

# Differentialgeometrie

Sebastian Baader

Frühlingssemester 2022

## Über diese Vorlesung

Differentialgeometrie ist toll. Verschiedene Inhalte blibliablop

## Über dieses Dokument

Das ist eine Reinschrift der Vorlesung Differentialgeometrie aus meinen eigenen Notizen. Beachte, dass sie Fehler enthalten kann. Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Du darfst dieses Dokument nutzen wie du willst.

# Inhaltsverzeichnis

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Untermannigfaltigkeiten und Flächen</b>                      | <b>3</b>  |
| 1          | Untermannigfaltigkeit . . . . .                                 | 4         |
| 2          | Lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten . . . . .   | 7         |
| 3          | Der Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit . . . . .        | 9         |
| 4          | Die erste Fundamentalform . . . . .                             | 13        |
| <b>II</b>  | <b>Die Geometrie der Gaussabbildung</b>                         | <b>20</b> |
| 1          | Gaussabbildung . . . . .  | 20        |
| 2          | Die zweite Fundamentalform . . . . .                            | 25        |
| 3          | Gaussabbildung in lokalen Koordinaten . . . . .                 | 27        |
| 4          | Theorema Egregium . . . . .                                     | 33        |
| <b>III</b> | <b>Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet</b>                   | <b>36</b> |
| 1          | Isometrien . . . . .  | 36        |
| 2          | Paralleltransport und Geodäten . . . . .                        | 41        |
| 3          | Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten . . . . . | 44        |
| 4          | Der Satz von Gauss-Bonnet . . . . .                             | 48        |
| <b>IV</b>  | <b>Ebene hyperbolische Geometrie</b>                            | <b>54</b> |
| 1          | Eine Riemannsche Metrik mit $K=-1$ . . . . .                    | 55        |
| 2          | Möbiustransformationen . . . . .                                | 56        |
| 3          | Die Isometriegruppe von $H$ . . . . .                           | 61        |
| 4          | Distanz und Flächeninhalt . . . . .                             | 62        |
| 5          | Ausblick Teichmüllertheorie . . . . .                           | 66        |

# Kapitel I

## Untermannigfaltigkeiten und Flächen

Zentral für das Verständnis dieser Vorlesung sind Untermannigfaltigkeiten (UMF). Der Prototyp einer Untermannigfaltigkeit hat immer die Form

$$\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{wobei } k < n$$

Eine UMF sollte bis auf lokale Diffeomorphismen “so aussehen”



Prototyp einer UMF in  $\mathbb{R}^3$

**Definition.** Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  heisst Diffeomorphismus falls  $\varphi$  bijektiv, und sowohl  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  unendlich oft differenzierbar. Schreibe auch  $\varphi \in (C^\infty)$  bzw.  $\varphi$  glatt.

**Bemerkung.** In der Literatur wird manchmal auch nur  $C^1$ , also stetig differenzierbar gefordert.

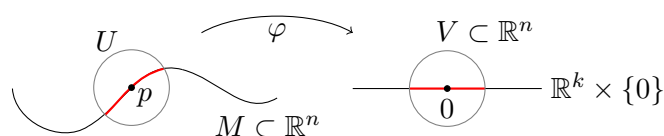
**Beispiele.**

1.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  ist ein Diffeomorphismus mit Umkehrung  $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto e^x$
2.  $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Diffeomorphismus mit  $\varphi^{-1} = \arctan$   
 $x \mapsto \tan(x)$
3.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist *kein* Diffeomorphismus,  $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  bei  $x = 0$  nicht diff'bar  
 $x \mapsto x^3$

**Erinnerung** (Umkehrsatz). Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $C^1$  (also stetig diff'bar) und  $p \in \mathbb{R}^n$  mit  $\det(Df)_p \neq 0$ . Dann existieren  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $p \in U$  und  $V = f(U)$ , so dass die Einschränkung  $f|_U: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus (im  $C^1$ -Sinn ist). "f hat bei  $p$  eine lokale Umkehrung in  $C^1$ ."

## 1 Untermannigfaltigkeit

**Definition.** Eine abgeschlossene Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heisst Untermannigfaltigkeit der Dimension  $k$  falls  $\forall p \in M$  zwei offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$  und  $0 \in V$  existieren, sowie ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V$  mit  $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$  und  $\varphi(p) = 0$



**Beispiel.** Die  $(x\text{-Achse} \cup y\text{-Achse}) \setminus \{0\} = M$  ist zwar lokal diffeomorph zu  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ , ist aber nicht abgeschlossen. Also *keine* UMF in  $\mathbb{R}^2$ !

**Frage.** Wie konstruieren wir nicht triviale Beispiele von Untermannigfaltigkeiten?

**Definition.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  mit  $m < n$ . Ein Punkt  $p$  heisst *regulär* (für  $f$ ), falls das Differential  $(Df)_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv ist. Ein Wert  $w \in \mathbb{R}^m$  heisst *regulär*, falls alle  $p \in f^{-1}(w)$  regulär sind. Nicht reguläre Punkte/Werte heissen *kritisch*.

**Bemerkung.** Falls  $w \notin \text{Bild}(f)$ , dann ist  $w$  auch regulär.

Im Spezialfall  $k = 2$  und  $n = 3$  heisst  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine *reguläre Fläche*.

**Theorem 1.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  mit  $m \leq n$  und  $w \in \mathbb{R}^m$  ein regulärer Wert. Dann ist das Urbild  $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = w\} \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - m$ .

**Beispiele.**

1.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  Berechne  $\forall p \in \mathbb{R}^3$  das Differential  $(Df)_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $p \mapsto \langle p, e_3 \rangle$   $h \mapsto \langle h, e_3 \rangle$

**Erinnerung** (Dreigliedentwicklung).

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h) \\ \langle p+h, e_3 \rangle &= \langle p, e_3 \rangle + \langle h, e_3 \rangle + 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\forall p \in \mathbb{R}^3 (Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  surjektiv, da der Gradient  $(\nabla f)_p = e_3 \neq 0$  Gradient: Für  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $(Df)_p(h) = \langle (\nabla f)_p, h \rangle$ .  
Wir folgern, dass für alle  $w \in \mathbb{R}$  die Menge  $f^{-1}(w) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $3 - 1 = 2$

2.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (In Koordinaten  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ )

$$p \mapsto \langle p, p \rangle = \|p\|_2^2$$

Berechne  $\forall p \in \mathbb{R}^3$

$$(Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

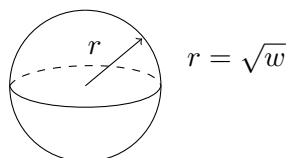
$$h \mapsto 2\langle p, h \rangle$$

$$f(p+h) = \langle p+h, p+h \rangle = \underbrace{\langle p, p \rangle}_{f(p)} + \underbrace{2\langle p, h \rangle}_{(Df)_p(h)} + \underbrace{\langle h, h \rangle}_{(Df)_p(h)}$$

$$\implies (\nabla f)_p = 2p \quad \text{Also ist } (Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ surjektiv} \iff p \neq 0$$

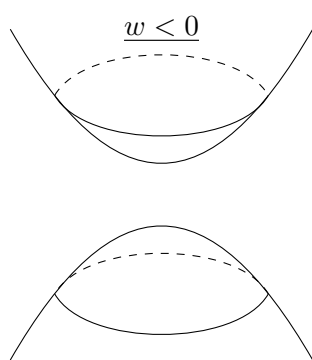
Wir folgern, dass für alle  $w \neq 0$  die Menge  $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|_2^2 = w\}$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $3 - 1 = 2$  ist.

$$\begin{array}{ccc} w < 0 & w = 0 & w > 0 \\ 0 & & \\ \emptyset & \cdot 0 & \end{array}$$

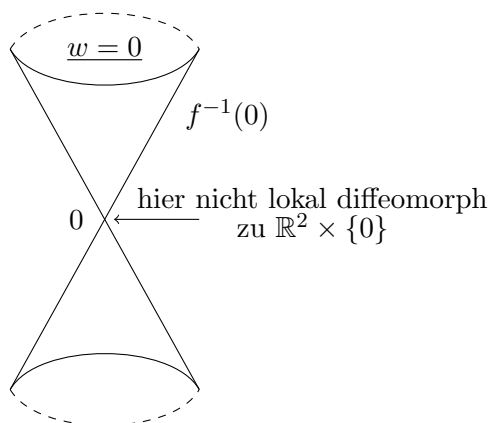


$f^{-1}(w)$  UMF der Dimension 2

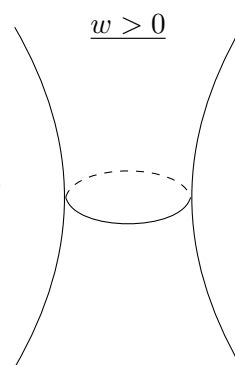
3.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Berechne  $(\nabla f)_p = (2x, 2y, -2z)$ ,  $p = (x, y, z)$   
Also  $(Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  surjektiv  $\iff p \neq 0$ . Folgerung  $w \neq 0 \implies f^{-1} \subset \mathbb{R}^3$  UMF der Dimension 2.



zweischaliges



Hyperboloid



einschaliges

*Beweis von Theorem 1.* Sei  $p \in \mathbb{R}^n$  mit  $f(p) = w$ . Dann ist  $(Df)_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren *offene* Mengen:

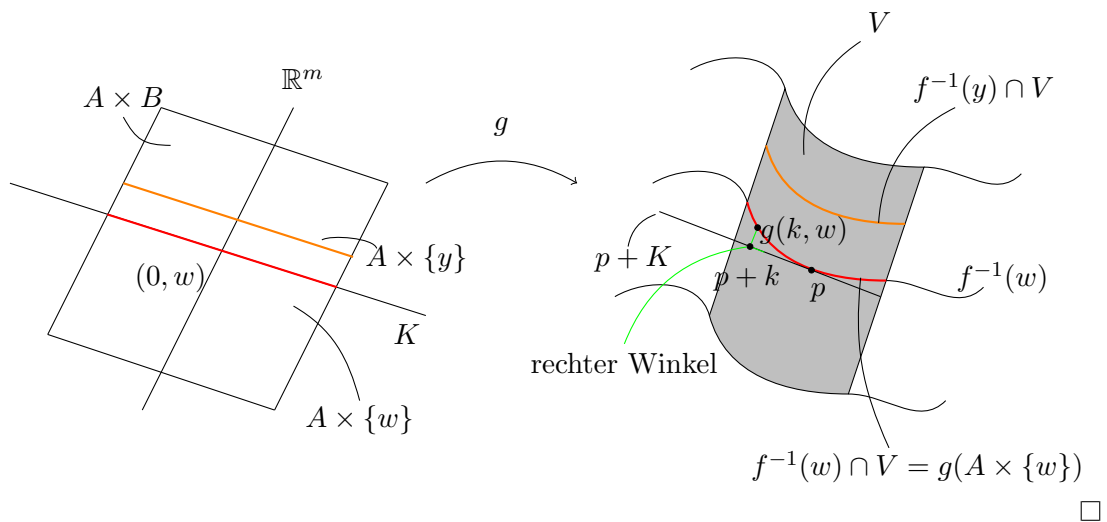
- $A \subset K = \ker((Df)_p)$
- $B \subset \mathbb{R}^m$
- $Y \subset \mathbb{R}^n$

mit  $0 \in A$ ,  $w \in B$  und  $p \in V$  sowie ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $g: A \times B \rightarrow V$  mit

- $f(g(k, y)) = y \quad \forall k \in A, y \in B$
- $g(k, y) - (p + k) \in K^\perp$

Die Niveaumenge  $f^{-1}$  ist lokal gleich dem Graphen einer Funktion der Form  $k \mapsto g(k, y)$ . Insbesondere gilt:  $f^{-1} \cap V = g(A \times \{w\})$ . Wir folgern, dass  $f^{-1}(w)$  eine UMF (via  $\varphi = g^{-1}$ ) der Dimension  $k = n - m$  ist. Da  $\dim K = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Bild}(Df)_p)$ .

*Bild:*



## 2 Lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten

**Definition.** Eine  $C^1$ -Abbildung  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst *lokale Einbettung* beim Punkt  $p \in \mathbb{R}^k$  falls  $(Df)_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  *injektiv* ist. ( $k \leq n$ )

**Theorem 2.** Sei  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Einbettung bei  $p \in \mathbb{R}^k$ . Dann existiert eine offene Menge  $W \subset \mathbb{R}^k$  mit  $p \in W$ , sodass  $f(W) \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist.

In diesem Kontext heisst  $f$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  bei  $f(p) \in M$ .

**Beispiele.**

1.  $M = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, 0)\end{aligned}$$

eine (globale) Parametrisierung von  $M$ . Tatsächlich ist  $\varphi$  linear, mit Abbildungsmatrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Jakobimatrix  $(J\varphi)_p$  stimmt in jedem Punkt mit  $A$  überein  $\implies (D\varphi)_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv.

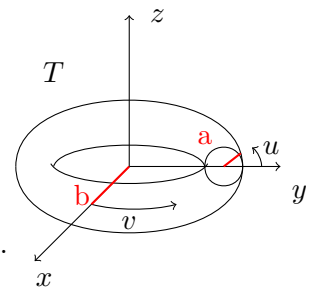
2.  $M = S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  (reguläre Fläche, siehe oben). Definiere

$$\begin{aligned}\varphi : D^2 &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})\end{aligned}$$

Bereche  $(J\varphi)_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Also ist  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $S^2$  beim Nordpol  $N = (0, 0, 1) = \varphi(0, 0)$ .

3. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$ . Definiere den Rotationstorus

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow T \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a \cos u) \cos v \\ (b + a \cos u) \sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}\end{aligned}$$



In jedem Punkt  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  ist  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $T$ . Berechne dazu

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v & -(b + a \cos u) \sin v \\ -a \sin u \sin v & (b + a \cos u) \cos v \\ a \cos u & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{Rang}(J\varphi)_{(u,v)} = 2 \implies (D\varphi)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv.

**Frage.** Besitzt jede Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  bei jedem Punkt eine lokale Parametrisierung?



**Proposition 1.** Jede Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  besitzt bei allen Punkten  $p \in M$  eine lokale Parametrisierung.

*Beweis.* Da  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine UMF ist, existieren für alle  $p \in M$  offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$ ,  $0 \in V$  sowie  $g : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus mit  $g(p) = 0$  und  $g(U \cap M) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$ . Definiere nun

$$\begin{aligned} \varphi : g^{-1}|_{(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V} : (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V &\rightarrow M \cap U \\ q &\mapsto g^{-1}(q) \end{aligned}$$

Es gilt:  $\varphi(0) = p$  und  $(D\varphi)_0 = (Dg^{-1})_0|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} = (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$ . Nach Konstruktion ( $g$  ist ein Diffeomorphismus) ist  $(Dg)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Isomorphismus, ebenso  $(Dg)_p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \implies (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$  ist injektiv  $\implies (D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv. Also ist  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung bei  $p \in M$ .  $\square$

*Beweis von Theorem 2.* Zur Vereinfachung nehmen wir  $p = 0$  und  $f(p) = 0$  an. Setze  $B = \text{Bild}(Df)_p < \mathbb{R}^n$ , ein Untervektorraum der Dimension  $k$  (da  $(Df)_p$  injektiv). Weiterhin  $S = B^\perp < \mathbb{R}^n$ , sodass gilt  $\mathbb{R}^n = B \oplus S$ ,  $\dim(S) = n - k$ . Definiere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^k \times S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (q, s) &\mapsto f(q) + s \end{aligned}$$

$F$  ist stetig differenzierbar. Dreigliedertwicklung im Punkt  $(p, 0) = \mathbb{R}^k \times S$ : Sei  $h_1 \in \mathbb{R}^k, h_2 \in S$ . Berechne:

$$\begin{aligned} F(p + h_1, 0 + h_2) &= f(p + h_1) + h_2 = f(p) + (Df)_p(h_1) + (Rf)_p(h_1) + h_2 \\ &\implies (DF)_{(p,0)}((h_1, h_2)) = (Df)_p(h_1) + h_2 \end{aligned}$$

**Behauptung.**  $(DF)_{(p,0)} : \mathbb{R}^k \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Isomorphismus

*Beweis.* Es reicht zu zeigen:  $(DF)_{(p,0)}$  ist injektiv (da  $k + (n - k) = n$ ). Sei  $(h_1, h_2) \in \ker(DF)_{(p,0)}$

$$\underbrace{(Df)_p(h_1)}_{\in B} + \underbrace{h_2}_{\in S} = 0 \quad \underbrace{\implies}_{B \cap S = \{0\}} \quad (Df)_p(h_1) = 0 \text{ und } h_2 = 0 \quad \underbrace{\implies}_{(Df)_p \text{ injektiv}} \quad h_1 = 0$$

Da also  $\ker(DF)_{(p,0)} = 0$ , ist  $(DF)_{(p,0)}$  injektiv  $\square$

Nach Umkehrsatz existieren  $U \subset \mathbb{R}^k \times S$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $(p, 0) \in U$  und  $f(p) = F(p, 0) \in V$ , sodass  $F|_U : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Nach Definition von  $F$  gilt  $F(U \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}) = \underbrace{f(\mathbb{R}^k)}_{\text{Bild}(f)} \cap V$ .

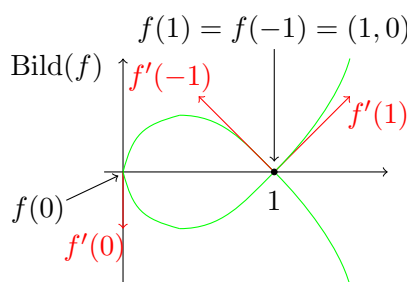
Wir schliessen, dass  $\text{Bild}(f) \subset \mathbb{R}^n$  lokal um den Punkt  $f(p)$  die Bedingungen einer Untermannigfaltigkeit erfüllt.  $\square$

**Bemerkung.** Sei  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung, welche in jedem Punkt eine lokale Einbettung ist. Dann braucht  $f$  nicht injektiv zu sein. Weiterhin ist  $f(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$  im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit.

**Beispiel.** Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3 - t) \end{aligned}$$

Berechne  $(Jf)_t = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies (Df)_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist injektiv für alle  $t \in \mathbb{R}$



Wir sehen, dass  $f$  nicht injektiv ist. Also ist  $\text{Bild}(f)$  keine Untermannigfaltigkeit (lokal um den Punkt  $(1,0)$ ).

### 3 Der Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit

**Ziel.** Beschreibung der Menge aller Tangentialvektoren in einem Punkt einer Untermannigfaltigkeit.

**Definition.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -UMF der Dimension  $k$  und  $p \in M$ . Wähle eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  um  $p$ , d.h.  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $\varphi(U) \subset M$ ,  $\varphi(0) = p$  ( $0 \in U$ ),  $\varphi$  injektiv und für alle  $p \in U$  ist  $(D\varphi)_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv. Setze

$$T_p M = \text{Bild}((D\varphi)_0) < \mathbb{R}^n$$

der *Tangentialraum* von  $M$  bei  $p$ .

**Bemerkung.** Die Dimension von  $T_p M < \mathbb{R}^n$  ist  $k$ , da  $(D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist. Im Falle  $k = 2$  (d.h.  $M$  ist eine Fläche) nennen wir  $T_p M$  *Tangentialebene*.

**Beispiel.** Sei  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  in  $C^1$ . Betrachte den Graphen  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = h(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$  und die (globale) Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, h(u, v)) \end{aligned}$$

Bereche die Jakobimatrix im Punkt  $q = (u, v)$

$$(J\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \text{Rang } 2 \implies (D\varphi)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ injektiv}$$

$$T_{\varphi(q)}\Gamma = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\}$$

Im Spezialfall  $h = 0$ :  $T_{\varphi(q)}\Gamma = \text{span}\{e_1, e_2\}$

**Lemma 1.**  $T_p M$  hängt nicht von der lokalen Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  ab.

*Beweis.* Seien  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow M$   $\varphi_2 : U_2 \rightarrow M$  lokale  $C^1$ -Parametrisierungen mit  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p \in M$ . Setze  $V = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \subset M$  offen und  $V_1 = \varphi_1^{-1} \subset U_1$  und  $V_2 = \varphi_2^{-1} \subset U_2$ .

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Abbildungen



Nach der Kettenregel für  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  im Punkt 0 gilt:

$$A = (D\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)_0 = (D\varphi_2^{-1})_{\varphi_1(0)} \circ (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0^{-1} \circ (D\varphi_1)_0 \implies (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0 \circ A$$

Damit formen wir um:

$$\begin{aligned} \implies T_p M &= \text{Bild}(D\varphi_1)_0 = \text{Bild}((D\varphi_2)_0 \circ A) \\ &\stackrel{(1)}{=} (D\varphi_2)_0 \circ A \left( \mathbb{R}^k \right) \\ &= (D\varphi_2)_0 \left( \mathbb{R}^k \right) \\ &= \text{Bild}(D\varphi_2)_0 \end{aligned}$$

In (1) wird benutzt, dass  $A$  invertierbar ist, mit  $A^{-1} = (D\varphi_1)_0^{-1} \circ (D\varphi_2)_0$  und damit ist  $A \left( \mathbb{R}^k \right) = \mathbb{R}^k$ .  $\square$

## Interpretation des Tangentialraums via Geschwindigkeitsvektoren

**Proposition 2.** Sei  $p \in M$ . Der Tangentialraum  $T_p M$  besteht aus allen Geschwindigkeitsvektoren der Form  $\gamma'(0)$  für  $C^1$ -Wege  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ .



*Beweis.* (i) Sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  stetig differenzierbar mit  $\gamma(0) = p$ . Betrachte eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  mit  $\varphi(0) = p$ .

Wähle  $\delta > 0$ , sodass  $\gamma((-\delta, \delta)) \subset \varphi(U)$ . Definiere  $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$t \mapsto \varphi^{-1} \circ \gamma(t)$$

Dann gilt  $\gamma|_{(-\delta, \delta)} = \varphi \circ \bar{\gamma}$

$$\implies \gamma'(0) = \frac{d}{dt} (\varphi \circ \bar{\gamma})(0) = (D\varphi)_{\bar{\gamma}(0)} (\bar{\gamma}'(0)) = (D\varphi)_0 (\bar{\gamma}'(0)) \in \text{Bild}(D\varphi)_0 = T_p M$$

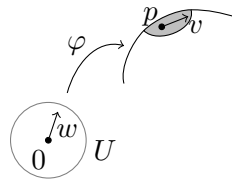
(ii) Sei  $v \in T_p M = \text{Bild}((D\varphi)_0)$  für eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  mit  $\varphi(0) = p$ . Es existiert also  $w \in \mathbb{R}^k$  mit  $(D\varphi)_0(w) = v$ .

Konstruktion eines Weges  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ . Wähle  $\delta > 0$ , sodass für alle  $t \in (-\delta, \delta)$  gilt:  $tw \in U$  (geht, da  $U$  offen). Definiere nun:

$$\begin{aligned} \gamma : (-\delta, \delta) &\rightarrow M \\ t &\mapsto \varphi(tw) \end{aligned}$$

Dann gilt:  $\gamma(0) = \varphi(0) = p$

$$\implies \gamma'(0) = \frac{d}{dt} (\varphi(tw))(0) = (D\varphi)_0(w) = v$$



□

## Differenzierbare Abbildung zwischen UMF

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -UMF. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst *differenzierbar* im Punkt  $p \in M$ , falls ein  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen existiert mit  $p \in U$ , sowie  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar mit  $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$ . Insbesondere sind Einschränkungen von differenzierbaren Abb.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf UMF  $M \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar (in allen Punkten).

**Definition.** Seien  $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m$   $C^1$ -UMF und  $f : M \rightarrow N$  stetig differenzierbar,  $p \in M$  (d.h.  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig differenzierbar mit  $f(M) \subset N$ ). Definiere

$$(Df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \\ v \mapsto (DF)_p(v)$$

wobei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine beliebige  $C^1$ -Einschränkung von  $f$  um den Punkt  $p$  ist, d.h.  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $p \in U$  und  $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$ . Die Abbildung  $(Df)_p$  heisst Differential von  $f$  an der Stelle  $p \in M$ .

**Lemma 2.** i.) Für alle  $v \in T_p M$  gilt  $(DF)_p(v) \in T_{f(p)} N$

ii.)  $(DF)_p(v)$  hängt nicht von der Erweiterung  $F$  ab.

*Beweis.* i.) Sei  $v \in T_p M$ . Wähle  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma'(0) = v$ , sowie  $\text{Bild}(\gamma) \subset U$ . Betrachte nun den  $C^1$ -Weg  $\delta = F \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Es gilt für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \delta(t) = F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \in N$ , da  $F|_M = f$  und  $\gamma(t) \in M$ .

Berechne:

$$\delta(0) = f(\gamma(0)) = f(p) \implies \delta'(0) = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(0) = (DF)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = (DF)_p(v)$$

Nach Proposition gilt  $\delta'(0) \in T_{f(p)} N$ , also  $(DF)_p(v) \in T_{f(p)} N$ .

ii.) Seien  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\bar{F} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  zwei Erweiterungen von  $f$  (differenzierbar bei  $p$ ). Für  $v \in T_p M$ , wähle  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  wie oben, mit  $\text{Bild}(\gamma) \subset U \cap \bar{U}$ . Definiere wie unter i) zwei Wege  $\delta = F \circ \gamma$  und  $\bar{\delta} = \bar{F} \circ \gamma$ . Es gilt  $\delta'(0) = (DF)_p(v)$  und  $\bar{\delta}'(0) = (D\bar{F})_p(v)$ . Beachte:  $\delta$  und  $\bar{\delta}$  stimmen überein mit  $f \circ \gamma(t) \implies \delta'(0) = \bar{\delta}'(0)$   $\square$

**Bemerkung.** Es gilt die *Kettenregel*. Seien  $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^n, L \subset \mathbb{R}^l$   $C^1$ -UMF und  $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow L$  in den Punkten  $p \in M$  bzw.  $f(p) \in N$  differenzierbar. Dann ist  $g \circ f$  im Punkt  $p \in M$  differenzierbar, es gilt

$$(D(g \circ f))_p = (Dg)_{f(p)} \circ (Df)_p : T_p M \rightarrow T_{g \circ f(p)} L$$

*Grund:* Kettenregel gilt für alle Erweiterungen  $F, G$ .

### Beispiel einer differenzierbaren Abbildung zwischen UMF

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  der Rotationstorus parametrisiert durch ( $0 < a < b$ )

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a \cos u) \cos v \\ (b + a \cos u) \sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}f : \Sigma &\rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ q &\mapsto \frac{q}{\|q\|_2}.\end{aligned}$$

$f$  lässt sich zu  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$  erweitern. In Koordinaten:  $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .  $F$  ist differenzierbar (sogar  $C^\infty$ ) deshalb auch  $f : \Sigma \rightarrow S^2$ . Für  $q = (x, y, z) \neq 0$ , berechne die Jakobimatrix

$$(JF)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} & \frac{-xy}{r^3} & \frac{-xz}{r^3} \\ \frac{-xy}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} \\ \frac{-xz}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

Betrachte den Punkt  $p = \varphi(0, 0) = (a + b, 0, 0) \in \Sigma$ .  $(Jf)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a+b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$ .

Bestimme  $T_p \Sigma = \text{span}\{e_2, e_3\}$  und  $T_{f(p)} S^2 = T_{(1,0,0)} S^2 = \text{span}\{e_2, e_3\}$ . Wir erhalten also  $(Df)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{f(p)} S^2$ . Es gilt  $(Df)_p(e_2) = \frac{1}{a+b} e_2$ , bzw.  $(Df)_p(e_3) = \frac{1}{a+b} e_3$

## 4 Die erste Fundamentalform

**Erinnerung.** Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , welche bilinear, symmetrisch und positiv ist.

- Positivität:  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  und  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ .

Jedes Skalarprodukt definiert eine positiv definite *quadratische Form*  $q$  d.h.

- (i)  $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$
- (ii)  $B(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$  ist bilinear in  $v, w$ .

$$\begin{aligned}q : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

Sei nun  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche. Wir erhalten in jedem Punkt  $p \in \Sigma$  ein Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_p &= T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \\ \langle v, w \rangle &\mapsto \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

Das Feld von Skalarprodukten  $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  heisst *Riemannsche Metrik* auf  $\Sigma$ . Die zugehörige quadratische Form  $I_p : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *erste Fundamentalform* von  $\Sigma$  an der Stelle  $p$ .

### Beschreibung durch Koeffizienten

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  ein Skalarprodukt. Schreibe  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ . Berechne

$$\langle a, b \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Wähle eine lokale Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  mit  $p \in \varphi(U)$ . Wir ziehen die Riemannsche Metrik (auf  $\Sigma$ ) wie folgt auf  $U$  zurück:

Sei  $q \in U$  und seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Definiere

$$\langle a, b \rangle_q = \langle (D\varphi)_q(a), (D\varphi)_q(b) \rangle_{\varphi(q) \leftarrow} \text{ bedeutet } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist auf } \mathbb{R}^3$$

Sei  $p = \varphi(q)$ , dann gilt  $T_p \Sigma = \text{Bild}(D\varphi)_p < \mathbb{R}^3 = \text{span}\{(D\varphi)_q(e_1), (D\varphi)_q(e_2)\}$

**Notation.** Schreibe  $q = (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\varphi_u(q) &= \varphi_u(u, v) = (D\varphi)_q(e_1) \in T_{\varphi(q)} \Sigma \\ \varphi_v(q) &= \varphi_v(u, v) = (D\varphi)_q(e_2) \in T_{\varphi(q)} \Sigma\end{aligned}$$

“Spalten der Jakobimatrix  $(J\varphi)_q$ ”

Die *Koeffizienten* der ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  sind

$$\begin{aligned}E(u, v) &= \langle e_1, e_1 \rangle_{(u, v)} = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ F(u, v) &= \langle e_1, e_2 \rangle_{(u, v)} = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ G(u, v) &= \langle e_2, e_2 \rangle_{(u, v)} = \langle \varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

Für alle  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2$  gilt nun

$$\langle a, b \rangle_{u, v} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

**Beispiele.**

1. Sei  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ . Betrachte die lokale Parametrisierung  $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ ,  $\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ . Berechne

$$(J\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erste Spalte:  $\varphi_u(u, v)$ , zweite Spalte  $\varphi_v(u, v)$  und damit

$$\begin{cases} E(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \\ F(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ G(u, v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

“Der Zylinder  $Z$  ist lokal isometrisch (intrinsische Distanz) zur Ebene”

2.  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ , die Einheitskugel. Betrachte die lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v)) \end{aligned}$$

Berechne

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} -\sin(u) \cos(v) & -\cos(u) \sin(v) \\ \cos(u) \cos(v) & -\sin(u) \sin(v) \\ 0 & \cos(v) \end{pmatrix} = \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)$$

und

$$\begin{cases} E(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_{\mathbb{R}^3} = \cos^2(v) \\ F(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ G(u, v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \end{cases} \begin{pmatrix} \cos^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternative lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : D^2 &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned}$$

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$$

Wir bemerken  $F(u, v) = \frac{uv}{1-u^2-v^2} \neq 0$  (ausser falls  $uv = 0$ )



## Weglänge und Flächeninhalt

**Erinnerung.** Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ . Die Weglänge von  $\alpha$  ist

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{\underbrace{\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle_{\mathbb{R}^3}}_{\|\dot{\alpha}(t)\|_2 \text{ euklidische Norm}}} dt$$

Sei nun  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine lokale Parametrisierung und  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$   $C^1$  mit  $\alpha([0, 1]) \subset \varphi(U)$ . Definiere

$$\begin{aligned} \beta &= \varphi^{-1} \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi^{-1}(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Schreibe  $\beta(t) = u(t)e_1 + v(t)e_2$ . Es gilt  $\alpha(t) = \varphi(\beta(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ . Berechne  $\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\| dt$ . Berechne

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t) \\ &= (D\varphi)_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)) \\ &= (D\varphi)_{(u(t), v(t))}(\dot{u}(t)e_1 + \dot{v}(t)e_2) \\ &= \dot{u}(t) \cdot \varphi_u(u(t), v(t)) + \dot{v}(t) \cdot \varphi_v(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle &= \begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} \\ &= [\dot{u}(t)^2 \cdot E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 \cdot G]_{= (*)} \end{aligned}$$

$$\implies \mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{(*)} dt$$

**Beispiel.** Parametrisiere  $\Sigma = S^2$  wie folgt:

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))$$

Sei

$$\begin{aligned} \alpha &: [0, 2\pi] \rightarrow S^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta &: [0, 2\pi] \rightarrow (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ t &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt  $\alpha(t) = \varphi(t, 0) = (\cos(t) \cos(0), \sin(t) \cos(0), \sin(0))$ . Daraus folgt  $\beta(t) = (u(t), v(t))$  mit  $u(t) = t$  und  $v(t) = 0$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{u}^2 E + 2\dot{u}\dot{v}F + \dot{v}^2 G} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{E(u(t), v(t))} dt \quad \text{siehe oben } E(u, v) = \cos(v)^2 \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad \text{hier } v(t) \equiv 0 \implies E \equiv 1\end{aligned}$$

### Flächeninhalt

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine lokale Fläche ( $C^1$ )-Parametrisierung, sowie  $A \subset \varphi(U) \subset \Sigma$  ein abgeschlossenes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand ( $\partial A = \cup_{i=1}^n \text{Bild}(\gamma_i)$  mit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$   $C^1$ )

*erstes Flächeninhalt bild*

Setze  $B = \varphi^{-1}(A) \subset (U)$ . Definiere

$$\text{Area}(A) = \int_B |\text{Area}(P(\varphi_u, \varphi_v))| du dv$$

wobei  $P$  das Parallelogramm ist, welches von  $\varphi_u, \varphi_v \in \mathbb{R}^3$  aufgespannt wird.

*zweites Flächeninhalt bild*

**Einschub** (Vektorprodukt in  $\mathbb{R}^3$ ). Seien  $v = \sum_{i=1}^3 v_i e_i, w = \sum_{j=1}^3 v_j e_j \in \mathbb{R}^3$ . Definiere

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

**Lemma 3.**

$$\|v \times w\|_2 = \|v\|_2 \cdot \|w\|_2 \cdot \sin(\angle(v, w)) = |\text{Area}(P(v, w))|$$

(verwende  $0 \leq \angle(v, w) \leq \pi$ )

*Beweis.* Berechne:

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}^2 + \|v \times w\|^2 &= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)\end{aligned}$$

Also  $\langle v, w \rangle^2 + \|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2$  (\*). Schlussendlich folgt aus

$$\langle v, w \rangle^2 = (\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \angle(v, w))^2$$

und

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

dass

$$\|v \times w\|^2 = (\|v\| \cdot \|w\| \sin \angle(v, w))^2$$

□

**Einschub** (Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ ). Seien  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \in \mathbb{R}^n$ . Definiere

$$\langle v, w \rangle = v^T w = \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung.** Der Ausdruck  $v^T w$  gilt bezüglich allen orthonormalen Koordinaten.

i) Spezialfall  $v = w \implies \langle v, v \rangle = v^T v = \|v\|^2$  (Pythagoras)

ii)  $v, w$  allgemein:

Sei  $A \in O(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $A$  beschreibt einen orthonormalen Basiswechsel. Es gilt also  $A^T A = Id$ . Deshalb

$$\langle Av, Aw \rangle = (Av)^T Aw = v^T A^T Aw = v^T w = \langle v, w \rangle$$

**Lemma 4.**  $\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \angle(v, w)$

*Beweis.* Wir können Koordinaten so wählen, dass (nach Bemerkung)  $v = v_1 e_1$  (mit  $v_1 > 0$ ) und  $w = w_1 e_1 + w_2 e_2$  gilt. Dann gilt

$$\langle v, w \rangle = \underbrace{v_1}_{=\|v\|} w_1 = \|v\| \cdot \|w\| \cos \angle(v, w)$$

kleines bildchen zum beweis lemma 2

□

Mit diesen Lemmata erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Area}(A) &= \int_B |\text{Area}(P(\varphi_u, \varphi_v))| \, dudv && \text{Lemma 1} \\ &= \int_B \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_B \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \, dudv \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Proposition:

**Proposition 3.**

$$Area(A) = \int_B \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \, dudv$$

**Bemerkung.** Diese Formel gilt bezüglich jeder lokalen Parametrisierung.

**Beispiele.**

1.  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v)) \end{aligned}$$

Flächenelement:  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\cos^2(v)} = |\cos(v)|$  ( $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ ). Für  $B \subset (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $A = \varphi(B)$  gilt dann.

$$Area(A) = \int_B \cos(v) \, dudv$$

Im Grenzfall  $B = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  erhalten wir

$$Area(S^2) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(v)| \, dv}_{=2} du = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

2.  $T$  Torus (siehe Serie 4)  $2\pi a \cdot 2\pi b$ .

**Zusatz.** Flächenelement  $\sqrt{EG - F^2}$ .  $EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

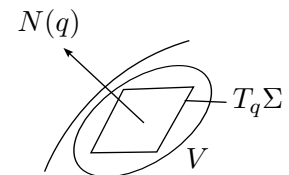
## Kapitel II

# Die Geometrie der Gaussabbildung

### 1 Gaussabbildung

**Definition.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche und  $V \subset \Sigma$  offen. Eine stetige Abbildung  $N : V \rightarrow S^2$  heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gaussabbildung), falls für alle  $p \in V$  gilt

$$N(q) \perp T_p \Sigma$$



Einheitsnormalenfeld

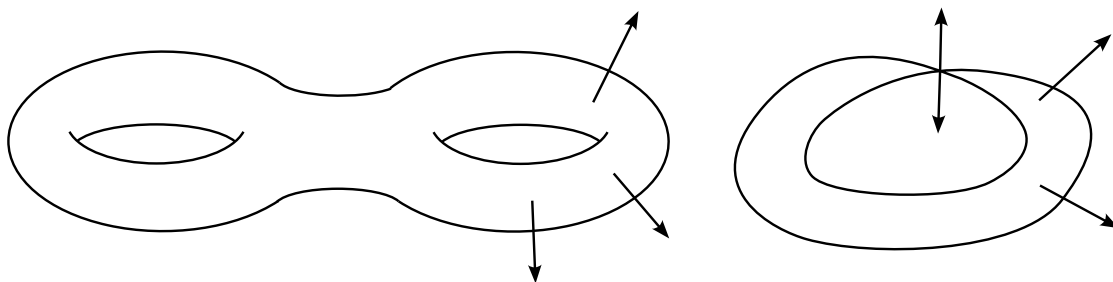
**Existenz.** Definiere

$$N : V \rightarrow S^2$$
$$q \mapsto \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in  $q$ , da  $\varphi_u$  und  $\varphi_v$  stetig sind.

**Eindeutigkeit.** Falls  $V$  zusammenhängend ist, dann ist  $N : V \rightarrow S^2$  bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt :  $\pm N$ .

**Bemerkung.** Falls  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld  $N : \Sigma \rightarrow S^2$ , genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche  $\mathbb{R}^3$  in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  gilt: Es existiert  $N : \Sigma \rightarrow S^2$  stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn  $\Sigma$  *orientierbar* ist.



orientierbarer Brezel, Möbiusband ist nicht orientierbar

Sei nun  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung und  $N : V \rightarrow S^2$  eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt für alle  $q \in V$ :

- $N(q) \perp T_q \Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)} \Sigma$

Wir schliessen (da in  $\mathbb{R}^3$ ):

$$T_q \Sigma = T_{N(q)} S^2$$

Bei letzterem gilt also für alle  $p \in S^2 : p \perp T_p S^2$ . Falls  $N : V \rightarrow S^2$  sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir für alle  $p \in V$  eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{N(p)} S^2 = T_p \Sigma$$

die *Weingartenabbildung*.

**Definition.**  $K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$ . Die *Gauss'sche Krümmung* im Punkt  $p \in \Sigma$

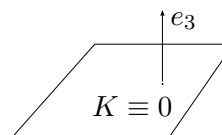
**Bemerkung.**  $K(p)$  hängt nicht von der Wahl von  $N$  ab, da

$$\det(-(DN)_p) = (-1)^2 \det(DN)_p$$

**Beispiele.**

$$1. \Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} N : \Sigma &\rightarrow S^2 \\ q &\mapsto e_3 \quad (\text{oder } -e_3) \end{aligned}$$

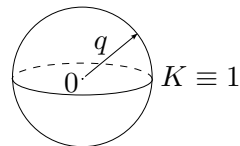


$N$  ist konstant, also gilt für alle  $q \in \Sigma$ :  $(DN)_q = 0, K(q) = 0$ .

2.  $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$  (Einheitssphäre)

$$N : S^2 \rightarrow S^2$$

$$q \mapsto q$$

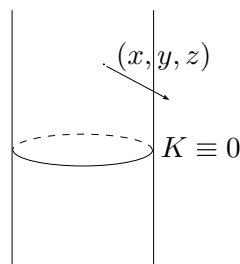


$N = Id_{S^2}$  (oder  $-Id_{S^2}$ ), für alle  $q \in S^2$  gilt also  $(DN)_q = Id : T_q \Sigma \rightarrow T_q \Sigma$ . Also  $K(q) = \det(Id : T_q \Sigma \rightarrow T_q \Sigma) = 1$

3.  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$N : Z \rightarrow S^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$



Wir bemerken:  $N$  hängt nicht von  $z$  ab. Also gilt für alle  $q \in Z$  :

$$(DN)_q(e_3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$$

$\implies 0$  ist ein Eigenwert der Abbildung  $(DN)_q : T_q Z \rightarrow T_q Z \implies K(q) = 0$ .

**Zusatz.** Genauere Betrachtung des dritten Beispiels: Für  $q = (x, y, z) \in Z$  gilt:

$$T_q Z = \text{span}\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^v\}$$

Wir bestimmen  $(DN)_q \stackrel{(*)}{=} v$ . (\*) Erklärung: Die Einschränkung von  $N$  auf  $S^1 \times \{0\}$  ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von  $(DN)_q$  bezüglich der Basis  $\{e_3, -ye_1 + xe_2\}$

**Definition.** Die *mittlere Krümmung* im Punkt  $p \in \Sigma$  ist  $H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$ , welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist:  $\text{Spur}(-(DN)_p) = -\text{Spur}(DN)_p$

**Bemerkung.** Reguläre Flächen mit  $H \equiv 0$  heissen *Minimalflächen*.

**Beispiele.**

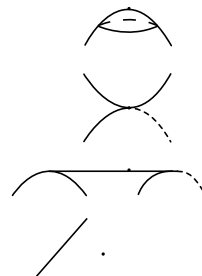
1.  $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$   $K \equiv 0$  und  $H \equiv 0$ .

2.  $\Sigma = S^2$   $K \equiv 1$  und  $H \equiv 1 \iff \frac{1}{2} \text{Spur} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$3. \Sigma = Z \quad K \equiv 0 \text{ und } H \equiv \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$$

**Notation.** Ein Punkt  $p \in \Sigma$  heisst:

- *elliptisch*, falls  $K(p) > 0$
- *hyperbolisch*, falls  $K(p) < 0$  (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls  $K(p) = 0$  und  $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls  $K(p) = 0$  und  $H(p) = 0$

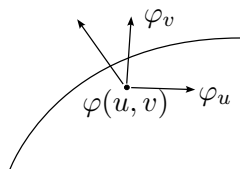


**Proposition 1.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche, welche lokale  $C^2$ -Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist für alle  $p \in \Sigma$  die Weingartenabbildung  $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$  symmetrisch, d.h. für alle  $a, b \in T_p \Sigma$  gilt:

$$\langle (DN)_p(a), b \rangle_p = \langle a, (DN)_p(b) \rangle_p$$

*Beweis.* Es reicht, dies für die Basisvektoren  $a = \varphi_u(p)$  und  $b = \varphi_v(p)$  zu prüfen! Sei  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine  $C^2$ -Parametrisierung mit  $p \in \varphi(U)$ . Betrachte die Komposition  $N \circ \varphi : U \rightarrow S^2$ . Für alle  $q = (u, v) \in U$  gilt:

$$\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)} = 0 \text{ bzw. } \langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)} = 0 \quad (*)_v$$



**Notation.**

$$N_u(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v)) = \frac{d}{du}(N \circ \varphi)(u, v)$$

$$N_v(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_v(u, v)) = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi)(u, v)$$

und

$$\frac{d}{du}(* )_v : \quad \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v(\varphi \text{ ist } C^2)} \rangle = 0$$

$$\frac{d}{dv}(* )_u : \quad \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$$



Also:  $\varphi$  ist  $C^2 \implies \varphi_{uv} = \varphi_{vu} \implies \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$ .

$\uparrow$

S. von Schwarz

Ausgeschrieben:

$$\langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle = \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)), \varphi_u(u,v) \rangle$$

□

**Korollar 1.**  $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$  lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren.

**Bemerkung.** Im Beweis haben wir die Annahme ( $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  ist  $C^2$ ) benutzt:  $\varphi_{uv}$  ist vorgekommen. Diese Annahme ist essenziell, damit  $N : \varphi(U) \rightarrow S^2$  differenzierbar ist. Tatsächlich gilt

$$N(\varphi(u,v)) = \pm \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

Wir benutzen, dass  $\varphi_u$  und  $\varphi_v$  differenzierbar sind, dass heißt  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  ist zweimal differenzierbar.

**Beispiel.** Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$f$  ist stetig differenzierbar, aber  $f'$  ist bei  $x = 0$  nicht differenzierbar. Betrachte die Fläche  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x)\} = "T_f \times \mathbb{R}"$ , welche die globale  $C^1$ -Parametrisierung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \\ (u, v) \mapsto (u, v, f(u))$$

besitzt. Berechne

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)), \varphi_v = (0, 1, 0)$$

und

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f'(u), 0, 1)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$$

Für  $u \leq 0$  gilt:  $N(u, v) = (0, 0, 1) = e_3$ . Für  $u \geq 0$  gilt:  $N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u, 0, 1)$ .

Versuch,  $\frac{d}{du}N(0, 0)$  zu berechnen:

1.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon < 0} \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{(N(\varepsilon, 0) - N(0, 0))}_{=e_3} = 0$
2.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} (N(\varepsilon, 0) - N(0, 0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} - 1 \right) = (2, 0, \dots) \neq e_3$

Im 2. Punkt wird genutzt, dass  $\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+\frac{x}{2}}$ , somit  $\frac{-2\epsilon}{1+4\epsilon^2} \underbrace{\approx}_{\frac{1}{1+x} \approx 1-x} -2\epsilon(1-2\epsilon^2) \approx -2$

Also ist  $N(u, v)$  an der Stelle  $(0, 0)$  nicht differenzierbar!

**Annahme.** Ab jetzt besitzen alle regulären Flächen mindestens lokale  $C^2$ -Parametrisierungen.

**Korollar 2.**  $(DN)_p : T_p N \rightarrow T_p \Sigma$  lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren.

D.h. Die Weingartenabbildung  $(DN)_p$  hat zwei orthogonale Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in T_p \Sigma$  zu reellen Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$K(p) = \det((DN)_p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

**Definition.** Die von den Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in T_p \Sigma$  aufgespannten Richtungen heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*. Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma : (a, b) \rightarrow \Sigma$  heißt *Krümmungslinie*, falls  $\forall t \in (a, b)$  gilt  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \Sigma$  ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung  $(DN)_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)} \Sigma \rightarrow T_{\gamma(t)} \Sigma$ .

### Beispiele.

1.  $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$

Hier gilt  $\forall p \in E : (DN)_p = 0$  also sind die Hauptkrümmungsrichtungen nicht wohldefiniert. Alle Geraden in  $E$  sind Krümmungslinien. (Sogar alle  $C^1$ -Kurven  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ )

2.  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Hier gilt  $\forall p \in Z : (DN)_p(e_3) = 0 \implies$  alle (vertikalen) Mantellinien in  $Z$  sind Krümmungslinien. Mehr noch: Bezüglich der Basis  $e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2$  von

$\underbrace{T_{(x, y, z)} \Sigma}_{=p}$  hat  $(DN)_p$  die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Wir erhalten also eine zweite Schar

von Krümmungslinien: horizontale Kreise. In Punkten mit  $(DN)_p \neq \lambda \cdot Id_{T_p \Sigma}$  stehen die Krümmungslinien *senkrecht* aufeinander.

## 2 Die zweite Fundamentalform

Ziel der nächsten beiden Abschnitte:

$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}$$

wobei  $I_p, II_p$  die erste, bzw. die zweite Fundamentalform ist.

**Motivation.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}_3$  eine  $C^2$ -reguläre Fläche, und  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$  eine  $C^2$ -Kurve mit  $\alpha(0) = p \in \Sigma$  und  $\dot{\alpha}(0) = v \in T_p\Sigma$ .

**Proposition 2.** (Satz von Mensier) Sei  $N : V \rightarrow S^2$  ein lokales Einheitsnormalenfeld ( $p \in V \subset \Sigma$ ). Dann gilt  $\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$ . Insbesondere hängt die normale Beschleunigungskomponente  $\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle$  nur von  $p = \alpha(0)$  und  $v = \dot{\alpha}(0)$  ab.

*Beweis.*  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$  gilt:

$$\langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \text{ (per Definition von } T_p\Sigma \text{ und } N(p))$$

$$\text{Ableiten nach } t: \langle \ddot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle + \underbrace{\langle \dot{\alpha}(t), \frac{d}{dt}N(\alpha(t)) \rangle}_{(DN)_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))} = 0$$

$$\text{Für } t = 0 \text{ erhalten wir } \langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle.$$

□

**Definition.** Die zweite Fundamentalform von  $\Sigma$  an der Stelle  $p$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} II_p : T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto -\langle v, (DN)_p(v) \rangle \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Das Vorzeichen von  $II_p$  hängt von  $N$  ab. Falls  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  orientierbar ist, dann lässt sich eine globale Wahl von  $N$  fixieren (Wahl der Orientierung).

**Erinnerung.** Die erste Fundamentalform,  $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$  hat bezüglich jeder lokalen Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine Matrix  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , bezüglich der Basis  $\varphi_u, \varphi_v$  von  $T_p\Sigma$ .  
 $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ .

Koeffizienten für  $II_p$ :

- $e = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$  ( $(DN)_{\varphi(u,v)}$  ist symmetrisch).
- $e = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle$

**Notation.**

$$N_u = \frac{d}{du}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)$$

$$N_v = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)$$

Wir erhalten also mit  $\langle \varphi_u, N \rangle \equiv 0$  und ableiten nach  $w$ :  $\langle \varphi_{uu}, N \rangle + \langle \varphi_u, N_u \rangle = 0$ , analog für  $v$

- $e = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle$
- $e = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle$
- $e = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$

**Beispiel.** Funktionsgraph von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $C^2$ )

$\Gamma_f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \subset \mathbb{R}^3$  Globale  $C^2$ -Parametrisierung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Gamma_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v))\end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (1, 0, f_u(u, v)) \\ \varphi_v(u, v) &= (0, 1, f_v(u, v)) \\ \varphi_{uu}(u, v) &= (0, 0, f_{uu}(u, v)) \\ \varphi_{uv}(u, v) &= \varphi_{vu}(u, v) = (0, 0, \underbrace{f_{uv}}_{=f_{vu}}) \\ \varphi_{vv}(u, v) &= (0, 0, f_{vv}(u, v)) \\ N(\varphi(u, v)) &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}\end{aligned}$$

### 3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^2$ -Parametrisierung und  $N : V \rightarrow S^2$  das dazugehörige normale Einheitsfeld. Schreibe die Abbildungsmatrix von  $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma = T_{N(p)} S^2$  bezüglich der Basis  $\varphi_u, \varphi_v$  von  $T_p \Sigma$  :  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , d.h.

$$(DN)_p(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$(DN)_p(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

**Bemerkung.** Falls  $\varphi_u$  und  $\varphi_v$  nicht orthogonal sind, dann gilt im Allgemeinen  $a_{12} \neq a_{21}$ .

**Lemma 1.** Mit den oben eingeführten Koeffizienten gilt:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{(DN)_p^T} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

*Beweis.* Berechne

$$\begin{aligned} e &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle \\ &= -\langle \varphi_u, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \rangle \\ &= -a_{11}E - a_{21}F \\ f &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle = \dots = -a_{11}F - a_{21}G \\ f &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}E - a_{22}F \\ g &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}F - a_{22}G \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.**  $K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$  (Alle Koeffizienten sind vom punkt  $(u, v)$  abhängig!)

*Beweis.*

$$\det(DN)_p = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \left( - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

und  $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$

□

**Beispiel.** Rotationstorus  $T \subset \mathbb{R}^3$  mit Radien  $0 < a < b$

Lokale  $C^\infty$ -Parametrisierung  $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T$

$$\varphi(u, v) = ((b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), a \cdot \sin(u))$$

$$\varphi_u(u, v) = (-a \cdot \sin(u) \cos(v), -a \cdot \sin(u) \sin(v), a \cdot \cos(u))$$

$$\varphi_v(u, v) = (-(b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), 0)$$

$$\varphi_{uu} = \dots$$

$$\varphi_{uv} = \dots$$

$$\varphi_{vv} = \dots$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2 \\
F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\
G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (b + a \cdot \cos(u))^2 \\
N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \stackrel{\text{siehe Flächeninhalt}}{=} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{a(b + a \cdot \cos(u))} \\
\Rightarrow e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = |\varphi_{uu}| = a \\
&\text{dies da } \varphi_{uu} \text{ und } N \text{ parallel sind.} \\
f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\
g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = (\text{Komplizierte einfache Rechnung}) \\
&= \cos(u) \cdot (b + a \cdot \cos(u)) \\
\Rightarrow K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{\cos(u)}{a(b + a \cdot \cos(u))}
\end{aligned}$$

*rotationstorus mit Krümmungen*

**Bemerkung.** Es gilt

$$\begin{array}{ll}
K(\varphi(u, v)) > 0 & u < \frac{\pi}{2} \text{ oder } u > \frac{3\pi}{2} \\
= 0 \text{ falls} & u = \frac{\pi}{2} \text{ oder } u = \frac{3\pi}{2} \\
< 0 & u > \frac{\pi}{2} \text{ und } u < \frac{3\pi}{2}
\end{array}$$

*elliptisch und hyperbolisch evtl.?*

**Anwendung.** Krümmungsformel von Funktionsgraphen:

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\Gamma_f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)$ . Mit der lokalen Parametrisierung  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_u) \rangle = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
f &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
g &= -\langle \varphi_v, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}
\end{aligned}$$

Berechne  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$  und erhalte

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

**Bemerkung.**  $f_{uu} \cdot f_{vv} - f_{uv}^2 = \det(Hf)_{(u,v)}$  mit  $Hf =$  Hessische Matrix  $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}$

Folgerung:

$$K(\varphi(u, v)) > 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} > 0$$

$$K(\varphi(u, v)) = 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} = 0$$

$$K(\varphi(u, v)) < 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} < 0$$

In einem Kritischenpunkt  $p$  ist die Krümmung  $K = \det(Hf)_p$ .

**Beispiele.**

1.  $f(x, y) = x^n + y^m$  mit  $n, m \geq 2$ .

Dann gilt  $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$\implies K(\varphi(0, 0)) = K(0) = 0 \text{ falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3$$

$$\implies K(\varphi(0, 0)) = K(0) = 4 \text{ falls } m = 2 \text{ und } n = 2$$

Alternative  $f(x, y) = -(x^2 + y^2) \implies K(0) = 4$

2.  $f(x, y) = x^n - y^n$  mit  $n, m \geq 2$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & -m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$\implies K(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ -4, & \text{falls } m = n = 2 \end{cases}$$

$$\text{Hier gilt } K(\varphi(u, v)) = \frac{-4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} = \frac{-4}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^2} < 0$$

$$\text{Wir folgern } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} K(\varphi(u, v)) = 0, \text{ ebenso } \lim_{v \rightarrow \infty} K(\varphi(u, v)) = 0.$$

**Frage.** Existiert  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} C^2$ , so dass  $\Gamma_f$  konstant  $-1$  gekrümmt ist?

**Antwort.** Nein! (Hilbert 1901)

Im Spezialfall  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  mit  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} C^2$  können wir elementar zeigen, dass  $\Gamma_f$  nicht konstant  $-1$  gekrümmt sein kann (vergleiche Serie 6). Mit der obigen Formel erhalten wir

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{g_{uu} \cdot h_{vv}}{(1 + g_u^2 + h_v^2)^2} \stackrel{!}{=} -1$$

$$\implies g_{uu} \cdot h_{vv} < 0$$

Annahme:  $h_{vv} < 0, g_{uu} > 0 (\forall (u, v) \in \mathbb{R}^3 \text{ da } h, g \text{ stetig})$

Fixiere (ein beliebiges)  $v \in \mathbb{R}$  und erhalte eine Differentialgleichung für  $g$  der Form

$$\frac{g_{uu} \cdot a}{(1 + g_u^2 + b^2)} = -1$$

mit  $a = h_{vv}(v) < 0$  und  $b = h_v(v)^2 \geq 0$

$$\implies g_{uu} = \underbrace{-\frac{1}{a}}_{>0 \text{ und } =c} \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 = c \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 > c \cdot (1 + 2g_u^2)$$

Schreibe  $s(u) = g_u(u) \implies s' > c(1 + 2s^2)$  (evtl. reicht sogar  $s' > 2s^2$ )

Wir lösen die Differentialgleichung  $s' = c \cdot (1 + 2s^2)$  und bemerken, dass diese in endlicher Zeit divergiert.

**Beispiel.**  $s' = s^2$

Lösung zur Anfangsbedingung:  $s(0) = 1 : s(t) = \frac{1}{1-t}$

## Rotationsflächen

Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine  $C^2$ -Kurve. Schreibe  $\gamma(t) = (r(t), h(t))$  mit  $r(t)$  der Rotation und  $h(t)$  der Höhe. Wir treffen folgende Annahmen:

1.  $r(t) > 0$
2.  $h'(t) > 0$
3.  $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ , d.h.  $\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2 = 1$  ("γ ist nach Bogenlänge parametrisiert")

*illustrationen rotationsfläche und dass gamma nicht zweimal auf gleicher x achse höhe durchlaufen darf*

Konstruiere eine Rotationsfläche mit folgender Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) &\rightarrow \Sigma \\ (u, v) &\mapsto (r(u)\cos(v), r(u)\sin(v), h(u)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (r'(u)\cos(v), r'(u)\sin(v), h'(u)) \\ \varphi_v &= (-r(u)\sin(v), r(u)\cos(v), 0) \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Einheitsnormalenfeld:

$$N(\varphi(u, v)) = (-h'(u)\cos(v), -h'(u)\sin(v), r'(u))$$

Kontrolle:



- $|N| = 1$ , d.h.  $\langle N, N \rangle = 1$  (ok, da  $h'(u)^2 + r'(u)^2 = 1$ )
- $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$  (ok)
- $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$  (ok)

Berechne

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 \quad (\text{da } h'^2 + r'^2 = 1) \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = r(u)^2 \end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = h''(u)r'(u) - h'(u)r''(u) \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = r(u)h'(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(h''r' - h'r'') \cdot r \cdot h'}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (h''r'h' - r''h'^2) = \frac{1}{r} \cdot (-r'^2r'' - h'^2r'') = -\frac{r''(u)}{r(u)} \end{aligned}$$

Hierbei wurde genutzt, dass  $r'^2 + h'^2 = 1 \implies 2r'r'' + 2h'h'' = 0$

$K(\varphi(u, v))$  ist nicht von  $v$  abhängig!

*Spezialfall: Rotationsflächen mit konstanter Krümmung*

1.  $K = 0$ , d.h.  $r''(a) = 0 \ (\rightarrow r(a) = a \cdot u + b)$   
 Anfangsbedingung:  $r(0) = 1, r'(0) = 0, h(0) = 0 \implies r(a) = 1, h(u) = u$  mit  $r'^2 + h'^2 = 1$  und  $h' > 0 \implies h' = 1$   
 Variation der Anfangsbedingung:  $r'(0) = a \neq 0$  führt zu einem Kreiskegel:  
 (Betrachte hier  $\gamma : (x, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  statt  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ )
2.  $K = 1$ , d.h.  $r'' = -r$   
 Anfangsbedingung:  $r(0) = 1, r'(0) = 0, h(0) = 0 \implies r(u) = \cos(u); h(u) = \sin(u)$   
 Variation der Anfangsbedingung führt zu vertikal verschobenen Einheitssphären, oder keiner Lösung;

**Beispiel.**  $r(0) = 2, r'(0) = 0, h(0) = 0 \implies r(u) = 2\cos(u), h(u) = \int_0^u h'(x)dx = \int_0^u \sqrt{1 - 4(\sin(x))^2}dx$  mit  $r'^2 + h'^2 = 1$ , hierbei handelt es sich um ein elliptisches Integral, nicht ausdrückbar durch elementare Funktionen.

$$r \text{ gross} \implies |r''| \text{ gross} \implies |r''| \text{ klein}$$

3.  $K = -1$ , d.h.  $r'' = r$

Mit  $r(0) = 1, h(0) = 0, r'(0) = 0 \implies r(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \cosh(u), h(u) = \dots$  Es gilt:  $r'(u) = \cosh(u)' = \sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$  Folglich existiert auch hier die Fläche  $\Sigma$  nur über einem gewissen Intervall der Form  $(-h_0, h_0)$ . (vgl. Serie 7)

*1: ähnlich hourglass figure von ana3 test aber rotierend*

*2: Lösungen: Sphäre, und flächen mit spitzen oder mit Rand*

*3: Skizze für Bsp. 3*

## 4 Theorema Egregium

**Ziel.** Die Krümmung ist durch die Koeffizientenfunktionen  $E, F, G$  bestimmt. Genauer: durch  $E, F, G$  und ihre Ableitungen bestimmt.

Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^2$ -Parametrisierung und  $N : V \rightarrow S^2$  die zugehörige lokale Gaussabbildung. Für alle  $p \in V$  gilt.

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Matrix von  $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$  bezüglich der Basis

$$\varphi_u, \varphi_v : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

das heisst

$$\begin{aligned} N_u &= (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) = a_{11} \cdot \varphi_u + a_{21} \cdot \varphi_v \\ N_v &= (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) = a_{12} \cdot \varphi_u + a_{22} \cdot \varphi_v \end{aligned}$$

Es gilt:  $e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle, g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$  und wir folgern:  $\varphi_{uu} - eN \perp N$   
 $\implies \varphi_{uu} - eN \in \text{span } \varphi_u, \varphi_v$

Ähnlich existieren eindeutige Koeffizienten  $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2 \in \mathbb{R}$  sogenannte Christoffelsymbole, mit

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \cdot \varphi_v \end{aligned}$$

Berechne nun

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} (\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle}_{=E}) \right) = \frac{1}{2} E_u$$

und

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \quad \left( \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2 \cdot \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle \right)$$

Andererseits gilt nach obigen Ansatz für  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$  auch

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \cdot E + \Gamma_{11}^2 \cdot F \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G \end{aligned}$$

die Gleichheit folgt jeweils aus  $\langle N, \varphi_u \rangle$

$$\implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

Analog erhalten wir via  $\varphi_{uv}$  und  $\varphi_{vv}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix} \\ \bullet \quad & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beachte hier:  $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 > 0$ , da  $I_p$  positiv definit ist.

**Konsequenz.** Die  $\Gamma_{ij}^k$  sind durch  $E, F, G$  und ihre partiellen Ableitungen bestimmt.  $K$  ist durch  $E, F, G$  bestimmt.

**Erinnerung.**

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v \\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v \\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v \end{aligned}$$

Via  $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle$  etc, erhalten wir  $\Gamma_{ij}^k$  als Funktion von  $E, F, G$  und ihren ersten partiellen Ableitungen.

**Lemma 2.** Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^3$ -Parametrisierung. Dann gilt  $\forall p \in V$  :

$$-E \cdot K = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2$$

**Korollar 4** (Theorema Egregium). Die Krümmung  $K$  lässt sich durch  $E, F, G$  und deren zwei partiellen Ableitungen ausdrücken.

*Beweis Korollar.* Es gilt  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0$  da  $I_p : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  positiv definit ist.

$$\implies K = -\frac{1}{E}(\dots)$$

wobei die  $\dots$  ein Ausdruck in  $\Gamma_{ij}^k$  und erste partielle Ableitungen, also Ausdruck in  $E, F, G$  und zweite partielle Ableitungen sind.  $\square$

**Bemerkung.** Das Korollar gilt auch für Flächen der Regularität  $C^2$ .

*Beweis Lemma.* Wir berechnen  $\varphi_{vuu} = \varphi_{uuv}$

$$1. \quad \varphi_{vuu} = \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_{uu}) = e_v N + e \underbrace{\quad N_v \quad}_{a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v} + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + \Gamma_{11}^1 \varphi_{uu} + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vu}$$

$$2. \quad \varphi_{uuv} = \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_{uv}) = f_u N + f \underbrace{\quad N_u \quad}_{a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v} + (\Gamma_{12}^1)_u \varphi_u + \Gamma_{12}^1 \varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u \varphi_v + \Gamma_{12}^2 \varphi_{vu}$$

Die  $\varphi_v$ -Komponente von  $\varphi_{vuu}$  und  $\varphi_{uuv}$  ist gleich, also

$$e \cdot a_{22} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = f \cdot a_{21} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \quad (*)$$

(Benutze  $\varphi_{uv} = fN + \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v$ , etc.)

**Erinnerung.**

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ \implies & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = -(a_{ij})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \underbrace{\quad}_{K=\det(a_{ij})} = -\frac{1}{K} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies E = -\frac{1}{K} \cdot (a_{22}e - a_{21}f)$$

bzw.  $-E \cdot K = a_{22}e - a_{21}f$  (gilt auch für  $K = 0$ )

$$\implies -E \cdot K \overset{(*)}{=} 6 \text{ Terme in } \Gamma_{ij}^k \text{ (siehe Lemma)}$$

□

**Bemerkung.** Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für  $-F \cdot K$  und  $-G \cdot K$ .

## Kapitel III

# Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet

**Ziel.**  $\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$

### 1 Isometrien

“Isometrien sind Diffeomorphismen, welche die erste Fundamentalform, und deshalb interne Distanzen erhalten.” Seien  $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$  reguläre Flächen und  $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$  offen.

**Definition.** Ein  $(C^2)$ -Diffeomorphismus  $h : V_1 \rightarrow V_2$  heisst *lokale Isometrie*, falls für alle  $p \in V_1$  und alle  $v, w \in T_p\Sigma$  gilt:

$$\langle (Dh)_p(v), (Dh)_p(w) \rangle_{h(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

Im Fall  $V_1 = \Sigma_1, V_2 = \Sigma_2$  heisst  $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  eine (globale) Isometrie.

**Proposition 1.** Seien  $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$  offen,  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  eine lokale  $(C^2)$ -Parametrisierung, und  $h : V_1 \rightarrow V_2$  ein  $(C^2)$ -Diffeomorphismus. Dann ist  $h$  eine lokale Isometrie, genau dann, wenn die Koeffizientenfunktionen  $E_i, F_i, G_i : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) bzgl. der lokalen Parametrisierungen  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  und  $\varphi_2 = h \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow V_2$  übereinstimmen:

$$E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$$

*isometrie grafik*

*Beweis.* “ $\implies$ ” Sei  $h : V_1 \rightarrow V_2$  eine lokale Isometrie. Berechne  $E_1(u, v) = \langle \varphi_{1u}, \varphi_{1u} \rangle_{\varphi_1(u, v)}$  und  $E_2(u, v) = \langle \varphi_{2u}, \varphi_{2u} \rangle_{\varphi_2(u, v)}$

Bemerke

$$\begin{aligned} \varphi_{2u}(u, v) &= \frac{d}{du} \varphi_2(u, v) = \frac{d}{du} (h \circ \varphi_1)(u, v) \\ &= (Dh)_{\varphi_1(u, v)} \left( \frac{d}{du} \varphi_1(u, v) \right) = (Dh)_{\varphi_1(u, v)}(\varphi_{1u}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E_2(u, v) = \langle (Dh)_{\varphi_1(u,v)}(\varphi_1 u), (Dh)_{\varphi_1(u,v)}(\varphi_1 v) \rangle_{h \circ \varphi_1(u,v)} = \langle \varphi_1 u, \varphi_1 v \rangle_{\varphi_1(u,v)}$$

Beim letzten Schritt wird benutzt, dass  $h$  eine lokale Isometrie ist! Also gilt  $E_1 = E_2$ , analog  $F_1 = F_2, G_1 = G_2$ .

“ $\Leftarrow$ ” Seien  $p \in V, v, w \in T_p \Sigma_1$ . Wähle (die eindeutigen)  $q \in U_1, a, b \in \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi_1(q) = p, (D\varphi_1)_q(a) = v, (D\varphi_1)_q(b) = w$

*bildchen für beweis prop 1*

Schreibe  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2$ . Berechne

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_p &= \langle (D\varphi_1)_q(a), (D\varphi_1)_q(b) \rangle_{\varphi_1(q)} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{siehe Def. von } E, F, G \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle (Dh)_p(v), (Dh)_p(w) \rangle_{h(p)} &= \langle D(\overbrace{h \circ \varphi_1}^{\varphi_2})_q(a), D(\overbrace{h \circ \varphi_1}^{\varphi_2})_q(b) \rangle_{h \circ \varphi_1(q)} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Kettenregel } D(h \circ \varphi_1)_q = (Dh)_{\varphi_1(q)} \circ (D\varphi_1)_q \\ &= \langle a_1 \varphi_{2u} + a_2 \varphi_{2v}, b_1 \varphi_{2u} + b_2 \varphi_{2v} \rangle \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_1 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Beispiel** (Kreiskegel). Sei  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3$  der Kreiskegel mit (lokaler) Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) &\rightarrow K \\ (u, v) &\mapsto \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \cos(v), \frac{u}{\sqrt{2}} \sin(v), \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

*Illustration Kegel, Isometrie, etc.*

Sei  $S \subset \mathbb{R}^2$  das Bild der lokalen Parametrisierung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}) \\ (u, v) &\mapsto \left( u \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u \sin \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Berechne die Koeffizientenfunktionen  $E, F, G$  (bzgl.  $\varphi$ ) und  $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$  (bzgl.  $\psi$ ).

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \tilde{E} \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = \tilde{F} \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \frac{u^2}{2} = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = \tilde{G} \end{aligned}$$

$h = \varphi \circ \psi^{-1} : S \rightarrow K$  ist eine lokale Isometrie (aus Proposition).

**Korollar 1.** Seien  $V_1 \subset \Sigma_1, V_2 \subset \Sigma_2$  offen und  $h : V_1 \rightarrow V_2$  eine lokale Isometrie. Dann gilt für alle  $p \in V_1$

$$K(p) = K(h(p))$$

“Isometrien erhalten die Krümmung”

*Beweis.* Benutze Theorema Egregium ( $K$  ist durch  $E, F, G$  bestimmt) und obige Proposition.  $\square$

**Bemerkung.** Die mittlere Krümmung ist nicht invariant unter (lokalen) Isometrien.

*isometrie krueimmung*

## Interne Distanzen

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine wegzusammenhängende reguläre Fläche.

**Definition.** Für  $p, q \in \Sigma$  definiere  $d_\Sigma(p, q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma \text{ } C^1 \text{ mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$  Hier ist

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

**Lemma 1.** Sei  $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  eine Isometrie. Dann gilt für alle  $p, q \in \Sigma_1$

$$d_{\Sigma_1}(h(p), h(q)) = d_{\Sigma_1}(p, q)$$

“Isometrien erhalten interne Distanzen”.

*Beweis.* Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma_1 \text{ } C^1$ . Berechne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h \circ \gamma) &= \int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{d}{dt} h \circ \gamma(t), \frac{d}{dt} h \circ \gamma(t) \right\rangle_{h(\gamma(t))}} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\langle (Dh)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)), (Dh)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \rangle_{h(\gamma(t))}} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\gamma(t)}} dt \\ &= \mathcal{L}(\gamma) \end{aligned}$$

$$\implies \inf\{\mathcal{L}(h \circ \gamma) \mid \dots\} = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \dots\} \quad \square$$

**Bemerkung.** Isometrien  $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  erhalten Distanzen in  $\mathbb{R}^3$  im allgemeinen nicht!

**Beispiel.** Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine injektive, nach Bogenlänge parametrisierte  $C^2$ -Kurve (d.h.  $\dot{a}^2 + \dot{b}^2 = 1$ ). Schreibe  $\gamma(t) = (a(t), b(t))$  und definiere  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  als Bild von

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (a(u), b(u), v)\end{aligned}$$

*vorhang als isometrie*

Berechne

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1$$

Also ist  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  eine Isometrie! Im allgemeinen gilt für  $(u_1, 0), (u_2, 0) \in \mathbb{R}^2$  ( $\implies K = 0$  für alle  $p \in \Sigma$ )

$$d_{\mathbb{R}^2}(\underbrace{(u_1, 0), (u_2, 0)}_{=|u_1 - u_2|}) \neq d_{\mathbb{R}^3}(\underbrace{\varphi(u_1, 0)}_p, \underbrace{\varphi(u_2, 0)}_q)$$

### Isometrien der Ebene

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie (bzgl. Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ ). Dann existieren (eindeutige)  $A \in O(\mathbb{R}^2), b \in \mathbb{R}^2$  mit  $h(p) = A(p) + b$ .

**Bemerkung.** Jede Abbildung der Form  $p \mapsto A(p) + b$  mit  $A \in O(\mathbb{R}^2)$  ist eine Isometrie:

$$(Dh)_p = A \text{ und } \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

Sei nun  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie. Dann erhält  $h$  Distanzen in  $\mathbb{R}^2$  (wende obiges Lemma an). Betrachte nun die Punkte  $0, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$  und deren Bilder  $h(0), h(e_1), h(e_2) \in \mathbb{R}^2$ . Setze  $b = h(0)$

*bildchen isometrien der ebene*

Es existiert  $A \in O(\mathbb{R}^2)$  mit  $A(0) + b = h(0), A(e_1) + b = h(e_1), A(e_2) + b = h(e_2)$ . Setze  $\tilde{h}(p) = A(p) + b$ . Dann ist  $h^{-1} \circ \tilde{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie mit Fixpunkten  $0, e_1, e_2 \implies h^{-1} \circ \tilde{h} = Id_{\mathbb{R}^2}$ , also  $\tilde{h} = h$ .

**Lemma 2.** Seien  $\varphi, \psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  Isometrien. Dann sind  $\varphi^{-1}$  und  $\varphi \circ \psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  Isometrien.

*Beweis.* Benutze  $(D\varphi^{-1})_p = (D\varphi)_{\varphi^{-1}(p)}^{-1}$  und  $(D\varphi \circ \psi)_p = (D\varphi)_{\psi(p)} \circ (D\psi)_p$ . □

**Konsequenz.** Die Isometrien von  $\Sigma$  bilden unter der Komposition eine Gruppe mit neutralem Element  $Id_\Sigma$ .  $\text{Iso}(\Sigma) = \{h : \Sigma \rightarrow \Sigma \mid h \text{ ist eine Isometrie}\}$  Isometriegruppe von  $\Sigma$ .



## Beispiele.

1.  $\Sigma = \mathbb{R}^2$  (bzw.  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ ). Sei  $\varphi \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ . Dann existiert (eindeutige)  $A \in O(\mathbb{R}^2)$  und  $b \in \mathbb{R}^2$  mit  $h(p) = A(p) + b$ .

**Frage.** Gilt  $\text{Iso}(\mathbb{R}^2) \simeq O(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ ? (D.h. isomorph)

Nein! Grund: Schreibe  $h_1(p) = A_1(p) + b_1$ , bzw.  $h_2(p) = A_2(p) + b_2$ . Dann gilt

$$h_1 \circ h_2(p) = h_1(A_2 p + b_2) = A_1 A_2 p + \overbrace{A_1 b_2 + b_1}^{\neq b_1 + b_2}$$

$\text{Iso}(\mathbb{R}^2) \simeq O(\mathbb{R}^2) \ltimes_{\alpha} \mathbb{R}^2$  ist ein *semidirektes Produkt*.

$$\begin{aligned} \alpha : O(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2) \text{ Automorphismus} \\ A &\mapsto h_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, b \mapsto Ab \end{aligned}$$

Multiplikationsvorschrift in einem semidirekten Produkt.

$$\begin{aligned} G \ltimes_{\alpha} H, \alpha : G &\rightarrow \text{Aut}(H) \\ (g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) &= (g_1 g_2, h_1 \alpha(g_1)(h_2)) \end{aligned}$$

Im Spezialfall  $\alpha = Id$  ist es ein direktes Produkt.

2.  $\Sigma = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{c} \text{Iso}(S^2) \simeq O(\mathbb{R}^3) \\ \uparrow \\ h \in \text{Iso}(S^2) \text{ ist durch die Bilder dieser (allgemeiner) Punkte bestimmt} \end{array}$$

3.  $\Sigma = S^1 \times S^1$

$$\text{Iso}(S^1 \times S^1) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{=\{Id, s\}} \ltimes O(\mathbb{R}^2)$$

4.  $\Gamma_f$  für  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\text{Iso}(\Gamma_f) = O(\mathbb{R}^2)$$

5.  $\Sigma =$

6. kleiner huegel

7. drei kleine huegel

Weiterführend:

**Theorem 1** (Hurwitz). Sei  $\Sigma$  eine geschlossene Fläche mit konstanter Krümmung  $-1$  (insbesondere ist dies keine reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$ ). Dann gilt:

$$|\text{Iso}(\Sigma)| \leq 84(g-1) \quad g \text{ Geschlecht der Fläche}$$

## 2 Paralleltransport und Geodäten

**Ziel.** Beschreibe Geodäten  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$

**Frage.** Dazu stellen werden wir folgendes benötigen: Was bedeutet  $\dot{\gamma}(t)$  ist konstant?

- In  $\mathbb{R}^2$   $\ddot{\gamma}(t) = 0$
- In  $\Sigma$   $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$  - die kovariante Ableitung

**Definition.** Ein glattes Vektorfeld entlang einer glatten Kurve  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  ist eine glatte Abbildung  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$ .

Die horizontale Ableitung oder (kovariante Ableitung) von  $w$  im Punkt  $\alpha(t)$  ist die orthogonale Projektion der Abbildung  $\frac{dw}{dt}(t)$  auf  $T_{\alpha(t)}\Sigma$ :

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t) - \left\langle \frac{dw}{dt}(t), N(\alpha(t)) \right\rangle N(\alpha(t))$$

*Vektorfeld entlang einer Kurve*

**Bemerkung.** Wir betrachten glatte Kurven und Vektorfelder (aber  $C^2$  reicht praktisch immer).

### Berechnung in lokalen Koordinaten

Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale (glatte) Parametrisierung mit  $\alpha([a, b]) \subset \varphi(U) = V$ .  
Schreibe  $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$ . Sei  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Vektorfeld entlang  $\alpha$ .  
Schreibe  $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma = \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$  als  $w(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$ . Es gilt

$$\frac{dw}{dt}(t) = \dot{a}(t)\varphi_u + \dot{b}(t)\varphi_v + a\dot{u}\varphi_{uu} + a\dot{v}\varphi_{vu} + b\dot{v}\varphi_{vv}$$

Dazu erinnere dass  $\frac{d}{dt}(\varphi_u = \varphi_{uu}\dot{u} + \varphi_{vu}\dot{v})$

Mit  $\varphi_{uu} = eN + \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v$  etc.. erhalten wir

$$\frac{Dw}{dt}(t) = (\dot{a} + \Gamma_{11}^1 a\dot{u} + \Gamma_{12}^1 a\dot{v} + \Gamma_{21}^1 b\dot{u} + \Gamma_{22}^1 b\dot{v})\varphi_u + (\dot{b} + \Gamma_{11}^2 a\dot{u} + \Gamma_{12}^2 a\dot{v} + \Gamma_{21}^2 b\dot{u} + \Gamma_{22}^2 b\dot{v})\varphi_v$$

**Definition.**  $w$  heisst parallel, falls  $\frac{Dw}{dt} \equiv 0$

”keine Änderung in Richtung der Tangentialebene“

**Beispiele.** 1. In der Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  gilt

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

Sei  $w(t) = a(t)e_1 + b(t)e_2$ .

$$\frac{dw}{dt} = \dot{a}(t)e_1 + \dot{b}(t)e_2 \perp e_3 = N \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

2. Betrachte  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

Dann ist  $w(t) \equiv e_3$  ein paralleles Vektorfeld entlang  $\alpha$ .

$$\frac{dw}{dt} = 0 \implies \frac{Dw}{dt} = 0$$

beachte hier  $e_3 \in T_{\alpha(t)}S^2$  für alle  $t$ . Weiteres Beispiel  $\bar{w}(t) = \dot{\alpha}(t)$

$$\frac{d\bar{w}}{dt}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \parallel N(\alpha(t)) \implies \frac{D\bar{w}}{dt}(t) = 0 \quad (\text{da } \frac{d\bar{w}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}S^2)$$

**Bemerkung.** Die Bedingung  $\frac{Dw}{dt} = 0$  ist unabhängig von der Parametrisierung von  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$

Sei  $\sigma : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ein Diffeomorphismus mit  $\sigma(a) = a$  und  $\sigma(b) = b$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(w(\alpha(\sigma(t)))) = \frac{d}{d\sigma}w(\alpha(\sigma))\dot{\sigma}(t) \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{Dw}{d\sigma}\dot{\sigma}$$

$$\sigma \text{ Diffeomorphismus} \implies \dot{\sigma}(t) \neq 0$$

$$\implies \frac{Dw}{dt} = 0 \iff \frac{Dw}{d\sigma} = 0$$

**Definition.** Eine glatte Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$  heisst geodätisch, falls  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$ . Das Bild von  $\gamma$  bezeichnen wir mit Geodäte.

Beachte hier  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$ , also ist  $\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Vektorfeld entlang  $\gamma(t)$ .

**Beispiele.** 1. In der Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  gilt  $\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$  (siehe oben), also

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \iff \frac{d\dot{\gamma}}{dt}(t) = \ddot{\gamma}(t) = 0$$

Also parametrisieren geodätische Kurven in der Ebene Geradenabschnitte.

2.  $\Sigma = S^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  ist geodätisch, da  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$ .  
(Siehe oben:  $\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t)$  ist parallel zu  $N(\gamma(t))$ , also senkrecht zu  $T_{\gamma(t)}S^2 \implies \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ .) Analog sind alle Grosskreisenabschnitte mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert Geodäten. Wir werden später sehen, dass alle Geodäten von dieser Form sind.

3.  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$  Betrachte die lokal isometrische Parametrisierung.  
 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Z$   
 $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$

**Behauptung.** Die Bilder von Geodäten in  $\mathbb{R}^2$  unter  $\varphi$  sind Geodäten.

**Spezialfall.** Geraden durch  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

**Erinnerung.** Eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  glatt heisst *geodätisch*, falls  $\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$

In lokalen Koordinaten bezüglich einer Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ , schreibe  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ . (falls  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \varphi(U)$ )

Geodätengleichung

$$\begin{aligned}\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 &= 0 \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 &= 0\end{aligned}$$

Führe Koordinaten  $w = \dot{u}, z = \dot{v}$  ein. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen mit glatten Koeffizienten, (d.h. lokal lipschitz) erster Ordnung auf  $\mathbb{R}^4$

- $\dot{u} = w$
- $\dot{v} = z$
- $\dot{w} = \ddot{u} = -(\dots)$
- $\dot{z} = \ddot{v} = -(\dots)$

Es seien Anfangsbedingungen  $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$  vorgegeben ( $p \in \varphi(U)$ ). Seien  $(u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4$  mit  $\varphi(u_0, v_0) = p, v = w_0\varphi_u + z_0\varphi_v$ . Nach Picard Lindelöf existiert eine *eindeutige* Lösungskurve  $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^4$  zur Anfangsbedingung  $\bar{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0, z_0)$ ;  $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))$ . Dann ist  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  unsere gesuchte Lösung.

$\implies$

**Proposition 3.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine glatte reguläre Fläche,  $p \in \Sigma$  und  $v \in T_p\Sigma$  vorgegeben. Dann existiert  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutige geodätische Kurve  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ .

**Zusatz.** Für vollständige Flächen (d.h. abgeschlossen und ohne Rand) lässt sich  $\gamma$  auf  $\mathbb{R}$  erweitern.

**Bemerkungen.**

1. Die Geodätengleichungen sind invariant unter Isometrien.  
Tatsächlich sind  $\Gamma_{ij}^k$  durch die Koeffizientenfunktionen  $E, F, G$  bestimmt, welche invariant unter Isometrien sind.  $\implies$  Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab (auch lokal gültig).
2. Nach Proposition 3 existiert für alle  $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$  ( $\Sigma$  vollständig), genau eine geodätische Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  mit  $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ . Falls wir für alle Paare  $(p, v)$  schon eine Geodäte kennen, dann haben wir alle Geodäten gefunden.  
*Anwendung:* Geodäten auf  $S^2$  sind *Grosskreise*.  
Geodäten auf dem Zylinder  $Z$  sind *Helixen, Meridiane, Mantellinien*.

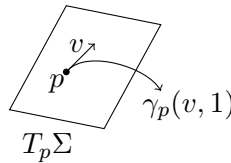
### 3 Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  glatt und vollständig, sowie  $p \in \Sigma$ ,  $v \in T_p\Sigma$ ,  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  die eindeutige geodätische Kurve mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$

**Notation.**  $\gamma_p(v, t) = \gamma(t)$

**Definition.**  $\exp : T_p\Sigma \rightarrow \Sigma$

$$v \mapsto \gamma_p(v, 1)$$



**Bemerkungen.**

1. Es gilt für alle  $\lambda > 0, t \in \mathbb{R}$ :  $\gamma_p(\lambda v, t) = \gamma_p(v, \lambda t)$
2. Eine Verschärfung des Satzes von Picard-Lindelöf nach Cauchy zeigt, dass die Lösung  $\gamma_p(v, t)$  glatt von den Parametern  $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ , und  $t \in \mathbb{R}$  abhängt. Daraus folgt, dass  $\exp : T_p\Sigma \rightarrow \Sigma$  glatt ist!
3. Wieso heisst diese Abbildung  $\exp$ ? Die Antwort kommt aus der Liethorie: Betrachte die Gruppe  $GL(\mathbb{C}^n)$ . Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  haben wir die Abbildung  $\gamma(t) = e^{tA} \in GL(\mathbb{C}^n)$ . Diese Kurve ist geodätisch bezüglich der Killingform auf  $GL(\mathbb{C}^n)$   
 $\lceil$  Sei  $X \in GL(\mathbb{C}^n)$  und  $A, B \in T_X GL(\mathbb{C}^n)$   
 $\langle A, B \rangle = \text{spur}(X^{-1}AX^{-1}B)$ ? Stimmt für  $X = Id$   $\lrcorner$

#### Berechnung des Differentials von $\exp$

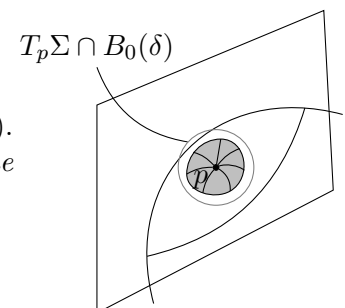
Sei  $p \in \Sigma$  und  $h \in T_p\Sigma$  und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  die eindeutige geodätische Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = h$ , also  $\exp(th) = \gamma_p(th, 1) = \gamma_p(h, t) = \gamma(t)$ . Berechne nun:

$$(D \exp)_0(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(th) - \exp(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dot{\gamma}(t) = h$$

$$\implies D(\exp)_0 = \text{Id}_{T_p\Sigma}$$

Nach Umkehrsatz existiert eine Zahl  $\delta > 0$ , so dass die Einschränkung von  $\exp$  auf  $U = T_p\Sigma \cap B_0(\delta) = \{v \in T_p\Sigma \mid \|v\|_2 < \delta\}$  ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist  $\varphi = \exp|_U : U \rightarrow \varphi(U) \subset \Sigma$  eine lokale Parametrisierung.

Wähle auf  $T_p\Sigma$  Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  (Wahl ist wo ist  $\theta = 0$ ?). Die entsprechenden Koordinaten auf  $\exp(U) \subset \Sigma$  heissen *geodätische Polarkoordinaten*.



**Proposition 2.** *Bezüglich der lokalen Parametrisierung  $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$  und Koordinaten  $(u, v) = (r, \theta)$  gilt:*

$$E = 1, F = 0, \lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0 \text{ und } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \sqrt{G(r, \theta)} = 1$$

*Beweis.* Fixiere einen Winkel  $\theta \in S^1 = [0, 2\pi]/0 = 2\pi$ . Es gilt  $E(r, \theta) = \left\langle \frac{d}{dr} \exp, \frac{d}{dr} \exp \right\rangle$ . Da die Kurve  $t \rightarrow \exp(t, \theta)$  geodätisch mit Geschwindigkeit 1 ist, folgt

$$\left\| \frac{d}{dr} \exp(r, \theta) \right\| = 1 \implies E(r, \theta) = 1$$

Das Paar  $(r, \theta)$  erfüllt die Geodätengleichung:

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta}^2 = 0$$

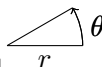
Da  $\theta$  konstant ist, folgt  $\Gamma_{11}^2 = 0$ . Weiterhin gilt (siehe Abschnitt Theorema Egregium)

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_r \\ F_r - \frac{1}{2} E_\theta \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \Gamma_{11}^2 = 0$$

$E = 1 \implies E_r = E_\theta = 0 \implies \Gamma_{11}^1 = 0$  und  $F_r = 0$ . Also hängt  $F(r, \theta) = \langle \exp_r, \exp_\theta \rangle$  nicht von  $r$  ab!

Mit  $\lim_{r \rightarrow 0} \|\exp_\theta\| = 0$  folgt also  $F = 0$ . Ausserdem folgt mit  $\lim_{r \rightarrow 0} \|\exp_\theta\| = 0$  auch  $\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \langle \exp_\theta, \exp_\theta \rangle = 0$ .

Genauer: In erster Ordnung in  $r$  gilt  $\|\exp_\theta(r, \theta)\| = r$  (+höhere Terme) also

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \sqrt{G(r, \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \|\exp_\theta(r, \theta)\| = 1$$


□

## Krümmung in geodätischen Polarkoordinaten

Wir betrachten eine lokale Parametrisierung  $\exp : U \rightarrow \Sigma$ . Bezüglich Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^2$  gilt:

$$E = 1, F = 0, \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Weiterhin gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_\theta \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} \implies G \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G_r$$

Berechnung der Krümmung mittels der Formel (Lemma, Theorema Egregium).

$$\begin{aligned} -EK = -K &= (\Gamma_{12}^2)_r + (\Gamma_{12}^2)^2 \quad \text{Viele Terme streichen sich weg} \\ &= \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} \frac{G_r}{G} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{G_r}{G} \right)^2 \quad \text{benutze } G \neq 0, \text{ da } \det \neq 0 \end{aligned}$$

**Proposition 3.**  $K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} K &= -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{1}{2} \frac{G_r}{\sqrt{G}} \right)_r \\ &= -\frac{1}{2} \frac{G_{rr}}{G} + \frac{1}{4} \frac{(G_r)^2}{G^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{G_r}{G} \right)_r - \frac{1}{4} \frac{G_r^2}{G^2} = K \end{aligned}$$

□

**Anwendung.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine glatte reguläre Fläche, und  $\exp : U \rightarrow \Sigma$  eine lokale Parametrisierung. Wir machen für die Koeffizientenfunktion  $\sqrt{G(r, \theta)}$  eine Taylorentwicklung.

**Ansatz.** Unter Berücksichtigung von  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G}_r = 1$ , sowie Prop. 4  $\sqrt{G} = r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + \dots$ , (Restterm  $R(r, \theta)$  erfüllt  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} R(r, \theta) = 0$ )

$$\implies \sqrt{G}_{rr} = 2a(\theta) + 6b(\theta)r + \text{höhere Terme}$$

Prop. 5

$$\implies K = -\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}} = \frac{2a(\theta) + 6b(\theta)r + \dots}{r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + \dots}$$

Die Grenzbetrachtung  $r \rightarrow 0$  liefert:

- $a(\theta) = 0$  (da  $K$  nicht  $\rightarrow \infty$  gehen darf wegen Glattheit)
- $b(\theta) = \frac{K}{6}$ .

Damit erhalten wir  $\sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + R(r, \theta)$  Sei  $p \in \Sigma$  und  $r > 0$ .

**Definition.** Definiere  $K^\Sigma(p, r) = \exp(K_0(r))$ , wobei  $K_0(r) = \{z \in T_p \Sigma \mid |z| = r\}$  "Kreis um  $p$  in  $\Sigma$  mit Radius  $r$ , den Kreis runterlegen"

Setze  $U^\Sigma(p, r) = \text{Länge}(K^\Sigma(p, r)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta$ . Weglänge war definiert  $\int_0^t \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$  hier  $u = r, v = \theta$ .

**Theorem 2** (Umfangdefektformel).

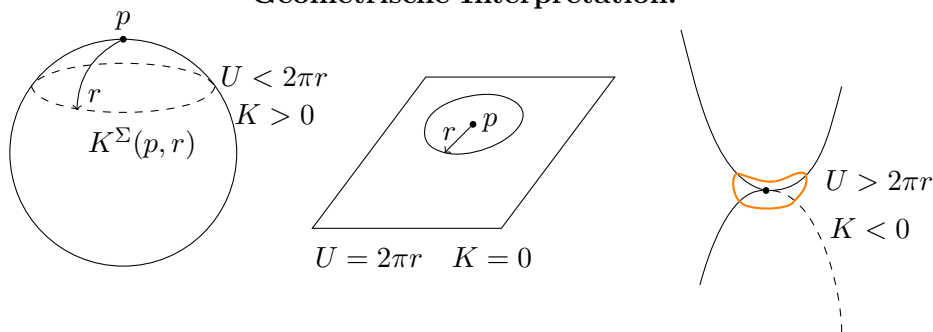
$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - U^\Sigma(p, r)}{r^3} \frac{3}{\pi}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned}
 U^\Sigma(p, r) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ r - \frac{K(p)}{6} r^3 + R(r, \theta) \right] d\theta \\
 &= 2\pi r - \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 + \int_0^{2\pi} R(r, \theta) d\theta \\
 &\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - U^\Sigma(p, r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(p)
 \end{aligned}$$

□

### Geometrische Interpretation.



**Anwendung** (Flächen konstanter Krümmung). Falls  $K$  konstant ist, dann hat die Differentialgleichung  $K\sqrt{G} = -\sqrt{G_{rr}}$  zur Anfangsbedingung  $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$   $\sqrt{G_r}(0, \theta) = 1$  siehe Prop. 4 eine eindeutige Lösung:

1.  $K = 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = r$  also  $G = r^2$
2.  $K > 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r)$  also  $G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}r)$
3.  $K < 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}r)$  wobei  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

In allen Fällen ist  $G$  unabhängig von  $\theta$ !

Kreisumfang:

- $K = 0$  siehe Weglänge  $\int_0^T \sqrt{\dot{r}^2 E + \dot{u} \dot{v} F + \dot{v}^2 G} dt$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$$

- $K = 1$  mit  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta = 2\pi \sin(r)$$



- $K = -1$  "Umfang wächst exponentiell"

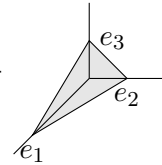
$$U(r) = 2\pi \sinh(r) \sim e^r$$

**Theorem 3** (Minding 1839). Seien  $\Sigma_1, \Sigma_2$  reguläre Flächen mit derselben konstanten Krümmung  $K$ , und  $p_1 \in \Sigma_1, p_2 \in \Sigma_2$ . Dann existiert  $U_1 \subset \Sigma_1, U_2 \subset \Sigma_2$  offen mit  $p_i \in U_i$  und eine lokale Isometrie  $h : U_1 \rightarrow U_2$ .

*Beweis.* Bezüglich geodätischer Polarkoordinaten um  $p_1, p_2$  sind die Koeffizientenfunktionen  $E = 1, F = 0, G$  durch  $K$  bestimmt, also identisch. Wir folgern, dass  $\Sigma_1, \Sigma_2$  lokal isometrisch sind (siehe Abschnitt Isometrien).  $\square$

## 4 Der Satz von Gauss-Bonnet

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine glatte reguläre Fläche. Wir betrachten das Standarddreieck  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  mit Eckpunkten  $e_1, e_2, e_3$ .



Ein Dreieck in  $\Sigma$  ist das Bild von  $\Delta$  unter einer glatten Abbildung  $\varphi : \Delta \rightarrow \Sigma$ . Falls die Kanten von  $\varphi(\Delta)$  Segmente von Geodäten sind, dann heisst das Dreieck geodätisch.

**Definition.** Ein *geodätisches Dreieck* in  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  ist ein eingebettetes Dreieck, welches von drei geodätischen Segmenten begrenzt wird.

**Theorem 4** (Lokale Version von Gauss-Bonnet). Sei  $\Delta \subset \Sigma$  ein geodätisches Dreieck mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\Delta} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

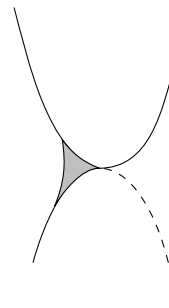
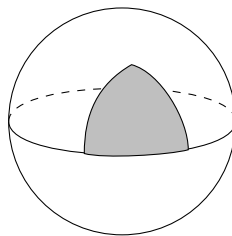
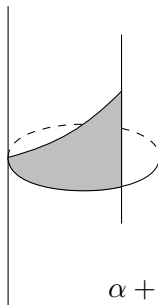
**Erinnerung.** Flächenelement  $dA = \sqrt{EG - F^2}$

**Bemerkung.** Bei konstanter Krümmung  $K = 0$  haben alle geodätischen Dreiecke die Innenwinkelsumme  $\pi$

### Geometrische Interpretation.

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

$$K > 0$$



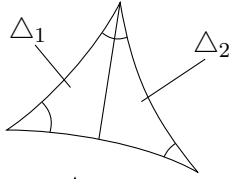
$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

$$K < 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

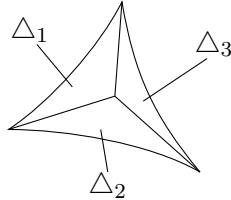
$$K = 0$$

**Vorbereitung.** Additivität der Formel:  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$



$$\underbrace{\int_{\Delta} K dA}_{\alpha + \beta + \gamma - \pi} = \underbrace{\int_{\Delta_1} K dA}_{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi} + \underbrace{\int_{\Delta_2} K dA}_{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi}$$

Ok, da  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi$



$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \alpha + \beta + \gamma + 2\pi \implies \int_{\Delta} K dA = \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta_i} K dA$$

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine lokale Parametrisierung der Form  $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$  mit  $\Delta_A \subset \varphi(U)$  und  $\varphi(0)$  sei ein Eckpunkt von  $\Delta$ , ebenso sei  $B \in \varphi(U \cap \mathbb{R} \times \{0\})$

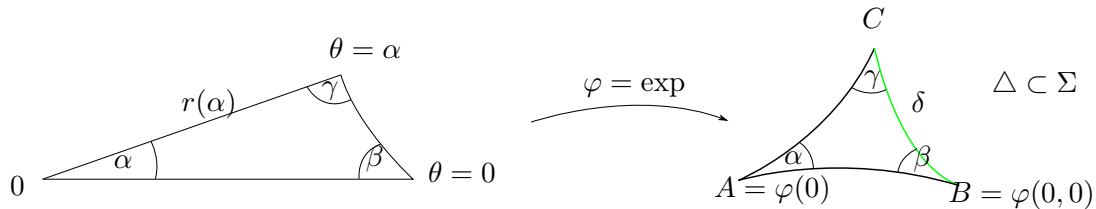


Abbildung III.1: Interpretation von  $\exp$

Parametrisiere den Weg  $\delta : [0, \alpha] \rightarrow \Sigma$  durch  $\delta(\theta) = \exp(r(\theta), \theta)$ . Berechne

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} K dA &= \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} K(r, \theta) \sqrt{EG - F^2} dr d\theta \\ &\stackrel{E=1, F=0, \text{ da } \varphi=\exp}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} K \sqrt{G} dr d\theta \\ &\stackrel{\text{Prop. 5}}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} -\sqrt{G_{rr}} dr d\theta \\ &= - \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} \sqrt{G_{rr}} dr d\theta \\ &= - \int_0^\alpha \left[ \sqrt{G_r}(r(\theta), \theta) - \sqrt{G_r}(0, \theta) \right] d\theta \\ &= \alpha - \int_0^\alpha \sqrt{G_r}(r(\theta), \theta) d\theta \end{aligned}$$

**Lemma.**

$$-\sqrt{G_r}(r(\theta), d\theta) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

wobei  $\psi(\theta)$  der Winkel zwischen  $e_r$  und  $\dot{\delta}(\theta)$  ist.

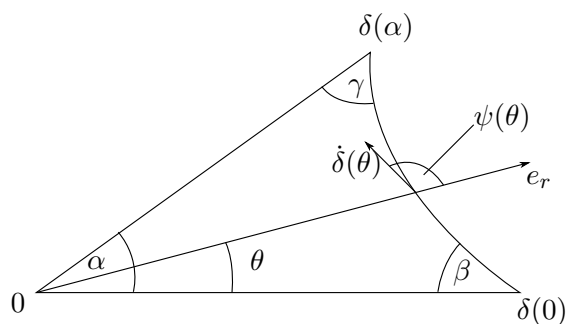


Abbildung III.2: Darstellung von Lemma

Insbesondere gilt  $\psi(0) = \pi - \beta$  und  $\psi(\alpha) = \gamma$ . Mit dem Lemma folgt also

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} K dA &= \alpha + \int_0^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \\ &= \alpha + \psi(\alpha) - \psi(0) \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi \end{aligned}$$

□

*Lemma.* Berechne

$$\begin{aligned} \sqrt{G}_r &= \frac{1}{2} \frac{G_r}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle}_{=G} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \langle \varphi_{r\theta}, \varphi_{\varphi_\theta} \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{\|\varphi_\theta\|} \right\rangle \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt  $\varphi_{r\theta} = \varphi_{\theta r}$  und  $\sqrt{G} = \|\varphi_\theta\|$  verwendet wird. Wir erinnern uns daran, dass

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{\|\varphi_\theta\|} \right\rangle = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

“Die Winkeländerung von  $\psi$  und  $\varphi_r$  stimmen überein.”

□

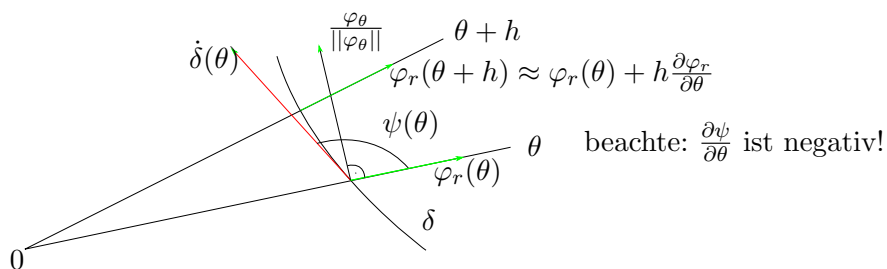


Abbildung III.3: Beweis geometrisch

**Bemerkung.** Falls  $\Delta \subset \Sigma$  nicht im Bild einer Parametrisierung  $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$  liegt, unterteile  $\Delta$  iteriert, bis alle Teildreiecke diese Eigenschaft haben.

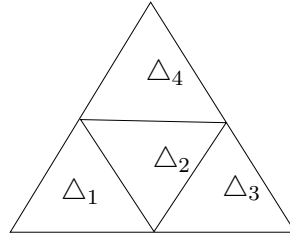


Abbildung III.4: Iterationsschritt (Seiten halbieren)

Alle Flächen die wir betrachten sind abgeschlossen und kompakt.  
Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte, glatte Fläche ohne Rand.

**Definition.** Eine *Triangulierung*  $T$  von  $\Sigma$  ist eine endliche Vereinigung von Dreiecken in  $\Sigma$ ,  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  mit folgenden Eigenschaften.

1.  $\bigcup_{i=1} \Delta_i = \Sigma$
2.  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  falls  $i \neq j$ , ein gemeinsamer Eckpunkt, eine, zwei, oder drei gemeinsame Kanten

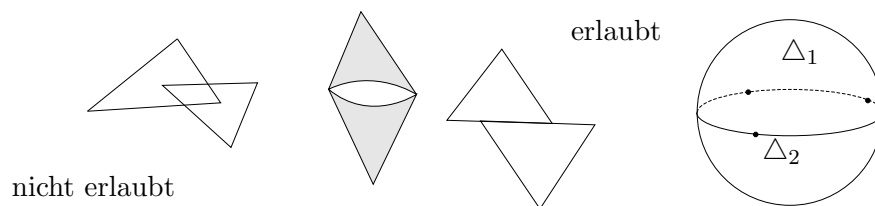


Abbildung III.5: Nicht erlaubte Triangulierungen

**Beispiel.** 4 Dreiecke 2 Eckpunkte, 6 Kanten

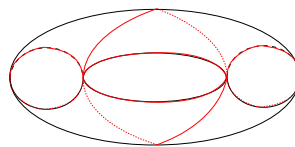


Abbildung III.6: Triangulierung eines Torus

Falls alle Kanten geodäsche Segmente sind, dann heisst die Triangulierung *geodätisch*.

**Theorem 5** (Gauss-Bonnet globale Version).

$$\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi * \chi(\Sigma)$$

wobei  $\chi(\Sigma)$  die Eulercharakteristik von  $\Sigma$ , zu berechnen wie folgt:  $\chi(\Sigma) = e - k + n$  mit  $e = \# \text{Eckpunkte}$ ,  $k = \# \text{Kanten}$ ,  $n = \# \text{Dreiecke}$  für irgendeine Triangulierung von  $\Sigma$ .

**Theorem 6.** Jede reguläre kompakte Fläche besitzt eine geodätische Triangulierung.

*Beweis.* siehe Ahlfors-Sari: Riemann Surfaces □

*Beweis von Gauss-Bonnet.* Sei  $T = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \dots \cup \triangle_n$  eine geodätische Triangulierung von  $\Sigma$ . Berechne

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} K \, dA &= \sum_{i=1}^n \int_{\triangle_i} K \, dA \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) \\ &= 2\pi e - n\pi \quad (2\pi \text{ für jeden Eckpunkt}) \\ &= 2\pi(e - \frac{3}{2}n + n) \\ &= 2\pi(e - k + n) \\ &= 2\pi\chi(\Sigma) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wird, dass jedes Dreieck drei Kanten hat. Jede Kante gehört zu zwei Dreiecken.  $\implies k = \frac{3}{2}n$  □

**Bemerkung.** Aus dem obigen Beweis folgt, dass  $\chi(\Sigma)$  unabhängig von  $T$  ist, zumindest für geodätische Triangulierungen. Dies gilt auch für allgemeine, nicht geodätische Triangulierungen.

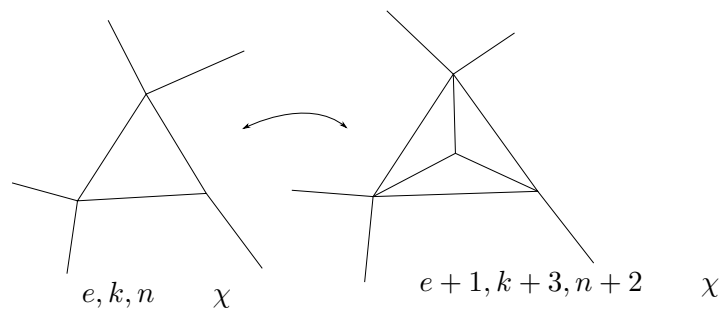



Abbildung III.7: Ändere die Triangulierung

**Beispiele** (sehr wichtig). 1.  $\chi(S^2) = 3 - 3 + 2 = 2 \implies \int_{S^2} K \, dA = 4\pi$  (klar, da  $K = 1$  und  $\text{Area}(S^2) = 4\pi$ )

Wir folgern daraus, dass Oberflächen, welche topologisch gleich sind, die gleiche Krümmung haben. "Ingwersphäre"

$$\int K \, dA = 4\pi$$


2.  $\chi(S^1 \times S^1) = \chi(\text{torus}) = 2 - 6 + 4 = 0$  siehe oben.  $\implies \int_{\text{torus}} K \, dA = 0$ .

Was tun, falls wir das nicht gewusst hätten? *Trick*: Schneide und klebe!

$$\int_{\text{torus}} K \, dA = 2 \int_{\text{cylinder}} K \, dA = 2 \left( \underbrace{\int_{\text{cylinder}} K \, dA}_{4\pi \text{ GB}} - 2 \underbrace{\int_{\text{cylinder}} K \, dA}_{4\pi} \right) = 0$$

Daraus folgt auch  $\chi(\text{torus}) = 0$ .

3. Betrachte  $\Sigma_2 = \text{torus with two handles}$

$$\int_{\Sigma_2} K \, dA = 2 \int_{\text{cylinder}} K \, dA = 2 \left( \int_{\text{cylinder}} K \, dA - \int_{\text{cylinder}} K \, dA \right) = -4\pi$$

Daraus folgt  $\chi(\Sigma_2) = -2$

Induktiv erhalten wir für  $\Sigma_g = \text{torus with } g \text{ handles}$   $g$  Henkel:

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

Dabei haben wir schon Spezialfälle davon gesehen:

- $g = 0$  Sphäre  $\chi = 2$
- $g = 1$  Torus  $\chi = 0$

## Kapitel IV

# Ebene hyperbolische Geometrie

Knörrer: Geometrie Kapitel 3

**Ziel.** Konstruktion einer *vollständigen* Fläche  $H$  mit konstanter Krümmung  $-1$ , analog zur Ebene ( $K \equiv 0$ ) und Sphäre ( $K \equiv 1$ ).

*Vollständig:* Jede geodätische Kurve  $\gamma : (a, b) \rightarrow H$  lässt sich geodätisch auf  $\mathbb{R}$  erweitern.

**Motivation.** *Gauss-Bonnet*

$$\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

wobei  $\Sigma$  eine kompakte, vollständige Fläche. Falls  $\chi(\Sigma) < 0$  und die Krümmung  $K$  konstant ist, dann muss  $K$  negativ sein!

**Theorem 1** (Klassifikation der Flächen). *Sei  $\Sigma$  eine topologische (glatte), kompakte, vollständige, orientierbare, zusammenhängende Fläche. Dann ist  $\Sigma$  zu einer der Flächen  $\Sigma_g$  homöomorph (diffeomorph):*



$\Sigma_g$  mit  $g$  Henkel

*Es gilt:  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$  falls  $g \geq 2$ .*

# 1 Eine Riemannsche Metrik mit $K=-1$

Naiver Ansatz zur Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  mit  $K = -1$ .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = h(p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

wobei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  positiv und glatt ist. Für die Koeffizientenfunktionen  $E, F, G$  gilt also:

- $E(x, y) = \langle e_1, e_1 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$
- $F(x, y) = \langle e_1, e_2 \rangle_{(x,y)} = 0$
- $G(x, y) = \langle e_2, e_2 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$

**Terminologie.** Falls  $E = G$  und  $F = 0$  gilt, dann heissen die Koordinaten *konform* oder *isotherm*.

Eine kleine Rechnung zeigt

$$K = -\frac{1}{2h(x, y)} \Delta(\log(h(x, y)))$$

wobei  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$  der Laplaceoperator (siehe Serie 10).

Nun führt  $K = -1$  zu einer Differentialgleichung für  $h$ :

$$2h(x, y) = \Delta(\log(h(x, y)))$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung*, welche schwierig zu lösen ist. Mit dem Lösungsansatz  $h(x, y) = y^n$  finden wir eine Lösung  $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$ , welche allerdings nur auf der oberen Halbebene  $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$  definiert ist.

**Definition.** Die *hyperbolische Ebene* ist die Menge  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$  mit der Riemannschen Metrik

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{x+iy} = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

**Bemerkungen.**

1. Die Translation  $z \mapsto z + a$  mit  $a \in \mathbb{R}$  ist eine Isometrie von  $H$ . Tatsächlich, schreibe

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y) \end{aligned}$$

Für alle  $p \in H$  gilt  $(DT)_p = Id_{\mathbb{R}^2}$ . Zu prüfen für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ :

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DT)_p(v), (DT)_p(w) \rangle_{T(p)} = \langle v, w \rangle_{T(p)}$$

Stimmt, da  $y(p) = y(T(p))$ , und somit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_{T(p)}$



2. Die Streckung  $z \mapsto \lambda z$  mit  $\lambda > 0$  ist eine Isometrie von  $H$ . Schreibe

$$\begin{aligned} S : H &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Für alle  $p \in H$  gilt  $(DS)_p = \lambda Id_{\mathbb{R}^2}$ . Zu prüfen für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ :

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DS)_p(v), (DS)_p(w) \rangle_{S(p)} = \lambda^2 \langle v, w \rangle_{S(p)}$$

Stimmt, da  $y(S(p)) = \lambda y(p)$ , also  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S(p)} = \frac{1}{\lambda^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_p$

3. Die Inversion  $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$  ist eine Isometrie von  $H$ . Schreibe

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\bar{z}} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} \in H$$

falls  $z \in H$  d.h.  $y > 0$ . Also  $\varphi : H \rightarrow H$ . Es gilt für alle  $z \in H$  und  $v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ :

$$(D\varphi)_z(v) = \varphi'(z)v = -\frac{1}{\bar{z}^2}v$$

Zu prüfen:

$$\langle v, w \rangle_z \stackrel{?}{=} \left\langle -\frac{1}{\bar{z}^2}v, -\frac{1}{\bar{z}^2}w \right\rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{|z|^4} \langle v, w \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}}$$

. Stimmt, da  $y(-\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{1}{|z|^2}y(z) \implies \langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = |z|^4 \langle \cdot, \cdot \rangle_z$

## 2 Möbiustransformationen

**Erinnerung** (aus der komplexen Analysis). Für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$ , definieren wir die zugehörige *Möbiustransformation* (nicht auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert).

$$\begin{aligned} (MT)\Phi : \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

**Beispiele.**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \in \mathbb{C} \implies \Phi_A(z) = z + b$
2.  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies \Phi_A(z) = a^2 z$ . Für  $a = \sqrt{\lambda} : \lambda z$  ( $\lambda > 0$ )
3.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Phi_A(z) = -\frac{1}{\bar{z}}$  Insbesondere, für  $a = \sqrt{\lambda}(\lambda > 0) : \lambda z$

**Bemerkung.** Die obigen Isometrien 1-3 sind vom Typ  $\Phi_A$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^3)$ . (Determinante 1)

## Projektive Interpretation von Möbiustransformation

Sei  $A \in GL(\mathbb{C}^2)$ . Dann erhalten wir eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Insbesondere bildet  $A$  Geraden durch 0 auf Geraden durch 0 ab (1).

**Definition.** Die *projektive Gerade*  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  ist die Menge aller komplexen Geraden durch 0 in  $\mathbb{C}^2$ . Konkret: Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich folgender Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ :

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \text{ mit } w = \lambda v$$

Dann ist  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$ . Sei nun  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

- Falls  $b \neq 0$ , dann gilt  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} z \in \mathbb{C}$ .
- Falls  $b = 0$ , dann gilt  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{a \neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$ .

Daraus folgern wir, dass  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Aus (1) folgt: Die Abbildung  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \\ [v] &\mapsto [Av] \end{aligned}$$

Interpretation via  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

- $v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$  bzw.  $cz + d = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$

Notation für  $\Phi_A : \Phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  "geeignet interpretiert". Aus dieser Definition folgt auch dass  $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$ . Diese Tatsache ist mit der anderen Definition mühsam zu beweisen.

**Lemma 1.** Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$  Dann erhält die Möbiustransformation  $\varphi_A$  die obere Halbebene  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$ .

*Beweis.* Sei  $z \in H$ , d.h.  $\operatorname{im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) > 0$ . Berechne

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(\varphi_A(z)) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\ &\stackrel{\det A=1}{=} \frac{\operatorname{im}(z)}{(cz+d)^2} > 0\end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Es gilt sogar  $\varphi_A(H) = H$  Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}H &= \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (H) = \varphi_{A \circ A^{-1}}(H) \\ &\stackrel{\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B}{=} \varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}}(H) = \varphi_A(\varphi_{A^{-1}}(H)) \subset \varphi_A(H)\end{aligned}$$

$\implies \varphi_A(H) = H$ . Daraus folgt, dass Möbiustransformationen eine Gruppe bilden.

**Lemma 2.** Jede Möbiustransformation  $\varphi_A : H \rightarrow H$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$  ist eine endliche Komposition von Möbiustransformationen der Form

1.  $z \mapsto z + b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) horizontale Translation
2.  $z \mapsto \lambda z$  ( $\lambda > 0$ ) Streckung
3.  $z \mapsto -\frac{1}{z}$  Inversion

*Beweis.*

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \frac{cz + \frac{c}{a}b}{cz+d} = \frac{a}{c} \frac{cz+d + (\frac{c}{a}b-d)}{cz+d} = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$$

für geeignete  $\alpha$  und  $\beta$ . Details siehe Serie 11. □

**Korollar 1.** Alle Möbiustransformationen der Form  $\varphi_A : H \rightarrow H$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$  sind Isometrien bezüglich der Riemannschen Metrik  $\frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ .

*Beweis.* Möbiustransformationen des Typs 1-3 sind Isometrien, siehe oben □

**Lemma 3.** Die Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$   
 $t \mapsto ie^t$

*Beweis.* Wir bemerken zuerst, dass

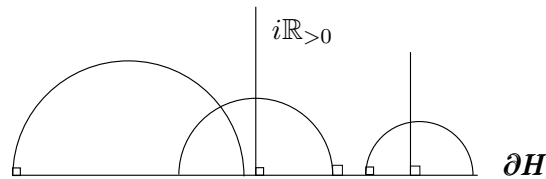
$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|_H &= \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_H} \\ &\stackrel{y(\gamma(t))=e^t}{=} \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2} \underbrace{\langle ie^t, ie^t \rangle_{\mathbb{R}^2}}_{\langle e^t, e^t \rangle = (e^t)^2}} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$  ist nach Bogenlänge parametrisiert (bzgl. hyperbolischer Metrik). Sei nun  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow H$  die eindeutige geodätische Kurve mit  $\delta(0) = i$  und  $\dot{\delta}(0) = i$ . Betrachte die folgende Isometrie von  $H$  (Spiegelung an  $i\mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow H \\ x + iy &\mapsto -x + iy \end{aligned}$$

Nun ist  $\sigma \circ \delta : \mathbb{R} \rightarrow H$  auch geodätisch mit  $\sigma \circ \delta(0) = i$  und auch  $\frac{d}{dt}(\sigma \circ \delta)(0) = i$ . Aus der Eindeutigkeit der Geodäten zu Anfangsbedingungen folgt also  $\delta = \sigma \circ \delta$ , also  $\delta(\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$ . Da  $\gamma$  und  $\delta$  nach Bogenlänge parametrisiert ( $\delta$  ist geodätisch mit  $\|\dot{\delta}(0)\|_H = 1$ ) sind, folgt  $\gamma = \delta$ .  $\square$

**Proposition 1.** *Die Geodäten in  $H$  sind genau die Halbgeraden und Halbkreise, welche senkrecht auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial H$  stehen.*



Geodäten in Halbebene  $H$

*Beweis.* Wir haben schon eine Geodäte gefunden:  $i\mathbb{R}_{>0}$ , das Bild der Kurve  $\gamma(t) = ie^t$ . Schreibe  $h = \text{Bild}(\gamma) \subset H$ . Nun ist für jede Isometrie  $\varphi : H \rightarrow H, \varphi(H) \subset H$  auch eine Geodäte. Insbesondere können wir auf  $h$  iteriert Abbildung der Form

1.  $z \mapsto z + b \quad b \in \mathbb{R}$
2.  $z \mapsto \lambda z \quad \lambda > 0$
3.  $z \mapsto -\frac{1}{z}$

Daraus folgt, dass alle Halbgeraden auf  $\mathbb{R}$  Geodäten sind. Betrachte die spezielle Isometrie  $\varphi(z) = -\frac{2}{z+1}$

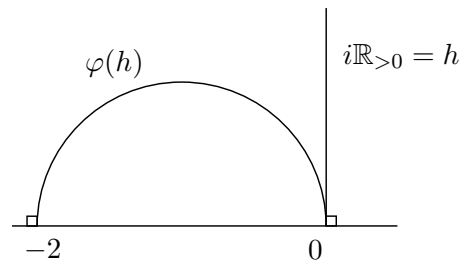
**Behauptung.**  $\varphi(h)$  ist ein Halbkreis in  $H$  mit Zentrum  $-1$  und Radius  $1$

*Beweis.* Sei  $iy \in h$ . Berechne

$$|\varphi(iy) + 1| = \left| -\frac{2}{iy+1} + \frac{iy+1}{iy+1} \right| = \left| \frac{iy-1}{iy+1} \right| = 1$$

□

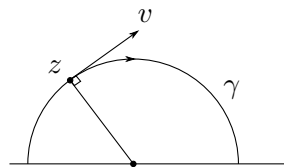
Unter Anwendung von horizontalen Transformationen und Streckungen erhalten wir aus  $\varphi(h)$  alle Halbkreise Senkrecht auf  $\mathbb{R}$ .



Halbkreis als Geodäte

**Frage.** Wieso existieren keine weiteren Geodäten?

Zu jeden  $z \in H$  und jedem Einheitsvektor  $v$  existiert genau eine geodätische Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$  mit  $\gamma(0) = z$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Das Bild von  $\gamma$  muss also der Halbkreis oder die Halbgerade durch  $z$  mit Tangente  $v$  sein! □



Eindeutigkeit der Geodäte

**Bemerkung.** Für alle  $z, w \neq z \in H$  existiert eine Geodäte  $g \subset H$  mit  $z, w \in g$  Hingegen existiert zu  $g \subset H$  und  $z \notin g$  unendlich viele Geodäten  $h \in H$  mit  $z \in h$  und  $h \cap g = \emptyset$ . Wir bemerken, dass das *Parallelaxiom* in der hyperbolischen Ebene *nicht erfüllt* ist.

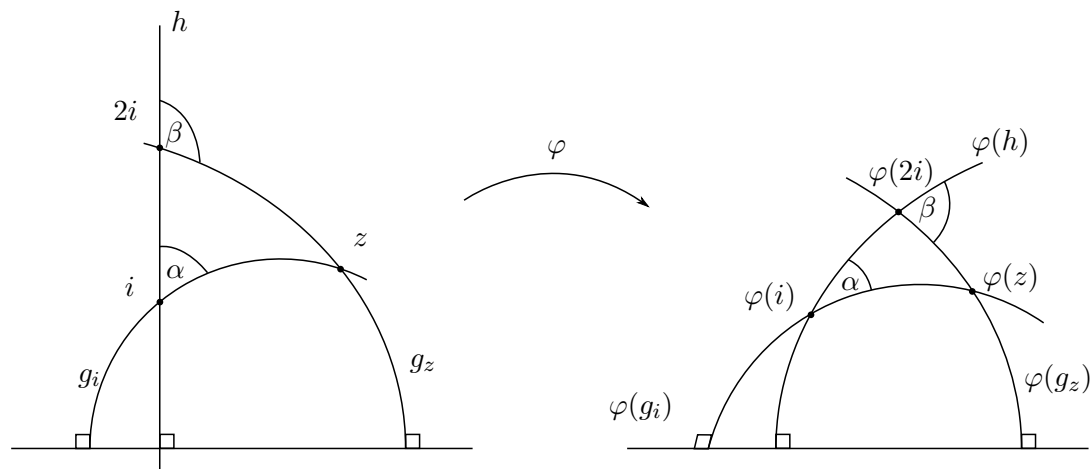


Dies wurde etwa 1840 von Bolyai und Lobachevski bemerkt.

### 3 Die Isometriegruppe von $H$

**Lemma 4.** Sei  $\varphi : H \rightarrow H$  eine orientierungserhaltende Isometrie, d.h. für alle  $z \in H$  gilt  $\det((D\varphi)_z) > 0$ . Dann ist  $\varphi$  durch  $\varphi(i) \in H$  und  $(D\varphi)_i(i) \in \mathbb{C}$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Geometrisch, unter Benutzung der Tatsache, dass Isometrien winkelerhaltend sind. Wir bemerken zuerst, dass  $\delta(t) = \varphi(ie^t)$  eine geodätische Kurve mit  $\delta(0) = \varphi(i)$  und  $\dot{\delta}(0) = (D\varphi)_{ie^0}(i) = (D\varphi)_i(i)$  ist, also durch  $\varphi(i) \in H$  und  $(D\varphi)_i(i) \in \mathbb{C}$  bestimmt. Insbesondere kennen wir auch  $\varphi(2i) \in H$ . Sei  $z \in H \setminus i\mathbb{R}_{>0}$ ,  $g_i, g_z \subset H$  Geodäten mit  $i, z \in g_i$  bzw.  $2i, z \in g_z$ , wegen  $\angle(g_i, h) = \angle(\varphi(g_i), \varphi(h))$  und  $\varphi$  winkelerhaltend. Daraus folgt  $\varphi(g_i)$  und  $\varphi(g_z) \subset H$  festgelegt. Daraus erhalten wir  $\varphi(z) = \varphi(g_i) \cap \varphi(g_z)$ . Dies ist ein eindeutiger Schnittpunkt, da es Halbkreise senkrecht auf  $H$  sind.  $\square$



**Definition.**  $\text{Iso}^+(H) = \{\varphi : H \rightarrow H \mid \varphi \text{ ist eine orientierungserhaltende Isometrie}\}$   
Dies ist eine Gruppe unter der üblichen Komposition.

Für alle  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$  gilt  $\varphi_A \in \text{Iso}^+(H)$ . Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : SL(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \text{Iso}^+(H) \\ A &\mapsto \varphi_A \end{aligned}$$

welche ein Gruppenhomomorphismus ist:  $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$

**Theorem 2.**  $\Psi$  ist surjektiv, es gilt  $\ker(\Psi) = \left\{ \pm E = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  Insbesondere gilt  $\text{Iso}^+(H) \simeq SL(\mathbb{R}^2) / \pm E = PSL(\mathbb{R}^2)$

*Beweis.*

1.  $\ker(\Psi) = \{\pm E\}$ : Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$  mit  $\varphi_A = \text{Id}_H$ , d.h. für alle  $z \in H$   $\frac{az+b}{cz+d} = z$  bzw.  $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ . Wir folgern  $c = 0, d = a, b = 0$ . Also  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , mit  $\det(A) = a^2 = 1 \implies a = \pm 1 (A = \pm E)$

2.  $\Psi$  ist surjektiv: Sei  $\varphi \in \text{Iso}^+(H)$ . Betrachte  $\varphi(h) = \varphi(i\mathbb{R}_{>0}) \subset H$ . Aus obigen Ausführungen wissen wir, dass eine Möbiustransformation  $\varphi_A$  existiert mit  $\varphi_A(h) = \varphi(h)$ . Daraus folgt  $\underbrace{\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi(h)}_{\in \text{Iso}^+(H)} = h$ . Nach einer Streckung  $\varphi_B(z) = \lambda z$

gilt sogar  $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi(i) = i$ . Es kann sein, dass  $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi$  die Geodäte  $h$  um  $180^\circ$  dreht, um den Punkt  $i$ . Entweder ist

$$\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi = \begin{cases} Id_H \implies \varphi = \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB} = \Psi(AB) \\ \varphi_C \implies \varphi = \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_{ABC} = \Psi(ABC) \end{cases}$$

□

**Konsequenz.** Isometrien von  $H$ , welche die Orientierung erhalten, sind Möbiustransformationen  $\varphi_A$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$

## 4 Distanz und Flächeninhalt

Seien  $p, q \in H$ .

**Definition.**  $d_H(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow H \text{ } C^1 \text{ mit } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$  wobei

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_H dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_H} dt$$

**Lemma 5.** Für alle  $T \geq 1$  gilt :  $d_H(i, Ti) = \log(T)$ .

*Beweis.* Betrachte zuerst die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \log(T)] &\rightarrow H \\ t &\mapsto ie^t \end{aligned}$$

Es gilt  $\gamma(0) = i, \gamma(\log(T)) = Ti$ . Berechne

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{\log(T)} \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2} \langle ie^t, ie^t \rangle} dt \\ &= \int_0^{\log(T)} 1 dt = \log(T) \end{aligned}$$

Hier wird benutzt, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$  und  $y(\gamma(t)) = e^t$ .

Sei nun  $\delta : [a, b] \rightarrow H \text{ } C^1$  mit  $\delta(a) = i, \delta(b) = T$  ein beliebiger  $C^1$ -Weg. Schreibe

$\delta(t) = x(t) + iy(t)$  mit  $\dot{\delta}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ . Schätze ab:

$$\begin{aligned}
L(\delta) &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\delta}(t), \dot{\delta}(t) \rangle_H} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\
&\geq \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{y}(t)^2}{y(t)^2}} dt \\
&= \int_a^b \left| \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \right| dt \\
&\geq \int_a^b \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = \log(y(b)) - \log(\underbrace{y(a)}_{=1}) = \log(T) - 0
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2.** Für alle  $z, w \in H$  gilt

$$\cosh(d_H(z, w)) = 1 \frac{|z - w|^2}{2 * \operatorname{im}(z) \operatorname{im}(w)}$$

Zur Erinnerung:  $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

**Bemerkungen.**

1. Für  $z = w$  gilt  $d_H(z, w) = 0$ , also  $\cosh(d_H(z, w)) = 1$ . Deshalb “+1”
2. Sei  $x \in \partial H = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Dann gilt für festes  $z \in H$ :

$$\lim_{w \rightarrow x} d_H(z, w) = +\infty$$

da  $\operatorname{im}(w) \rightarrow 0$ . “Punkte im Rand  $\partial H$  sind unendlich weit weg”

*Beweis.* Seien zunächst  $z, w \in i\mathbb{R}_{>0}$ : schreibe  $z = ia$  und  $w = ib$  mit  $a < b$ , (sonst benutze  $d_H(z, w) = d_H(w, z)$ ). Für den Weg  $\gamma : [\log(a), \log(b)] \rightarrow H$  und  $t \mapsto ie^t$ , gilt  $\gamma(\log(a)) = ia = z$ ,  $\gamma(\log(b)) = ib = w$ , und  $L(\gamma) = \log(b) - \log(a)$ . Für alle anderen Wege  $\delta : [c, d] \rightarrow H$  mit  $\delta(c) = z$  und  $\delta(d) = w$  gilt:

$$\begin{aligned}
L(\delta) &= \int_c^d \|\dot{\delta}(t)\|_H dt = \int_c^d \frac{1}{y(t)} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\
&\geq \int_c^d \frac{1}{y(t)} \sqrt{\dot{y}(t)^2} dt
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$L(\delta) \geq \int_c^d \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = [\log(y(t))]_c^d = \log(y(d)) - \log(y(c)) = \log(b) - \log(a) = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$



Wir folgern  $d_H(ia, ib) = \log(\frac{b}{a})$ . Aus allem folgt dann  $\cosh(d_H(ia, ib)) = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{a}{b}) = \frac{1}{2}\frac{b^2+a^2}{ab} = 1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}$ . Also folgt die Proposition für  $z, w \in i\mathbb{R}_{>0}$ . Für den allgemeinen Fall: Seien  $z \neq w \in H$  beliebig. Dann existiert eine Isometrie  $\varphi : H \rightarrow H$  (eine Möbiustransformation  $\varphi_A : H \rightarrow H$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ ), welche die Geodäte durch  $z, w$  auf die Geodäte  $i\mathbb{R}_{>0}$  abbildet (siehe oben).

Insbesondere gilt  $\varphi(z) = ia$  und  $\varphi(w) = ib$ . Wir bemerken, dass

$$d_H(z, w) = d_H(\varphi(z), \varphi(w)) = d_H(ia, ib)$$

gilt (da  $\varphi$  eine Isometrie). Falls wir zeigen können, dass  $\varphi$  auch den Ausdruck

$$1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{im}(z) \operatorname{im}(w)}$$

erhält, dann sind wir fertig! Es reicht, dies für Möbiustransformationen des Typs 1 bis 3 zu zeigen.

1.  $z \mapsto z + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) invariant, da Differenz
2.  $z \mapsto \lambda z$  ( $\lambda > 0$ ) ok, da  $|\lambda z - \lambda w|^2 = \lambda^2 |z - w|^2$ ,  $\operatorname{im}(\lambda a) = \lambda \operatorname{im}(a)$
3.  $z \mapsto -\frac{1}{z}$  Die letzte Transformation ist ok, da

$$1 + \frac{|-\frac{1}{z} + \frac{1}{w}|^2}{2 \operatorname{im}(-\frac{1}{z}) \operatorname{im}(-\frac{1}{w})} = 1 + \frac{\frac{|w-z|^2}{|z|^2 |w|^2}}{2 \frac{\operatorname{im}(z)}{|z|^2} \frac{\operatorname{im}(w)}{|w|^2}} = 1 + \frac{|w - z|^2}{2 \operatorname{im}(z) \operatorname{im}(w)}$$

□

## Flächeninhalt

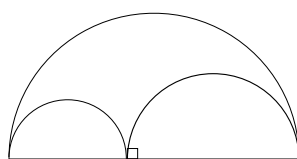
Sei  $\Delta \in H$  ein geodätisches Dreieck. Nach Gauss-Bonnet (lokal) gilt:

$$\int_{\Delta} K \, dA = \underbrace{\int_{\Delta} (-1) \, dA}_{\text{area}(\Delta)} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Also gilt  $\text{area}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Wir überprüfen dies durch Integration.

**Spezialfall.**  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Das heisst  $\Delta$  ist ein *ideales Dreieck* mit Eckpunkten in  $\partial H$



Ideales Dreieck mit Winkeln 0

**Behauptung.** *Es existiert eine Isometrie  $\varphi : H \rightarrow H$ , welche die Eckpunkte von  $\Delta$  auf  $-1, +1, \infty$  schickt!*

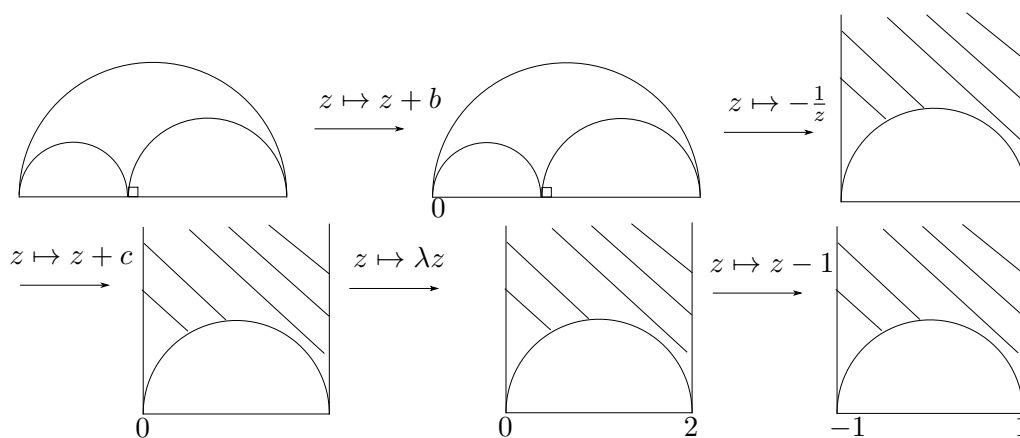


Abbildung IV.1: Beweis der Behauptung

Berechne nun den Flächeninhalt vom letzten Dreieck  $\Delta_0$

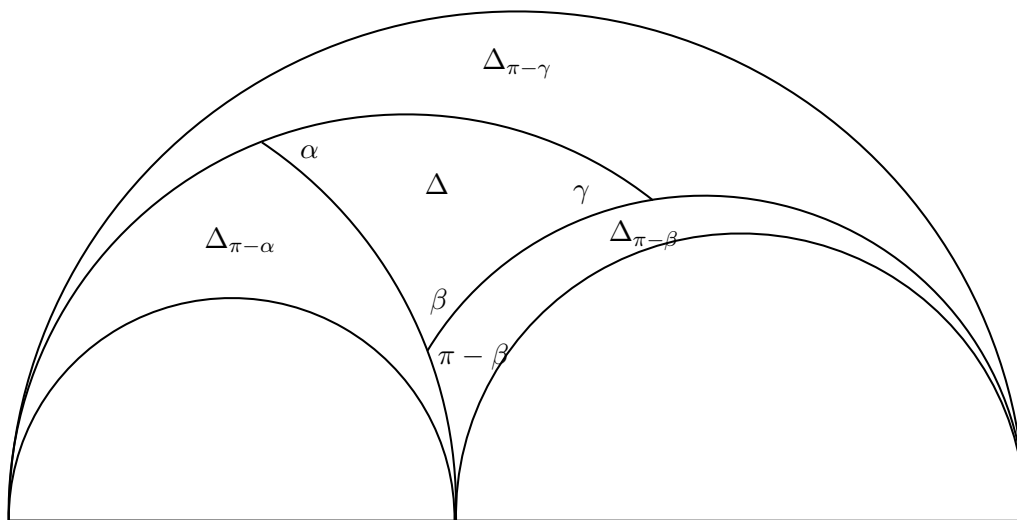
$$\begin{aligned}
 \text{area}(\Delta) &= \int_{\Delta} dA \\
 &= \int_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} \, dx dy = \int_{\Delta_0} \left( \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left( \int_{\sqrt{(1-x^2)}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi
 \end{aligned}$$

Hier wird benutzt  $\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y}$ . Ähnlich funktioniert dies für ein Dreieck  $\Delta_\alpha$  mit  $\alpha > 0$ .  
 $\beta = \gamma = 0. \implies$

$$\text{area}(\Delta_\alpha) = \int_{-1}^{\cos(\alpha)} \left( \int_{\sqrt{-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \dots = \arcsin(\cos(\alpha)) - \arcsin(-1)$$

. Wir nutzen  $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \implies \text{area}(\Delta_\alpha) = \pi - \alpha$

Im allgemeinen Fall  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  berechnen wir  $\text{area}(\Delta)$  mit folgendem Ergänzungsbild.



Allgemeiner Fall

## 5 Ausblick Teichmüllertheorie

(Nicht mehr Prüfungsrelevant)

**Erinnerung.** Sei  $\Sigma_g$  die Standardfläche vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Dann gilt  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$ . Falls auf  $\Sigma_g$  eine Metrik mit konstanter Krümmung  $K$  existiert, dann muss  $K$  negativ sein.

$$\int_{\Sigma_g} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma_g) < 0$$

Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf  $\Sigma_g$  mit  $K = -1$ .

**Lemma 6.** *In  $H$  existieren rechtwinklige Sechsecke.*

*Beweis.* Starte mit idealem Sechseck: Ziehe Eckpunkte nach oben bis die Eckpunkte rechtwinklig aufeinander sind. Alternativer Beweis via Cayleytransformation. Verklebe zwei solche Sechsecke  $S_1$  und  $S_2$  entlang dreier Seiten; erhalte eine Hose. (dies ist ein abstrakter Prozess, nicht in  $\mathbb{R}^3$ !). Dann verklebe Hosen zu geschlossenen Flächen.  $\square$