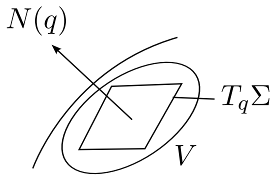
Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subset \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \to S^2$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gaussabbildung), falls für alle $p \in V$ gilt

$$N(q) \perp T_p\Sigma$$



Einheitsnormalenfeld

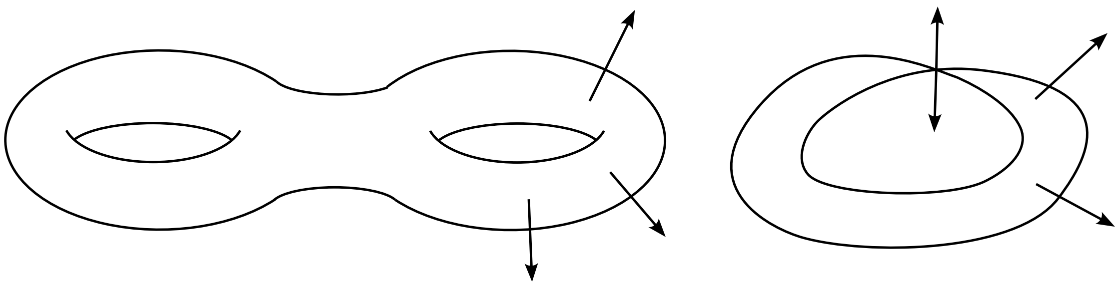
Existenz. Definiere

$$\begin{aligned} N : V &\to S^2 \\ q &\mapsto \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q, da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dann ist $N : V \to S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt : $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \to S^2$, genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche $\mathbb{R}^3$ in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \to S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.



orientierbarer Brezel, Möbiusband ist nicht orientierbar

Sei nun $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^1-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt für alle $q \in V$:

- $N(q) \perp T_q\Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)}S^2$

Wir schliessen (da in $\mathbb{R}^3$):

$$T_q\Sigma = T_{N(q)}S^2$$

Bei letzterem gilt also für alle $p \in S^2 : p \perp T_pS^2$. Falls $N : V \to S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir für alle $p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p\Sigma \to T_{N(p)}S^2 = T_p\Sigma$$

die *Weingartenabbildung.*

Definition. $K(p) = \det{(DN)_p} \in \mathbb{R}$. Die *Gausssche Krümmung* im Punkt $p \in \Sigma$

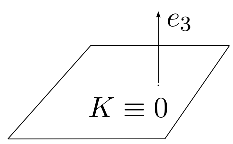
Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab, da

$$\det(-(DN)_p) = (-1)^2 \det(DN)_p$$

Beispiele.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$

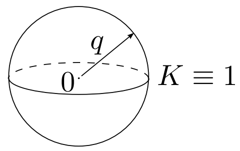
$$\begin{aligned} N : \Sigma &\to S^2 \\ q &\mapsto e_3 \qquad (\text{oder} -e_3) \end{aligned}$$



N ist konstant, also gilt für alle $q \in \Sigma$: $(DN)_q = 0, K(q) = 0$.

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)

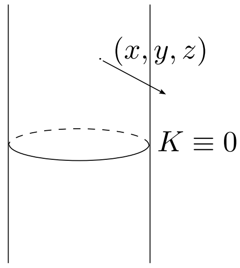
$$N : S^2 \to S^2$$
$$q \mapsto q$$



$N = Id_{S^2}$ (oder $-Id_{S^2}$), für alle $q \in S^2$ gilt also $(DN)_q = Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma$. Also $K(q) = \det(Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma) = 1$

3. $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$N : Z \to S^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$



Wir bemerken: N hängt nicht von z ab. Also gilt für alle $q \in Z$:

$$(DN)_q(e_3) = \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$$

$\implies$ 0 ist ein Eigenwert der Abbildung $(DN)_q : T_qZ \to T_qZ \implies K(q) = 0$.

Zusatz. Genauere Betrachtung des dritten Beispiels: Für $q = (x, y, z) \in Z$ gilt:

$$T_qZ = \text{span}\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^{v}\}$$

Wir bestimmen $(DN)_q \overset{(*)}{=} v$. (*) Erklärung: Die Einschränkung von N auf $S^1 \times \{0\}$ ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von $(DN)_q$ bezüglich der Basis $\{e_3, -ye_1 + xe_2\}$

Definition. Die *mittlere Krümmung* im Punkt $p \in \Sigma$ ist $H(p) = \frac{1}{2}\text{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$, welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist: $\text{Spur}(-(DN)_p) = -\text{Spur}(DN)_p$

Bemerkung. Reguläre Flächen mit $H \equiv 0$ heissen *Minimalflächen*.

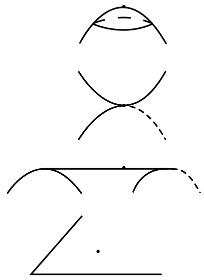
Beispiele.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ $\quad$ $K \equiv 0$ und $H \equiv 0$.

2. $\Sigma = S^2$ $\quad$ $K \equiv 1$ und $H \equiv 1 \impliedby \frac{1}{2}$ Spur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\Sigma = Z \qquad K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2} \Longleftarrow \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$

Notation. Ein Punkt $p \in \Sigma$ heisst:



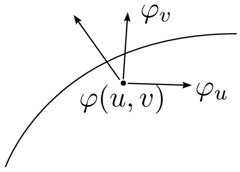
- *elliptisch*, falls $K(p) > 0$
- *hyperbolisch*. falls $K(p) < 0$ (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) = 0$

Proposition 1. *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, welche lokale C^2-Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist für alle $p \in \Sigma$ die Weingartenabbildung $(DN)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$* symmetrisch, *d.h. für alle $a, b \in T_p\Sigma$ gilt:*

$$\langle (DN)_p(a), b\rangle_p = \langle a, (DN)_p(b)\rangle_p$$

Beweis. Es reicht, dies für die Basisvektoren $a = \varphi_u(p)$ und $b = \varphi_v(p)$ zu prüfen! Sei $\varphi : U \to \Sigma$ eine C^2-Parametrisierung mit $p \in \varphi(U)$. Betrachte die Komposition $N \circ \varphi : U \to S^2$. Für alle $q = (u, v) \in U$ gilt:

$$\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v)\rangle_{\varphi(u,v)} = 0 \text{ bzw. } \langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_v(u, v)\rangle_{\varphi(u,v)} = 0 \quad (*)_{\substack{u\\v}}$$



Notation.

$$N_u(u, v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u, v)) = \frac{d}{du}(N \circ \varphi)(u, v)$$
$$N_v(u, v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u, v)) = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi)(u, v)$$

und

$$\frac{d}{du}(*)_v : \qquad \langle N_u, \varphi_v\rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v (\varphi \text{ ist } C^2)}\rangle \qquad = 0$$

$$\frac{d}{dv}(*)_u : \qquad \langle N_v, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{vu}\rangle \qquad = 0$$

Also: φ ist $C^2 \implies \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S. von Schwarz}}}{\varphi_{uv}=\varphi_{vu}} \implies \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$.

Ausgeschrieben:

$$\langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle = \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)), \varphi_u(u,v) \rangle$$

□

Korollar 1. $(DN)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ *lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren.*

Bemerkung. Im Beweis haben wir die Annahme ($\varphi : U \to \Sigma$ ist C^2) benutzt: φ_{uv} ist vorgekommen. Diese Anname ist essenziell, damit $N : \varphi(U) \to S^2$ differenzierbar ist. Tatsächlich gilt

$$N(\varphi(u,v)) = \pm \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

Wir benutzen, dass φ_u und φ_v differenzierbar sind, dass heisst $\varphi : U \to \Sigma$ ist zweimal differenzierbar.

Beispiel. Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

f ist stetig differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ *nicht* differenzierbar. Betrachte die Fläche $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x)\} =$ "$\Gamma_f \times \mathbb{R}$", welche die globale C^1-Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \Sigma \\ (u,v) &\mapsto (u,v,f(u)) \end{aligned}$$

besitzt. Berechne

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)), \varphi_v = (0,1,0)$$

und

$$N(u,v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f'(u), 0, 1)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$$

Für $u \leq 0$ gilt: $N(u,v) = (0,0,1) = e_3$. Für $u \geq 0$ gilt: $N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u, 0, 1)$.
Versuch, $\frac{d}{du}N(0,0)$ zu berechnen:

1. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0, \varepsilon < 0} \frac{1}{\varepsilon}(\underbrace{N(\varepsilon, 0)}_{=e_3} - \underbrace{N(0,0)}_{=e_3}) = 0$

2. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon}(N(\varepsilon, 0) - N(0,0)) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon}(-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} - 1) = (2, 0, \dots) \neq e_3$

Im 2. Punkt wird genutzt, dass$\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+\frac{x}{2}}$, somit $\frac{-2\varepsilon}{1+4\varepsilon^2} \underbrace{\approx}_{\frac{1}{1+x}\approx 1-x} -2\varepsilon(1-2\varepsilon^2) \approx -2$

Also ist $N(u,v)$ an der Stelle $(0,0)$ nicht differenzierbar!

Annahme. Ab jetzt besitzen alle regulären Flächen mindestens lokale C^2-Parametrisierungen.

Korollar 2 (Zur Proposition). $(DN)_p : T_pN \to T_p\Sigma$ *lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren. D.h. Die Weingartenabbildung* $(DN)_p$ *hat zwei* orthogonale *Eigenvektoren* $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ *zu reellen Eigenwerten* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Es gilt*

$$
\begin{aligned}
K(p) &= \det((DN)_p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\
H(p) &= \frac{1}{2} Spur((DN)_p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 \cdot \lambda_2)
\end{aligned}
$$

Definition. Die von den Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ aufgespannten Richtungen heissen *Hauptkrümmungsvektoren.* Eine C^1-Kurve $\gamma : (a,b) \to \Sigma$ heisst *Krümmungslinie*, falls für alle $t \in (a,b)$ gilt:

$\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$ ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung $(DN)_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)}\Sigma \to T_{\gamma(t)}\Sigma$

Beispiele.

1. Ebene $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Hier gilt für alle $p \in E : (DN)_p = 0$, also sind die Hauptkrümmungsrichtungen nicht wohldefiniert. Alle Geraden in E sind Krümmungslinien (Sogar alle C^1-Kurven $\gamma : \mathbb{R} \to E$).

2. Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Hier gilt für alle

$$p \in Z : (DN)_p(e_3) = 0$$

also sind alle (vertikalen) Mantellinien in Z Krümmungslinien. Mehr noch: Bezüglich der Basis $\{e_3, -ye_1 + xe_2\}$ von $T_{(x,y,z)}\Sigma$ mit $(x,y,z) = p$ hat $(DN)_p$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir erhalten also eine zweite Schar von Krümmungslinien: *horizontale Kreise.* In Punkten mit $(DN)_p \neq \lambda Id_{T_p\Sigma}$ (kein vielfaches der Identität) stehen die Krümmungslinien *senkrecht* aufeinander.

1.2 Die zweite Fundamentalform

Motivation. Ziel der nächsten beiden Abschnitte:

$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}$$

wobei I_p, II_p die erste, bzw. die zweite Fundamentalform ist.

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2-reguläre Fläche, und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ eine C^2-Kurve mit $\alpha(0) = p \in \Sigma$ und $\dot\alpha(0) = v \in T_p\Sigma$.

Proposition 2. *(Satz von Mensier) Sei $N : V \to S^2$ ein lokales Einheitsnormalenfeld $(p \in V \subset \Sigma)$. Dann gilt*

$$\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$$

Insbesondere hängt die normale *Beschleunigungskomponente $\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle$ nur von $p = \alpha(0)$ und $v = \dot{\alpha}(0)$ ab.*

Beweis. Für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt:

$$\langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \qquad \text{(per Definition von } T_p\Sigma \text{ und } N(p))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ableiten nach } t}}{\iff} \langle \ddot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle \dot{\alpha}(t), \underbrace{\frac{d}{dt} N(\alpha(t))}_{(DN)_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))} \rangle = 0$$

Für $t = 0$ erhalten wir

$$\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$$

□

Definition. Die *zweite Fundamentalform* von Σ an der Stelle p ist die Abbildung

$$\begin{aligned} II_p : T_p\Sigma &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto -\langle v, (DN)_p(v) \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Vorzeichen von II_p hängt von N ab. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar ist, dann lässt sich eine globale Wahl von N fixieren (Wahl einer Orientierung).

Erinnerung. Die erste Fundamentalform, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ hat bezüglich jeder lokalen Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$ eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$, bezüglich der Basis $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ von $T_p\Sigma$. $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

Koeffizienten für II_p:

- $e = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$ da $(DN)_{\varphi(u,v)}$ symmetrisch.
- $g = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle$

Notation.

$$N_u = \frac{d}{du}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)$$

$$N_v = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)$$

Wir erhalten also mit $\langle \varphi_u, N\rangle = 0$ und ableiten nach $u : \langle \varphi_{uu}, N\rangle + \langle \varphi_u, N_u\rangle = 0$, analog für v

- $e = -\langle \varphi_u, N_u\rangle = \langle \varphi_{uu}, N\rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, N_v\rangle = \langle \varphi_{uv}, N\rangle$ $\qquad \langle \varphi_u, N\rangle = 0$ nach v ableiten
- $g = -\langle \varphi_v, N_v\rangle = \langle \varphi_{vv}, N\rangle$ $\qquad \langle \varphi_v, N\rangle = 0$ nach v ableiten

Beispiel. Funktionsgraph von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (C^2)
$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$. Globale C^2-Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \Gamma_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned}
&\varphi_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)) \\
&\varphi_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)) \\
&\varphi_{uu}(u, v) = (0, 0, f_{uu}(u, v)) \\
&\varphi_{uv}(u, v) = \varphi_{vu}(u, v) = (0, 0, \underbrace{f_{uv}}_{=f_{vu}}) \\
&\varphi_{vv}(u, v) = (0, 0, f_{vv}(u, v)) \\
&N(\varphi(u, v)) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
&e = \langle \varphi_{uu}, N\rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
&f = \langle \varphi_{uv}, N\rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
&g = \langle \varphi_{vv}, N\rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}
\end{aligned}$$

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^2-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ das dazugehörige normale Einheitsfeld.
Schreibe die Abbildungsmatrix von $(DN)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma = T_{N(p)}S^2$ bezüglich der Basis $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ von $T_p\Sigma : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, d.h.

$$(DN)_p(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$(DN)_p(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Bemerkung. Falls φ_u und φ_v nicht orthogonal sind, dann gilt im Allgemeinen $a_{12} \neq a_{21}$.

Lemma 1. *Mit den oben eingeführten Koeffizienten gilt:*

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{(DN)_p^T} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)\rangle \\
&= -\langle \varphi_u, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v\rangle \\
&= -a_{11}E - a_{21}F \\
f &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)\rangle = \cdots = -a_{11}F - a_{21}G \\
f &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)\rangle = \cdots = -a_{12}E - a_{22}F \\
g &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)\rangle = \cdots = -a_{12}F - a_{22}G
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det II_p}{\det I_p}$$

(Alle Koeffizienten sind vom Punkt (u,v) abhängig!)

Beweis.

$$\det(DN)_p = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \left(- \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right)$$

und $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$ □

Beispiel. Rotationstorus $T \subset \mathbb{R}^3$ mit Radien $0 < a < b$. Lokale C^∞-Parametrisierung $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to T$:

$$\varphi(u,v) = ((b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), a \cdot \sin(u))$$

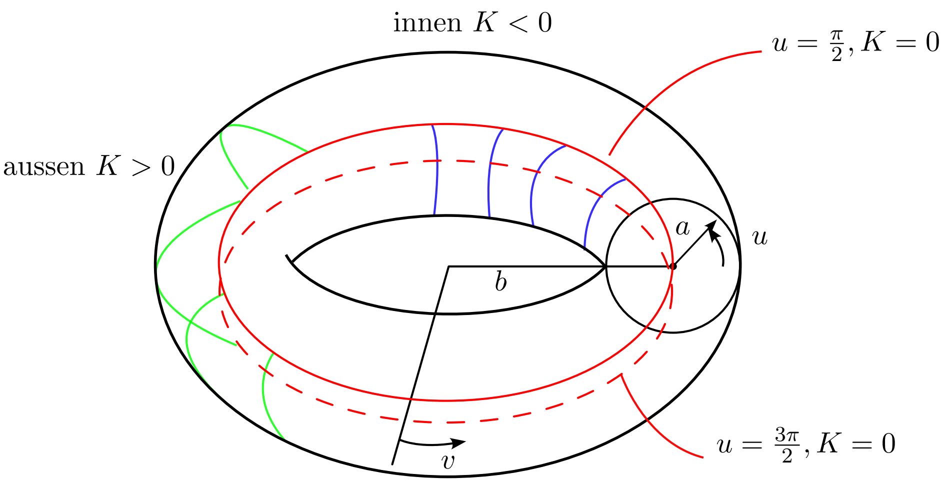
Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi_u(u,v) &= (-a \cdot \sin(u)\cos(v), -a \cdot \sin(u)\sin(v), a \cdot \cos(u)) \\
\varphi_v(u,v) &= (-(b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), 0) \\
\varphi_{uu} &= \ldots \\
\varphi_{uv} &= \ldots \\
\varphi_{vv} &= \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\ E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2 \\
F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\
G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (b + a \cdot \cos(u))^2 \\
N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||} =_{\text{siehe Flächeninhalt}} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{a(b + a \cdot \cos(u))}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\ e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = ||\varphi_{uu}|| = a \\
&\text{dies da } \varphi_{uu} \text{ und } N \text{ parallel sind.} \\
f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\
g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \textit{(Komplizierte einfache Rechnung)} \\
&= \cos(u) \cdot (b + a \cdot \cos(u))
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\ K(\varphi(u, v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{\cos(u)}{\underbrace{a}_{>0}\underbrace{(b + a \cdot \cos(u))}_{>0 \text{ da } b>a}}
$$



Bemerkung. Es gilt

$$
K(\varphi(u, v)) \begin{cases} > 0 & u < \frac{\pi}{2} \text{ oder } u > \frac{3\pi}{2} \\ = 0 \text{ falls} & u = \frac{\pi}{2} \text{ oder } u = \frac{3\pi}{2} \\ < 0 & u > \frac{\pi}{2} \text{ und } u < \frac{3\pi}{2} \end{cases}
$$

Anwendung (Krümmung von Funktionsgraphen)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 und $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = f(x,y)\}$. Mit der lokalen Parametrisierung $\varphi(u,v) = (u,v,f(u,v))$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_u)\rangle = -\langle \varphi_u, N_u\rangle = \langle \varphi_{uu}, N\rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \\
f &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_v)\rangle = -\langle \varphi_u, N_v\rangle = \langle \varphi_{uv}, N\rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \\
g &= -\langle \varphi_v, (DN)_p(\varphi_v)\rangle = -\langle \varphi_v, N_v\rangle = \langle \varphi_{vv}, N\rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}
\end{aligned}$$

Berechne $E = \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle$ und erhalte

$$K(\varphi(u,v)) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}$$

Bemerkung. $f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2 = \det(Hf)_{(u,v)}$ mit $Hf =$ Hessische Matrix $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}$

Folgerung:

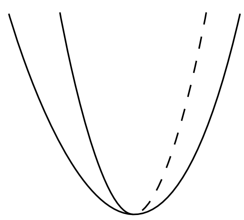
$$\begin{aligned}
K(\varphi(u,v)) > 0 &\iff \det(Hf)_{(u,v)} > 0 \\
K(\varphi(u,v)) = 0 &\iff \det(Hf)_{(u,v)} = 0 \\
K(\varphi(u,v)) < 0 &\iff \det(Hf)_{(u,v)} < 0
\end{aligned}$$

In einem kritischen Punkt p von f (d.h. $(Df)_p = 0$) ist die Krümmung $K = \det(Hf)_p$.

Beispiele.

1. $f(x,y) = x^n + y^m$ mit $n, m \geq 2$.
   Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$
$$\implies K(\varphi(0,0)) = K(0) = 0 \text{ falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3$$
$$\implies K(\varphi(0,0)) = K(0) = 4 \text{ falls } m = 2 \text{ und } n = 2$$



Graph mit $n = m = 2$

Alternative $f(x,y) = -(x^2+y^2) \implies K(0) = 4$

2. $f(x,y) = x^n - y^n$ mit $n, m \geq 2$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & -m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$\implies K(0) = \begin{cases} 0 & m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ -4 & m = n = 2 \end{cases}$$

Hier gilt $K(\varphi(u,v)) = \dfrac{-4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} = -\dfrac{4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} < 0$

Wir folgern $\lim\limits_{u \to \pm\infty} K(\varphi(u,v)) = 0$, ebenso $\lim\limits_{v \to \infty} K(\varphi(u,v)) = 0$.

Frage. Existiert $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2, so dass Γ_f konstant -1 gekrümmt ist?

Antwort. Nein! (Hilbert 1901)
Im Spezialfall $f(x,y) = g(x) + h(y)$ mit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2 können wir "elementar" zeigen, dass Γ_f nicht konstant -1 gekrümmt sein kann (vergleiche Serie 6). Mit der obigen Formel erhalten wir

$$K(\varphi(u,v)) = \frac{g_{uu} \cdot h_{vv}}{(1 + g_u^2 + h_v^2)^2} \overset{!}{=} -1$$

$\implies g_{uu} \cdot h_{vv} < 0$
Annahme: $h_{vv} < 0, g_{uu} > 0$ (für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ da h, g stetig)
Fixiere (ein beliebiges) $v \in \mathbb{R}$ und erhalte eine Differentialgleichung für g der Form

$$\frac{g_{uu} \cdot a}{(1 + g_u^2 + b^2)} = -1$$

mit $a = h_{vv}(v) < 0$ und $b = h_v(v)^2 \geq 0$

$$\implies g_{uu} = \underbrace{-\frac{1}{a}}_{>0 \text{ und } =:c} (1 + g_u^2 + b)^2 = c \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 > c \cdot (1 + 2g_u^2)$$

Schreibe $s(u) = g_u(u) \implies s' > c(1 + 2s^2)$ (evtl. reicht sogar $s' > 2s^2$)
Wir lösen die Differentialgleichung $s' = c \cdot (1 + 2s^2)$ und bemerken, dass diese in endlicher Zeit divergiert.

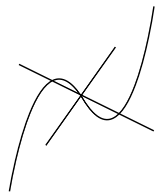
Beispiel (nach Analysis 2)**.** $s' = s^2$
Lösung zur Anfangsbedingung: $s(0) = 1 : s(t) = \frac{1}{1-t}$. Divergiert für $t \to 1$.

Rotationsflächen

Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine C^2-Kurve. Schreibe

$$\gamma(t) = (r(t), h(t))$$

mit $r(t)$ der Rotation und $h(t)$ der Höhe. Wir treffen folgende Annahmen:



nicht erlaubt

1. $r(t) > 0$
2. $h'(t) > 0$
3. $||\dot{\gamma}(t)|| = 1$, d.h. $\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2 = 1$ ("γ ist nach Bogenlänge parametrisiert")

Konstruiere eine Rotationsfläche mit folgender Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) &\to \Sigma \\ (u, v) &\mapsto (r(u)\cos(v), r(u)\sin(v), h(u)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (r'(u)\cos(v), r'(u)\sin(v), h'(u)) \\ \varphi_v &= (-r(u)\sin(v), r(u)\cos(v), 0) \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Einheitsnormalenfeld:

$$N(\varphi(u, v)) = (-h'(u)\cos(v), -h'(u)\sin(v), r'(u))$$

Kontrolle:

- $||N|| = 1$, d.h. $\langle N, N \rangle = 1$ (ok, da $h'(u)^2 + r'(u)^2 = 1$)
- $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ (ok)
- $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ (ok)

Berechne

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 \text{ (da } h'^2 + r'^2 = 1) \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = r(u)^2 \end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = h''(u)r'(u) - h'(u)r''(u) \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = r(u)h'(u) \end{aligned}$$

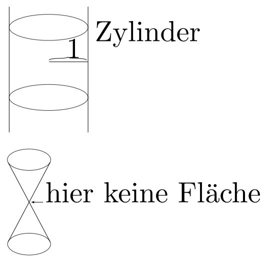
$$\implies K(\varphi(u,v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(h''r' - h'r'') \cdot r \cdot h'}{r^2}$$
$$= \frac{1}{r} \cdot (h''r'h' - r''h'^2) = \frac{1}{r} \cdot (-r'^2 r'' - h'^2 r'') = -\frac{r''(u)}{r(u)}$$

Hierbei wurde genutzt, dass $r'^2 + h'^2 = 1 \implies 2r'r'' + 2h'h'' = 0$. Wir schliessen, dass $K(\varphi(u,v))$ nicht von v abhängig ist!

Spezialfall (Rotationsflächen mit konstanter Krümmung)**.**

1. $K = 0$, d.h. $r''(u) = 0$ ($\implies r(u) = a \cdot u + b$). Anfangsbedingungen

   - $r(0) = 1$
   - $r'(0) = 0$
   - $h(0) = 0$

   $\implies r(u) = 1, h(u) = u$ mit $r'^2 + h'^2 = 1$ und $h' > 0 \implies h' = 1$
   Variation der Anfangsbedingung: $r'(0) = a \neq 0$ führt zu einem Kreiskegel: (Betrachte hier $\gamma : (x, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ statt $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$)

2. $K = 1$, d.h. $r'' = -r$ Anfangsbedingungen

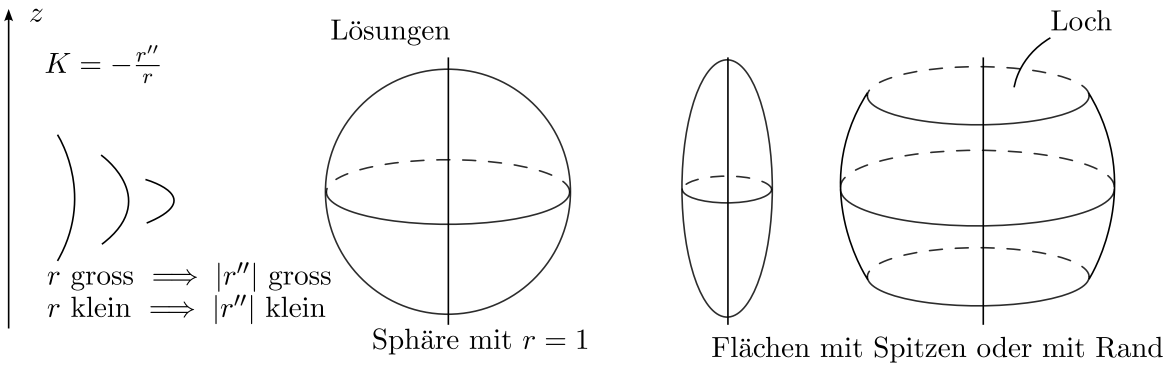
   - $r(0) = 1$
   - $r'(0) = 0$
   - $h(0) = 0$

   $\implies r(u) = \cos(u), h(u) = \sin(u)$. Einheitsspähre S^2. Variation der Anfangsbedingung führt zu vertikal verschobenen Einheitssphären, oder keiner Lösung;

   Beispiel. $r(0) = 2,\ r'(0) = 0,\ h(0) = 0 \implies$

   - $r(u) = 2\cos(u)$
   - $h(u) = \int_0^u h'(x)dx = \int_0^u \sqrt{1 - 4(\sin(x))^2}dx$

   mit $r'^2 + h'^2 = 1$, hierbei handelt es sich um ein elliptisches Integral, nicht ausdrückbar durch elementare Funktionen.



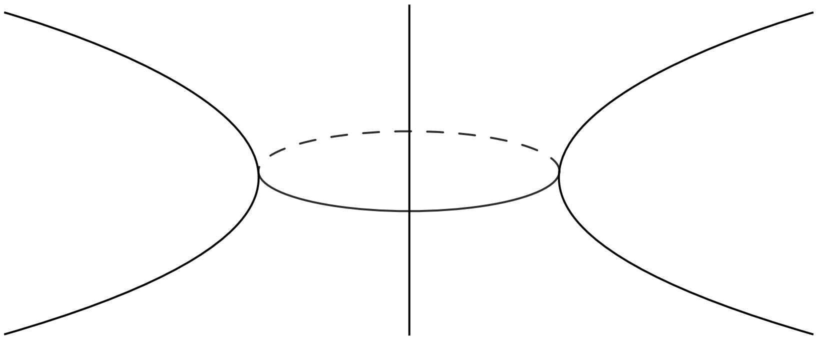
3. $K = -1$, d.h. $r'' = r$. Anfangsbedingungen

   - $r(0) = 1$
   - $r'(0) = 0$
   - $h(0) = 0$

   $\implies r(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \cosh(u),\ h(u) = \dots$
   Es gilt:

   $$r'(u) = \cosh(u)' = \sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \overset{u \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$$

   Folglich existiert auch hier die Fläche Σ nur über einem gewissen Interval der Form $(-h_0, h_0)$. (vgl. Serie 7)



1.4 Theorema Egregium

Ziel. Die Krümmung ist durch die Koeffizientenfunktionen E, F, G bestimmt. Genauer: durch E, F, G und ihre Ableitungen bestimmt.

Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^2-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ die zugehörige lokale Gaussabbildung. Für alle $p \in V$ gilt.

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Matrix von $(DN)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ bezüglich der Basis

$$\{\varphi_u, \varphi_v\} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dass heisst

$$N_u = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$
$$N_v = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Es gilt: $e = \langle \varphi_{uu}, N\rangle, f = \langle \varphi_{uv}, N\rangle, g = \langle \varphi_{vv}, N\rangle$ und wir folgern:

$$\varphi_{uu} - eN \perp N \implies \varphi_{uu} - eN \in \operatorname{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$$

Ähnlich existieren eindeutige Koeffizienten $\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22} \in \mathbb{R}$ sogenannte Christoffelsymbole, mit

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= eN + \Gamma^1_{11} \cdot \varphi_u + \Gamma^2_{11} \cdot \varphi_v \\
\varphi_{uv} &= fN + \Gamma^1_{12} \cdot \varphi_u + \Gamma^2_{12} \cdot \varphi_v \\
\varphi_{vv} &= gN + \Gamma^1_{22} \cdot \varphi_u + \Gamma^2_{22} \cdot \varphi_v
\end{aligned}$$

Berechne nun

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_u\rangle}_{=E})\right) = \frac{1}{2}E_u$$

und

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v\rangle = \frac{\partial}{\partial u}\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle}_{=F} - \langle \varphi_u, \varphi_{uv}\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \qquad \left(\frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_u, \varphi_u\rangle = 2\cdot\langle \varphi_u, \varphi_{vu}\rangle\right)$$

Anderseits gilt nach obrigen Ansatz für $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$ auch

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{uu}, \varphi_u\rangle &= \Gamma^1_{11} \cdot E + \Gamma^2_{11} \cdot F \\
\langle \varphi_{uu}, \varphi_v\rangle &= \Gamma^1_{11} \cdot F + \Gamma^2_{11} \cdot G
\end{aligned}$$

die Gleichheiten folgt jeweils aus $\langle N, \varphi_u\rangle$

$$\implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v\end{pmatrix}$$

Analog erhalten wir via φ_{uv} und φ_{vv}

- $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v\end{pmatrix}$

Beachte hier: $\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} = EG - F^2 > 0$, da I_p positiv definit ist.

Konsequenz. Die Γ^k_{ij} sind durch E, F, G und ihre partiellen Ableitungen bestimmt. K ist durch E, F, G bestimmt.

Erinnerung.

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= eN + \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v \\
\varphi_{uv} &= fN + \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v \\
\varphi_{vv} &= gN + \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v
\end{aligned}$$

Via $\langle\varphi_{uu},\varphi_u\rangle$ etc, erhalten wir Γ^k_{ij} als Funktion von E, F, G und ihren ersten partiellen Ableitungen.

Lemma 2. *Sei $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^3-Parametrisierung. Dann gilt $\forall p \in V$:*

$$-EK = (\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\cdot\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\cdot\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\cdot\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\cdot\Gamma^2_{12}$$

Korollar 4 (Theorema Egregium, Gauss 1827)**.** *Die Krümmung K lässt sich durch E, F, G und deren zwei partiellen Ableitungen ausdrücken.*

Beweis des Korollars. Es gilt $E = \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle > 0$ da $I_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ positiv definit ist.

$$\implies K = -\frac{1}{E}(\dots)$$

wobei die ... ein Ausdruck in Γ^k_{ij} und erste partielle Ableitungen, also Ausdruck in E, F, G und zweite partielle Ableitungen sind. □

Bemerkung. Das Korollar gilt auch für Flächen der Regularität C^2.

Beweis Lemma. Wir berechnen $\varphi_{vuu} = \varphi_{uuv}$

1.
$$\varphi_{vuu} = \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_{uu}) = e_v N + e \underbrace{N_v}_{a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v} + (\Gamma^1_{11})_v\varphi_u + \Gamma^1_{11}\varphi_{vu} + (\Gamma^2_{11})_v\varphi_v + \Gamma^2_{11}\varphi_{vv}$$

2.
$$\varphi_{uuv} = \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_{uv}) = f_u N + f \underbrace{N_u}_{a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v} + (\Gamma^1_{12})_u\varphi_u + \Gamma^1_{12}\varphi_{uu} + (\Gamma^2_{12})_u\varphi_v + \Gamma^2_{12}\varphi_{uv}$$

Die φ_v-Komponente von φ_{vuu} und φ_{uuv} ist gleich, also

$$e\cdot a_{22} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} = f\cdot a_{21} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} \quad (*)$$

(Benutze $\varphi_{uv} = fN + \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v$, etc.)

Erinnerung.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = -(a_{ij})^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \underset{K=\det(a_{ij})}{=} -\frac{1}{K}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\implies E = -\frac{1}{K}(a_{22}e - a_{21}f)$$

bzw. $-EK = a_{22}e - a_{21}f$ (gilt auch für $K = 0$)

$$\implies -EK \overset{(*)}{=} 6 \text{ Terme in } \Gamma^k_{ij} \text{ (siehe Lemma)}$$

□

Bemerkung. Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für $-FK$ und $-GK$.