

Kapitel 1

Die Geometrie der Gaussabbildung

1.1 Gaussabbildung

Definition. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subset \Sigma$ offen. Eine stetige Abbildung $N : V \rightarrow S^2$ heisst *Einheitsnormalenfeld* (oder lokale Gauss-Abbildung), falls

$$\forall p \in V \text{ gilt: } N(q) \perp T_p \Sigma$$

Zusatz. Flächenelement $\sqrt{EG - F^2}$

$$EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Existenz. Definiere $N : V \rightarrow S^2$

$$q \mapsto \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|_2}$$

Dieser Ausdruck ist stetig in q , da φ_u und φ_v stetig sind.

Eindeutigkeit. Falls V zusammenhängend ist, dann ist $N : V \rightarrow S^2$ bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt: $\pm N$.

Bemerkung. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen ist (d.h. kompakt und ohne Rand), dann existiert sogar ein globales Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \rightarrow S^2$, genannt *Gaussabbildung*. Tatsächlich trennt eine solche Fläche \mathbb{R}^3 in zwei Zusammenhangskomponenten. Für (nicht-geschlossene) reguläre Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gilt: Es existiert $N : \Sigma \rightarrow S^2$ stetiges Einheitsnormalenfeld genau dann, wenn Σ *orientierbar* ist.

zwei zeichnungen, torus und moebiusband

Sei nun $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale C^1 -Parametrisierung und $N : V \rightarrow S^2$ eine lokale Gaussabbildung. Dann gilt $\forall q \in V$:

- $N(q) \perp T_q \Sigma$
- $N(q) \perp T_{N(q)} \Sigma$

$\implies T_q \Sigma = T_{N(q)} S^2$ für letzteres gilt $\forall p \in S^2 : p \perp T_p S$
 Falls $N : V \rightarrow S^2$ sogar differenzierbar ist, dann erhalten wir $\forall p \in V$ eine Abbildung

$$(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{N(p)} S^2 = T_p \Sigma$$

die Weingartenabbildung.

Definition.

$$K(p) = \det (DN)_p \in \mathbb{R}$$

Gaussische Krümmung im Punkt $p \in \Sigma$

Bemerkung. $K(p)$ hängt nicht von der Wahl von N ab,
 da $\det -(DN)_p = (-1)^2 \cdot \det (DN)_p$ ist.

Beispiel.

1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
 $N : \Sigma \rightarrow S^2$
 $q \mapsto e_3$ (oder $-e_3$)
 N ist konstant, also gilt $\forall q \in \Sigma (DN)_q = 0; K(q) = 0$.

K equiv to 1

2. $\Sigma = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre)
 $N : S^2 \rightarrow S^2$
 $q \mapsto q$

Einheitssphäre mit Krümmung = 1

$N = Id_{S^2}$ (oder $-Id_{S^2}$)
 $\forall q \in S^2$ gilt also $(DN)_q = Id : T_q \Sigma \rightarrow T_q \Sigma$
 $\implies K(q) = \det Id : T_q \Sigma \rightarrow T_q \Sigma = 1$

3. $Z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$
 $N : Z \rightarrow S^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$
 Wir bemerken: N hängt nicht von z ab.

Zylinder mit K equiv to 0

Also gilt für alle $q \in Z$: $(DN)_q(e_3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{N(q + t \cdot e_3) - N(q)}^{=0}}{t} = 0$
 $\implies 0$ ist ein Eigenwert der Abbildung $(DN)_q : T_q Z \rightarrow T_q Z \implies K(q) = 0$.

Zusatz. Genauere Betrachtung des dritten Beispiels:

Für $q = (x, y, z) \in Z$ gilt: $T_q Z = \text{span}\{e_3, \overbrace{-y \cdot e_1 + x \cdot e_2}^v\}$

Wir bestimmen $(DN)_q \stackrel{(*)}{=} v$

(*) Erklärung: Die Einschränkung von N auf $S' \times \{0\}$ ist die Identität. Folglich ist die Abbildungsmatrix von $(DN)_q$ bezüglich der Basis $\{e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2\}$

Definition. Die mittlere Krümmung im Punkt $p \in \Sigma$ ist $H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) \in \mathbb{R}$, welche allerdings nur bis auf Vorzeichen definiert ist:

$$\text{Spur}(-(DN)_p) = -\text{Spur}(DN)_p$$

Bemerkung. Reguläre Flächen mit $H \equiv 0$ heissen *Minimalflächen*.

Beispiele. 1. $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. $K \equiv 0$ und $H \equiv 0$.

$$2. \Sigma = S^2. K \equiv 1 \text{ und } H \equiv 1 \iff \frac{1}{2} \text{Spur} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \Sigma = Z. K \equiv 0 \text{ und } H \equiv \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\lambda_1}_{EW_1} + \underbrace{\lambda_2}_{EW_2}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)$$

Notation. Ein Punkt $p \in \Sigma$ heisst:

- *elliptisch*, falls $K(p) > 0$
- *hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$ (Sattelpunkt, siehe später)
- *parabolisch*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) \neq 0$
- *Flachpunkt*, falls $K(p) = 0$ und $H(p) = 0$

minibeispiele zu all diesen

Proposition 1. Sei $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, welche lokale C^2 -Parametrisierungen besitzt (das heisst zweimal stetig differenzierbar). Dann ist $\forall p \in \Sigma$ gilt:

$$\langle (DN)_p(a), b \rangle_p = \langle a, (DN)_p(b) \rangle_p$$

Beweis. Es reicht, dies für die Basisvektoren $a = \varphi_u(p)$ und $b = \varphi_v(p)$ zu prüfen! Sei $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ eine C^2 -Parametrisierung mit $p \in \varphi(U)$. Betrachte die Komposition $N \circ \varphi : U \rightarrow S^2$. $\forall q = (u, v) \in U$ gilt: $\langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)} \stackrel{\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^3}{=} 0 \quad (*)$

1 zeichnung mit phiU und phiV usw

Notation. $N_u(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v)) = \frac{d}{du}(N \circ \varphi)(u, v)$ und

$N_v(u, v) = (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_v(u, v)) = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi)(u, v)$

$\frac{d}{du}(*)_v : \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \underbrace{\varphi_{uv}}_{\frac{d}{du}\varphi_v(\varphi \text{ ist } C^2)} \rangle = 0$

$\frac{d}{dv}(*)_u : \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{vu} \rangle = 0$

$\varphi \text{ ist } C^2 \implies \varphi_{uv} = \varphi_{vu}$

$\implies \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N_v, \varphi_u \rangle$

ausgeschrieben: $\langle (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v)), \varphi_v(u, v) \rangle = \langle (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_v(u, v)), \varphi_u(u, v) \rangle$
 $= \langle (DN)_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v)), \varphi_v(u, v) \rangle$

□

Bemerkung. Im Beweis haben wir die Annahme $(\varphi : U \rightarrow \Sigma \text{ ist } C^2)$ benutzt: φ_{uv} ist vorgekommen. Diese Annahme ist essenziell, damit $N : \varphi(U) \rightarrow S^2$ differenzierbar ist. Tatsächlich gilt $N(\varphi(u, v)) = \pm \frac{\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$. Wir benutzen, dass φ_u und φ_v differenzierbar sind, dass heisst $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ ist zweimal differenzierbar.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Beispiel. Sei

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ x^2, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

f ist differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

Betrachte die Fläche $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3 | z = f(x)\} - \Gamma f \times \mathbb{R}$, welche die globale C^1 -

Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ besitzt.
 $(u, v) \mapsto (u, v, f(u))$

Berechne $\varphi_u = (1, 0, f'(u))$, $\varphi_v = (0, 1, 0)$, und $N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-f'(u), 0, 1)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$

Für $u = 0$ gilt $N(u, v) = (0, 0, 1) = e_3$ und für $u \geq 0$ gilt $N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2, 0, 1)$

Versuch, $\frac{d}{du}N(0, 0)$ zu berechnen:

$$1. \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon < 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\underbrace{N(\epsilon)}_{=e_3} - \underbrace{N(0, 0)}_{=e_3} \right) = 0$$

$$2. \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \frac{1}{\epsilon} (N(\epsilon, 0) - N(0, 0)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{2\epsilon}{\sqrt{1+4\epsilon^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon^2}} - 1 \right) = (2, 0, \dots) \neq e_3$$

Im 2. Punkt wird genutzt, dass $\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+\frac{x}{2}}$, somit $\frac{-2\epsilon}{1+4\epsilon^2} \underset{\frac{1}{1+x} \approx 1-x}{\approx} -2\epsilon(1-2\epsilon^2) \approx -2$

Also ist $N(u, v)$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht differenzierbar!

Hypothese: Ab jetzt besitzen alle regulären Flächen mindestens lokale C^1 -Parametrisierungen.

Korollar 1. $(DN)_p : T_p N \rightarrow T_p \Sigma$ lässt sich mit einem orthogonalen Koordinatenwechsel diagonalisieren.

D.h. Die Weingartenabbildung $(DN)_p$ hat zwei orthogonale Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$K(p) = \det((DN)_p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Spur}((DN)_p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Definition. Die von den Eigenvektoren $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$ aufgespannten Richtungen heissen *Hauptkrümmungsrichtungen*. Eine C^1 -Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \Sigma$ heisst *Krümmungslinie*, falls $\forall t \in (a, b)$ gilt $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$ ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung $(DN)_{\gamma(t)} : T_{\gamma(t)}\Sigma \rightarrow T_{\gamma(t)}\Sigma$.

Beispiele.

1. $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$
Hier gilt $\forall p \in E : (DN)_p = 0$ also sind die Hauptkrümmungsrichtungen nicht wohldefiniert. Alle Geraden in E sind Krümmungslinien. (Sogar alle C^1 -Kurven $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$)
2. $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Hier gilt $\forall p \in Z : (DN)_p(e_3) = 0 \implies$ alle (vertikalen) Mantellinien in Z sind Krümmungslinien. Mehr noch: Bezüglich der Basis $e_3, -y \cdot e_1 + x \cdot e_2$ von $T_{\underbrace{(x, y, z)}_{=p}}\Sigma$ hat $(DN)_p$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten also eine zweite Schar von Krümmungslinien: horizontale Kreise. In Punkten mit $(DN)_p \neq \lambda \cdot Id_{T_p\Sigma}$ stehen die Krümmungslinien *senkrecht* aufeinander.

1.2 Die zweite Fundamentalform

Ziel der nächsten beiden Abschnitte:

$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}$$

wobei I_p, II_p die erste, bzw. die zweite Fundamentalform ist.

Motivation. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -reguläre Fläche, und $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ eine C^2 -Kurve mit $\alpha(0) = p \in \Sigma$ und $\dot{\alpha}(0) = v \in T_p\Sigma$.

Proposition 2. (Satz von Mensier) Sei $N : V \rightarrow S^2$ ein lokales Einheitsnormalenfeld ($p \in V \subset \Sigma$). Dann gilt $\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle$. Insbesondere hängt die normale Beschleunigungskomponente $\langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle$ nur von $p = \alpha(0)$ und $v = \dot{\alpha}(0)$ ab.

Beweis. $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt:

$$\langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \text{ (per Definition von } T_p\Sigma \text{ und } N(p))$$

$$\text{Ableiten nach } t: \langle \ddot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle + \underbrace{\langle \dot{\alpha}(t), \frac{d}{dt}N(\alpha(t)) \rangle}_{(DN)_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))} = 0$$

$$\text{Für } t = 0 \text{ erhalten wir } \langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = -\langle v, (DN)_p(v) \rangle.$$

□

Definition. Die *zweite Fundamentalform* von Σ an der Stelle p ist die Abbildung

$$\begin{aligned} II_p : T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto -\langle v, (DN)_p(v) \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Vorzeichen von II_p hängt von N ab. Falls $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar ist, dann lässt sich eine globale Wahl von N fixieren (Wahl der Orientierung).

Erinnerung. Die erste Fundamentalform, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ hat bezüglich jeder lokalen Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ eine Matrix $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, bezüglich der Basis φ_u, φ_v von $T_p\Sigma$.
 $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

Koeffizienten für II_p :

- $e = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$
- $f = -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle$ ($(DN)_{\varphi(u,v)}$ ist symmetrisch).
- $e = -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle$

Notation.

$$N_u = \frac{d}{du}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u)$$

$$N_v = \frac{d}{dv}(N \circ \varphi) = (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v)$$

Wir erhalten also mit $\langle \varphi_u, N \rangle \equiv 0$ und ableiten nach w : $\langle \varphi_{uu}, N \rangle + \langle \varphi_u, N_u \rangle = 0$, analog für v

- $e = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle$
- $e = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle$

- $e = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$

Beispiel. Funktionsgraph von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (C^2)

$\Gamma_f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \subset \mathbb{R}^3$ Globale C^2 -Parametrisierung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Gamma_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v))\end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (1, 0, f_u(u, v)) \\ \varphi_v(u, v) &= (0, 1, f_v(u, v)) \\ \varphi_{uu}(u, v) &= (0, 0, f_{uu}(u, v)) \\ \varphi_{uv}(u, v) &= \varphi_{vu}(u, v) = (0, 0, \underbrace{f_{uv}}_{=f_{vu}}) \\ \varphi_{vv}(u, v) &= (0, 0, f_{vv}(u, v)) \\ N(\varphi(u, v)) &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle &= \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle &= \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}\end{aligned}$$

1.3 Gaussabbildung in lokalen Koordinaten

Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \Sigma$ eine lokale C^2 -Parametrisierung und $N : V \rightarrow S^2$ das dazugehörige normale Einheitsfeld. Schreibe die Abbildungsmatrix von $(DN)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma = T_{N(p)} S^2$ bezüglich der Basis φ_u, φ_v von $T_p \Sigma : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, d.h.

$$(DN)_p(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$(DN)_p(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Bemerkung. Falls φ_u und φ_v nicht orthogonal sind, dann gilt im Allgemeinen $a_{12} \neq a_{21}$.

Lemma 1. Mit den oben eingeführten Koeffizienten gilt:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{(DN)_p^T} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Beweis. Berechne

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle \\
&= -\langle \varphi_u, a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \rangle \\
&= -a_{11}E - a_{21}F \\
f &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) \rangle = \dots = -a_{11}F - a_{21}G \\
f &= -\langle \varphi_u, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}E - a_{22}F \\
g &= -\langle \varphi_v, (DN)_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \rangle = \dots = -a_{12}F - a_{22}G
\end{aligned}$$

□

Korollar 2. $K(p) = \det(DN)_p = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ (Alle Koeffizienten sind vom punkt (u, v) abhängig!)

Beweis.

$$\det(DN)_p = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \left(- \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

und $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$

□

Beispiel. Rotationstorus $T \subset \mathbb{R}^3$ mit Radien $0 < a < b$

Lokale C^∞ -Parametrisierung $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T$

$$\varphi(u, v) = ((b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), a \cdot \sin(u))$$

$$\varphi_u(u, v) = (-a \cdot \sin(u) \cos(v), -a \cdot \sin(u) \sin(v), a \cdot \cos(u))$$

$$\varphi_v(u, v) = (-(b + a \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), (b + a \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), 0)$$

$$\varphi_{uu} = \dots$$

$$\varphi_{uv} = \dots$$

$$\varphi_{vv} = \dots$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2 \\
F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\
G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (b + a \cdot \cos(u))^2 \\
N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \stackrel{\text{siehe Flächeninhalt}}{=} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{a(b + a \cdot \cos(u))} \\
\Rightarrow e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = |\varphi_{uu}| = a \\
&\text{dies da } \varphi_{uu} \text{ und } N \text{ parallel sind.} \\
f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0 \\
g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = (\text{Komplizierte einfache Rechnung}) \\
&= \cos(u) \cdot (b + a \cdot \cos(u)) \\
\Rightarrow K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{\cos(u)}{a(b + a \cdot \cos(u))}
\end{aligned}$$

rotationstorus mit Krümmungen

Bemerkung. Es gilt

$$\begin{array}{ll}
K(\varphi(u, v)) > 0 & u < \frac{\pi}{2} \text{ oder } u > \frac{3\pi}{2} \\
= 0 \text{ falls} & u = \frac{\pi}{2} \text{ oder } u = \frac{3\pi}{2} \\
< 0 & u > \frac{\pi}{2} \text{ und } u < \frac{3\pi}{2}
\end{array}$$

elliptisch und hyperbolisch evtl.?

Anwendung. Krümmungsformel von Funktionsgraphen:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Gamma_f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)$. Mit der lokalen Parametrisierung $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_u) \rangle = -\langle \varphi_u, N_u \rangle = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
f &= -\langle \varphi_u, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_u, N_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\
g &= -\langle \varphi_v, (DN)_p(\varphi_v) \rangle = -\langle \varphi_v, N_v \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}
\end{aligned}$$

Berechne $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ und erhalte

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

Bemerkung. $f_{uu} \cdot f_{vv} - f_{uv}^2 = \det(Hf)_{(u,v)}$ mit $Hf = \text{Hessische Matrix}$ $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}$

Folgerung:

$$K(\varphi(u, v)) > 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} > 0$$

$$K(\varphi(u, v)) = 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} = 0$$

$$K(\varphi(u, v)) < 0 \iff \det(Hf)_{(u,v)} < 0$$

In einem Kritischenpunkt p ist die Krümmung $K = \det(Hf)_p$.

Beispiele.

1. $f(x, y) = x^n + y^m$ mit $n, m \geq 2$.

Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$\implies K(\varphi(0, 0)) = K(0) = 0 \text{ falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3$$

$$\implies K(\varphi(0, 0)) = K(0) = 4 \text{ falls } m = 2 \text{ und } n = 2$$

Alternative $f(x, y) = -(x^2 + y^2) \implies K(0) = 4$

2. $f(x, y) = x^n - y^n$ mit $n, m \geq 2$

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & -m(m-1)y^{m-2} \end{pmatrix}$$

$$\implies K(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \geq 3 \text{ oder } n \geq 3 \\ -4, & \text{falls } m = n = 2 \end{cases}$$

$$\text{Hier gilt } K(\varphi(u, v)) = \frac{-4}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} = \frac{-4}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^2} < 0$$

$$\text{Wir folgern } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} K(\varphi(u, v)) = 0, \text{ ebenso } \lim_{v \rightarrow \infty} K(\varphi(u, v)) = 0.$$

Frage. Existiert $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} C^2$, so dass Γ_f konstant -1 gekrümmt ist?

Antwort. Nein! (Hilbert 1901)

Im Spezialfall $f(x, y) = g(x) + h(y)$ mit $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} C^2$ können wir elementar zeigen, dass Γ_f nicht konstant -1 gekrümmt sein kann (vergleiche Serie 6). Mit der obigen Formel erhalten wir

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{g_{uu} \cdot h_{vv}}{(1 + g_u^2 + h_v^2)^2} \stackrel{!}{=} -1$$

$$\implies g_{uu} \cdot h_{vv} < 0$$

Annahme: $h_{vv} < 0, g_{uu} > 0 (\forall (u, v) \in \mathbb{R}^3 \text{ da } h, g \text{ stetig})$

Fixiere (ein beliebiges) $v \in \mathbb{R}$ und erhalte eine Differentialgleichung für g der Form

$$\frac{g_{uu} \cdot a}{(1 + g_u^2 + b^2)} = -1$$

mit $a = h_{vv}(v) < 0$ und $b = h_v(v)^2 \geq 0$

$$\implies g_{uu} = \underbrace{-\frac{1}{a}}_{>0 \text{ und } = c} \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 = c \cdot (1 + g_u^2 + b)^2 > c \cdot (1 + 2g_u^2)$$

Schreibe $s(u) = g_u(u) \implies s' > c(1 + 2s^2)$ (evtl. reicht sogar $s' > 2s^2$)

Wir lösen die Differentialgleichung $s' = c \cdot (1 + 2s^2)$ und bemerken, dass diese in endlicher Zeit divergiert.

Beispiel. $s' = s^2$

Lösung zur Anfangsbedingung: $s(0) = 1 : s(t) = \frac{1}{1-t}$

Rotationsflächen

Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^2 -Kurve. Schreibe $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ mit $r(t)$ der Rotation und $h(t)$ der Höhe. Wir treffen folgende Annahmen:

1. $r(t) > 0$
2. $h'(t) > 0$
3. $|\dot{\gamma}(t)| = 1$, d.h. $\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2 = 1$ ("γ ist nach Bogenlänge parametrisiert")

illustrationen rotationsfläche und dass gamma nicht zweimal auf gleicher x achse höhe durchlaufen darf

Konstruiere eine Rotationsfläche mit folgender Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) &\rightarrow \Sigma \\ (u, v) &\mapsto (r(u)\cos(v), r(u)\sin(v), h(u)) \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (r'(u)\cos(v), r'(u)\sin(v), h'(u)) \\ \varphi_v &= (-r(u)\sin(v), r(u)\cos(v), 0) \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Einheitsnormalenfeld:

$$N(\varphi(u, v)) = (-h'(u)\cos(v), -h'(u)\sin(v), r'(u))$$

Kontrolle:

- $|N| = 1$, d.h. $\langle N, N \rangle = 1$ (ok, da $h'(u)^2 + r'(u)^2 = 1$)
- $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ (ok)
- $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ (ok)

Berechne

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 \text{ (da } h'^2 + r'^2 = 1)$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = r(u)^2$$

Weiter

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = h''(u)r'(u) - h'(u)r''(u)$$

$$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = 0$$

$$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = r(u)h'(u)$$

$$\begin{aligned} \implies K(\varphi(u, v)) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(h''r' - h'r'') \cdot r \cdot h'}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (h''r'h' - r''h'^2) = \frac{1}{r} \cdot (-r'^2r'' - h'^2r'') = -\frac{r''(u)}{r(u)} \end{aligned}$$

Hierbei wurde genutzt, dass $r'^2 + h'^2 = 1 \implies 2r'r'' + 2h'h'' = 0$
 $K(\varphi(u, v))$ ist nicht von v abhängig!

1.4 Theorema Egregium