Kapitel 1

Ebene hyperbolische Geometrie

Knörrer: Geometrie Kapitel 3

Ziel. Konstruktion einer *vollständigen* Fläche H mit konstanter Krümmung -1, analog zur Ebene ($K \equiv 0$) und Sphäre ($K \equiv 1$).
Vollständig: Jede geodätische Kurve $\gamma : (a, b) \to H$ lässt sich geodätisch auf $\mathbb{R}$ erweitern.

Motivation. *Gauss-Bonnet*

$$\int_\Sigma K \; dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

wobei Σ eine kompakte, vollständige Fläche. Falls $\chi(\Sigma) < 0$ und die Krümmung K konstant ist, dann muss K negativ sein!

Theorem 1 (Klassifikation der Flächen)**.** *Sei Σ eine topologische (glatte), kompakte, vollständige, orientierbare, zusammenhängende Fläche. Dann ist Σ zu einer der Flächen Σ_g homöomorph (diffeomorph):*

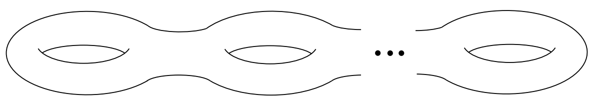

Abbildung 1.1: Σ_g mit g Henkel

Es gilt: $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$ *falls* $g \geq 2$.

1.1 Eine Riemannsche Metrik mit K=-1

Naiver Ansatz zur Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ mit $K = -1$.

$$\langle\ ,\ \rangle_p = h(p)\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

wobei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ positiv und glatt ist. Für die Koeffizientenfunktionen E, F, G gilt also:

- $E(x, y) = \langle e_1, e_1\rangle_{(x,y)} = h(x, y)$
- $F(x, y) = \langle e_1, e_2\rangle_{(x,y)} = 0$
- $G(x, y) = \langle e_2, e_2\rangle_{(x,y)} = h(x, y)$

Terminologie. Falls $E = G$ und $F = 0$ gilt, dann heissen die Koordinaten *konform* oder *isotherm.*

Eine kleine Rechnung zeigt

$$K = -\frac{1}{2h(x, y)}\Delta(\log(h(x, y)))$$

wobei $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ der Laplaceoperator (siehe Serie 10).
Nun führt $K = -1$ zu einer Differentialgleichung für h:

$$2h(x, y) = \Delta(\log(h(x, y)))$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung*, welche schwierig zu lösen ist. Mit dem Lösungsansatz $h(x, y) = y^n$ finden wir eine Lösung $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$, welche allerdings nur auf der obenen Halbebene $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ definiert ist.

Definition. Die *hyperbolische Ebene* ist die Menge $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$\langle\ ,\ \rangle_{x+iy} = \frac{1}{y^2}\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

Bemerkungen.

1. Die Translation $z \mapsto z+a$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Isometrie von H. Tatsächlich, schreibe

$$\begin{aligned} T : H &\to H \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y) \end{aligned}$$

   Für alle $p \in H$ gilt $(DT)_p = Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w\rangle_p \overset{?}{=} \langle (DT)_p(v), (DT)_p(w)\rangle_{T(p)} = \langle v, w\rangle_{T(p)}$$

   Stimmt, da $y(p) = y(T(p))$, und somit $\langle\ ,\ \rangle_p = \langle\ ,\ \rangle_{T(p)}$