

Matematika 2

Diferencijalne jednačine prvog reda

Petar Katić

1 Uvod

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} = \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{y})$$

Standardni oblik DJ: $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$

Tipovi rješenja DJ:

- 1) **OPŠTE**, npr. $y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$
- 2) **PARTIKULARNO**, za posebne C_1, C_2, \dots, C_m , npr. $y = x^2 + \frac{3}{2}x$
 - 2.1) **KOŠIJEVO**, uvrštavamo početne uslove koje dobijamo u zadatku
- 3) **SINGULARNO**, ne dobija se iz opšteg

Integralna kriva je rješenje predstavljeno u obliku $y = y(x)$.

2 Oblici DJ prvog reda

- 1) **Implicitni**, $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, $F : D \subseteq \mathbb{R}^3$
- 2) **EksPLICITNI**, $y' = f(x, y)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

3 Rješavanje DJ

3.1 DJ sa razdvojenim promjenljivim

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$f : D_f \mapsto \mathbb{R}$$

$$g : D_g \mapsto \mathbb{R}$$

3.2 Homogena DJ

$$\text{Preko } y : y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{Preko } x : x' = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\text{Rješava se smjenom } u(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot u(x)$$

3.2.1 Upoštvena homogena DJ

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

$$1^\circ \text{ Ako } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{aligned} x &= u + h, \quad y = v + k \\ v &= v(x) \quad \leftarrow \text{POMOĆNA FUNKCIJA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$2^\circ \text{ Ako } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad a_1 \neq 0$$

$$u = a_1x + b_1y$$

3.3 Linearna DJ

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$p(x), q(x) : D_1 \mapsto \mathbb{R}, \text{ neprekidne funkcije na } D_1 \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Rješenje je sljedeća formula: } y = e^{-\int p(x)dx} [C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx], \quad C \in \mathbb{R}$$

3.4 Bernulijeva DJ

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

$$\begin{aligned} p(x), q(x) &: D_1 \mapsto \mathbb{R}, \text{ neprekidne funkcije na } D_1 \subseteq \mathbb{R} \\ \alpha &\in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{Rješava se smjenom } z = y^{1-\alpha}(x)$$

$$\text{Dobija se linearna jednačina } z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$