

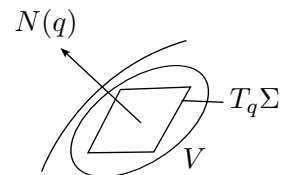
Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subset \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \rightarrow S^2$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gaussabbildung), falls für alle $p \in V$ gilt

$$N(q) \perp T_p \Sigma$$



Einheitsnormalenfeld

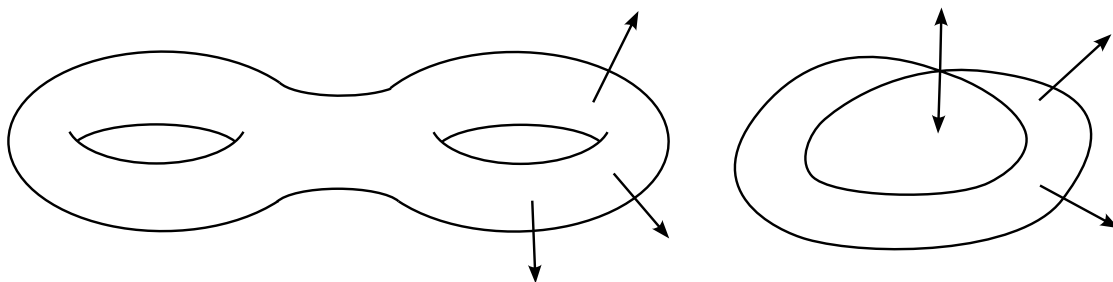
Existenz. Definiere

$$N : V \rightarrow S^2$$
$$q \mapsto \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q , da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dann ist $N : V \rightarrow S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt : $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \rightarrow S^2$, genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche \mathbb{R}^3 in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \rightarrow S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.



orientierbarer Brezel, Möbiusband ist nicht orientierbar

Sei nun $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale C^1 -Parametrisierung und $N : V \rightarrow S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt für alle $q \in V$:

- $N(q) \perp T_q \Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)} S^2$

Wir schliessen (da in \mathbb{R}^3):

$$T_q \Sigma = T_{N(q)} S^2$$

Bei letzterem gilt also für alle $p \in S^2 : p \perp T_p S^2$. Falls $N : V \rightarrow S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir für alle $p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{N(p)} S^2 = T_p \Sigma$$

die *Weingartenabbildung*.

Definition. $K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$. Die *Gauss'sche Krümmung* im Punkt $p \in \Sigma$

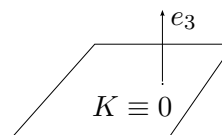
Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab, da

$$\det(-(DN)_p) = (-1)^2 \det(DN)_p$$

Beispiele.

$$1. \Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

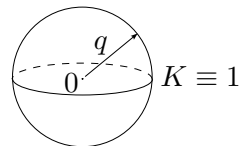
$$\begin{aligned} N : \Sigma &\rightarrow S^2 \\ q &\mapsto e_3 \quad (\text{oder } -e_3) \end{aligned}$$



N ist konstant, also gilt für alle $q \in \Sigma$: $(DN)_q = 0, K(q) = 0$.

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)

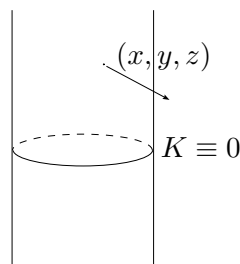
$$\begin{aligned} N : S^2 &\rightarrow S^2 \\ q &\mapsto q \end{aligned}$$



$N = Id_{S^2}$ (oder $-Id_{S^2}$), für alle $q \in S^2$ gilt also $(DN)_q = Id : T_q\Sigma \rightarrow T_q\Sigma$. Also $K(q) = \det(Id : T_q\Sigma \rightarrow T_q\Sigma) = 1$

3. $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} N : Z &\rightarrow S^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$



Wir bemerken: N hängt nicht von z ab. Also gilt für alle $q \in Z$:

$$(DN)_q(e_3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$$

$\implies 0$ ist ein Eigenwert der Abbildung $(DN)_q : T_qZ \rightarrow T_qZ \implies K(q) = 0$.

Zusatz. Genauere Betrachtung des dritten Beispiels: Für $q = (x, y, z) \in Z$ gilt:

$$T_qZ = \text{span}\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^v\}$$

Wir bestimmen $(DN)_q \stackrel{(*)}{=} v$. (*) Erklärung: Die Einschränkung von N auf $S^1 \times \{0\}$ ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von $(DN)_q$ bezüglich der Basis $\{e_3, -ye_1 + xe_2\}$

Definition. Die *mittlere Krümmung* im Punkt $p \in \Sigma$ ist $H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$, welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist: $\text{Spur}(-(DN)_p) = -\text{Spur}(DN)_p$

Bemerkung. Reguläre Flächen mit $H \equiv 0$ heissen *Minimalflächen*.

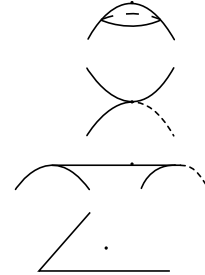
Beispiele.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ $K \equiv 0$ und $H \equiv 0$.
2. $\Sigma = S^2$ $K \equiv 1$ und $H \equiv 1 \iff \frac{1}{2} \text{Spur} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$3. \Sigma = Z \quad K \equiv 0 \text{ und } H \equiv \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$$

Notation. Ein Punkt $p \in \Sigma$ heisst:

- *elliptisch*, falls $K(p) > 0$
- *hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$ (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) = 0$

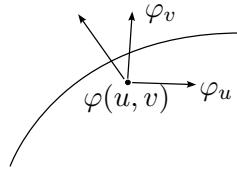


Proposition 1. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, welche lokale C^2 -Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist für alle $p \in \Sigma$ die Weingartenabbildung $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ symmetrisch, d.h. für alle $a, b \in T_p \Sigma$ gilt:

$$\langle (DN)_p(a), b \rangle_p = \langle a, (DN)_p(b) \rangle_p$$

Beweis. Es reicht, dies für die Basisvektoren $a = \varphi_u(p)$ und $b = \varphi_v(p)$ zu prüfen! Sei $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ eine C^2 -Parametrisierung mit $p \in \varphi(U)$. Betrachte die Komposition $N \circ \varphi : U \rightarrow S^2$. Für alle $q = (u, v) \in U$ gilt:

$$\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)} = 0 \text{ bzw. } \langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)} = 0 \quad (*)_v^u$$



Notation.

$$N_u(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v)) = \frac{d}{du}(N \circ \varphi)(u, v)$$

$$N_v(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_v(u, v)) = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi)(u, v)$$

und

$$\frac{d}{du}(*)_v : \quad \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v(\varphi \text{ ist } C^2)} \rangle = 0$$

$$\frac{d}{dv}(*)_u : \quad \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$$

Also: φ ist $C^2 \implies \varphi_{uv} = \varphi_{vu} \implies \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$.

\uparrow

S. von Schwarz

Ausgeschrieben:

$$\langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle = \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)), \varphi_u(u,v) \rangle$$

□

Korollar 1. $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren.

Bemerkung. Im Beweis haben wir die Annahme ($\varphi : U \rightarrow \Sigma$ ist C^2) benutzt: φ_{uv} ist vorgekommen. Diese Annahme ist essenziell, damit $N : \varphi(U) \rightarrow S^2$ differenzierbar ist. Tatsächlich gilt

$$N(\varphi(u,v)) = \pm \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

Wir benutzen, dass φ_u und φ_v differenzierbar sind, dass heißt $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ ist zweimal differenzierbar.

Beispiel. Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

f ist stetig differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar. Betrachte die Fläche $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x)\} = "T_f \times \mathbb{R}"$, welche die globale C^1 -Parametrisierung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \\ (u, v) \mapsto (u, v, f(u))$$

besitzt. Berechne

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)), \varphi_v = (0, 1, 0)$$

und

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f'(u), 0, 1)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$$

Für $u \leq 0$ gilt: $N(u, v) = (0, 0, 1) = e_3$. Für $u \geq 0$ gilt: $N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u, 0, 1)$.

Versuch, $\frac{d}{du}N(0, 0)$ zu berechnen:

1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon < 0} \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{(N(\varepsilon, 0) - N(0, 0))}_{=e_3} = 0$
2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} (N(\varepsilon, 0) - N(0, 0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} - 1 \right) = (2, 0, \dots) \neq e_3$

Im 2. Punkt wird genutzt, dass $\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+\frac{x}{2}}$, somit $\frac{-2\varepsilon}{1+4\varepsilon^2} \underbrace{\approx}_{\frac{1}{1+x} \approx 1-x} -2\varepsilon(1-2\varepsilon^2) \approx -2$

Also ist $N(u, v)$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht differenzierbar!

Annahme. Ab jetzt besitzen alle regulären Flächen mindestens lokale C^2 -Parametrisierungen.

Korollar 2 (Zur Proposition). $(DN)_p : T_p N \rightarrow T_p \Sigma$ lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren. D.h. Die Weingartenabbildung $(DN)_p$ hat zwei orthogonale Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p \Sigma$ zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} K(p) &= \det((DN)_p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ H(p) &= \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

Definition. Die von den Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p \Sigma$ aufgespannten Richtungen heißen *Hauptkrümmungsvektoren*. Eine C^1 -Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \Sigma$ heißt *Krümmungslinie*, falls für alle $t \in (a, b)$ gilt:

$\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \Sigma$ ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung $(DN)_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)} \Sigma \rightarrow T_{\gamma(t)} \Sigma$

Beispiele.

1. Ebene $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Hier gilt für alle $p \in E : (DN)_p = 0$, also sind die Hauptkrümmungsrichtungen nicht wohldefiniert. Alle Geraden in E sind Krümmungslinien (Sogar alle C^1 -Kurven $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$).
2. Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Hier gilt für alle

$$p \in Z : (DN)_p(e_3) = 0$$

also sind alle (vertikalen) Mantellinien in Z Krümmungslinien. Mehr noch: Bezüglich der Basis $\{e_3, -ye_1 + xe_2\}$ von $T_{(x,y,z)} \Sigma$ mit $(x, y, z) = p$ hat $(DN)_p$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten also eine zweite Schar von Krümmungslinien: *horizontale Kreise*. In Punkten mit $(DN)_p \neq \lambda \text{Id}_{T_p \Sigma}$ (kein vielfaches der Identität) stehen die Krümmungslinien *senkrecht* aufeinander.

1.2 Die zweite Fundamentalform

Motivation. Ziel der nächsten beiden Abschnitte:

$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}$$

wobei I_p, II_p die erste, bzw. die zweite Fundamentalform ist.

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -reguläre Fläche, und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ eine C^2 -Kurve mit $\alpha(0) = p \in \Sigma$ und $\dot{\alpha}(0) = v \in T_p \Sigma$.

Proposition 2. (Satz von Mensier) Sei $N : V \rightarrow S^2$ ein lokales Einheitsnormalenfeld ($p \in V \subset \Sigma$). Dann gilt

$$\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$$

Insbesondere hängt die normale Beschleunigungskomponente $\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle$ nur von $p = \alpha(0)$ und $v = \dot{\alpha}(0)$ ab.

Beweis. Für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle &= 0 && \text{(per Definition von } T_p\Sigma \text{ und } N(p)) \\ \iff \langle \ddot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle + \langle \dot{\alpha}(t), \underbrace{\frac{d}{dt}N(\alpha(t))}_{(DN)_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))} \rangle &= 0 \\ \uparrow & && \\ \text{ableiten nach } t & && \end{aligned}$$

Für $t = 0$ erhalten wir

$$\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$$

□

Definition. Die zweite Fundamentalform von Σ an der Stelle p ist die Abbildung

$$\begin{aligned} II_p : T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto -\langle v, (DN)_p(v) \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Vorzeichen von II_p hängt von N ab. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar ist, dann lässt sich eine globale Wahl von N fixieren (Wahl einer Orientierung).

Erinnerung. Die erste Fundamentalform, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ hat bezüglich jeder lokalen Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ eine Matrix $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, bezüglich der Basis $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ von $T_p\Sigma$. $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

Koeffizienten für II_p :

- $e = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$ da $(DN)_{\varphi(u,v)}$ symmetrisch.
- $g = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle$

Notation.

$$N_u = \frac{d}{du}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)$$

$$N_v = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)$$

Wir erhalten also mit $\langle \varphi_u, N \rangle = 0$ und ableiten nach u : $\langle \varphi_{uu}, N \rangle + \langle \varphi_u, N_u \rangle = 0$, analog für v

- $e = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle \quad \langle \varphi_u, N \rangle = 0$ nach v ableiten
- $g = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle \quad \langle \varphi_v, N \rangle = 0$ nach v ableiten

Beispiel. Funktionsgraph von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (C^2)
 $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$. Globale C^2 -Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Gamma_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (1, 0, f_u(u, v)) \\ \varphi_v(u, v) &= (0, 1, f_v(u, v)) \\ \varphi_{uu}(u, v) &= (0, 0, f_{uu}(u, v)) \\ \varphi_{uv}(u, v) &= \varphi_{vu}(u, v) = (0, 0, \underbrace{f_{uv}}_{=f_{vu}}) \\ \varphi_{vv}(u, v) &= (0, 0, f_{vv}(u, v)) \\ N(\varphi(u, v)) &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \end{aligned}$$

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale C^2 -Parametrisierung und $N : V \rightarrow S^2$ das dazugehörige normale Einheitsfeld.

Schreibe die Abbildungsmatrix von $(DN)_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma = T_{N(p)}S^2$ bezüglich der Basis

$\{\varphi_u, \varphi_v\}$ von $T_p\Sigma : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, d.h.

$$(DN)_p(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$(DN)_p(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Bemerkung. Falls φ_u und φ_v nicht orthogonal sind, dann gilt im Allgemeinen $a_{12} \neq a_{21}$.

Lemma 1. Mit den oben eingeführten Koeffizienten gilt:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{(DN)_p^T} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned} e &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle \\ &= -\langle \varphi_u, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \rangle \\ &= -a_{11}E - a_{21}F \\ f &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle = \dots = -a_{11}F - a_{21}G \\ f &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}E - a_{22}F \\ g &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}F - a_{22}G \end{aligned}$$

□

Korollar 3.

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det II_p}{\det I_p}$$

(Alle Koeffizienten sind vom Punkt (u, v) abhängig!)

Beweis.

$$\det(DN)_p = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \left(- \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

und $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$

□

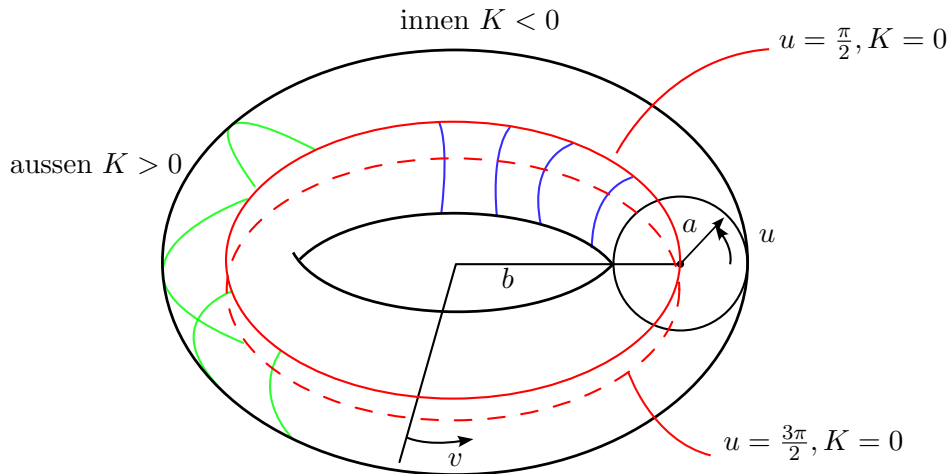
Beispiel. Rotationstorus $T \subset \mathbb{R}^3$ mit Radien $0 < a < b$. Lokale C^∞ -Parametrisierung $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T$:

$$\varphi(u, v) = ((b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), a \cdot \sin(u))$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (-a \cdot \sin(u) \cos(v), -a \cdot \sin(u) \sin(v), a \cdot \cos(u)) \\ \varphi_v(u, v) &= (-(b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), 0) \\ \varphi_{uu} &= \dots \\ \varphi_{uv} &= \dots \\ \varphi_{vv} &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2 \\
F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\
G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (b + a \cdot \cos(u))^2 \\
N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \stackrel{\text{siehe Flächeninhalt}}{=} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{a(b + a \cdot \cos(u))} \\
\Rightarrow e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \|\varphi_{uu}\| = a \\
&\text{dies da } \varphi_{uu} \text{ und } N \text{ parallel sind.} \\
f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\
g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = (\text{Komplizierte einfache Rechnung}) \\
&= \cos(u) \cdot (b + a \cdot \cos(u)) \\
\Rightarrow K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \underbrace{\frac{\cos(u)}{a}}_{>0} \underbrace{(b + a \cdot \cos(u))}_{>0 \text{ da } b > a}
\end{aligned}$$



Bemerkung. Es gilt

$$\begin{array}{ll}
K(\varphi(u, v)) > 0 & u < \frac{\pi}{2} \text{ oder } u > \frac{3\pi}{2} \\
= 0 \text{ falls} & u = \frac{\pi}{2} \text{ oder } u = \frac{3\pi}{2} \\
< 0 & u > \frac{\pi}{2} \text{ und } u < \frac{3\pi}{2}
\end{array}$$

Anwendung (Krümmung von Funktionsgraphen). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 und $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$. Mit der lokalen Parametrisierung $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} e &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_u) \rangle = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ f &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ g &= -\langle \varphi_v, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \end{aligned}$$

Berechne $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ und erhalte

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

Bemerkung. $f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2 = \det(Hf)_{(u,v)}$ mit Hf = Hessische Matrix $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}$

Folgerung:

$$\begin{aligned} K(\varphi(u, v)) &> 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} > 0 \\ K(\varphi(u, v)) &= 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} = 0 \\ K(\varphi(u, v)) &< 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} < 0 \end{aligned}$$

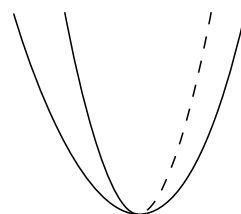
In einem kritischen Punkt p von f (d.h. $(Df)_p = 0$) ist die Krümmung $K = \det(Hf)_p$.

Beispiele.

1. $f(x, y) = x^n + y^m$ mit $n, m \geq 2$.

Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$

$$\begin{aligned} (Hf)_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix} \\ \implies K(\varphi(0, 0)) &= K(0) = 0 \text{ falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ \implies K(\varphi(0, 0)) &= K(0) = 4 \text{ falls } m = 2 \text{ und } n = 2 \end{aligned}$$



Graph mit $n = m = 2$

Alternative $f(x, y) = -(x^2 + y^2) \implies K(0) = 4$

2. $f(x, y) = x^n - y^n$ mit $n, m \geq 2$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & -m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$\implies K(0) = \begin{cases} 0 & m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ -4 & m = n = 2 \end{cases}$$

$$\text{Hier gilt } K(\varphi(u, v)) = \frac{-4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} = -\frac{4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} < 0$$

Wir folgern $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} K(\varphi(u, v)) = 0$, ebenso $\lim_{v \rightarrow \infty} K(\varphi(u, v)) = 0$.

Frage. Existiert $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} C^2$, so dass Γ_f konstant -1 gekrümmt ist?

Antwort. Nein! (Hilbert 1901)

Im Spezialfall $f(x, y) = g(x) + h(y)$ mit $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} C^2$ können wir “elementar” zeigen, dass Γ_f nicht konstant -1 gekrümmt sein kann (vergleiche Serie 6). Mit der obigen Formel erhalten wir

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{g_{uu} \cdot h_{vv}}{(1 + g_u^2 + h_v^2)^2} \stackrel{!}{=} -1$$

$$\implies g_{uu} \cdot h_{vv} < 0$$

Annahme: $h_{vv} < 0, g_{uu} > 0$ (für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ da h, g stetig)

Fixiere (ein beliebiges) $v \in \mathbb{R}$ und erhalte eine Differentialgleichung für g der Form

$$\frac{g_{uu} \cdot a}{(1 + g_u^2 + b^2)} = -1$$

mit $a = h_{vv}(v) < 0$ und $b = h_v(v)^2 \geq 0$

$$\implies g_{uu} = \underbrace{-\frac{1}{a}}_{>0 \text{ und } =: c} (1 + g_u^2 + b)^2 = c \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 > c \cdot (1 + 2g_u^2)$$

Schreibe $s(u) = g_u(u) \implies s' > c(1 + 2s^2)$ (evtl. reicht sogar $s' > 2s^2$)

Wir lösen die Differentialgleichung $s' = c \cdot (1 + 2s^2)$ und bemerken, dass diese in endlicher Zeit divergiert.

Beispiel (nach Analysis 2). $s' = s^2$

Lösung zur Anfangsbedingung: $s(0) = 1 : s(t) = \frac{1}{1-t}$. Divergiert für $t \rightarrow 1$.

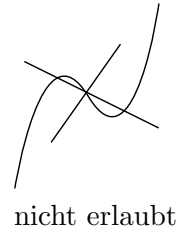
Rotationsflächen

Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^2 -Kurve. Schreibe

$$\gamma(t) = (r(t), h(t))$$

mit $r(t)$ der Rotation und $h(t)$ der Höhe. Wir treffen folgende Annahmen:

1. $r(t) > 0$
2. $h'(t) > 0$
3. $||\dot{\gamma}(t)|| = 1$, d.h. $\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2 = 1$ ("γ ist nach Bogenlänge parametrisiert")



Konstruiere eine Rotationsfläche mit folgender Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) &\rightarrow \Sigma \\ (u, v) &\mapsto (r(u) \cos(v), r(u) \sin(v), h(u)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (r'(u) \cos(v), r'(u) \sin(v), h'(u)) \\ \varphi_v &= (-r(u) \sin(v), r(u) \cos(v), 0) \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Einheitsnormalenfeld:

$$N(\varphi(u, v)) = (-h'(u) \cos(v), -h'(u) \sin(v), r'(u))$$

Kontrolle:

- $||N|| = 1$, d.h. $\langle N, N \rangle = 1$ (ok, da $h'(u)^2 + r'(u)^2 = 1$)
- $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ (ok)
- $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ (ok)

Berechne

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 \quad (\text{da } h'^2 + r'^2 = 1) \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = r(u)^2 \end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = h''(u)r'(u) - h'(u)r''(u) \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = r(u)h'(u) \end{aligned}$$

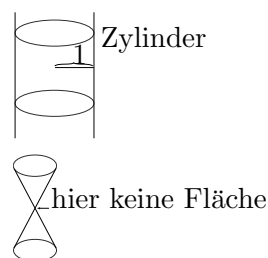
$$\begin{aligned}\Rightarrow K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(h''r' - h'r'') \cdot r \cdot h'}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (h''r'h' - r''h'^2) = \frac{1}{r} \cdot (-r'^2r'' - h'^2r'') = -\frac{r''(u)}{r(u)}\end{aligned}$$

Hierbei wurde genutzt, dass $r'^2 + h'^2 = 1 \Rightarrow 2r'r'' + 2h'h'' = 0$. Wir schliessen, dass $K(\varphi(u, v))$ nicht von v abhängig ist!

Spezialfall (Rotationsflächen mit konstanter Krümmung).

1. $K = 0$, d.h. $r''(u) = 0$ ($\Rightarrow r(u) = a \cdot u + b$). Anfangsbedingungen

- $r(0) = 1$
- $r'(0) = 0$
- $h(0) = 0$



$$\Rightarrow r(u) = 1, h(u) = u \text{ mit } r'^2 + h'^2 = 1 \text{ und } h' > 0 \Rightarrow h' = 1$$

Variation der Anfangsbedingung: $r'(0) = a \neq 0$ führt zu einem Kreiskegel: (Betrachte hier $\gamma : (x, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ statt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$)

2. $K = 1$, d.h. $r'' = -r$ Anfangsbedingungen

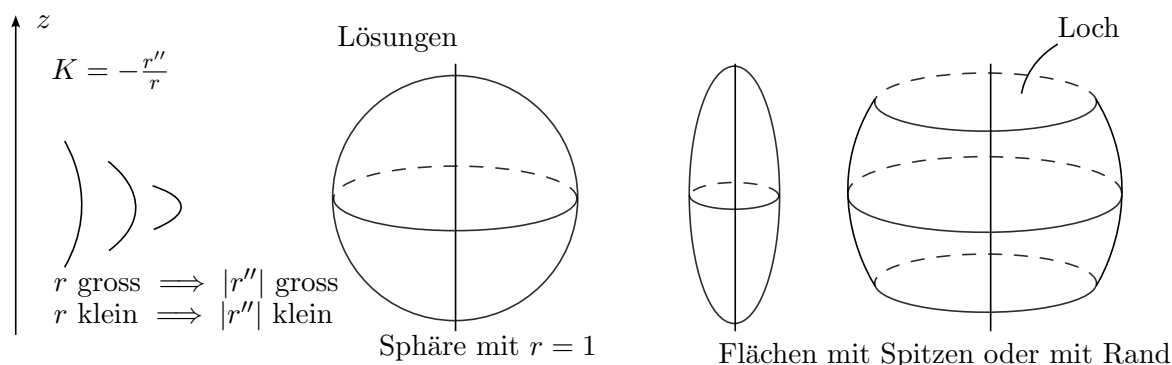
- $r(0) = 1$
- $r'(0) = 0$
- $h(0) = 0$

$\Rightarrow r(u) = \cos(u), h(u) = \sin(u)$. Einheitssphäre S^2 . Variation der Anfangsbedingung führt zu vertikal verschobenen Einheitssphären, oder keiner Lösung;

Beispiel. $r(0) = 2, r'(0) = 0, h(0) = 0 \Rightarrow$

- $r(u) = 2 \cos(u)$
- $h(u) = \int_0^u h'(x) dx = \int_0^u \sqrt{1 - 4(\sin(x))^2} dx$

mit $r'^2 + h'^2 = 1$, hierbei handelt es sich um ein elliptisches Integral, nicht ausdrückbar durch elementare Funktionen.



3. $K = -1$, d.h. $r'' = r$. Anfangsbedingungen

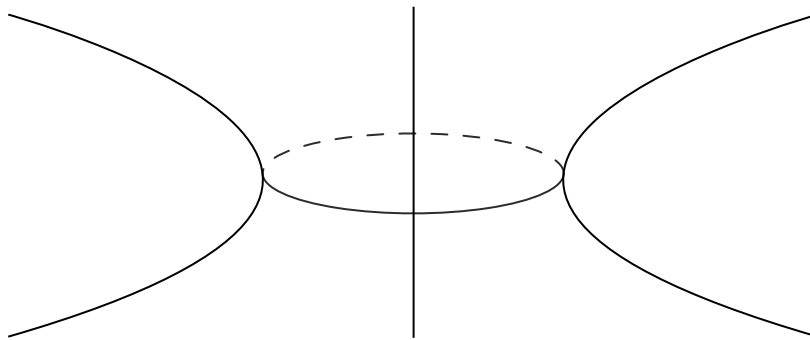
- $r(0) = 1$
- $r'(0) = 0$
- $h(0) = 0$

$$\implies r(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \cosh(u), \quad h(u) = \dots$$

Es gilt:

$$r'(u) = \cosh(u)' = \sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \xrightarrow{u \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$$

Folglich existiert auch hier die Fläche Σ nur über einem gewissen Intervall der Form $(-h_0, h_0)$. (vgl. Serie 7)



1.4 Theorema Egregium

Ziel. Die Krümmung ist durch die Koeffizientenfunktionen E, F, G bestimmt. Genauer: durch E, F, G und ihre Ableitungen bestimmt.

Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale C^2 -Parametrisierung und $N : V \rightarrow S^2$ die zugehörige lokale Gaussabbildung. Für alle $p \in V$ gilt.

$$K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Matrix von $(DN)_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ bezüglich der Basis

$$\{\varphi_u, \varphi_v\} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dass heisst

$$N_u = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$N_v = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Es gilt: $e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle, g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$ und wir folgern:

$$\varphi_{uu} - eN \perp N \implies \varphi_{uu} - eN \in \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$$

Ähnlich existieren eindeutige Koeffizienten $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2 \in \mathbb{R}$ sogenannte Christoffelsymbole, mit

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1 \cdot \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \cdot \varphi_v\end{aligned}$$

Berechne nun

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} (\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle}_{=E}) \right) = \frac{1}{2} E_u$$

und

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} (\underbrace{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}_{=F}) - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \quad \left(\frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2 \cdot \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle \right)$$

Andererseits gilt nach obigen Ansatz für $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$ auch

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \cdot E + \Gamma_{11}^2 \cdot F \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G\end{aligned}$$

die Gleichheiten folgt jeweils aus $\langle N, \varphi_u \rangle$

$$\implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

Analog erhalten wir via φ_{uv} und φ_{vv}

$$\begin{aligned}\bullet \quad & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix} \\ \bullet \quad & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Beachte hier: $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 > 0$, da I_p positiv definit ist.

Konsequenz. Die Γ_{ij}^k sind durch E, F, G und ihre partiellen Ableitungen bestimmt. K ist durch E, F, G bestimmt.

Erinnerung.

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= eN + \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v \\ \varphi_{uv} &= fN + \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v \\ \varphi_{vv} &= gN + \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v\end{aligned}$$

Via $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle$ etc, erhalten wir Γ_{ij}^k als Funktion von E, F, G und ihren ersten partiellen Ableitungen.

Lemma 2. Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale C^3 -Parametrisierung. Dann gilt $\forall p \in V$:

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2$$

Korollar 4 (Theorema Egregium, Gauss 1827). Die Krümmung K lässt sich durch E, F, G und deren zwei partiellen Ableitungen ausdrücken.

Beweis des Korollars. Es gilt $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0$ da $I_p : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit ist.

$$\implies K = -\frac{1}{E}(\dots)$$

wobei die \dots ein Ausdruck in Γ_{ij}^k und erste partielle Ableitungen, also Ausdruck in E, F, G und zweite partielle Ableitungen sind. \square

Bemerkung. Das Korollar gilt auch für Flächen der Regularität C^2 .

Beweis Lemma. Wir berechnen $\varphi_{vuu} = \varphi_{uuv}$

1.

$$\varphi_{vuu} = \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_{uu}) = e_v N + e \underbrace{\quad}_{a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v} N_v + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + \Gamma_{11}^1 \varphi_{vu} + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vv}$$

2.

$$\varphi_{uuv} = \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_{uv}) = f_u N + f \underbrace{\quad}_{a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v} N_u + (\Gamma_{12}^1)_u \varphi_u + \Gamma_{12}^1 \varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u \varphi_v + \Gamma_{12}^2 \varphi_{uv}$$

Die φ_v -Komponente von φ_{vuu} und φ_{uuv} ist gleich, also

$$e \cdot a_{22} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = f \cdot a_{21} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \quad (*)$$

(Benutze $\varphi_{uv} = fN + \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v$, etc.)

Erinnerung.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ \implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= -(a_{ij})^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \stackrel{K=\det(a_{ij})}{=} -\frac{1}{K} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ \implies E &= -\frac{1}{K}(a_{22}e - a_{21}f) \end{aligned}$$

bzw. $-EK = a_{22}e - a_{21}f$ (gilt auch für $K = 0$)

$$\implies -EK \stackrel{(*)}{=} 6 \text{ Terme in } \Gamma_{ij}^k \text{ (siehe Lemma)}$$

\square

Bemerkung. Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für $-FK$ und $-GK$.