

Kapitel 1

Ebene hyperbolische Geometrie

Knörrer: Geometrie Kapitel 3

Ziel. Konstruktion einer *vollständigen* Fläche H mit konstanter Krümmung -1 , analog zur Ebene ($K \equiv 0$) und Sphäre ($K \equiv 1$).

Vollständig: Jede geodätische Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow H$ lässt sich geodätisch auf \mathbb{R} erweitern.

Motivation. *Gauss-Bonnet*

$$\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

wobei Σ eine kompakte, vollständige Fläche. Falls $\chi(\Sigma) < 0$ und die Krümmung K konstant ist, dann muss K negativ sein!

Theorem 1 (Klassifikation der Flächen). *Sei Σ eine topologische (glatte), kompakte, vollständige, orientierbare, zusammenhängende Fläche. Dann ist Σ zu einer der Flächen Σ_g homöomorph (diffeomorph):*

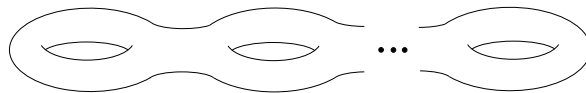


Abbildung 1.1: Σ_g mit g Henkel

Es gilt: $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$ falls $g \geq 2$.

1.1 Eine Riemannsche Metrik mit $K=-1$

Naiver Ansatz zur Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf \mathbb{R}^2 mit $K = -1$.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = h(p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

wobei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ positiv und glatt ist. Für die Koeffizientenfunktionen E, F, G gilt also:

- $E(x, y) = \langle e_1, e_1 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$
- $F(x, y) = \langle e_1, e_2 \rangle_{(x,y)} = 0$
- $G(x, y) = \langle e_2, e_2 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$

Terminologie. Falls $E = G$ und $F = 0$ gilt, dann heissen die Koordinaten *konform* oder *isotherm*.

Eine kleine Rechnung zeigt

$$K = -\frac{1}{2h(x, y)} \Delta(\log(h(x, y)))$$

wobei $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ der Laplaceoperator (siehe Serie 10).

Nun führt $K = -1$ zu einer Differentialgleichung für h :

$$2h(x, y) = \Delta(\log(h(x, y)))$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung*, welche schwierig zu lösen ist. Mit dem Lösungsansatz $h(x, y) = y^n$ finden wir eine Lösung $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$, welche allerdings nur auf der oberen Halbebene $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ definiert ist.

Definition. Die *hyperbolische Ebene* ist die Menge $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{x+iy} = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

Bemerkungen.

1. Die Translation $z \mapsto z + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Isometrie von H . Tatsächlich, schreibe

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y) \end{aligned}$$

Für alle $p \in H$ gilt $(DT)_p = Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DT)_p(v), (DT)_p(w) \rangle_{T(p)} = \langle v, w \rangle_{T(p)}$$

Stimmt, da $y(p) = y(T(p))$, und somit $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_{T(p)}$

2. Die Streckung $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda > 0$ ist eine Isometrie von H . Schreibe

$$S : H \rightarrow H$$

$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$$

Für alle $p \in H$ gilt $(DS)_p = \lambda Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DS)_p(v), (DS)_p(w) \rangle_{S(p)} = \lambda^2 \langle v, w \rangle_{S(p)}$$

Stimmt, da $y(S(p)) = \lambda y(p)$, also $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S(p)} = \frac{1}{\lambda^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_p$

3. Die Inversion $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$ ist eine Isometrie von H . Schreibe

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\bar{z}} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} \in H$$

falls $z \in H$ d.h. $y > 0$. Also $\varphi : H \rightarrow H$. Es gilt für alle $z \in H$ und $v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$(D\varphi)_z(v) = \varphi'(z)v = -\frac{1}{z^2}v$$

Zu prüfen:

$$\langle v, w \rangle_z \stackrel{?}{=} \langle -\frac{1}{z^2}v, -\frac{1}{z^2}w \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{|z|^4} \langle v, w \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}}$$

. Stimmt, da $y(-\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{1}{|z|^2}y(z) \implies \langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = |z|^4 \langle \cdot, \cdot \rangle_z$

1.2 Möbiustransformationen

Erinnerung (aus der komplexen Analysis). Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$, definieren wir die zugehörige *Möbiustransformation* (nicht auf ganz \mathbb{C} definiert).

$$(MT)\Phi : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \in \mathbb{C} \implies \Phi_A(z) = z + b$
2. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies \Phi_A(z) = a^2 z$. Für $a = \sqrt{\lambda} : \lambda z$ ($\lambda > 0$)
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Phi_A(z) = -\frac{1}{z}$ Insbesondere, für $a = \sqrt{\lambda} (\lambda > 0) : \lambda z$

Bemerkung. Die obigen Isometrien 1-3 sind vom Typ Φ_A mit $A \in SL(\mathbb{R}^3)$. (Determinante 1)

Projektive Interpretation von Möbiustransformation

Sei $A \in GL(\mathbb{C}^2)$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Insbesondere bildet A Geraden durch 0 auf Geraden durch 0 ab (1).

Definition. Die *projektive Ebene* $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist die Menge aller komplexen Geraden durch 0 in \mathbb{C}^2 . Konkret: Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich folgender Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \text{ mit } w = \lambda v$$

Dann ist $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$. Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

- Falls $b \neq 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} z \in \mathbb{C}$.
- Falls $b = 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{a \neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$.

Daraus folgern wir, dass $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Aus (1) folgt: Die Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \\ [v] &\mapsto [Av] \end{aligned}$$

Interpretation via $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- $v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $cz + d = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$

Notation für $\Phi_A : \Phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ "geeignet interpretiert". Aus dieser Definition folgt auch dass $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$. Diese Tatsache ist mit der anderen Definition mühsam zu beweisen.