Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subset \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \to S^3$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gauss-Abbildung), falls

$$\forall p \in V \text{ gilt: } N(q) \perp T_p\Sigma$$

Zusatz. *Flächenelement* $\sqrt{EG - F^2}$

$$EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Existenz. Definiere $N : V \to S^2$

$$q \mapsto \frac{\varphi u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q, da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dan ist $N : V \to S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt : $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \to S^2$, genannt *Gaussabbildung.* Tatsächlich trennt eine solche Fläche $\mathbb{R}^3$ in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \to S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.

zwei zeichnungen, torus und moebiusband

Sei nun $\varphi : U \to V \subset \Sigma$ eine lokale C^1-Parametrisierung und $N : V \to S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt $\forall q \in V$:

- $N(q) \perp T_q\Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)}\Sigma$

$\implies T_q\Sigma = T_{N(q)}S^2$ für letzteres gilt $\forall p \in S^2 : p \perp T_pS$
Falls $N : V \to S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir $\forall p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p\Sigma \to T_{N(p)}S^2 = T_p\Sigma$$

die *Weingartenabbildung*.

Definition.

$$K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$$

Gaussische Krümmung im Punkt $p \in \Sigma$

Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab,
da $\det -(DN)_p = (-1)^2 \cdot \det (DN)_p$ ist.

Beispiel. 1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
$N : \Sigma \to S^2$

$q \mapsto e_3(\text{oder } -e_3)$
N ist konstant, also gilt $\forall q \in \Sigma\ (DN)_q = 0; K(q) = 0.$

$\boxed{\textit{K equiv to 1}}$

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)
$N : S^2 \to S^2$

$q \mapsto q$

$\boxed{\textit{Einheitssphäre mit Krümmung = 1}}$

$N = Id_{S^2}$ (oder $-Id_{S^2}$)
$\forall q \in S^2$ gilt also $(DN)_q = Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma$
$\implies K(q) = \det Id : T_q\Sigma \to T_q\Sigma = 1$

3. $Z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \in \mathbb{R}^{\not\models}$
$N : Z \to S^2$

$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$
Wir bemerken: N hängt nicht von z ab.

$\boxed{\textit{Zylinder mit K equiv to 0}}$

Also gilt für alle $q \in Z : (DN)_q(e_3) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$
$\implies$ 0 ist ein Eigenwert der Abbildung $(DN)_q : T_qZ \to T_qZ \implies K(q) = 0.$

Zusatz. *Genauere Betrachtung des dritten Beispiels:*

Für $q = (x, y, z) \in Z$ *gilt:* $T_q Z = span\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^{v}\}$
Wir bestimmen $(DN)_q \overset{(*)}{=} v$
(*) Erklärung: Die Einschränkung von N *auf* $S' \times \{0\}$ *ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von* $(DN)_q$ *bezüglich der Basis* $\{e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2\}$

Definition. Die *mittlere Krümmung* im Punkt $p \in \Sigma$ ist $H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$, welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist:

$$\mathrm{Spur}(-(DN)_p) = -\mathrm{Spur}(DN)_p$$

Bemerkung. Reguläre Flächen mit $H \equiv 0$ heissen *Minimalflächen.*

Beispiele.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. K \equiv 0$ und $H \equiv 0$.
2. $\Sigma = S^2$. $K \equiv 1$ und $H \equiv 1 \Longleftarrow \frac{1}{2}\ \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\Sigma = Z$. $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2} \Longleftarrow \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$

Notation. Ein Punkt $p \in \Sigma$ heisst:

- *elliptisch*, falls $K(p) > 0$
- *hyperbolisch.* falls $K(p) < 0$ (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) = 0$

minibeispiele zu all diesen

Proposition 1. *Sei* $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ *eine reguläre Fläche, welche lokale* C^2*-Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist* $\forall p \in \Sigma$ *gilt:*

$$\langle (DN)_p(a), b\rangle_p = \langle a, (DN)_p(b)\rangle_p$$

Beweis. Es reicht, dies für die Basisvektoren $a = \varphi_u(p)$ und $b = \varphi_v(p)$ zu prüfen! Sei $\varphi : U \to \Sigma$ eine C^2-Parametrisierung mit $p \in \varphi(U)$. Betrachte die Komposition $N \circ \varphi : U \to S^2$. $\forall q = (u, v) \in U$ gilt: $\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v)\rangle_{\varphi(u,v)} \overset{\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^3}{=} 0$ (*)

1 zeichnung mit phiU und phiV usw

Notation. $N_u(u,v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)) = \frac{d}{du}(N \circ \varphi)(u,v)$ und
$N_v(u,v) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)) = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi)(u,v)$
$\frac{d}{du}(*)_v : \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v(\varphi \text{ ist } C^2)} \rangle = 0$
$\frac{d}{dv}(*)_u : \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$
φ ist $C^2 \implies \varphi_{uv} = \varphi_{vu}$
$\implies \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$
ausgeschrieben: $\langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle = \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v)), \varphi_u(u,v) \rangle$
$= \langle (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v) \rangle$

□

Bemerkung. Im Beweis haben wir die Annahme ($\varphi : U \to \Sigma$ ist C^2) benutzt: φ_{uv} ist vorgekommen. Diese Anname ist essenziell, damit $N : \varphi(U) \to S^2$ differenzierbar ist. Tatsächlich gilt $N(\varphi(u,v)) = \pm \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ Wir benutzen, dass φ_u und φ_v differenzierbar sind, dass heisst $\varphi : U \to \Sigma$ ist zweimal differenzierbar.

Beispiel. Sei
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, \text{ falls } x \leq 0 \\ x^2, \text{ falls } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$
f ist differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ *nicht* differenzierbar
Betrachte die Fläche $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_3 | z = f(x)\} - \Gamma f \times \mathbb{R}$", welche die globale C^1-Parametrisierung $\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^2 \to \Sigma \\ (u,v) &\mapsto (u,v,f(u)) \end{aligned}$ besitzt.

1.2 Die zweite Fundamentalform

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Rotationsflächen

1.4 Theorema Egregium