Matematika 2

Diferencijalne jednačine (DJ) prvog reda

Petar Katić

# 1 Uvod

$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y'}} = \frac{dx}{dy} = \mathbf{x'} = \mathbf{x'}(\mathbf{y})$

Standardni oblik DJ: $F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$

Tipovi rješenja DJ:

1) **OPŠTE**, npr. $y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$
2) **PARTIKULARNO**, za posebne $C_1, C_2, ..., C_m$, npr. $y = x^2 + \frac{3}{2}x$
   2.1) **KOŠIJEVO**, uvrštavamo početne uslove koje dobijamo u zadatku
3) **SINGULARNO**, ne dobija se iz opšteg

Integralna kriva je rješenje prestavljeno u obliku $y = y(x)$.

# 2 Oblici DJ prvog reda

1) **Implicitni**, $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ , $F : D \subseteq \mathbb{R}^3$
2) **Eksplicitni**, $y' = f(x, y)$ , $D \subseteq \mathbb{R}^2$

# 3 Rješavanje DJ

## 3.1 DJ sa razdvojenim promjenljivim

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{g(y)}} = \mathbf{f(x)dx} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{g(y)}} = \int \mathbf{f(x)dx}$

$f : D_f \mapsto \mathbb{R}$
$g : D_g \mapsto \mathbb{R}$

## 3.2 Homogena DJ

Preko $y$ : $\quad y' = f(\frac{y}{x})$
Preko $x$ : $\quad x' = f(\frac{x}{y})$

Rješava se smjenom $u(x) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x \cdot u(x)$

### 3.2.1 Upoštena homogena DJ

$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

$1°$ Ako $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$x = u + h \ , \ y = v + k$
$v = v(x) \quad \leftarrow \quad$ POMOĆNA FUNKCIJA

$a_1h + b_1k + c_1 = 0$
$a_2h + b_2k + c_2 = 0$

$2°$ Ako $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \ , \ a_1 \neq 0$

$u = a_1x + b_1y$

## 3.3 Linearna DJ

$y' + p(x)y = q(x)$

$p(x), q(x) : D_1 \mapsto \mathbb{R}$, neprekidne funckije na $D_1 \subseteq \mathbb{R}$

Rješenje je sljedeća formula: $y = e^{-\int p(x)dx}[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx] \ , \ C \in \mathbb{R}$

## 3.4 Bernulijeva DJ

$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

$p(x), q(x) : D_1 \mapsto \mathbb{R}$, neprekidne funckije na $D_1 \subseteq \mathbb{R}$
$\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$

Rješava se smjenom $z = z(x) = y^{1-\alpha}(x)$
Dobija se linearna jednačina $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$