

# Kapitel 1

## Untermannigfaltigkeiten und Flächen

Zentral für das Verständnis dieser Vorlesung sind Untermannigfaltigkeiten (UMF). Der Prototyp einer Untermannigfaltigkeit hat immer die Form

$$\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{wobei } k < n$$

Eine UMF sollte bis auf lokale Diffeomorphismen “so aussehen”



Prototyp einer UMF in  $\mathbb{R}^3$

**Definition.** Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  heißt Diffeomorphismus falls  $\varphi$  bijektiv, und sowohl  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  unendlich oft differenzierbar. Schreibe auch  $\varphi \in (C^\infty)$  bzw.  $\varphi$  glatt.

**Bemerkung.** In der Literatur wird manchmal auch nur  $C^1$ , also stetig differenzierbar gefordert.

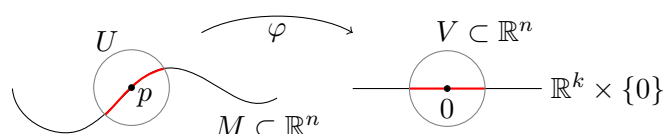
**Beispiele.**

1.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  ist ein Diffeomorphismus mit Umkehrung  $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto e^x$
2.  $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Diffeomorphismus mit  $\varphi^{-1} = \arctan$   
 $x \mapsto \tan(x)$
3.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist *kein* Diffeomorphismus,  $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  bei  $x = 0$  nicht diff'bar  
 $x \mapsto x^3$

**Erinnerung** (Umkehrsatz). Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $C^1$  (also stetig diff'bar) und  $p \in \mathbb{R}^n$  mit  $\det(Df)_p \neq 0$ . Dann existieren  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $p \in U$  und  $V = f(U)$ , so dass die Einschränkung  $f|_U: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus (im  $C^1$ -Sinn ist). "f hat bei  $p$  eine lokale Umkehrung in  $C^1$ ."

## 1.1 Untermannigfaltigkeit

**Definition.** Eine abgeschlossene Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heisst Untermannigfaltigkeit der Dimension  $k$  falls  $\forall p \in M$  zwei offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$  und  $0 \in V$  existieren, sowie ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V$  mit  $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$  und  $\varphi(p) = 0$



**Beispiel.** Die  $(x\text{-Achse} \cup y\text{-Achse}) \setminus \{0\} = M$  ist zwar lokal diffeomorph zu  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ , ist aber nicht abgeschlossen. Also *keine* UMF in  $\mathbb{R}^2$ !

**Frage.** Wie konstruieren wir nicht triviale Beispiele von Untermannigfaltigkeiten?

**Definition.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  mit  $m < n$ . Ein Punkt  $p$  heisst *regulär* (für f), falls das Differential  $(Df)_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv ist. Ein Wert  $w \in \mathbb{R}^m$  heisst *regulär*, falls alle  $p \in f^{-1}(w)$  regulär sind. Nicht reguläre Punkte/Werte heissen *kritisch*.

**Bemerkung.** Falls  $w \notin \text{Bild}(f)$ , dann ist  $w$  auch regulär.

Im Spezialfall  $k = 2$  und  $n = 3$  heisst  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine *reguläre Fläche*.

**Theorem 1.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  mit  $m \leq n$  und  $w \in \mathbb{R}^m$  ein regulärer Wert. Dann ist das Urbild  $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = w\} \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - m$ .

**Beispiele.**

1.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  Berechne  $\forall p \in \mathbb{R}^3$  das Differential  $(Df)_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $p \mapsto \langle p, e_3 \rangle$   $h \mapsto \langle h, e_3 \rangle$

**Erinnerung** (Dreigliedentwicklung).

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h) \\ \langle p+h, e_3 \rangle &= \langle p, e_3 \rangle + \langle h, e_3 \rangle + 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\forall p \in \mathbb{R}^3 (Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  surjektiv, da der Gradient  $(\nabla f)_p = e_3 \neq 0$  Gradient: Für  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $(Df)_p(h) = \langle (\nabla f)_p, h \rangle$ .  
Wir folgern, dass für alle  $w \in \mathbb{R}$  die Menge  $f^{-1}(w) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $3 - 1 = 2$

2.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (In Koordinaten  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ )

$$p \mapsto \langle p, p \rangle = \|p\|_2^2$$

Berechne  $\forall p \in \mathbb{R}^3$

$$(Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

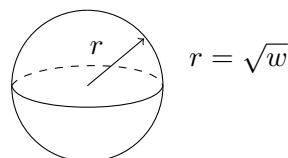
$$h \mapsto 2\langle p, h \rangle$$

$$f(p+h) = \langle p+h, p+h \rangle = \underbrace{\langle p, p \rangle}_{f(p)} + \underbrace{2\langle p, h \rangle}_{(Df)_p(h)} + \underbrace{\langle h, h \rangle}_{(Df)_p(h)}$$

$$\implies (\nabla f)_p = 2p \quad \text{Also ist } (Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ surjektiv} \iff p \neq 0$$

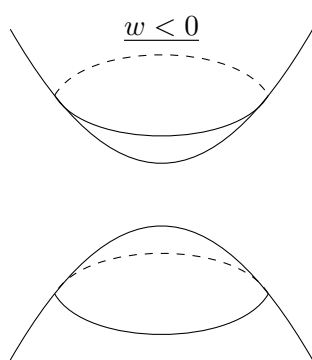
Wir folgern, dass für alle  $w \neq 0$  die Menge  $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|_2^2 = w\}$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $3 - 1 = 2$  ist.

$$\begin{array}{ccc} w < 0 & w = 0 & w > 0 \\ 0 & & \\ \emptyset & \cdot 0 & \end{array}$$

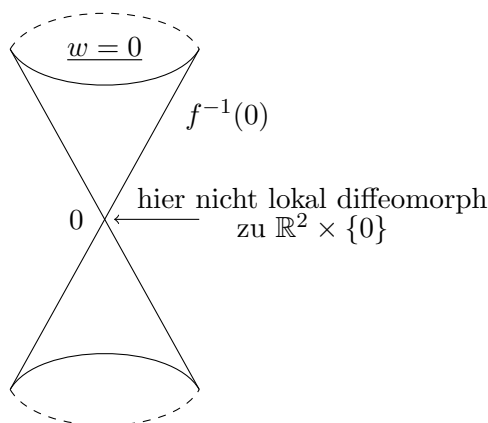


$f^{-1}(w)$  UMF der Dimension 2

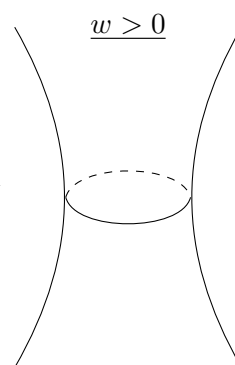
3.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Berechne  $(\nabla f)_p = (2x, 2y, -2z)$ ,  $p = (x, y, z)$   
Also  $(Df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  surjektiv  $\iff p \neq 0$ . Folgerung  $w \neq 0 \implies f^{-1} \subset \mathbb{R}^3$  UMF der Dimension 2.



zweischaliges



Hyperboloid



einschaliges

*Beweis von Theorem 1.* Sei  $p \in \mathbb{R}^n$  mit  $f(p) = w$ . Dann ist  $(Df)_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren *offene* Mengen:

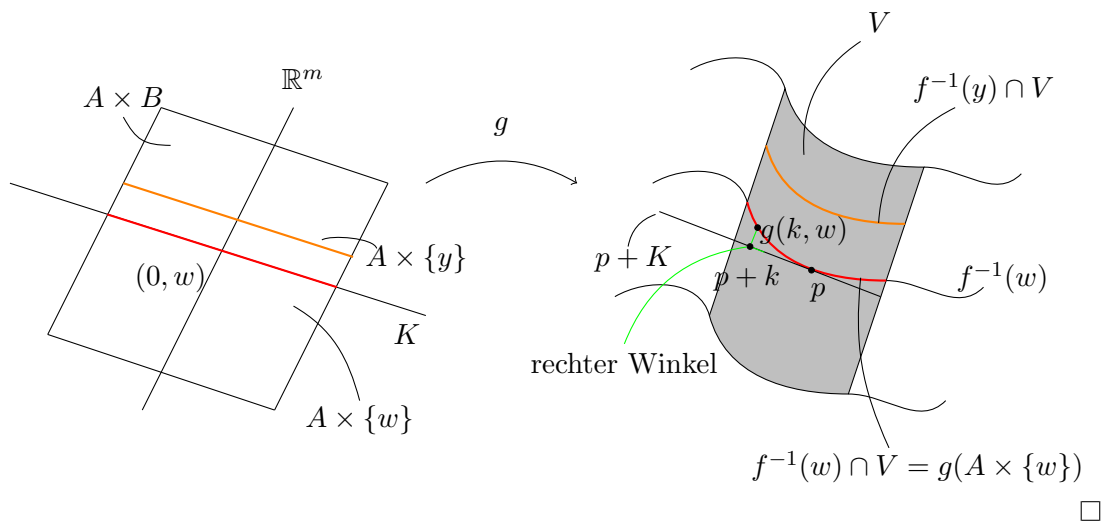
- $A \subset K = \ker((Df)_p)$
- $B \subset \mathbb{R}^m$
- $Y \subset \mathbb{R}^n$

mit  $0 \in A$ ,  $w \in B$  und  $p \in V$  sowie ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $g: A \times B \rightarrow V$  mit

- i)  $f(g(k, y)) = y \ \forall k \in A, y \in B$
- ii)  $g(k, y) - (p + k) \in K^\perp$

Die Niveaumenge  $f^{-1}$  ist lokal gleich dem Graphen einer Funktion der Form  $k \mapsto g(k, y)$ . Insbesondere gilt:  $f^{-1} \cap V = g(A \times \{w\})$ . Wir folgern, dass  $f^{-1}(w)$  eine UMF (via  $\varphi = g^{-1}$ ) der Dimension  $k = n - m$  ist. Da  $\dim K = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Bild}(Df)_p)$ .

*Bild:*



## 1.2 Lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten

**Definition.** Eine  $C^1$ -Abbildung  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst *lokale Einbettung* beim Punkt  $p \in \mathbb{R}^k$  falls  $(Df)_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  *injektiv* ist. ( $k \leq n$ )

**Theorem 2.** Sei  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Einbettung bei  $p \in \mathbb{R}^k$ . Dann existiert eine offene Menge  $W \subset \mathbb{R}^k$  mit  $p \in W$ , sodass  $f(W) \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist.

In diesem Kontext heisst  $f$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  bei  $f(p) \in M$ .

**Beispiele.**

1.  $M = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, 0)\end{aligned}$$

eine (globale) Parametrisierung von  $M$ . Tatsächlich ist  $\varphi$  linear, mit Abbildungsmatrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Jakobimatrix  $(J\varphi)_p$  stimmt in jedem Punkt mit  $A$  überein  $\implies (D\varphi)_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv.

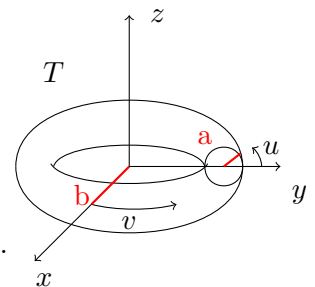
2.  $M = S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  (reguläre Fläche, siehe oben). Definiere

$$\begin{aligned}\varphi : D^2 &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})\end{aligned}$$

Bereche  $(J\varphi)_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  Also ist  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $S^2$  beim Nordpol  $N = (0, 0, 1) = \varphi(0, 0)$ .

3. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$ . Definiere den Rotationstorus

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow T \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a \cos u) \cos v \\ (b + a \cos u) \sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}\end{aligned}$$



In jedem Punkt  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  ist  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $T$ . Berechne dazu

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v & -(b + a \cos u) \sin v \\ -a \sin u \sin v & (b + a \cos u) \cos v \\ a \cos u & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{Rang}(J\varphi)_{(u,v)} = 2 \implies (D\varphi)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv.

**Frage.** Besitzt jede Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  bei jedem Punkt eine lokale Parametrisierung?

**Proposition 1.** Jede Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  besitzt bei allen Punkten  $p \in M$  eine lokale Parametrisierung.

*Beweis.* Da  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine UMF ist, existieren für alle  $p \in M$  offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$ ,  $0 \in V$  sowie  $g : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus mit  $g(p) = 0$  und  $g(U \cap M) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$ . Definiere nun

$$\begin{aligned} \varphi : g^{-1}|_{(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V} : (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V &\rightarrow M \cap U \\ q &\mapsto g^{-1}(q) \end{aligned}$$

Es gilt:  $\varphi(0) = p$  und  $(D\varphi)_0 = (Dg^{-1})_0|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} = (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$ . Nach Konstruktion ( $g$  ist ein Diffeomorphismus) ist  $(Dg)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Isomorphismus, ebenso  $(Dg)_p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \implies (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$  ist injektiv  $\implies (D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv. Also ist  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung bei  $p \in M$ .  $\square$

*Beweis von Theorem 2.* Zur Vereinfachung nehmen wir  $p = 0$  und  $f(p) = 0$  an. Setze  $B = \text{Bild}(Df)_p < \mathbb{R}^n$ , ein Untervektorraum der Dimension  $k$  (da  $(Df)_p$  injektiv). Weiterhin  $S = B^\perp < \mathbb{R}^n$ , sodass gilt  $\mathbb{R}^n = B \oplus S$ ,  $\dim(S) = n - k$ . Definiere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^k \times S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (q, s) &\mapsto f(q) + s \end{aligned}$$

$F$  ist stetig differenzierbar. Dreigliedertwicklung im Punkt  $(p, 0) = \mathbb{R}^k \times S$ : Sei  $h_1 \in \mathbb{R}^k, h_2 \in S$ . Berechne:

$$\begin{aligned} F(p + h_1, 0 + h_2) &= f(p + h_1) + h_2 = f(p) + (Df)_p(h_1) + (Rf)_p(h_1) + h_2 \\ &\implies (DF)_{(p,0)}((h_1, h_2)) = (Df)_p(h_1) + h_2 \end{aligned}$$

**Behauptung.**  $(DF)_{(p,0)} : \mathbb{R}^k \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Isomorphismus

*Beweis.* Es reicht zu zeigen:  $(DF)_{(p,0)}$  ist injektiv (da  $k + (n - k) = n$ ). Sei  $(h_1, h_2) \in \ker(DF)_{(p,0)}$

$$\underbrace{(Df)_p(h_1)}_{\in B} + \underbrace{h_2}_{\in S} = 0 \quad \underbrace{\implies}_{B \cap S = \{0\}} \quad (Df)_p(h_1) = 0 \text{ und } h_2 = 0 \quad \underbrace{\implies}_{(Df)_p \text{ injektiv}} \quad h_1 = 0$$

Da also  $\ker(DF)_{(p,0)} = 0$ , ist  $(DF)_{(p,0)}$  injektiv  $\square$

Nach Umkehrsatz existieren  $U \subset \mathbb{R}^k \times S$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $(p, 0) \in U$  und  $f(p) = F(p, 0) \in V$ , sodass  $F|_U : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Nach Definition von  $F$  gilt  $F(U \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}) = \underbrace{f(\mathbb{R}^k)}_{\text{Bild}(f)} \cap V$ .

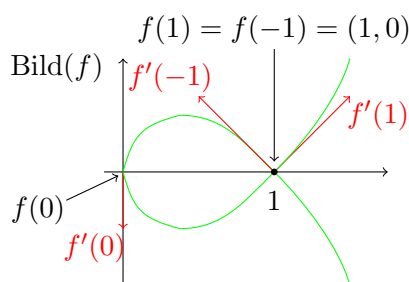
Wir schliessen, dass  $\text{Bild}(f) \subset \mathbb{R}^n$  lokal um den Punkt  $f(p)$  die Bedingungen einer Untermannigfaltigkeit erfüllt.  $\square$

**Bemerkung.** Sei  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung, welche in jedem Punkt eine lokale Einbettung ist. Dann braucht  $f$  nicht injektiv zu sein. Weiterhin ist  $f(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$  im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit.

**Beispiel.** Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3 - t) \end{aligned}$$

Berechne  $(Jf)_t = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies (Df)_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist injektiv für alle  $t \in \mathbb{R}$



Wir sehen, dass  $f$  nicht injektiv ist. Also ist  $\text{Bild}(f)$  keine Untermannigfaltigkeit (lokal um den Punkt  $(1,0)$ ).

### 1.3 Der Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit

**Ziel.** Beschreibung der Menge aller Tangentialvektoren in einem Punkt einer Untermannigfaltigkeit.

**Definition.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -UMF der Dimension  $k$  und  $p \in M$ . Wähle eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  um  $p$ , d.h.  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $\varphi(U) \subset M$ ,  $\varphi(0) = p$  ( $0 \in U$ ),  $\varphi$  injektiv und für alle  $p \in U$  ist  $(D\varphi)_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv. Setze

$$T_p M = \text{Bild}((D\varphi)_0) < \mathbb{R}^n$$

der *Tangentialraum* von  $M$  bei  $p$ .

**Bemerkung.** Die Dimension von  $T_p M < \mathbb{R}^n$  ist  $k$ , da  $(D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist. Im Falle  $k = 2$  (d.h.  $M$  ist eine Fläche) nennen wir  $T_p M$  *Tangentialebene*.

**Beispiel.** Sei  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  in  $C^1$ . Betrachte den Graphen  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = h(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$  und die (globale) Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, h(u, v)) \end{aligned}$$

Bereche die Jakobimatrix im Punkt  $q = (u, v)$

$$(J\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \text{Rang } 2 \implies (D\varphi)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ injektiv}$$

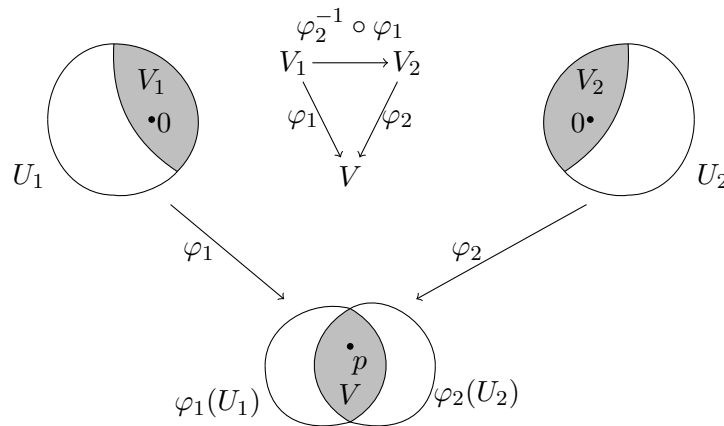
$$T_{\varphi(q)}\Gamma = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\}$$

Im Spezialfall  $h = 0$ :  $T_{\varphi(q)}\Gamma = \text{span}\{e_1, e_2\}$

**Lemma 1.**  $T_p M$  hängt nicht von der lokalen Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  ab.

*Beweis.* Seien  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow M$   $\varphi_2 : U_2 \rightarrow M$  lokale  $C^1$ -Parametrisierungen mit  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p \in M$ . Setze  $V = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \subset M$  offen und  $V_1 = \varphi_1^{-1} \subset U_1$  und  $V_2 = \varphi_2^{-1} \subset U_2$ .

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Abbildungen



Nach der Kettenregel für  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  im Punkt 0 gilt:

$$A = (D\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)_0 = (D\varphi_2^{-1})_{\varphi_1(0)} \circ (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0^{-1} \circ (D\varphi_1)_0 \implies (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0 \circ A$$

Damit formen wir um:

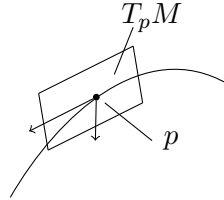
$$\begin{aligned} \implies T_p M &= \text{Bild}(D\varphi_1)_0 = \text{Bild}((D\varphi_2)_0 \circ A) \\ &\stackrel{(1)}{=} (D\varphi_2)_0 \circ A \left( \mathbb{R}^k \right) \\ &= (D\varphi_2)_0 \left( \mathbb{R}^k \right) \\ &= \text{Bild}(D\varphi_2)_0 \end{aligned}$$

In (1) wird benutzt, dass  $A$  invertierbar ist, mit  $A^{-1} = (D\varphi_1)_0^{-1} \circ (D\varphi_2)_0$  und damit ist  $A \left( \mathbb{R}^k \right) = \mathbb{R}^k$ .  $\square$



## Interpretation des Tangentialraums via Geschwindigkeitsvektoren

**Proposition 2.** Sei  $p \in M$ . Der Tangentialraum  $T_p M$  besteht aus allen Geschwindigkeitsvektoren der Form  $\gamma'(0)$  für  $C^1$ -Wege  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ .



*Beweis.* (i) Sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  stetig differenzierbar mit  $\gamma(0) = p$ . Betrachte eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  mit  $\varphi(0) = p$ .

Wähle  $\delta > 0$ , sodass  $\gamma((-\delta, \delta)) \subset \varphi(U)$ . Definiere  $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$t \mapsto \varphi^{-1} \circ \gamma(t)$$

Dann gilt  $\gamma|_{(-\delta, \delta)} = \varphi \circ \bar{\gamma}$

$$\Rightarrow \gamma'(0) = \frac{d}{dt} (\varphi \circ \bar{\gamma})(0) = (D\varphi)_{\bar{\gamma}(0)} (\bar{\gamma}'(0)) = (D\varphi)_0 (\bar{\gamma}'(0)) \in \text{Bild}(D\varphi)_0 = T_p M$$

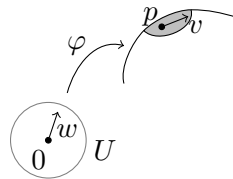
(ii) Sei  $v \in T_p M = \text{Bild}((D\varphi)_0)$  für eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  mit  $\varphi(0) = p$ . Es existiert also  $w \in \mathbb{R}^k$  mit  $(D\varphi)_0(w) = v$ .

Konstruktion eines Weges  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ . Wähle  $\delta > 0$ , sodass für alle  $t \in (-\delta, \delta)$  gilt:  $tw \in U$  (geht, da  $U$  offen). Definiere nun:

$$\begin{aligned} \gamma : (-\delta, \delta) &\rightarrow M \\ t &\mapsto \varphi(tw) \end{aligned}$$

Dann gilt:  $\gamma(0) = \varphi(0) = p$

$$\Rightarrow \gamma'(0) = \frac{d}{dt} (\varphi(tw))(0) = (D\varphi)_0(w) = v$$



□

## Differenzierbare Abbildung zwischen UMF

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -UMF. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst *differenzierbar* im Punkt  $p \in M$ , falls ein  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen existiert mit  $p \in U$ , sowie  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar mit  $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$ . Insbesondere sind Einschränkungen von differenzierbaren Abb.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf UMF  $M \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar (in allen Punkten).

**Definition.** Seien  $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m$   $C^1$ -UMF und  $f : M \rightarrow N$  stetig differenzierbar,  $p \in M$  (d.h.  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig differenzierbar mit  $f(M) \subset N$ ). Definiere

$$(Df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \\ v \mapsto (DF)_p(v)$$

wobei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine beliebige  $C^1$ -Einschränkung von  $f$  um den Punkt  $p$  ist, d.h.  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $p \in U$  und  $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$ . Die Abbildung  $(Df)_p$  heisst Differential von  $f$  an der Stelle  $p \in M$ .

**Lemma 2.** i.) Für alle  $v \in T_p M$  gilt  $(DF)_p(v) \in T_{f(p)} N$

ii.)  $(DF)_p(v)$  hängt nicht von der Erweiterung  $F$  ab.

*Beweis.* i.) Sei  $v \in T_p M$ . Wähle  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma'(0) = v$ , sowie  $\text{Bild}(\gamma) \subset U$ . Betrachte nun den  $C^1$ -Weg  $\delta = F \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Es gilt für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \delta(t) = F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \in N$ , da  $F|_M = f$  und  $\gamma(t) \in M$ .

Berechne:

$$\delta(0) = f(\gamma(0)) = f(p) \implies \delta'(0) = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(0) = (DF)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = (DF)_p(v)$$

Nach Proposition gilt  $\delta'(0) \in T_{f(p)} N$ , also  $(DF)_p(v) \in T_{f(p)} N$ .

ii.) Seien  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\bar{F} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  zwei Erweiterungen von  $f$  (differenzierbar bei  $p$ ). Für  $v \in T_p M$ , wähle  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  wie oben, mit  $\text{Bild}(\gamma) \subset U \cap \bar{U}$ . Definiere wie unter i) zwei Wege  $\delta = F \circ \gamma$  und  $\bar{\delta} = \bar{F} \circ \gamma$ . Es gilt  $\delta'(0) = (DF)_p(v)$  und  $\bar{\delta}'(0) = (D\bar{F})_p(v)$ . Beachte:  $\delta$  und  $\bar{\delta}$  stimmen überein mit  $f \circ \gamma(t) \implies \delta'(0) = \bar{\delta}'(0)$   $\square$

**Bemerkung.** Es gilt die *Kettenregel*. Seien  $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^n, L \subset \mathbb{R}^l$   $C^1$ -UMF und  $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow L$  in den Punkten  $p \in M$  bzw.  $f(p) \in N$  differenzierbar. Dann ist  $g \circ f$  im Punkt  $p \in M$  differenzierbar, es gilt

$$(D(g \circ f))_p = (Dg)_{f(p)} \circ (Df)_p : T_p M \rightarrow T_{g \circ f(p)} L$$

*Grund:* Kettenregel gilt für alle Erweiterungen  $F, G$ .

### Beispiel einer differenzierbaren Abbildung zwischen UMF

Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  der Rotationstorus parametrisiert durch ( $0 < a < b$ )

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a \cos u) \cos v \\ (b + a \cos u) \sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}f : \Sigma &\rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ q &\mapsto \frac{q}{\|q\|_2}.\end{aligned}$$

$f$  lässt sich zu  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$  erweitern. In Koordinaten:  $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .  $F$  ist differenzierbar (sogar  $C^\infty$ ) deshalb auch  $f : \Sigma \rightarrow S^2$ . Für  $q = (x, y, z) \neq 0$ , berechne die Jakobimatrix

$$(JF)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} & \frac{-xy}{r^3} & \frac{-xz}{r^3} \\ \frac{-xy}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} \\ \frac{-xz}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

Betrachte den Punkt  $p = \varphi(0, 0) = (a + b, 0, 0) \in \Sigma$ .  $(Jf)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a+b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$ .

Bestimme  $T_p \Sigma = \text{span}\{e_2, e_3\}$  und  $T_{f(p)} S^2 = T_{(1,0,0)} S^2 = \text{span}\{e_2, e_3\}$ . Wir erhalten also  $(Df)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{f(p)} S^2$ . Es gilt  $(Df)_p(e_2) = \frac{1}{a+b} e_2$ , bzw.  $(Df)_p(e_3) = \frac{1}{a+b} e_3$

## 1.4 Die erste Fundamentalform

**Erinnerung.** Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , welche bilinear, symmetrisch und positiv ist.

- Positivität:  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  und  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ .

Jedes Skalarprodukt definiert eine positiv definite *quadratische Form*  $q$  d.h.

- (i)  $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$
- (ii)  $B(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$  ist bilinear in  $v, w$ .

$$\begin{aligned}q : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

Sei nun  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche. Wir erhalten in jedem Punkt  $p \in \Sigma$  ein Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_p &= T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \\ \langle v, w \rangle &\mapsto \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

Das Feld von Skalarprodukten  $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  heisst *Riemannsche Metrik* auf  $\Sigma$ . Die zugehörige quadratische Form  $I_p : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *erste Fundamentalform* von  $\Sigma$  an der Stelle  $p$ .

### Beschreibung durch Koeffizienten

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  ein Skalarprodukt. Schreibe  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ . Berechne

$$\langle a, b \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Wähle eine lokale Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  mit  $p \in \varphi(U)$ . Wir ziehen die Riemannsche Metrik (auf  $\Sigma$ ) wie folgt auf  $U$  zurück:

Sei  $q \in U$  und seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Definiere

$$\langle a, b \rangle_q = \langle (D\varphi)_q(a), (D\varphi)_q(b) \rangle_{\varphi(q) \leftarrow} \text{ bedeutet } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist auf } \mathbb{R}^3$$

Sei  $p = \varphi(q)$ , dann gilt  $T_p \Sigma = \text{Bild}(D\varphi)_p < \mathbb{R}^3 = \text{span}\{(D\varphi)_q(e_1), (D\varphi)_q(e_2)\}$

**Notation.** Schreibe  $q = (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\varphi_u(q) &= \varphi_u(u, v) = (D\varphi)_q(e_1) \in T_{\varphi(q)} \Sigma \\ \varphi_v(q) &= \varphi_v(u, v) = (D\varphi)_q(e_2) \in T_{\varphi(q)} \Sigma\end{aligned}$$

“Spalten der Jakobimatrix  $(J\varphi)_q$ ”

Die *Koeffizienten* der ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  sind

$$\begin{aligned}E(u, v) &= \langle e_1, e_1 \rangle_{(u, v)} = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ F(u, v) &= \langle e_1, e_2 \rangle_{(u, v)} = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ G(u, v) &= \langle e_2, e_2 \rangle_{(u, v)} = \langle \varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

Für alle  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2$  gilt nun

$$\langle a, b \rangle_{u, v} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

**Beispiele.**

1. Sei  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ . Betrachte die lokale Parametrisierung  $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ ,  $\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ . Berechne

$$(J\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erste Spalte:  $\varphi_u(u, v)$ , zweite Spalte  $\varphi_v(u, v)$  und damit

$$\begin{cases} E(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \\ F(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ G(u, v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

“Der Zylinder  $Z$  ist lokal isometrisch (intrinsische Distanz) zur Ebene”

2.  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ , die Einheitskugel. Betrachte die lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v)) \end{aligned}$$

Berechne

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} -\sin(u) \cos(v) & -\cos(u) \sin(v) \\ \cos(u) \cos(v) & -\sin(u) \sin(v) \\ 0 & \cos(v) \end{pmatrix} = \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)$$

und

$$\begin{cases} E(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_{\mathbb{R}^3} = \cos^2(v) \\ F(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ G(u, v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \end{cases} \begin{pmatrix} \cos^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternative lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : D^2 &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned}$$

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$$

Wir bemerken  $F(u, v) = \frac{uv}{1-u^2-v^2} \neq 0$  (ausser falls  $uv = 0$ )

## Weglänge und Flächeninhalt

**Erinnerung.** Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ . Die Weglänge von  $\alpha$  ist

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{\underbrace{\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle_{\mathbb{R}^3}}_{\|\dot{\alpha}(t)\|_2 \text{ euklidische Norm}}} dt$$

Sei nun  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine lokale Parametrisierung und  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$   $C^1$  mit  $\alpha([0, 1]) \subset \varphi(U)$ . Definiere

$$\begin{aligned} \beta &= \varphi^{-1} \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi^{-1}(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Schreibe  $\beta(t) = u(t)e_1 + v(t)e_2$ . Es gilt  $\alpha(t) = \varphi(\beta(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ . Berechne  $\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\| dt$ . Berechne

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t) \\ &= (D\varphi)_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)) \\ &= (D\varphi)_{(u(t), v(t))}(\dot{u}(t)e_1 + \dot{v}(t)e_2) \\ &= \dot{u}(t) \cdot \varphi_u(u(t), v(t)) + \dot{v}(t) \cdot \varphi_v(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle &= \begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} \\ &= [\dot{u}(t)^2 \cdot E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 \cdot G]_{= (*)} \end{aligned}$$

$$\implies \mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{(*)} dt$$

**Beispiel.** Parametrisiere  $\Sigma = S^2$  wie folgt:

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))$$

Sei

$$\begin{aligned} \alpha &: [0, 2\pi] \rightarrow S^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), 0) \end{aligned}$$

und

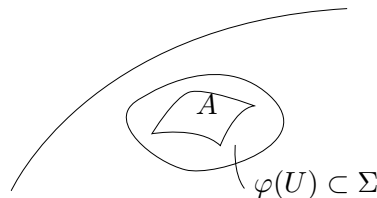
$$\begin{aligned} \beta &: [0, 2\pi] \rightarrow (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ t &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt  $\alpha(t) = \varphi(t, 0) = (\cos(t) \cos(0), \sin(t) \cos(0), \sin(0))$ . Daraus folgt  $\beta(t) = (u(t), v(t))$  mit  $u(t) = t$  und  $v(t) = 0$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{u}^2 E + 2\dot{u}\dot{v} F + \dot{v}^2 G} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{E(u(t), v(t))} dt \quad \text{siehe oben } E(u, v) = \cos(v)^2 \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad \text{hier } v(t) \equiv 0 \implies E \equiv 1\end{aligned}$$

### Flächeninhalt

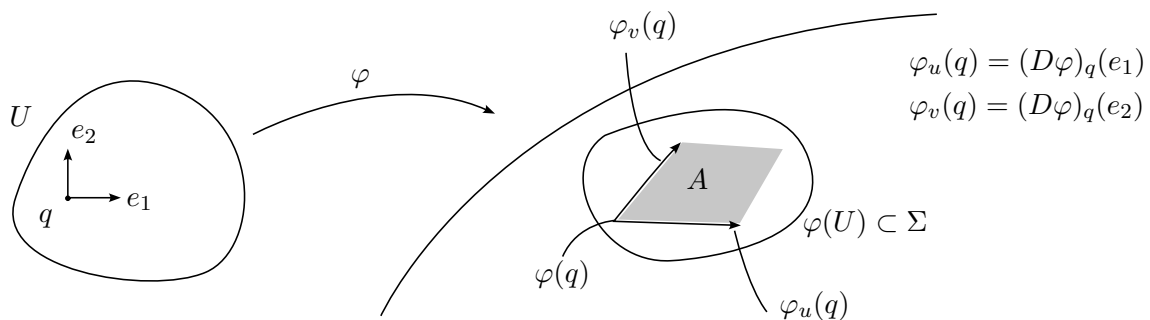
Sei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  eine lokale Fläche ( $C^1$ )-Parametrisierung, sowie  $A \subset \varphi(U) \subset \Sigma$  ein abgeschlossenes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand ( $\partial A = \cup_{i=1}^n \text{Bild}(\gamma_i)$  mit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$   $C^1$ )



Setze  $B = \varphi^{-1}(A) \subset (U)$ . Definiere

$$\text{Area}(A) = \int_B |\text{Area}(P(\varphi_u, \varphi_v))| du dv$$

wobei  $P$  das Parallelogramm ist, welches von  $\varphi_u, \varphi_v \in \mathbb{R}^3$  aufgespannt wird.



**Einschub** (Vektorprodukt in  $\mathbb{R}^3$ ). Seien  $v = \sum_{i=1}^3 v_i e_i, w = \sum_{j=1}^3 v_j e_j \in \mathbb{R}^3$ . Definiere

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

**Lemma 3.**

$$\|u \times w\|_2 = \|v\|_2 \cdot \|w\|_2 \cdot \sin(\angle(v, w)) = |\text{Area}(P(v, w))|$$

(verwende  $0 \leq \angle(v, w) \leq \pi$ )

*Beweis.* Berechne:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}^2 + \|v \times w\|^2 &= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \end{aligned}$$

Also  $\langle v, w \rangle^2 + \|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2$  (\*). Schlussendlich folgt aus

$$\langle v, w \rangle^2 = (\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \angle(v, w))^2$$

und

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

dass

$$\|v \times w\|^2 = (\|v\| \cdot \|w\| \sin \angle(v, w))^2$$

□

**Einschub** (Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ ). Seien  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \in \mathbb{R}^n$ . Definiere

$$\langle v, w \rangle = v^T w = \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung.** Der Ausdruck  $v^T w$  gilt bezüglich allen orthonormalen Koordinaten.

i) Spezialfall  $v = w \implies \langle v, v \rangle = v^T v = \|v\|^2$  (Pythagoras)

ii)  $v, w$  allgemein:

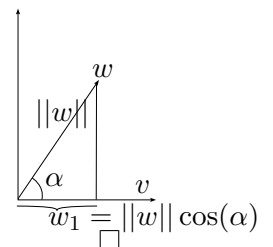
Sei  $A \in O(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $A$  beschreibt einen orthonormalen Basiswechsel. Es gilt also  $A^T A = Id$ . Deshalb

$$\langle Av, Aw \rangle = (Av)^T Aw = v^T A^T Aw = v^T w = \langle v, w \rangle$$

**Lemma 4.**  $\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \angle(v, w)$

*Beweis.* Wir können Koordinaten so wählen, dass (nach Bemerkung)  $v = v_1 e_1$  (mit  $v_1 > 0$ ) und  $w = w_1 e_1 + w_2 e_2$  gilt. Dann gilt

$$\langle v, w \rangle = \underbrace{v_1}_{=\|v\|} w_1 = \|v\| \cdot \|w\| \cos \angle(v, w)$$





Mit diesen Lemmata erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(A) &= \int_B |\text{Area}(P(\varphi_u, \varphi_v))| \, dudv && \text{Lemma 1} \\
 &= \int_B \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv \\
 &\stackrel{(*)}{=} \int_B \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \, dudv
 \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Proposition:

**Proposition 3.**

$$\text{Area}(A) = \int_B \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \, dudv$$

**Bemerkung.** Diese Formel gilt bezüglich jeder lokalen Parametrisierung.

**Beispiele.**

1.  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 \varphi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) &\rightarrow S^2 \\
 (u, v) &\mapsto (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))
 \end{aligned}$$

Flächenelement:  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\cos(v)^2} = |\cos(v)|$  ( $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ ). Für  $B \subset (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $A = \varphi(B)$  gilt dann.

$$\text{Area}(A) = \int_B \cos(v) \, dudv$$

Im Grenzfall  $B = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  erhalten wir

$$\text{Area}(S^2) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(v)| \, dv}_{=2} du = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

2.  $T$  Torus (siehe Serie 4)  $2\pi a \cdot 2\pi b$ .

**Zusatz.** Flächenelement  $\sqrt{EG - F^2}$ .  $EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$