Matematika 2
Sistemi diferencijalnih jednačina (DJ)

Petar Katić

Sistem DJ može ići do proizvoljnog reda. Mi radimo maksnimalno do drugog reda.

1 Homogeni sistem jednačina

Oblik:

$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$
$y_2' = a_{21}y_2 + a_{22}y_2$

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} \ ; \ Y = Y_H = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ ; \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ ; \ \mathbf{Y' = A \cdot Y}$$

Rješavamo jednačinu $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ i nalazimo $\lambda_{1/2}$.

1.1 $\lambda_{1/2} \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Rješavamo dva slučaja:
$\{\lambda = \lambda_1 \ ; \ v = v_1\}$ i
$\{\lambda = \lambda_2 \ ; \ v = v_2\}$.

U oba slučaja, rješimo $\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i nađemo odnos između x i y.

Uvrstimo odnos u $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i izvučemo promjenljivu.

Ostaje nam vektor $v = \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}$, gdje su j i k brojevi.

Konačno rješenje je: $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$.

1.2 $\lambda_{1/2} \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 = \lambda_2$

Kada izračunamo $\lambda_{1/2}$ i uočimo da je rješenje višestruko, računamo v_1 kao inače.
Zatim računamo v_2^* preko formule $(A - \lambda I) \cdot v_2^* = v_1$.
Ta formula matrično ima oblik: $\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v_1$.

Nakon što nađemo odnos između x i y, sređujemo vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Ako izvučemo, na primjer, y, dobićemo vektor oblika $y \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$, $j, k, m, n \in \mathbb{R}$.

Zaključujemo da je $v_2^* = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$.

Konačno rješenje je: $Y = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 (v_2^* + t v_1) e^{\lambda_1 t}$.

1.3 $\lambda_{1/2} \in \mathbb{C}$

$\lambda_{1/2}$ su konjugovani parovi, a $v_{1/2}$ računamo kao inače.
Biramo ili λ_1 i v_1 ili λ_2 i v_2 i uvrštavamo ih u formulu $Y = C_1 v e^{\lambda t}$.
Dobijamo oblik $Y = C_1 \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} e^{mt} e^{nti}$, $j, k, m, n \in \mathbb{R}$.
Primjećujemo da je $e^{nti} = \cos nt + i \sin nt$.
Tu vrijednost množimo sa vektorom $\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}$.
Dobijamo $Y = C_1 e^{mt} \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} + C_1 e^{mt} i \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$.
Ako uvažimo $C_2 = iC_1$, $C_2 \in \mathbb{C}$, dobijamo konačni oblik: $Y = C_1 e^{mt} \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} + C_2 e^{mt} \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$.

2 Nemohomgeni sistem jednačina

Oblik:

$y_1' = a_{11}x + a_{12}y + b_1$
$y_2' = a_{21}x + a_{22}y + b_2$

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} \;;\; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \;;\; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{B}$$

Rješavanje:

Računamo Y_H kao inače.
Onda, zapisujemo x i y iz Y, tako da su u obliku:
$x = C_1 y_{11} + C_2 y_{12}$
$y = C_1 y_{21} + C_2 y_{22}$
Rješavamo sistem sa dvije nepoznate $(C_1'(t), C_2'(t))$:
$C_1'(t) y_{11} + C_2'(t) y_{12} = b_1$
$C_1'(t) y_{21} + C_2'(t) y_{22} = b_2$
Integrališemo i dobijemo $C_1(t)$ i $C_2(t)$.
Dobijamo $Y_P = \begin{bmatrix} C_1(t) y_{11} + C_2(t) y_{12} \\ C_1(t) y_{21} + C_2(t) y_{22} \end{bmatrix}$.

Konačno, $Y = Y_H + Y_P$.