LA POLARE

ESERCIZIO - Calcolare e tracciare la polare secondo Prandtl e la curva dell'efficienza in funzione del coefficiente di portanza per un'ala avente $C_{D0} = 0.011$ e $AR = 6.2$.

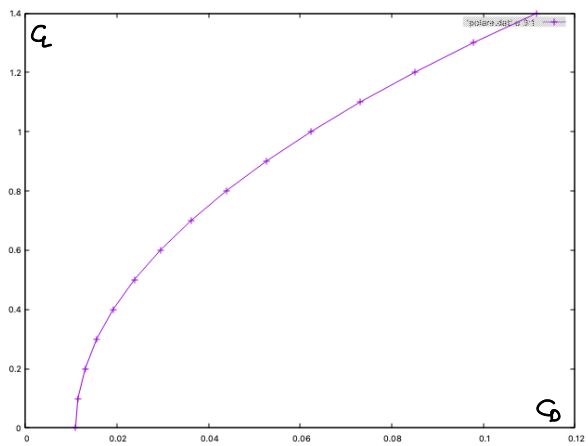
SVOLGIMENTO - Polare secondo Prandtl : $C_D = C_{D0} + C_{Di}$

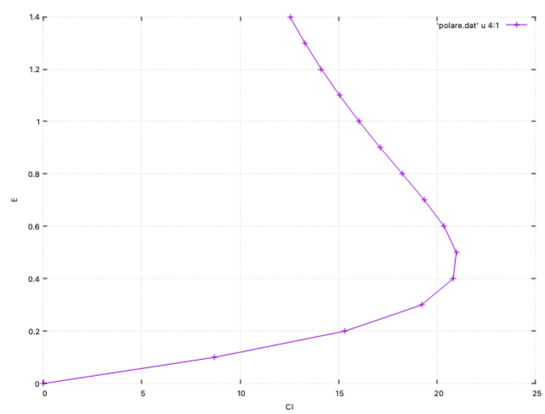
- $C_{D0} = 0.011$
- $C_{Di} = \dfrac{C_L^2}{\pi AR} = \dfrac{C_L^2}{3.14 \times 6.2} = \dfrac{C_L^2}{19.47}$
- $E = \dfrac{L}{D} = \dfrac{C_L}{C_D}$

Assumiamo valori di C_L variabili da 0 a 1.4 (Non ha senso procedere per valori maggiori di C_L, perché in prossimità dello stallo la polare reale si discosta da quella teorica di Prandtl).

polare

C_L	C_L^2	C_D	$E = \frac{C_L}{C_D}$
0	0	0,0110	0,00
0,1	0,01	0,0115	8,69
0,2	0,04	0,0131	15,32
0,3	0,09	0,0156	19,20
0,4	0,16	0,0192	20,81
0,5	0,25	0,0238	20,97
0,6	0,36	0,0295	20,35
0,7	0,49	0,0362	19,35
0,8	0,64	0,0439	18,24
0,9	0,81	0,0526	17,11
1	1	0,0624	16,04
1,1	1,21	0,0731	15,04
1,2	1,44	0,0850	14,12
1,3	1,69	0,0978	13,29
1,4	1,96	0,1117	12,54





ESERCIZIO – Calcolare e tracciare la polare usando Prandtl e la curva dell'efficienza in funzione del coefficiente di portanza per un'ala avente superficie $S = 25.2\,m^2$, apertura alare $b = 14.3\,m$, $C_{D0} = 0.009$ e coefficiente di portanza di stallo $C_{Lmax} = 1.3$. L'ala **NON** presenta distribuzione ellittica di portanza; si introduce il coefficiente di Oswald per la resistenza indotta $e = 1.05$.

SVOLGIMENTO – Scriviamo:

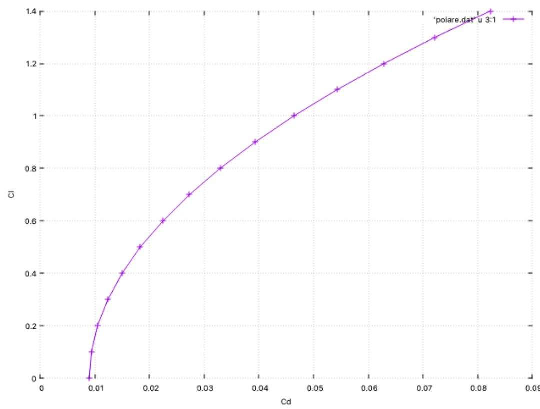
$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi e AR}$$

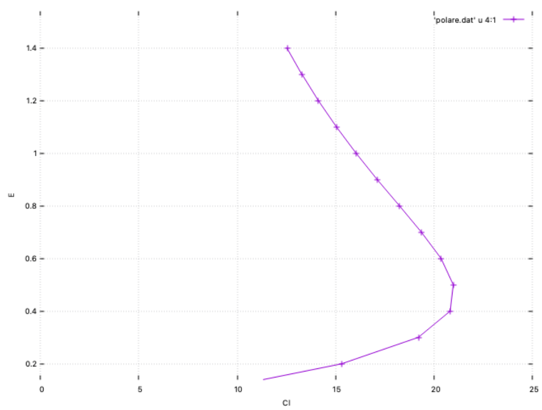
In questo caso è: $AR = \frac{b^2}{S} = \frac{14.3^2}{25.2} = 8.11$

Allora: $C_D = 0.009 + \frac{C_L^2}{3.14 \times 1.05 \times 8.11} = 0.009 + \frac{C_L^2}{26.74}$

polare

C_L	C_L^2	C_D	$E = \frac{C_L}{C_D}$
0	0	0,009	0,00
0,1	0,01	0,0094	8,69
0,2	0,04	0,0105	15,32
0,3	0,09	0,0124	19,20
0,4	0,16	0,0150	20,81
0,5	0,25	0,0183	20,97
0,6	0,36	0,0225	20,35
0,7	0,49	0,0273	19,35
0,8	0,64	0,0329	18,24
0,9	0,81	0,0393	17,11
1	1	0,0464	16,04
1,1	1,21	0,0543	15,04
1,2	1,44	0,0629	14,12
1,3	1,69	0,0722	13,29
1,4	1,96	0,0823	12,54





ESERCIZIO – Nell'ipotesi di validità della polare di Prandtl, calcolare l'efficienza massima e i valori dei coefficienti di resistenza e di portanza per un aereo avente $C_{D_0} = 0.021$ e allungamento $AR = 7.8$. Calcolare, inoltre, il massimo indice di quota e i corrispondenti valori dei coefficienti di portanza e resistenza.

SVOLGIMENTO – Risulta:

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\pi AR}{4\, C_{D_0}}}$$

E, ancora, $C_D\big|_{E_{max}} = 2\, C_{D_0}$, mentre $C_L\big|_{E_{max}} = \sqrt{\pi AR\; C_{D_0}}$

Si ha:

$$E_{max} = \sqrt{\frac{3.14 \times 7.8}{4 \times 0.021}} = 17.08 \;;\quad C_D\big|_{E_{max}} = 2 \times 0.021 = 0.042$$

$$C_L\big|_{E_{max}} = \sqrt{3.14 \times 7.8 \times 0.021} = 0.72$$

L'indice di quota massimo, nel caso di polare di Prandtl, può essere calcolato dalla relazione:

$$E\sqrt{C_L}\Big|_{max} = \frac{\sqrt[4]{(3\pi AR\;\; C_{D_0})^3}}{4\, C_{D_0}} = \sqrt[4]{\frac{(3\pi AR)^3}{256\; C_{D_0}}} =$$

$$= 1.344 \sqrt[4]{\frac{AR^3}{C_{D_0}}} = 1.344 \sqrt[4]{\frac{7.8^3}{0.021}} = 16.48$$

Al valore massimo dell'indice di quota corrispondono i coefficienti di portanza e resistenza ricavabili dalle seguenti relazioni:

$$C_D\big|_{E\sqrt{C_L}\,max} = 4\; C_{D_0} = 4 \times 0.021 = 0.084$$

$$C_L\big|_{E\sqrt{C_L}\,max} = \sqrt{3\, C_{D_0}\, \pi\, AR} = \sqrt{3 \times 0.021 \times 3.14 \times 7.8} = 1.242$$

ESERCIZIO - Nell'ipotesi di validità della polare di Prandtl, calcolare i coefficienti di portanza e resistenza corrispondenti a una efficienza $E = 11{,}5$ per un aereo avente le seguenti caratteristiche:

- coefficiente di resistenza minima $C_{D0} = 0.019$
- corda media $c = 1.3\ m$
- apertura alare $b = 16{,}25\ m$

SVOLGIMENTO - Calcoliamo l'allungamento alare:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{b^2}{b \cdot c} = \frac{b}{c} = \frac{16{,}25}{1.3} = 12{,}5$$

Ricaviamo i coefficienti di portanza e resistenza dal sistema:

$$\begin{cases} E = C_L / C_D \\ C_D = C_{D0} + \dfrac{C_L^2}{\pi AR} \end{cases} \qquad [1]$$

Dalla prima eq.ne della [1] è:

$$C_D = \frac{C_L}{E}$$

che, sostituito nella seconda, dà:

$$\frac{C_L}{E} = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} \Rightarrow \frac{C_L^2}{\pi AR} - \frac{C_L}{E} + C_{D0} = 0$$

ovvero:

$$E C_L^2 - \pi AR C_L + \pi E AR C_{D0} = 0$$

da cui:

$$C_L = \frac{\pi AR \pm \sqrt{(\pi AR)^2 - 4\pi E^2 AR C_{D0}}}{2E} = \frac{\pi \cdot 12{,}5 \pm \sqrt{(\pi \cdot 12{,}5)^2 - 4 \cdot \pi \cdot (11{,}5)^2 \times 12{,}5 \times 0.019}}{2 \cdot 11{,}5}$$

$$= \begin{cases} \cancel{3{,}18} \\ 0{,}23 \end{cases}$$

il valore va scartato perché superiore allo stallo; si ha quindi l'unica soluzione $C_L = 0.23$

Con questo valore, calcoliamo ora il corrispondente valore di C_D. È:

$$E = \frac{C_L}{C_D} \Rightarrow C_D = \frac{C_L}{E} = \frac{0.23}{11.5} = 0.02$$

NOTA: Allo stesso risultato si perviene considerando che:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} \Rightarrow C_D = 0.018 + \frac{0.23^2}{3.14 \times 12.5} = 0.02$$

ESERCIZIO – In un'esperienza in galleria del vento, su un modello d'ala a pianta rettangolare, avente apertura $b = 22$ cm e corda $c = 5,5$ cm, si sono letti, per diversi valori di incidenza geometrica, i seguenti valori di portanza e resistenza:

$\alpha°$	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16
L(N)	0.304	0,79	1,55	2,36	3,13	3,86	4,55	5,04	5,10	5,03
D(N)	0.080	0.073	0.102	0.154	0.228	0.328	0.458	0.619	0.728	0.848

Tracciare i diagrammi del coefficiente di portanza e del coefficiente di resistenza in funzione dell'incidenza, la polare e la curva dell'efficienza sapendo che durante l'esperienza la velocità dell'aria nella camera di prova era $V = 90$ km/h e la densità $\rho = 1,156$ kg/m³.

SVOLGIMENTO – Dalla formula della portanza è:

$$\bullet\ L = C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S \Rightarrow \boxed{C_L = \frac{2L}{\rho V^2 S}} \quad (a)$$

Analogamente, dalla formula della resistenza è:

$$\bullet\ D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 S \Rightarrow \boxed{C_D = \frac{2D}{\rho V^2 S}} \quad (b)$$

Con:

$$V = 90\ \text{Km/h} = \frac{90}{3.6} = 25\ \text{m/s}$$

$$S = b \times c = 22 \times 5.5 = 121\ \text{cm}^2 = 0.0121\ \text{m}^2$$

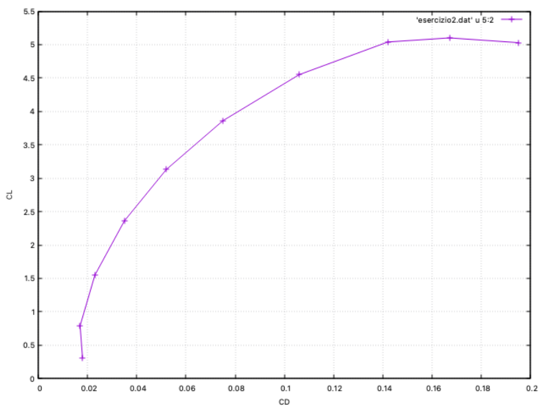
Sostituendo nelle (a) e (b) si ha:

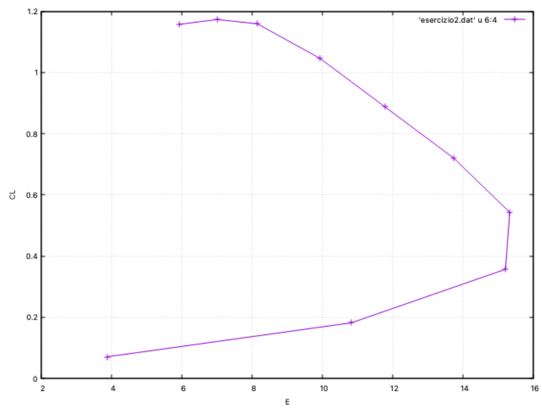
$$\boxed{C_L = \frac{2P}{1.156 \cdot 0.0121 \cdot (25)^2} = 0.23\,P} \qquad \boxed{C_D = \frac{2D}{1.56 \cdot 0.0121 \cdot (25)^2} = 0.23\,D}$$

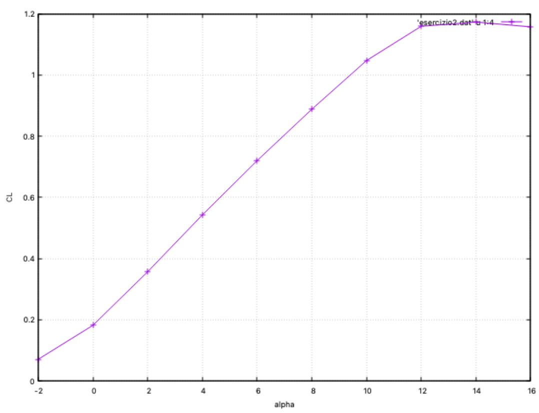
Per il calcolo dell'efficienza, ricordiamo che: $E = C_L / C_D$.

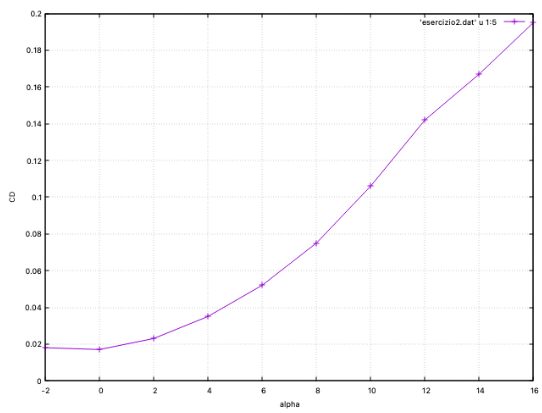
Esercizio

Alpha	L	D	CL	CD	E
-2	0,31	0,08	0,071	0,018	3,88
0	0,79	0,073	0,182	0,017	10,82
2	1,55	0,102	0,357	0,023	15,20
4	2,36	0,154	0,543	0,035	15,32
6	3,13	0,228	0,720	0,052	13,73
8	3,86	0,328	0,888	0,075	11,77
10	4,55	0,459	1,047	0,106	9,91
12	5,04	0,619	1,159	0,142	8,14
14	5,10	0,728	1,173	0,167	7,01
16	5,03	0,848	1,157	0,195	5,93









ESERCIZIO - Calcolare la polare e l'efficienza in funzione del coefficiente di portanza per un bimotore avente le caratteristiche sottoelencate:

- superficie alare $S = 124\ m^2$
- sezione maestra di fusoliera $S_f = 9{,}5\ m^2$
- sezione maestra di una gondola motrice $S_g = 1{,}25\ m^2$
- superficie impennaggio orizzontale $S_{i,o} = 23\ m^2$
- superficie impennaggio verticale $S_{i,v} = 21\ m^2$
- coeff. di resistenza di profilo dell'ala $C_{d,o} = 0.009$
- coeff. di resistenza della fusoliera $C_{d,f} = 0.080$
- coeff. di resistenza delle gondole $C_{d,g} = 0.055$
- coeff. di resistenza degli impennaggi $C_{d,i} = 0.0092$
- coeff di resistenza dovuto alle interferenze $C_d^* = 0.002$
- allungamento alare $\mathcal{R} = 8{,}7$
- coefficiente di Oswald $e = 0.9$

SVOLGIMENTO - Calcoliamo il coefficiente di resistenza, C_{D0}, per l'intero velivolo:

$$C_{D0} = C_{d,o} + C_{d,f}\frac{S_f}{S} + C_{d,g}\frac{S_g}{S}\cdot 2 + C_{d,i}\frac{S_{io}+S_{iv}}{S} + C_d^*$$

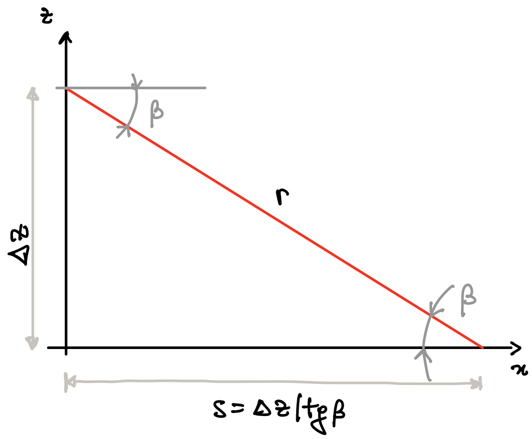
$$= 0.009 + 0.080\,\frac{9{,}5}{124} + 0.055\,\frac{1{,}25}{124}\cdot 2 + 0.0092\,\frac{23+21}{124} + 0.002$$

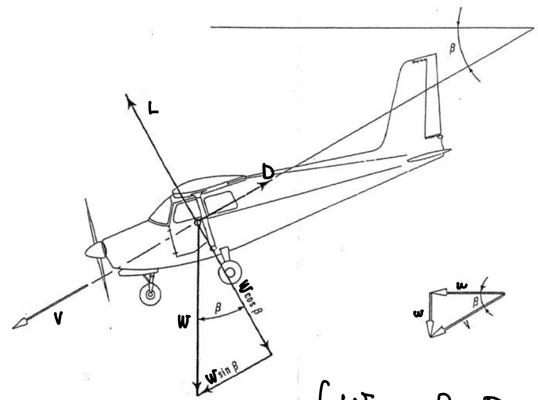
$$= 2.15\cdot 10^{-2}$$

Possiamo ora valutare la polare:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi e \mathcal{R}} = 2.15\cdot 10^{-2} + \frac{C_L^2}{\pi\cdot 0.9\cdot 8.7} = 2.15\cdot 10^{-2} + \frac{C_L^2}{24{,}59}$$

FORMULARIO
VOLO LIBRATO IN ARIA CALMA





$$\begin{cases} W \cdot \sin\beta = D \\ W \cos\beta = L \end{cases}$$

- Angolo di rampa $\rightsquigarrow$ $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{E}\right)$

- $E = \frac{1}{tg\beta} = \frac{C_L}{C_D}$

- velocità sulla traiettoria $\rightsquigarrow$ $V = \sqrt{\frac{2\, W/S \cos\beta}{\rho\, C_L}}$

- $\cos\beta = \frac{C_L}{\sqrt{C_L^2 + C_D^2}}$; $\sin\beta = \frac{C_D}{\sqrt{C_L^2 + C_D^2}}$

- Tempo di discesa $\rightsquigarrow$ $t = \frac{\Delta z}{w}$ [autonomia di tempo]

- Raggio d'azione $\rightsquigarrow$ $s = \frac{\Delta z}{tg\beta}$

- Autonomia di spazio $\rightsquigarrow$ $r = \frac{\Delta z}{\sin\beta}$

- $w_{min} \Leftrightarrow (E\sqrt{C_L})_{max}$ [durata massima]

- Indice di quota max $\rightsquigarrow$ $E\sqrt{C_L}\big|_{max} = \frac{\sqrt[4]{(3\pi AR\, C_{D0})^3}}{4\, C_{D0}}$

- $C_L\big|_{E\sqrt{C_L}|_{max}} = \sqrt{3\pi AR\, e\, C_{D0}}$ $\qquad C_D\big|_{E\sqrt{C_L}|_{max}} = 4\, C_{D0}$

- $\beta_{min} \Leftrightarrow E_{max}$ [raggio di azione massimo]

- $E_{max} = 0.8407 \sqrt{\frac{AR}{C_{D0}}}$

- $w_{min} = \frac{1}{E\sqrt{C_L}|_{max}} \sqrt{\frac{2\, W/S}{\rho}}$

- $C_L\big|_{E_{max}} = \sqrt{\pi AR\, e\, C_{D0}}$

- $C_D\big|_{E_{max}} = 2\, C_{D0}$

IN AFFONDATA (VOLO A CANDELA)

- velocità limite dell'aereo $\rightsquigarrow$ $V^* = \sqrt{\dfrac{2W/S}{\rho\, C_{D_0}}}$

□ Se gli aerofreni sono aperti $\rightsquigarrow$ $V^* = \sqrt{\dfrac{2W/S}{\rho\, C_{D_0}^*}}$

dove $C_{D_0}^* = C_{D_0} + C_{D_f} \dfrac{S_f}{S}$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\pi AR}{4 C_{D_0}^*}}$$

ALIANTE - STUDIO DEL MOTO LIBRATO

ESERCIZIO - Calcolare l'odografa in coordinate polari per un aliante avente peso $W = 4710\,N$, superficie alare $S = 12\,m^2$, sapendo che la polare aerodinamica è la seguente:

C_L	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.3
C_D	0.0150	0.0158	0.0182	0.0221	0.0277	0.0350	0.0465	0.0625	0.0724

SVOLGIMENTO - Calcoliamo, a quota zero, i valori dell'angolo di rampa β e delle velocità V corrispondenti ai vari valori di C_L, sapendo che $\rho = 1.2257\,kg/m^3$.

$$V = \sqrt{\frac{2W\cos\beta}{S\rho C_L}} = \sqrt{\frac{2W\cos\beta}{S\rho C_F\cos\beta}} = \sqrt{\frac{2W}{S\rho C_F}} \quad \text{con } C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 4710}{12\cdot 1.2257\cdot C_F}} = \sqrt{\frac{640}{C_F}}$$

Osserviamo: $\quad tg\,\beta = \frac{1}{E} \quad$ con $\quad E = \frac{C_L}{C_D} \quad \rightarrow \quad \beta = arctg\,\frac{C_D}{C_L}$

Ancora: $\quad \cos\beta = \frac{C_L}{C_F} \quad \sin\beta = \frac{C_D}{C_F} \quad$ e quindi

$$u = V\cos\beta = V\, C_L/C_F \quad e \quad w = V\sin\beta = V\, C_D/C_F$$

aliante

CL	CD	CF	V	beta	u	w
0	0.015	0.0150	206.56	90	0	206.56
0.2	0.0158	0.2006	56.48	4.52	56.31	4.45
0.4	0.0182	0.4004	39.98	2.61	39.94	1.82
0.6	0.0221	0.6004	32.65	2.11	32.63	1.20
0.8	0.0277	0.8005	28.28	1.98	28.26	0.98
1	0.035	1.0006	25.29	2.00	25.28	0.88
1.2	0.0465	1.2009	23.09	2.22	23.07	0.89
1.4	0.0625	1.4014	21.37	2.56	21.35	0.95
1.3	0.0724	1.3020	22.17	3.19	22.14	1.23

ESERCIZIO – Calcolare e tracciare in coordinate cartesiane l'odografia a punta zero per un aliante avente le caratteristiche sotto indicate:

- peso totale $W = 4655\ N$
- superficie alare $S = 19.3\ m^2$
- apertura alare $b = 17.2\ m$
- coefficiente di resistenza minimo $C_{D0} = 0{,}016$
- coefficiente di portanza massimo $C_{L\,max} = 1.5$
- coefficiente di Oswald $e = 0.9$.

SVOLGIMENTO – Calcoliamo l'allungamento alare dell'aliante:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{17.2^2}{19.3} = 15.33$$

La polare è:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi e AR} = 0.016 + \frac{C_L^2}{\pi \cdot 0.9 \cdot 15.33} =$$

$$= 0.016 + \frac{C_L^2}{43{,}32}$$

$$V = \sqrt{\frac{2 W \cos\beta}{\rho S C_L}}$$

$\rho = 1.2257\ kg/m^3$

Osserviamo che se $\boxed{C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}}$ allora

$\boxed{\cos\beta = \frac{C_L}{C_F}}$ e $\boxed{\sin\beta = \frac{C_D}{C_F}}$

e, ovvero, $\tan\beta = \frac{1}{E} \rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{1}{E}\right) = \arctan\left(\frac{C_D}{C_L}\right)$

Sostituendo nella formula della velocità, è:

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\ \sqrt{\frac{W}{S}\ \frac{1}{C_F}}}$$

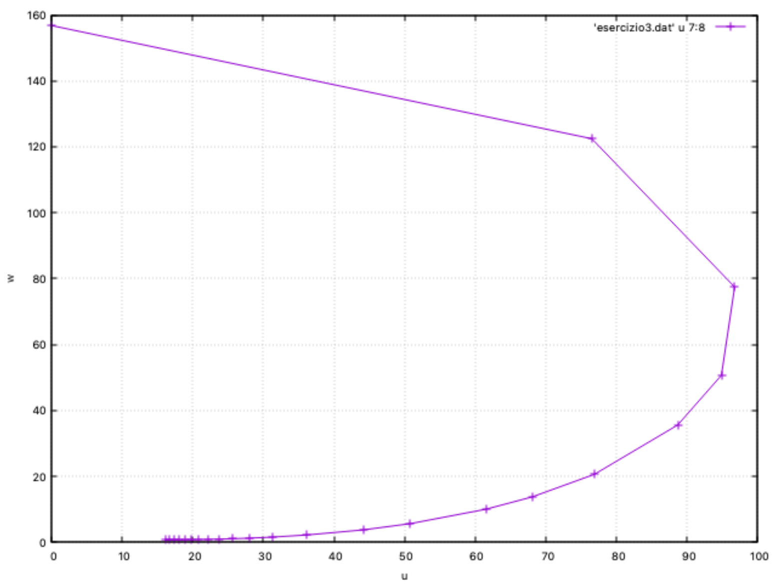
e, ancora,

$$\begin{cases} \boxed{u = V\cos\beta = V\, C_L / C_F} \\ \boxed{v = V\sin\beta = V\, C_D / C_F} \end{cases}$$

Con queste relazioni e i dati a disposizione, facendo variare il C_L tra 0 e 1.5 possiamo tracciare l'odografo a punta zero dell'aliante in oggetto. Nella pagina seguente si riportano i dati numerici del problema in esame e il relativo odografo delle velocità.

Aliante

CL	CD	CF	cos(beta)	sin(beta)	V	u	w
0	0.0160	0.016	0	1.0000	156.79	0.00	156.79
0.01	0.0160	0.0189	0.5299	0.8480	144.37	76.51	122.43
0.02	0.0160	0.0256	0.7807	0.6249	123.91	96.73	77.43
0.03	0.0160	0.0340	0.8821	0.4711	107.54	94.86	50.66
0.04	0.0160	0.0431	0.9282	0.3721	95.53	88.67	35.55
0.06	0.0161	0.0621	0.9659	0.2589	79.57	76.86	20.60
0.08	0.0161	0.0816	0.9802	0.1979	69.42	68.05	13.74
0.10	0.0162	0.1013	0.9871	0.1602	62.31	61.50	9.98
0.15	0.0165	0.1509	0.9940	0.1095	51.05	50.75	5.59
0.20	0.0169	0.2007	0.9964	0.0843	44.27	44.11	3.73
0.30	0.0181	0.3005	0.9982	0.0601	36.18	36.11	2.18
0.40	0.0197	0.4005	0.9988	0.0492	31.34	31.30	1.54
0.5	0.0218	0.5005	0.9991	0.0435	28.03	28.01	1.22
0.6	0.0243	0.6005	0.9992	0.0405	25.59	25.57	1.04
0.7	0.0273	0.7005	0.9992	0.0390	23.70	23.68	0.92
0.8	0.0308	0.8006	0.9993	0.0384	22.16	22.15	0.85
0.9	0.0347	0.9007	0.9993	0.0385	20.90	20.88	0.81
1	0.0391	1.0008	0.9992	0.0391	19.82	19.81	0.77
1.1	0.0439	1.1009	0.9992	0.0399	18.90	18.89	0.75
1.2	0.0492	1.2010	0.9992	0.0410	18.10	18.08	0.74
1.3	0.0550	1.3012	0.9991	0.0423	17.39	17.37	0.74
1.4	0.0612	1.4013	0.9990	0.0437	16.75	16.74	0.73
1.5	0.0679	1.5015	0.9990	0.0452	16.18	16.17	0.73



ESERCIZIO – Calcolare l'efficienza massima e il massimo indice di punta; calcolare inoltre, a punta zero, la velocità di stallo, il valore minimo della componente verticale della velocità e la velocità limite, sapendo che l'aliante ha un carico alare $W/S = 315\,N/m^2$. È assegnata la polare:

C_L	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.3
C_D	0.016	0.016	0.018	0.022	0.029	0.04	0.054	0.079	0.092

Possiamo determinare l'efficienza massima e il massimo indice di punta dai dati posti in forma tabellare:

C_L	C_D	E	$\sqrt{C_L}$	$E\sqrt{C_L}$
0	0.016	0	0	0
0.2	0.016	12.5	0.45	5.6
0.4	0.018	22.2	0.63	14,05
0.6	0.022	27.3	0.78	21,12
0.8	0.029	27.6	0.88	24,68
1.0	0.040	25,0	1,00	25,00
1.2	0.054	22,22	1.09	24,34
1.4	0.079	17,72	1.18	20,97
1.3	0.092	14,13	1.14	16,11

Risulta:

$$E_{max} = 27.6 \quad e \quad (E\sqrt{C_L})_{max} = 25{,}00$$

Ancora:

$$V = \sqrt{\frac{2W\cos\beta}{\rho S C_L}} \qquad con \qquad \cos\beta = \frac{C_L}{\sqrt{C_L^2 + C_D^2}}$$

Allo stallo è:

$$C_L = C_{L_{max}} = 1.4 \quad e \quad C_D\Big|_{C_{L_{max}}} = 0.079$$

Quindi:

$$\cos\beta^* = \frac{1.4}{\sqrt{1.4^2 + 0.078^2}} = 0.9984$$

$$V^* = \sqrt{\frac{2(W/S)\cos\beta^*}{\rho \quad C_{L\,max}}} = \sqrt{\frac{2\times(315)\times 0.9984}{1.2257\times 1.4}} = 19.14\ \frac{m}{s} = 68.92\ Km/h$$

Sappiamo che:

$$w_{min} = \frac{1}{(E\sqrt{C_L})_{max}}\sqrt{\frac{2\,W/S}{\rho}} = \frac{1}{25}\sqrt{\frac{2\times(315)}{1.2257}} = 0.907\ m/s$$

Per la velocità limite (è quella che corrisponde a $C_L=0$) nella relazione della velocità,

$$V = \sqrt{\frac{2W\cos\beta}{\rho S C_L}} \qquad \text{poiché} \qquad \cos\beta = \frac{C_L}{\sqrt{C_L^2+C_D^2}} \qquad \text{scriviamo}$$

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho\,\cancel{C_L}}\,\frac{\cancel{C_L}}{\sqrt{C_L^2+C_D^2}}} = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho\sqrt{C_L^2+C_D^2}}}$$

per $C_L=0$ è:

$$V_{lim} = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho \quad C_{D_0}}} = \sqrt{\frac{2\times 315}{1.2257\times 0.016}} \simeq 178.2\ \frac{m}{s}$$
$$= 645.24\ km/h$$

ESERCIZIO = Per un aliante avente peso $W = 4710\ N$, superficie alare $S = 20\ m^2$, allungamento $AR = 15$, coefficiente di portanza massimo $C_{L\,max} = 1.6$, coefficiente di resistenza minimo $C_{D_0} = 0.015$, determinare: il minimo angolo di rampa, la velocità di stallo a spinta zero, il massimo rateo di discesa, la corrispondente velocità sulla traiettoria a spinta zero e la componente verticale di detta velocità.

SVOLGIMENTO – Il minimo angolo di rampa è:

$$\beta_{min} = \arctg \frac{1}{E_{max}}$$

Non è assegnata la polare sperimentale, per cui riteniamo valida la polare di Prandtl per la quale è:

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\pi AR}{4 C_{D0}}} = \sqrt{\frac{3.14 \times 15}{4 \times 0.015}} = 28.02$$

$$\beta_{min} = \arctg\left(\frac{1}{E_{max}}\right) = \arctg\left(\frac{1}{28.02}\right) = 2.04 \text{ rad.}$$

Calcoliamo la velocità di stallo a quota z=0:

$$V^* = \sqrt{\frac{2 (W/S) \cos\beta}{\rho C_{L max}}} = \sqrt{\frac{2(4710/20)}{1.2257 \times 1.6}} = 15.50 \text{ m/s} \equiv 55.80 \text{ Km/h}$$

- Per determinare il massimo indice di quota impostiamo una tabella assumendo valori C_L maggiori o pari a 1 perché $E\sqrt{C_L}\,|_{max}$ si trova in prossimità dello stallo.

- $$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR}$$
$$= 0.015 + \frac{C_L^2}{\pi \times 15} = 0.015 + 0.02\, C_L^2$$

- $$E = \frac{C_L}{C_D}$$

CL	CD	E	indice di quota
1	0,0362	27,60	27,60
1,1	0,0407	27,03	28,35
1,2	0,0456	26,33	28,84
1,3	0,0509	25,55	29,13
1,4	0,0566	24,73	29,26
1,5	0,0628	23,90	29,27
1,6	0,0694	23,07	29,18

Dalla tabella è:

$$E\sqrt{C_L}\,\Big|_{max} = 29.27$$

che corrisponde a una velocità sulla traiettoria:

$$V = \sqrt{\frac{2\, W/S \cos\beta}{\rho\, C_L}}$$

Osserviamo:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{E}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{23,90}\right) = 2,396^\circ \equiv 0.0418 \text{ rad}$$

$C_L = 1,5$ (è il C_L per il quale $E\sqrt{C_L}$ è massimo)

$\rho = 1.2257 \text{ Kg/m}^3$

Quindi:

$$V = \sqrt{\frac{2 \times 235,5 \times \cos(0.0418)}{1.2257 \times 1,5}} = 16 \text{ m/s} \equiv 57.6 \text{ Km/h}$$

NOTA · Similmente si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato osservando che:

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)\cos\beta}{\rho \quad C_L}} \qquad \text{ma} \qquad \cos\beta = \frac{C_L}{\sqrt{C_L^2 + C_D^2}} \qquad \text{per cui:}$$

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho \cancel{C_L}} \frac{\cancel{C_L}}{\sqrt{C_L^2+C_D^2}}} = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho\sqrt{C_L^2+C_D^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 235,5}{1.2257 \times \sqrt{1,5^2 + 0.0628^2}}} = \sqrt{\frac{2 \times 235,5}{1,2257 \times 1,501}} = 16 \text{ m/s}$$

Determiniamo la componente verticale:

$$w = V \sin\beta = \begin{cases} 16 \times \sin(0.0418) = 0.67 \text{ m/s} \\[2ex] V \dfrac{C_D}{\sqrt{C_L^2+C_D^2}} = 16 \times \dfrac{0.0628}{1,501} = 0.67 \text{ m/s} \end{cases}$$

ESERCIZIO - Calcolare il minimo angolo di rampa e la massima distanza alla quale può giungere in assenza di vento un aliante avente le caratteristiche sottoindicate nell'ipotesi che scenda dalla quota di 2300 m fino a un campo posto a 200 m sul livello del mare.

Caratteristiche dell'aliante:

- superficie alare $S = 22{,}5\ m^2$
- apertura alare $b = 18.7\ m$
- coefficiente di Oswald $e = 0{,}95$
- Coefficiente di resist. minimo $C_{D0} = 0.015$

SVOLGIMENTO - Il minimo angolo di rampa è:

$$\beta_{min} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{E_{max}}\right) \qquad (1)$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\pi\, AR\, e}{4\, C_{D0}}}$$

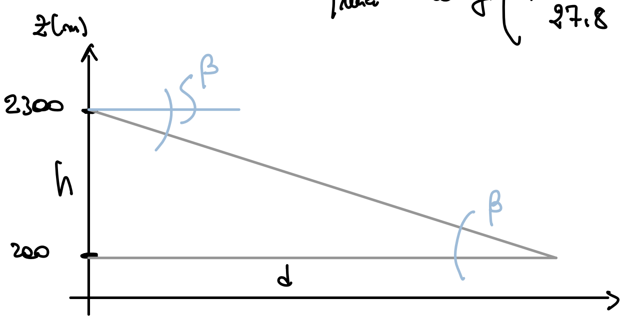
$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{18{,}7^2}{22{,}5} = 15{,}54$$

Quindi, in definitiva, è:

$$E_{max} = \sqrt{\frac{3.14 \times 15{,}54 \times 0{,}95}{4 \times 0.015}} = 27.8$$

Si ha, per la (1):

$$\beta_{min} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{27{,}8}\right) = 0.036\ rad = 2{,}064^\circ$$



$$\frac{h}{d} = \operatorname{tg}\beta \rightarrow d_{max} = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta_{min}}$$

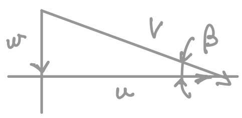
$$d_{max} = h\, E_{max} = 2100 \times 27{,}8 = $$
$$= 58{,}38\ Km.$$

ESERCIZIO - In un determinato istante di un volo di un aliante si sono fatte le seguenti letture sugli strumenti di bordo :

pressione	$p = 520$ mmHg
temperatura	$t = 6°C$
velocità indicata	$V_i = 160$ km/h
componente verticale della velocità	$w = 4$ m/s

Sapendo che l'aliante pesa $W = 5200$ N, ha superficie alare $S = 21$ m^2, allungamento alare $AR = 16$ e che il volo si è svolto in assenza di vento, calcolare la pendenza della traiettoria nell'istante considerato, l'efficienza corrispondente e il coefficiente di resistenza minimo (C_{D0}).

SVOLGIMENTO - Per ricavare la pendenza della traiettoria si considerano le relazioni:



$$\boxed{u = V\cos\beta} \quad e \quad \boxed{w = V\sin\beta} \qquad (1)$$

Sull'anemometro è stata indicata la velocità $V_i = 160$ km/h
Per ricavare la velocità vera, occorre calcolare:

$$\boxed{V = V_i \cdot \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}} \qquad (2)$$

Si ha:

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

Dove:

$$P = 520 \text{ mmHg} = 520 \cdot \frac{101337}{760} = 69337 \text{ N/m}^2$$

$$R = 287{,}1 \text{ J/kg K}$$ → costante universale dei gas

$$T = 6 + 273 = 279 \text{ K}$$

Quindi

$$\rho = \frac{69337}{287{,}1 \times 279} = 0.866 \ kg/m^3$$

Risulta:

$$V = 160 \frac{km}{h} \sqrt{\frac{1.2257}{0.866}} = 190{,}35 \ km/h = 52{,}87 \ m/s$$

Dalla seconda delle (1) ricaviamo subito:

$$\sin\beta = \frac{w}{V} \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{4}{52{,}87}\right) = 4{,}34°$$

Poiché

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{E} \rightarrow E = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} 4{,}34} = 13{,}18$$

Ancora:

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)\cos\beta}{\rho \ C_L}} \rightarrow V^2 = \frac{2(W/S)\cos\beta}{\rho \ C_L} \rightarrow$$

$$C_L = \frac{2(W/S)\cos\beta}{\rho \ V^2} = \frac{2(5200/21)\cdot\cos(4{,}34)}{0.866\cdot(52{,}87)^2} =$$

$$= \frac{2\times 247{,}62 \times 0.997}{0.866\cdot(52{,}87)^2} = 0.204$$

Poiché

$$E = \frac{C_L}{C_D} \rightarrow C_D = \frac{C_L}{E} = \frac{0.204}{13{,}18} = 0.0155$$

Allora:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} \rightarrow C_{D0} = C_D - \frac{C_L^2}{\pi AR} =$$

$$= 0.0155 - \frac{(0.204)^2}{\pi \times 16} =$$

$$= 0.0155 - 0.00083 = 0.0147$$

Osserviamo che il C_L potevamo calcolarlo anche dall'eq.ne dell'equilibrio delle forze nel volo librato:

$$L = W\cos\beta \longrightarrow C_L S \frac{1}{2}\rho V^2 = W\cos\beta \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_L = \frac{2W\cos\beta}{S\rho V^2}$$

ESERCIZIO - Calcolare la superficie dei freni aerodinamici, S_f, necessaria affinché la velocità di volo in candela, per un aliante avente le caratteristiche sottoelencate, non superi a quota zero 250 km/h.

Caratteristiche dell'aliante:

- peso totale $W = 2254$ N
- superficie alare $S = 13{,}2\ m^2$
- coeff. di resistenza minima senza freni $C_{D0} = 0.015$
- coeff. di resistenza dei freni $C_{Df} = 1.6$

SVOLGIMENTO - La velocità che si raggiunge a regime in un'affondata senza spinta del motore (VELOCITÀ LIMITE) è:

$$V_L = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{D0}^*}}$$

N.B. C_{D0} è il coefficiente di resistenza minima di TUTTO il velivolo con gli aerofreni aperti:

$$C_{D0}^* = C_{D0} + C_{Df}\frac{S_f}{S} \qquad (*)$$

Scriviamo:

$$V_L = \sqrt{\frac{2 \times 2254}{1.2257 \times 13{,}2 \times C_{D0}^*}} \leq 250\ km/h \leq 69{,}44\ \frac{m}{s}$$

Si ha:

$$\frac{2\times 2254}{1.2257\times 13{,}2\times C_{D_0}^*} \le (69{,}44)^2$$

Quindi:

$$C_{D_0}^* \ge \frac{2\times 2254}{1.2257\times 13{,}2\times (69{,}44)^2} = 0.058$$

Allora per $C_D^* = 0.058$, nella (1) è:

$$0.058 = 0.015 + 1.6\,\frac{S_f}{13{,}2} \;\longrightarrow\; S_f = \frac{0.058-0.015}{1.6}\cdot 13{,}2 = 0{,}355\ m^2$$

ESERCIZIO - Calcolare la velocità limite e il minimo angolo di rampa per un aliante avente le caratteristiche sottoelencate nella ipotesi che voli a quota $z=0$ con freni aerodinamici aperti.

PESO TOTALE	$W = 2646\ N$
CARICO ALARE	$W/S = 216\ N$
COEFF. DI RESISTENZA MINIMO	$C_{D_0} = 0.015$
ALLUNGAMENTO ALARE	$AR = 17$
SUPERFICIE DEI FRENI	$S_f = 0.55\ m^2$
COEFF. DI RESISTENZA FRENI	$C_{D_f} = 1.7$

SVOLGIMENTO - Calcoliamo la velocità limite dalla relazione:

$$V_{LIM} = \sqrt{\frac{2\,(W/S)}{\rho\, C_{D_0}^*}}$$

dove

$$C_{D_0}^* = C_{D_0} + C_{D_f}\,\frac{S_f}{S}$$

$$S = \frac{W}{W/S} = \frac{2646}{216} = 12{,}25\ m^2$$ per cui:

$$C_{D0}^* = 0.015 + 1.7 \times \frac{0.55}{12.25} = 0.0913$$

Quindi:

$$V_{LIM} = \sqrt{\frac{2 * 216}{1.2257 * 0.0913}} = 62.13 \ m/s \cong 223,60 \ km/h$$

Per il minimo angolo di rampa è: $\beta_{min} = \arctan\left(\frac{1}{E_{max}}\right)$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\pi AR}{4 C_{D0}^*}} = \sqrt{\frac{3.14 \times 17}{4 \times 0.0913}} = 12,10$$

Quindi:

$$\beta_{min} = \arctan \frac{1}{12,10} = 4,72°$$

ESERCIZIO – Un aliante avente le caratteristiche sotto indicate ha impiegato 55 s per scendere dalla quota di 2800 m alla quota di 2700 m con una velocità lungo la traiettoria $V_i = 100$ km/h. Determinare il valore del coefficiente di resistenza minimo C_{D0}.

Caratteristiche dell'aliante:

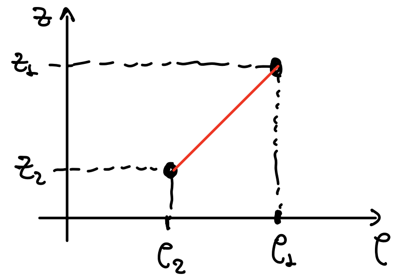
- PESO TOTALE $W = 4410$ N
- SUPERFICIE ALARE $S = 18,3 \ m^2$
- ALLUNGAMENTO ALARE $AR = 17$

SVOLGIMENTO – Dai dati, calcoliamo subito la velocità verticale durante la prova:

$$w = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{2800 - 2700}{55} = 1.82 \ m/s$$

Dalle tabelle dell'aria tipo calcoliamo il valore della densità in una posizione intermedia tra 2800 e 2700 metri ovvero 2750 m:

$$z_1 = 2500 \qquad \rho_1 = 0.957\ kg/m^3$$
$$z_2 = 3000 \qquad \rho_2 = 0.909\ kg/m^3$$



Si ha:

$$\frac{z_1 - z}{z_1 - z_2} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}$$

da cui $\rho = 0.933\ kg/m^3$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{0.933}{1.225} = 0.7616$$

II Calcoliamo la velocità vera alla quota compresa tra 2500 m e 3000 m

$$V = V_i \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} = 100 \sqrt{\frac{1}{0.7616}} = 114.61\ \frac{km}{h} = 31.83\ \frac{m}{s}$$

Si ha:

$$\frac{w}{V} = \sin\beta \rightarrow \sin\beta = \frac{1.82}{31.83} = 0.0572$$

$$\beta = \arcsin(0.0572) = 3.2778 \rightarrow \cos\beta = 0.9984$$

Calcoliamo il coefficiente di portanza:

$$C_L S \frac{1}{2} \rho V^2 = W \cos\beta \rightarrow C_L = \frac{2W\cos\beta}{S\rho V^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 4410 \cdot 0.9984}{18.3 \cdot 0.933 \cdot (31.83)^2} = 0.51$$

Si ha:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{E} \rightarrow E = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta} = 17.46 \rightarrow \frac{C_L}{C_D} = 17.46 \quad \text{ovvero}$$

$$C_D = 0.51/17.46 = 2.92 \cdot 10^{-2}$$

Dalla teoria di Prandtl è:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} \rightarrow C_{D0} = C_D - \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

$$= 2.92 \cdot 10^{-2} - \frac{0.51^2}{\pi \times 17} = 0.024$$

ESERCIZIO - Determinare quale deve essere l'apertura alare e quale la corda media aerodinamica affinché un aliante avente le caratteristiche sottoindicate presenti un angolo di rampa minimo $\beta_{min} = 2°$.

Caratteristiche dell'aliante:

- peso totale $W = 5200\,N$
- carico alare $W/S = 284\,N/m^2$
- coeff. di resistenza minima $C_{D0} = 0.015$

SVOLGIMENTO - Dall'angolo di rampa minimo, ricaviamo l'efficienza massima del velivolo:

$$tg\,\beta_{min} = \frac{1}{E_{max}} \rightarrow E_{max} = \frac{1}{tg\,\beta_{min}} = \frac{1}{tg\,2°} = 28.64$$

Si ha, poi:

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\pi AR}{4 C_{D0}}} \rightarrow AR = \frac{4 E_{max}^2}{\pi} C_{D0}$$

Quindi:

$$AR = \frac{4 * (28.64)^2}{\pi} * 0.015 = 15.67$$

Ricaviamo la superficie alare

$$S = \frac{W}{W/S} = \frac{5200\,N}{284\,N/m^2} = 18.31\,m^2$$

Ricaviamo, allora, l'apertura alare:

$$AR = \frac{b^2}{S} \rightarrow b = \sqrt{AR \cdot S} = \sqrt{15.67 * 18.31} = 16.94 \text{ m}$$

e la corda media:

$$S = b \cdot c \rightarrow c = \frac{S}{b} = \frac{18.31}{16.94} = 1.08 \text{ m}$$

ESERCIZIO - Un aliante avente le caratteristiche sottoelencate si trova alla quota di 1000 m ed incontra una corrente ascendente $w' = 5$ m/s. Determinare per quanto tempo l'aliante deve rimanere nella corrente ascendente per salire fino alla quota di 3000 m nell'ipotesi che il pilota ponga l'aliante all'assetto più opportuno.

- carico alare $W/S = 314 \text{ N/m}^2$
- coefficiente di resist. minimo $C_{D0} = 0.015$
- Allungamento alare $AR = 18.9$

SVOLGIMENTO - L'assetto più conveniente è quello per cui la w_{min} a cui corrisponde un indice di quota massimo, $E\sqrt{C_L}|_{max}$.

$$E\sqrt{C_L}|_{max} = \frac{\sqrt[4]{(3\pi AR\, C_{D0})^3}}{4 C_{D0}} = \sqrt[4]{\frac{(3\pi AR)^3 C_{D0}^3}{(4 C_{D0})^4}} = 1.345 \sqrt[4]{\frac{AR^3}{C_{D0}}}$$

$$= 1.345 \sqrt[4]{\frac{(18.9)^3}{0.015}} = 34.84$$

$$w_{min} = \frac{1}{E\sqrt{C_L}|_{max}} \sqrt{\frac{2 W/S}{\rho}}$$

Dalle tabelle dell'atmosfera standard, è:

$$\bar{z} = \frac{3000+1000}{2} = 2000\ m \rightarrow \rho = 1.007\ kg/m^3$$

$$w_{min} = \frac{1}{34.84}\sqrt{\frac{2*34}{1.007}} = 0.718\ m/s$$

L'aliante salirà con una componente verticale data dalla differenza fra la velocità della corrente ascendente e la componente della velocità discendente:

$$w = w' - w_{min} = 5\ m/s - 0.718\ m/s = 4.28\ m/s$$

Il tempo impiegato per salire da quota 1000 m a quota 3000 m è:

$$t = \frac{\Delta z}{w} = \frac{3000-1000}{4.28} = \frac{2000}{4.28} = 467.3\ s$$

ESERCIZIO - Due alianti uguali ma con carico aliante differente scendono in aria calma allo stesso assetto dalla quota di 2000 m a quota zero percorrendo in orizzontale 18 km. Il primo impiega 1 ora, mentre il secondo impiega 1h 20'.
Sapendo che il carico alare del primo è $W/S|_1 = 275\ N/m^2$, determinare il carico alare del secondo.
Nell'ipotesi di vento contrario orizzontale con velocità $V' = 3\ m/s$ determinare i valori dell'angolo di rampa per i due alianti.

SVOLGIMENTO - Lo spazio percorso dai due alianti è uguale, ovvero:

$$s = t_1 \cdot V_1 = t_2 V_2 \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Poiché

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)\cos\beta}{\rho C_L}}$$

tenendo conto che entrambi volano alla stessa quota e con lo stesso eretto e quindi con lo stesso angolo di rampa, è:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{2(W/S)_1 \cos\beta}{\rho C_L}} \\ V_2 &= \sqrt{\frac{2(W/S)_2 \cos\beta}{\rho C_L}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{2(W/S)_2 \cancel{\cos\beta}}{\cancel{\rho C_L}} \cdot \frac{\cancel{\rho C_L}}{\cancel{2}(W/S)_1 \cancel{\cos\beta}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(W/S)_2}{(W/S)_1}}$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= 1h = 3600\ s \\ t_2 &= 1h\ 20' = 4800\ s \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{36}{48}$$

Quindi

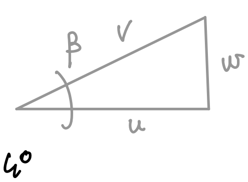
$$\frac{36}{48} = \sqrt{\frac{(W/S)_2}{(W/S)_1}} \rightarrow \left(\frac{36}{48}\right)^2 \cdot 275 = \left.\frac{W}{S}\right|_2 = 155\ N/m^2$$

- Determiniamo le componenti di $V_1 = (u_1, w_1)$ e $V_2 = (u_2, w_2)$ delle velocità senza vento dei due alianti:

$$u_1 = s/t_1 = 18000/3600 = 5\ m/s$$
$$w_1 = \Delta z/t_1 = (2000-0)/3600 = 0.56\ m/s$$
$$u_2 = s/t_2 = 18000/4800 = 3.75\ m/s$$
$$w_2 = \Delta z/t_2 = (2000-0)/4800 = 0.42\ m/s$$

Nel caso in esame, vengono alterate **SOLO** le componenti u_1 e u_2 delle velocità, ovvero:

$$u_1^* = u_1 - u_V = 5 - 3 = 2\ m/s$$
$$u_2^* = u_2 - u_V = 3{,}75 - 3 = 0{,}75\ m/s$$



Quindi

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{w_1}{u_1^*} \rightarrow \beta_1 = \operatorname{arctg}\frac{0.56}{2} = 15{,}64°$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{w_2}{u_2^*} \rightarrow \beta_2 = \operatorname{arctg}\frac{0.42}{0.75} = 29{,}25°$$