Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \Subset \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \to S^3$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gauss-Abbildung), falls

$$\forall p \in V \text{ gilt: } N(q) \perp T_p\Sigma$$

Zusatz. *Flächenelement* $\sqrt{EG - F^2}$

$$EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Existenz. Definiere $N : V \to S^2$

$$q \mapsto \frac{\varphi u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q, da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dan ist $N : V \to S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt : $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \to S^2$, genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche $\mathbb{R}^3$ in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \to S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.

zwei zeichnungen, torus und moebiusband

Sei nun $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^1-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt $\forall q \in V$:

1. $N(q) \perp T_q\Sigma$
2. $N(q) \perp T_{N(q)}\Sigma$

$\implies T_q\Sigma = T_{N(q)}S^2$ für letzteres gilt $\forall p \in S^2 : p \perp T_pS$
Falls $N : V \to S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir $\forall p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p\Sigma \to T_{N(p)}S^2 = T_p\Sigma$$

die *Weingartenabbildung.*

Definition.

$$K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$$

Gaussische Krümmung im Punkt $p \in \Sigma$

Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab, da $\det -(DN)_p = (-1)^2 \times \det (DN)_p$ ist.

Beispiel. 1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3 \begin{matrix} N : \Sigma \to S^2 \\ q \mapsto e_3(\text{oder } -e_3) \end{matrix}$ N ist konstant, also gilt $\forall q \in \Sigma$ $(DN)_q = 0; K(q) = 0.$

K equiv to 1

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)
   $N : S^2 \to S^2$
   $q \mapsto q$

   Einheitssphäre mit Krümmung = 1

   $N = Id_{S^2}$ (oder $-Id_{S^2}$)
   $\forall q \in S^2$ gilt also $(DN)_q = Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma$
   $\implies K(q) = \det Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma = 1$

3. $Z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \in \mathbb{R}^{\not\vDash}$
   $N : Z \to S^2$
   $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$
   Wir bemerken: N hängt nicht von z ab.

   Zylinder mit K equiv to 0

   Also gilt für alle $q \in Z : (DN)_q(e_3) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$
   $\implies$ 0 ist ein Eigenwert der Abbildung $(DN)_q : T_qZ \to T_qZ \implies K(q) = 0.$

Zusatz. *Genauere Betrachtung des dritten Beispiels:*

Für $q = (x, y, z) \in Z$ *gilt:* $T_q Z = span\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^{v}\}$
Wir bestimmen $(DN)_q \overset{(*)}{=} v$
(*) Erklärung: Die Einschränkung von N *auf* $S' \times \{0\}$ *ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von* $(DN)_q$ *bezüglich der Basis* $\{e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2\}$

1.2 Die zweite Fundamentalform

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Rotationsflächen

1.4 Theorema Egregium