Kapitel 1

Ebene hyperbolische Geometrie

Knörrer: Geometrie Kapitel 3

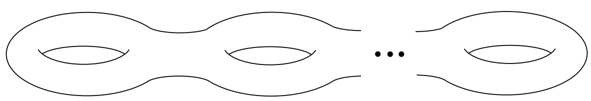
Ziel. Konstruktion einer *vollständigen* Fläche H mit konstanter Krümmung -1, analog zur Ebene ($K \equiv 0$) und Sphäre ($K \equiv 1$).
Vollständig: Jede geodätische Kurve $\gamma : (a, b) \to H$ lässt sich geodätisch auf $\mathbb{R}$ erweitern.

Motivation. *Gauss-Bonnet*

$$\int_\Sigma K \; dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

wobei Σ eine kompakte, vollständige Fläche. Falls $\chi(\Sigma) < 0$ und die Krümmung K konstant ist, dann muss K negativ sein!

Theorem 1 (Klassifikation der Flächen)**.** *Sei Σ eine topologische (glatte), kompakte, vollständige, orientierbare, zusammenhängende Fläche. Dann ist Σ zu einer der Flächen Σ_g homöomorph (diffeomorph):*



Σ_g mit g Henkel

Es gilt: $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$ *falls* $g \geq 2$.

1.1 Eine Riemannsche Metrik mit K=-1

Naiver Ansatz zur Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ mit $K = -1$.

$$\langle\ ,\ \rangle_p = h(p)\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

wobei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ positiv und glatt ist. Für die Koeffizientenfunktionen E, F, G gilt also:

- $E(x, y) = \langle e_1, e_1\rangle_{(x,y)} = h(x, y)$
- $F(x, y) = \langle e_1, e_2\rangle_{(x,y)} = 0$
- $G(x, y) = \langle e_2, e_2\rangle_{(x,y)} = h(x, y)$

Terminologie. Falls $E = G$ und $F = 0$ gilt, dann heissen die Koordinaten *konform* oder *isotherm*.

Eine kleine Rechnung zeigt

$$K = -\frac{1}{2h(x, y)}\Delta(\log(h(x, y)))$$

wobei $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ der Laplaceoperator (siehe Serie 10).
Nun führt $K = -1$ zu einer Differentialgleichung für h:

$$2h(x, y) = \Delta(\log(h(x, y)))$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung*, welche schwierig zu lösen ist. Mit dem Lösungsansatz $h(x, y) = y^n$ finden wir eine Lösung $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$, welche allerdings nur auf der obenen Halbebene $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ definiert ist.

Definition. Die *hyperbolische Ebene* ist die Menge $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$\langle\ ,\ \rangle_{x+iy} = \frac{1}{y^2}\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

Bemerkungen.

1. Die Translation $z \mapsto z + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Isometrie von H. Tatsächlich, schreibe

$$\begin{aligned} T : H &\to H \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y) \end{aligned}$$

Für alle $p \in H$ gilt $(DT)_p = Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w\rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DT)_p(v), (DT)_p(w)\rangle_{T(p)} = \langle v, w\rangle_{T(p)}$$

Stimmt, da $y(p) = y(T(p))$, und somit $\langle\ ,\ \rangle_p = \langle\ ,\ \rangle_{T(p)}$

2. Die Streckung $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda > 0$ ist eine Isometrie von H. Schreibe

$$\begin{aligned} S : H &\to H \\ (x, y) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Für alle $p \in H$ gilt $(DS)_p = \lambda Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w\rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DS)_p(v), (DS)_p(w)\rangle_{S(p)} = \lambda^2 \langle v, w\rangle_{S(p)}$$

Stimmt, da $y(S(p)) = \lambda y(p)$, also $\langle\ ,\ \rangle_{S(p)} = \frac{1}{\lambda^2}\langle\ ,\ \rangle_p$

3. Die Inversion $z \mapsto -\frac{1}{z}$ ist eine Isometrie von H. Schreibe

$$\varphi(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} \in H$$

falls $z \in H$ d.h. $y > 0$. Also $\varphi : H \to H$. Es gilt für alle $z \in H$ und $v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$(D\varphi)_z(v) = \varphi'(z)v = -\frac{1}{z^2}v$$

Zu prüfen:

$$\langle v, w\rangle_z \stackrel{?}{=} \langle -\frac{1}{z^2}v, -\frac{1}{z^2}w\rangle_{-\frac{1}{z}} = \frac{1}{|z|^4}\langle v, w\rangle_{-\frac{1}{z}}$$

. Stimmt, da $y(-\frac{1}{z}) = \frac{1}{|z|^2}y(z) \implies \langle\ ,\ \rangle_{-\frac{1}{z}} = |z|^4\langle\ ,\ \rangle_z$

1.2 Möbiustransformationen

Erinnerung (aus der komplexen Analysis). Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$, definieren wir die zugehörige *Möbiustransformation* (nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert).

$$\begin{aligned} (MT)\Phi : \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b \in \mathbb{C} \implies \Phi_A(z) = z + b$
2. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies \Phi_A(z) = a^2 z$. Für $a = \sqrt{\lambda} : \lambda z$ $(\lambda > 0)$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Phi_A(z) = -\frac{1}{z}$ Insbesondere, für $a = \sqrt{\lambda}(\lambda > 0) : \lambda z$

Bemerkung. Die obigen Isometrien 1-3 sind vom Typ Φ_A mit $A \in SL(\mathbb{R}^3)$. (Determinante 1)

Projektive Interpretation von Möbiustransformation

Sei $A \in GL(\mathbb{C}^2)$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Insbesondere bildet A Geraden durch 0 auf Geraden durch 0 ab (1).

Definition. Die *projektive Gerade* $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist die Menge aller komplexen Geraden durch 0 in $\mathbb{C}^2$. Konkret: Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich folgender Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \text{ mit } w = \lambda v$$

Dann ist $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) := \big(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\big)/\sim$. Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

- Falls $b \neq 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} z \in \mathbb{C}$.
- Falls $b = 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{a \neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$.

Daraus folgern wir, dass $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Aus (1) folgt: Die Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) &\to \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \\ [v] &\mapsto [Av] \end{aligned}$$

Interpretation via $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- $v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $cz + d = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$

Notation für Φ_A : $\Phi_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ "geeignet interpretiert". Aus dieser Definition folgt auch dass $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$. Diese Tatsache ist mit der anderen Definition mühsam zu beweisen.

Lemma 1. *Sei* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$ *Dann erhält die Möbiustransformation* φ_A *die obere Halbebene* $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}$.

Beweis. Sei $z \in H$, d.h. $\mathrm{im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) > 0$. Berechne

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\varphi_A(z)) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+b} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)+(a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\
&\overset{detA=1}{=} \frac{\mathrm{im}(z)}{(cz+d)^2} > 0
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Es gilt sogar $\varphi_A(H) = H$ Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
H = \varphi_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}(H) &= \varphi_{A \circ A^{-1}}(H) \\
&\overset{\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B}{=} \varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}}(H) = \varphi_A(\varphi_{A^{-1}}(H)) \subset \varphi_A(H)
\end{aligned}$$

$\implies \varphi_A(H) = H$. Daraus folgt, dass Möbiustransformationen eine Gruppe bilden.

Lemma 2. *Jede Möbiustransformation $\varphi_A : H \to H$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ ist eine endliche Komposition von Möbiustransformationen der Form*

1. $z \mapsto z + b \qquad (b \in \mathbb{R})$ *horizontale Translation*
2. $z \mapsto \lambda z \qquad (\lambda > 0)$ *Streckung*
3. $z \mapsto -\frac{1}{z}$ *Inversion*

Beweis.

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{cz+\frac{c}{a}b}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{cz+d+(\frac{c}{a}b-d)}{cz+d} = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$$

für geeignete α und β. Details siehe Serie 11. □

Korollar 1. *Alle Möbiustransformationen der Form $\varphi_A : H \to H$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ sind Isometrien bezüglich der Riemannschen Metrik $\frac{1}{y^2}\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$.*

Beweis. Möbiustransformationen des Typs 1-3 sind Isometrien, siehe oben □

Lemma 3. *Die Kurve* $\gamma : \mathbb{R} \to H$ *ist geodätisch.*
$t \mapsto ie^t$

Anmerkung: Baader hat im Rückblick impliziert $\forall p \in H$ gilt $K(p) - 1$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass

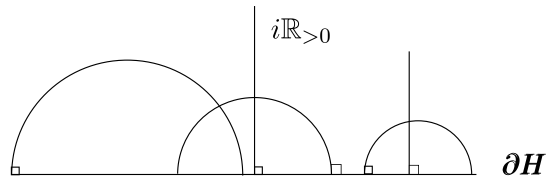
$$||\dot\gamma(t)||_H = \sqrt{\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle_H} \overset{y(\gamma(t))=e^t}{=} \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2}\underbrace{\langle ie^t, ie^t\rangle_{\mathbb{R}^2}}_{\langle e^t,e^t\rangle=(e^t)^2}} = 1$$

$\implies \gamma : \mathbb{R} \to H$ ist nach Bogenlänge parametrisiert (bzgl. hyperbolischer Metrik). Sei nun $\delta : \mathbb{R} \to H$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\delta(0) = i$ und $\dot\delta(0) = i$. Betrache die folgende Isometrie von H (Spiegelung an $i\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\sigma : H &\to H\\ x + iy &\mapsto -x + iy\end{aligned}$$

Nun ist $\sigma\circ\delta : \mathbb{R} \to H$ auch geodätisch mit $\sigma\circ\delta(0) = i$ und auch $\frac{d}{dt}(\sigma\circ\delta)(0) = i$. Aus der Eindeutigkeit der Geodäten zu Anfangsbedingungen folgt also $\delta = \sigma\circ\delta$, also $\delta(\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. Da γ und δ nach Bogenlänge parametrisiert (δ ist geodätisch mit $||\dot\delta(0)||_H = 1!$) sind, folgt $\gamma = \delta$. □

Proposition 1. *Die Geodäten in H sind genau die Halbgeraden und Halbkreise, welche senkrecht auf "$\mathbb{R}\cup\{\infty\} = \partial H$". stehen.*



Geodäten in Halbebene H

Beweis. Wir haben schon eine Geodäte gefunden: $i\mathbb{R}_{>0}$, das Bild der Kurve $\gamma(t) = ie^t$. Schreibe $h = \text{Bild}(\gamma) \subset H$. Nun ist für jede Isometrie $\varphi : H \to H, \varphi(H) \subset H$ auch eine Geodäte. Insbesondere können wir auf h iteriert Abbildung der Form

1. $z \mapsto z + b \qquad b \in \mathbb{R}$
2. $z \mapsto \lambda z \qquad \lambda > 0$
3. $z \mapsto -\frac{1}{z}$

Daraus folgt, dass alle Halbgeraden auf $\mathbb{R}$ Geodäten sind. Betrachte die spezielle Isometrie $\varphi(z) = -\frac{2}{z+1}$

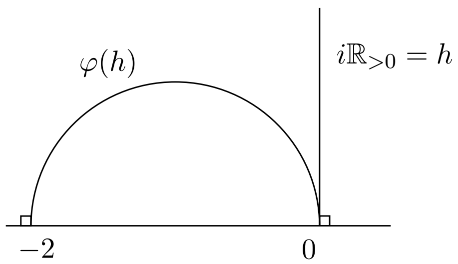
Behauptung. *$\varphi(h)$ ist ein Halbkreis in H mit Zentrum -1 und Radius 1*

Beweis. Sei $iy \in h$. Berechne

$$|\varphi(iy)+1| = \left| -\frac{2}{iy+1} + \frac{iy+1}{iy+1} \right| = \left| \frac{iy-1}{iy+1} \right| = 1$$

□

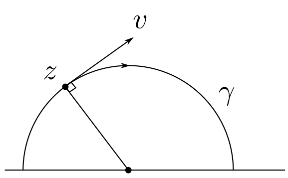
Unter Anwendung von horizontalen Transformationen und Streckungen erhalten wir aus $\varphi(h)$ alle Halbkreise Senkrecht auf $\mathbb{R}$.



Halbkreis als Geodäte

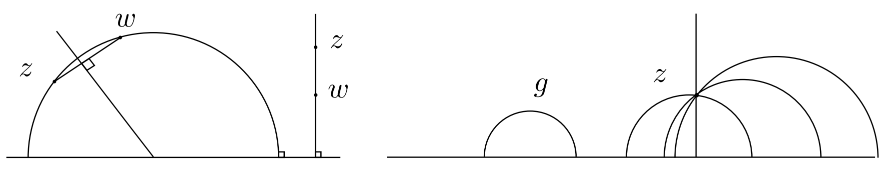
Frage. Wieso existieren keine weiteren Geodäten?

Zu jeden $z \in H$ und jedem Einheitsvektor v existiert genau eine geodätische Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to H$ mit $\gamma(0) = z$ und $\dot\gamma(0) = v$. Das Bild von γ muss also der Halbkreis oder die Halbgerade durch z mit Tangente v sein! □



Eindeutigkeit der Geodäte

Bemerkung. Für alle $z, w \neq z \in H$ existiert eine Geodäte $g < H$ mit $z, w \in g$ Hingegen existiert zu $g \subset H$ und $z \notin g$ unendlich viele Geodäten $h \in H$ mit $z \in h$ und $h \cap g = \emptyset$. Wir bemerken, dass das *Parallelaxiom* in der hyperbolischen Ebene *nicht erfüllt* ist.

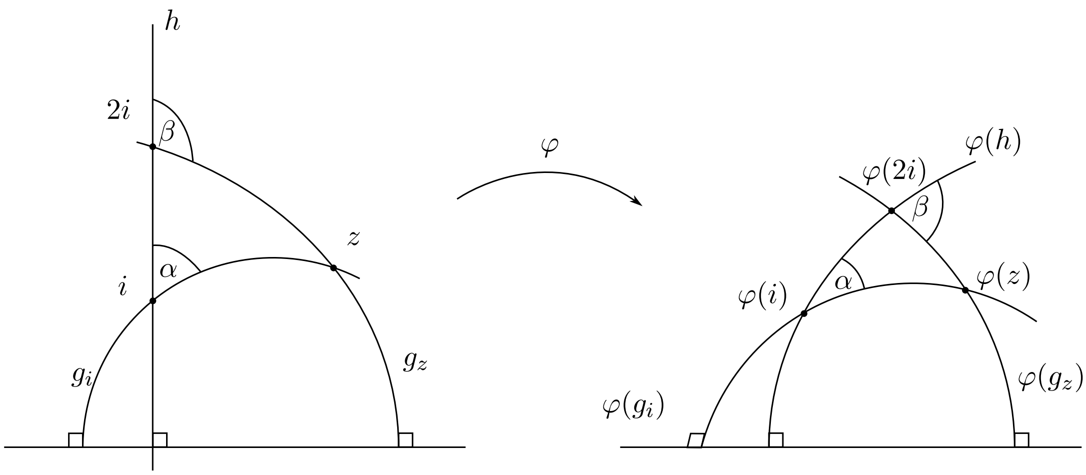


Dies wurde etwa 1840 von Bolyai und Lobachevski bemerkt.

1.3 Die Isometriegruppe von H

Lemma 4. *Sei $\varphi : H \to H$ eine orientierungserhaltende Isometrie, d.h. für alle $z \in H$ gilt $\det((D\varphi)_z > 0)$. Dann ist φ durch $\varphi(i) \in H$ und $(D\varphi)_i(i) \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Geometrisch, unter Benutzung der Tatsache, dass Isometrien winkelerhaltend sind. Wir bemerken zuerst, dass $\delta(t) = \varphi(ie^t)$ eine geodätische Kurve mit $\delta(0) = \varphi(i)$ und $\dot{\delta}(0) = (D\varphi)_{ie^0}(i) = (D\varphi)_i(i)$ ist, also durch $\varphi(i) \in H$ und $(D\varphi)_i(i) \in \mathbb{C}$ bestimmt. Insbesondere kennen wir auch $\varphi(2i) \in H$. Sei $z \in H \setminus i\mathbb{R}_{>0}, g_i, g_z \subset H$ Geodäten mit $i, z \in g_i$ bzw. $2i, z \in g_z$, wegen $\measuredangle(g_i, h) = \measuredangle(\varphi(g_i), \varphi(h))$ und φ winkelerhaltend. Daraus folgt $\varphi(g_i)$ und $\varphi(g_z) \subset H$ festgelegt. Daraus erhalten wir $\varphi(z) = \varphi(g_i) \cap \varphi(g_z)$. Dies ist ein eindeutiger Schnittpunkt, da es Halbkreise senkrecht auf H sind. $\square$



Definition. $\text{Iso}^+(H) = \{\varphi : H \to H \mid \varphi \text{ ist eine orientierungserhaltende Isometrie}\}$ Dies ist eine Gruppe unter der üblichen Komposition.

Für alle $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ gilt $\varphi_A \in \text{Iso}^+(H)$. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\Psi : SL(\mathbb{R}^2) \to \text{Iso}^+(H)$$
$$A \mapsto \varphi_A$$

welche ein Gruppenhomomorphismus ist: $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$

Theorem 2. *Ψ ist surjektiv, es gilt* $\ker(\Psi) = \left\{\pm E = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ *Insbesondere gilt* $\text{Iso}^+(H) \simeq SL(\mathbb{R}^2)/\pm E =: PSL(\mathbb{R}^2)$

Beweis.

1. $\ker(\Psi) = \{\pm E\}$: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$ mit $\varphi_A = Id_H$, d.h. für alle $z \in H$ $\frac{az+b}{cz+d} = z$ bzw. $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Wir folgern $c = 0, d = a, b = 0$. Also $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, mit $\det(A) = a^2 = 1 \implies a = \pm 1 (A = \pm E)$

2. Ψ ist surjektiv: Sei $\varphi \in \mathrm{Iso}^+(H)$. Betrachte $\varphi(h) = \varphi(i\mathbb{R}_{>0}) \subset H$. Aus obigen Ausführungen wissen wir, dass eine Möbiustransformation φ_A existiert mit $\varphi_A(h) = \varphi(h)$. Daraus folgt $\underbrace{\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi(h)}_{\in \mathrm{Iso}^+(H)} = h$. Nach einer Streckung $\varphi_B(z) = \lambda z$ gilt sogar $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi(i) = i$. Es kann sein, dass $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi$ die Geodäte h um 180° dreht, um den Punkt i. Entweder ist

$$\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi = \begin{cases} Id_H \implies \varphi = \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB} = \Psi(AB) \\ \varphi_C \implies \varphi = \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_{ABC} = \Psi(ABC) \end{cases}$$

□

Konsequenz. Isometrien von H, welche die Orientierung erhalten, sind Möbiustransformationen φ_A mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$

1.4 Distanz und Flächeninhalt

Seien $p, q \in H$.

Definition. $d_H(p,q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \to H \; C^1 \text{ mit } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$ wobei

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\dot\gamma(t)||_H \; dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_H} \; dt$$

Lemma 5. *Für alle $T \geq 1$ gilt : $d_H(i, Ti) = \log(T)$.*

Beweis. Betrachte zuerst die Kurve

$$\gamma : [0, \log(T)] \to H$$
$$t \mapsto ie^t$$

Es gilt $\gamma(0) = i, \gamma(\log(T)) = Ti$. Berechne

$$L(\gamma) = \int_0^{\log(T)} \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2}\langle ie^t, ie^t\rangle} \; dt$$
$$= \int_0^{\log(T)} 1 \; dt = \log(T)$$

Hier wird benutzt, dass $\langle \; , \; \rangle_H = \frac{1}{y^2}\langle \; , \; \rangle_{\mathbb{R}^2}$ und $y(\gamma(t)) = e^t$.

Sei nun $\delta : [a,b] \to H \; C^1$ mit $\delta(a) = i, \delta(b) = T$ ein beliebiger C^1-Weg. Schreibe

$\delta(t) = x(t) + iy(t)$ mit $\dot{\delta}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$. Schätze ab:

$$\begin{aligned}
L(\delta) &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\delta}(t), \dot{\delta}(t) \rangle_H}\ dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)}\ dt \\
&\geq \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{y}(t)^2}{y(t)^2}}\ dt \\
&= \int_a^b \left| \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \right|\ dt \\
&\geq \int_a^b \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\ dt = \log(y(b)) - \log(\underbrace{y(a)}_{=1}) = \log(T) - 0
\end{aligned}$$

□

Proposition 2. *Für alle $z, w \in H$ gilt*

$$\cosh(d_H(z,w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2 * \operatorname{im}(z) \operatorname{im}(w)}$$

Zur Erinnerung: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Bemerkungen.

1. Für $z = w$ gilt $d_H(z,w) = 0$, also $\cosh(d_H(z,w)) = 1$. Deshalb "+1"
2. Sei $x \in \partial H = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann gilt für festes $z \in H$:

   $$\lim_{w \to x} d_H(z,w) = +\infty$$

   da $\operatorname{im}(w) \to 0$. "Punkte im Rand ∂H sind unendlich weit weg"

Beweis. Seien zunächst $z, w \in i\mathbb{R}_{>0}$: schreibe $z = ia$ und $w = ib$ mit $a < b$, (sonst benutze $d_H(z,w) = d_H(w,z)$). Für den Weg $\gamma : [\log(a), \log(b)] \to H$ und $t \mapsto ie^t$, gilt $\gamma(\log(a)) = ia = z, \gamma(\log(b) = ib = w)$, und $L(\gamma) = \log(b) - \log(a)$. Für alle anderen Wege $\delta : [c,d] \to H$ mit $\delta(c) = z$ und $\delta(d) = w$ gilt:

$$\begin{aligned}
L(\delta) = \int_c^d ||\dot{\delta}(t)||_H\ dt &= \int_c^d \frac{1}{y(t)} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\ dt \\
&\geq \int_c^d \frac{1}{y(t)} \sqrt{(\dot{y}(t)^2)}\ dt
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$L(\delta) \geq \int_c^d \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\ dt = [\log(y(t))]_c^d = \log(y(d)) - \log(y(c)) = \log(b) - \log(a) = \log(\frac{b}{a})$$

Wir folgern $d_H(ia, ib) = \log(\frac{b}{a})$. Aus allem folgt dann $\cosh(d_H(ia, ib)) = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{a}{b}) = \frac{1}{2}\frac{b^2+a^2}{ab} = 1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}$ Also folgt die Proposition für $z, w \in i\mathbb{R}_{>0}$. Für den allgemeinen Fall: Seien $z \neq w \in H$ beliebig. Dann existiert eine Isometrie $\varphi : H \to H$ (eine Möbiustransformation $\varphi_A : H \to H$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$), welche die Geodäte durch z, w auf die Geodäte $i\mathbb{R}_{>0}$ abbildet (siehe oben).

Insbesondere gilt $\varphi(z) = ia$ und $\varphi(w) = ib$. Wir bemerken, dass

$$d_H(z, w) = d_H(\varphi(z), \varphi(w)) = d_H(ia, ib)$$

gilt (da φ eine Isometrie). Falls wir zeigen können, dass φ auch den Ausdruck

$$1 + \frac{|z-w|^2}{2\,\mathrm{im}(z)\,\mathrm{im}(w)}$$

erhält, dann sind wir fertig! Es reicht, dies für Möbiustransformationen des Typs 1 bis 3 zu zeigen.

1. $z \mapsto z + c \qquad (c \in \mathbb{R})$ invariant, da Differenz
2. $z \mapsto \lambda z \qquad (\lambda > 0)$ ok, da $|\lambda z - \lambda w|^2 = \lambda^2 |z-w|^2, \mathrm{im}(\lambda a) = \lambda\,\mathrm{im}(a)$
3. $z \mapsto -\frac{1}{z}$ Die letzte Transformation ist ok, da

$$1 + \frac{|-\frac{1}{z} + \frac{1}{w}|^2}{2\,\mathrm{im}(-\frac{1}{z})\,\mathrm{im}(-\frac{1}{w})} = 1 + \frac{\frac{|w-z|^2}{|z|^2|w|^2}}{2\frac{\mathrm{im}(z)}{|z|^2}\frac{\mathrm{im}(w)}{|w|^2}} = 1 + \frac{|w-z|^2}{2\,\mathrm{im}(z)\,\mathrm{im}(w)}$$

□

Flächeninhalt

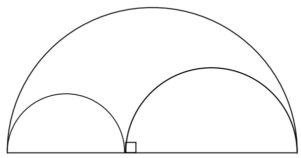
Sei $\Delta \in H$ ein geodätisches Dreieck. Nach Gauss-Bonnet (lokal) gilt:

$$\int_\Delta K\ dA = \underbrace{\int_\Delta (-1)\ dA}_{-area(\Delta)} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Also gilt $area(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Wir überprüfen dies durch Integration.

Spezialfall. $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Das heisst Δ ist ein *ideales Dreieck* mit Eckpunkten in ∂H



Ideales Dreieck mit Winkeln 0

Behauptung. *Es existiert eine Isometrie $\varphi : H \to H$, welche die Eckpunkte von Δ auf $-1, +1, \infty$ schickt!*

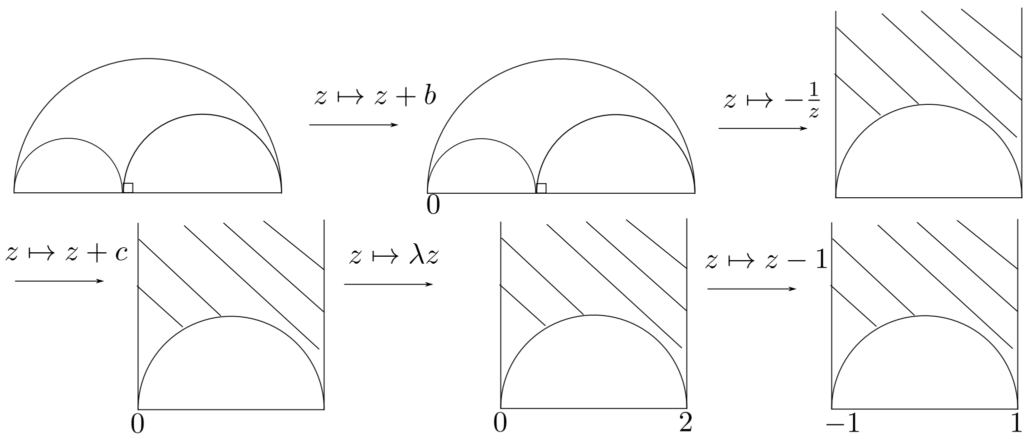


Abbildung 1.1: Beweis der Behauptung

Berechne nun den Flächeninhalt vom letzten Dreieck Δ_0

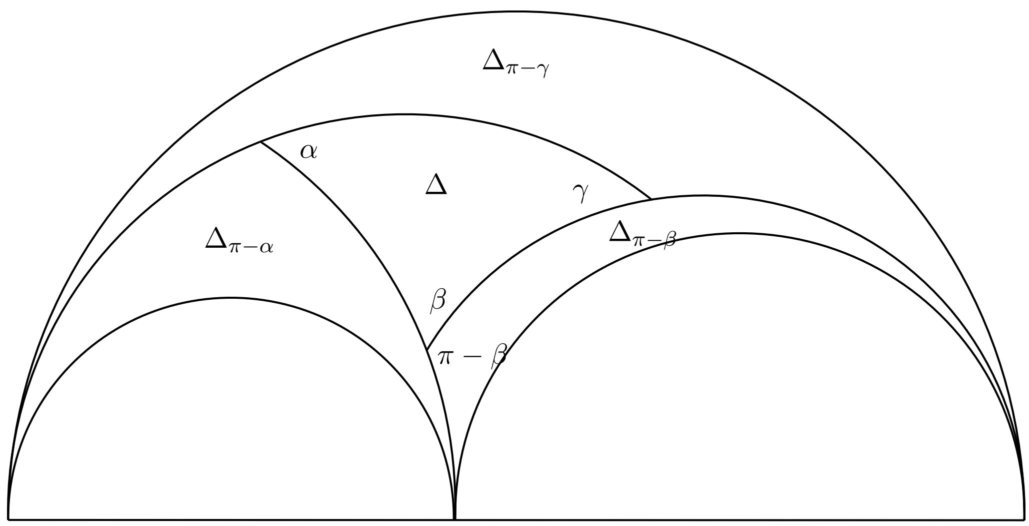
$$\begin{aligned}
area(\Delta) &= \int_\Delta dA \\
&= \int_\Delta \sqrt{EG - F^2}\ dxdy = \int_{\Delta_0} \left(\frac{1}{y^2} dy\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int\limits_{\sqrt{(1-x^2)}}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\ dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi
\end{aligned}$$

Hier wird benutzt $\int \frac{1}{y^2}\ dy = -\frac{1}{y}$. Ähnlich funktionert dies für ein Dreieck Δ_α mit $\alpha > 0$. $\beta = \gamma = 0. \implies$

$$area(\Delta_\alpha) = \int_{-1}^{\cos(\alpha)} (\int_{\sqrt{-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\ dy)\ dx = \cdots = \arcsin(\cos(\alpha)) - \arcsin(-1)$$

. Wir nutzen $cos\alpha = sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \implies area(\Delta_\alpha) = \pi - \alpha$

Im allgemeinen Fall $\alpha, \beta, \gamma > 0$ berechnen wir $area(\Delta)$ mit folgendem Ergänzungsbild.



Allgemeiner Fall

$fehltnochtext$

1.5 Ausblick Teichmüllertheorie

(Nicht mehr Prüfungsrelevant)

Erinnerung. Sei Σ_g die Standardfläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann gilt $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$.F Falls auf Σ_g eine Metrik mit konstanter Krümmung K existiert, dann muss K *negativ* sein.

$$\int_{\Sigma_g} K \; dA = 2\pi\chi(\Sigma_g) < 0$$

Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf $Sigma_g$ mit $K = -1$.

Lemma 6. *In H existieren rechtwinklige Sechsecke.*

Beweis. Starte mit idealem Seckseck: Ziehe Eckpunkte nach oben bis die Eckpunkte rechtwinklig aufeinander sind. Alternativer Beweis via Cayleytransformation. Verklebe zwei solche Secksecke S_1 und S_2 entlang dreier Seiten; erhalte eine Hose. (dies ist ein abstrakter Prozess, nicht in $\mathbb{R}^3$!). Dann verklebe Hosen zu geschlossenen Flächen. □