Matematika 2 - Diferencijalne jednačine prvog reda

Petar Katić

1 Uvod

$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y'}} = \frac{dx}{dy} = \mathbf{x'} = \mathbf{x'(y)}$

Standardni oblik DJ: $F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$

Tipovi rješenja DJ:

1) **OPŠTE**, npr. $y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$
2) **PARTIKULARNO**, za posebne $C_1, C_2, ..., C_m$, npr. $y = x^2 + \frac{3}{2}x$
   2.1) **KOŠIJEVO**, uvrštavamo početne uslove koje dobijamo u zadatku
3) **SINGULARNO**, ne dobija se iz opšteg

Integralna kriva je rješenje prestavljeno u obliku $y = y(x)$.

2 Oblici DJ prvog reda

1) **Implicitni**, $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, $F : D \subseteq \mathbb{R}^3$
2) **Eksplicitni**, $y' = f(x, y)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

3 Rješavanje DJ

3.1 DJ sa razdvojenim promjenljivim

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{g(y)}} = \mathbf{f(x)dx} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{g(y)}} = \int \mathbf{f(x)dx}$

$f : D_f \mapsto \mathbb{R}$
$g : D_g \mapsto \mathbb{R}$

3.2 Homogena DJ

Preko y : $\quad y' = f(\frac{y}{x})$
Preko x : $\quad x' = f(\frac{x}{y})$

Rješava se smjenom $u(x) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x \cdot u(x)$

3.2.1 Upoštena homogena DJ

$y' = f(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2})$

1° Ako $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$x = u + h \ , \ y = v + k$
$v = v(x) \quad \leftarrow \quad$ POMOĆNA FUNKCIJA

$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$
$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$

2° Ako $\left| \begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{smallmatrix} \right| = 0 \ , \ a_1 \neq 0$

$u = a_1 x + b_1 y$

3.3 Linearna DJ

$y' + p(x)y = q(x)$

$p(x), q(x) : D_1 \mapsto \mathbb{R}$, neprekidne funckije na $D_1 \subseteq \mathbb{R}$

Rješenje je sljedeća formula: $y = e^{-\int p(x)dx}[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx] \ , \ C \in \mathbb{R}$

3.4 Bernulijeva DJ

$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$

$p(x), q(x) : D_1 \mapsto \mathbb{R}$, neprekidne funckije na $D_1 \subseteq \mathbb{R}$
$\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$

Rješava se smjenom $z = y^{1-\alpha}(x)$
Dobija se linearna jednačina $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$