

# Kapitel 1

## Ebene hyperbolische Geometrie

Knörrer: Geometrie Kapitel 3

**Ziel.** Konstruktion einer *vollständigen* Fläche  $H$  mit konstanter Krümmung  $-1$ , analog zur Ebene ( $K \equiv 0$ ) und Sphäre ( $K \equiv 1$ ).

*Vollständig:* Jede geodätische Kurve  $\gamma : (a, b) \rightarrow H$  lässt sich geodätisch auf  $\mathbb{R}$  erweitern.

**Motivation.** *Gauss-Bonnet*

$$\int_{\Sigma} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

wobei  $\Sigma$  eine kompakte, vollständige Fläche. Falls  $\chi(\Sigma) < 0$  und die Krümmung  $K$  konstant ist, dann muss  $K$  negativ sein!

**Theorem 1** (Klassifikation der Flächen). *Sei  $\Sigma$  eine topologische (glatte), kompakte, vollständige, orientierbare, zusammenhängende Fläche. Dann ist  $\Sigma$  zu einer der Flächen  $\Sigma_g$  homöomorph (diffeomorph):*



$\Sigma_g$  mit  $g$  Henkel

*Es gilt:  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$  falls  $g \geq 2$ .*

## 1.1 Eine Riemannsche Metrik mit $K=-1$

Naiver Ansatz zur Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  mit  $K = -1$ .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = h(p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

wobei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  positiv und glatt ist. Für die Koeffizientenfunktionen  $E, F, G$  gilt also:

- $E(x, y) = \langle e_1, e_1 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$
- $F(x, y) = \langle e_1, e_2 \rangle_{(x,y)} = 0$
- $G(x, y) = \langle e_2, e_2 \rangle_{(x,y)} = h(x, y)$

**Terminologie.** Falls  $E = G$  und  $F = 0$  gilt, dann heissen die Koordinaten *konform* oder *isotherm*.

Eine kleine Rechnung zeigt

$$K = -\frac{1}{2h(x, y)} \Delta(\log(h(x, y)))$$

wobei  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$  der Laplaceoperator (siehe Serie 10).

Nun führt  $K = -1$  zu einer Differentialgleichung für  $h$ :

$$2h(x, y) = \Delta(\log(h(x, y)))$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung*, welche schwierig zu lösen ist. Mit dem Lösungsansatz  $h(x, y) = y^n$  finden wir eine Lösung  $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$ , welche allerdings nur auf der oberen Halbebene  $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$  definiert ist.

**Definition.** Die *hyperbolische Ebene* ist die Menge  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$  mit der Riemannschen Metrik

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{x+iy} = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

**Bemerkungen.**

1. Die Translation  $z \mapsto z + a$  mit  $a \in \mathbb{R}$  ist eine Isometrie von  $H$ . Tatsächlich, schreibe

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y) \end{aligned}$$

Für alle  $p \in H$  gilt  $(DT)_p = Id_{\mathbb{R}^2}$ . Zu prüfen für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ :

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DT)_p(v), (DT)_p(w) \rangle_{T(p)} = \langle v, w \rangle_{T(p)}$$

Stimmt, da  $y(p) = y(T(p))$ , und somit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_{T(p)}$

2. Die Streckung  $z \mapsto \lambda z$  mit  $\lambda > 0$  ist eine Isometrie von  $H$ . Schreibe

$$\begin{aligned} S : H &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Für alle  $p \in H$  gilt  $(DS)_p = \lambda Id_{\mathbb{R}^2}$ . Zu prüfen für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ :

$$\langle v, w \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DS)_p(v), (DS)_p(w) \rangle_{S(p)} = \lambda^2 \langle v, w \rangle_{S(p)}$$

Stimmt, da  $y(S(p)) = \lambda y(p)$ , also  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S(p)} = \frac{1}{\lambda^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_p$

3. Die Inversion  $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$  ist eine Isometrie von  $H$ . Schreibe

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\bar{z}} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} \in H$$

falls  $z \in H$  d.h.  $y > 0$ . Also  $\varphi : H \rightarrow H$ . Es gilt für alle  $z \in H$  und  $v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ :

$$(D\varphi)_z(v) = \varphi'(z)v = -\frac{1}{z^2}v$$

Zu prüfen:

$$\langle v, w \rangle_z \stackrel{?}{=} \left\langle -\frac{1}{z^2}v, -\frac{1}{z^2}w \right\rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{|z|^4} \langle v, w \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}}$$

. Stimmt, da  $y(-\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{1}{|z|^2}y(z) \implies \langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{\bar{z}}} = |z|^4 \langle \cdot, \cdot \rangle_z$

## 1.2 Möbiustransformationen

**Erinnerung** (aus der komplexen Analysis). Für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$ , definieren wir die zugehörige *Möbiustransformation* (nicht auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert).

$$\begin{aligned} (MT)\Phi : \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

**Beispiele.**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \in \mathbb{C} \implies \Phi_A(z) = z + b$
2.  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies \Phi_A(z) = a^2 z$ . Für  $a = \sqrt{\lambda} : \lambda z$  ( $\lambda > 0$ )
3.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Phi_A(z) = -\frac{1}{z}$  Insbesondere, für  $a = \sqrt{\lambda}(\lambda > 0) : \lambda z$

**Bemerkung.** Die obigen Isometrien 1-3 sind vom Typ  $\Phi_A$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^3)$ . (Determinante 1)

## Projektive Interpretation von Möbiustransformation

Sei  $A \in GL(\mathbb{C}^2)$ . Dann erhalten wir eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Insbesondere bildet  $A$  Geraden durch 0 auf Geraden durch 0 ab (1).

**Definition.** Die *projektive Gerade*  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$  ist die Menge aller komplexen Geraden durch 0 in  $\mathbb{C}^2$ . Konkret: Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich folgender Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ :

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \text{ mit } w = \lambda v$$

Dann ist  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim$ . Sei nun  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

- Falls  $b \neq 0$ , dann gilt  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} z \in \mathbb{C}$ .
- Falls  $b = 0$ , dann gilt  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{a \neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$ .

Daraus folgern wir, dass  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Aus (1) folgt: Die Abbildung  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \\ [v] &\mapsto [Av] \end{aligned}$$

Interpretation via  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

- $v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$  bzw.  $cz + d = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$

Notation für  $\Phi_A : \Phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  "geeignet interpretiert". Aus dieser Definition folgt auch dass  $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$ . Diese Tatsache ist mit der anderen Definition mühsam zu beweisen.

**Lemma 1.** Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$  Dann erhält die Möbiustransformation  $\varphi_A$  die obere Halbebene  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$ .

*Beweis.* Sei  $z \in H$ , d.h.  $\operatorname{im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) > 0$ . Berechne

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(\varphi_A(z)) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) + (a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\ &\stackrel{\det A=1}{=} \frac{\operatorname{im}(z)}{(cz+d)^2} > 0\end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Es gilt sogar  $\varphi_A(H) = H$  Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}H &= \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (H) = \varphi_{A \circ A^{-1}}(H) \\ &\stackrel{\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B}{=} \varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}}(H) = \varphi_A(\varphi_{A^{-1}}(H)) \subset \varphi_A(H)\end{aligned}$$

$\implies \varphi_A(H) = H$ . Daraus folgt, dass Möbiustransformationen eine Gruppe bilden.

**Lemma 2.** Jede Möbiustransformation  $\varphi_A : H \rightarrow H$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$  ist eine endliche Komposition von Möbiustransformationen der Form

1.  $z \mapsto z + b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) horizontale Translation
2.  $z \mapsto \lambda z$  ( $\lambda > 0$ ) Streckung
3.  $z \mapsto -\frac{1}{z}$  Inversion

*Beweis.*

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \frac{cz + \frac{c}{a}b}{cz+d} = \frac{a}{c} \frac{cz+d + (\frac{c}{a}b-d)}{cz+d} = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$$

für geeignete  $\alpha$  und  $\beta$ . Details siehe Serie 11. □

**Korollar 1.** Alle Möbiustransformationen der Form  $\varphi_A : H \rightarrow H$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$  sind Isometrien bezüglich der Riemannschen Metrik  $\frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ .

*Beweis.* Möbiustransformationen des Typs 1-3 sind Isometrien, siehe oben □

**Lemma 3.** Die Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$   
 $t \mapsto ie^t$

*Beweis.* Wir bemerken zuerst, dass

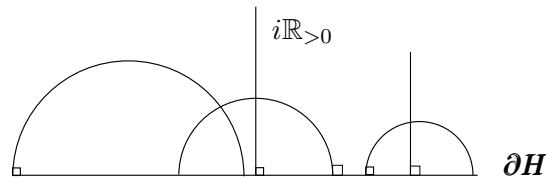
$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|_H &= \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_H} \\ &\stackrel{y(\gamma(t))=e^t}{=} \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2} \underbrace{\langle ie^t, ie^t \rangle_{\mathbb{R}^2}}_{\langle e^t, e^t \rangle = (e^t)^2}} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$  ist nach Bogenlänge parametrisiert (bzgl. hyperbolischer Metrik). Sei nun  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow H$  die eindeutige geodätische Kurve mit  $\delta(0) = i$  und  $\dot{\delta}(0) = i$ . Betrachte die folgende Isometrie von  $H$  (Spiegelung an  $i\mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \sigma : H &\rightarrow H \\ x + iy &\mapsto -x + iy \end{aligned}$$

Nun ist  $\sigma \circ \delta : \mathbb{R} \rightarrow H$  auch geodätisch mit  $\sigma \circ \delta(0) = i$  und auch  $\frac{d}{dt}(\sigma \circ \delta)(0) = i$ . Aus der Eindeutigkeit der Geodäten zu Anfangsbedingungen folgt also  $\delta = \sigma \circ \delta$ , also  $\delta(\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$ . Da  $\gamma$  und  $\delta$  nach Bogenlänge parametrisiert ( $\delta$  ist geodätisch mit  $\|\dot{\delta}(0)\|_H = 1$ ) sind, folgt  $\gamma = \delta$ .  $\square$

**Proposition 1.** *Die Geodäten in  $H$  sind genau die Halbgeraden und Halbkreise, welche senkrecht auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial H$  stehen.*



Geodäten in Halbebene  $H$

*Beweis.* Wir haben schon eine Geodäte gefunden:  $i\mathbb{R}_{>0}$ , das Bild der Kurve  $\gamma(t) = ie^t$ . Schreibe  $h = \text{Bild}(\gamma) \subset H$ . Nun ist für jede Isometrie  $\varphi : H \rightarrow H, \varphi(H) \subset H$  auch eine Geodäte. Insbesondere können wir auf  $h$  iteriert Abbildung der Form

1.  $z \mapsto z + b \quad b \in \mathbb{R}$
2.  $z \mapsto \lambda z \quad \lambda > 0$
3.  $z \mapsto -\frac{1}{z}$

Daraus folgt, dass alle Halbgeraden auf  $\mathbb{R}$  Geodäten sind. Betrachte die spezielle Isometrie  $\varphi(z) = -\frac{2}{z+1}$

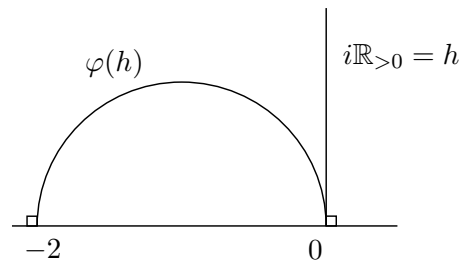
**Behauptung.**  $\varphi(h)$  ist ein Halbkreis in  $H$  mit Zentrum  $-1$  und Radius  $1$

*Beweis.* Sei  $iy \in h$ . Berechne

$$|\varphi(iy) + 1| = \left| -\frac{2}{iy+1} + \frac{iy+1}{iy+1} \right| = \left| \frac{iy-1}{iy+1} \right| = 1$$

□

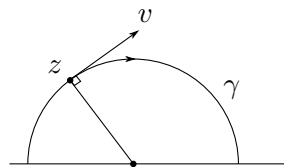
Unter Anwendung von horizontalen Transformationen und Streckungen erhalten wir aus  $\varphi(h)$  alle Halbkreise Senkrecht auf  $\mathbb{R}$ .



Halbkreis als Geodäte

**Frage.** Wieso existieren keine weiteren Geodäten?

Zu jeden  $z \in H$  und jedem Einheitsvektor  $v$  existiert genau eine geodätische Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$  mit  $\gamma(0) = z$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Das Bild von  $\gamma$  muss also der Halbkreis oder die Halbgerade durch  $z$  mit Tangente  $v$  sein! □



Eindeutigkeit der Geodäte

**Bemerkung.** Für alle  $z, w \neq z \in H$  existiert eine Geodäte  $g \subset H$  mit  $z, w \in g$  Hingegen existiert zu  $g \subset H$  und  $z \notin g$  unendlich viele Geodäten  $h \in H$  mit  $z \in h$  und  $h \cap g = \emptyset$ . Wir bemerken, dass das *Parallelaxiom* in der hyperbolischen Ebene *nicht erfüllt* ist.

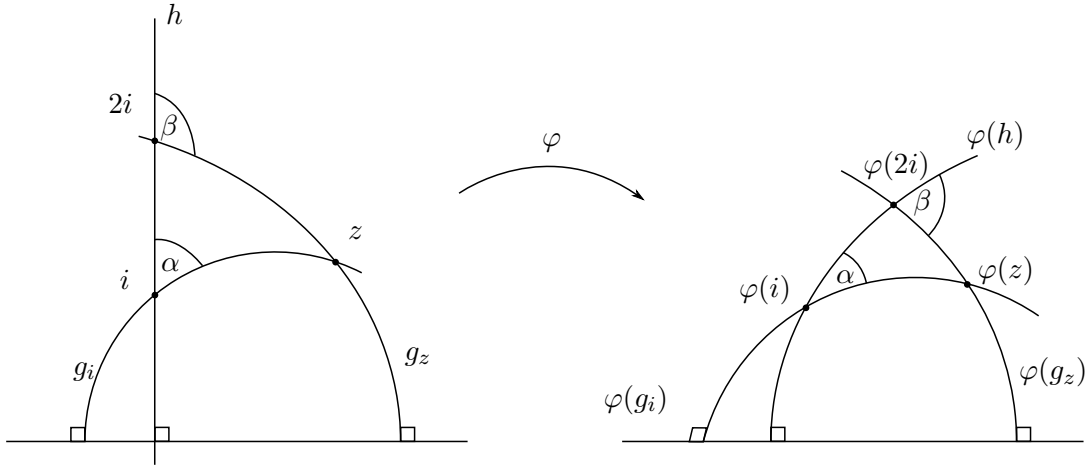


Dies wurde etwa 1840 von Bolyai und Lobachevski bemerkt.

### 1.3 Die Isometriegruppe von $H$

**Lemma 4.** Sei  $\varphi : H \rightarrow H$  eine orientierungserhaltende Isometrie, d.h. für alle  $z \in H$  gilt  $\det((D\varphi)_z) > 0$ . Dann ist  $\varphi$  durch  $\varphi(i) \in H$  und  $(D\varphi)_i(i) \in \mathbb{C}$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Geometrisch, unter Benutzung der Tatsache, dass Isometrien winkelerhaltend sind. Wir bemerken zuerst, dass  $\delta(t) = \varphi(ie^t)$  eine geodätische Kurve mit  $\delta(0) = \varphi(i)$  und  $\dot{\delta}(0) = (D\varphi)_{ie^0}(i) = (D\varphi)_i(i)$  ist, also durch  $\varphi(i) \in H$  und  $(D\varphi)_i(i) \in \mathbb{C}$  bestimmt. Insbesondere kennen wir auch  $\varphi(2i) \in H$ . Sei  $z \in H \setminus i\mathbb{R}_{>0}$ ,  $g_i, g_z \subset H$  Geodäten mit  $i, z \in g_i$  bzw.  $2i, z \in g_z$ , wegen  $\angle(g_i, h) = \angle(\varphi(g_i), \varphi(h))$  und  $\varphi$  winkelerhaltend. Daraus folgt  $\varphi(g_i)$  und  $\varphi(g_z) \subset H$  festgelegt. Daraus erhalten wir  $\varphi(z) = \varphi(g_i) \cap \varphi(g_z)$ . Dies ist ein eindeutiger Schnittpunkt, da es Halbkreise senkrecht auf  $H$  sind.  $\square$



**Definition.**  $\text{Iso}^+(H) = \{\varphi : H \rightarrow H \mid \varphi \text{ ist eine orientierungserhaltende Isometrie}\}$   
Dies ist eine Gruppe unter der üblichen Komposition.

Für alle  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$  gilt  $\varphi_A \in \text{Iso}^+(H)$ . Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : SL(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \text{Iso}^+(H) \\ A &\mapsto \varphi_A \end{aligned}$$

welche ein Gruppenhomomorphismus ist:  $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$

**Theorem 2.**  $\Psi$  ist surjektiv, es gilt  $\ker(\Psi) = \left\{ \pm E = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  Insbesondere gilt  $\text{Iso}^+(H) \simeq SL(\mathbb{R}^2) / \pm E = PSL(\mathbb{R}^2)$

*Beweis.*

1.  $\ker(\Psi) = \{\pm E\}$ : Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$  mit  $\varphi_A = \text{Id}_H$ , d.h. für alle  $z \in H$   $\frac{az+b}{cz+d} = z$  bzw.  $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ . Wir folgern  $c = 0, d = a, b = 0$ . Also  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , mit  $\det(A) = a^2 = 1 \implies a = \pm 1 (A = \pm E)$



2.  $\Psi$  ist surjektiv: Sei  $\varphi \in \text{Iso}^+(H)$ . Betrachte  $\varphi(h) = \varphi(i\mathbb{R}_{>0}) \subset H$ . Aus obigen Ausführungen wissen wir, dass eine Möbiustransformation  $\varphi_A$  existiert mit  $\varphi_A(h) = \varphi(h)$ . Daraus folgt  $\underbrace{\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi(h)}_{\in \text{Iso}^+(H)} = h$ . Nach einer Streckung  $\varphi_B(z) = \lambda z$

gilt sogar  $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi(i) = i$ . Es kann sein, dass  $\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi$  die Geodäte  $h$  um  $180^\circ$  dreht, um den Punkt  $i$ . Entweder ist

$$\varphi_B^{-1} \circ \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi = \begin{cases} Id_H \implies \varphi = \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB} = \Psi(AB) \\ \varphi_C \implies \varphi = \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_{ABC} = \Psi(ABC) \end{cases}$$

□

**Konsequenz.** Isometrien von  $H$ , welche die Orientierung erhalten, sind Möbiustransformationen  $\varphi_A$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$

## 1.4 Distanz und Flächeninhalt

Seien  $p, q \in H$ .

**Definition.**  $d_H(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow H \text{ } C^1 \text{ mit } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$  wobei

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_H dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_H} dt$$

**Lemma 5.** Für alle  $T \geq 1$  gilt :  $d_H(i, Ti) = \log(T)$ .

*Beweis.* Betrachte zuerst die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \log(T)] &\rightarrow H \\ t &\mapsto ie^t \end{aligned}$$

Es gilt  $\gamma(0) = i, \gamma(\log(T)) = Ti$ . Berechne

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{\log(T)} \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2} \langle ie^t, ie^t \rangle} dt \\ &= \int_0^{\log(T)} 1 dt = \log(T) \end{aligned}$$

Hier wird benutzt, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$  und  $y(\gamma(t)) = e^t$ .

Sei nun  $\delta : [a, b] \rightarrow H \text{ } C^1$  mit  $\delta(a) = i, \delta(b) = T$  ein beliebiger  $C^1$ -Weg. Schreibe

$\delta(t) = x(t) + iy(t)$  mit  $\dot{\delta}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ . Schätze ab:

$$\begin{aligned}
L(\delta) &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\delta}(t), \dot{\delta}(t) \rangle_H} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\
&\geq \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{y}(t)^2}{y(t)^2}} dt \\
&= \int_a^b \left| \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \right| dt \\
&\geq \int_a^b \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = \log(y(b)) - \log(\underbrace{y(a)}_{=1}) = \log(T) - 0
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2.** Für alle  $z, w \in H$  gilt

$$\cosh(d_H(z, w)) = 1 \frac{|z - w|^2}{2 * \operatorname{im}(z) \operatorname{im}(w)}$$

Zur Erinnerung:  $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

**Bemerkungen.**

1. Für  $z = w$  gilt  $d_H(z, w) = 0$ , also  $\cosh(d_H(z, w)) = 1$ . Deshalb “+1”
2. Sei  $x \in \partial H = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Dann gilt für festes  $z \in H$ :

$$\lim_{w \rightarrow x} d_H(z, w) = +\infty$$

da  $\operatorname{im}(w) \rightarrow 0$ . “Punkte im Rand  $\partial H$  sind unendlich weit weg”

*Beweis.* Seien zunächst  $z, w \in i\mathbb{R}_{>0}$ : schreibe  $z = ia$  und  $w = ib$  mit  $a < b$ , (sonst benutze  $d_H(z, w) = d_H(w, z)$ ). Für den Weg  $\gamma : [\log(a), \log(b)] \rightarrow H$  und  $t \mapsto ie^t$ , gilt  $\gamma(\log(a)) = ia = z$ ,  $\gamma(\log(b)) = ib = w$ , und  $L(\gamma) = \log(b) - \log(a)$ . Für alle anderen Wege  $\delta : [c, d] \rightarrow H$  mit  $\delta(c) = z$  und  $\delta(d) = w$  gilt:

$$\begin{aligned}
L(\delta) &= \int_c^d \|\dot{\delta}(t)\|_H dt = \int_c^d \frac{1}{y(t)} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\
&\geq \int_c^d \frac{1}{y(t)} \sqrt{\dot{y}(t)^2} dt
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$L(\delta) \geq \int_c^d \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = [\log(y(t))]_c^d = \log(y(d)) - \log(y(c)) = \log(b) - \log(a) = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Wir folgern  $d_H(ia, ib) = \log(\frac{b}{a})$ . Aus allem folgt dann  $\cosh(d_H(ia, ib)) = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{a}{b}) = \frac{1}{2}\frac{b^2+a^2}{ab} = 1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}$ . Also folgt die Proposition für  $z, w \in i\mathbb{R}_{>0}$ . Für den allgemeinen Fall: Seien  $z \neq w \in H$  beliebig. Dann existiert eine Isometrie  $\varphi : H \rightarrow H$  (eine Möbiustransformation  $\varphi_A : H \rightarrow H$  mit  $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ ), welche die Geodäte durch  $z, w$  auf die Geodäte  $i\mathbb{R}_{>0}$  abbildet (siehe oben).

Insbesondere gilt  $\varphi(z) = ia$  und  $\varphi(w) = ib$ . Wir bemerken, dass

$$d_H(z, w) = d_H(\varphi(z), \varphi(w)) = d_H(ia, ib)$$

gilt (da  $\varphi$  eine Isometrie). Falls wir zeigen können, dass  $\varphi$  auch den Ausdruck

$$1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{im}(z) \operatorname{im}(w)}$$

erhält, dann sind wir fertig! Es reicht, dies für Möbiustransformationen des Typs 1 bis 3 zu zeigen.

1.  $z \mapsto z + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) invariant, da Differenz
2.  $z \mapsto \lambda z$  ( $\lambda > 0$ ) ok, da  $|\lambda z - \lambda w|^2 = \lambda^2 |z - w|^2$ ,  $\operatorname{im}(\lambda a) = \lambda \operatorname{im}(a)$
3.  $z \mapsto -\frac{1}{z}$  Die letzte Transformation ist ok, da

$$1 + \frac{|-\frac{1}{z} + \frac{1}{w}|^2}{2 \operatorname{im}(-\frac{1}{z}) \operatorname{im}(-\frac{1}{w})} = 1 + \frac{\frac{|w-z|^2}{|z|^2 |w|^2}}{2 \frac{\operatorname{im}(z)}{|z|^2} \frac{\operatorname{im}(w)}{|w|^2}} = 1 + \frac{|w - z|^2}{2 \operatorname{im}(z) \operatorname{im}(w)}$$

□

## Flächeninhalt

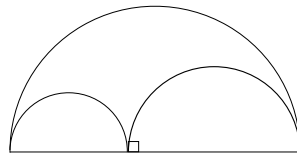
Sei  $\Delta \in H$  ein geodätisches Dreieck. Nach Gauss-Bonnet (lokal) gilt:

$$\int_{\Delta} K \, dA = \underbrace{\int_{\Delta} (-1) \, dA}_{\text{area}(\Delta)} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Also gilt  $\text{area}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Wir überprüfen dies durch Integration.

**Spezialfall.**  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Das heisst  $\Delta$  ist ein *ideales Dreieck* mit Eckpunkten in  $\partial H$



Ideales Dreieck mit Winkeln 0

**Behauptung.** *Es existiert eine Isometrie  $\varphi : H \rightarrow H$ , welche die Eckpunkte von  $\Delta$  auf  $-1, +1, \infty$  schickt!*

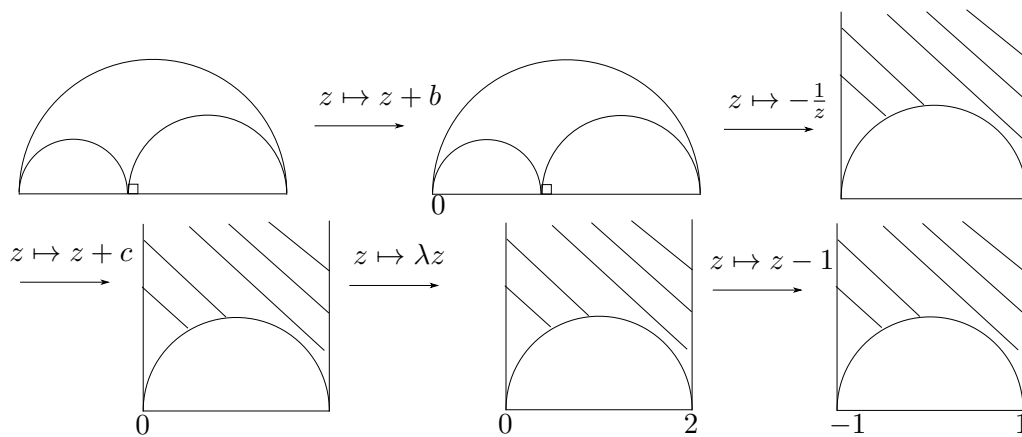


Abbildung 1.1: Beweis der Behauptung

Berechne nun den Flächeninhalt vom letzten Dreieck  $\Delta_0$

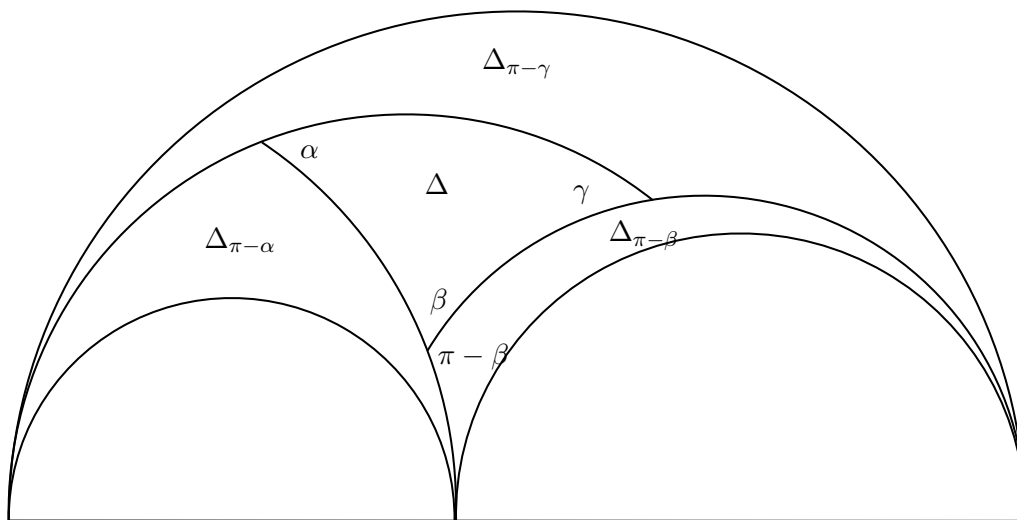
$$\begin{aligned}
 \text{area}(\Delta) &= \int_{\Delta} dA \\
 &= \int_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} \, dx dy = \int_{\Delta_0} \left( \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi
 \end{aligned}$$

Hier wird benutzt  $\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y}$ . Ähnlich funktioniert dies für ein Dreieck  $\Delta_\alpha$  mit  $\alpha > 0$ .  
 $\beta = \gamma = 0$ .  $\implies$

$$\text{area}(\Delta_\alpha) = \int_{-1}^{\cos(\alpha)} \left( \int_{\sqrt{-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \dots = \arcsin(\cos(\alpha)) - \arcsin(-1)$$

. Wir nutzen  $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \implies \text{area}(\Delta_\alpha) = \pi - \alpha$

Im allgemeinen Fall  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  berechnen wir  $\text{area}(\Delta)$  mit folgendem Ergänzungsbild.



Allgemeiner Fall

## 1.5 Ausblick Teichmüllertheorie

(Nicht mehr Prüfungsrelevant)

**Erinnerung.** Sei  $\Sigma_g$  die Standardfläche vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Dann gilt  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$ . Falls auf  $\Sigma_g$  eine Metrik mit konstanter Krümmung  $K$  existiert, dann muss  $K$  negativ sein.

$$\int_{\Sigma_g} K \, dA = 2\pi\chi(\Sigma_g) < 0$$

Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf  $\Sigma_g$  mit  $K = -1$ .

**Lemma 6.** *In  $H$  existieren rechtwinklige Sechsecke.*

*Beweis.* Starte mit idealem Sechseck: Ziehe Eckpunkte nach oben bis die Eckpunkte rechtwinklig aufeinander sind. Alternativer Beweis via Cayleytransformation. Verklebe zwei solche Sechsecke  $S_1$  und  $S_2$  entlang dreier Seiten; erhalte eine Hose. (dies ist ein abstrakter Prozess, nicht in  $\mathbb{R}^3$ !). Dann verklebe Hosen zu geschlossenen Flächen.  $\square$