EQUAZIONE DI BERNOULLI

Partiamo dalle eq.ne di bilancio della q.d.m.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta} \rho \underline{v}\, d\vartheta + \int_S \underline{n}\cdot \rho \underline{v}\,\underline{v}\; dS = -\int_S p\,\underline{n}\, dS + \int_{\vartheta} \rho \underline{f}\, d\vartheta + \underline{F}_{visc}$$

in forma locale:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot \rho \underline{v}\,\underline{v} = -\underline{\nabla} p + \rho \underline{f} + F_{visc}$$

1- for an inviscid flow
2- with no body forces
3- for an incompressible flow

$$\longrightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho\, \underline{\nabla}\cdot \underline{v}\,\underline{v} = -\underline{\nabla} p$$

3- For steady flow $\longrightarrow \rho\, \underline{\nabla}\cdot \underline{v}\,\underline{v} = -\underline{\nabla} p$

N.B. $\underline{\nabla}\cdot \underline{v}\,\underline{v} = \underline{v}\cdot \underline{\nabla} v + \underline{v}\,(\underline{\nabla}\cdot \underline{v}) = \underline{v}\cdot \underline{\nabla}\,\underline{v}$

0 continuity equation

Eq.ne di Eulero

$$\boxed{\underline{v}\cdot \underline{\nabla} v = -\frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p}$$

ovvero:

$$u_i\, \underline{\sigma}_i \cdot \underline{\sigma}_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\, \underline{\sigma}_k = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_m}\, \underline{\sigma}_m$$

$$u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, \underline{\sigma}_k = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_m}\, \underline{\sigma}_m$$

moltiplicando scalarmente per $\underline{\sigma}_m$

$$u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

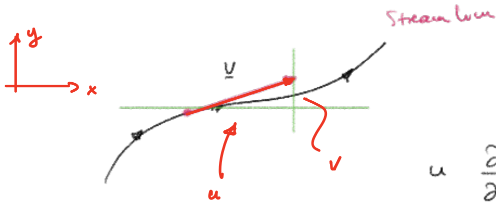
ovvero

$$\begin{cases} u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} & \longleftarrow (*) \\[2ex] u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

moltiplico la (*) per dx

$$u \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + v \frac{\partial u}{\partial y}\, dx = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\, dx$$

Osserviamo che



$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \longrightarrow v\,dx = u\,dy$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,u\,dy = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial x}\,dx$$

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial x}\,dx$$

ovvero

$$u\,du = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial x}\,dx \longrightarrow \frac{1}{2}\,d\,u^2 = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial x}\,dx$$

similmente

$$\frac{1}{2}\,d\,v^2 = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial y}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\,dw^2 = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P}{\partial z}\,dz$$

i.e.

$$\frac{1}{2}\,d\left(u^2+v^2+w^2\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right)$$

$$\frac{1}{2}\,d\,V^2 = -\frac{1}{\rho}\,dP \longrightarrow \boxed{dP = -\rho\,V\,dV} \quad \underline{\text{Eulero}}$$

Per $\rho = \text{cost} \longrightarrow \int_{P_1}^{P_2} dp = -\rho \int_{V_1}^{V_2} V\,dV \longrightarrow P_2 - P_1 = -\rho\,\frac{V^2}{2}\Big|_{V_1}^{V_2} \longrightarrow$

$$\longrightarrow P_2 - P_1 = -\frac{1}{2}\,\rho\,(V_2^2 - V_1^2) \longrightarrow \boxed{P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2}$$

$\longrightarrow$ Eq.ne di Bernoulli

$$(*) \quad \boxed{P + \frac{1}{2}\rho\,V^2 = \text{cost}} \quad \text{along a stream line}$$

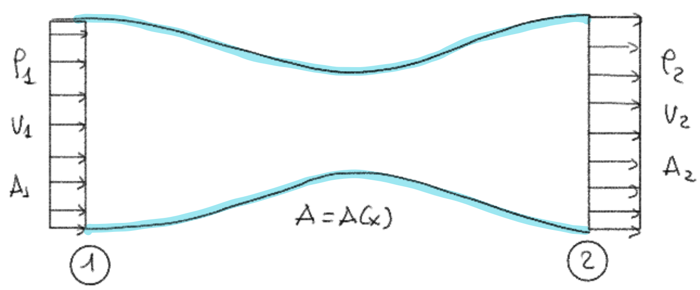
- Nella determinazione della (*) non è stata fatta alcuna ipotesi sulla rotazionalità o irrotazionalità del fluido
  $\longrightarrow$ Bernoulli vale su ciascuna streamline.
- Per un flusso rotazionale, il valore della costante cambia da streamline a streamline.

$\longrightarrow$ Se il flusso è irrotazionale, l'eq.ne di Bernoulli vale su due punti qualsiasi del campo – due punti non necessariamente appartenenti alla stessa streamline, i.e.

$\boxed{P + \frac{1}{2}\rho\,V^2 = \text{cost}}$ attraverso il flusso.

☒ Si noti che l'eq.ne di Bernoulli è stata derivata dall'eq.ne di bilancio della q.tà di moto; i.e. è una forma alternativa della seconda legge di Newton per un fluido non viscoso, incomprimibile senza forze di volume.
Si noti, però, che le dimensioni dei termini presenti nell'eq.ne sono quelle di un'energia per unità di volume ⟶ l'eq.ne di Bernoulli è anche una relazione per l'energia meccanica in un flusso incomprimibile: <u>il lavoro fatto su un fluido dalle forze di pressione è uguale alla variazione dell'energia cinetica del fluido.</u>

FLUIDO INCOMPRIMIBILE IN UN CONDOTTO ⟶ <u>Il tubo di Venturi</u>



Consideriamo il flusso attraverso un condotto convergente-divergente. Anche se il flusso attraverso il condotto è 3-D (e dunque andrebbe studiato considerando la formulazione tridimensionale delle eq.ni del bilancio) in molte applicazioni può essere utile considerare $A=A(x)$ moderatamente variabile e dunque supporre che le proprietà fluidodinamiche siano uniformi in ogni sezione trasversale del condotto stesso.

Moto quasi-unidimensionale ⟶ $A=A(x)$, $p=p(x)$ e $V=V(x)$

☒ Si consideri <u>l'eq.ne in forma integrale della continuità</u>

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}} + \int_S \underline{n}\cdot\rho\underline{v}\, dS = 0$$

flusso stazionario

$$\int_{A_1} \rho\underline{v}\cdot\underline{n}\, dS + \int_{A_2} \rho\underline{v}\cdot\underline{n}\, dS + \cancel{\int_{wall} \rho\underline{v}\cdot\underline{n}\, dS}$$

$\underline{n}\cdot\underline{v}=0$ sulla parete.

ovvero:

$$\int_{A_1} \rho\underline{v}\cdot\underline{n}\, dS + \int_{A_2} \rho\underline{v}\cdot\underline{n}\, dS = 0 \longrightarrow -\rho_1 u_1 A_1 + \rho_2 u_2 A_2 = 0 \longrightarrow$$

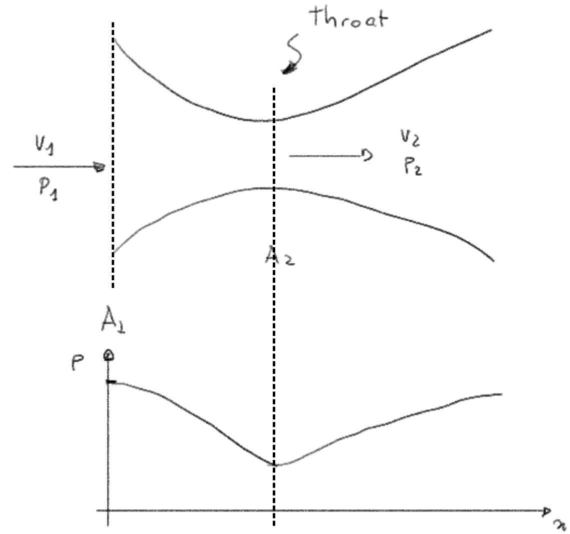
$$\longrightarrow \boxed{\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2}$$

eq.ne della continuità quasi-monodimensionale valida sia per flussi comprimibili che incomprimibili

Se $\rho=\text{cost}$ ⟶ flusso incomprimibile ⟶ $\rho_1=\rho_2$ ⟶ $\boxed{u_1 A_1 = u_2 A_2}$

Questa eq.ne ci consente di affermare che in corrispondenza di una diminuzione della pressione si ha un aumento di velocità e viceversa.

Per Bernoulli $\longrightarrow$ $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = cost$ $\longrightarrow$ se la velocità aumenta, diminuisce la pressione e viceversa.



Si considera un flusso convergente-divergente in un condotto $\longrightarrow$ il flusso entra nel condotto con velocità V_1 e pressione P_1. La velocità aumenta $\longrightarrow$ la pressione diminuisce fino a un valore minimo in corrispondenza della gola

$\longrightarrow$ IL CONDOTTO INDICATO È NOTO COME TUBO DI VENTURI

* In un'applicazione aeronautica, il tubo di VENTURI può essere usato per misurare la velocità del fluido

Si considera un tubo di Venturi con un dato rapporto A_1/A_2. Si assume che tale tubo sia inserito in una corrente fluida con V_1 incognita. Vogliamo usare il tubo di Venturi per misurare questa velocità

$\longrightarrow$ Attraverso un manometro differenziale è possibile misurare la differenza $P_1 - P_2$

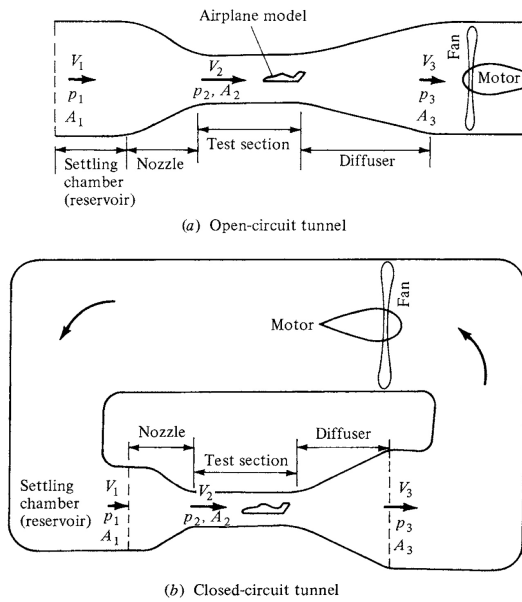
- $P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \longrightarrow V_1^2 = \frac{2}{\rho}(P_2 - P_1) + V_2^2$
- $V_1 A_1 = V_2 A_2 \longrightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$

$$\longrightarrow V_1^2 = \frac{2}{\rho}(P_2 - P_1) + \left(\frac{A_1}{A_2}\right) V_1^2 \longrightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}}}$$

☑ Un'altra applicazione dei flussi incompressibili in un condotto è quella delle GALLERIE DEL VENTO SUBSONICHE $\longrightarrow$ essenzialmente si tratta di un grosso tubo di Venturi dove il fluido viene spinto da un'elica collegata a un motore. La galleria del vento può essere a circuito aperto o chiuso

- dove l'aria è prelevata direttamente dall'atmosfera ed espulsa dalla ventola; successivamente il fluido viene immesso nuovamente in atmosfera

- in tal caso l'aria viene nuovamente immessa nel circuito a formare un loop



(*a*) Open-circuit tunnel

(*b*) Closed-circuit tunnel

Figure 3.8 (*a*) Open-circuit tunnel. (*b*) Closed-circuit tunnel.

$$A_1 U_1 = A_2 U_2 \longrightarrow V_1 = V_2\, A_2/A_1$$

$$A_2 V_2 = A_3 V_3 \longrightarrow V_3 = V_2 \frac{A_2}{A_3}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2$$

$$\Downarrow$$

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho}(P_1 - P_2) + V_1^2$$

$$U_2^2 = \frac{2}{\rho}(P_1 - P_2) + V_2^2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

$$U_2^2\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}$$

$$\boxed{U_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}}$$

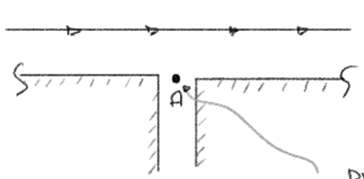
$\frac{A_2}{A_1}$ è un parametro fisso dato dalla geometria della galleria.

⟶ V_2 è funzione della differenza di pressione $P_1 - P_2$

TUBO DI PITOT

Il tubo di Pitot è un sistema il cui compito è quello di rilevare la pressione atmosferica ⟶ pressione statica e la pressione totale ⟶ somma della pressione statica, della pressione dinamica, e di eventuali sovrappressioni dovute agli effetti di compressibilità.

- <u>Pressione statica</u> è una misura del movimento random delle particelle che compongono il fluido; è la pressione che un osservatore solidale alle particelle percepisce quando si sposta alla stessa velocità della particella fluida.



pressione statica misurata in un orifizio praticato nella parete.

- <u>Pressione di ristagno</u> o pressione totale è quella che si realizza in corrispondenza di un punto dove, istantaneamente, la linea di corrente è decelerata fino a $u = 0$.

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = P_0$$

▨ Pressione di ristagno (o totale), denotata con P_0, è la somma della pressione dinamica ($\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$) e della pressione statica (P_∞) della corrente.

Il tubo di Pitot è costituito da una camera cilindrica con asse allineato all'asse del velivolo, aperta frontalmente nella direzione del moto, di solito circondata a una camera anulare esterna comunicante con l'ambiente attraverso forellini disposti lungo la generatrice del cilindro, in modo da non ricevere alcuna componente di velocità

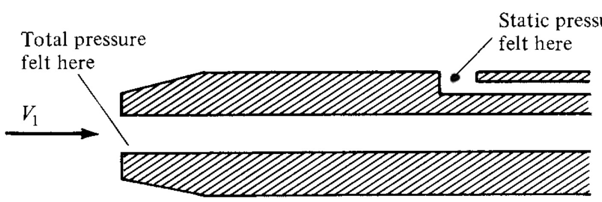


Figure 3.12 Pitot-static probe.

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{P_t - P_\infty}$$

$P :=$ pressione statica misurata

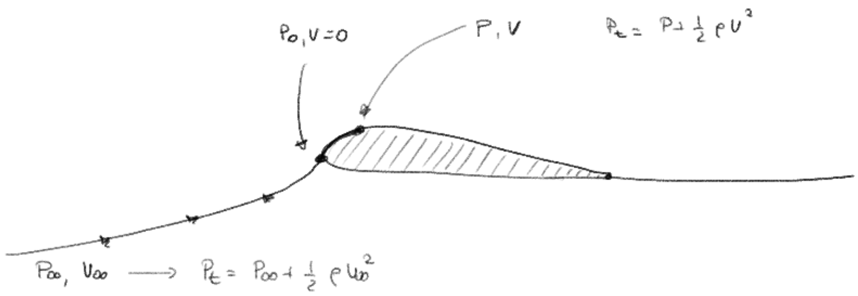
$P_\infty :=$ pressione statica della corrente

$P_t = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \rightsquigarrow$ pressione totale

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{P_t - P_\infty} = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}\rho}\,(V_\infty^2 - V^2)}{\cancel{\tfrac{1}{2}\rho}\,V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2$$

$$P_t = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \longrightarrow P_t - P_\infty = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \longrightarrow P - P_\infty = \frac{1}{2}\rho\,(V_\infty^2 - V^2)$$



N.B. C_p subisce variazioni intorno al velivolo $\longrightarrow$ le posizioni preferite per posizionare il pitot sono quelle per cui $C_p \simeq 0$, i.e. $p \simeq P_\infty$

$\longrightarrow$ tratto anteriore della fusoliera

$\longrightarrow$ bordo d'attacco dell'ala

$\longrightarrow$ per i velivoli supersonici: montaggio a sbalzo a monte del muso anteriore di fusoliera

▨ Il tubo di Pitot è di solito provvisto di svariati accorgimenti che consentono di evitare possibili inconvenienti durante le fasi di volo.

☒ Alcune bobine di riscaldamento disposte all'interno del Pitot impediscono la formazione del ghiaccio; la distribuzione del calore fornito in uno o più punti del tubo è assicurata dal materiale impiegato che permette una buona conducibilità termica (il materiale usato, resistente, è RAME ricoperto galvanicamente da uno strato di CROMO per evitare ossidazioni).

☒ Il Pitot è provvisto inoltre di un apposito circuito di drenaggio per l'eliminazione automatica dell'acqua piovana o di condensa.

☒ L'ubicazione dei forellini per il prelievo della pressione statica con il tubo di Pitot dev'essere tale da rilevare nel punto la pressione statica della corrente indisturbata

→ tale distanza è funzione della velocità della corrente; tale parametro varia da velivolo a velivolo e, per lo stesso velivolo, della configurazione di volo. Essendo impensabile disporre di un Pitot per ogni condizione di volo o per ogni tipo di velivolo, si ricorre, per il prelievo della p statica, a una serie di fori allineati disposti sulla superficie esterna dello strumento → si ottiene una pressione che è la media dei valori captati dai vari forellini

tubi di Pitot statici con compensazione aerodinamica ←

☒ Per i velivoli subsonici si prevede l'uso di piccole aperture praticate nella superficie esterna degli aeroplani, denominate PRESE STATICHE

→ il loro posizionamento è dettato dalla necessità di riprodurre la pressione statica della corrente indisturbata.

→ il prelievo è effettuato da due serie di fori disposti in posizione simmetrica rispetto alla mezzeria della fusoliera e tra loro comunicanti

☒ Molti aerei, inoltre, dispongono di una presa statica supplementare (o di emergenza) da utilizzare quando le principali vanno in avaria per la formazione di ghiaccio.

→ Questa presa va disposta in una zona dove NON si forma il ghiaccio → condizione realizzata a discapito della precisione

→ sono necessarie tabelle e/o grafici per correggere le indicazioni strumentali

N.B. $$C_p = \frac{P - P_\infty}{P_t - P_\infty} = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = \frac{P - P_\infty}{q_\infty} \longrightarrow \boxed{P = P_\infty + C_p P_\infty}$$

Chiaramente il valore del C_p ci dice quanto P differisce da P_∞ in multipli della pressione dinamica. i.e. se $C_p = 1$ ($V=0$, i.e. nel p.to di ristagno), allora $P = P_\infty + q_\infty$, ovvero "la pressione locale è una volta più grande della pressione dinamica della corrente". Se $C_p = -3$ punto superficie che $p = p_\infty - 3 q_\infty$, i.e. la pressione locale è tre volte la pressione dinamica al di sotto della pressione statica della corrente.

CONDIZIONE SULLA VELOCITÀ PER FLUSSI INCOMPRIMIBILI

- Conservazione della massa in forma integrale

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathcal{V} + \int_S \underline{n} \cdot \rho \underline{v}\, dS = 0$$

in forma locale è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v} = 0$$

Per un flusso incomprimibile e stazionario $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \text{ e } \rho = \text{cost} \right)$ allora

$$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0} \longrightarrow \text{principio di conservazione della massa.}$$

- Poiché $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \phi = 0$ per un flusso irrotazionale è

$$\underline{v} = \underline{\nabla} \phi$$

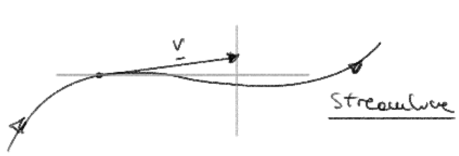
$\phi :=$ potenziale di velocità

Quindi, per un flusso che sia, contemporaneamente, incomprimibile e irrotazionale è

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \phi) = \boxed{\nabla^2 \phi = 0} \longrightarrow \text{Eq.ne di Laplace}$$

- Le soluzioni dell'eq.ne di Laplace si dicono FUNZIONI ARMONICHE

STREAMLINE e STREAMFUNCTION

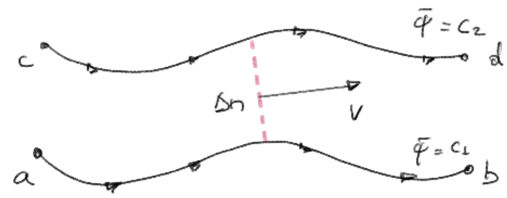


$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \text{con } u \text{ e } v \text{ f.ni note.}$$

Integrando $\longrightarrow f(x,y) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ eq.ne della linea di corrente (streamline). Se con $\bar{\Psi}(x,y)$ indichiamo la $f(x,y)$ – e chiamiamo questa f.ne di corrente – diciamo che una STREAMLINE non è che una f.ne di corrente $\bar{\Psi}$ per la quale sia fissata la costante c, i.e.

C'è una certa arbitrarietà nella definizione delle streamline e nella f.ne di corrente. L'arbitrarietà dipende, evidentemente, dalla scelta della costante c. Proviamo a definire la f.ne di corrente più precisamente <u>al fine di ridurre parte arbitrarietà</u>



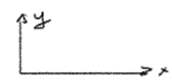
$\Delta\bar\psi$ = flusso di massa tra le due linee di corrente.

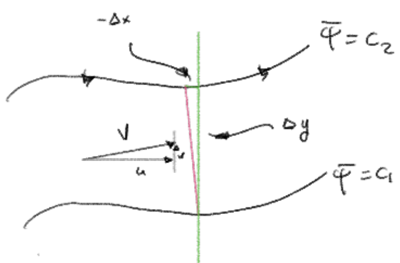
$$\Delta\bar\psi = c_2 - c_1 = \rho V \Delta n \quad (1)$$

ovvero

$$\frac{\Delta\bar\psi}{\Delta n} = \rho V \xrightarrow[\Delta n \to 0]{} \frac{\partial\bar\psi}{\partial n} = \rho V$$

i.e. se conosciamo $\bar\psi$ possiamo, possiamo ottenere il prodotto ρV differenziando ψ in direzione normale a $\underline{V}$





flusso di massa $= \Delta\bar\psi = \rho V \Delta n$

$= \rho u \Delta y + \rho v (-\Delta x)$

ovvero

$$d\bar\psi = \rho u\, dy - \rho v\, dx$$

$\bar\psi(x,y)$ è $d\bar\psi = \dfrac{\partial\bar\psi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial\bar\psi}{\partial y} dy$ ovvero

$$\boxed{\frac{\partial\bar\psi}{\partial y} = \rho u \qquad e \qquad \frac{\partial\bar\psi}{\partial x} = -\rho v}$$

$\bar\psi$ così definita è valida sia per i flussi comprimibili che per quelli incomprimibili.

Per $\rho = \text{cost}$ è $\dfrac{\partial(\bar\psi/\rho)}{\partial y} = u$ e $\dfrac{\partial(\bar\psi/\rho)}{\partial x} = -v$ ovvero

$$\boxed{u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad e \qquad u = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

$$\nabla\cdot\underline{V} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0$$

$\longrightarrow$ per il teorema di Schwartz, la <u>funzione di corrente soddisfa automaticamente l'equazione di continuità</u>

$$\nabla\times\underline{V} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \underline{0}$$

ma $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ e $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ ovvero $-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \nabla^2\psi = 0$

$\longrightarrow$ anche la f.ne di corrente soddisfa l'eq.ne di Laplace, così come la f.ne potenziale di velocità

- Per ogni flusso incompressibile e irrotazionale è possibile definire il potenziale di velocità e la f.ne di corrente entrambe che soddisfano l'eq.ne di Laplace.
- Al contrario, ogni soluzione dell'eq.ne di Laplace rappresenta il potenziale di velocità o la f.ne di corrente per un flusso irrotazionale e incompressibile.

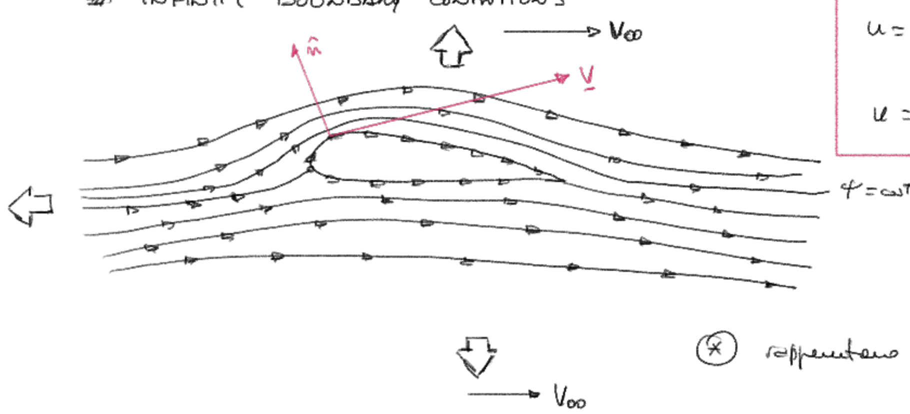
Si noti che l'eq.ne di Laplace è <u>un'equazione lineare differenziale del second'ordine alle derivate parziali</u>.

> $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ sono n soluzioni dell'eq.ne
>
> $$\nabla^2\phi = 0 \qquad (*)$$
>
> allora la loro somma
>
> $$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$$
>
> è ancora soluzione della (*).

$\longrightarrow$ Flussi incompressibili e irrotazionali comunque complicati, possono essere sintetizzati sovrapponendo un numero finito di soluzioni elementari irrotazionali e incompressibili.

INFINITE BOUNDARY CONDITIONS

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = V_\infty \\ v &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \end{aligned}} \quad (*)$$



(*) rappresentano

WALL BOUNDARY CONDITIONS

Sulla superficie solida è $\underline{V}\cdot\underline{n} = 0$, i.e. $(\nabla\phi)\cdot\underline{n} = 0$ ovvero $\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0}$

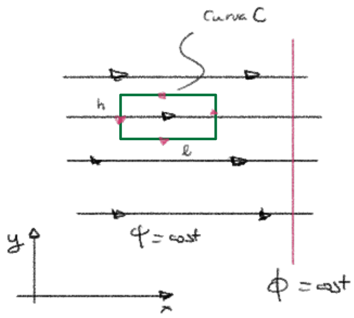
Facendo riferimento alla f.ne di corrente è:

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0}$$

dove s è l'ascissa curvilinea lungo la superficie del corpo.

FLUSSO UNIFORME

– Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ orientato nella direzione x



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = V_\infty \quad e \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v = 0$$

$$\downarrow$$

$\phi = V_\infty x + f(y)$ dove $f(y)$ è una f.ne della sola y

$\phi = cost + g(x)$ dove $g(x)$ è una f.ne della sola x

i.e. $$\boxed{\phi = V_\infty x + cost}$$

$g(x) = V_\infty x$ e $f(y) = cost$ ovvero, scegliendo $cost = 0$ è:

$$\boxed{\phi = V_\infty x}$$

⟶ Potenziale di velocità per una corrente uniforme con velocità V_∞ orientata nella direzione delle x positive.

▨ In termini di FUNZIONE DI CORRENTE è:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_\infty \quad e \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

ovvero

$$\psi = V_\infty y + f(x) \quad e \quad \psi = cost + g(y)$$

da cui

$$f(x) = cost \quad e \quad g(y) = V_\infty y$$

i.e.

$$\boxed{\psi = V_\infty y}$$

avendo scelto la costante pari a zero.

▨ Consideriamo la circolazione in un flusso uniforme.

$$\Gamma = \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

Facendo riferimento alla curva C indicata in figura è:

$$\Gamma = \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{s} = V_\infty l - V_\infty l = 0 \quad , \text{ i.e. } \Gamma = 0$$

L'eq.ne ottenuta è vera per ogni curva chiusa C in un flusso uniforme

$$\Gamma = \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{s} = \underline{V_\infty} \oint_C d\underline{s} = \underline{V_\infty} \cdot 0 = 0$$

l'integrale di linea di $d\underline{s}$ intorno a una curva chiusa è uguale a zero.

$\longrightarrow$ CIRCOLAZIONE INTORNO OGNI CURVA CHIUSA IN UN FLUSSO UNIFORME È NULLA.

Questo risultato è coerente con la rel.ne:

$$\Gamma = \oint_C \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds = \int_S \underline{\nabla} \times \underline{v} \, dS = 0$$

$\longrightarrow$ avendo affermato precedentemente che il campo è irrotazionale

* * *

Tipo di flusso	Velocità	ϕ	ψ
flusso uniforme in direzione x	$u = V_\infty$	$V_\infty x$	$V_\infty y$
Sorgente	$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}$	$\frac{\Lambda}{2\pi} \ln r$	$\frac{\Lambda}{2\pi} \theta$
Vortice	$V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$
Doppietta	$V_r = -\frac{k}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^2}$, $V_\theta = -\frac{k}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^2}$	$\frac{k}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r}$	$-\frac{k}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r}$

$\square$ $\boxed{\underline{V} = \underline{\nabla} \phi}$ e $\boxed{-k \wedge \underline{\nabla} \psi = \underline{V}}$

$\underline{V} = (u, 0) \longrightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ovvero

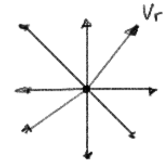
$$\left.\begin{aligned} V_\infty &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \longrightarrow \phi = V_\infty x + f(y) \\ 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \longrightarrow \phi = \text{cost} + g(x) \end{aligned}\right\} \boxed{\phi = V_\infty x}$$

$$\underline{V} = -\underline{k} \wedge \underline{\nabla} \psi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{i} - \hat{j} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = V_\infty \hat{i}$$

ovvero:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_\infty \longrightarrow \psi = V_\infty y + f(x)$$
$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \longrightarrow \psi = \text{cost} + g(y)$$
$$\boxed{\psi = V_\infty y}$$

Sorgente



$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}$$ Λ è l'intensità della sorgente.

$$\underline{V} = \underline{\nabla}\phi \longrightarrow V_r \hat{r} + V_\theta \hat{\theta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} \,,\, \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{\theta} \right)$$ ovvero:

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\Lambda}{2\pi r} \longrightarrow \phi = \frac{\Lambda}{2\pi}\ln r + f(\theta)$$
$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \phi = \text{cost} + g(r)$$
$$\boxed{\phi = \frac{\Lambda}{2\pi}\ln r}$$

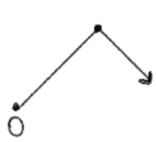
$$\underline{V} = -\underline{k} \wedge \underline{\nabla}\psi \longrightarrow V_\infty \hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\hat{r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\hat{\theta} \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \longrightarrow \psi = r V_\infty \theta + g(r)$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \longrightarrow \psi = \text{cost} + f(\theta)$$

ovvero

$$\psi = r V_\infty \theta = r \frac{\Lambda}{2\pi r}\theta = \frac{\Lambda}{2\pi}\theta$$

Vortice



$$V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}$$

$$\underline{V} = \underline{\nabla}\phi \longrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\partial \phi}{\partial r} \longrightarrow \phi = \text{cost} + f(\theta) \\ V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \longrightarrow -\frac{\Gamma}{2\pi}\cancel{\frac{1}{r}} = \cancel{\frac{1}{r}}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \longrightarrow \phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta + g(r) \end{cases}$$

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\underline{V} = -\underline{k} \wedge \underline{\nabla} \psi \longrightarrow V_\theta \hat{\theta} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} & 0 \end{vmatrix} = \hat{r}\,\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \hat{\theta}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

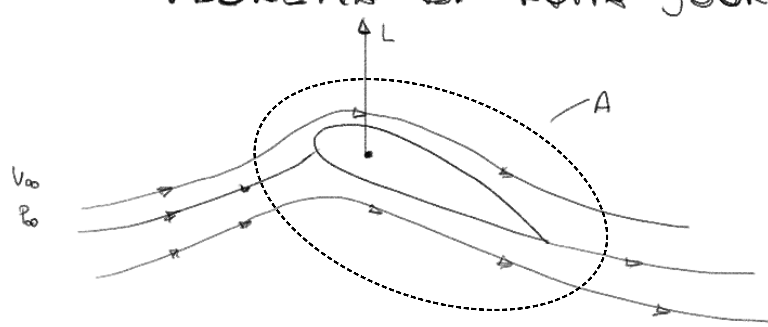
ovvero

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \longrightarrow \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \longrightarrow \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + f(\theta) = \psi$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \longrightarrow \psi = \text{cost} + g(r)$$

$$\longrightarrow \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

TEOREMA DI KUTTA-JOUKOWSKI



Sia A una curva che racchiude un profilo alare. Se il profilo sta producendo portanza, il campo di velocità intorno al profilo è tale che

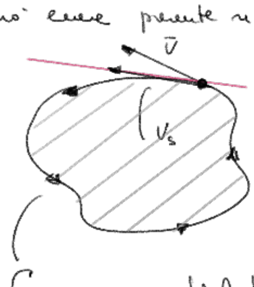
$$\Gamma = \oint_A \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

è finito. Per il teorema di Kutta-Joukowsky, infatti,

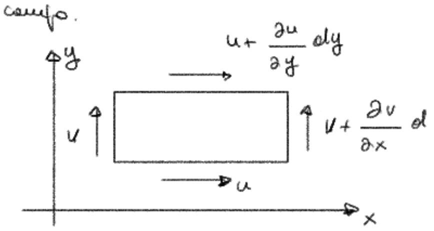
$$\boxed{L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma}$$

• dove L' è la portanza per unità di lunghezza.

La circolazione attorno a un corpo in moto relativo rispetto a un fluido non si genera solo se il corpo è rotante. Secondo il teorema di Stokes la circolazione può essere presente se c'è rotazionalità del campo.



$$\Gamma = \oint_C \underline{v} \cdot \underline{t}\, ds$$



Valutiamo la circolazione attorno al circuito elementare associato a un punto P di un campo fluidodinamico.

$$d\Gamma = u\,dx + \left[v + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right]dy - \left[u + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right]dx - v\,dy$$

$$= \cancel{u\,dx} + \cancel{v\,dy} + \frac{\partial v}{\partial x}dx\,dy - \cancel{u\,dx} - \frac{\partial u}{\partial y}dy\,dx - \cancel{v\,dy}$$

$$= \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]dx\,dy = \omega_z\,dx\,dy$$

i.e. la circolazione intorno a un circuito elementare può essere definita come prodotto della vorticità per l'area racchiusa in detto circuito.

Estendendo questo risultato a un'area finita A racchiusa da una curva chiusa C, avremo:

$$\boxed{\oint_C \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds = \int_A (\underline{\nabla}\times\underline{v})\cdot\underline{n}\,dA}$$

Teorema di Stokes — Il flusso del vettore rotore attraverso una superficie chiusa da una curva C è uguale alla circolazione della velocità lungo la curva chiusa C stessa.

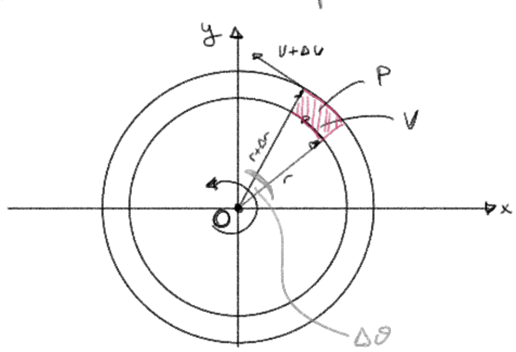
Vortici (o linee vorticose) sono le linee di inviluppo dei vettori rotori, i.e. le linee luogo dei punti del campo le cui tangenti, in ogni punto, rappresentano la direzione e il verso dei vettori rotori delle diverse particelle fluide in un dato istante di tempo.

→ Le linee vorticose sono chiamate anche FILAMENTI VORTICOSI

→ La superficie vorticosa è quella superficie tangente, in ogni punto, ai vettori rotori.

Nei fluidi reali viscosi, la rotazionalità delle particelle varia con continuità da punto a punto e non esistono, quindi, discontinuità del vettore rotore.
Nei fluidi ideali, invece, si possono ammettere discontinuità del vettore rotore.

→ Studiamo il campo associato a un vortice isolato. Supponiamo che il vortice sia rettilineo e infinito, con l'asse – che coincide con la direzione del vettore rotore – perpendicolare al piano x,y e passante per O.



Se V è la velocità al raggio r e V+ΔV la velocità al raggio r+Δr, la circolazione intorno all'elemento fluido P che percorre la traiettoria circolare è pari a

$$(V+\Delta V)(r+\Delta r)\Delta\theta - Vr\Delta\theta =$$

$$= \cancel{Vr\Delta\theta} + V\Delta r\Delta\theta + r\Delta V\Delta\theta + \cancelto{\cong 0}{\Delta V\Delta r}\Delta\theta - \cancel{Vr\Delta\theta} =$$

$$= \Delta\theta\,(V\Delta r + r\Delta V)$$

La vorticità associata all'elemento, si calcola come:

$$\boxed{\text{Circolazione} = \text{vorticità} \times \text{area}} \longrightarrow \text{vorticità} = \frac{\text{Circolazione}}{\text{area}} \quad \text{ovvero:}$$

$$\text{vorticità} = \frac{\cancel{\Delta\theta}(V\Delta r + r\Delta V)}{r\cancel{\Delta\theta}\,\Delta r} = \frac{V}{r} + \frac{\Delta V}{\Delta r}$$

ovvero

$$\boxed{\omega_z = \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r}}$$

La velocità V è costante in ogni linea di corrente, i.e. varia solo con r e non con θ. Quindi

$$\omega_z = \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr}$$

trattandosi di vortice isolato è lecito considerare il flusso ovunque irrotazionale tranne che sull'asse del vortice, i.e.

$$\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} = 0 \longrightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{V}{r}$$

$$\longrightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dr}{r} \longrightarrow \ln V + \ln r = \text{cost} \quad \text{ovvero}$$

$$\ln(Vr) = \text{cost} \longrightarrow Vr = \text{cost}$$

L'intensità del vortice, per il teorema di Stockes, considerando V costante lungo una qualsiasi curva contenente O, è:

$$\oint_C \underline{V}\cdot\underline{t}\,dC = \int_S \underline{n}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{V})\,dS \longrightarrow \Gamma = \oint_C \underline{V}\cdot\underline{t}\,dC$$

$$\longrightarrow \Gamma = 2\pi r V \longrightarrow V = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

i.e. in un campo creato da un vortice, la velocità di ogni particella fluida varia con legge direttamente proporzionale all'intensità del vortice e inversamente proporzionale alla distanza r dall'asse del vortice

- 1° teorema di Helmotz o Principio di conservazione dei Vortici

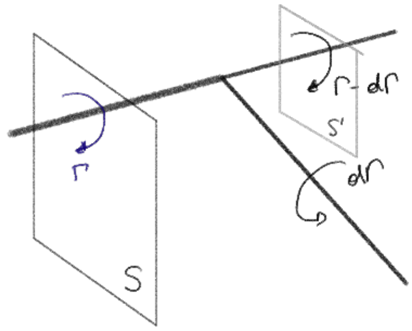
  L'intensità di un tubo vorticoso (o filetto vorticoso) è la stessa in tutte le sue sezioni trasversali.

  $\longrightarrow$ Ne consegue che in un fluido ideale un vortice NON può estinguersi; o deve richiudersi su se stesso (anello di fumo) o deve terminare ai limiti

- 2° teorema di Helmotz $\longrightarrow$ La circolazione intorno a un tubo vorticoso (o filetto vorticoso) è costante lungo il suo asse.

→ Una notevole conseguenza del 2° teorema di Helmholtz è la seguente: il tubo vorticoso non può cambiare in intensità in due sezioni S e S' a meno che uno o più tubi vorticosi di intensità pari alla variazione di circolazione si congiungano o lascino il tubo stesso.

→ risultato sarà ripreso nella teoria alare di Prandtl



3° Teorema di Helmholtz – che è stato applicato ed esteso da Kelvin

La circolazione lungo un circuito chiuso che passi per le stesse particelle non varia nel tempo.

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=0 \qquad (*)$$

La (*) è valida per i fluidi non viscosi. L'esistenza di forze dissipative impedisce la costanza nel tempo di Γ