

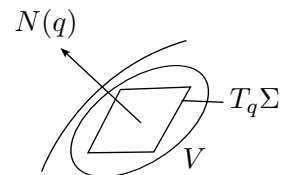
# Kapitel 1

## Die Geometrie der Gaussabbildung

### 1.1 Gaussabbildung

**Definition.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche und  $V \subset \Sigma$  offen. Eine stetige Abbildung  $N : V \rightarrow S^2$  heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gaussabbildung), falls für alle  $p \in V$  gilt

$$N(q) \perp T_p \Sigma$$



Einheitsnormalenfeld

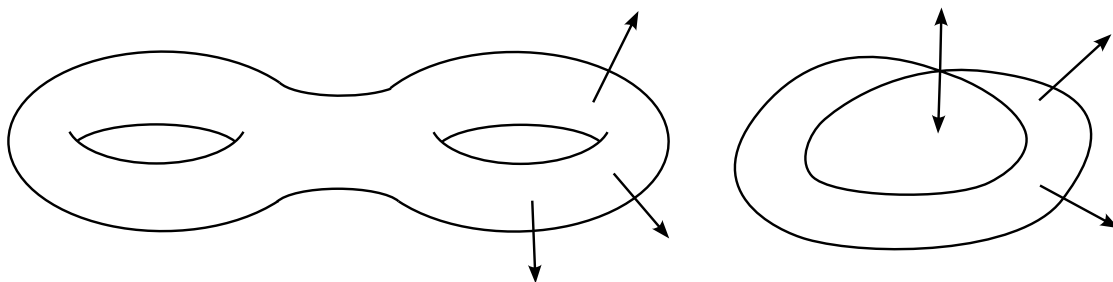
**Existenz.** Definiere

$$N : V \rightarrow S^2$$
$$q \mapsto \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in  $q$ , da  $\varphi_u$  und  $\varphi_v$  stetig sind.

**Eindeutigkeit.** Falls  $V$  zusammenhängend ist, dann ist  $N : V \rightarrow S^2$  bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt :  $\pm N$ .

**Bemerkung.** Falls  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld  $N : \Sigma \rightarrow S^2$ , genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche  $\mathbb{R}^3$  in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  gilt: Es existiert  $N : \Sigma \rightarrow S^2$  stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn  $\Sigma$  *orientierbar* ist.



orientierbarer Brezel, Möbiusband ist nicht orientierbar

Sei nun  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung und  $N : V \rightarrow S^2$  eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt für alle  $q \in V$ :

- $N(q) \perp T_q \Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)} \Sigma$

Wir schliessen (da in  $\mathbb{R}^3$ ):

$$T_q \Sigma = T_{N(q)} S^2$$

Bei letzterem gilt also für alle  $p \in S^2 : p \perp T_p S^2$ . Falls  $N : V \rightarrow S^2$  sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir für alle  $p \in V$  eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{N(p)} S^2 = T_p \Sigma$$

die *Weingartenabbildung*.

**Definition.**  $K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$ . Die *Gauss'sche Krümmung* im Punkt  $p \in \Sigma$

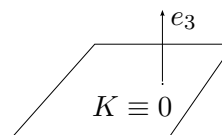
**Bemerkung.**  $K(p)$  hängt nicht von der Wahl von  $N$  ab, da

$$\det(-(DN)_p) = (-1)^2 \det(DN)_p$$

**Beispiele.**

$$1. \Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} N : \Sigma &\rightarrow S^2 \\ q &\mapsto e_3 \quad (\text{oder } -e_3) \end{aligned}$$

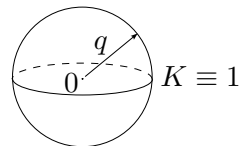


$N$  ist konstant, also gilt für alle  $q \in \Sigma$ :  $(DN)_q = 0, K(q) = 0$ .

2.  $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$  (Einheitssphäre)

$$N : S^2 \rightarrow S^2$$

$$q \mapsto q$$

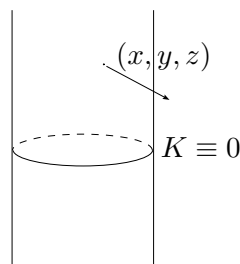


$N = Id_{S^2}$  (oder  $-Id_{S^2}$ ), für alle  $q \in S^2$  gilt also  $(DN)_q = Id : T_q\Sigma \rightarrow T_q\Sigma$ . Also  $K(q) = \det(Id : T_q\Sigma \rightarrow T_q\Sigma) = 1$

3.  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$N : Z \rightarrow S^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$



Wir bemerken:  $N$  hängt nicht von  $z$  ab. Also gilt für alle  $q \in Z$  :

$$(DN)_q(e_3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$$

$\implies 0$  ist ein Eigenwert der Abbildung  $(DN)_q : T_qZ \rightarrow T_qZ \implies K(q) = 0$ .

**Zusatz.** Genauere Betrachtung des dritten Beispiels: Für  $q = (x, y, z) \in Z$  gilt:

$$T_qZ = \text{span}\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^v\}$$

Wir bestimmen  $(DN)_q \stackrel{(*)}{=} v$ . (\*) Erklärung: Die Einschränkung von  $N$  auf  $S^1 \times \{0\}$  ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von  $(DN)_q$  bezüglich der Basis  $\{e_3, -ye_1 + xe_2\}$

**Definition.** Die *mittlere Krümmung* im Punkt  $p \in \Sigma$  ist  $H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$ , welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist:  $\text{Spur}(-(DN)_p) = -\text{Spur}(DN)_p$

**Bemerkung.** Reguläre Flächen mit  $H \equiv 0$  heissen *Minimalflächen*.

**Beispiele.**

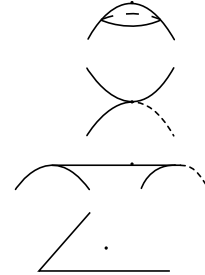
1.  $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$   $K \equiv 0$  und  $H \equiv 0$ .

2.  $\Sigma = S^2$   $K \equiv 1$  und  $H \equiv 1 \iff \frac{1}{2} \text{Spur} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$3. \Sigma = Z \quad K \equiv 0 \text{ und } H \equiv \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$$

**Notation.** Ein Punkt  $p \in \Sigma$  heisst:

- *elliptisch*, falls  $K(p) > 0$
- *hyperbolisch*, falls  $K(p) < 0$  (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls  $K(p) = 0$  und  $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls  $K(p) = 0$  und  $H(p) = 0$

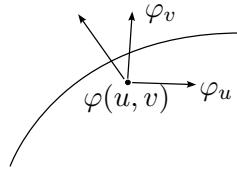


**Proposition 1.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche, welche lokale  $C^2$ -Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist für alle  $p \in \Sigma$  die Weingartenabbildung  $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$  symmetrisch, d.h. für alle  $a, b \in T_p \Sigma$  gilt:

$$\langle (DN)_p(a), b \rangle_p = \langle a, (DN)_p(b) \rangle_p$$

*Beweis.* Es reicht, dies für die Basisvektoren  $a = \varphi_u(p)$  und  $b = \varphi_v(p)$  zu prüfen! Sei  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine  $C^2$ -Parametrisierung mit  $p \in \varphi(U)$ . Betrachte die Komposition  $N \circ \varphi : U \rightarrow S^2$ . Für alle  $q = (u, v) \in U$  gilt:

$$\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)} = 0 \text{ bzw. } \langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)} = 0 \quad (*)_v$$



**Notation.**

$$N_u(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v)) = \frac{d}{du}(N \circ \varphi)(u, v)$$

$$N_v(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_v(u, v)) = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi)(u, v)$$

und

$$\frac{d}{du}(* )_v : \quad \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v(\varphi \text{ ist } C^2)} \rangle = 0$$

$$\frac{d}{dv}(* )_u : \quad \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$$

Also:  $\varphi$  ist  $C^2 \implies \varphi_{uv} = \varphi_{vu} \implies \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$ .

$\uparrow$

S. von Schwarz

Ausgeschrieben:

$$\langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle = \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)), \varphi_u(u,v) \rangle$$

□

**Korollar 1.**  $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$  lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren.

**Bemerkung.** Im Beweis haben wir die Annahme ( $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  ist  $C^2$ ) benutzt:  $\varphi_{uv}$  ist vorgekommen. Diese Annahme ist essenziell, damit  $N : \varphi(U) \rightarrow S^2$  differenzierbar ist. Tatsächlich gilt

$$N(\varphi(u,v)) = \pm \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

Wir benutzen, dass  $\varphi_u$  und  $\varphi_v$  differenzierbar sind, dass heißt  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  ist zweimal differenzierbar.

**Beispiel.** Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$f$  ist stetig differenzierbar, aber  $f'$  ist bei  $x = 0$  nicht differenzierbar. Betrachte die Fläche  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x)\} = "T_f \times \mathbb{R}"$ , welche die globale  $C^1$ -Parametrisierung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \\ (u, v) \mapsto (u, v, f(u))$$

besitzt. Berechne

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)), \varphi_v = (0, 1, 0)$$

und

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f'(u), 0, 1)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$$

Für  $u \leq 0$  gilt:  $N(u, v) = (0, 0, 1) = e_3$ . Für  $u \geq 0$  gilt:  $N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u, 0, 1)$ .

Versuch,  $\frac{d}{du}N(0, 0)$  zu berechnen:

1.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon < 0} \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{(N(\varepsilon, 0) - N(0, 0))}_{=e_3} = 0$
2.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} (N(\varepsilon, 0) - N(0, 0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} - 1 \right) = (2, 0, \dots) \neq e_3$

Im 2. Punkt wird genutzt, dass  $\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+\frac{x}{2}}$ , somit  $\frac{-2\varepsilon}{1+4\varepsilon^2} \underbrace{\approx}_{\frac{1}{1+x} \approx 1-x} -2\varepsilon(1-2\varepsilon^2) \approx -2$

Also ist  $N(u, v)$  an der Stelle  $(0, 0)$  nicht differenzierbar!

**Annahme.** Ab jetzt besitzen alle regulären Flächen mindestens lokale  $C^2$ -Parametrisierungen.

**Korollar 2** (Zur Proposition).  $(DN)_p : T_p N \rightarrow T_p \Sigma$  lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren. D.h. Die Weingartenabbildung  $(DN)_p$  hat zwei orthogonale Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in T_p \Sigma$  zu reellen Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$K(p) = \det((DN)_p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

**Definition.** Die von den Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in T_p \Sigma$  aufgespannten Richtungen heißen *Hauptkrümmungsvektoren*. Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma : (a, b) \rightarrow \Sigma$  heißt *Krümmungslinie*, falls für alle  $t \in (a, b)$  gilt:

$\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \Sigma$  ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung  $(DN)_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)} \Sigma \rightarrow T_{\gamma(t)} \Sigma$

**Beispiele.**

1. Ebene  $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Hier gilt für alle  $p \in E : (DN)_p = 0$ , also sind die Hauptkrümmungsrichtungen nicht wohldefiniert. Alle Geraden in  $E$  sind Krümmungslinien (Sogar alle  $C^1$ -Kurven  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ ).
2. Zylinder  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Hier gilt für alle

$$p \in Z : (DN)_p(e_3) = 0$$

also sind alle (vertikalen) Mantellinien in  $Z$  Krümmungslinien. Mehr noch: Bezüglich der Basis  $\{e_3, -ye_1 + xe_2\}$  von  $T_{(x,y,z)} \Sigma$  mit  $(x, y, z) = p$  hat  $(DN)_p$  die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Wir erhalten also eine zweite Schar von Krümmungslinien: *horizontale Kreise*. In Punkten mit  $(DN)_p \neq \lambda \text{Id}_{T_p \Sigma}$  (kein vielfaches der Identität) stehen die Krümmungslinien *senkrecht* aufeinander.

## 1.2 Die zweite Fundamentalform

**Motivation.** Ziel der nächsten beiden Abschnitte:

$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}$$

wobei  $I_p, II_p$  die erste, bzw. die zweite Fundamentalform ist.

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine  $C^2$ -reguläre Fläche, und  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  eine  $C^2$ -Kurve mit  $\alpha(0) = p \in \Sigma$  und  $\dot{\alpha}(0) = v \in T_p \Sigma$ .

**Proposition 2.** (Satz von Mensier) Sei  $N : V \rightarrow S^2$  ein lokales Einheitsnormalenfeld ( $p \in V \subset \Sigma$ ). Dann gilt

$$\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$$

Insbesondere hängt die normale Beschleunigungskomponente  $\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle$  nur von  $p = \alpha(0)$  und  $v = \dot{\alpha}(0)$  ab.

*Beweis.* Für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  gilt:

$$\begin{array}{ccc} \langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 & \text{(per Definition von } T_p\Sigma \text{ und } N(p)) \\ \iff \langle \ddot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle \dot{\alpha}(t), \underbrace{\frac{d}{dt}N(\alpha(t))}_{(DN)_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))} \rangle = 0 \\ \uparrow \\ \text{ableiten nach } t \end{array}$$

Für  $t = 0$  erhalten wir

$$\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$$

□

**Definition.** Die zweite Fundamentalform von  $\Sigma$  an der Stelle  $p$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} II_p : T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto -\langle v, (DN)_p(v) \rangle \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Das Vorzeichen von  $II_p$  hängt von  $N$  ab. Falls  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  orientierbar ist, dann lässt sich eine globale Wahl von  $N$  fixieren (Wahl einer Orientierung).

**Erinnerung.** Die erste Fundamentalform,  $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$  hat bezüglich jeder lokalen Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine Matrix  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , bezüglich der Basis  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$  von  $T_p\Sigma$ .  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ .

Koeffizienten für  $II_p$ :

- $e = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$  da  $(DN)_{\varphi(u,v)}$  symmetrisch.
- $g = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle$

**Notation.**

$$N_u = \frac{d}{du}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)$$

$$N_v = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)$$

Wir erhalten also mit  $\langle \varphi_u, N \rangle = 0$  und ableiten nach  $u$  :  $\langle \varphi_{uu}, N \rangle + \langle \varphi_u, N_u \rangle = 0$ , analog für  $v$

- $e = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle$        $\langle \varphi_u, N \rangle = 0$  nach  $v$  ableiten
- $g = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$        $\langle \varphi_v, N \rangle = 0$  nach  $v$  ableiten

**Beispiel.** Funktionsgraph von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $C^2$ )  
 $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$ . Globale  $C^2$ -Parametrisierung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Gamma_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v))\end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (1, 0, f_u(u, v)) \\ \varphi_v(u, v) &= (0, 1, f_v(u, v)) \\ \varphi_{uu}(u, v) &= (0, 0, f_{uu}(u, v)) \\ \varphi_{uv}(u, v) &= \varphi_{vu}(u, v) = (0, 0, \underbrace{f_{uv}}_{=f_{vu}}) \\ \varphi_{vv}(u, v) &= (0, 0, f_{vv}(u, v)) \\ N(\varphi(u, v)) &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}\end{aligned}$$

### 1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^2$ -Parametrisierung und  $N : V \rightarrow S^2$  das dazugehörige normale Einheitsfeld.

Schreibe die Abbildungsmatrix von  $(DN)_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma = T_{N(p)}S^2$  bezüglich der Basis

$\{\varphi_u, \varphi_v\}$  von  $T_p\Sigma : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , d.h.

$$(DN)_p(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$(DN)_p(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$



**Bemerkung.** Falls  $\varphi_u$  und  $\varphi_v$  nicht orthogonal sind, dann gilt im Allgemeinen  $a_{12} \neq a_{21}$ .

**Lemma 1.** Mit den oben eingeführten Koeffizienten gilt:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{(DN)_p^T} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

*Beweis.* Berechne

$$\begin{aligned} e &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle \\ &= -\langle \varphi_u, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \rangle \\ &= -a_{11}E - a_{21}F \\ f &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle = \dots = -a_{11}F - a_{21}G \\ f &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}E - a_{22}F \\ g &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}F - a_{22}G \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.**

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det II_p}{\det I_p}$$

(Alle Koeffizienten sind vom Punkt  $(u, v)$  abhängig!)

*Beweis.*

$$\det(DN)_p = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \left( - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

und  $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$

□

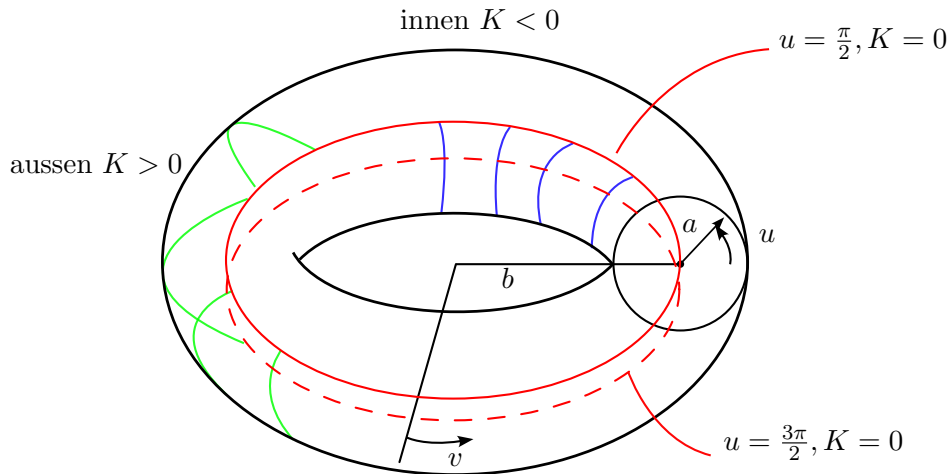
**Beispiel.** Rotationstorus  $T \subset \mathbb{R}^3$  mit Radien  $0 < a < b$ . Lokale  $C^\infty$ -Parametrisierung  $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T$ :

$$\varphi(u, v) = ((b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), a \cdot \sin(u))$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (-a \cdot \sin(u) \cos(v), -a \cdot \sin(u) \sin(v), a \cdot \cos(u)) \\ \varphi_v(u, v) &= (-(b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), 0) \\ \varphi_{uu} &= \dots \\ \varphi_{uv} &= \dots \\ \varphi_{vv} &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2 \\
F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\
G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (b + a \cdot \cos(u))^2 \\
N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \stackrel{\text{siehe Flächeninhalt}}{=} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{a(b + a \cdot \cos(u))} \\
\Rightarrow e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \|\varphi_{uu}\| = a \\
&\text{dies da } \varphi_{uu} \text{ und } N \text{ parallel sind.} \\
f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\
g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = (\text{Komplizierte einfache Rechnung}) \\
&= \cos(u) \cdot (b + a \cdot \cos(u)) \\
\Rightarrow K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \underbrace{\frac{\cos(u)}{a}}_{>0} \underbrace{(b + a \cdot \cos(u))}_{>0 \text{ da } b > a}
\end{aligned}$$



**Bemerkung.** Es gilt

$$\begin{array}{ll}
K(\varphi(u, v)) > 0 & u < \frac{\pi}{2} \text{ oder } u > \frac{3\pi}{2} \\
= 0 \text{ falls} & u = \frac{\pi}{2} \text{ oder } u = \frac{3\pi}{2} \\
< 0 & u > \frac{\pi}{2} \text{ und } u < \frac{3\pi}{2}
\end{array}$$

**Anwendung** (Krümmung von Funktionsgraphen). Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2$  und  $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ . Mit der lokalen Parametrisierung  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$  erhalten wir

$$\begin{aligned} e &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_u) \rangle = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ f &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ g &= -\langle \varphi_v, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \end{aligned}$$

Berechne  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$ ,  $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ ,  $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$  und erhalte

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

**Bemerkung.**  $f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2 = \det(Hf)_{(u,v)}$  mit  $Hf$  = Hessische Matrix  $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}$

Folgerung:

$$\begin{aligned} K(\varphi(u, v)) &> 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} > 0 \\ K(\varphi(u, v)) &= 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} = 0 \\ K(\varphi(u, v)) &< 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} < 0 \end{aligned}$$

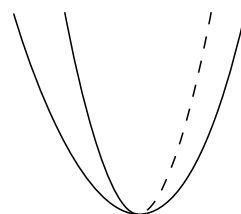
In einem kritischen Punkt  $p$  von  $f$  (d.h.  $(Df)_p = 0$ ) ist die Krümmung  $K = \det(Hf)_p$ .

**Beispiele.**

1.  $f(x, y) = x^n + y^m$  mit  $n, m \geq 2$ .

Dann gilt  $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$

$$\begin{aligned} (Hf)_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix} \\ \implies K(\varphi(0, 0)) &= K(0) = 0 \text{ falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ \implies K(\varphi(0, 0)) &= K(0) = 4 \text{ falls } m = 2 \text{ und } n = 2 \end{aligned}$$



Graph mit  $n = m = 2$

Alternative  $f(x, y) = -(x^2 + y^2) \implies K(0) = 4$

2.  $f(x, y) = x^n - y^n$  mit  $n, m \geq 2$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & -m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$\implies K(0) = \begin{cases} 0 & m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ -4 & m = n = 2 \end{cases}$$

$$\text{Hier gilt } K(\varphi(u, v)) = \frac{-4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} = -\frac{4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} < 0$$

Wir folgern  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} K(\varphi(u, v)) = 0$ , ebenso  $\lim_{v \rightarrow \infty} K(\varphi(u, v)) = 0$ .

**Frage.** Existiert  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} C^2$ , so dass  $\Gamma_f$  konstant  $-1$  gekrümmt ist?

**Antwort.** Nein! (Hilbert 1901)

Im Spezialfall  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  mit  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} C^2$  können wir “elementar” zeigen, dass  $\Gamma_f$  nicht konstant  $-1$  gekrümmt sein kann (vergleiche Serie 6). Mit der obigen Formel erhalten wir

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{g_{uu} \cdot h_{vv}}{(1 + g_u^2 + h_v^2)^2} \stackrel{!}{=} -1$$

$$\implies g_{uu} \cdot h_{vv} < 0$$

*Annahme:*  $h_{vv} < 0, g_{uu} > 0$  (für alle  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  da  $h, g$  stetig)

Fixiere (ein beliebiges)  $v \in \mathbb{R}$  und erhalte eine Differentialgleichung für  $g$  der Form

$$\frac{g_{uu} \cdot a}{(1 + g_u^2 + b^2)} = -1$$

mit  $a = h_{vv}(v) < 0$  und  $b = h_v(v)^2 \geq 0$

$$\implies g_{uu} = \underbrace{-\frac{1}{a}}_{>0 \text{ und } =: c} (1 + g_u^2 + b)^2 = c \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 > c \cdot (1 + 2g_u^2)$$

Schreibe  $s(u) = g_u(u) \implies s' > c(1 + 2s^2)$  (evtl. reicht sogar  $s' > 2s^2$ )

Wir lösen die Differentialgleichung  $s' = c \cdot (1 + 2s^2)$  und bemerken, dass diese in endlicher Zeit divergiert.

**Beispiel** (nach Analysis 2).  $s' = s^2$

Lösung zur Anfangsbedingung:  $s(0) = 1 : s(t) = \frac{1}{1-t}$ . Divergiert für  $t \rightarrow 1$ .

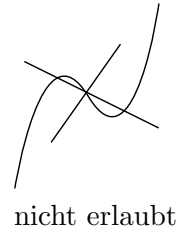
## Rotationsflächen

Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine  $C^2$ -Kurve. Schreibe

$$\gamma(t) = (r(t), h(t))$$

mit  $r(t)$  der Rotation und  $h(t)$  der Höhe. Wir treffen folgende Annahmen:

1.  $r(t) > 0$
2.  $h'(t) > 0$
3.  $||\dot{\gamma}(t)|| = 1$ , d.h.  $\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2 = 1$  ("γ ist nach Bogenlänge parametrisiert")



nicht erlaubt

Konstruiere eine Rotationsfläche mit folgender Parametrisierung:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) &\rightarrow \Sigma \\ (u, v) &\mapsto (r(u) \cos(v), r(u) \sin(v), h(u))\end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (r'(u) \cos(v), r'(u) \sin(v), h'(u)) \\ \varphi_v &= (-r(u) \sin(v), r(u) \cos(v), 0)\end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Einheitsnormalenfeld:

$$N(\varphi(u, v)) = (-h'(u) \cos(v), -h'(u) \sin(v), r'(u))$$

Kontrolle:

- $||N|| = 1$ , d.h.  $\langle N, N \rangle = 1$  (ok, da  $h'(u)^2 + r'(u)^2 = 1$ )
- $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$  (ok)
- $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$  (ok)

Berechne

$$\begin{aligned}E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 \quad (\text{da } h'^2 + r'^2 = 1) \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = r(u)^2\end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned}e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = h''(u)r'(u) - h'(u)r''(u) \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = r(u)h'(u)\end{aligned}$$

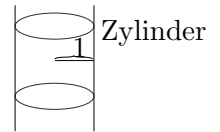
$$\begin{aligned}\Rightarrow K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(h''r' - h'r'') \cdot r \cdot h'}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (h''r'h' - r''h'^2) = \frac{1}{r} \cdot (-r'^2r'' - h'^2r'') = -\frac{r''(u)}{r(u)}\end{aligned}$$

Hierbei wurde genutzt, dass  $r'^2 + h'^2 = 1 \Rightarrow 2r'r'' + 2h'h'' = 0$ . Wir schliessen, dass  $K(\varphi(u, v))$  nicht von  $v$  abhängig ist!

**Spezialfall** (Rotationsflächen mit konstanter Krümmung).

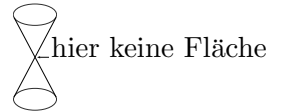
1.  $K = 0$ , d.h.  $r''(u) = 0$  ( $\Rightarrow r(u) = a \cdot u + b$ ). Anfangsbedingungen

- $r(0) = 1$
- $r'(0) = 0$
- $h(0) = 0$



$$\Rightarrow r(u) = 1, h(u) = u \text{ mit } r'^2 + h'^2 = 1 \text{ und } h' > 0 \Rightarrow h' = 1$$

Variation der Anfangsbedingung:  $r'(0) = a \neq 0$  führt zu einem Kreiskegel: (Betrachte hier  $\gamma : (x, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  statt  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ )



2.  $K = 1$ , d.h.  $r'' = -r$  Anfangsbedingungen

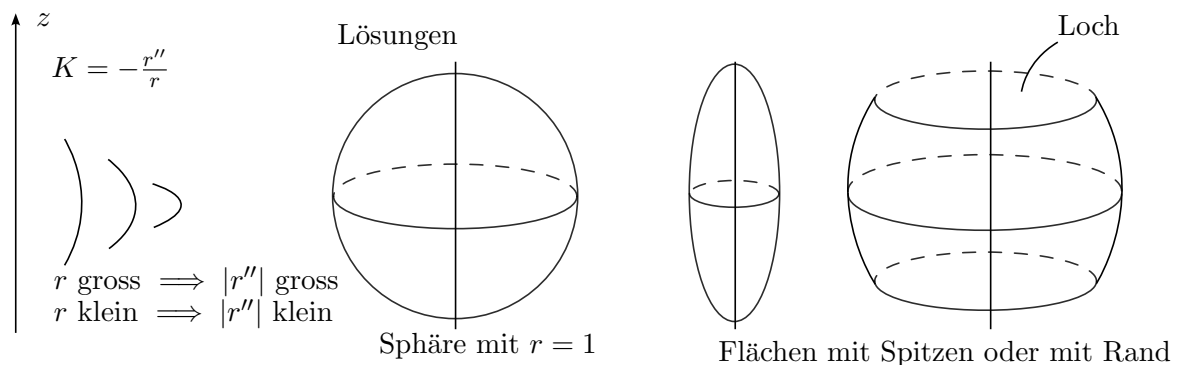
- $r(0) = 1$
- $r'(0) = 0$
- $h(0) = 0$

$\Rightarrow r(u) = \cos(u), h(u) = \sin(u)$ . Einheitssphäre  $S^2$ . Variation der Anfangsbedingung führt zu vertikal verschobenen Einheitssphären, oder keiner Lösung;

**Beispiel.**  $r(0) = 2, r'(0) = 0, h(0) = 0 \Rightarrow$

- $r(u) = 2 \cos(u)$
- $h(u) = \int_0^u h'(x) dx = \int_0^u \sqrt{1 - 4(\sin(x))^2} dx$

mit  $r'^2 + h'^2 = 1$ , hierbei handelt es sich um ein elliptisches Integral, nicht ausdrückbar durch elementare Funktionen.



3.  $K = -1$ , d.h.  $r'' = r$ . Anfangsbedingungen

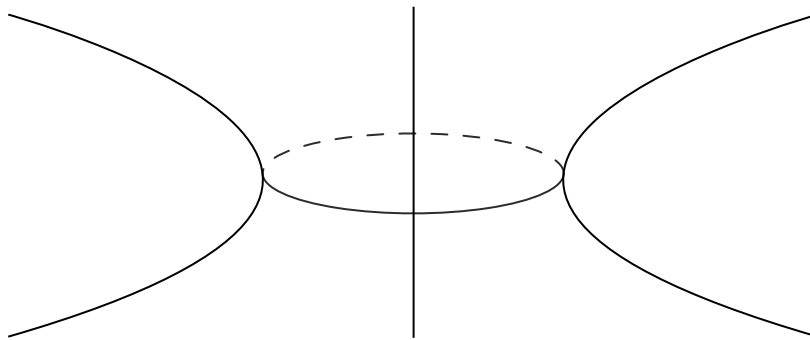
- $r(0) = 1$
- $r'(0) = 0$
- $h(0) = 0$

$$\implies r(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \cosh(u), \quad h(u) = \dots$$

Es gilt:

$$r'(u) = \cosh(u)' = \sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \xrightarrow{u \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$$

Folglich existiert auch hier die Fläche  $\Sigma$  nur über einem gewissen Intervall der Form  $(-h_0, h_0)$ . (vgl. Serie 7)



## 1.4 Theorema Egregium

**Ziel.** Die Krümmung ist durch die Koeffizientenfunktionen  $E, F, G$  bestimmt. Genauer: durch  $E, F, G$  und ihre Ableitungen bestimmt.

Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^2$ -Parametrisierung und  $N : V \rightarrow S^2$  die zugehörige lokale Gaussabbildung. Für alle  $p \in V$  gilt.

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Matrix von  $(DN)_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$  bezüglich der Basis

$$\{\varphi_u, \varphi_v\} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dass heisst

$$N_u = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$N_v = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Es gilt:  $e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle, g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$  und wir folgern:

$$\varphi_{uu} - eN \perp N \implies \varphi_{uu} - eN \in \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$$

Ähnlich existieren eindeutige Koeffizienten  $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2 \in \mathbb{R}$  sogenannte Christoffelsymbole, mit

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \cdot \varphi_v\end{aligned}$$

Berechne nun

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} (\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle}_{=E}) \right) = \frac{1}{2} E_u$$

und

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} (\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}_{=F}) - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \quad \left( \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2 \cdot \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle \right)$$

Andererseits gilt nach obigen Ansatz für  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$  auch

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \cdot E + \Gamma_{11}^2 \cdot F \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G\end{aligned}$$

die Gleichheiten folgt jeweils aus  $\langle N, \varphi_u \rangle$

$$\implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

Analog erhalten wir via  $\varphi_{uv}$  und  $\varphi_{vv}$

$$\begin{aligned}\bullet \quad & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix} \\ \bullet \quad & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Beachte hier:  $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 > 0$ , da  $I_p$  positiv definit ist.

**Konsequenz.** Die  $\Gamma_{ij}^k$  sind durch  $E, F, G$  und ihre partiellen Ableitungen bestimmt.  $K$  ist durch  $E, F, G$  bestimmt.

**Erinnerung.**

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v \\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v \\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v\end{aligned}$$



Via  $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle$  etc, erhalten wir  $\Gamma_{ij}^k$  als Funktion von  $E, F, G$  und ihren ersten partiellen Ableitungen.

**Lemma 2.** Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale  $C^3$ -Parametrisierung. Dann gilt  $\forall p \in V$  :

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2$$

**Korollar 4** (Theorema Egregium, Gauss 1827). Die Krümmung  $K$  lässt sich durch  $E, F, G$  und deren zwei partiellen Ableitungen ausdrücken.

*Beweis des Korollars.* Es gilt  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0$  da  $I_p : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  positiv definit ist.

$$\implies K = -\frac{1}{E}(\dots)$$

wobei die  $\dots$  ein Ausdruck in  $\Gamma_{ij}^k$  und erste partielle Ableitungen, also Ausdruck in  $E, F, G$  und zweite partielle Ableitungen sind.  $\square$

**Bemerkung.** Das Korollar gilt auch für Flächen der Regularität  $C^2$ .

*Beweis Lemma.* Wir berechnen  $\varphi_{vuu} = \varphi_{uuv}$

1.

$$\varphi_{vuu} = \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_{uu}) = e_v N + e \underbrace{\quad}_{a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v} N_v + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + \Gamma_{11}^1 \varphi_{vu} + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vv}$$

2.

$$\varphi_{uuv} = \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_{uv}) = f_u N + f \underbrace{\quad}_{a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v} N_u + (\Gamma_{12}^1)_u \varphi_u + \Gamma_{12}^1 \varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u \varphi_v + \Gamma_{12}^2 \varphi_{uv}$$

Die  $\varphi_v$ -Komponente von  $\varphi_{vuu}$  und  $\varphi_{uuv}$  ist gleich, also

$$e \cdot a_{22} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = f \cdot a_{21} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \quad (*)$$

(Benutze  $\varphi_{uv} = fN + \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v$ , etc.)

**Erinnerung.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ \implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= -(a_{ij})^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \stackrel{K=\det(a_{ij})}{=} -\frac{1}{K} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ \implies E &= -\frac{1}{K}(a_{22}e - a_{21}f) \end{aligned}$$

bzw.  $-EK = a_{22}e - a_{21}f$  (gilt auch für  $K = 0$ )

$$\implies -EK \stackrel{(*)}{=} 6 \text{ Terme in } \Gamma_{ij}^k \text{ (siehe Lemma)}$$

$\square$

**Bemerkung.** Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für  $-FK$  und  $-GK$ .