# Kapitel 1

# Ebene hyperbolische Geometrie

Knörrer: Geometrie Kapitel 3

**Ziel.** Konstruktion einer *vollständigen* Fläche $H$ mit konstanter Krümmung $-1$, analog zur Ebene ($K \equiv 0$) und Sphäre ($K \equiv 1$).
*Vollständig*: Jede geodätische Kurve $\gamma : (a, b) \to H$ lässt sich geodätisch auf $\mathbb{R}$ erweitern.

**Motivation.** *Gauss-Bonnet*

$$\int_\Sigma K \; dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

wobei $\Sigma$ eine kompakte, vollständige Fläche. Falls $\chi(\Sigma) < 0$ und die Krümmung $K$ konstant ist, dann muss $K$ negativ sein!

**Theorem 1** (Klassifikation der Flächen)**.** *Sei $\Sigma$ eine topologische (glatte), kompakte, vollständige, orientierbare, zusammenhängende Fläche. Dann ist $\Sigma$ zu einer der Flächen $\Sigma_g$ homöomorph (diffeomorph):*

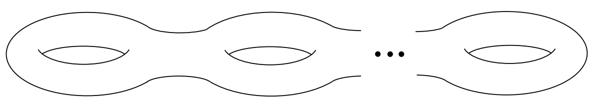

Abbildung 1.1: $\Sigma_g$ mit $g$ Henkel

*Es gilt:* $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$ *falls* $g \geq 2$.

## 1.1 Eine Riemannsche Metrik mit K=-1

Naiver Ansatz zur Konstruktion einer Riemannschen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ mit $K = -1$.

$$\langle\ ,\ \rangle_p = h(p)\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

wobei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ positiv und glatt ist. Für die Koeffizientenfunktionen $E, F, G$ gilt also:

- $E(x,y) = \langle e_1, e_1\rangle_{(x,y)} = h(x,y)$
- $F(x,y) = \langle e_1, e_2\rangle_{(x,y)} = 0$
- $G(x,y) = \langle e_2, e_2\rangle_{(x,y)} = h(x,y)$

**Terminologie.** Falls $E = G$ und $F = 0$ gilt, dann heissen die Koordinaten *konform* oder *isotherm.*

Eine kleine Rechnung zeigt

$$K = -\frac{1}{2h(x,y)}\Delta(\log(h(x,y)))$$

wobei $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ der Laplaceoperator (siehe Serie 10).
Nun führt $K = -1$ zu einer Differentialgleichung für $h$:

$$2h(x,y) = \Delta(\log(h(x,y)))$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung*, welche schwierig zu lösen ist. Mit dem Lösungsansatz $h(x,y) = y^n$ finden wir eine Lösung $h(x,y) = \frac{1}{y^2}$, welche allerdings nur auf der obenen Halbebene $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ definiert ist.

**Definition.** Die *hyperbolische Ebene* ist die Menge $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$\langle\ ,\ \rangle_{x+iy} = \frac{1}{y^2}\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

**Bemerkungen.**

1. Die Translation $z \mapsto z + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Isometrie von $H$. Tatsächlich, schreibe

$$\begin{aligned} T : H &\to H \\ (x,y) &\mapsto (x+a, y) \end{aligned}$$

   Für alle $p \in H$ gilt $(DT)_p = Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w\rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DT)_p(v), (DT)_p(w)\rangle_{T(p)} = \langle v, w\rangle_{T(p)}$$

   Stimmt, da $y(p) = y(T(p))$, und somit $\langle\ ,\ \rangle_p = \langle\ ,\ \rangle_{T(p)}$

2. Die Streckung $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda > 0$ ist eine Isometrie von $H$. Schreibe

$$\begin{aligned} S : H &\to H \\ (x, y) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Für alle $p \in H$ gilt $(DS)_p = \lambda Id_{\mathbb{R}^2}$. Zu prüfen für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle v, w\rangle_p \stackrel{?}{=} \langle (DS)_p(v), (DS)_p(w)\rangle_{S(p)} = \lambda^2 \langle v, w\rangle_{S(p)}$$

Stimmt, da $y(S(p)) = \lambda y(p)$, also $\langle\ ,\ \rangle_{S(p)} = \frac{1}{\lambda^2}\langle\ ,\ \rangle_p$

3. Die Inversion $z \mapsto -\frac{1}{z}$ ist eine Isometrie von $H$. Schreibe

$$\varphi(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} \in H$$

falls $z \in H$ d.h. $y > 0$. Also $\varphi : H \to H$. Es gilt für alle $z \in H$ und $v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$(D\varphi)_z(v) = \varphi'(z)v = -\frac{1}{z^2}v$$

Zu prüfen:

$$\langle v, w\rangle_z \stackrel{?}{=} \langle -\frac{1}{z^2}v, -\frac{1}{z^2}w\rangle_{-\frac{1}{z}} = \frac{1}{|z|^4}\langle v, w\rangle_{-\frac{1}{z}}$$

. Stimmt, da $y(-\frac{1}{z}) = \frac{1}{|z|^2}y(z) \implies \langle\ ,\ \rangle_{-\frac{1}{z}} = |z|^4\langle\ ,\ \rangle_z$

## 1.2 Möbiustransformationen

**Erinnerung** (aus der komplexen Analysis)**.** Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$, definieren wir die zugehörige *Möbiustransformation* (nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert).

$$\begin{aligned} (MT)\Phi : \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

**Beispiele.**

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \in \mathbb{C} \implies \Phi_A(z) = z + b$

2. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \implies \Phi_A(z) = a^2 z$. Für $a = \sqrt{\lambda} : \lambda z\ (\lambda > 0)$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Phi_A(z) = -\frac{1}{z}$ Insbesondere, für $a = \sqrt{\lambda}(\lambda > 0) : \lambda z$

**Bemerkung.** Die obigen Isometrien 1-3 sind vom Typ $\Phi_A$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^3)$. (Determinante 1)

## Projektive Interpretation von Möbiustransformation

Sei $A \in GL(\mathbb{C}^2)$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Insbesondere bildet $A$ Geraden durch 0 auf Geraden durch 0 ab (1).

**Definition.** Die *projektive Gerade* $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist die Menge aller komplexen Geraden durch 0 in $\mathbb{C}^2$. Konkret: Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich folgender Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \text{ mit } w = \lambda v$$

Dann ist $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \big(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\big)/\sim$. Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

- Falls $b \neq 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ $z \in \mathbb{C}$.
- Falls $b = 0$, dann gilt $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{a \neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$.

Daraus folgern wir, dass $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Aus (1) folgt: Die Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) &\to \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \\ [v] &\mapsto [Av] \end{aligned}$$

Interpretation via $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- $v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $cz + d = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$

Notation für $\Phi_A$ : $\Phi_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ "geeignet interpretiert". Aus dieser Definition folgt auch dass $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$. Diese Tatsache ist mit der anderen Definition mühsam zu beweisen.

**Lemma 1.** *Sei* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{R}^2)$ *Dann erhält die Möbiustransformation* $\varphi_A$ *die obere Halbebene* $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}$.

*Beweis.* Sei $z \in H$, d.h. $\operatorname{im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) > 0$. Berechne

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\varphi_A(z)) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+b} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)+(a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\
&\overset{detA=1}{=} \frac{\operatorname{im}(z)}{(cz+d)^2} > 0
\end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung.** Es gilt sogar $\varphi_A(H) = H$ Tatsächlich gilt

$$H = \varphi_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}(H) = \varphi_{A \circ A^{-1}}(H)$$

$$\overset{\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B}{=} \varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}}(H) = \varphi_A(\varphi_{A^{-1}}(H)) \subset \varphi_A(H)$$

$\implies \varphi_A(H) = H$. Daraus folgt, dass Möbiustransformationen eine Gruppe bilden.

**Lemma 2.** *Jede Möbiustransformation $\varphi_A : H \to H$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ ist eine endliche Komposition von Möbiustransformationen der Form*

1. $z \mapsto z + b \qquad (b \in \mathbb{R})$ *horizontale Translation*
2. $z \mapsto \lambda z \qquad (\lambda > 0)$ *Streckung*
3. $z \mapsto -\frac{1}{z}$ *Inversion*

*Beweis.*

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{cz+\frac{c}{a}b}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{cz+d+(\frac{c}{a}b-d)}{cz+d} = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$$

für geeignete $\alpha$ und $\beta$. Details siehe Serie 11. $\square$

**Korollar 1.** *Alle Möbiustransformationen der Form $\varphi_A : H \to H$ mit $A \in SL(\mathbb{R}^2)$ sind Isometrien bezüglich der Riemannschen Metrik $\frac{1}{y^2}\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^2}$.*

*Beweis.* Möbiustransformationen des Typs 1-3 sind Isometrien, siehe oben $\square$

**Lemma 3.** *Die Kurve* $\gamma : \mathbb{R} \to H$

$$t \mapsto ie^t$$

*Beweis.* Wir bemerken zuerst, dass

$$\begin{aligned} ||\dot\gamma(t)||_H &= \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_H} \\ &\overset{y(\gamma(t))=e^t}{=} \sqrt{\frac{1}{(e^t)^2} \underbrace{\langle ie^t, ie^t\rangle_{\mathbb{R}^2}}_{\langle e^t, e^t\rangle = (e^t)^2}} = 1 \end{aligned}$$

$\implies \gamma : \mathbb{R} \to H$ ist nach Bogenlänge parametrisiert (bzgl. hyperbolischer Metrik). Sei nun $\delta : \mathbb{R} \to H$ die eindeutige geodätische Kurve mit $\delta(0) = i$ und $\dot\delta(0) = i$. Betrache die folgende Isometrie von $H$ (Spiegelung an $i\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \sigma : H &\to H \\ x + iy &\mapsto -x + iy \end{aligned}$$

Nun ist $\sigma \circ \delta : \mathbb{R} \to H$ auch geodätisch mit $\sigma \circ \delta(0) = i$ und auch $\frac{d}{dt}(\sigma \circ \delta)(0) = i$. Aus der Eindeutigkeit der Geodäten zu Anfangsbedingungen folgt also $\delta = \sigma \circ \delta$, also $\delta(\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. Da $\gamma$ und $\delta$ nach Bogenlänge parametrisiert ($\delta$ ist geodätisch mit $||\dot\delta(0)||_H = 1!$) sind, folgt $\gamma = \delta$. □

**Proposition 1.** *Die Geodäten in $H$ sind genau die Halbgeraden und Halbkreise, welche senkrecht auf "$\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial H$". stehen.*

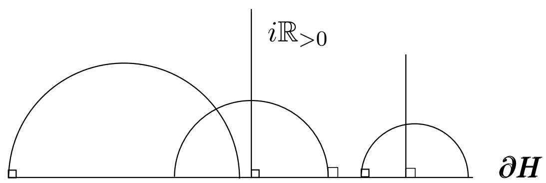


Abbildung 1.2: test

*Beweis.* Wir haben schon eine Geodäte gefunden: $i\mathbb{R}_{>0}$, das Bild der Kurve $\gamma(t) = ie^t$. Schreibe $h = \text{Bild}(\gamma) \subset H$. Nun ist für jede Isometrie $\varphi : H \to H, \varphi(H) \subset H$ auch eine Geodäte. Insbesondere können wir auf $h$ iteriert Abbildung der Form

1. $z \mapsto z + b \qquad b \in \mathbb{R}$
2. $z \mapsto \lambda z \qquad \lambda > 0$
3. $z \mapsto -\frac{1}{z}$

Daraus folgt, dass alle Halbgeraden auf $\mathbb{R}$ Geodäten sind. Betrachte die spezielle Isometrie $\varphi(z) = -\frac{2}{z+1}$

**Behauptung.** *$\varphi(h)$ ist ein Halbkreis in $H$ mit Zentrum $-1$ und Radius $1$*

*Beweis.* Sei $iy \in h$. Berechne

$$\begin{aligned}|\varphi(iy)+1| &= \left|-\frac{2}{iy+1}+\frac{iy+1}{iy+1}\right| \\ &= \left|\frac{iy-1}{iy+1}\right| = 1\end{aligned}$$

□

Unter Anwendung von horizontalen Transformationen und Streckungen erhalten wir aus $\varphi(h)$ alle Halbkreise Senkrecht auf $\mathbb{R}$.

**Frage.** Wieso existieren keine weiteren Geodäten?

Zu jeden $z \in H$ und jedem Einheitsvektor $v$ existiert genau eine geodätische Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to H$ mit $\gamma(0) = z$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Das Bild von $\gamma$ muss also der Halbkreis oder die Halbgerade durch $z$ mit Tangente $v$ sein! □

**Bemerkung.** Für alle $z, w \neq z \in H$ existiert eine Geodäte $g < H$ mit $z, w \in g$ Hingegen existiert zu $g \subset H$ und $z \notin g$ unendlich viele Geodäten $h \in H$ mit $z \in h$ und $h \cap g = \emptyset$. Wir bemerken, dass das *Parallelaxiom* in der hyperbolischen Ebene *nicht erfüllt* ist.

## 1.3 Die Isometriegruppe von H

**Lemma 4.** *Sei $\varphi : H \to H$ eine orientierungserhaltende Isometrie, d.h. für alle $z \in H$ gilt* $\det((D\varphi)_z > 0)$. *Dann ist $\varphi$ durch $\varphi(i)$ und $(D\varphi)(i)$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Geometrisch, unter Benutzung der Tatsache, dass Isometrien winkelerhaltend sind. Wir bemerken zuerst, dass die Einschränkung von $\varphi$ auf $i\mathbb{R}_{>0}$ durch $\varphi(i)$ und $(D\varphi)_i(i)$ bestimmt ist: $\delta(1) = \varphi(ie^1)$ ist die eindeutige Geodäte mit $\delta(0) = \varphi(i)$ und $\dot{\delta}(0) = (D\varphi)_i(i)$! Insbesondere kennen wir auch $\varphi(2i) \in H$. Aus $\varphi(i)$ und $\varphi(2i)$ können wir für *alle* $z \in H\varphi(z)$ bestimmen: □

**Definition.** $\mathrm{Iso}^+(H) = \{\varphi : H \to H \mid \varphi \text{ ist eine orientierungserhaltende Isometrie}\}$

Wir wissen bereits: