Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subset \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \to S^3$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gauss-Abbildung), falls

$$\forall p \in V \text{ gilt: } N(q) \perp T_p\Sigma$$

Zusatz. *Flächenelement* $\sqrt{EG - F^2}$

$$EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Existenz. Definiere $N : V \to S^2$

$$q \mapsto \frac{\varphi u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q, da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dan ist $N : V \to S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt : $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \to S^2$, genannt *Gaussabbildung.* Tatsächlich trennt eine solche Fläche $\mathbb{R}^3$ in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \to S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.

$\boxed{\textit{zwei zeichnungen, torus und moebiusband}}$

Sei nun $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^1-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt $\forall q \in V$:

- $N(q) \perp T_q\Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)}\Sigma$

$\implies T_q\Sigma = T_{N(q)}S^2$ für letzteres gilt $\forall p \in S^2 : p \perp T_pS$
Falls $N : V \to S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir $\forall p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p\Sigma \to T_{N(p)}S^2 = T_p\Sigma$$

die *Weingartenabbildung*.

Definition.

$$K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$$

Gaussische Krümmung im Punkt $p \in \Sigma$

Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab,
da $\det -(DN)_p = (-1)^2 \cdot \det (DN)_p$ ist.

Beispiel. 1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
$N : \Sigma \to S^2$

$q \mapsto e_3(\text{oder } -e_3)$
N ist konstant, also gilt $\forall q \in \Sigma \; (DN)_q = 0; K(q) = 0.$

K equiv to 1

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)
$N : S^2 \to S^2$

$q \mapsto q$

Einheitssphäre mit Krümmung = 1

$N = Id_{S^2}$ (oder $-Id_{S^2}$)
$\forall q \in S^2$ gilt also $(DN)_q = Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma$
$\implies K(q) = \det Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma = 1$

3. $Z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \in \mathbb{R}^{\not\models}$
$N : Z \to S^2$

$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$
Wir bemerken: N hängt nicht von z ab.

Zylinder mit K equiv to 0

Also gilt für alle $q \in Z : (DN)_q(e_3) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$
$\implies$ 0 ist ein Eigenwert der Abbildung $(DN)_q : T_qZ \to T_qZ \implies K(q) = 0.$

Zusatz. *Genauere Betrachtung des dritten Beispiels:*

Für $q = (x, y, z) \in Z$ *gilt:* $T_q Z = span\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^{v}\}$
Wir bestimmen $(DN)_q \overset{(*)}{=} v$
(*) Erklärung: Die Einschränkung von N *auf* $S' \times \{0\}$ *ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von* $(DN)_q$ *bezüglich der Basis* $\{e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2\}$

Definition. Die *mittlere Krümmung* im Punkt $p \in \Sigma$ ist $H(p) = \frac{1}{2}\text{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$, welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist:

$$\text{Spur}(-(DN)_p) = -\text{Spur}(DN)_p$$

Bemerkung. Reguläre Flächen mit $H \equiv 0$ heissen *Minimalflächen.*

Beispiele.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. K \equiv 0$ und $H \equiv 0$.
2. $\Sigma = S^2$. $K \equiv 1$ und $H \equiv 1 \iff \frac{1}{2}$ Spur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\Sigma = Z$. $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$

Notation. Ein Punkt $p \in \Sigma$ heisst:

- *elliptisch*, falls $K(p) > 0$
- *hyperbolisch.* falls $K(p) < 0$ (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) = 0$

minibeispiele zu all diesen

Proposition 1. *Sei* $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ *eine reguläre Fläche, welche lokale* C^2*-Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist* $\forall p \in \Sigma$ *gilt:*

$$\langle (DN)_p(a), b \rangle_p = \langle a, (DN)_p(b) \rangle_p$$

Beweis. Es reicht, dies für die Basisvektoren $a = \varphi_u(p)$ und $b = \varphi_v(p)$ zu prüfen! Sei $\varphi : U \to \Sigma$ eine C^2-Parametrisierung mit $p \in \varphi(U)$. Betrachte die Komposition $N \circ \varphi : U \to S^2$. $\forall q = (u, v) \in U$ gilt: $\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u,v)} \overset{\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^3}{=} 0$ (*)

1 zeichnung mit phiU und phiV usw

Notation. $N_u(u,v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)) = \frac{d}{du}(N \circ \varphi)(u,v)$ und
$N_v(u,v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)) = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi)(u,v)$
$\frac{d}{du}(*)_v : \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v(\varphi \text{ ist } C^2)} \rangle = 0$
$\frac{d}{dv}(*)_u : \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$
φ ist $C^2 \implies \varphi_{uv} = \varphi_{vu}$
$\implies \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$
ausgeschrieben: $\langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle = \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)), \varphi_u(u,v) \rangle$
$= \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle$

$\square$

Bemerkung. Im Beweis haben wir die Annahme ($\varphi : U \to \Sigma$ ist C^2) benutzt: φ_{uv} ist vorgekommen. Diese Anname ist essenziell, damit $N : \varphi(U) \to S^2$ differenzierbar ist. Tatsächlich gilt $N(\varphi(u,v)) = \pm \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ Wir benutzen, dass φ_u und φ_v differenzierbar sind, dass heisst $\varphi : U \to \Sigma$ ist zweimal differenzierbar.

Beispiel. Sei $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ falls } x \leq 0 \\ x^2, \text{ falls } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$
f ist differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ *nicht* differenzierbar.
Betrachte die Fläche $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_3 | z = f(x)\} - \Gamma f \times \mathbb{R}$", welche die globale C^1-Parametrisierung $\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^2 \to \Sigma \\ (u,v) \mapsto (u, v, f(u)) \end{array}$ besitzt.
Berechne $\varphi_u = (1, 0, f'(u)), \varphi_v = (0,1,0)$, und $N(u,v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f'(u),0,1)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$
Für $u = 0$ gilt $N(u,v) = (0,0,1) = e_3$ und für $u \geq 0$ gilt $N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2,0,1)$
Versuch, $\frac{d}{du}N(0,0)$ zu berechen:

1. $\lim\limits_{\epsilon \to 0, \epsilon < 0} \frac{1}{\epsilon}(\underbrace{N(\epsilon)}_{=e_3} - \underbrace{N(0,0)}_{=e_3}) = 0$

2. $\lim\limits_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} \frac{1}{\epsilon}(N(\epsilon, 0) - N(0,0)) = \lim\limits_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} \frac{1}{\epsilon}(-\frac{2\epsilon}{\sqrt{1+4\epsilon^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon^2}} - 1) = (2, 0, \dots) \neq e_3$

Im 2. Punk wird genutzt, dass$\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1 + \frac{x}{2}}$, somit $\frac{-2\epsilon}{1+4\epsilon^2} \underbrace{\approx}_{\frac{1}{1+x} \approx 1-x} -2\epsilon(1 - 2\epsilon^2) \approx -2$

Also ist $N(u,v)$ an der Stelle $(0,0)$ nicht differenzierbar!
Hypothese: Ab jetzt besitzen alle regulären Flächen mindestens lokale C^1-Parametrisierungen.

Korollar 1. *$(DN)_p : T_pN \to T_p\Sigma$ lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwelchel diagonalisieren.*
D.h. Die Weingartenabbildung $(DN)_p$ hat zwei orthogonale Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$

zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$K(p) = \det((DN)_p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$
$$H(p) = \frac{1}{2} Spur((DN)_p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 \cdot \lambda_2)$$

Definition. Die von den Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ aufgespannten Richtungen heissen *Hauptkrümmungsrichtungen*. Eine C^1-Kurve $\gamma : (a,b) \to \Sigma$ heisst *Krümmungslinie*, falls $\forall t \in (a,b)$ gilt $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$ ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung $(DN)_{\gamma(t)}$: $T_{\gamma(t)}\Sigma_{\gamma(t)}$.

Beispiele.

1. $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
   Hier gilt $\forall p \in E : (DN)_p = 0$ also sind die Hauptkrümmungsrichtungen nicht wohldefiniert. Alle Geraden in E sind Krümmungslinien. (Sogar alle C^1-Kurven $\gamma : \mathbb{R} \to E$)

2. $Z = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1$
   Hier gilt $\forall p \in Z : (DN)_p(e_3) = 0 \implies$ alle (vertikalen) Mantellinien in Z sind Krümmungslinien. Mehr noch: Bezüglich der Basis $e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2$ von $T_{\underbrace{(x,y,z)}_{=p}}\Sigma$ hat $(DN)_p$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten also eine zweite Schar von Krümmungslinien: horizontale Kreise. In Punkten mit $(DN)_p \neq \lambda \cdot Id_{T_p\Sigma}$ stehen die Krümmungslinien *senkrecht* aufeinander.

1.2 Die zweite Fundamentalform

Ziel der nächsten beiden Abschnitte:

$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}$$

wobei I_p, II_p die erste, bzw. die zweite Fundamentalform ist.

Motivation. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}_3$ eine C^2-reguläre Fläche, und $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma$ eine C^2-Kurve mit $\alpha(0) = p \in \Sigma$ und $\dot\alpha(0) = v \in T_p\Sigma$.

Proposition 2. *(Satz von Mensier) Sei $N : V \to S^2$ ein lokales Einheitsnormalenfeld $(p \in V \subset \Sigma)$. Dann gilt $\langle \ddot\alpha(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$. Insbesondere hängt die* normale *Beschleunigungskomponente $\langle \ddot\alpha(0), N(p) \rangle$ nur von $p = \alpha(0)$ und $v = \dot\alpha(0)$ ab.*

Beweis. $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt:

$$\langle \dot\alpha(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \text{ (per Definition von } T_p\Sigma \text{ und } N(p))$$

$$\text{Ableiten nach t: } \langle \ddot\alpha(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle \dot\alpha(t), \underbrace{\frac{d}{dt} N(\alpha(t))}_{(DN)_{\alpha(t)}(\dot\alpha(t))} \rangle = 0$$

$$\text{Für } t = 0 \text{ erhalten wir } \langle \ddot\alpha(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle.$$

□

Definition. Die *zweite Fundamentalform* von Σ an der Stelle p ist die Abbildung

$$\begin{aligned} II_p : T_p\Sigma &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto -\langle v, (DN)_p(v) \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Vorzeichen von II_p hängt von N ab. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar ist, dann lässt sich eine globale Wahl von N fixieren (Wahl der Orientierung).

Erinnerung. Die erste Fundamentalform, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ hat bezüglich jeder lokalen Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$ eine Matrix $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, bezüglich der Basis φ_u, φ_v von $T_p\Sigma$. $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

Koeffizienten für II_p:

- $e = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$ $(DN)_{\varphi(u,v)}$ ist symmetrisch.
- $e = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle$

Notation.

$$N_u = \frac{d}{du}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)$$

$$N_v = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)$$

Wir erhalten also mit $\langle \varphi_u, N \rangle \equiv 0$ und ableiten nach w: $\langle \varphi_{uu}, N \rangle + \langle \varphi_u, N_u \rangle = 0$, analog für v

- $e = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle$
- $e = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle$

- $e = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$

Beispiel. Funktionsgraph von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (C^2)
$\Gamma_f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \subset \mathbb{R}^3$ Globale C^2-Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^2 \to \Gamma_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned}
\varphi_u(u, v) &= (1, 0, f_u(u, v)) \\
\varphi_v(u, v) &= (0, 1, f_v(u, v)) \\
\varphi_{uu}(u, v) &= (0, 0, f_{uu}(u, v)) \\
\varphi_{uv}(u, v) &= \varphi_{vu}(u, v) = (0, 0, \underbrace{f_{uv}}_{=f_{vu}}) \\
\varphi_{vv}(u, v) &= (0, 0, f_{vv}(u, v)) \\
N(\varphi(u, v)) &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle &= \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle &= \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}
\end{aligned}$$

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Rotationsflächen

1.4 Theorema Egregium