Matematika 2
Vektorski prostori

Petar Katić

1 Vektorski prostor (VP)

Vektorski prostor se definiše kao algebarska struktura oblika $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$, takva da je:

V	Abelova grupa nad operacijom sabiranja $+$
$\mathbb{F}$	(Realno ($\mathbb{R}$) ili kompleksno ($\mathbb{C}$)) polje nad operacijama sabiranja $+$ i množenja $\cdot$
$+$	Operacija sabiranja dva vektora iz grupe V
$\cdot$	Operacija množenja skalara iz polja $\mathbb{F}$ i vektora iz grupe V

Naše polje $\mathbb{F}$ će uglavnom biti realno, dakle koeficijenti sa kojima budemo množili vektore će biti realni brojevi. Takav prostor zovemo realan prostor. Prostor nad kompleksnim poljem zovemo kompleksan ili **unitaran** prostor.

Da bi utvrdili da je struktura zaista vektroski prostor, potrebno je provjeriti da važi sljedećih 10 tvrdnji. Prvih 5 su vezane za Abelovu grupu V, a ostalih 5 važe isključivo za vektorske prostore.

$\forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad \land \quad \vec{e} \in V$:

1	Zatvorenost	$\vec{x} + \vec{y} \in V$
2	Asocijativnost	$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$
3	Komutativnost	$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
4	Neutralni element	$\vec{x} + \vec{e} = \vec{x}$
5	Inverzni element	$\vec{x} + \vec{x}^{-1} = \vec{e}$

$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \land \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

6	$\alpha \cdot \vec{x} \in V$
7	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x})$
8	$\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$
9	$(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
10	$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Svaki VP je određen svojom **dimenzijom**, tj. brojem linearno nezavisnih vektora koji sačinjavaju njegov lineal. Ti vektori sačinjavaju **bazu vektorskog prostora**. Baza VP može biti **standardna** (takva da se vektori u prostoru dobijaju množenjem koordinata vektora sa odgovarajućim baznim vektorom) ili **nestandardna**. Dimnezija VP se može matematički zapisati kao $\dim(X)$, gdje je X vektorski prostor. Dimnezija VP je, naravno, uvijek cijelobrojna vrijednost.

Za prostor $\mathbb{R}^3$, na primjer, kažemo da je $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, a standardna baza je:

$B_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Vektori se češće zapisuju kao matrice dimenzije $n \times 1$ ("uspravno").
Prema tome, bazu prostora $\mathbb{R}^3$ zapisujemo kao:

$$B_3 = \{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \} = \{ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T , \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T , \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \}$$

1.1 Nula vektor

U vektorskim prostorima, neutralni element $\vec{e}$ je zapravo nula vektor, koji se bilježi kao $\vec{0_v}$ ili $\vec{0}$. Koordinate nula vektora su, naravno, sve nule. Uvijek važi da $\dim(\text{Lin}\{\vec{O_v}\}) = 0$.

1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Bitno je naopomenuti šta je linearna kombinacija.
To je operacija nad vektorima koja množi svaki vektor sa nekom konstantom i sabira te vektore.

Dakle, vektor $\vec{a}$ je linearna kombinacija vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, onda kada je:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \quad , \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \;\; \wedge \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

Vektori su linearno zavisni ako se mogu predstaviti kao linearna kombinacija nenultih konstanti. Suprotno, vektori su linearno nezavisni ako se ne mogu predstaviti kao linearna kombinacija nenultih konstanti. **Vektori u bazi VP moraju biti linearno nezavisni**.

Linearnu zavisnost provjeravamo na sljedeći način:

> Ako raspolažemo vektorima $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n} \in V$ i konstantama $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{F}$, kažemo da su dati vektori linearno nezavisni ako i samo ako važi sljedeća tvrdnja:
>
> $$C_1\vec{x_1} + C_2\vec{x_2} + ... + C_n\vec{x_n} = \vec{O_v} \;\; \wedge \;\; C_1 = C_2 = ... = C_3 = 0$$

1.3 Lineal vektorskog prostora

Lineal predstavlja linearnu kombinaciju argumenata lineala.

Matematičkom notacijom: $\text{Lin}(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}) = \{ \; C_1\vec{x_1} + C_2\vec{x_1} + ... + C_n\vec{x_n} \;\mid\; C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{F} \; \}$

Vektorski prostori se mogu predstaviti preko lineala nad bazama vekorskih prostora.
Vektori u linealu vektorskog prostora ne moraju biti linearno nezavisni.

1.4 Zbir vektorskih prostora (+)

Vektorski prostori se sabiraju tako što vektori iz lineala jednog VP i vektori iz lineala drugog VP zajedno stavljaju kao argumenti novog lineala. Matematičkom notacijom:

$$X = \text{Lin}\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\} \; , \; \dim(X) = 2$$
$$Y = \text{Lin}\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\} \; , \; \dim(Y) = 3$$

$$X + Y = \text{Lin}\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$$

Dimneziju zbira ne znamo, jer je moguće da postoje linearno zavisni vektori. Potrebno je, dakle, koristiti neku metodu redukcije vektorskog prostora, npr. redukovanu stepenastu formu.

Dimenzija zbira vektorskih prostora se može računati na sljedeći način:
$\dim(X+Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$
Pri čemu je $X \cap Y$ presjek vektorskih prostora X i Y.

1.4.1 Direktni zbir ($\oplus$)

Direktni zbir koristimo kada je presjek vektorskih prostora koje sabiramo jednak nula vektoru, tj. kada $X \cap Y = \{\vec{O_v}\}$. Dakle, direktan zbir služi da naznačimo da su naši prostori "ose" prostora, a sabiranjem dobijamo kompletan prostor.

Ako imamo $X = \text{Lin}\{\vec{x}\}$ i $Y = \text{Lin}\{\vec{y}\}$, takvi da su $\vec{x}$ i $\vec{y}$ linearno nezavisni: $X \oplus Y = \mathbb{R}^2$.

1.5 Presjek vektorskih prostora ($\cap$)

Koristićemo vektroske prostore X i Y iz **1.4 Zbir vektorskih prostora**.

Presjek računamo na sljedeći način:

1) Koristimo formulu $\dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X+Y)$ da pronađemo dimenziju presjeka. Za tu dimenziju presjeka definišemo proizvoljne vektore i generišemo lineal vektorskog prostora presjeka. Na primjer, ako je $\dim(X \cap Y) = 2$, onda je vektorski prostor presjeka $X \cap Y = \text{Lin}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.
2) Znamo da za svaki vektor iz vektorskog prostora presjeka važi $\vec{v} \in X \wedge \vec{v} \in Y$. Na osnovu toga, definišemo linearnu kombinaciju $\vec{v} = C_1\vec{x_1} + C_2\vec{x_2} + C_3\vec{y_1} + C_4\vec{y_2} + C_5\vec{y_3}$.
3) Sve vektore predstavljamo preko koordinata i rješavamo sistem jednačina, tako da tražimo nepoznate konstante $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$.
4) Na kraju određujemo vrijednost lineala presjeka.

2 Vektorski potprostor (VPP)

Neki prostor $(U, \mathbb{F}, +, \cdot)$ je potprostor prostora $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ kada vrijedi:

1) ... da je U podskup V
2) ... da za proizvoljne vektore $\vec{u}, \vec{w} \in U$ vrijedi da $\vec{u} + \vec{w} \in U$
3) ... da za proizvoljan vektor $\vec{u} \in U$ i skalar $a \in \mathbb{F}$ vrijedi da $a \cdot \vec{u} \in U$

3 Euklidov vektorski prostor (EVP)

Euklidov (ili euklidski) vektorski prostor podrazumjeva prostor u kom važi jedan dodatni operator nad vektorima, a to je skalarni proizvod.

3.1 Skalarni proizvod (SP)

SP je operacija nad dva vektora sa jednakim brojem koordinata koja kao rezultat vraća skalar. SP se računa tako što se odgovarajuće koordinate vektora međusobno pomnože i da se svi ti umnošci saberu. SP je bilinearna funkcija definisana kao $(\cdot, \cdot) : V^2 \mapsto \mathbb{F}$ nad prostorom $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$.

Dakle, za vektore $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ važi:
$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$,
tako da je $(\vec{x}, \vec{y})$ skalarni proizvod vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Za operaciju skalarnog proizvoda, za proizvoljne vektore $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ i skalar a važe sljedeće tvrdnje:

1) $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z})$
2) $(a\vec{x},\vec{y}) = a(\vec{x},\vec{y})$
3) $(\vec{x},\vec{y}) = \underline{(\vec{y},\vec{x})} \Leftrightarrow \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
4) $(\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\vec{x})} \Leftrightarrow \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n$
5) $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$
6) $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{O_v}$

3.1.1 SP u kompleksnom prostoru

U prostoru $\mathbb{C}^n$ (u ovom primjeru $\mathbb{C}^3$) za vektore $\vec{x}$ i $\vec{y}$ bi važilo:
$(\vec{x},\vec{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$,
tako da su $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$ i $\overline{y_3}$ konjugovane vrijednosti y_1, y_2 i y_3.

3.2 Prva norma vektora

Prva norma vektora je suma apsolutnih vrijednosti njegovih koordinata.

Dakle, za vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ važi:
$|\vec{x}| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$
tako da je $|\vec{x}|$ prva norma vektora $\vec{x}$.

3.3 Druga norma vektora

Druga norma vektora je korijen sume kvadratnih vrijednosti njegovih koordinata. Može se tumačiti i kao geometrijska sredina vrijednosti koordinata vektora. Predstavlja intenzitet ("dužinu") samog vektora. Često se naziva samo "norma".

Dakle, za vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ važi:
$||\vec{x}|| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$
tako da je $||\vec{x}||$ druga norma vektora $\vec{x}$.

Osobine druge norme $||\cdot|| : V^2 \mapsto \mathbb{R}$ ($\forall \vec{x},\vec{y} \in V$, $\forall a \in \mathbb{R}$):

1) $||\vec{x}|| \geq 0$
2) $||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{O_v}$
3) $||a\vec{x}|| = a||\vec{x}||$
4) $||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ (Nejednakost trougla)

3.3.1 Druga norma vektora u kompleksnom prostoru

U prostoru $\mathbb{C}^n$ (u ovom primjeru $\mathbb{C}^3$) za vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bi važilo:
$||\vec{x}|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$,
tako da su $|x_1|$, $|x_2|$ i $|x_3|$ moduli vrijednosti x_1, x_2 i x_3.

3.4 Koši-Švarcova nejednakost

Koši-Švracova (ili Koši-Bunjakovski-Švarcova) nejednakost glasi: $|(\vec{x},\vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$.

3.5 Ortogonalnost

Dva vektora su ortoganalna kada je njihov skalarni proizvod jednak nuli.

3.6 Ortogonalni komplement

Ortogonalni komplement $V^{\perp}$ nekog VP ili skupa V je vektorski potprostor takav da je svaki njegov vektor ortogonalan sa svakim vektorom u V. Matematičkom notacijom:

$$V^{\perp} = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in V \ (\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$$

Ako je U EVP, V VPP od U i $V^{\perp}$ ortogonalni komplement V, onda važe sljedeće tvrdnje:

1) $U = V + V^{\perp}$
2) $V \cap V^{\perp} = \{\vec{O_v}\}$
3) $(V^{\perp})^{\perp} = V$
4) $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = \dim(U)$

3.7 Gram-Šmitova metoda ortogonalizacije

Za svaki linearno nezavisan skup vektora $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}\}$ moguće je pronaći ortogonalan skup vektora $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, ..., \vec{y_n}\}$.

Vektori se nalaze na sljedeći način:

$\vec{y_1} = \vec{x_1}$
$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1$
$\vec{y_3} = \vec{x_3} - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1$
...

U slučaju da tražimo ortonormirane vektore, bazu $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, ..., \vec{y_n}\}$ je potrebno normirati.

3.8 Normiranje vektora

Vektor se normira tako što se podijeli sa svojom drugom normom.
Ovaj postupak formira vektor čija je druga norma ("dužina") tačno 1.

Dakle, za proizvoljan vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ važi: $\vec{x_n} = \frac{1}{||\vec{x}||} \vec{x}$, tako da je $\vec{x_n}$ normiran vektor $\vec{x}$.

3.9 Ugao između dva nenultna vektora

$\cos\alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$, $\alpha \leq 180°$