Matematika 2
Diferencijalne jednačine višeg reda

Petar Katić

1 DJVR sa konstantnim koeficijentima

Oblik (drugog reda): $a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = r(x)$

Rješavanje:

1) Pronalazak rješenja karakterističnog polinoma $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Polinom n-tog reda ima n rješenja, a to su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

2) Pronalazak homoegenog rješenja y_H

Ako su nule polinoma iz 1) realne:
$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$
Ako su **neke** nule polinoma iz 1) višestruke (npr. $\lambda_1 = \lambda_2$):
$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{x} e^{\lambda_2 x} + ...$
Ako su **neke** nule polinoma iz 1) kompleksne (npr. λ_1 i λ_2 su par rješenja):
$\lambda_{1/2} = \alpha + i\beta$
$y_H = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x) + ...$

3) Provjeravanje r(x)

Ako je $r(x) = 0$, tj. jednačina je homogena, onda je zadatak gotov i $\mathbf{y} = \mathbf{y_H}$
Ako je $r(x) \neq 0$, tj. jednačina je nehomogena, onda radimo dalje i $\mathbf{y} = \mathbf{y_H} + \mathbf{y_P}$

4) Rješavanje nehomogene jednačine

Tražimo još y_P, partikularno rješenje.

Provjeravamo da li $r(x)$ odgovara obliku $e^{\alpha x}(P_{n1}(x)\cos\beta x + P_{n2}(x)\sin\beta x)$.

Ako odgovara, pronalazimo $P_{n_{1/2}}$, α i β.
Računamo k, koje je jednako višestrukosti rješenja $\alpha + i\beta$ polinoma iz 1).
Računamo $s = max\{n_1, n_2\}$.
Konačno, $y_P = r^k e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x)$.
Q_s i R_s su polinomi nepoznatih koeficijenata, npr A , $Ax + B$, $Ax^2 + Bx + C, ...$
Računamo izvode y_P i vraćamo ih u početnu jednačinu, te dobijamo koeficijente.
Vraćamo koeficijente u y_P i zapisujemo konačno rješenje $y = y_H + y_P$.

Ako ne odgovara, rješavamo pomoću Lagranžovog metoda.
Ako je $y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, rješavamo sistem:
$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$
$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x)$
Ako je $y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x)$, rješavamo sistem:
$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0$
$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_3'(x)y_3'(x) = 0$
$C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + C_3'(x)y_3''(x) = r(x)$
I tako dalje.
Dobijemo nepoznate $(C_1(x), C_2(x), ...)$ i uvrstimo ih u $y_P = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), ...$

2 DJVR sa promjenljivim koeficijentima drugog reda

Oblik: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

Poželjno je da imamo $y_1(x)$. Ako nemamo, nagađamo ga.
Nađemo $y_2(x)$ preko formule $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{{y_1}^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$

Konačno, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$