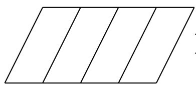
Kapitel 1

Untermannigfaltigkeiten und Flächen

Zentral für das Verständnisses dieser Vorlesung sind Untermannigfaltigkeiten (UMF). Der Prototyp einer Untermannigfaltigkeit hat immer die Form

$$\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{wobei } k < n$$

Eine UMF sollte bis auf lokale Diffeomorphismen "so aussehen"



$\mathbb{R}^2 \times \{0\}$

Prototyp einer UMF in $\mathbb{R}^3$

Definition. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ heisst Diffeomorphismus falls φ bijektiv, und sowohl φ und φ^{-1} unendlich oft differenzierbar. Schreibe auch $\varphi \in (C^\infty)$ bzw. φ glatt.

Bemerkung. In der Literatur wird manchmal auch nur C^1, also stetig differenzierbar gefordert.

Beispiele.

1. $\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0}\\ x &\mapsto e^x\end{aligned}$ ist ein Diffeomorphismus mit Umkehrung $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

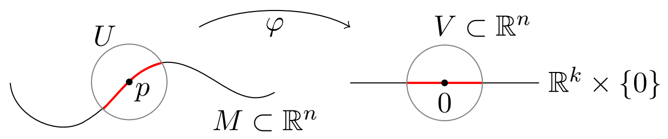
2. $\begin{aligned}\varphi\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tan(x)\end{aligned}$ ist ein Diffeomorphismus mit $\varphi^{-1} = \arctan$

3. $\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^3\end{aligned}$ ist *kein* Diffeomorphismus, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ bei $x = 0$ nicht diff'bar

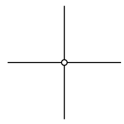
Erinnerung (Umkehrsatz)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in C^1 (also stetig diff'bar) und $p \in \mathbb{R}^n$ mit $\det(Df)_p \neq 0$. Dann existieren $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ und $V = f(U)$, so dass die Einschränkung $f|_U\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus (im C^1-Sinn ist). "f hat bei p eine lokale Umkehrung in C^1."

1.1 Untermannigfaltigkeit

Definition. Eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst Untermannigfaltigkeit der Dimension k falls $\forall p \in M$ zwei offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ und $0 \in V$ existieren, sowie ein C^1-Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to V$ mit $\varphi(U \cap M) = \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) \cap V$ und $\varphi(p) = 0$



Beispiel. Die (x-Achse $\cup$ y-Achse) $\setminus \{0\} = M$ ist zwar lokal diffeomorph zu $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, ist aber nicht abgeschlossen. Also <u>keine</u> UMF in $\mathbb{R}^2$!



Frage. Wie konstruieren wir nicht triviale Beispiele von Untermannigfaltigkeiten?

Definition. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^1 mit $m < n$. Ein Punkt p heisst <u>regulär</u> (für f), falls das Differential $(Df)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist. Ein Wert $w \in \mathbb{R}^m$ heisst <u>regulär</u>, falls alle $p \in f^{-1}(w)$ regulär sind. Nicht reguläre Punkte/Werte heissen <u>kritisch</u>.

Bemerkung. Falls $w \notin \mathrm{Bild}(f)$, dann ist w auch regulär.

Im Spezialfall $k = 2$ und $n = 3$ heisst $M \subset \mathbb{R}^3$ eine <u>reguläre Fläche</u>.

Theorem 1. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^1 mit $m \leq n$ und $w \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert. Dann ist das Urbild $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = w\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - m$.*

Beispiele.

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle p, e_3 \rangle$ — Berechne $\forall p \in \mathbb{R}^3$ das Differential $(Df)_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \langle h, e_3 \rangle$

   Erinnerung (Dreigliedentwicklung)**.**

$$
\begin{aligned}
f(p+h) &= f(p) + (Df)_p\,(h) + (Rf)_p\,(h) \\
\langle p+h, e_3 \rangle &= \langle p, e_3 \rangle + \langle h, e_3 \rangle + 0
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist $\forall p \in \mathbb{R}^3\, (Df)_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ surjektiv, da der Gradient $(\nabla f)_p = e_3 \neq 0$ <u>Gradient</u>: Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $(Df)_p\,(h) = \langle (\nabla f)_p\,, h\rangle$.
Wir folgern, dass für alle $w \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}(w) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3 - 1 = 2$

2. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (In Koordinaten $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$)
   $p \mapsto \langle p, p\rangle = ||p||_2^2$

   Berechne $\forall p \in \mathbb{R}^3$

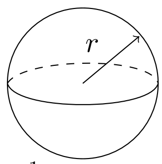
$$\begin{aligned}(Df)_p : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\ h &\mapsto 2\langle p, h\rangle\end{aligned}$$

$$f(p+h) = \langle p+h, p+h\rangle = \underbrace{\langle p, p\rangle}_{f(p)} + \underbrace{2\langle p, h\rangle}_{(Df)_p(h)} + \underbrace{\langle h, h\rangle}_{(Rf)_p(h)}$$

   $\implies (\nabla f)_p = 2p$ Also ist $(Df)_p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ surjektiv $\iff p \neq 0$
   Wir folgern, dass für alle $w \neq 0$ die Menge $f^{-1}(w) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid ||p||_2^2 = w\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3 - 1 = 2$ ist.

   <u>$w < 0$</u> <u>$w = 0$</u> <u>$w > 0$</u>

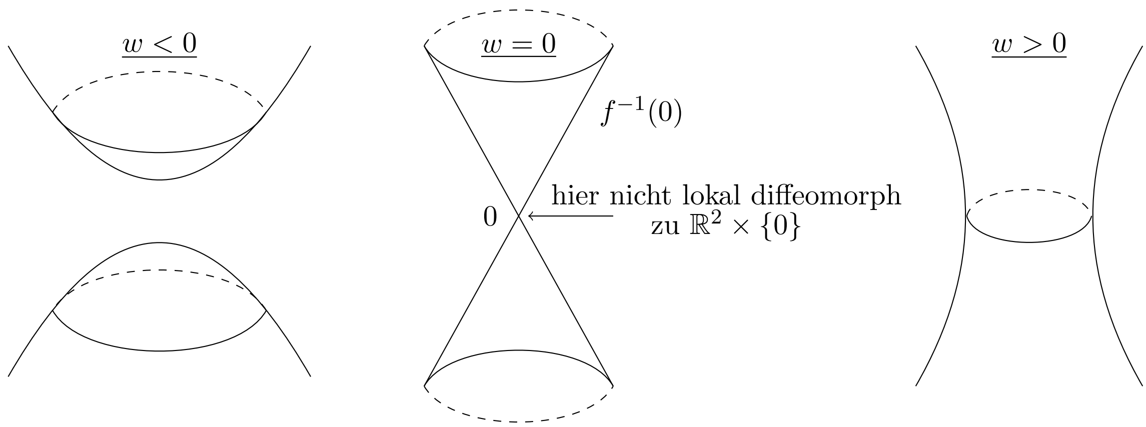
   $\emptyset$ $\cdot\ 0$



$r = \sqrt{w}$

$f^{-1}(w)$ UMF der Dimension 2

3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Berechne $(\nabla f)_p = (2x, 2y, -2z), p = (x,y,z)$
   Also $(Df)_p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ surjektiv $\iff p \neq 0$. <u>Folgerung</u> $w \neq 0 \implies f^{-1} \subset \mathbb{R}^3$ UMF der Dimension 2.



zweischaliges Hyperboloid einschaliges

Beweis von Theorem 1. Sei $p \in \mathbb{R}^n$ mit $f(p) = w$. Dann ist $(Df)_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren *offene* Mengen:

- $A \subset K = \ker((Df)_p)$
- $B \subset \mathbb{R}^m$
- $Y \subset \mathbb{R}^n$

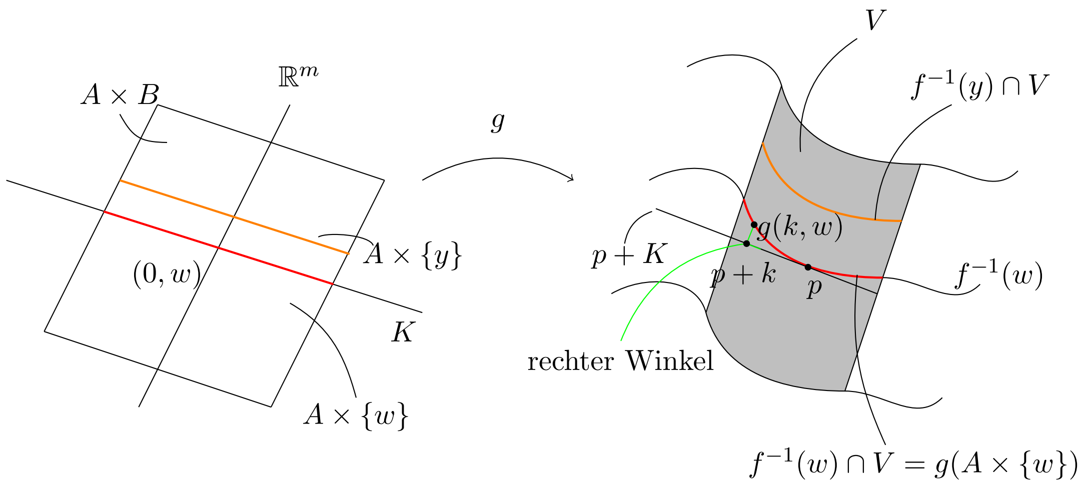
mit $0 \in A,\ w \in B$ und $p \in V$ sowie ein C^1-Diffeomorphismus $g \colon A \times B \to V$ mit

i) $f(g(k, y)) = y\ \forall k \in A,\ y \in B$

ii) $g(k, y) - (p + k) \in K^\perp$

Die Niveaumenge f^{-1} ist lokal gleich dem Graphen einer Funktion der Form $k \mapsto g(k, y)$. Insbesondere gilt: $f^{-1} \cap V = g(A \times \{w\})$. Wir folgern, dass $f^{-1}(w)$ eine UMF (via $\varphi = g^{-1}$) der Dimension $k = n - m$ ist. Da $\dim K = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Bild}(Df)_p)$.

<u>Bild</u>:



$\square$

1.2 Lokale Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten

Definition. Eine C^1-Abilldung $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ heisst lokale Einbettung beim Punkt $p \in \mathbb{R}^k$ falls $(Df)_p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. ($k \leq n$

Theorem 2. *Sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Einbettung bei $p \in \mathbb{R}^k$. Dann existiert eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in W$, sodass $f(W) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist.*
In diesem Kontext heisst f eine lokale Parametrisierung von M bei $f(p) \in M$.

Beispiele.

1. $M = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u,v,0) \end{aligned}$$

eine (globale) Parametrisierung von M. Tatsächlich ist φ linear, mit Abbildungsmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Jakobimatrix $(J\varphi)_p$ stimmt in jedem Punkt mit A überein $\implies (D\varphi)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv.

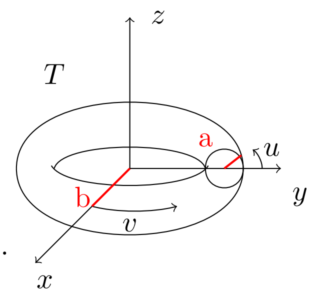
2. $M = S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 | \; ||p||_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (reguläre Fläche, siehe oben). Definiere

$$\begin{aligned} \varphi \colon D^2 &\to S^2 \\ (u,v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned}$$

Bereche $(J\varphi)_{(0,0,0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ Also ist φ eine lokale Parametrisierung von S^2 beim Nordpol $N = (0,0,1) = \varphi(0,0)$.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Definiere den Rotationstorus

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^2 &\to T \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a\cos u)\cos v \\ (b + a\cos u)\sin \\ a \sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$



In jedem Punkt $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ist φ eine lokale Parametrisierung von T. Berechne dazu

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v & -(b + a\cos u)\sin v \\ -a \sin u \sin v & (b + a\cos u)\cos v \\ a \cos u & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon \operatorname{Rang}(J\varphi)_{(0,0)} = 2 \implies (D\varphi)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv.

Frage. Besitzt jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ bei jedem Punkt eine lokale Parametrisierung?

Proposition 1. *Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ besitzt bei allen Punkten $p \in M$ eine lokale Parametrisierung.*

Beweis. Da $M \subset \mathbb{R}^n$ eine UMF ist, existieren für alle $p \in M$ offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U,\ 0 \in V$ sowie $g : U \to V$ ein Diffeomorphismus mit $g(p) = 0$ und $g(U \cap M) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$. Definiere nun

$$\begin{aligned} \varphi : g^{-1}|_{(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V} : (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V &\to M \cap U \\ q &\mapsto g^{-1}(q) \end{aligned}$$

Es gilt: $\varphi(0) = p$ und $(D\varphi)_0 = \left(Dg^{-1}\right)_0 |_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} = (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$. Nach Konstruktion (g ist ein Diffeomorphismus) ist $(Dg)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Isomorphismus, ebenso $(Dg)_p^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \implies (Dg)_p^{-1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$ist injektiv $\implies (D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ injektiv. Also ist φ eine lokale Parametrisierung bei $p \in M$. $\square$

Beweis von Theorem 2. Zur Vereinfachung nehmen wir $p = 0$ und $f(p) = 0$ an. Setze $B = \text{Bild}(Df)_p < \mathbb{R}^n$, ein Untervektorraum der Dimension k (da $(Df)_p$ injektiv. Weiterhin $S = B^{\perp} < \mathbb{R}^n$, sodass gilt $\mathbb{R}^n = B \oplus S,\ \dim(S) = n - k$. Definiere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^k \times S &\to \mathbb{R}^n \\ (q, s) &\mapsto f(q) + s \end{aligned}$$

F ist stetig differenzierbar. Dreigliedentwicklung im Punkt $(p, 0) = \mathbb{R}^k \times S$:
Sei $h_1 \in \mathbb{R}^k, h_2 \in S$. Berechne:

$$\begin{aligned} F(p + h_1, 0 + h_2) = f(p + h_1) + h_2 &= f(p) + (Df)_p(h_1) + (Rf)_p(h_1) + h_2 \\ \implies (DF)_{(p,0)}\left((h_1, h_2)\right) &= (Df)_p(h_1) + h_2 \end{aligned}$$

Behauptung. $(DF)_{(p,0)} : \mathbb{R}^k \times S \to \mathbb{R}^n$ *ist ein Isomorphismus*

Beweis. Es reicht zu zeigen: $(DF)_{(p,0)}$ ist injektiv (da $k + (n - k) = n$).
Sei $(h_1, h_2) \in \ker(DF)_{(p,0)}$

$$\underbrace{(Df)_p(h_1)}_{\in B} + \underbrace{h_2}_{\in S} = 0 \underbrace{\implies}_{B \cap S = \{0\}} (Df)_p(h_1) = 0 \text{ und } h_2 = 0 \underbrace{\implies}_{(Df)_p \text{ injektiv}} h_1 = 0$$

Da also $\ker(DF)_{(p,0)} = 0$, ist $(DF)_{(p,0)}$ injektiv $\square$

Nach Umkehrsatz existieren $U \subset \mathbb{R}^k \times S,\ V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $(p, 0) \in U$ und $f(p) = F(p, 0) \in V$, sodass $F|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Nach Definition von F gilt $F(U \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}) = \underbrace{f(\mathbb{R}^k)}_{\text{Bild}(f)} \cap V$.

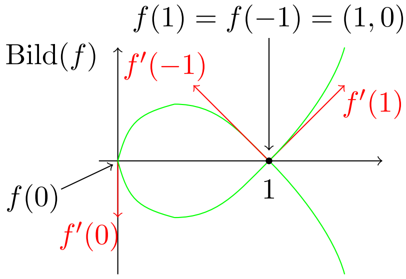
Wir schliessen, dass $\text{Bild}(f) \subset \mathbb{R}^n$ lokal um den Punkt $f(p)$ die Bedingungen einer Untermannigfaltigkeit erfüllt. $\square$

Bemerkung. Sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, welche in jedem Punkt eine lokale Einbettung ist. Dann braucht f nicht injektiv zu sein. Weiterhin ist $f(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$ im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit.

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3 - t) \end{aligned}$$

Berechne $(Jf)_t = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \implies (Df)_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv für alle $t \in \mathbb{R}$



Wir sehen, dass f nicht injektiv ist. Also ist Bild(f) keine Untermannigfaltigkeit (lokal um den Punkt $(1,0)$).

1.3 Der Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit

Ziel. Beschreibung der Menge aller Tangentialvektoren in einem Punkt einer Untermannigfaltigkeit.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-UMF der Dimension k und $p \in M$. Wähle eine lokale C^1-Parametrisierung $\varphi : U \to M$ um p, d.h. $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi(U) \subset M, \varphi(0) = p$ $(0 \in U), \varphi$ injektiv und für alle $p \in U$ ist $(D\varphi)_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv. Setze

$$T_pM = \text{Bild}\left((D\varphi)_0\right) < \mathbb{R}^n$$

der <u>Tangentialraum</u> von M bei p.

Bemerkung. Die Dimension von $T_pM < \mathbb{R}^n$ ist k, da $(D\varphi)_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Im Falle $k = 2$ (d.h. M ist eine Fläche) nennen wir T_pM <u>Tangentialebene</u>

Beispiel. Sei $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ in C^1. Betrachte den Graphen $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = h(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ und die (globale) Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u,v,h(u,v)) \end{aligned}$$

Bereche die Jakobimatrix im Punkt $q = (u, v)$

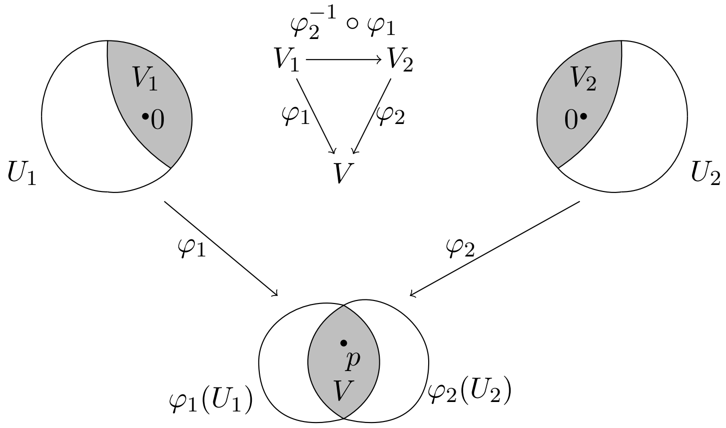
$$(J\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \text{Rang } 2 \implies (D\varphi)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ injektiv}$$

$$T_{\varphi(q)}\Gamma = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\}$$

Im Spezialfall $h = 0$: $T_{\varphi(q)}\Gamma = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$

Lemma 1. *T_pM hängt nicht von der lokalen Parametrisierung $\varphi : U \to M$ ab.*

Beweis. Seien $\varphi_1 : U_1 \to M \quad \varphi_2 : U_2 \to M$ lokale C^1-Parametrisierungen mit $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p \in M$. Setze $V = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \subset M$ offen und $V_1 = \varphi_1^{-1} \subset U_1$ und $V_2 = \varphi_2^{-1} \subset U_2$.
Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Abbildungen



Nach der Kettenregel für $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ im Punkt 0 gilt:

$$A = (D\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)_0 = (D\varphi_2^{-1})_{\varphi_1(0)} \circ (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0^{-1} \circ (D\varphi_1)_0 \implies (D\varphi_1)_0 = (D\varphi_2)_0 \circ A$$

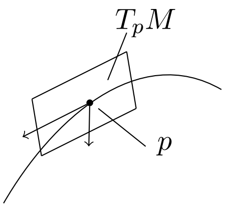
Damit formen wir um:

$$\begin{aligned} \implies T_pM = \operatorname{Bild}(D\varphi_1)_0 &= \operatorname{Bild}((D\varphi_2)_0 \circ A) \\ &\overset{(1)}{=} (D\varphi_2)_0 \circ A\left(\mathbb{R}^k\right) \\ &= (D\varphi_2)_0\left(\mathbb{R}^k\right) \\ &= \operatorname{Bild}(D\varphi_2)_0 \end{aligned}$$

In (1) wird benutzt, dass A invertierbar ist, mit $A^{-1} = (D\varphi_1)_0^{-1} \circ (D\varphi_2)_0$ und damit ist $A\left(\mathbb{R}^k\right) = \mathbb{R}^k$. $\square$

Interpretation des Tangentialraums via Geschwindigkeitsvektoren

Proposition 2. *Sei $p \in M$. Der Tangentialraum T_pM besteht aus allen Geschwindigkeitsvektoren der Form $\gamma'(0)$ für C^1-Wege $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$.*



Beweis. (i) Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = p$. Betrachte eine lokale C^1-Parametrisierung $\varphi : U \to M$ mit $\varphi(0) = p$.
Wähle $\delta > 0$, sodass $\gamma\big((-\delta, \delta)\big) \subset \varphi(U)$. Definiere $\bar\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^k$

$$t \mapsto \varphi^{-1} \circ \gamma(t)$$

Dann gilt $\gamma|_{(-\delta,\delta)} = \varphi \circ \bar\gamma$

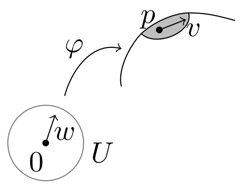
$$\Longrightarrow \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\left(\varphi \circ \bar\gamma\right)(0) = (D\varphi)_{\bar\gamma(0)}\big(\bar\gamma'(0)\big) = (D\varphi)_0\big(\bar\gamma'(0)\big) \in \mathrm{Bild}(D\varphi)_0 = T_pM$$

(ii) Sei $v \in T_pM = \mathrm{Bild}\big((D\varphi)_0\big)$ für eine lokale C^1-Parametrisierung $\varphi : U \to M$ mit $\varphi(0) = p$. Es existiert also $w \in \mathbb{R}^k$ mit $(D\varphi)_0(w) = v$.
Konstruktion eines Weges $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$. Wähle $\delta > 0$, sodass für alle $t \in (-\delta, \delta)$ gilt: $tw \in U$ (geht, da U offen). Definiere nun:

$$\begin{aligned} \gamma : (-\delta, \delta) &\to M \\ t &\mapsto \varphi(tw) \end{aligned}$$

Dann gilt: $\gamma(0) = \varphi(0) = p$

$$\Longrightarrow \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\left(\varphi(tw)\right)(0) = (D\varphi)_0(w) = v$$



$\square$

Differenzierbare Abbildung zwischen UMF

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-UMF. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^m$ heisst differenzierbar im Punkt $p \in M$, falls ein $U \subset \mathbb{R}^n$ offen existiert mit $p \in U$, sowie $F : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$. Insbesondere sind Einschränkungen von differenzierbaren Abb. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auf UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar (in allen Punkten).

Definition. Seien $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m C^1$-UMF und $f : M \to N$ stetig differenzierbar, $p \in M$ (d.h. $f : M \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar mit $f(M) \subset N$). Definiere

$$\begin{aligned} (Df)_p : T_pM &\to T_{f(p)}N \\ v &\mapsto (DF)_p(v) \end{aligned}$$

wobei $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine beliebige C^1-Einschränkung von f um den Punkt p ist, d.h. $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ und $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$. Die Abbildung $(Df)_p$ heisst Differential von f an der Stelle $p \in M$.

Lemma 2. *i.) Für alle $v \in T_pM$ gilt $(DF)_p(v) \in T_{f(p)}N$*

ii.) $(DF)_p(v)$ hängt nicht von der Erweiterung F ab.

Beweis. i.) Sei $v \in T_pM$ Wähle $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, sowie Bild$(\gamma) \subset U$. Betrachte nun den C^1-Weg $\delta = F \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$. Es gilt für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \delta(t) = F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \in N$, da $F|_M = f$ und $\gamma(t) \in M$.
Berechne:

$$\delta(0) = f(\gamma(0)) = f(p) \implies \delta'(0) = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(0) = (DF)_{\gamma(0)}\big(\gamma'(0)\big) = (DF)_p(v)$$

Nach Proposition gilt $\delta'(0) \in T_{f(p)}N$, also $(DF)_p(v) \in T_{f(p)}N$.

ii.) Seien $F : U \to \mathbb{R}^m$ und $\bar{F} : \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ zwei Erweiterungen von f (differenzierbar bei p). Für $v \in T_pM$, wähle $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ wie oben, mit Bild$(\gamma) \subset U \cap \bar{U}$. Definiere wie unter i) zwei Wege $\delta = F \circ \gamma$ und $\bar{\delta} = \bar{F} \circ \gamma$. Es gilt $\delta'(0) = (DF)_p(v)$ und $\bar{\delta}'(0) = (D\bar{F})_p(v)$. Beachte: δ und $\bar{\delta}$ stimmen überein mit $f \circ \gamma(t) \implies \delta'(0) = \bar{\delta}'(0)$ □

Bemerkung. Es gilt die Kettenregel. Seien $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n, L \subset \mathbb{R}^l$ C^1-UMF und $f : M \to N, g : N \to L$ in den Punkten $p \in M$ bzw. $f(p) \in N$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ im Punkt $p \in M$ differenzierbar, es gilt

$$\big(D(g \circ f)\big)_p = (Dg)_{f(p)} \circ (Df)_p : T_pM \to T_{g \circ f(p)}L$$

Grund: Kettenregel gilt für alle Erweiterungen F, G.

Beispiel einer differenzierbaren Abbildung zwischen UMF

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ der Rotationstorus parametrisiert durch $(0 < a < b)$

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \begin{pmatrix} (b + a\cos u)\cos v \\ (b + a\cos u)\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}f : \Sigma &\to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ q &\mapsto \frac{q}{||q||_2}.\end{aligned}$$

f lässt sich zu $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$ erweitern. In Koordinaten: $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. F ist differenzierbar (sogar C^∞) deshalb auch $f : \Sigma \to S^2$. Für $q = (x,y,z) \neq 0$, berechne die Jakobimatrix

$$(JF)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} & \frac{-xy}{r^3} & \frac{-xz}{r^3} \\ \frac{-xy}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} \\ \frac{-xz}{r^3} & \frac{-yz}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

Betrachte den Punkt $p = \varphi(0,0) = (a+b, 0, 0) \in \Sigma$. $(Jf)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a+b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$.

Bestimme $T_p\Sigma = \text{span}\{e_2, e_3\}$ und $T_{f(p)}S^2 = T_{(1,0,0)}S^2 = \text{span}\{e_2, e_3\}$. Wir erhalten also $(Df)_p : T_p\Sigma \to T_{f(p)}S^2$. Es gilt $(Df)_p(e_2) = \dfrac{1}{a+b}e_2$, bzw. $(Df)_p(e_3) = \dfrac{1}{a+b}e_3$

1.4 Die erste Fundamentalform

Erinnerung. Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, welche bilinear, symmetrisch und positiv ist.

- Positivität: $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

Jedes Skalarprodukt definiert eine positiv definite quadratische Form q d.h.

(i) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

(ii) $B(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$ ist bilinear in v, w.

$$\begin{aligned}q : V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

Sei nun $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Wir erhalten in jedem Punkt $p \in \Sigma$ ein Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_p = T_p\Sigma \times T_p\Sigma &\to \mathbb{R} \\ \langle v, w \rangle &\mapsto \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

Das Feld von Skalarprodukten $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ heisst Riemannsche Metrik auf Σ. Die zugehörige quadratische Form $I_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ heisst erste Fundamentalform von Σ an der Stelle p.

Beschreibung durch Koeffizienten

Sei $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt. Schreibe $a = a_1e_1 + a_2e_2, b = b_1e_1 + b_2e_2 \in \mathbb{R}^2$.

Berechne

$$\langle a, b \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Wähle eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$ mit $p \in \varphi(U)$. Wir ziehen die Riemannsche Metrik (auf Σ) wie folgt auf U zurück:

Sei $q \in U$ und seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Definiere

$$\langle a, b \rangle_q = \langle (D\varphi)_q(a), (D\varphi)_q(b) \rangle_{\varphi(q) \leftarrow \text{ bedeutet } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ ist auf } \mathbb{R}^3}$$

Sei $p = \varphi(q)$, dann gilt $T_p\Sigma = \mathrm{Bild}(D\varphi)_p < \mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\{(D\varphi)_q(e_1), (D\varphi)_q(e_2)\}$

Notation. Schreibe $q = (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\varphi_u(q) = \varphi_u(u, v) = (D\varphi)_q(e_1) \in T_{\varphi(q)}\Sigma \\ \varphi_v(q) = \varphi_v(u, v) = (D\varphi)_q(e_2) \in T_{\varphi(q)}\Sigma\end{aligned}$$

"Spalten der Jakobimatrix $(J\varphi)_q$"

Die *Koeffizienten* der ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung $\varphi : U \to \Sigma$ sind

$$\begin{aligned}E(u, v) = \langle e_1, e_1 \rangle_{(u,v)} = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ F(u, v) = \langle e_1, e_2 \rangle_{(u,v)} = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ G(u, v) = \langle e_2, e_2 \rangle_{(u,v)} = \langle \varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

Für alle $a = a_1e_1 + a_2e_2, b = b_1e_1 + b_2e_2$ gilt nun

$$\langle a, b \rangle_{u,v} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Beispiele.

1. Sei $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Betrachte die lokale Parametrisierung $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to Z$, $\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$. Berechne

$$(J\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erste Spalte: $\varphi_u(u, v)$, zweite Spalte $\varphi_v(u, v)$ und damit

$$\left.\begin{array}{r} E(u,v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \\ F(u,v) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ G(u,v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"Der Zylinder Z ist lokal isometrisch (intrinsische Distanz) zur Ebene"

2. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, die Einheitskugel. Betrachte die lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) &\to S^2 \\ (u, v) &\mapsto (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)) \end{aligned}$$

Berechne

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} -\sin(u)\cos(v) & -\cos(u)\sin(v) \\ \cos(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v) \\ 0 & \cos(v) \end{pmatrix} = \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)$$

und

$$\left.\begin{array}{r} E(u,v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_{\mathbb{R}^3} = \cos^2(v) \\ F(u,v) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ G(u,v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} \cos^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternative lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : D^2 &\to S^2 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned}$$

$$(J\varphi)_{u,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$$

Wir bemerken $F(u, v) = \frac{uv}{1-u^2-v^2} \neq 0$ (ausser falls $uv = 0$)

Weglänge und Flächeninhalt

Erinnerung. Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ C^1. Die Weglänge von α ist

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{\underbrace{\langle \dot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle_{\mathbb{R}^3}}_{||\dot\alpha(t)||_2 \text{ euklidische Norm}}}\ dt$$

Sei nun $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $\varphi : U \to \Sigma$ eine lokale Parametrisierung und $\alpha : [0,1] \to \Sigma$ C^1 mit $\alpha([0,1]) \subset \varphi(U)$. Definiere

$$\begin{aligned} \beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : [0,1] &\to U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi^{-1}(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Schreibe $\beta(t) = u(t)e_1 + v(t)e_2$. Es gilt $\alpha(t) = \varphi(\beta(t)) = \varphi(u(t), v(t))$. Berechne $\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 ||\dot\alpha(t)||\ dt$. Berechne

$$\begin{aligned} \dot\alpha(t) &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t) \\ &= (D\varphi)_{\beta(t)}(\dot\beta(t)) \\ &= (D\varphi)_{(u(t),v(t))}(\dot u(t)e_1 + \dot v(t)e_2) \\ &= \dot u(t) \cdot \varphi_u(u(t), v(t)) + \dot v(t) \cdot \varphi_v(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \dot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle &= \begin{pmatrix} \dot u(t) & \dot v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix} \\ &= \big[\dot u(t)^2 \cdot E + 2\dot u(t)\dot v(t) F + \dot v(t)^2 \cdot G\big]_{=(*)} \end{aligned}$$

$\implies \mathcal{L}(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{(*)}\ dt$

Beispiel. Parametrisiere $\Sigma = S^2$ wie folgt:

$$\varphi(u, v) = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v))$$

Sei

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\to S^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta : [0, 2\pi] &\to (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ t &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt $\alpha(t) = \varphi(t,0) = (\cos(t)\cos(0), \sin(t)\cos(0), \sin(0))$. Daraus folgt $\beta(t) = (u(t), v(t))$ mit $u(t) = t$ und $v(t) = 0$ Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{u}^2 E + 2\dot{u}\dot{v}F \cdot \dot{v}^2 G}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{E(u(t), v(t))}\ dt \qquad \text{siehe oben } E(u,v) = \cos(v)^2 \\
&= \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi \qquad \text{hier } v(t) \equiv 0 \implies E \equiv 1
\end{aligned}$$

Flächeninhalt

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche $\varphi : U \to \Sigma$ eine lokale Fläche (C^1)-Parametrisierung, sowie $A \subset \varphi(U) \subset \Sigma$ ein abgeschlossenes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand ($\partial A = \cup_{i=1}^n \operatorname{Bild}(\gamma_i)$ mit $\gamma : [0,1] \to \Sigma\ C^1$)

erstes Flächeninhalt bild

Setze $B = \varphi^{-1}(A) \subset (U)$. Definiere

$$Area(A) = \int_B |Area(P(\varphi_u, \varphi_v))|\ dudv$$

wobei P das Parallelogram ist, welches von $\varphi_u, \varphi_v \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird.

zweites Flächeninhalt bild

Einschub (Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$)**.** Seien $v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i, w = \sum_{j=1}^{3} v_j e_j \in \mathbb{R}^3$ Definiere

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Lemma 3.

$$||u \times w||_2 = ||v||_2 \cdot ||w||_2 \cdot \sin(\measuredangle(v,w)) = |Area(P(v,w))|$$

(verwende $0 \leq \measuredangle(v,w) \leq \pi$)

Beweis. Berechne:

$$\begin{aligned}
&\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^3}^2 + ||v \times w||^2 \\
&= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)
\end{aligned}$$

Also $\langle v, w\rangle^2 + ||v \times w||^2 = ||v||^2||w||^2$. Schlussendlich folgt aus

$$\langle v, w\rangle^2 = \big(||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos\measuredangle(v, w)\big)^2$$

und

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

dass

$$||v \times w||^2 = \big(||v|| \cdot ||w|| \sin\measuredangle(v, w)\big)^2$$

$\square$

Einschub (Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$)**.** Seien $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, w = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \in \mathbb{R}^n$ Definiere

$$\langle v, w\rangle = v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \in \mathbb{R}$$

Bemerkung. Der Ausdruck $v^T w$ gilt bezüglich allen orthonormalen Koordinaten.

i) Spezialfall $v = w \implies \langle v, v\rangle = v^T v = ||v||^2$ (Pythagoras)

ii) v, w allgemein:
Sei $A \in O(\mathbb{R}^n)$, d.h. A beschreibt einen orthonormalen Basiswechsel. Es gilt also $A^T A = Id$. Deshalb

$$\langle Av, Aw\rangle = (Av)^T Aw = v^T A^T Aw = v^T w = \langle v, w\rangle$$

Lemma 4. $\langle v, w\rangle = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos\measuredangle(v, w)$