Differentialgeometrie

Sebastian Baader

Frühlingssemester 2022

Über diese Vorlesung

Differentialgeometrie ist toll. Verschiedene Inhalte bliblablup

Über dieses Dokument

Das ist eine Reinschrift der Vorlesung Differentialgeometrie aus meinen eigenen Notizen. Beachte, dass sie Fehler enthalten kann. Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Du darfst dieses Dokument nutzen wie du willst.

Inhaltsverzeichnis

I Untermannigfaltigkeiten und Flächen 3

1 Untermannigfaltigkeit . . . 4

2 Lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten . . . 7

3 Der Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit . . . 9

4 Die erste Fundamentalform . . . 13

II Die Geometrie der Gaussabbildung 15

1 Gaussabbildung . . . 15

2 Die zweite Fundamentalform . . . 15

3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten . . . 15

4 Theorema Egregium . . . 15

III Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet 16

1 Isometrien . . . 16

2 Paralleltransport und Geodäten . . . 16

3 Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten . . . 20

IV Kapitel 4 24

1 Section 4 . . . 24

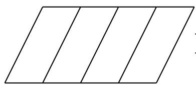
Kapitel I

Untermannigfaltigkeiten und Flächen

Zentral für das Verständnisses dieser Vorlesung sind Untermannigfaltigkeiten (UMF). Der Prototyp einer Untermannigfaltigkeit hat immer die Form

$$\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{wobei } k < n$$

Eine UMF sollte bis auf lokale Diffeomorphismen "so aussehen"



$\mathbb{R}^2 \times \{0\}$

Prototyp einer UMF in $\mathbb{R}^3$

Definition. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ heisst Diffeomorphismus falls φ bijektiv, und sowohl φ und φ^{-1} unendlich oft differenzierbar. Schreibe auch $\varphi \in (C^\infty)$ bzw. φ glatt.

Bemerkung. In der Literatur wird manchmal auch nur C^1, also stetig differenzierbar gefordert.

Beispiele.

1. $\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$ ist ein Diffeomorphismus mit Umkehrung $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

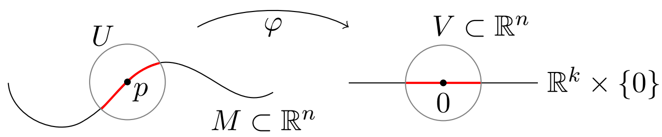
2. $\begin{aligned} \varphi\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$ ist ein Diffeomorphismus mit $\varphi^{-1} = \arctan$

3. $\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$ ist *kein* Diffeomorphismus, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ bei $x = 0$ nicht diff'bar

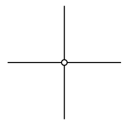
Erinnerung (Umkehrsatz)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in C^1 (also stetig diff'bar) und $p \in \mathbb{R}^n$ mit $\det(Df)_p \neq 0$. Dann existieren $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ und $V = f(U)$, so dass die Einschränkung $f|_U\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus (im C^1-Sinn ist). "f hat bei p eine lokale Umkehrung in C^1."

1 Untermannigfaltigkeit

Definition. Eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst Untermannigfaltigkeit der Dimension k falls $\forall p \in M$ zwei offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ und $0 \in V$ existieren, sowie ein C^1-Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to V$ mit $\varphi(U \cap M) = \big(\mathbb{R}^k \times \{0\}\big) \cap V$ und $\varphi(p) = 0$



Beispiel. Die (x-Achse $\cup$ y-Achse) $\setminus \{0\} = M$ ist zwar lokal diffeomorph zu $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, ist aber nicht abgeschlossen. Also keine UMF in $\mathbb{R}^2$!



Frage. Wie konstruieren wir nicht triviale Beispiele von Untermannigfaltigkeiten?

Definition. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^1 mit $m < n$. Ein Punkt p heisst regulär (für f), falls das Differential $(Df)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist. Ein Wert $w \in \mathbb{R}^m$ heisst regulär, falls alle $p \in f^{-1}(w)$ regulär sind. Nicht reguläre Punkte/Werte heissen kritisch.

Bemerkung. Falls $w \notin \text{Bild}(f)$, dann ist w auch regulär.

Im Spezialfall $k = 2$ und $n = 3$ heisst $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.

Theorem 1. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^1 mit $m \leq n$ und $w \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert. Dann ist das Urbild $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = w\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - m$.*

Beispiele.

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle p, e_3 \rangle$ Berechne $\forall p \in \mathbb{R}^3$ das Differential $(Df)_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \langle h, e_3 \rangle$

   Erinnerung (Dreigliedentwicklung)**.**

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + (Df)_p\,(h) + (Rf)_p\,(h) \\ \langle p+h, e_3 \rangle &= \langle p, e_3 \rangle + \langle h, e_3 \rangle + 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\forall p \in \mathbb{R}^3 \, (Df)_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ surjektiv, da der Gradient $(\nabla f)_p = e_3 \neq 0$ <u>Gradient</u>: Für $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $(Df)_p(h) = \langle (\nabla f)_p, h \rangle$.
Wir folgern, dass für alle $w \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}(w) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3 - 1 = 2$

2. $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (In Koordinaten $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$)
   $p \mapsto \langle p, p \rangle = ||p||_2^2$

   Berechne $\forall p \in \mathbb{R}^3$

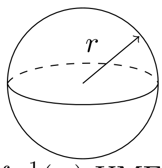
$$\begin{aligned} (Df)_p : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto 2\langle p, h \rangle \end{aligned}$$

$$f(p+h) = \langle p+h, p+h \rangle = \underbrace{\langle p, p \rangle}_{f(p)} + \underbrace{2\langle p, h \rangle}_{(Df)_p(h)} + \underbrace{\langle h, h \rangle}_{(Rf)_p(h)}$$

   $\implies (\nabla f)_p = 2p$ Also ist $(Df)_p \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ surjektiv $\iff p \neq 0$
   Wir folgern, dass für alle $w \neq 0$ die Menge $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid ||p||_2^2 = w\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3 - 1 = 2$ ist.

   <u>$w < 0$</u> <u>$w = 0$</u> <u>$w > 0$</u>

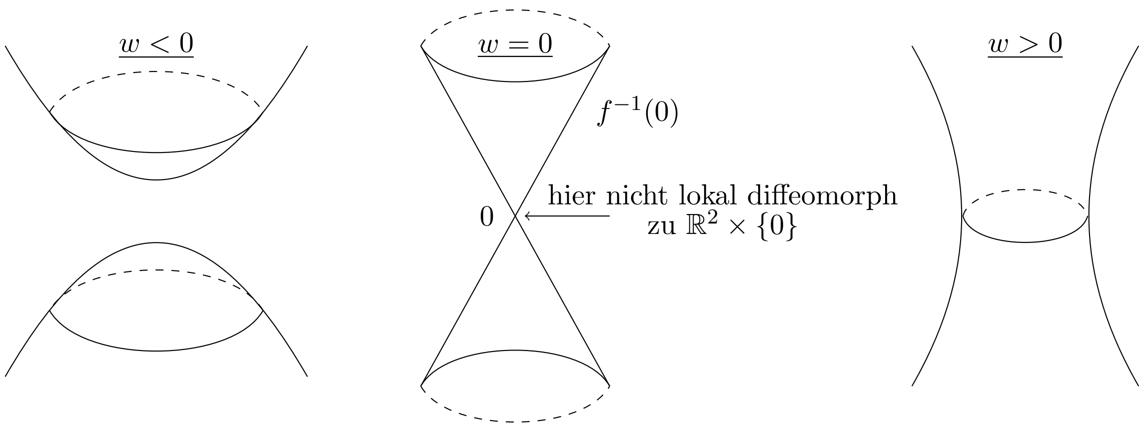
   $\emptyset$ $\cdot$ 0



$r = \sqrt{w}$

$f^{-1}(w)$ UMF der Dimension 2

3. $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Berechne $(\nabla f)_p = (2x, 2y, -2z), p = (x, y, z)$
   Also $(Df)_p \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ surjektiv $\iff p \neq 0$. <u>Folgerung</u> $w \neq 0 \implies f^{-1} \subset \mathbb{R}^3$ UMF der Dimension 2.



zweischaliges <u>Hyperboloid</u> einschaliges

Beweis von Theorem 1. Sei $p \in \mathbb{R}^n$ mit $f(p) = w$. Dann ist $(Df)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren *offene* Mengen:

- $A \subset K = \ker((Df)_p)$
- $B \subset \mathbb{R}^m$
- $Y \subset \mathbb{R}^n$

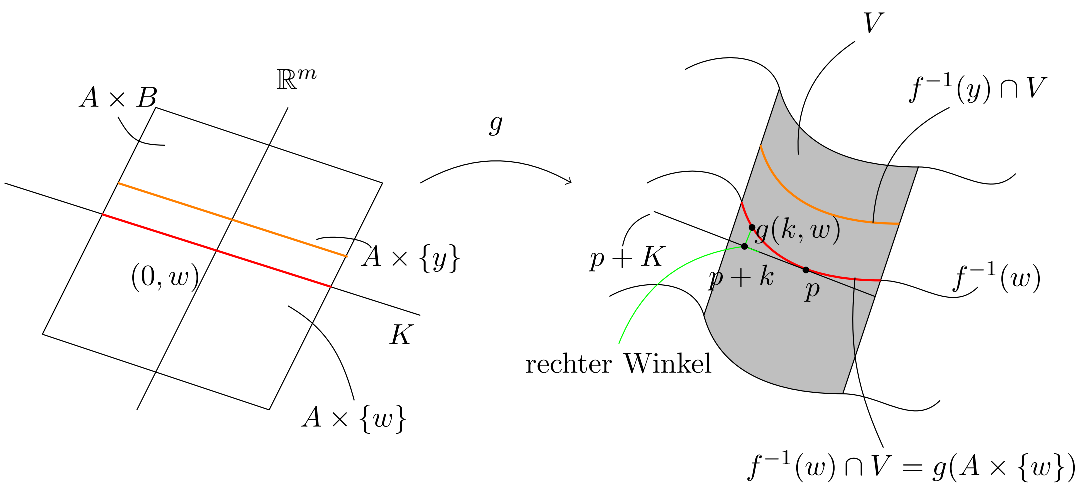
mit $0 \in A,\ w \in B$ und $p \in V$ sowie ein C^1-Diffeomorphismus $g : A \times B \to V$ mit

i) $f(g(k, y)) = y \ \forall k \in A,\ y \in B$

ii) $g(k, y) - (p + k) \in K^\perp$

Die Niveaumenge f^{-1} ist lokal gleich dem Graphen einer Funktion der Form $k \mapsto g(k, y)$. Insbesondere gilt: $f^{-1} \cap V = g(A \times \{w\})$. Wir folgern, dass $f^{-1}(w)$ eine UMF (via $\varphi = g^{-1}$) der Dimension $k = n - m$ ist. Da $\dim K = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{Bild}(Df)_p)$.

<u>Bild</u>:



$\square$

2 Lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten

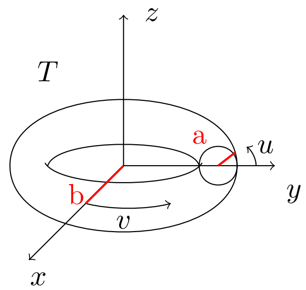
Definition. Eine C^1-Abilldung $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ heisst lokale Einbettung beim Punkt $p \in \mathbb{R}^k$ falls $(Df)_p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. ($k \leq n$

Theorem 2. *Sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Einbettung bei $p \in \mathbb{R}^k$. Dann existiert eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in W$, sodass $f(W) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist.*
In diesem Kontext heisst f eine lokale Parametrisierung von M bei $f(p) \in M$.

Beispiele.

1. $M = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, 0) \end{aligned}$$
eine (globale) Parametrisierung von M. Tatsächlich ist φ linear, mit Abbildungsmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Jakobimatrix $(J\varphi)_p$ stimmt in jedem Punkt mit A überein $\implies (D\varphi)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv.

2. $M = S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 | \; ||p||_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (reguläre Fläche, siehe oben). Definiere
$$\begin{aligned} \varphi \colon D^2 &\to S^2 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned}$$
Bereche $(J\varphi)_{(0,0,0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ Also ist φ eine lokale Parametrisierung von S^2 beim Nordpol $N = (0, 0, 1) = \varphi(0, 0)$.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Definiere den Rotationstorus
$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^2 &\to T \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a \cos u) \cos v \\ (b + a \cos u) \sin \\ a \sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$


In jedem Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist φ eine lokale Parametrisierung von T. Berechne dazu
$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v & -(b + a \cos u) \sin v \\ -a \sin u \sin v & (b + a \cos u) \cos v \\ a \cos u & 0 \end{pmatrix}.$$
Es gilt $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon \operatorname{Rang}(J\varphi)_{(0,0)} = 2 \implies (D\varphi)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv.

Frage. Besitzt jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ bei jedem Punkt eine lokale Parametrisierung?

Proposition 1. *Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ besitzt bei allen Punkten $p \in M$ eine lokale Parametrisierung.*

Beweis. Da $M \subset \mathbb{R}^n$ eine UMF ist, existieren für alle $p \in M$ offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U,\ 0 \in V$ sowie $g : U \to V$ ein Diffeomorphismus mit $g(p) = 0$ und $g(U \cap M) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$. Definiere nun

$$\begin{aligned} \varphi : g^{-1}|_{(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V} : (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V &\to M \cap U \\ q &\mapsto g^{-1}(q) \end{aligned}$$

Es gilt: $\varphi(0) = p$ und $(D\varphi)_0 = \left(Dg^{-1}\right)_0 |_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} = (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$. Nach Konstruktion (g ist ein Diffeomorphismus) ist $(Dg)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Isomorphismus, ebenso $(Dg)_p^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \implies (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$ist injektiv $\implies (D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ injektiv. Also ist φ eine lokale Parametrisierung bei $p \in M$. □

Beweis von Theorem 2. Zur Vereinfachung nehmen wir $p = 0$ und $f(p) = 0$ an. Setze $B = \mathrm{Bild}(Df)_p < \mathbb{R}^n$, ein Untervektorraum der Dimension k (da $(Df)_p$ injektiv. Weiterhin $S = B^{\perp} < \mathbb{R}^n$, sodass gilt $\mathbb{R}^n = B \oplus S,\ \dim(S) = n - k$. Definiere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^k \times S &\to \mathbb{R}^n \\ (q, s) &\mapsto f(q) + s \end{aligned}$$

F ist stetig differenzierbar. Dreigliedentwicklung im Punkt $(p, 0) = \mathbb{R}^k \times S$:
Sei $h_1 \in \mathbb{R}^k, h_2 \in S$. Berechne:

$$\begin{aligned} F(p + h_1, 0 + h_2) = f(p + h_1) + h_2 &= f(p) + (Df)_p(h_1) + (Rf)_p(h_1) + h_2 \\ &\implies (DF)_{(p,0)}((h_1, h_2)) = (Df)_p(h_1) + h_2 \end{aligned}$$

Behauptung. $(DF)_{(p,0)} : \mathbb{R}^k \times S \to \mathbb{R}^n$ *ist ein Isomorphismus*

Beweis. Es reicht zu zeigen: $(DF)_{(p,0)}$ ist injektiv (da $k + (n - k) = n$).
Sei $(h_1, h_2) \in \ker(DF)_{(p,0)}$

$$\underbrace{(Df)_p(h_1)}_{\in B} + \underbrace{h_2}_{\in S} = 0 \underbrace{\implies}_{B \cap S = \{0\}} (Df)_p(h_1) = 0 \text{ und } h_2 = 0 \underbrace{\implies}_{(Df)_p \text{ injektiv}} h_1 = 0$$

Da also $\ker(DF)_{(p,0)} = 0$, ist $(DF)_{(p,0)}$ injektiv □

Nach Umkehrsatz existieren $U \subset \mathbb{R}^k \times S,\ V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $(p, 0) \in U$ und $f(p) = F(p, 0) \in V$, sodass $F|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Nach Definition von F gilt $F(U \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}) = \underbrace{f(\mathbb{R}^k)}_{\mathrm{Bild}(f)} \cap V$.

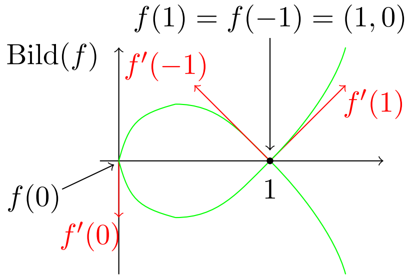
Wir schliessen, dass $\mathrm{Bild}(f) \subset \mathbb{R}^n$ lokal um den Punkt $f(p)$ die Bedingungen einer Untermannigfaltigkeit erfüllt. □

Bemerkung. Sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, welche in jedem Punkt eine lokale Einbettung ist. Dann braucht f nicht injektiv zu sein. Weiterhin ist $f(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$ im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit.

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3 - t) \end{aligned}$$

Berechne $(Jf)_t = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \implies (Df)_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv für alle $t \in \mathbb{R}$



Wir sehen, dass f nicht injektiv ist. Also ist Bild(f) keine Untermannigfaltigkeit (lokal um den Punkt $(1, 0)$).

3 Der Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit

Ziel. Beschreibung der Menge aller Tangentialvektoren in einem Punkt einer Untermannigfaltigkeit.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-UMF der Dimension k und $p \in M$. Wähle eine lokale C^1-Parametrisierung $\varphi : U \to M$ um p, d.h. $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi(U) \subset M, \varphi(0) = p$ $(0 \in U), \varphi$ injektiv und für alle $p \in U$ ist $(D\varphi)_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv. Setze

$$T_pM = \text{Bild}\left((D\varphi)_0\right) < \mathbb{R}^n$$

der <u>Tangentialraum</u> von M bei p.

Bemerkung. Die Dimension von $T_pM < \mathbb{R}^n$ ist k, da $(D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Im Falle $k = 2$ (d.h. M ist eine Fläche) nennen wir T_pM <u>Tangentialebene</u>

Beispiel. Sei $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ in C^1. Betrachte den Graphen $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ z = h(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$ und die (globale) Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, h(u, v)) \end{aligned}$$

Bereche die Jakobimatrix im Punkt $q = (u, v)$

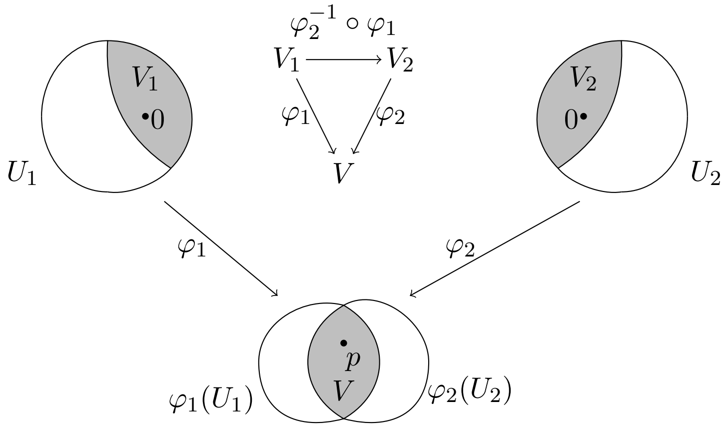
$$(J\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \text{Rang } 2 \implies (D\varphi)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ injektiv}$$

$$T_{\varphi(q)}\Gamma = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\}$$

Im Spezialfall $h = 0$: $T_{\varphi(q)}\Gamma = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$

Lemma 1. *T_pM hängt nicht von der lokalen Parametrisierung $\varphi : U \to M$ ab.*

Beweis. Seien $\varphi_1 : U_1 \to M \quad \varphi_2 : U_2 \to M$ lokale C^1-Parametrisierungen mit $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p \in M$. Setze $V = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \subset M$ offen und $V_1 = \varphi_1^{-1} \subset U_1$ und $V_2 = \varphi_2^{-1} \subset U_2$.
Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Abbildungen



Nach der Kettenregel für $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ im Punkt 0 gilt:

$$A = (D\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)_0 = (D\varphi_2^{-1})_{\varphi_1(0)} \circ (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0^{-1} \circ (D\varphi_1)_0 \implies (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0 \circ A$$

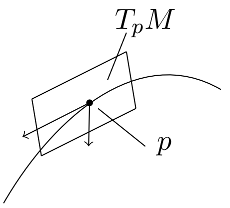
Damit formen wir um:

$$\begin{aligned} \implies T_pM = \operatorname{Bild}(D\varphi_1)_0 &= \operatorname{Bild}((D\varphi_2)_0 \circ A) \\ &\overset{(1)}{=} (D\varphi_2)_0 \circ A\left(\mathbb{R}^k\right) \\ &= (D\varphi_2)_0\left(\mathbb{R}^k\right) \\ &= \operatorname{Bild}(D\varphi_2)_0 \end{aligned}$$

In (1) wird benutzt, dass A invertierbar ist, mit $A^{-1} = (D\varphi_1)_0^{-1} \circ (D\varphi_2)_0$ und damit ist $A\left(\mathbb{R}^k\right) = \mathbb{R}^k$. $\square$

Interpretation des Tangentialraums via Geschwindigkeitsvektoren

Proposition 2. *Sei $p \in M$. Der Tangentialraum T_pM besteht aus allen Geschwindigkeitsvektoren der Form $\gamma'(0)$ für C^1-Wege $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$.*



Beweis. (i) Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = p$. Betrachte eine lokale C^1-Parametrisierung $\varphi : U \to M$ mit $\varphi(0) = p$.
Wähle $\delta > 0$, sodass $\gamma\big((-\delta, \delta)\big) \subset \varphi(U)$. Definiere $\bar\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^k$

$$t \mapsto \varphi^{-1} \circ \gamma(t)$$

Dann gilt $\gamma|_{(-\delta,\delta)} = \varphi \circ \bar\gamma$

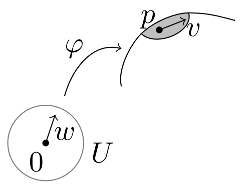
$$\implies \gamma'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \bar\gamma)(0) = (D\varphi)_{\bar\gamma(0)}\big(\bar\gamma'(0)\big) = (D\varphi)_0\big(\bar\gamma'(0)\big) \in \mathrm{Bild}(D\varphi)_0 = T_pM$$

(ii) Sei $v \in T_pM = \mathrm{Bild}\big((D\varphi)_0\big)$ für eine lokale C^1-Parametrisierung $\varphi : U \to M$ mit $\varphi(0) = p$. Es existiert also $w \in \mathbb{R}^k$ mit $(D\varphi)_0(w) = v$.
Konstruktion eines Weges $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$. Wähle $\delta > 0$, sodass für alle $t \in (-\delta, \delta)$ gilt: $tw \in U$ (geht, da U offen). Definiere nun:

$$\gamma : (-\delta, \delta) \to M$$
$$t \mapsto \varphi(tw)$$

Dann gilt: $\gamma(0) = \varphi(0) = p$

$$\implies \gamma'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi(tw))(0) = (D\varphi)_0(w) = v$$



□

Differenzierbare Abbildung zwischen UMF

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-UMF. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^m$ heisst differenzierbar im Punkt $p \in M$, falls ein $U \subset \mathbb{R}^n$ offen existiert mit $p \in U$, sowie $F : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $F|_{U\cap M} = f|_{U\cap M}$. Insbesondere sind Einschränkungen von differenzierbaren Abb. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auf UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar (in allen Punkten).

Definition. Seien $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m C^1$-UMF und $f : M \to N$ stetig differenzierbar, $p \in M$ (d.h. $f : M \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar mit $f(M) \subset N$). Definiere

$$\begin{aligned}(Df)_p : T_pM &\to T_{f(p)}N \\ v &\mapsto (DF)_p(v)\end{aligned}$$

wobei $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine beliebige C^1-Einschränkung von f um den Punkt p ist, d.h. $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ und $F|_{U\cap M} = f|_{U\cap M}$. Die Abbildung $(Df)_p$ heisst Differential von f an der Stelle $p \in M$.

Lemma 2. *i.) Für alle $v \in T_pM$ gilt $(DF)_p(v) \in T_{f(p)}N$*

ii.) $(DF)_p(v)$ hängt nicht von der Erweiterung F ab.

Beweis. i.) Sei $v \in T_pM$ Wähle $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, sowie Bild$(\gamma) \subset U$. Betrachte nun den C^1-Weg $\delta = F \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$. Es gilt für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \delta(t) = F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \in N$, da $F|_M = f$ und $\gamma(t) \in M$.
Berechne:

$$\delta(0) = f(\gamma(0)) = f(p) \implies \delta'(0) = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(0) = (DF)_{\gamma(0)}\big(\gamma'(0)\big) = (DF)_p(v)$$

Nach Proposition gilt $\delta'(0) \in T_{f(p)}N$, also $(DF)_p(v) \in T_{f(p)}N$.

ii.) Seien $F : U \to \mathbb{R}^m$ und $\bar{F} : \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ zwei Erweiterungen von f (differenzierbar bei p). Für $v \in T_pM$, wähle $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ wie oben, mit Bild$(\gamma) \subset U \cap \bar{U}$. Definiere wie unter i) zwei Wege $\delta = F \circ \gamma$ und $\bar{\delta} = \bar{F} \circ \gamma$. Es gilt $\delta'(0) = (DF)_p(v)$ und $\bar{\delta}'(0) = (D\bar{F})_p(v)$. Beachte: δ und $\bar{\delta}$ stimmen überein mit $f \circ \gamma(t) \implies \delta'(0) = \bar{\delta}'(0)$ □

Bemerkung. Es gilt die Kettenregel. Seien $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n, L \subset \mathbb{R}^l$ C^1-UMF und $f : M \to N, g : N \to L$ in den Punkten $p \in M$ bzw. $f(p) \in N$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ im Punkt $p \in M$ differenzierbar, es gilt

$$\big(D(g \circ f)\big)_p = (Dg)_{f(p)} \circ (Df)_p : T_pM \to T_{g\circ f(p)}L$$

Grund: Kettenregel gilt für alle Erweiterungen F, G.

Beispiel einer differenzierbaren Abbildung zwischen UMF

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ der Rotationstorus parametrisiert durch $(0 < a < b)$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a\cos u)\cos v \\ (b + a\cos u)\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \Sigma &\to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ q &\mapsto \frac{q}{||q||_2}. \end{aligned}$$

f lässt sich zu $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$ erweitern. In Koordinaten: $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. F ist differenzierbar (sogar C^∞) deshalb auch $f : \Sigma \to S^2$. Für $q = (x,y,z) \neq 0$, berechne die Jakobimatrix

$$(JF)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} & \frac{-xy}{r^3} & \frac{-xz}{r^3} \\ \frac{-xy}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} \\ \frac{-xz}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

Betrachte den Punkt $p = \varphi(0,0) = (a+b, 0, 0) \in \Sigma$. $(Jf)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a+b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$.

Bestimme $T_p\Sigma = \operatorname{span}\{e_2, e_3\}$ und $T_{f(p)}S^2 = T_{(1,0,0)}S^2 = \operatorname{span}\{e_2, e_3\}$. Wir erhalten also $(Df)_p : T_p\Sigma \to T_{f(p)}S^2$. Es gilt $(Df)_p(e_2) = \dfrac{1}{a+b}e_2$, bzw. $(Df)_p(e_3) = \dfrac{1}{a+b}e_3$

4 Die erste Fundamentalform

Erinnerung. Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, welche bilinear, symmetrisch und positiv ist.

- Positivität: $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

Jedes Skalarprodukt definiert eine positiv definite quadratische Form q d.h.

(i) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

(ii) $B(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$ ist bilinear in v, w.

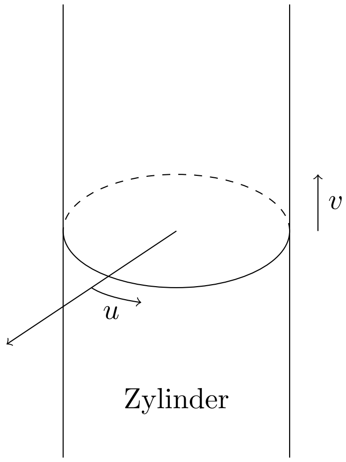
$$\begin{aligned} q : V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Sei nun $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Wir erhalten in jedem Punkt $p \in \Sigma$ ein Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_p = T_p\Sigma \times T_p\Sigma &\to \mathbb{R} \\ \langle v, w \rangle &\mapsto \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Das Feld von Skalarprodukten $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ heisst Riemannsche Metrik auf Σ. Die zugehörige quadratische Form $I_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ heisst erste Fundamentalform von Σ an der Stelle p.

Beschreibung durch Koeffizienten



Zylinder

Kapitel II

Die Geometrie der Gaussabbildung

1 Gaussabbildung

2 Die zweite Fundamentalform

3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Rotationsflächen

4 Theorema Egregium

Kapitel III

Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet

1 Isometrien

2 Paralleltransport und Geodäten

Ziel. Beschreibe Geodäten $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$

Frage. Dazu stellen werden wir folgendes benötigen: Was bedeutet $\dot{\gamma}(t)$ ist konstant?

- In $\mathbb{R}^2$ $\quad \ddot{\gamma}(t) = 0$
- In Σ $\quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ - die kovariante Ableitung

Definition. Ein glattes Vektorfeld entlang einer glatten Kurve $\alpha : [a,b] \to \Sigma$ ist eine glatte Abbildung $w : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mit $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$.
Die horizontale Ableitung oder (kovariante Ableitung von w im Punkt $\alpha(t)$ ist die orthogonale Projektion der Abbildung $\frac{dw}{dt}(t)$ auf $T_{\alpha(t)}\Sigma$:

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t) - \left\langle \frac{dw}{dt}(t), N(\alpha(t)) \right\rangle N(\alpha(t))$$

Bemerkung. Wir betrachten glatte Kurven und Vektorfelder (aber C^2 reicht praktisch immer).

Berechnung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale (glatte) Parametrisierung mit $\alpha([a,b]) \subset \varphi(U) = V$. Schreibe $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$. Sei $w : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang α. Schreibe $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma = \operatorname{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$ als $w(t) = \alpha(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$. Es gilt

$$\frac{dw}{dt}(t) = \dot{a}(t)\varphi_u + \dot{b}\varphi_v + a\dot{u}\varphi_{uu} + a\dot{v}\varphi_{vu} + b\dot{v}\varphi_{vv}$$

Dazu erinnere dass $\frac{d}{dt}(\varphi_u = \varphi_{uu}\dot{u} + \varphi_{vu}\dot{v}$
Mit $\varphi_{uu} = eN + \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v$ etc.. erhalten wir

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \big(\dot{a} + \Gamma_{11}^1 a\dot{u} + \Gamma_{12}^1 a\dot{v} + \Gamma_{21}^1 b\dot{u} + \Gamma_{22}^1 b\dot{v}\big)\varphi_u + \big(\dot{b} + \Gamma_{11}^2 a\dot{u} + \Gamma_{12}^2 a\dot{v} + \Gamma_{21}^2 b\dot{u} + \Gamma_{22}^2 b\dot{v}\big)\varphi_v$$

Definition. w heisst <u>parallel</u>, falls $\frac{Dw}{dt} \equiv 0$
"keine Änderung in Richtung der Tangentialebene“

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

Sei $w(t) = a(t)e_1 + b(t)e_2$.

$$\frac{dw}{dt} = \dot{a}(t)e_1 + \dot{b}e_2 \perp e_3 = N \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

2. Betrachte $\alpha : [0, 2\pi] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$
$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$
Dann ist $w(t) \equiv e_3$ ein paralleles Vektorfeld entlang α.

$$\frac{dw}{dt} = 0 \implies \frac{Dw}{dt} = 0$$

beachte hier $e_3 \in T_{\alpha(t)}S^2$ für alle t. Weiteres Beispiel $\bar{w}(t) = \dot{\alpha}(t)$

$$\frac{d\bar{w}}{dt}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \mid\mid N(\alpha(t)) \implies \frac{D\bar{w}}{dt}(t) = 0 \text{ (da } \frac{d\bar{w}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}S^2 \text{)}$$

Bemerkung. Die Bedingung $\frac{Dw}{dt} = 0$ ist unabhängig von der Parametrisierung von $\alpha : [a, b] \to \Sigma$

Sei $\sigma : [a, b] \to [a, b]$ ein Diffeomorphismus mit $\sigma(a) = a$ und $\sigma(b) = b$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(w(\alpha(\sigma(t))) = \frac{d}{d\sigma}w(\alpha(\sigma))\dot{\sigma}(t) \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{Dw}{d\sigma}\dot{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \sigma \text{ Diffeomorphismus } &\implies \dot{\sigma}(t) \neq 0 \\ &\implies \frac{Dw}{dt} = 0 \iff \frac{Dw}{d\sigma} = 0 \end{aligned}$$

Definition. Eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to \Sigma$ heisst <u>geodätisch</u>, falls $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$. Das Bild von γ bezeichnen wir mit <u>Geodäte</u>.

Beachte hier $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$, also ist $\dot{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang $\gamma(t)$.

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt $\dfrac{Dw}{dt} = \dfrac{dw}{dt}$ (siehe oben), also

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \iff \frac{d\dot{\gamma}}{dt}(t) = \ddot{\gamma}(t) = 0$$

Also parametrisieren geodätische Kurven in der Ebene Geradenabschnitte.

2. $\Sigma = S^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \gamma : \mathbb{R} \to S^2$ ist geodätisch, da $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$.
(Siehe oben: $\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t)$ ist parallel zu $N(\gamma(t))$, also senkrecht zu $T_{\gamma(t)}S^2 \implies \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$.) Analog sind alle <u>Grosskreisenabschnitte</u> mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert Geodäten. Wir werden später sehen, dass <u>alle</u> Geodäten von dieser Form sind.

3. $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ Betrachte die lokal <u>isometrische</u> Parametrisierung.
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to Z$
$(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$

Behauptung. *Die Bilder von Geodäten in $\mathbb{R}^2$ unter φ sind Geodäten.*

Spezialfall. Geraden durch $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

Erinnerung. Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ glatt heisst *geodätisch*, falls $\dfrac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$

In lokalen Koordinaten bezüglich einer Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$, schreibe $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. (falls $\gamma(\mathbb{R}) \subset \varphi(U)$)

Geodätengleichung

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0$$
$$\ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0$$

Führe Koordinaten $w = \dot{u}, z = \dot{v}$ ein. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen mit glatten Koeffizienten, (d.h. lokal lipschitz) erster Ordnung auf $\mathbb{R}^4$

- $\dot{u} = w$
- $\dot{v} = z$
- $\dot{w} = \ddot{u} = -(...)$
- $\dot{z} = \ddot{v} = -(...)$

Es seien Anfangsbedingungen $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ vorgegeben ($p \in \varphi(U)$).
Seien $(u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4$ mit $\varphi(u_0, v_0) = p,\ v = w_0\varphi_u + z_0, \varphi_v$ Nach Picard Lindelöf existiert eine *eindeutige* Lösungskurve $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^4$ zur Anfangsbedingung $\bar{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0, z_0)$; $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))$. Dann ist $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ unsere gesuchte Lösung.

$\implies$

Proposition 3. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, $p \in \Sigma$ und $v \in T_p\Sigma$ vorgegeben. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige geodätische Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Zusatz. *Für vollständige Flächen (d.h. abgeschlossen und ohne Rand) lässt sich γ auf $\mathbb{R}$ erweitern.*

Bemerkungen.

1. Die Geodätengleichungen sind invariant unter Isometrien.
   Tätsächlich sind Γ^k_{ij} durch die Koeffizientenfunktionen E, F, G bestimmt, welche invariant unter Isometrien sind. $\implies$ Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab (auch lokal gültig).

2. Nach Proposition 3 existiert für alle $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ (Σ vollständig), genau eine geodätische Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. Falls wir für alle Paare (p, v) schon eine Geodäte kennen, dann haben wir alle Geodäten gefunden.
   Anwendung: Geodäten auf S^2 sind *Grosskreise*.
   Geodäten auf dem Zylinder Z sind *Helixen, Meridiane, Mantellinien*.

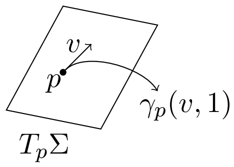
3 Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ glatt und vollständig, sowie $p \in \Sigma,\ v \in T_p\Sigma, \gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$

Notation. $\gamma_p(v,t) = \gamma(t)$

Definition. $\exp : T_p\Sigma \to \Sigma$

$$v \mapsto \gamma_p(v,1)$$



Bemerkungen.

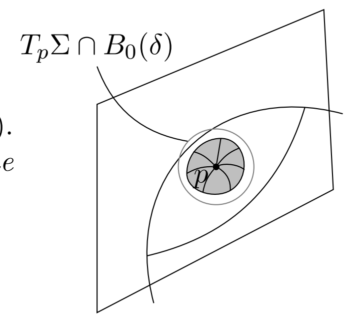
1. Es gilt für alle $\lambda > 0, t \in \mathbb{R}$: $\gamma_p(\lambda v, t) = \gamma_p(v, \lambda t)$
2. Eine Verschärfung des Satzes von Picard-Lindelöf nach Cauchy zeigt, dass die Lösung $\gamma_p(v,t)$ glatt von den Parametern $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$, und $t \in \mathbb{R}$ abhängt. Daraus folgt, dass $\exp : T_p\Sigma \to \Sigma$ glatt ist!
3. Wieso heisst diese Abbildung exp? Die Antwort kommt aus der Lietheorie: Betrachte die Gruppe $GL(\mathbb{C}^n)$. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ haben wir die Abbildung $\gamma(t) = e^{tA} \in GL(\mathbb{C}^n)$. Diese Kurve ist geodätisch bezüglich der Killingform auf $GL(\mathbb{C}^n)$
   ⌜ Sei $X \in GL(\mathbb{C}^n)$ und $A, B \in T_X G(\mathbb{C}^n)$
   $\langle A, B\rangle = spur(X^{-1}AX^{-1}B)$? Stimmt für $X = Id$ ⌟

Berechung des Differentials von exp

Sei $p \in \Sigma$ und $h \in T_p\Sigma$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = h$, also $\exp(th) = \gamma_p(th, 1) = \gamma_p(h,t) = \gamma(t)$. Berechne nun:

$$(D\exp)_0(h) = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(th) - \exp(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dot{\gamma}(t) = h$$
$$\implies D(\exp)_0 = \mathrm{Id}_{T_p\Sigma}$$

Nach Umkehrsatz existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass die Einschränkung von exp auf $U = T_p\Sigma \cap B_0(\delta) = \{v \in T_p\Sigma \mid ||v||_2 < \delta\}$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $\varphi = \exp|_U : U \to \varphi(U) \subset \Sigma$ eine lokale Parametrisierung.



Wähle auf $T_p\Sigma$ Polarkoordinaten (r,θ) (Wahl ist wo ist $\theta = 0$?). Die entsprechenden Koordinaten auf $\exp(U) \subset \Sigma$ heissen *geodätische Polarkoordinaten.*

Proposition 1. *Bezüglich der lokalen Parametrisierung $\varphi = \exp : U \to \Sigma$ und Koordinaten $(u, v) = (r, \theta)$ gilt:*

$$E = 1, F = 0, \lim_{r \to 0} G(r, \theta) = 0 \text{ und } \lim_{r \to 0} \frac{d}{dr}\sqrt{G(r, \theta)} = 1$$

Beweis. Fixiere einen Winkel $\theta \in S^1 = [0, 2\pi]/0 = 2\pi$. Es gilt $E(r, \theta) = \left\langle \frac{d}{dr} \exp, \frac{d}{dr} \exp \right\rangle$. Da die Kurve $t \to \exp(t, \theta)$ geodätisch mit Geschwindigkeit 1 ist, folgt

$$\left|\left| \frac{d}{dr} \exp(r, \theta) \right|\right| = 1 \implies E(r, \theta) = 1$$

Das Paar (r, θ) erfüllt die Geodätengleichung:

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{r}\dot{\theta} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta}^2 = 0$$

Da θ konstant ist, folgt $\Gamma_{11}^2 = 0$. Weiterhin gilt (siehe Abschnitt Theorema Egregium)

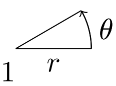
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_r \\ F_r - \frac{1}{2} E_\theta \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \Gamma_{11}^2 = 0$$

$E = 1 \implies E_r = E_\theta = 0 \implies \Gamma_{11}^1 = 0$ und $F_r = 0$. Also hängt $F(r, \theta) = \langle \exp_r, \exp_\theta \rangle$ nicht von von r ab!

Mit $\lim_{r \to 0} || \exp_\theta || = 0$ folgt also $F = 0$. Ausserdem folgt mit $\lim_{r \to 0} || \exp_\theta || = 0$ auch $\lim_{r \to 0} G(r, \theta) = \lim_{r \to 0} \langle \exp_\theta, \exp_\theta \rangle = 0$.

Genauer: In erster Ordnung in r gilt $|| \exp_\theta(r, \theta)|| = r$ (+höhere Terme) also

$$\lim_{r \to 0} \frac{d}{dr}\sqrt{G(r, \theta)} = \lim_{r \to 0} \frac{d}{dr} || \exp_\theta(r, \theta)|| = 1$$



□

Krümmung in geodätischen Polarkoordinaten

Wir betrachten eine lokale Parametrisierung $\exp : U \to \Sigma$. Bezüglich Polarkoordinaten (r, θ) auf $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt:
$E = 1, F = 0, \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$.

Weiterhin gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_\theta \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} \implies G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G_r$$

Berechnung der Krümmung mittels der Formel (Lemma, Theorema Egregium).

$$\begin{aligned} -EK = -K &= (\Gamma_{12}^2)_r + (\Gamma_{12}^2)^2 \qquad \text{Viele Terme streichen sich weg} \\ &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{G}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{G}\right)^2 \text{ benutze } G \neq 0, \text{ da } \det \neq 0 \end{aligned}$$

Proposition 2. $K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$

Beweis.

$$\begin{aligned} K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{\sqrt{G}}\right)_r \\ &= -\frac{1}{2}\frac{G_{rr}}{G} + \frac{1}{4}\frac{(G_r)^2}{G^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{G_r}{G}\right)_r - \frac{1}{4}\frac{G_r^2}{G^2} = K \end{aligned}$$

□

Anwendung. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, und $\exp : U \to \Sigma$ eine lokale Parametrisierung. Wir machen für die Koeffizientenfunktion $\sqrt{G(r,\theta)}$ eine Taylorentwicklung.

Ansatz. Unter Berücksichtigung von $\lim_{r\to 0}\sqrt{G} = 0, \lim_{r\to 0}\sqrt{G}_r = 1$, sowie Prop. 4 $\sqrt{G} = r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + ...$, (Restterm $R(r,\theta)$ erfüllt $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^3}R(r,\theta) = 0$)

$$\implies \sqrt{G}_{rr} = 2a(\theta) + 6b(\theta)r + \text{höhere Terme}$$

Prop. 5

$$\implies K = -\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}} = \frac{2a(\theta) + 6b(\theta)r + ...}{r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + ...}$$

Die Grenzbetrachtung $r \to 0$ liefert:

- $a(\theta) = 0$ (da K nicht $\to \infty$ gehen darf wegen Glattheit)
- $b(\theta) = \dfrac{K}{6}$.

Damit erhalten wir $\sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + R(r,\theta)$ Sei $p \in \Sigma$ und $r > 0$.

Definition. Definiere $K^\Sigma(p,r) = \exp(K_0(r))$, wobei $K_0(r) = \{z \in T_p\Sigma |\ |z| = r\}$
"Kreis um p in Σ mit Radius r, *den Kreis runterlegen*"

Setze $U^\Sigma(p,r)$ =Länge$(K^\Sigma(p,r)) = \int_0^{2\pi}\sqrt{G}\,d\theta$. Weglänge war definiert $\int_0^t \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dt$ hier $u = r, v = \theta$.

Theorem 1 (Umfangdefektformel)**.**

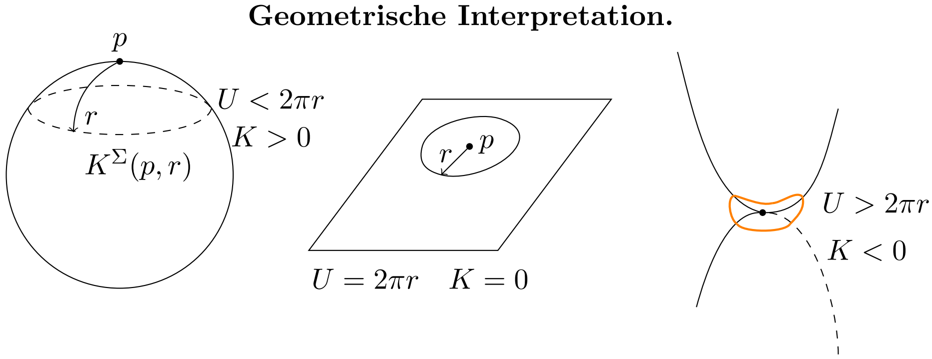
$$K(p) = \lim_{r\to\theta}\frac{2\pi r - U^\Sigma(p,r)}{r^3}\frac{3}{\pi}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned} U^\Sigma(p,r) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r,\theta)}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [r - \frac{K(p)}{6} r^3 + R(r,\theta)]\,d\theta \\ &= 2\pi r - \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 + \int_0^{2\pi} R(r,\theta)\,d\theta \\ &\implies \lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - U^\Sigma(p,r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(p) \end{aligned}$$

□

Geometrische Interpretation.



Anwendung (Flächen konstanter Krümmung)**.** Falls K konstant ist, dann hat die Differentialgleichung $K\sqrt{G} = -\sqrt{G}_{rr}$ zur Anfangsbedingung $\sqrt{G}(0,\theta) = 0$ $\sqrt{G}_r(0,\theta) = 1$ siehe Prop. 4 eine eindeutige Lösung:

1. $K = 0 \implies \sqrt{G(r,\theta)} = r$ also $G = r^2$
2. $K > 0 \implies \sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} r)$ also $G = \frac{1}{K} \sin(\sqrt{K} r)^2$
3. $K < 0 \sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} r)$ wobei $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

In allen Fällen ist G unabhängig von θ!

Machen wir weiter mit anderen Dingen.

Definition. Wir studieren das Studium.

Kapitel IV

Kapitel 4

1 Section 4

Wir betrachten heute Differentialgleichungen.

Definition. Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, wo wir eine Funktion suchen.

this is some new text