Kapitel 1

Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet

1.1 Isometrien

1.2 Paralleltransport und Geodäten

Ziel. Beschreibe Geodäten $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$

Frage. Dazu stellen werden wir folgendes benötigen: Was bedeutet $\dot{\gamma}(t)$ ist konstant?

- In $\mathbb{R}^2$ $\quad \ddot{\gamma}(t) = 0$
- In Σ $\quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ - die kovariante Ableitung

Definition. Ein glattes Vektorfeld entlang einer glatten Kurve $\alpha : [a, b] \to \Sigma$ ist eine glatte Abbildung $w : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$.
Die horizontale Ableitung oder (kovariante Ableitung von w im Punkt $\alpha(t)$ ist die orthogonale Projektion der Abbildung $\frac{dw}{dt}(t)$ auf $T_{\alpha(t)}\Sigma$:

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t) - \left\langle \frac{dw}{dt}(t), N(\alpha(t)) \right\rangle N(\alpha(t))$$

Bemerkung. Wir betrachten glatte Kurven und Vektorfelder (aber C^2 reicht praktisch immer).

Berechnung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale (glatte) Parametrisierung mit $\alpha([a, b]) \subset \varphi(U) = V$. Schreibe $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$. Sei $w : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang α. Schreibe $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma = \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$ als $w(t) = \alpha(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$. Es gilt

$$\frac{dw}{dt}(t) = \dot{a}(t)\varphi_u + \dot{b}\varphi_v + a\dot{u}\varphi_{uu} + a\dot{v}\varphi_{vu} + b\dot{v}\varphi_{vv}$$

Dazu erinnere dass $\frac{d}{dt}(\varphi_u = \varphi_{uu}\dot{u} + \varphi_{vu}\dot{v}$
Mit $\varphi_{uu} = eN + \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v$ etc.. erhalten wir

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \big(\dot{a} + \Gamma^1_{11}a\dot{u} + \Gamma^1_{12}a\dot{v} + \Gamma^1_{21}b\dot{u} + \Gamma^1_{22}b\dot{v}\big)\varphi_u + \big(\dot{b} + \Gamma^2_{11}a\dot{u} + \Gamma^2_{12}a\dot{v} + \Gamma^2_{21}b\dot{u} + \Gamma^2_{22}b\dot{v}\big)\varphi_v$$

Definition. w heisst parallel, falls $\dfrac{Dw}{dt} \equiv 0$
"keine Änderung in Richtung der Tangentialebene"

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

Sei $w(t) = a(t)e_1 + b(t)e_2$.

$$\frac{dw}{dt} = \dot{a}(t)e_1 + \dot{b}e_2 \perp e_3 = N \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

2. Betrachte $\alpha : [0, 2\pi] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$
$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$
Dann ist $w(t) \equiv e_3$ ein paralleles Vektorfeld entlang α.

$$\frac{dw}{dt} = 0 \implies \frac{Dw}{dt} = 0$$

beachte hier $e_3 \in T_{\alpha(t)}S^2$ für alle t. Weiteres Beispiel $\bar{w}(t) = \dot{\alpha}(t)$

$$\frac{d\bar{w}}{dt}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \mid\mid N(\alpha(t)) \implies \frac{D\bar{w}}{dt}(t) = 0 \text{ (da } \frac{d\bar{w}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}S^2 \text{)}$$

Bemerkung. Die Bedingung $\dfrac{Dw}{dt} = 0$ ist unabhängig von der Parametrisierung von $\alpha : [a, b] \to \Sigma$

Sei $\sigma : [a, b] \to [a, b]$ ein Diffeomorphismus mit $\sigma(a) = a$ und $\sigma(b) = b$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(w(\alpha(\sigma(t))) = \frac{d}{d\sigma}w(\alpha(\sigma))\dot{\sigma}(t) \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{Dw}{d\sigma}\dot{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \sigma \text{ Diffeomorphismus } &\implies \dot{\sigma}(t) \neq 0 \\ &\implies \frac{Dw}{dt} = 0 \iff \frac{Dw}{d\sigma} = 0 \end{aligned}$$

Definition. Eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to \Sigma$ heisst geodätisch, falls $\dfrac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$. Das Bild von γ bezeichnen wir mit Geodäte.

Beachte hier $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$, also ist $\dot{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld entlang $\gamma(t)$.

Beispiele. 1. In der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gilt $\dfrac{Dw}{dt} = \dfrac{dw}{dt}$ (siehe oben), also

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \iff \frac{d\dot{\gamma}}{dt}(t) = \ddot{\gamma}(t) = 0$$

Also parametrisieren geodätische Kurven in der Ebene Geradenabschnitte.

2. $\Sigma = S^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \gamma : \mathbb{R} \to S^2$ ist geodätisch, da $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$.
(Siehe oben: $\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t)$ ist parallel zu $N(\gamma(t))$, also senkrecht zu $T_{\gamma(t)}S^2 \implies \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$.) Analog sind alle <u>Grosskreisenabschnitte</u> mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert Geodäten. Wir werden später sehen, dass <u>alle</u> Geodäten von dieser Form sind.

3. $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ Betrachte die lokal <u>isometrische</u> Parametrisierung.
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to Z$
$(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$

Behauptung. *Die Bilder von Geodäten in $\mathbb{R}^2$ unter φ sind Geodäten.*

Spezialfall. Geraden durch $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Erinnerung. Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ glatt heisst *geodätisch*, falls $\dfrac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$

In lokalen Koordinaten bezüglich einer Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$, schreibe $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. (falls $\gamma(\mathbb{R}) \subset \varphi(U)$)

Geodätengleichung

$$\ddot{u} + \Gamma_{11}^{1}\dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^{1}\dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^{1}\dot{v}^2 = 0$$
$$\ddot{v} + \Gamma_{11}^{2}\dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^{2}\dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^{2}\dot{v}^2 = 0$$

Führe Koordinaten $w = \dot{u}, z = \dot{v}$ ein. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen mit glatten Koeffizienten, (d.h. lokal lipschitz) erster Ordnung auf $\mathbb{R}^4$

- $\dot{u} = w$
- $\dot{v} = z$
- $\dot{w} = \ddot{u} = -(...)$
- $\dot{z} = \ddot{v} = -(...)$

Es seien Anfangsbedingungen $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ vorgegeben ($p \in \varphi(U)$).
Seien $(u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4$ mit $\varphi(u_0, v_0) = p,\ v = w_0\varphi_u + z_0, \varphi_v$ Nach Picard Lindelöf existiert eine *eindeutige* Lösungskurve $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^4$ zur Anfangsbedingung $\bar{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0, z_0)$; $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))$. Dann ist $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ unsere gesuchte Lösung.
$\Longrightarrow$

Proposition 3. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, $p \in \Sigma$ und $v \in T_p\Sigma$ vorgegeben. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige geodätische Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Zusatz. *Für vollständige Flächen (d.h. abgeschlossen und ohne Rand) lässt sich γ auf $\mathbb{R}$ erweitern.*

Bemerkungen.

1. Die Geodätengleichungen sind invariant unter Isometrien.
   Tätsächlich sind Γ_{ij}^{k} durch die Koeffizientenfunktionen E, F, G bestimmt, welche invariant unter Isometrien sind. $\Longrightarrow$ Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab (auch lokal gültig).

2. Nach Proposition 3 existiert für alle $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ (Σ vollständig), genau eine geodätische Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. Falls wir für alle Paare (p, v) schon eine Geodäte kennen, dann haben wir alle Geodäten gefunden.
   Anwendung: Geodäten auf S^2 sind *Grosskreise*.
   Geodäten auf dem Zylinder Z sind *Helixen, Meridiane, Mantellinien.*

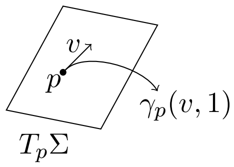
1.3 Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ glatt und vollständig, sowie $p \in \Sigma,\ v \in T_p\Sigma, \gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p, \dot\gamma(0) = v$

Notation. $\gamma_p(v,t) = \gamma(t)$

Definition. $\exp : T_p\Sigma \to \Sigma$

$$v \mapsto \gamma_p(v,1)$$



Bemerkungen.

1. Es gilt für alle $\lambda > 0, t \in \mathbb{R}$: $\gamma_p(\lambda v, t) = \gamma_p(v, \lambda t)$
2. Eine Verschärfung des Satzes von Picard-Lindelöf nach Cauchy zeigt, dass die Lösung $\gamma_p(v,t)$ glatt von den Parametern $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$, und $t \in \mathbb{R}$ abhängt. Daraus folgt, dass $\exp : T_p\Sigma \to \Sigma$ glatt ist!
3. Wieso heisst diese Abbildung exp? Die Antwort kommt aus der Lietheorie: Betrachte die Gruppe $GL(\mathbb{C}^n)$. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ haben wir die Abbildung $\gamma(t) = e^{tA} \in GL(\mathbb{C}^n)$. Diese Kurve ist geodätisch bezüglich der Killingform auf $GL(\mathbb{C}^n)$
   ⌜ Sei $X \in GL(\mathbb{C}^n)$ und $A, B \in T_X G(\mathbb{C}^n)$
   $\langle A, B\rangle = spur(X^{-1}AX^{-1}B)$? Stimmt für $X = Id$ ⌟

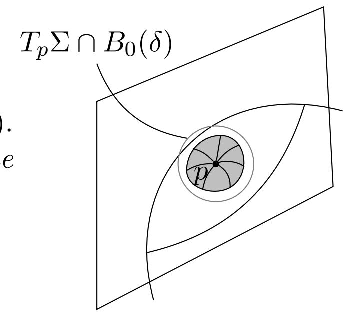
Berechung des Differentials von exp

Sei $p \in \Sigma$ und $h \in T_p\Sigma$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = h$, also $\exp(th) = \gamma_p(th, 1) = \gamma_p(h,t) = \gamma(t)$. Berechne nun:

$$(D\exp)_0(h) = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(th) - \exp(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dot\gamma(t) = h$$
$$\implies D(\exp)_0 = \mathrm{Id}_{T_p\Sigma}$$

Nach Umkehrsatz existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass die Einschränkung von exp auf $U = T_p\Sigma \cap B_0(\delta) = \{v \in T_p\Sigma \mid ||v||_2 < \delta\}$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $\varphi = \exp|_U : U \to \varphi(U) \subset \Sigma$ eine lokale Parametrisierung.

Wähle auf $T_p\Sigma$ Polarkoordinaten (r, θ) (Wahl ist wo ist $\theta = 0$?). Die entsprechenden Koordinaten auf $\exp(U) \subset \Sigma$ heissen *geodätische Polarkoordinaten.*



Proposition 1. *Bezüglich der lokalen Parametrisierung $\varphi = \exp : U \to \Sigma$ und Koordinaten $(u,v) = (r,\theta)$ gilt:*

$$E = 1, F = 0, \lim_{r\to 0} G(r,\theta) = 0 \text{ und } \lim_{r \to 0} \frac{d}{dr}\sqrt{G(r,\theta)} = 1$$

Beweis. Fixiere einen Winkel $\theta \in S^1 = [0, 2\pi]/0 = 2\pi$. Es gilt $E(r,\theta) = \left\langle \frac{d}{dr}\exp, \frac{d}{dr}\exp \right\rangle$. Da die Kurve $t \to \exp(t,\theta)$ geodätisch mit Geschwindigkeit 1 ist, folgt

$$\left|\left|\frac{d}{dr}\exp(r,\theta)\right|\right| = 1 \implies E(r,\theta) = 1$$

Das Paar (r,θ) erfüllt die Geodätengleichung:

$$\ddot{\theta} + \Gamma^2_{11}\dot{r}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{r}\dot{\theta} + \Gamma^2_{22}\dot{\theta}^2 = 0$$

Da θ konstant ist, folgt $\Gamma^2_{11} = 0$. Weiterhin gilt (siehe Abschnitt Theorema Egregium)

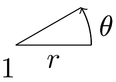
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_r \\ F_r - \frac{1}{2}E_\theta \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \Gamma^2_{11} = 0$$

$E = 1 \implies E_r = E_\theta = 0 \implies \Gamma^1_{11} = 0$ und $F_r = 0$. Also hängt $F(r,\theta) = \langle \exp_r, \exp_\theta \rangle$ nicht von von r ab!

Mit $\lim_{r\to 0} || \exp_\theta || = 0$ folgt also $F = 0$. Ausserdem folgt mit $\lim_{r\to 0} || \exp_\theta || = 0$ auch $\lim_{r\to 0} G(r,\theta) = \lim_{r \to 0}\langle \exp_\theta, \exp_\theta\rangle = 0$.

Genauer: In erster Ordnung in r gilt $|| \exp_\theta(r,\theta)|| = r$ (+höhere Terme) also

$$\lim_{r\to 0}\frac{d}{dr}\sqrt{G(r,\theta)} = \lim_{r \to 0}\frac{d}{dr}|| \exp_\theta(r,\theta)|| = 1$$



□

Krümmung in geodätischen Polarkoordinaten

Wir betrachten eine lokale Parametrisierung $\exp : U \to \Sigma$. Bezüglich Polarkoordinaten (r,θ) auf $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt:
$E = 1, F = 0, \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$.

Weiterhin gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\theta \\ \frac{1}{2}G_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}G_r \end{pmatrix} \implies G\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}G_r$$

Berechnung der Krümmung mittels der Formel (Lemma, Theorema Egregium).

$$\begin{aligned} -EK = -K &= (\Gamma^2_{12})_r + (\Gamma^2_{12})^2 \qquad \text{Viele Terme streichen sich weg} \\ &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{G}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{G}\right)^2 \text{ benutze } G \neq 0, \text{ da } \det \neq 0 \end{aligned}$$

Proposition 2. $K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$

Beweis.

$$\begin{aligned} K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{1}{2}\frac{G_r}{\sqrt{G}}\right)_r \\ &= -\frac{1}{2}\frac{G_{rr}}{G} + \frac{1}{4}\frac{(G_r)^2}{G^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{G_r}{G}\right)_r - \frac{1}{4}\frac{G_r^2}{G^2} = K \end{aligned}$$

$\square$

Anwendung. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte reguläre Fläche, und $\exp : U \to \Sigma$ eine lokale Parametrisierung. Wir machen für die Koeffizientenfunktion $\sqrt{G(r,\theta)}$ eine Taylorentwicklung.

Ansatz. Unter Berücksichtigung von $\lim_{r\to 0}\sqrt{G} = 0, \lim_{r\to 0}\sqrt{G}_r = 1$, sowie Prop. 4 $\sqrt{G} = r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + ...$, (Restterm $R(r,\theta)$ erfüllt $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^3}R(r,\theta) = 0$)

$$\implies \sqrt{G}_{rr} = 2a(\theta) + 6b(\theta)r + \text{höhere Terme}$$

Prop. 5

$$\implies K = -\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}} = \frac{2a(\theta) + 6b(\theta)r + ...}{r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + ...}$$

Die Grenzbetrachtung $r \to 0$ liefert:

- $a(\theta) = 0$ (da K nicht $\to \infty$ gehen darf wegen Glattheit)
- $b(\theta) = \dfrac{K}{6}$.

Damit erhalten wir $\sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + R(r,\theta)$ Sei $p \in \Sigma$ und $r > 0$.

Definition. Definiere $K^\Sigma(p,r) = \exp(K_0(r))$, wobei $K_0(r) = \{z \in T_p\Sigma |\ |z| = r\}$
"Kreis um p in Σ mit Radius r, *den Kreis runterlegen*"

Setze $U^\Sigma(p,r)$ =Länge$(K^\Sigma(p,r)) = \int_0^{2\pi}\sqrt{G}\,d\theta$. Weglänge war definiert $\int_0^t \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dt$ hier $u = r, v = \theta$.

Theorem 1 (Umfangdefektformel)**.**

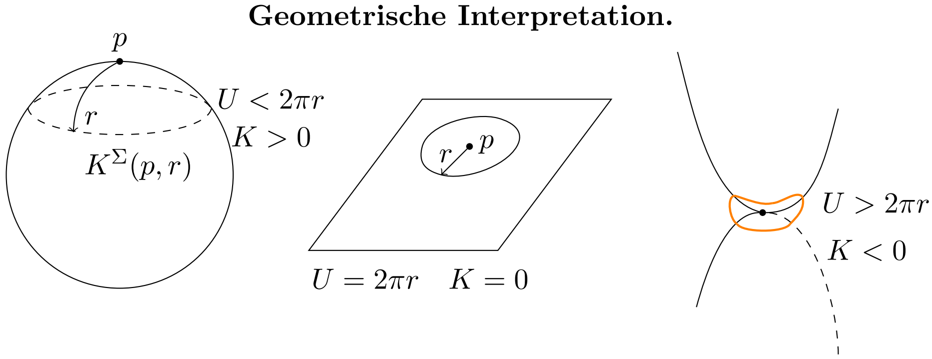
$$K(p) = \lim_{r\to\theta}\frac{2\pi r - U^\Sigma(p,r)}{r^3}\frac{3}{\pi}$$

Beweis. Berechne

$$
\begin{aligned}
U^{\Sigma}(p,r) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r,\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [r - \frac{K(p)}{6} r^3 + R(r,\theta)]\, d\theta \\
&= 2\pi r - \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 + \int_0^{2\pi} R(r,\theta)\, d\theta \\
&\implies \lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - U^{\Sigma}(p,r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(p)
\end{aligned}
$$

□

Geometrische Interpretation.



Anwendung (Flächen konstanter Krümmung)**.** Falls K konstant ist, dann hat die Differentialgleichung $K\sqrt{G} = -\sqrt{G}_{rr}$ zur Anfangsbedingung $\sqrt{G}(0,\theta) = 0$ $\sqrt{G}_r(0,\theta) = 1$ siehe Prop. 4 eine eindeutige Lösung:

1. $K = 0 \implies \sqrt{G(r,\theta)} = r$ also $G = r^2$
2. $K > 0 \implies \sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} r)$ also $G = \frac{1}{K} \sin(\sqrt{K} r)^2$
3. $K < 0 \sqrt{G(r,\theta)} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} r)$ wobei $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

In allen Fällen ist G unabhängig von θ!