

Kapitel 1

Ebene hyperbolische Geometrie

Knörrer: Geometrie Kapitel 3

Ziel. Konstruktion einer *vollständigen* Fläche H mit konstanter Krümmung -1 , analog zur Ebene ($K \equiv 0$) und Sphäre ($K \equiv 1$).

Vollständig: Jede geodätische Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow H$ lässt sich geodätisch auf \mathbb{R} erweitern.

Motivation. *Gauss-Bonnet*

$$\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

wobei Σ eine kompakte, vollständige Fläche. Falls $\chi(\Sigma) < 0$ und die Krümmung K konstant ist, dann muss K negativ sein!

Theorem 1 (Klassifikation der Flächen). *Sei Σ eine topologische (glatte), kompakte, vollständige, orientierbare, zusammenhängende Fläche. Dann ist Σ zu einer der Flächen Σ_g homöomorph (diffeomorph):*

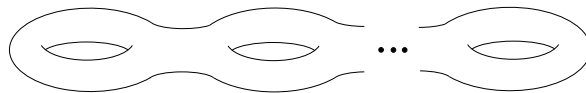


Abbildung 1.1: Σ_g mit g Henkel

Es gilt: $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$ falls $g \geq 2$.

1.1 Eine Riemannsche Metrik mit $K=-1$

Naiver Ansatz zur Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf \mathbb{R}^2 mit $K = -1$.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = h(p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

wobei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ positiv und glatt ist. Für die Koeffizientenfunktionen E, F, G gilt also:

- $E(x, y) = \langle e_1, e_1 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$
- $F(x, y) = \langle e_1, e_2 \rangle_{(x,y)} = 0$
- $G(x, y) = \langle e_2, e_2 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$

Terminologie. Falls $E = G$ und $F = 0$ gilt, dann heissen die Koordinaten *konform* oder *isotherm*.

Eine kleine Rechnung zeigt

$$K = -\frac{1}{2h(x, y)} \Delta(\log(h(x, y)))$$

wobei $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ der Laplaceoperator (siehe Serie 10).

Nun führt $K = -1$ zu einer Differentialgleichung für h :

$$2h(x, y) = \Delta(\log(h(x, y)))$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung*, welche schwierig zu lösen ist. Mit dem Lösungsansatz $h(x, y) = y^n$ finden wir eine Lösung $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$, welche allerdings nur auf der oberen Halbebene $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ definiert ist.

Definition. Die *hyperbolische Ebene* ist die Menge $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{x+iy} = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

Bemerkungen.

1. Die Translation $z \mapsto z + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Isometrie von H . Tatsächlich, schreibe

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y) \end{aligned}$$

Für alle $p \in H$ gilt $(DT)_p = Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DT)_p(v), (DT)_p(w) \rangle_{T(p)} = \langle v, w \rangle_{T(p)}$$

Stimmt, da $y(p) = y(T(p))$, und somit $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_{T(p)}$

2. Die Streckung $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda > 0$ ist eine Isometrie von H . Schreibe

$$\begin{aligned} S : H &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Für alle $p \in H$ gilt $(DS)_p = \lambda Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DS)_p(v), (DS)_p(w) \rangle_{S(p)} = \lambda^2 \langle v, w \rangle_{S(p)}$$

Stimmt, da $y(S(p)) = \lambda y(p)$, also $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S(p)} = \frac{1}{\lambda^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_p$

3. Die Inversion $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$ ist eine Isometrie von H . Schreibe

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\bar{z}} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} \in H$$

falls $z \in H$ d.h. $y > 0$. Also $\varphi : H \rightarrow H$. Es gilt für alle $z \in H$ und $v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$(D\varphi)_z(v) = \varphi'(z)v = -\frac{1}{z^2}v$$

Zu prüfen:

$$\langle v, w \rangle_z \stackrel{?}{=} \left\langle -\frac{1}{z^2}v, -\frac{1}{z^2}w \right\rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{|z|^4} \langle v, w \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}}$$

. Stimmt, da $y(-\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{1}{|z|^2}y(z) \implies \langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = |z|^4 \langle \cdot, \cdot \rangle_z$

1.2 Möbiustransformationen

Erinnerung (aus der komplexen Analysis). Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$, definieren wir die zugehörige *Möbiustransformation* (nicht auf ganz \mathbb{C} definiert).

$$\begin{aligned} (MT)\Phi : \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \in \mathbb{C} \implies \Phi_A(z) = z + b$
2. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies \Phi_A(z) = a^2 z$. Für $a = \sqrt{\lambda} : \lambda z$ ($\lambda > 0$)
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Phi_A(z) = -\frac{1}{z}$ Insbesondere, für $a = \sqrt{\lambda} (\lambda > 0) : \lambda z$

Bemerkung. Die obigen Isometrien 1-3 sind vom Typ Φ_A mit $A \in SL(\mathbb{R}^3)$. (Determinante 1)

Projektive Interpretation von Möbiustransformation

Sei $A \in GL(\mathbb{C}^2)$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Insbesondere bildet A Geraden durch 0 auf Geraden durch 0 ab (1).

Definition. Die *projektive Gerade* $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist die Menge aller komplexen Geraden durch 0 in \mathbb{C}^2 . Konkret: Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich folgender Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \text{ mit } w = \lambda v$$

Dann ist $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$. Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

- Falls $b \neq 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} z \in \mathbb{C}$.
- Falls $b = 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{a \neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$.

Daraus folgern wir, dass $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Aus (1) folgt: Die Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \\ [v] &\mapsto [Av] \end{aligned}$$

Interpretation via $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- $v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $cz + d = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$

Notation für $\Phi_A : \Phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ "geeignet interpretiert". Aus dieser Definition folgt auch dass $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$. Diese Tatsache ist mit der anderen Definition mühsam zu beweisen.

Lemma 1. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$ Dann erhält die Möbiustransformation φ_A die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$.

Beweis. Sei $z \in H$, d.h. $\operatorname{im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) > 0$. Berechne

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(\varphi_A(z)) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) + (a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\ &\stackrel{\det A=1}{=} \frac{\operatorname{im}(z)}{(cz+d)^2} > 0\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Es gilt sogar $\varphi_A(H) = H$ Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}H &= \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (H) = \varphi_{A \circ A^{-1}}(H) \\ &\stackrel{\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B}{=} \varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}}(H) = \varphi_A(\varphi_{A^{-1}}(H)) \subset \varphi_A(H)\end{aligned}$$

$\implies \varphi_A(H) = H$. Daraus folgt, dass Möbiustransformationen eine Gruppe bilden.

Lemma 2. Jede Möbiustransformation $\varphi_A : H \rightarrow H$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ ist eine endliche Komposition von Möbiustransformationen der Form

1. $z \mapsto z + b$ ($b \in \mathbb{R}$) horizontale Translation
2. $z \mapsto \lambda z$ ($\lambda > 0$) Streckung
3. $z \mapsto -\frac{1}{z}$ Inversion

Beweis.

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \frac{cz + \frac{c}{a}b}{cz+d} = \frac{a}{c} \frac{cz+d + (\frac{c}{a}b-d)}{cz+d} = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$$

für geeignete α und β . Details siehe Serie 11. □

Korollar 1. Alle Möbiustransformationen der Form $\varphi_A : H \rightarrow H$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ sind Isometrien bezüglich der Riemannschen Metrik $\frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$.

Beweis. Möbiustransformationen des Typs 1-3 sind Isometrien, siehe oben □

Lemma 3. Die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$
 $t \mapsto ie^t$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|_H &= \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_H} \\ y(\gamma(t)) &\stackrel{=}{=} e^t \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2} \underbrace{\langle ie^t, ie^t \rangle_{\mathbb{R}^2}}_{\langle e^t, e^t \rangle = (e^t)^2}} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$ ist nach Bogenlänge parametrisiert (bzgl. hyperbolischer Metrik). Sei nun $\delta : \mathbb{R} \rightarrow H$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\delta(0) = i$ und $\dot{\delta}(0) = i$. Betrachte die folgende Isometrie von H (Spiegelung an $i\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow H \\ x + iy &\mapsto -x + iy \end{aligned}$$

Nun ist $\sigma \circ \delta : \mathbb{R} \rightarrow H$ auch geodätisch mit $\sigma \circ \delta(0) = i$ und auch $\frac{d}{dt}(\sigma \circ \delta)(0) = i$. Aus der Eindeutigkeit der Geodäten zu Anfangsbedingungen folgt also $\delta = \sigma \circ \delta$, also $\delta(\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. Da γ und δ nach Bogenlänge parametrisiert (δ ist geodätisch mit $\|\dot{\delta}(0)\|_H = 1$) sind, folgt $\gamma = \delta$. \square

Proposition 1. *Die Geodäten in H sind genau die Halbgeraden und Halbkreise, welche senkrecht auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial H$ stehen.*

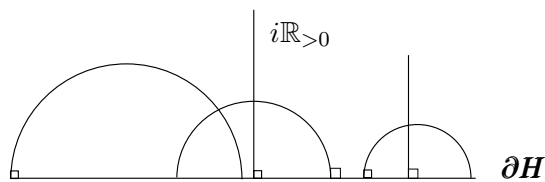


Abbildung 1.2: test