

Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subseteq \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \rightarrow S^2$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gauss-Abbildung), falls

$$\forall p \in V \text{ gilt: } N(p) \perp T_p \Sigma$$

Zusatz. Flächenelement $\sqrt{EG - F^2}$

$$EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Existenz. Definiere $N : V \rightarrow S^2$

$$q \mapsto \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q , da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dann ist $N : V \rightarrow S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt: $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \rightarrow S^2$, genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche \mathbb{R}^3 in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \rightarrow S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.

zwei zeichnungen, torus und moebiusband

Sei nun $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale C^1 -Parametrisierung und $N : V \rightarrow S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt $\forall q \in V$:

- $N(q) \perp T_q \Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)} \Sigma$

$\implies T_q \Sigma = T_{N(q)} S^2$ für letzteres gilt $\forall p \in S^2 : p \perp T_p S$
 Falls $N : V \rightarrow S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir $\forall p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{N(p)} S^2 = T_p \Sigma$$

die *Weingartenabbildung*.

Definition.

$$K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$$

Gaussische Krümmung im Punkt $p \in \Sigma$

Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab,
 da $\det -(DN)_p = (-1)^2 \cdot \det (DN)_p$ ist.

Beispiel. 1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
 $N : \Sigma \rightarrow S^2$

$$q \mapsto e_3 \text{ (oder } -e_3)$$

N ist konstant, also gilt $\forall q \in \Sigma (DN)_q = 0; K(q) = 0$.

K equiv to 1

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)
 $N : S^2 \rightarrow S^2$
 $q \mapsto q$

Einheitssphäre mit Krümmung = 1

$$\begin{aligned} N &= Id_{S^2} \text{ (oder } -Id_{S^2}) \\ \forall q \in S^2 \text{ gilt also } (DN)_q &= Id : T_q \Sigma \rightarrow T_q \Sigma \\ \implies K(q) &= \det Id : T_q \Sigma \rightarrow T_q \Sigma = 1 \end{aligned}$$

3. $Z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$
 $N : Z \rightarrow S^2$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

Wir bemerken: N hängt nicht von z ab.

Zylinder mit K equiv to 0

$$\begin{aligned} \text{Also gilt für alle } q \in Z : (DN)_q(e_3) &= \lim_{t \rightarrow 0} \overbrace{\frac{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}{t}}^{=0} = 0 \\ \implies 0 &\text{ ist ein Eigenwert der Abbildung } (DN)_q : T_q Z \rightarrow T_q Z \implies K(q) = 0. \end{aligned}$$

Zusatz. *Genauere Betrachtung des dritten Beispiels:*

Für $q = (x, y, z) \in Z$ gilt: $T_q Z = \text{span}\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^v\}$

Wir bestimmen $(DN)_q \stackrel{(*)}{=} v$

(*) Erklärung: Die Einschränkung von N auf $S' \times \{0\}$ ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von $(DN)_q$ bezüglich der Basis $\{e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2\}$

1.2 Die zweite Fundamentalform

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Rotationsflächen

1.4 Theorema Egregium