

LO STRATO LIMITE

- Caratteristiche del fluido intorno a un corpo - Nel caso di un fluido non viscoso intorno a un corpo si forza fuori, il corpo si muove più come determinato risolvendo legge lineare di Laplace, le relazioni irrotazionali sono obbligate, quindi risulta la conservazione di flotta, formazione dei veloci delle forze di resistenza, per i fluidi intorno a corpi affusolati con bordi di unità spese, molto meno a pratica ricevuti spesso dovuti nel caso di fluidi poco viscosi. Le stesse relazioni irrotazionali, però, formano cause molte volte resistenza nulla e una velocità tangenziale nel contorno del corpo divenne di zero, in contrasto con questi risultati spesso contrarie.
- Prandtl formulò l'ipotesi che nel caso di fluidi con viscosità nulla le forze visose fanno trascurabili in tutto il corpo scatto delle velle rosse e adattamento le condizioni dello strato limite - si riduce a zero il divariante delle vellecite. All'interno dello strato limite, il fluido si comporta come se fosse non viscoso. Tuttavia, ovviamente, la viscosità del fluido ha lo stesso valore in tutto il campo. L'importanza relativa degli effetti visosi, che dipendono anche dal perimetro e velocità, è dissimile all'interno e all'esterno dello strato limite.
- L'ipotesi di Prandtl permette di studiare il fluido in modo semplificato rispetto alle spiegazioni di Navier-Stokes conciliando due effetti estremi in contrasto: da una parte conservare l'effetto della viscosità in ogni punto del campo nel caso in cui esse fesse piccole; dall'altra rendere perfette il calcolo della resistenza di attrito rispondendo che venne soddisfatta la conservazione di aderenza delle pelli.
- La teoria di Prandtl permette di semplificare le spiegazioni del moto all'interno dello strato limite e si ottiene per fluidi ad alto numero di Reynolds portando del punto di ristagno anteriore fino al punto di confine del corpo e velle del quale comincia la separazione dello strato limite da origine alla scia.
- Significato fisico dello strato limite - Le caratteristiche del campo fluidodinamico dipendono, oltre che dalle forze del corpo, dalla velocità e dalle proprietà del fluido. Per un fluido esterno, il più importante di tutti parametri è il numero di Reynolds
- $$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{\rho L}{\eta} \rightarrow$$
- rappresenta il rapporto tra le forze di inerzia e le forze visive
- In avere di effetti visosi, $\eta \neq 0 \rightarrow Re \rightarrow \infty$
 In avere di effetti di inerzia, $\eta = 0 \rightarrow Re \rightarrow 0$
 → Il fluido reale sarà caratterizzato dai valori di Reynolds intermedii
- La maggior parte dei fluidi esterni che incontriamo di solito riguarda effetti di inerzia modesta le cui larghezze caratteristiche sono dell'ordine $0.1 \text{ m} < L < 10 \text{ m}$.

- La velocità del fluido è di solito compresa tra i 100 e i 1000 m/s
- Fluidi comuni: aria e acqua.
- L'intervallo dei valori del numero di Reynolds sono $10^4 < Re < 10^6$
 - LE FORZE IN INERZIA SONO PREVOLENTI RISPETTO A QUELLI VISCOSI.

- Esamineremo le differenze fra flussi a bassi e alti valori del numero di Reynolds intorno a due tipi di corpi

- LASTRA PIANA disposta parallelamente alla corrente
- CORPO ROTTO rappresentato da un cilindro circolare.

A Re bassi, intorno alla lastra piana, gli effetti visosi sono predominanti rispetto a quelli di inerzia.

$$U - u < 0.01 U \rightarrow$$

→ la lastra piana influenza sull'aria molto meno del campo fluidodinamico, i.e. per riprodurre le zone del campo in cui $U - u < 10\% U$

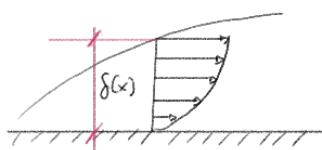
$$1 - \frac{u}{U} < 0.01$$

occorre spostarsi di molto dalla superficie della lastra piana.

Al crescere del numero di Reynolds gli effetti inerziali predominano sui plessi visosi; plessi visosi diventano trascurabili pur occupando tutta la zona piana vicina alla lastra e nella zona a valle di essa.

- Perché le resistenze del fluido non è nulla, deve essere verificata la continuità di schiera del fluido a parete

□ Vicino alla parete si forma una rettilineo rifrazione, detta strato limite, sotto il quale il fluido ha la stessa velocità del moto.



■ All'interno dello strato limite, il moto può avere le caratteristiche di turbolenta, e quindi del nro di Reynolds.

→ La presenza delle lastra viene ridotta in maniera irrelevanti al di fuori delle zone del B.L. nelle direzioni a monte, in alto e in basso. La presenza delle scia è invece completamente dovuta all'interazione viscosa fra il fluido e la lastra.

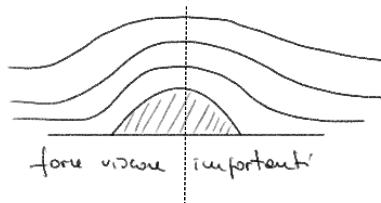
- Esiste quindi vicino a una piana pista di riferimento una rettilineo all'interno delle quali gli effetti visosi sono molto importanti, mentre all'esterno di esse i fluidi si comporta essenzialmente come se fossero visivi.

□ In modo analogo al caso delle lastra piana, anche il fluido interagisce con i corpi, come un cilindro circolare, vicino al versante del numero di Reynolds.

→ Più alto è il Reynolds, più facile è lo spostamento dello stesso.

\square $Re = 0.1$ gli effetti visosi risultano rifiutativi in vista delle forme del corpo

→ l'andamento delle linee di corrente è simmetrico anche rispetto all'asse verticale passante per il centro del cilindro, i.e. tra monte e valle.



\blacksquare Al crescere del Re , la rugosità e monte del corpo alle pelli multietà importanti gli effetti visosi si riduce mentre scempano le multietà tra monte e valle.

\blacksquare Ricordando ancora il numero di Reynolds, ovvero un altro fenomeno → separazione del fluido

→ infatti, al crescere del Reynolds, le forze di curva diventano sempre più importanti fino a impedire che le particelle segnano il percorso errabondo della parte posteriore del corpo. Si forma in tal modo una zona di separazione a valle del cilindro all'interno delle pelli una parte del fluido come da valle verso monte, i.e. in direzione opposta a quella delle correnti che muovono il corpo.

\blacksquare PROBLEMI DI PERTURBAZIONE SINGOLARE PER $Re \rightarrow +\infty$

Per i moti a potenziale, quando $Re = +\infty$, delle equazioni di N-S si parla delle equazioni di Euler, nelle quali non è più presente il termine

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 V$$

Le equazioni di Euler sono equazioni del primo ordine e, in questo caso, non possono soddisfare certamente le condizioni al contorno che riportano sul fluido reali (impenetrabilità e aderenza).

Nelle relazioni a potenziale, infatti, si trovano relazioni fra le pelli con le velocità tangenziali sul contorno del corpo buona se zero.

→ Nei fluidi reali non si ha moto relativo tra fluido e corpo in corrispondenza del contorno del punto. Infatti, anche se la viscosità è piccola, non è mai nulla, i.e. il termine

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 V$$

rimane finito almeno nella zona immediatamente adiacente al contorno del corpo. La zona in cui contiene gli effetti visosi è tanto più piccola quanto più grande è il Reynolds.

\blacksquare Per il teorema di Kelvin, attraverso uno dei due particelle di fluido che provengono dall'incontro a monte e a valle di moto irrotazionale, anche se esse vicino al corpo mantengono il loro moto irrotazionale.

Nel caso reale: per le particelle che passano nelle zone adiacenti al corpo, dove contiene gli effetti visosi, il moto diventa rotazionale.

→ La vorticità viene generata nello stesso luogo e successivamente trasportata a valle del corpo, nelle zone.

** Teorema di Kelvin

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

in un fluido non viscoso, barotropico (i.e. la densità dipende solo dalla pressione), con forze di massa conservative, le circolazioni celeste lungo le curve chiuse costanti - che si muove con il fluido - rimane costante nel tempo.

$$\Gamma = \oint \underline{v} \cdot \underline{t} ds = \int (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \cdot \underline{n} dS$$

↑ Stokes

Dal punto di vista matematico il problema che vi' appare nelle pelli un coefficiente piccolo moltiplicare un termine di ordine maggiore è detto PROBLEMA DI PERTURBAZIONE SINGOLARE.

Eg

$$\frac{df}{dy} + \varepsilon \frac{d^2 f}{dy^2} = 0 \quad \text{con } y \in [0, 1]$$

$$f(0) = 0 \quad e \quad f(1) = 2$$

e studiamo le soluzioni per $\varepsilon \rightarrow 0$.

P.B. per $\varepsilon = 0 \rightarrow \frac{df}{dy} = 0$ i.e. il termine di ordine maggiore scomparebbe, come prende delle N-S si ha che l'equazione di Euler

→ si ottiene allora le soluzioni ESTERNA

$$\frac{df}{dy} = 1 \rightarrow f = y + C \quad \text{e ponendo}$$

• le cui al contorno $f(0) = 0$ e $2 = 1 + C \rightarrow C = 1 \rightarrow f_e = y + 1$

P.B. le soluzioni esterne vien trovate con notte fe per l'altra condizione al contorno

• Se invece risolviamo la equazione $\frac{df}{dy} = 1$ con le c.c. al contorno $f(0) = 2$ si ha

$$f(0) = 2 \rightarrow 0 = 0 + C \rightarrow C = 0 \rightarrow \tilde{f}_e = y$$

che per con notte fe le cui $f(1) = 2$

Quindi $f_e = y + 1$ non le soluzioni esterne, ma solo a una certa distanza dal corpo, mentre il termine di secondo ordine non fissa più le soluzioni esterne al contorno laterale del corpo.

Per poter notte anche l'altra condizione, deve essere una rete vicino alla pelle, anche molto piccola, sulla pelle il termine di secondo ordine separato su o.d.f. prefissabile con l'elio. In pelle rispetto, le soluzioni esterne viene notte per notte le cui a pelle.

→ Consideriamo una rete di spazi e applicando le trasformazioni di

venire

$$Z = y/\varepsilon$$

→ se nello spazio la pelle

$$\frac{df}{dy} + \varepsilon \frac{d^2 f}{dy^2} = 1$$

$$\frac{df}{dz} \frac{dz}{dy} + \varepsilon \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dz} \right) = 1$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dy} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{df}{dz}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dy} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dz}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{df}{dz} + \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{df}{dz} \right) = 1$$

$$\boxed{\frac{df}{dz} + \frac{d^2 f}{dz^2} = \varepsilon}$$

$$\text{per } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{df}{dz} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 0 \quad (*)$$

Questa è l'ipote per le relazioni interne che deve soddisfare la condizione a parte

$$\text{Soluozione delle (*)} - \lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda+1)=0 \quad \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

$$f = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} = C_1 + C_2 e^{-z}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow 0 = C_1 + C_2 \rightarrow C_1 = -C_2 \rightarrow \boxed{f = C_1 (1 - e^{-z})}$$

$$\text{Ma } z = y/\varepsilon \rightarrow \boxed{f_i(y) = C_1 (1 - e^{-y/\varepsilon})} \quad \boxed{f_e = y+1}$$

La C_1 va calcolata in base alle condizioni di recordo:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_e = \lim_{y \rightarrow 1} f_i$$

i.e.

$$1 = C_1 (1 - e^{-1/\varepsilon}) \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{1 - e^{-1/\varepsilon}}}$$

La relazione esatta si ottiene ricavando le relazioni relative a quelle esterne e sostituendo il binomio comune (in questo caso 1), i.e.

$$f(y) = (y+1) + \left(\frac{1}{1 - e^{-1/\varepsilon}} (1 - e^{-y/\varepsilon}) \right) - 1$$

$$= y + \frac{1 - e^{-y/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}$$

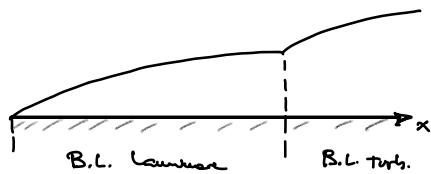
La relazione esterna vale in fine parte del dominio finché che in una norma puntuale di spazio $y = O(\varepsilon)$ dove il binomio y/ε non può essere trascurato e converte alla relazione di sostituzione delle condizioni al confine.

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 1 + \frac{1 - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} = 2$$

Si comprende che il termine con la derivata di ordine maggiore può essere trascurato ovunque tranne che in una zona di piccole spiree (dell'ordine di ε).

- La soluzione estesa è la soluzione dell'equazione di Euler
- Le soluzioni riferite si riferiscono alle equazioni dello stato turbolento.

STRATO LIMITE SU LASTRA PIANA



Per veloci sufficientemente alti del numero di Reynolds, le spiree delle lettre vengono ferite solo dal fluido che si trova nello stato turbolento. In quasi tutto il campo, quindi, la velocità del fluido coincide con quelle delle correnti interfacce.

Per una lama di larghezza infinita, che si estende da $x=0$ fino a ∞ , non c'è avvio come definire il numero di Reynolds, poiché non esiste una lunghezza caratteristica - la lama ha spiree nulli e larghezza infinita.
Per una lama di larghezza finita L si deve avere come lunghezza caratteristica

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}$$

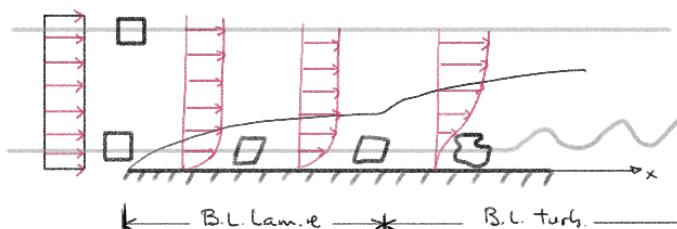
Per una lama di larghezza infinita si detta come lunghezza caratteristica la dimensione x , misurata lungo la lama a partire dal bordo d'attacco.

$$Re_x = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{U x}{\nu}$$

→ Indipendentemente dal valore delle viscosità o delle velocità del fluido, se la lama è sufficientemente lunga si ottiene un veloce del Reynolds che diventa uguale a uno stato turbolento in cui le spiree parallele sono carese e le correnti parallele sono turbolenti.

$$\left. \begin{array}{l} Re_x > 3 \cdot 10^6 \\ Re_x < 2 \cdot 10^5 \end{array} \right\}$$

Mentre le particelle che si trovano all'interno dello stato turbolento non hanno alcuna velocità di rotazione, esse ne fanno parte in rotazione delle correnti vicine non appena entrano nello stato turbolento.

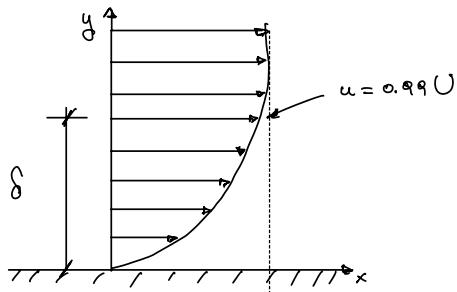


All'esterno dello stato turbolento si ha un moto irrotazionale caratterizzato dalle correnti di voragine, mentre all'interno si ha un moto rotazionale, ovvero con

vorante non nullo.

La superficie dello strato limite intorno al corpo, il cui spazio viene ridotto con δ , consente alle particelle di fluido di venire la propria velocità del velore nullo sulle pareti a quello delle correnti indisturbata U .

N.B. Non si ha esattamente il velore $u = U$ per $y = \delta$, perché la variazione è costante, ma si definisce SPESONE DELLO STRATO LIMITE δ quella distanza delle pareti alle quali il differe di una quantità prefissata da quella delle correnti indisturbata.



APPROXIMAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO NELLO STRATO LIMITE

→ È facile studiare il flusso intorno a un corpo considerando il fluido come viscoso all'interno dello strato limite e considerarlo non viscoso in tutto il resto del campo.

▀ La presenza dello strato limite permette di soddisfare le condizioni di aderenza fra le particelle del fluido e la superficie del corpo.

▀ All'esterno dello strato limite la variazione di velocità nelle direzioni normale alla corrente indisturbata diventa relativamente piccola e il fluido non comporta come se fosse non viscoso, pur essendo in realtà la viscosità non nulla.

→ Il campo irrotazionale che si ha al di fuori dello strato limite, dove il fluido può essere considerato ideale, viene indicato con il termine SOLUZIONE ESTERNA; lo strato limite è la soluzione INTERRA.

▀ Nello strato limite è possibile amplificare le equazioni del moto tenendo conto del ridotto spessore di tale zona. Non sono trascurabili le anomalie viscole per i gradienti di velocità molto elevati.

▀ Consideriamo un sistema di coordinate curvilinee in cui la direzione x sia tangente alla superficie e y sia a essa perpendicolare.

→ Consideriamo il moto stazionario di un fluido incompressibile; sia δ lo spessore dello strato limite.

Ipotesi di Prandtl

$\delta \ll L \rightarrow$ le variazioni delle grandezze fluido e normale in direzione normale allo strato limite sono maggiori di quelle in direzione tangenziale

$$\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Consideriamo ora due scale spaziali, δ e L , da scegliere come grandezze di riferimento per le velocità x e y .

Le N-S stabiliscono un bilancio tra le forze agenti su una partecipante:
la forza d'inerzia, la forza viscosa e quelle dovute alla gravità.

Per ottenere una stessa scala delle stesse grandezze si considerano l'ordine di grandezza dei termini presenti nella equazione del bilancio delle p.d.m.

$$\text{N.S.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \underline{\nabla}) V = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 V \\ \nabla \cdot \underline{V} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right.$$

\square Nello stesso bilancio i termini visivi sono dello stesso ordine di grandezza, pertanto, per avere una stima per δ .

Ricapitolando

Ipotesi per lo Stato Lineare

- 1 - moto bidimensionale
- 2 - flusso stazionario
- 3 - flusso irraggiante
- 4 - ipotesi di Prandtl ELL

Dalla continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{U}{L} \approx \frac{V}{\delta} \rightarrow V = U \frac{\delta}{L}$$

Dalle p.d.m. lungo x

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Nello B.L. i termini convettivi e pulilli visivi devono avere lo stesso ord.

In particolare

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{u^2}{L} \approx \frac{1}{\delta} \frac{U}{\delta^2} \rightarrow \delta^2 \approx \frac{\mu L}{\rho U}$$

$$\delta^2 \approx \frac{\mu L}{\rho U} = \frac{\mu}{\rho U L} L^2 \rightarrow \boxed{\delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}}}$$

N.B. $V \approx U \frac{8}{L} \approx U \frac{1}{x} \frac{L}{\sqrt{Re}} \approx \frac{U}{\sqrt{Re}}$

■ Possiamo avere, a questo punto, anche una stima dello sfogo di taglio:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \approx \mu \frac{U}{\delta} = \mu U \frac{\sqrt{Re}}{L}$$

ovvero

$$\tau_w = \frac{\mu U}{L} \sqrt{\frac{\rho U L}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu^2 U^2}{L^2} \frac{\rho U L}{\mu}} = \sqrt{\rho \mu \frac{U^3}{L}}$$

■ Per una stima delle resistenze

$$D = b \int_0^L \tau_w dx = b \int_0^L \sqrt{\rho \mu \frac{U^3}{x}} dx = b \sqrt{\rho \mu U^3} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2b \sqrt{\rho \mu U^3 L}$$

EQUAZIONI DI PRANDTL

Abbiamo, a questo punto, gli elementi per derivare le equazioni sulle ipotesi del stato limite.

Scaliamo le coordinate sulle direzioni x e y , rispettivamente come:

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{L} \sqrt{Re}; \quad u^* = \frac{u}{U}; \quad v^* = \frac{v}{V} = \frac{v}{U} \sqrt{Re}$$

Ricaviamo le equazioni di N-S

$$P^* = \frac{P}{\rho U^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

■ $\frac{U}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^* + \frac{U}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^* = 0 \rightarrow \frac{U}{L} \approx \frac{U}{\sqrt{Re}} \frac{\sqrt{Re}}{L} \rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$

nello stato limite

$$\frac{U^2}{L} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)^* + \frac{U^2}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\delta} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^* = - \frac{1}{\delta} \frac{U^2}{L} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^* + \frac{\nu U}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^* + \frac{\nu U}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^*$$

$$\text{R.O.B. } \frac{U^2}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\delta} = \frac{U^2}{\sqrt{Re}} \frac{1}{L} = \frac{U^2}{L}$$

$$\frac{\nu U}{\delta^2} = \frac{\nu U}{L^2} Re = \frac{\nu U}{L^2} \frac{U L}{\nu} = \frac{U^2}{L}$$

Moltiplichiamo tutto per U^2/L

$$\boxed{\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)^* + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^* = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^* + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^* + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^*}$$

Quale ep.u, a differenza delle sue "contropie" dimensionale, ha tutti i parametri dimensionati fra 0 e 1. \rightarrow i coefficienti che moltiplicano i vari termini ci danno una misura dell'importanza di un termine rispetto a un altro.

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U^2}{\sqrt{Re}} \frac{1}{L} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right)^* + \frac{U^2}{\sqrt{Re}} \frac{1}{L} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right)^* = - \frac{1}{\delta} \frac{U^2}{L} \sqrt{Re} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^* + \\ + \frac{\nu U}{L^2 \sqrt{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^* + \frac{\nu U \sqrt{Re}}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^*$$

moltiplichiamo tutto per $\frac{L \sqrt{Re}}{U^2}$ e ottengo:

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right)^* + \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right)^* = - Re \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^* + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^* + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^*$$

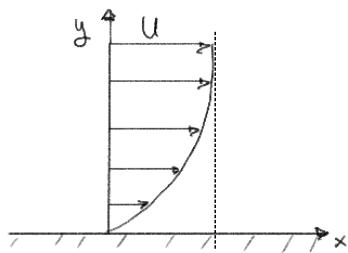
osservo

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^* \approx \frac{1}{Re} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{e quindi} \\ \text{la pressione nello stato} \\ \text{barico è impostata dal} \\ \text{campo esterno che può} \\ \text{essere determinato dalla} \\ \text{forza e potenziale.}$$

Le ep.u di Prandtl nello stato barico, quindi, forniscono:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

SPESSORE DELLO STRATO LIMITE



Possiamo definire il profilo di velocità all'interno dello strato limite
in rapporto automaticamente con quello delle velocità esterne, in base al principio fondamentale della meccanica classica.
→ la definizione del spessore dello strato limite è ovunque.

- Al lungo di un tratto x possiamo dire lo spessore dello strato limite $\delta(x)$ per la distanza y dalla parete in corrispondenza delle quali la velocità è uguale a quella delle U , i.e. $u = 0.99U$.

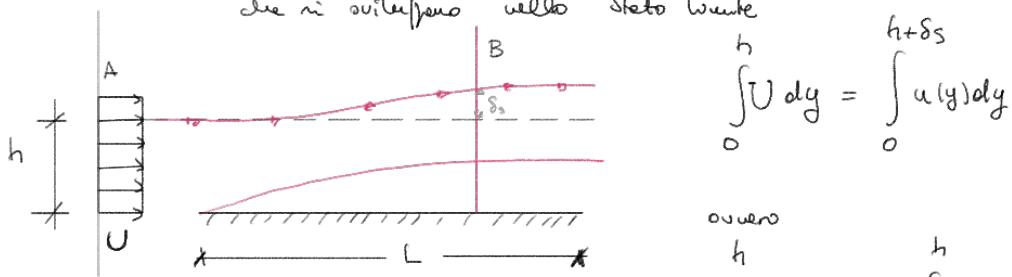
$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2x}{U}} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2}{Ux}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

Re_x : = Reynolds locale, basato su x

- Un'altra misura dello spessore dello strato limite, per il quale non vi è necessariamente di definirlo, è lo SPESORE DI SPOSTAMENTO, δ_s .

δ_s è la distanza da cui non esercitano più alcun effetto le linee di concurre del flusso potenziato a causa degli effetti visivi che si sviluppano nello strato limite.



$$\int_0^h U dy = \int_0^{h+\delta_s} u(y) dy$$

$$\text{ovvero} \quad \int_0^h U dy = \int_0^h u(y) dy + \int_h^{h+\delta_s} u(y) dy$$

$$\int_0^h U dy = \int_0^h u(y) dy + U(h + \delta_s - h) \rightarrow \int_0^h U dy = U \delta_s + \int_0^h u(y) dy$$

$$\delta_s = \int_0^h \left(1 - \frac{u(y)}{U} \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u(y)}{U} \right) dy$$

Allora se sostituiamo h con $+\infty$ perciò essendo h un valore arbitrario fuori dello strato limite, il suo valore non altera l'integrale perciò se $y > h$ è $u = U$ e quindi l'integrandi è nullo.

Il concetto di spessore di spatto è utilizzato nella progettazione di contatti, per esempio di motori, filiere del vento, ecc. ecc.

→ Si risolve il problema come se il flusso fosse non viscoso e poi allontanando le pareti attraverso le quali passa il flusso la sua quantità passa da δ_s in modo da avere la stessa portata del flusso reale.

RISISTENZA DELLA LATTA PIANA

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad \rightarrow \text{Eq. di Prandtl}$$

$$\rightarrow \text{Per una latta piana: } \frac{dp}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

I profili di velocità a diverse distanze da lungo la latta sono tutti simili fra loro e possono essere ridotti a un unico profilo che viene aperto in funzione delle coordinate.

$$y = \frac{y}{\sqrt{vx/U}} \quad \rightarrow \text{eq. di Blasius}$$

TRANSIZIONE DA LAMINARE A TURBOLENTO

I risultati, ad esempio, forniti dall'eq. di Blasius sono limitati allo Stato laminare intorno a una latta piana e formano risultati in accordo con profili spaziali fino a che lo Stato laminare non diventa turbolento.

Il punto di inizio del passaggio da BL (laminare a turbolento) è il numero di Reynolds locale basato sulla distanza dal bordo d'attacco della latta.

$$Re = \frac{\rho U x}{\mu}$$

→ Il valore del Reynolds relativo al punto di transizione dipende in modo complesso da molti parametri, come ad esempio la scissione delle superficie, la curvatura delle pareti e le distanze del moto all'esterno dello Stato laminare.

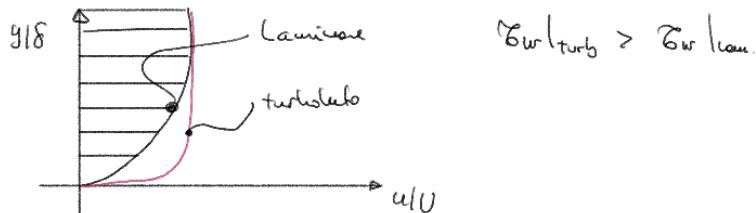
Per una latta piana con bordo d'attacco appuntito che viene incisa da una conica d'aria, la transizione avviene a una distanza da bordo d'attacco corrispondente a un Re_{cr} compreso tra 2×10^5 e 3×10^6 .

Lo strato limite turbolento - è una struttura molto complessa, caotica e irregolare. Si può pensare che il moto sia costituito dalle pareti di una serie di vortici di dimensioni e intensità (diametro e velocità) differenti. Tutte le grandezze fluidodinamiche (pressione, p.d.m ed energia) vengono trasportate a valle dalla conica esterna, come nel moto laminare.

- Nel moto turbolento, però, vi è anche una notevole convezione in direzione parallela alle latte se meno del trasporto causato dalle particelle di fluido avviate con i vortici.
- A differenza del caso laminare in cui il trasferimento diretto confronto delle scelte molecolari, i vortici di rotazione producevano un trasferimento convezionale.
- Tuttavia, nonostante il rilevante moto causale delle particelle in direzione normale alle latte, lo scambio di massa in direzione trasversale allo stato lento è molto più alto rispetto a quello nelle direzioni del moto.
- Invece, rispetto a causa del moto causale delle particelle, vi è un trasferimento convezionale delle componenti in direzione trasversale allo stato lento.
- Le particelle che si avvicinano alle latte perdono p.d.m. (le loro velocità si riducono); quelle che si allontanano dalle latte acquisiscono p.d.m. da parte del fluido (le loro velocità aumentano).
- La latte si comporta come un porto in p.d.m. avvolgendo in contrapposizione p.d.m. del fluido

■ La transizione da laminare a turbolento modifica in modo rilevante le forme del profilo di velocità nello stato lento.

I profili turbolenti sono più patti, hanno un fronte di velocità alle pietre più elevato e producono uno stato lento di spese effettive di p.d.m. maggiore



■ Separazione dello stato lento - Gli effetti visivi che si sviluppano nello stato lento producono una DISSIPAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA del fluido che viene vicino al corpo.

→ In alcuni casi le particelle del fluido in parte non possono più raggiungere ulteriormente il loro cammino e tendono ad allontanarsi dal corpo venendo trasportate dalla corrente principale e dando origine a una scia a valle del corpo.

→ Fenomeno della separazione dello stato lento e ciò corrisponde a una rilevante modifica delle forze aerodinamiche nel corpo

N.B. Nello stato lento le forze visive producono una dissipazione di energia riducendo la velocità nelle vicinanze del corpo. La pressione non varia e resta uguale a quella esterna → vicino al corpo, le forze avviate alla pressione può influenzare il moto in misura convezionale fino a ridurre la resistenza dello stato lento

L'effetto del moto sulle forze nel fluido

- Zone in cui la forza decelerante è favoribile al moto

$$\frac{dp}{dx} < 0 \rightarrow \text{freno} \rightarrow \text{forza favoribile}$$

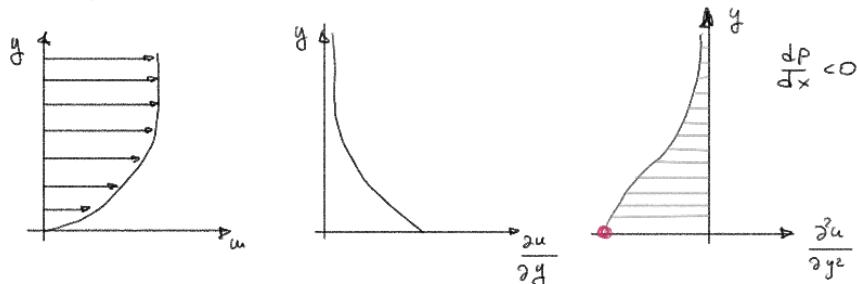
- Zone in cui la forza cresce alla dispendio del moto

$$\frac{dp}{dx} > 0 \rightarrow \text{freno} \rightarrow \text{forza avversa}$$

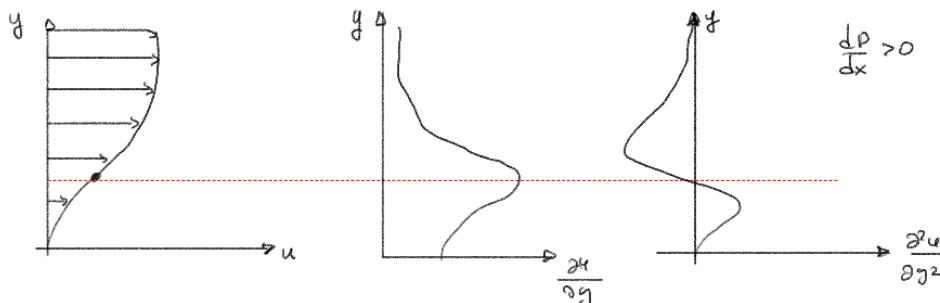
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \text{nelle penete, dove } u=v=0 \text{ è}$$

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{y=0}}$$

i.e. il segno del gradiente di pressione alla parete è lo stesso delle deviate messe



- Nelle zone in cui il gradiente di pressione è favoribile, il segno delle deviate messe a parete è positivo e quindi non si oppone.



- Nelle zone in cui il gradiente di pressione è avverso ($\frac{dp}{dx} > 0$) il segno delle deviate messe a parete è negativo e pertanto, ante l'arrivo del profilo concavo, si oppone.

Quindi, si avrà un punto nel campo in cui è:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \text{mano fra le deviate positive, i.e. un flesso per il profilo a velocità.}$$

→ Si ha, in particolare, una curvatura delle concavità del profilo delle u e in particolare una riduzione del valore delle deviate positive a parete, che può escludere oppure limitare nefastico.

Se le deviate delle u a parete è nefastico, la velocità del fluido

verso il corpo è diretta in verso opposto a quella delle correnti esterne e si ha una zona di ricchezza.

→ Il punto per cui

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

è il punto dove inizia le zone con le quali si ha un verso opposto a quello delle correnti esterne

