

# Kapitel 1

## Geodäten und der Satz von Gauss-Bonnet

### 1.1 Isometrien

### 1.2 Paralleltransport und Geodäten

**Ziel.** Beschreibe Geodäten  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$

**Frage.** Dazu stellen werden wir folgendes benötigen: Was bedeutet  $\dot{\gamma}(t)$  ist konstant?

- In  $\mathbb{R}^2$   $\ddot{\gamma}(t) = 0$
- In  $\Sigma$   $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$  - die kovariante Ableitung

**Definition.** Ein glattes Vektorfeld entlang einer glatten Kurve  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  ist eine glatte Abbildung  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$ .

Die horizontale Ableitung oder (kovariante Ableitung) von  $w$  im Punkt  $\alpha(t)$  ist die orthogonale Projektion der Abbildung  $\frac{dw}{dt}(t)$  auf  $T_{\alpha(t)}\Sigma$ :

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t) - \left\langle \frac{dw}{dt}(t), N(\alpha(t)) \right\rangle N(\alpha(t))$$

**Bemerkung.** Wir betrachten glatte Kurven und Vektorfelder (aber  $C^2$  reicht praktisch immer).

### Berechnung in lokalen Koordinaten

Sei  $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$  eine lokale (glatte) Parametrisierung mit  $\alpha([a, b]) \subset \varphi(U) = V$ . Schreibe  $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$ . Sei  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Vektorfeld entlang  $\alpha$ . Schreibe  $w(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma = \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$  als  $w(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$ . Es gilt

$$\frac{dw}{dt}(t) = \dot{a}(t)\varphi_u + \dot{b}(t)\varphi_v + a\dot{u}\varphi_{uu} + a\dot{v}\varphi_{vu} + b\dot{u}\varphi_{uv} + b\dot{v}\varphi_{vv}$$

Dazu erinnere dass  $\frac{d}{dt}(\varphi_u = \varphi_{uu}\dot{u} + \varphi_{vu}\dot{v})$   
 Mit  $\varphi_{uu} = eN + \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v$  etc.. erhalten wir

$$\frac{Dw}{dt}(t) = (\dot{a} + \Gamma_{11}^1 a\dot{u} + \Gamma_{12}^1 a\dot{v} + \Gamma_{21}^1 b\dot{u} + \Gamma_{22}^1 b\dot{v})\varphi_u + (\dot{b} + \Gamma_{11}^2 a\dot{u} + \Gamma_{12}^2 a\dot{v} + \Gamma_{21}^2 b\dot{u} + \Gamma_{22}^2 b\dot{v})\varphi_v$$

**Definition.**  $w$  heisst parallel, falls  $\frac{Dw}{dt} \equiv 0$   
 "keine Änderung in Richtung der Tangentialebene"

**Beispiele.** 1. In der Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  gilt

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

Sei  $w(t) = a(t)e_1 + b(t)e_2$ .

$$\frac{dw}{dt} = \dot{a}(t)e_1 + \dot{b}e_2 \perp e_3 = N \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

2. Betrachte  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

Dann ist  $w(t) \equiv e_3$  ein paralleles Vektorfeld entlang  $\alpha$ .

$$\frac{dw}{dt} = 0 \implies \frac{Dw}{dt} = 0$$

beachte hier  $e_3 \in T_{\alpha(t)}S^2$  für alle  $t$ . Weiteres Beispiel  $\bar{w}(t) = \dot{\alpha}(t)$

$$\frac{d\bar{w}}{dt}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \parallel N(\alpha(t)) \implies \frac{D\bar{w}}{dt}(t) = 0 \text{ ( da } \frac{d\bar{w}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}S^2 \text{ )}$$

**Bemerkung.** Die Bedingung  $\frac{Dw}{dt} = 0$  ist unabhängig von der Parametrisierung von  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$

Sei  $\sigma : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ein Diffeomorphismus mit  $\sigma(a) = a$  und  $\sigma(b) = b$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(w(\alpha(\sigma(t)))) = \frac{d}{d\sigma}w(\alpha(\sigma))\dot{\sigma}(t) \implies \frac{Dw}{dt} = \frac{Dw}{d\sigma}\dot{\sigma}$$

$$\sigma \text{ Diffeomorphismus} \implies \dot{\sigma}(t) \neq 0$$

$$\implies \frac{Dw}{dt} = 0 \iff \frac{Dw}{d\sigma} = 0$$

**Definition.** Eine glatte Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$  heisst geodätisch, falls  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$ . Das Bild von  $\gamma$  bezeichnen wir mit Geodäte.

Beachte hier  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$ , also ist  $\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Vektorfeld entlang  $\gamma(t)$ .

**Beispiele.** 1. In der Ebene  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  gilt  $\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$  (siehe oben), also

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0 \iff \frac{d\dot{\gamma}}{dt}(t) = \ddot{\gamma}(t) = 0$$

Also parametrisieren geodätische Kurven in der Ebene Geradenabschnitte.

2.  $\Sigma = S^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  ist geodätisch, da  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$ .  
 (Siehe oben:  $\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t)$  ist parallel zu  $N(\gamma(t))$ , also senkrecht zu  $T_{\gamma(t)}S^2 \implies \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ .) Analog sind alle Grosskreisenabschnitte mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert Geodäten. Wir werden später sehen, dass alle Geodäten von dieser Form sind.
3.  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$  Betrachte die lokal isometrische Parametrisierung.  
 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Z$   
 $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$

**Behauptung.** Die Bilder von Geodäten in  $\mathbb{R}^2$  unter  $\varphi$  sind Geodäten.

**Spezialfall.** Geraden durch  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

**Erinnerung.** Eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  glatt heisst *geodätisch*, falls  $\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$

In lokalen Koordinaten bezüglich einer Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ , schreibe  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ . (falls  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \varphi(U)$ )

Geodätengleichung

$$\begin{aligned}\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 &= 0 \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 &= 0\end{aligned}$$

Führe Koordinaten  $w = \dot{u}, z = \dot{v}$  ein. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen mit glatten Koeffizienten, (d.h. lokal lipschitz) erster Ordnung auf  $\mathbb{R}^4$

- $\dot{u} = w$
- $\dot{v} = z$
- $\dot{w} = \ddot{u} = -(\dots)$
- $\dot{z} = \ddot{v} = -(\dots)$

Es seien Anfangsbedingungen  $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$  vorgegeben ( $p \in \varphi(U)$ ). Seien  $(u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4$  mit  $\varphi(u_0, v_0) = p, v = w_0\varphi_u + z_0\varphi_v$ . Nach Picard Lindelöf existiert eine *eindeutige* Lösungskurve  $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^4$  zur Anfangsbedingung  $\bar{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0, z_0)$ ;  $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t), z(t))$ . Dann ist  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  unsere gesuchte Lösung.

$\implies$

**Proposition 3.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine glatte reguläre Fläche,  $p \in \Sigma$  und  $v \in T_p\Sigma$  vorgegeben. Dann existiert  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutige geodätische Kurve  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ .

**Zusatz.** Für vollständige Flächen (d.h. abgeschlossen und ohne Rand) lässt sich  $\gamma$  auf  $\mathbb{R}$  erweitern.

**Bemerkungen.**

1. Die Geodätengleichungen sind invariant unter Isometrien.  
Tatsächlich sind  $\Gamma_{ij}^k$  durch die Koeffizientenfunktionen  $E, F, G$  bestimmt, welche invariant unter Isometrien sind.  $\implies$  Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab (auch lokal gültig).
2. Nach Proposition 3 existiert für alle  $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$  ( $\Sigma$  vollständig), genau eine geodätische Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  mit  $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ . Falls wir für alle Paare  $(p, v)$  schon eine Geodäte kennen, dann haben wir alle Geodäten gefunden.  
*Anwendung:* Geodäten auf  $S^2$  sind *Grosskreise*.  
Geodäten auf dem Zylinder  $Z$  sind *Helixen, Meridiane, Mantellinien*.

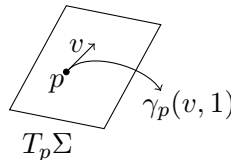
### 1.3 Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  glatt und vollständig, sowie  $p \in \Sigma$ ,  $v \in T_p\Sigma$ ,  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  die eindeutige geodätische Kurve mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$

**Notation.**  $\gamma_p(v, t) = \gamma(t)$

**Definition.**  $\exp : T_p\Sigma \rightarrow \Sigma$

$$v \mapsto \gamma_p(v, 1)$$



**Bemerkungen.**

1. Es gilt für alle  $\lambda > 0, t \in \mathbb{R}$ :  $\gamma_p(\lambda v, t) = \gamma_p(v, \lambda t)$
2. Eine Verschärfung des Satzes von Picard-Lindelöf nach Cauchy zeigt, dass die Lösung  $\gamma_p(v, t)$  glatt von den Parametern  $p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$ , und  $t \in \mathbb{R}$  abhängt. Daraus folgt, dass  $\exp : T_p\Sigma \rightarrow \Sigma$  glatt ist!
3. Wieso heisst diese Abbildung  $\exp$ ? Die Antwort kommt aus der Liethorie: Betrachte die Gruppe  $GL(\mathbb{C}^n)$ . Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  haben wir die Abbildung  $\gamma(t) = e^{tA} \in GL(\mathbb{C}^n)$ . Diese Kurve ist geodätisch bezüglich der Killingform auf  $GL(\mathbb{C}^n)$   
 $\lceil$  Sei  $X \in GL(\mathbb{C}^n)$  und  $A, B \in T_X G(\mathbb{C}^n)$   
 $\langle A, B \rangle = \text{spur}(X^{-1}AX^{-1}B)$ ? Stimmt für  $X = Id$   $\lrcorner$

#### Berechnung des Differentials von $\exp$

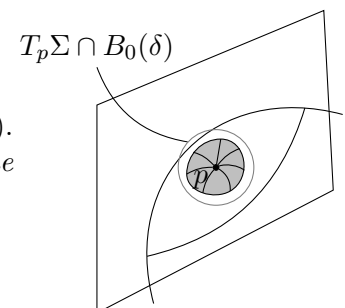
Sei  $p \in \Sigma$  und  $h \in T_p\Sigma$  und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  die eindeutige geodätische Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = h$ , also  $\exp(th) = \gamma_p(th, 1) = \gamma_p(h, t) = \gamma(t)$ . Berechne nun:

$$(D\exp)_0(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(th) - \exp(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dot{\gamma}(t) = h$$

$$\implies D(\exp)_0 = \text{Id}_{T_p\Sigma}$$

Nach Umkehrsatz existiert eine Zahl  $\delta > 0$ , so dass die Einschränkung von  $\exp$  auf  $U = T_p\Sigma \cap B_0(\delta) = \{v \in T_p\Sigma \mid \|v\|_2 < \delta\}$  ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist  $\varphi = \exp|_U : U \rightarrow \varphi(U) \subset \Sigma$  eine lokale Parametrisierung.

Wähle auf  $T_p\Sigma$  Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  (Wahl ist wo ist  $\theta = 0$ ?). Die entsprechenden Koordinaten auf  $\exp(U) \subset \Sigma$  heissen *geodätische Polarkoordinaten*.



**Proposition 1.** *Bezüglich der lokalen Parametrisierung  $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$  und Koordinaten  $(u, v) = (r, \theta)$  gilt:*

$$E = 1, F = 0, \lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0 \text{ und } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \sqrt{G(r, \theta)} = 1$$

*Beweis.* Fixiere einen Winkel  $\theta \in S^1 = [0, 2\pi]/0 = 2\pi$ . Es gilt  $E(r, \theta) = \left\langle \frac{d}{dr} \exp, \frac{d}{dr} \exp \right\rangle$ . Da die Kurve  $t \rightarrow \exp(t, \theta)$  geodätisch mit Geschwindigkeit 1 ist, folgt

$$\left\| \frac{d}{dr} \exp(r, \theta) \right\| = 1 \implies E(r, \theta) = 1$$

Das Paar  $(r, \theta)$  erfüllt die Geodätengleichung:

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta}^2 = 0$$

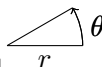
Da  $\theta$  konstant ist, folgt  $\Gamma_{11}^2 = 0$ . Weiterhin gilt (siehe Abschnitt Theorema Egregium)

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_r \\ F_r - \frac{1}{2} E_\theta \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \Gamma_{11}^2 = 0$$

$E = 1 \implies E_r = E_\theta = 0 \implies \Gamma_{11}^1 = 0$  und  $F_r = 0$ . Also hängt  $F(r, \theta) = \langle \exp_r, \exp_\theta \rangle$  nicht von  $r$  ab!

Mit  $\lim_{r \rightarrow 0} \|\exp_\theta\| = 0$  folgt also  $F = 0$ . Ausserdem folgt mit  $\lim_{r \rightarrow 0} \|\exp_\theta\| = 0$  auch  $\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \langle \exp_\theta, \exp_\theta \rangle = 0$ .

Genauer: In erster Ordnung in  $r$  gilt  $\|\exp_\theta(r, \theta)\| = r$  (+höhere Terme) also

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \sqrt{G(r, \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \|\exp_\theta(r, \theta)\| = 1$$


□

## Krümmung in geodätischen Polarkoordinaten

Wir betrachten eine lokale Parametrisierung  $\exp : U \rightarrow \Sigma$ . Bezüglich Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^2$  gilt:

$$E = 1, F = 0, \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Weiterhin gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_\theta \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} G_r \end{pmatrix} \implies G \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G_r$$

Berechnung der Krümmung mittels der Formel (Lemma, Theorema Egregium).

$$\begin{aligned} -EK = -K &= (\Gamma_{12}^2)_r + (\Gamma_{12}^2)^2 \quad \text{Viele Terme streichen sich weg} \\ &= \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} \frac{G_r}{G} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{G_r}{G} \right)^2 \text{ benutze } G \neq 0, \text{ da } \det \neq 0 \end{aligned}$$

**Proposition 2.**  $K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} K &= -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{1}{2} \frac{G_r}{\sqrt{G}} \right)_r \\ &= -\frac{1}{2} \frac{G_{rr}}{G} + \frac{1}{4} \frac{(G_r)^2}{G^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{G_r}{G} \right)_r - \frac{1}{4} \frac{G_r^2}{G^2} = K \end{aligned}$$

□

**Anwendung.** Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine glatte reguläre Fläche, und  $\exp : U \rightarrow \Sigma$  eine lokale Parametrisierung. Wir machen für die Koeffizientenfunktion  $\sqrt{G(r, \theta)}$  eine Taylorentwicklung.

**Ansatz.** Unter Berücksichtigung von  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G}_r = 1$ , sowie Prop. 4  $\sqrt{G} = r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + \dots$ , (Restterm  $R(r, \theta)$  erfüllt  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} R(r, \theta) = 0$ )

$$\implies \sqrt{G}_{rr} = 2a(\theta) + 6b(\theta)r + \text{höhere Terme}$$

Prop. 5

$$\implies K = -\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}} = \frac{2a(\theta) + 6b(\theta)r + \dots}{r + a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3 + \dots}$$

Die Grenzbetrachtung  $r \rightarrow 0$  liefert:

- $a(\theta) = 0$  (da  $K$  nicht  $\rightarrow \infty$  gehen darf wegen Glattheit)
- $b(\theta) = \frac{K}{6}$ .

Damit erhalten wir  $\sqrt{G} = r - \frac{K}{6}r^3 + R(r, \theta)$  Sei  $p \in \Sigma$  und  $r > 0$ .

**Definition.** Definiere  $K^\Sigma(p, r) = \exp(K_0(r))$ , wobei  $K_0(r) = \{z \in T_p \Sigma \mid |z| = r\}$  "Kreis um  $p$  in  $\Sigma$  mit Radius  $r$ , den Kreis runterlegen"

Setze  $U^\Sigma(p, r) = \text{Länge}(K^\Sigma(p, r)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta$ . Weglänge war definiert  $\int_0^t \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$  hier  $u = r, v = \theta$ .

**Theorem 1** (Umfangdefektformel).

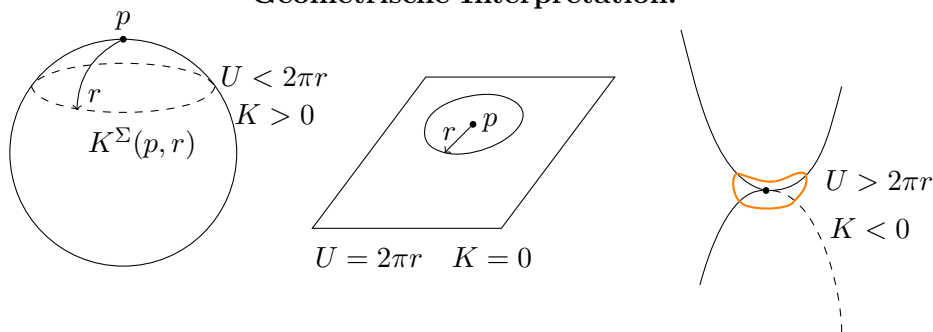
$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - U^\Sigma(p, r)}{r^3} \frac{3}{\pi}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned}
 U^\Sigma(p, r) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ r - \frac{K(p)}{6} r^3 + R(r, \theta) \right] d\theta \\
 &= 2\pi r - \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 + \int_0^{2\pi} R(r, \theta) d\theta \\
 &\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - U^\Sigma(p, r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(p)
 \end{aligned}$$

□

### Geometrische Interpretation.



**Anwendung** (Flächen konstanter Krümmung). Falls  $K$  konstant ist, dann hat die Differentialgleichung  $K\sqrt{G} = -\sqrt{G_{rr}}$  zur Anfangsbedingung  $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$   $\sqrt{G_r}(0, \theta) = 1$  siehe Prop. 4 eine eindeutige Lösung:

1.  $K = 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = r$  also  $G = r^2$
2.  $K > 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r)$  also  $G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}r)$
3.  $K < 0 \Rightarrow \sqrt{G(r, \theta)} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}r)$  wobei  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

In allen Fällen ist  $G$  unabhängig von  $\theta$ !

Kreisumfang:

- $K = 0$  siehe Weglänge  $\int_0^T \sqrt{\dot{r}^2 E + \dot{u} \dot{v} F + \dot{v}^2 G} dt$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$$

- $K = 1$  mit  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta = 2\pi \sin(r)$$



- $K = -1$  "Umfang wächst exponentiell"

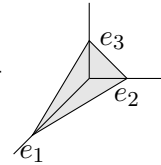
$$U(r) = 2\pi \sinh(r) \sim e^r$$

**Theorem 2** (Minding 1839). Seien  $\Sigma_1, \Sigma_2$  reguläre Flächen mit derselben konstanten Krümmung  $K$ , und  $p_1 \in \Sigma_1, p_2 \in \Sigma_2$ . Dann existiert  $U_1 \subset \Sigma_1, U_2 \subset \Sigma_2$  offen mit  $p_i \in U_i$  und eine lokale Isometrie  $h : U_1 \rightarrow U_2$ .

*Beweis.* Bezüglich geodätischer Polarkoordinaten um  $p_1, p_2$  sind die Koeffizientenfunktionen  $E = 1, F = 0, G$  durch  $K$  bestimmt, also identisch. Wir folgern, dass  $\Sigma_1, \Sigma_2$  lokal isometrisch sind (siehe Abschnitt Isometrien).  $\square$

## 1.4 Der Satz von Gauss-Bonnet

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine glatte reguläre Fläche. Wir betrachten das Standarddreieck  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  mit Eckpunkten  $e_1, e_2, e_3$ .



Ein Dreieck in  $\Sigma$  ist das Bild von  $\Delta$  unter einer glatten Abbildung  $\varphi : \Delta \rightarrow \Sigma$ . Falls die Kanten von  $\varphi(\Delta)$  Segmente von Geodäten sind, dann heisst das Dreieck geodätisch.

**Definition.** Ein *geodätisches Dreieck* in  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  ist ein eingebettetes Dreieck, welches von drei geodätischen Segmenten begrenzt wird.

**Theorem 3** (Lokale Version von Gauss-Bonnet). Sei  $\Delta \subset \Sigma$  ein geodätisches Dreieck mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\Delta} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

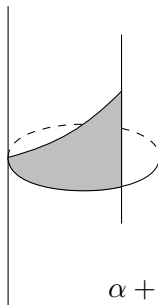
**Erinnerung.** Flächenelement  $dA = \sqrt{EG - F^2}$

**Bemerkung.** Bei konstanter Krümmung  $K = 0$  haben alle geodätischen Dreiecke die Innenwinkelsumme  $\pi$

**Geometrische Interpretation.**

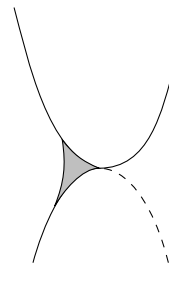
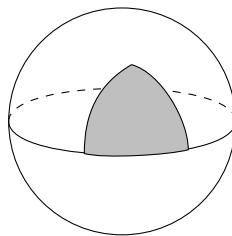
$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

$$K > 0$$



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

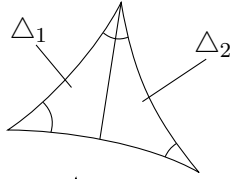
$$K = 0$$



$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

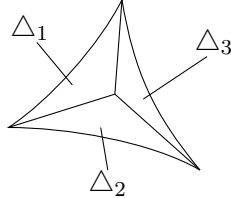
$$K < 0$$

**Vorbereitung.** Additivität der Formel:  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$



$$\underbrace{\int_{\Delta} K dA}_{\alpha + \beta + \gamma - \pi} = \underbrace{\int_{\Delta_1} K dA}_{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi} + \underbrace{\int_{\Delta_2} K dA}_{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi}$$

Ok, da  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi$



$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \alpha + \beta + \gamma + 2\pi \implies \int_{\Delta} K dA = \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta_i} K dA$$

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine lokale Parametrisierung der Form  $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$  mit  $\Delta_A \subset \varphi(U)$  und  $\varphi(0)$  sei ein Eckpunkt von  $\Delta$ , ebenso sei  $B \in \varphi(U \cap \mathbb{R} \times \{0\})$

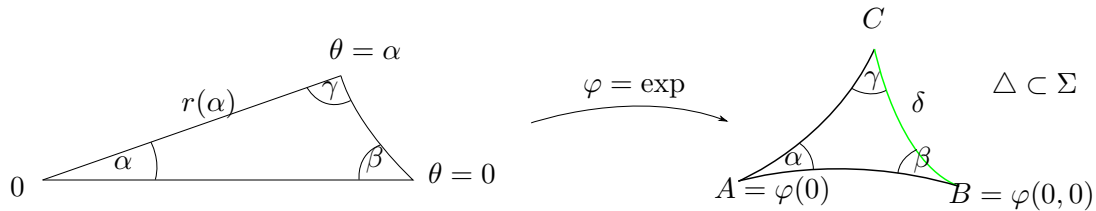


Abbildung 1.1: Interpretation von  $\exp$

Parametrisiere den Weg  $\delta : [0, \alpha] \rightarrow \Sigma$  durch  $\delta(\theta) = \exp(r(\theta), \theta)$ . Berechne

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} K dA &= \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} K(r, \theta) \sqrt{EG - F^2} dr d\theta \\ &\stackrel{E=1, F=0, \text{ da } \varphi=\exp}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} K \sqrt{G} dr d\theta \\ &\stackrel{\text{Prop. 5}}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} -\sqrt{G_{rr}} dr d\theta \\ &= - \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} \sqrt{G_{rr}} dr d\theta \\ &= - \int_0^\alpha \left[ \sqrt{G_r}(r(\theta), \theta) - \sqrt{G_r}(0, \theta) \right] d\theta \\ &= \alpha - \int_0^\alpha \sqrt{G_r}(r(\theta), \theta) d\theta \end{aligned}$$

**Lemma.**

$$-\sqrt{G_r}(r(\theta), d\theta) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

wobei  $\psi(\theta)$  der Winkel zwischen  $e_r$  und  $\dot{\delta}(\theta)$  ist.


$$\begin{aligned}\int_{\Delta} K \, dA &= \alpha + \int_0^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \, d\theta \\ &= \alpha + \psi(\alpha) - \psi(0) \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi\end{aligned}$$
☐
$$\begin{aligned}\sqrt{G_r} &= \frac{1}{2} \frac{G_r}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle}_{=G} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \langle \varphi_{r\theta}, \varphi_{\varphi_\theta} \rangle = \langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{\|\varphi_\theta\|} \rangle\end{aligned}$$
$$\left\langle \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta}, \frac{\varphi_\theta}{\|\varphi_\theta\|} \right\rangle = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

1



**Bemerkung.** Falls  $\Delta \subset \Sigma$  nicht im Bild einer Parametrisierung  $\varphi = \exp : U \rightarrow \Sigma$  liegt, unterteile  $\Delta$  iteriert, bis alle Teildreiecke diese Eigenschaft haben.

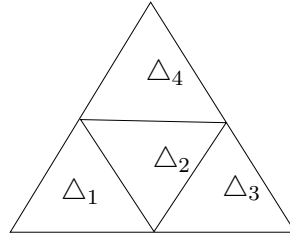


Abbildung 1.4: Iterationsschritt (Seiten halbieren)

Alle Flächen die wir betrachten sind abgeschlossen und kompakt.  
Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte, glatte Fläche ohne Rand.

**Definition.** Eine *Triangulierung*  $T$  von  $\Sigma$  ist eine endliche Vereinigung von Dreiecken in  $\Sigma$ ,  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  mit folgenden Eigenschaften.

1.  $\bigcup_{i=1} \Delta_i = \Sigma$
2.  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  falls  $i \neq j$ , ein gemeinsamer Eckpunkt, eine, zwei, oder drei gemeinsame Kanten

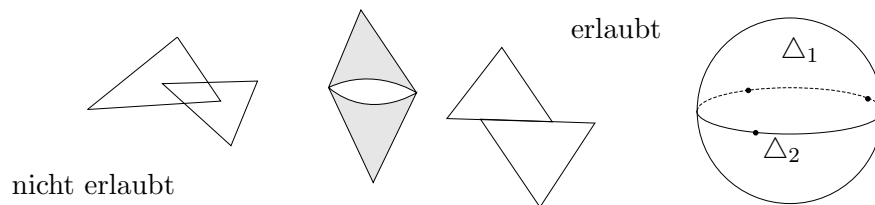


Abbildung 1.5: Nicht erlaubte Triangulierungen

**Beispiel.** 4 Dreiecke 2 Eckpunkte, 6 Kanten

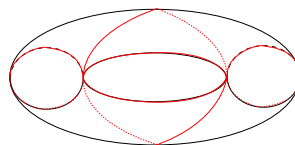


Abbildung 1.6: Triangulierung eines Torus

Falls alle Kanten geodätische Segmente sind, dann heisst die Triangulierung *geodätisch*.

**Theorem 4** (Gauss-Bonnet globale Version).

$$\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi * \chi(\Sigma)$$

wobei  $\chi(\Sigma)$  die Eulercharakteristik von  $\Sigma$ , zu berechnen wie folgt:  $\chi(\Sigma) = e - k + n$  mit  $e = \# \text{Eckpunkte}$ ,  $k = \# \text{Kanten}$ ,  $n = \# \text{Dreiecke}$  für irgendeine Triangulierung von  $\Sigma$ .

**Theorem 5.** Jede reguläre kompakte Fläche besitzt eine geodätische Triangulierung.

*Beweis.* siehe Ahlfors-Sari: Riemann Surfaces □

*Beweis von Gauss-Bonnet.* Sei  $T = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \dots \cup \triangle_n$  eine geodätische Triangulierung von  $\Sigma$ . Berechne

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} K \, dA &= \sum_{i=1}^n \int_{\triangle_i} K \, dA \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) \\ &= 2\pi e - n\pi \quad (2\pi \text{ für jeden Eckpunkt}) \\ &= 2\pi(e - \frac{3}{2}n + n) \\ &= 2\pi(e - k + n) \\ &= 2\pi\chi(\Sigma) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wird, dass jedes Dreieck drei Kanten hat. Jede Kante gehört zu zwei Dreiecken.  $\implies k = \frac{3}{2}n$  □

**Bemerkung.** Aus dem obigen Beweis folgt, dass  $\chi(\Sigma)$  unabhängig von  $T$  ist, zumindest für geodätische Triangulierungen. Dies gilt auch für allgemeine, nicht geodätische Triangulierungen.

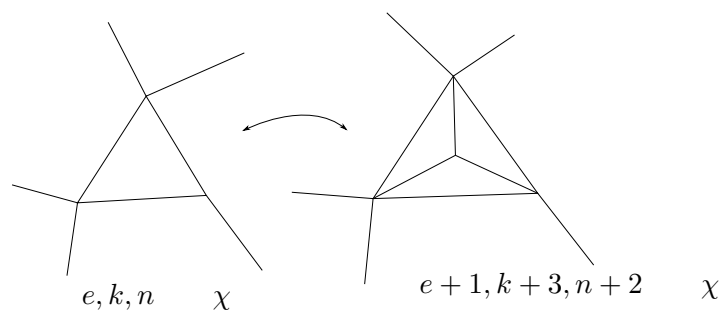


Abbildung 1.7: Ändere die Triangulierung

**Beispiele** (sehr wichtig). 1.  $\chi(S^2) = 3 - 3 + 2 = 2 \implies \int_{S^2} K \, dA = 4\pi$  (klar, da  $K = 1$  und  $\text{Area}(S^2) = 4\pi$ )

Wir folgern daraus, dass Oberflächen, welche topologisch gleich sind, die gleiche Krümmung haben. "Ingwersphäre"

$$\int_{\text{Ingwersphäre}} K \, dA = 4\pi$$

2.  $\chi(S^1 \times S^1) = \chi(\text{Torus}) = 2 - 6 + 4 = 0$  siehe oben.  $\implies \int_{\text{Torus}} K \, dA = 0$ .

Was tun, falls wir das nicht gewusst hätten? *Trick*: Schneide und klebe!

$$\int_{\text{Torus}} K \, dA = 2 \int_{\text{Zylinder}} K \, dA = 2 \left( \underbrace{\int_{\text{Zylinder}} K \, dA}_{4\pi \text{ GB}} - \underbrace{2 \int_{\text{Kreis}} K \, dA}_{4\pi} \right) = 0$$

Daraus folgt auch  $\chi(\text{Torus}) = 0$ .

3. Betrachte  $\Sigma_2 = \text{Zwei-Henkel}$

$$\int_{\Sigma_2} K \, dA = 2 \int_{\text{Zylinder}} K \, dA = 2 \left( \int_{\text{Zylinder}} K \, dA - \int_{\text{Kreis}} K \, dA \right) = -4\pi$$

Daraus folgt  $\chi(\Sigma_2) = -2$

Induktiv erhalten wir für  $\Sigma_g = \text{g Henkel}$ :

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

Dabei haben wir schon Spezialfälle davon gesehen:

- $g = 0$  Sphäre  $\chi = 2$
- $g = 1$  Torus  $\chi = 0$