rangle)$$

Anderseits gilt nach obrigen Ansatz für $\varphi_{uu},\varphi_{uv},\varphi_{vv}$ auch

$$\begin{aligned}\langle\varphi_{uu},\varphi_u\rangle &= \Gamma_{11}^1\cdot E + \Gamma_{11}^2\cdot F\\ \langle\varphi_{uu},\varphi_v\rangle &= \Gamma_{11}^1\cdot F + \Gamma_{11}^2\cdot G\end{aligned}$$

die gleichheit folgt jeweils aus $\langle N,\varphi_u\rangle$

$$\implies \begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^2\\ \Gamma_{11}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}E_u\\ F_u-\frac{1}{2}E_v\end{pmatrix}$$

Analog erhalten wir via φ_{uv} und φ_{vv}

- $\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Gamma_{12}^1\\ \Gamma_{12}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}E_v\\ \frac{1}{2}G_v\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{22}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_v-\frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}G_v\end{pmatrix}$

Beachte hier: $\det\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix} = EG - F^2 > 0$, da I_p positiv definit ist.

Konsequenz. Die Γ_{ij}^k sind durch E,F,G und ihre partiellen Ableitungen bestimmt. K ist durch E,F,G bestimmt.

Erinnerung.

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v\\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v\\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v\end{aligned}$$

Via $\langle\varphi_{uu},\varphi_u\rangle$ etc, erhalten wir Γ_{ij}^k als Funktion von E,F,G und ihren ersten partiellen Ableitungen.

Lemma 2. *Sei $\varphi : U\to V\subset\Sigma$ eine lokale C^3-Parametrisierung. Dann gilt $\forall p\in V$:*

$$-E\cdot K = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\cdot\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\cdot\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\cdot\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\cdot\Gamma_{12}^2$$

Korollar 3 (Theorema Egregium)**.** *Die Krümmung K lässt sich durch E,F,G und deren zwei partiellen Ableitungen ausdrücken.*

Beweis Korollar. Es gilt $E = \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle > 0$ da $I_p : T_p\Sigma\to\mathbb{R}$ positiv definit ist.

$$\implies K = -\frac{1}{E}(\dots)$$

wobei die $\dots$ ein Ausdruck in Γ_{ij}^k und erste partielle Ableitungen, also Ausdruck in E,F,G und zweite partielle Ableitungen ist. □

Bemerkung. Das Korollar gilt auch für Flächen der Regularität C^2.

Beweis Lemma. Wir berechnen $\varphi_{vuu} = \varphi_{uuv}$

1. $\varphi_{vuu} = \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_{uu}) = e_v N + e \underbrace{N_v}_{a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v} + (\Gamma^1_{11})_v \varphi_u + \Gamma^1_{11}\varphi_{uu} + (\Gamma^2_{11})_v \varphi_v + \Gamma^2_{11}\varphi_{vu}$
2. $\varphi_{uuv} = \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_{uv}) = f_u N + f \underbrace{N_u}_{a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v} + (\Gamma^1_{12})_u \varphi_u + \Gamma^1_{12}\varphi_{uu} + (\Gamma^2_{12})_u \varphi_v + \Gamma^2_{12}\varphi_{vu}$

Die φ_v-Komponente von φ_{vuu} und φ_{uuv} ist gleich, also

$$e \cdot a_{22} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} = f \cdot a_{21} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} \quad (*)$$

(Benutze $\varphi_{uv} = fN + \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma_{12}2\varphi_v$, etc.)

Erinnerung.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = -(a_{ij})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \underbrace{=}_{K = \det(a_{ij})} -\frac{1}{K} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\implies E = -\frac{1}{K} \cdot (a_{22}e - a_{21}f)$$

$$\text{bzw. } -E \cdot K = a_{22}e - a_{21}f \text{ (gilt auch für } K = 0)$$

$$\implies -E \cdot K \overbrace{=}^{(*)} 6 Terme in \Gamma^k_{ij} \text{ (siehe Lemma)}$$

□

Bemerkung. Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für $-F \cdot K$ und $-G \cdot K$.