

# Matematika 2

## Sistemi diferencijalnih jednačina (DJ)

Petar Katić

Sistem DJ može ići do proizvoljnog reda. Mi radimo maksimalno do drugog reda.

### 1 Homogeni sistem jednačina

Oblik:

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2\end{aligned}$$

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} ; Y = Y_H = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ; Y' = A \cdot Y$$

Rješavamo jednačinu  $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$  i nalazimo  $\lambda_{1/2}$ .

#### 1.1 $\lambda_{1/2} \in \mathbb{R} ; \lambda_1 \neq \lambda_2$

Rješavamo dva slučaja:

$$\{\lambda = \lambda_1 ; v = v_1\} \text{ i } \{\lambda = \lambda_2 ; v = v_2\}.$$

U oba slučaja, riješimo  $\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  i nađemo odnos između  $x$  i  $y$ .

Uvrstimo odnos u  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  i izvučemo promjenljivu.

Ostaje nam vektor  $v = \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}$ , gdje su  $j$  i  $k$  brojevi.

Konačno rješenje je:  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ .

#### 1.2 $\lambda_{1/2} \in \mathbb{R} ; \lambda_1 = \lambda_2$

Kada izračunamo  $\lambda_{1/2}$  i uočimo da je rješenje višestruko, računamo  $v_1$  kao inače.

Zatim računamo  $v_2^*$  preko formule  $(A - \lambda I) \cdot v_2^* = v_1$ .

Ta formula matrično ima oblik:  $\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v_1$ .

Nakon što nađemo odnos između  $x$  i  $y$ , sređujemo vektor  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .

Ako izvučemo, na primjer,  $y$ , dobićemo vektor oblika  $y \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ ,  $j, k, m, n \in \mathbb{R}$ .

Zaključujemo da je  $v_2^* = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ .

Konačno rješenje je:  $Y = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 (v_2^* + t v_1) e^{\lambda_1 t}$ .

### 1.3 $\lambda_{1/2} \in \mathbb{C}$

$\lambda_{1/2}$  su konjugovani parovi, a  $v_{1/2}$  računamo kao inače.

Biramo ili  $\lambda_1$  i  $v_1$  ili  $\lambda_2$  i  $v_2$  i uvrštavamo ih u formulu  $Y = C_1 v e^{\lambda t}$ .

Dobijamo oblik  $Y = C_1 \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} e^{mt} e^{nti}$ ,  $j, k, m, n \in \mathbb{R}$ .

Primjećujemo da je  $e^{nti} = \cos nt + i \sin nt$ .

Tu vrijednost množimo sa vektorom  $\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}$ .

Dobijamo  $Y = C_1 e^{mt} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} + C_1 e^{mt} i \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ .

Ako uvažimo  $C_2 = iC_1$ ,  $C_2 \in \mathbb{C}$ , dobijamo konačni oblik:  $Y = C_1 e^{mt} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} + C_2 e^{mt} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ .

## 2 Nemohomogeni sistem jednačina

Oblik:

$$y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1$$

$$y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$$

$$Y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; \quad Y' = A \cdot Y + B$$

Rješavanje:

Računamo  $Y_H$  kao inače.

Onda, zapisujemo  $y_1$  i  $y_2$  iz  $Y$ , tako da su u obliku:

$$y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12}$$

$$y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22}$$

Rješavamo sistem sa dvije nepoznate ( $C'_1(t)$ ,  $C'_2(t)$ ):

$$C'_1(t)y_{11} + C'_2(t)y_{12} = b_1$$

$$C'_1(t)y_{21} + C'_2(t)y_{22} = b_2$$

Integrališemo i dobijemo  $C_1(t)$  i  $C_2(t)$ .

Dobijamo  $Y_P = \begin{bmatrix} C_1(t)y_{11} + C_2(t)y_{12} \\ C_1(t)y_{21} + C_2(t)y_{22} \end{bmatrix}$ .

Konačno,  $Y = Y_H + Y_P$ .