

# Matematika 2

## Diferencijalne jednačine višeg reda (DJVR)

Petar Katić

### 1 DJVR sa konstantnim koeficijentima

Oblik (drugog reda):  $a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = r(x)$

Rješavanje:

#### 1) Pronalazak rješenja karakterističnog polinoma $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Polinom  $n$ -tog reda ima  $n$  rješenja, a to su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

#### 2) Pronalazak homogenog rješenja $y_H$

Ako su nule polinoma iz 1) realne:

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$$

Ako su **neke** nule polinoma iz 1) višestruke (npr.  $\lambda_1 = \lambda_2$ ):

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + \dots$$

Ako su **neke** nule polinoma iz 1) kompleksne (npr.  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  su par rješenja):

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$$

$$y_H = C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\sin \beta x) + \dots$$

#### 3) Provjeravanje $r(x)$

Ako je  $r(x) = 0$ , tj. jednačina je homogena, onda je zadatak gotov i  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_H$

Ako je  $r(x) \neq 0$ , tj. jednačina je nehomogena, onda radimo dalje i  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P$

#### 4) Rješavanje nehomogene jednačine

Tražimo još  $y_P$ , partikularno rješenje.

Provjeravamo da li  $r(x)$  odgovara obliku  $e^{\alpha x} (P_{n1}(x) \cos \beta x + P_{n2}(x) \sin \beta x)$ .

**Ako odgovara**, pronalazimo  $P_{n1/2}$ ,  $\alpha$  i  $\beta$ .

Računamo  $k$ , koje je jednako višestrukosti rješenja  $\alpha + i\beta$  polinoma iz 1).

Računamo  $s = \max\{n_1, n_2\}$ .

Konačno,  $y_P = x^k e^{\alpha x} (Q_s(x) \cos \beta x + R_s(x) \sin \beta x)$ .

$Q_s$  i  $R_s$  su polinomi nepoznatih koeficijenata, npr.  $A$ ,  $Ax + B$ ,  $Ax^2 + Bx + C$ , ....

Računamo izvode  $y_P$  i vraćamo ih u početnu jednačinu, te dobijamo koeficijente.

Vraćamo koeficijente u  $y_P$  i zapisujemo konačno rješenje  $y = y_H + y_P$ .

**Ako ne odgovara**, rješavamo pomoću Lagranžovog metoda.

Ako je  $y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , rješavamo sistem:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x)$$

Ako je  $y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$ , rješavamo sistem:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_3'(x)y_3'(x) = 0$$

$$C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + C_3'(x)y_3''(x) = r(x)$$

I tako dalje.

Dobijemo nepoznate  $(C_1(x), C_2(x), \dots)$  i uvrstimo ih u  $y_P = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \dots$

## 2 DJVR sa promjenljivim koeficijentima drugog reda

Oblik:  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

Rješavanje:

Poželjno je da imamo  $y_1(x)$ . Ako nemamo, nagađamo ga.

Nađemo  $y_2(x)$  preko formule  $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$

Konačno,  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$