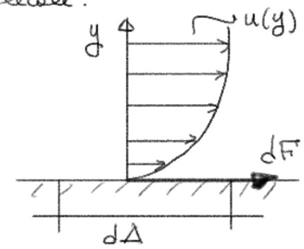
AERODINAMICA

<u>Aerodinamica</u> è il ramo della Meccanica dei fluidi che si occupa della interazione tra corrente fluida e corpi in essa immersi.

- **Fluido** ⟶ non è un concetto ben definito in quanto <u>si basa più sulla risposta del materiale alle sollecitazioni</u> esterne piuttosto che sulla struttura della materia.
  <u>Un fluido infatti è un materiale in grado di deformarsi indefinitivamente quando sottoposto a una sollecitazione tangenziale esterna e al cessare di tale azione NON recupera la sua forma iniziale</u>

- <u>Ipotesi del continuo</u> ⟶ il fluido è un mezzo continuo, i.e. si assume che una qualsiasi parte di esso, comunque piccola, contenga un numero elevato di molecole.

- Un <u>fluido</u> è <u>detto Newtoniano</u> quando



$$\tau = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

ovvero, quando la forza di attrito a parete è

$$dF = \tau\, dA = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} dA$$

μ := viscosità dinamica misurata in $kg/(m\,s)$

$\nu := \mu/\rho$ ⟶ viscosità cinematica, misura in m^2/s

Per l'aria, in c.s. è $\nu \simeq 10^{-5}\, m^2/s$

LEGGE DI SUTHERLAND

- la viscosità è una <u>f.ne di stato</u> (dipende solo dal p.to) ed è <u>f.ne della temperatura e della pressione</u>
- μ aumenta sempre con la pressione
- μ con la temperatura ⟶ LIQUIDI: diminuisce al crescere di T; GAS: aumenta al crescere di T

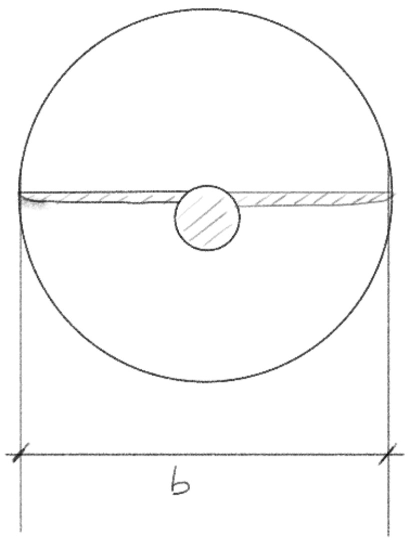
$$\boxed{\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + 110}{T + 110}}$$

$T_0 = 288K$

$\mu_0 = 1.79 \cdot 10^{-5}\, kg/ms$

GENESI DELLA PORTANZA E RESISTENZA
TEORIA GLOBALE

<u>Principio di azione-reazione</u> $\longrightarrow$ La forza aerodinamica agente sull'aeromobile è pari all'azione dell'aeromobile sulla portata in che interferisce con esso:

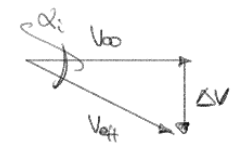


$$F' = \dot m \, \Delta V$$

$$\dot m = \rho_\infty V_\infty \frac{\pi b^2}{4} e$$

b := apertura alare

$e \simeq 1$



$$L = \dot m \, \Delta V \longrightarrow C_L S \tfrac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = \dot m \, \Delta V$$

$$\frac{\Delta V}{V_\infty} = \frac{C_L S \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty}{\dot m} =$$

$$= \frac{C_L S \, {}^1\!/_2 \, \cancel{\rho_\infty} \cancel{V_\infty}}{\cancel{\rho_\infty} \cancel{V_\infty} \frac{\pi b^2}{4} e} = \frac{2 C_L}{\pi \frac{b^2}{S} e}$$

ovvero:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V_\infty} = \frac{2 C_L}{\pi AR \, e}}$$

dove $AR = b^2/S$ è l'allung.to alare

Potenza necessaria per accelerare la portata d'aria $\dot m$ è:

$$\Delta \dot E = \frac{1}{2} \dot m \left[V_\infty^2 + \Delta V^2 - V_\infty^2 \right] = \frac{1}{2} \dot m \, \Delta V^2$$

Questa potenza è pari al lavoro, per unità di tempo, sviluppato dalla spinta:

$$T \cdot V_\infty = \Delta \dot E \qquad \text{ovvero} \qquad D V_\infty = \tfrac{1}{2} \dot m \, \Delta V^2$$

$$C_{D_i} S \cancel{\tfrac{1}{2}} \rho_\infty V_\infty^3 = \cancel{\tfrac{1}{2}} \dot m \, \Delta V^2$$

$$C_{D_i} \cancel{S} \cancel{\rho_\infty} \cancel{V_\infty^3} = \cancel{\rho_\infty} \cancel{V_\infty} \cancel{\pi} \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4}} \cancel{e} \; \frac{4 C_L^2}{\pi^2 AR^2 e^2} \cancel{V_\infty^2}$$

ovvero

$$\boxed{C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR \, e}}$$

e := fattore di Oswald

C_{D_i} := <u>coeff. di resistenza indotta</u> [dalla portanza].

$e < 1$ (in generale)

$e = 1$ (distr.ne ellittica)

La resistenza totale di un aeromobile : $D = D_i + D_p + D_w$

resistenza indotta

resistenza di profilo, dovuta all'azione diretta delle forze viscose

ATTRITO   SCIA

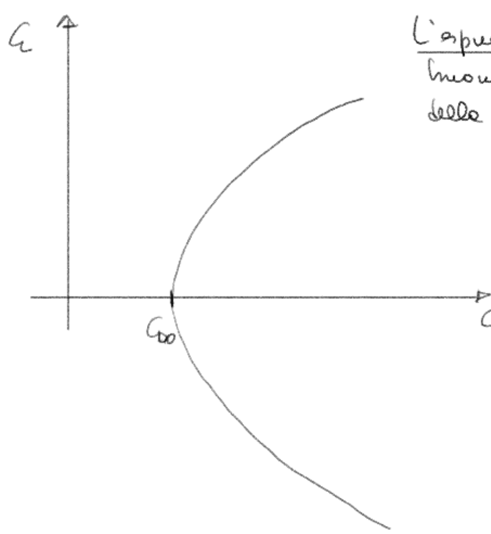
resistenza d'onda

La polare dell'aeromobile – Le curve $C_D = C_D(C_L)$ si dicono polari. Per ogni velivolo esistono infinite polari, al variare di Re_∞, M_∞ e della configurazione del velivolo.

⟶ Espressione approssimata della polare è

$$\boxed{C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR\, e}}$$

C_{D0} := coefficiente di resistenza a portanza nulla ⤳ RESISTENZA DI PROFILO

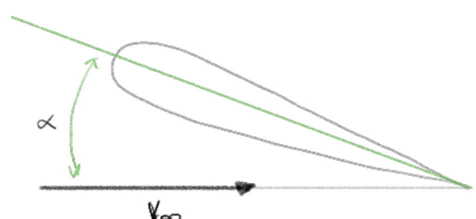


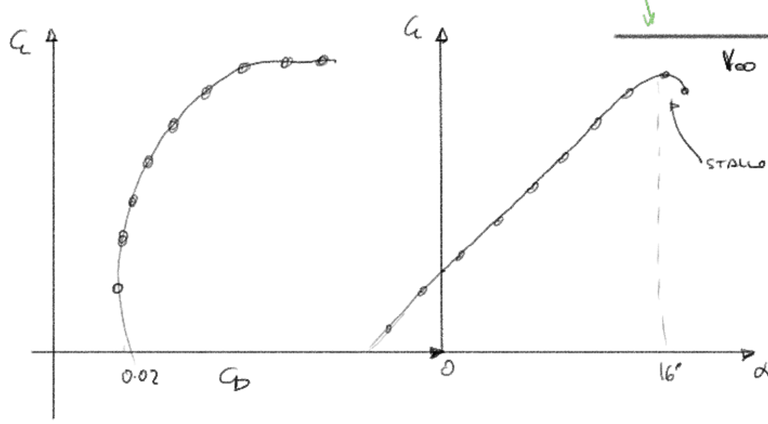
L'espressione parabolica della polare costituisce una buona approssimazione della polare reale nell'intorno della crociera del velivolo

Errori insiti in questa approssimazione

- Il C_D non è minimo per $C_L = 0$
- la resistenza di profilo varia al variare di C_L
- in condizioni di alta portanza, la polare del velivolo si discosta molto da quella parabolica che non prevede lo stallo dell'aeromobile.

Definizione di angolo d'attacco





- È presente un tratto lineare nell'intorno delle basse incidenze $C_L \simeq C_{L\alpha}\,\alpha$
- Dipende dal M_∞ e Re_∞

PROFILO ALARE è la sezione di un'ala parallela a V_∞

Nel caso di un'ala rettangolare dritta di $AR \to \infty$ il campo di moto risulta 2-D nel piano del profilo ⟶ $C_{D_i} = 0$ ⟶ $D = D_p + D_w$

Caratteristiche aerodinamiche di un profilo alare

- Portanza $\ell = C_\ell \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c$
- Resistenza $d = C_d \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c$
- Momento di beccheggio $m_{le} = C_{m_{le}} \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2$
- Momento di beccheggio rispetto al fuoco $m_{1/4} = C_{m_{1/4}} \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2$

$\longrightarrow$ I momenti sono positivi se cabranti.

Per un profilo poco spesso e poco curvo a piccoli angoli d'attacco è

$$C_\ell = C_{\ell_\alpha}(\alpha - \alpha_{ZL}) \qquad \boxed{C_{\ell_\alpha} \simeq 2\pi}$$

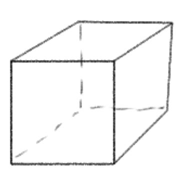
angolo di portanza nulla.

N.B. $AR \gg 1$ allora $$C_{L_\alpha} \cong \frac{C_{\ell_\alpha}}{1 + \frac{C_{\ell_\alpha}}{\pi AR}}$$

$AR < 1$ allora $$C_{L_\alpha} \simeq \frac{\pi}{2} AR$$

COMPRIMIBILITÀ DI UN FLUIDO

Ci chiediamo, ora, come la densità di un fluido vari con la pressione.



Sia V_0 il volume del fluido quando la pressione è P_0: ci chiediamo come varia V quando la pressione passa da P_0 a $P_0 + dP$.
Immaginiamo che per effetto della compressione, il volume V diminuisca. La domanda è: di quanto?
Ovviamente la diminuzione di V dipende:
1- dal materiale
2- dall'intensità di dP.

Quindi $V_0 + dV$ sarà il nuovo volume (con $dV < 0$).

Si definisce MODULO DI COMPRIMIBILITÀ $$E = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}}$$ causa che la produce la variazione di volume

Il modulo di comprimibilità è un fattore che ci dice qual è la variazione relativa di volume, conseguente a una certa variazione di pressione.

N.B. Il segno meno è di tipo convenzionale, serve per esprimere E positivo.

$[E]$ = pressione.

☒ In termini di densità

$$M = \rho V \longrightarrow 0 = \rho\, dV + V\, d\rho \longrightarrow 0 = \frac{\cancel{\rho}\, dV}{\cancel{\rho} V} + \frac{\cancel{V}\, d\rho}{\rho \cancel{V}}$$

ovvero:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \longrightarrow \boxed{E = \frac{dp}{d\rho/\rho}} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\bigg|_{T=\text{cost}} = \frac{1}{E}$$

$\boxed{\text{E è l'analogo del modulo di Young per i solidi.}}$

Se il fluido è un GAS, la relazione che comprende tutte le trasformazioni è:

$$\boxed{\frac{p}{\rho^k} = C} \qquad k := \text{coefficiente di politropica}$$

- Se $k=1 \longrightarrow$ trasformazione isoterma

$$\frac{p}{\rho} = C \quad , \text{ma} \quad \frac{p}{\rho} = RT \Rightarrow C = RT$$

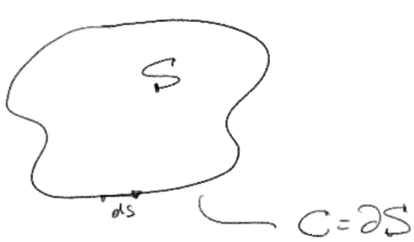
- Se $k = \gamma = \frac{c_p}{c_v} \longrightarrow$ trasformazione isentropica

$$p = C\rho^k \longrightarrow dp = C\, k\, \rho^{k-1} d\rho\, \frac{\rho}{\rho} \longrightarrow dp = Ck\rho^k \frac{d\rho}{\rho}$$

ovvero: $dp = kp\,\frac{d\rho}{\rho} \longrightarrow \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} = kp \longrightarrow \boxed{E = kp}$

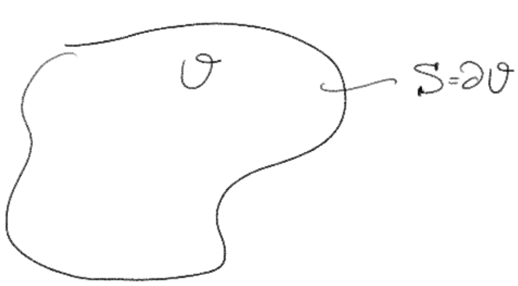
Se $T = \text{cost} \to k=1 \longrightarrow \boxed{E = p} \longrightarrow$ il modulo di comprimibilità è uguale alla pressione per una trasformazione isoterma.

Relazioni tra integrali di linea, superficiali e di volume



Sia $\underline{A}$ un campo vettoriale. L'integrale di linea di A su C è:

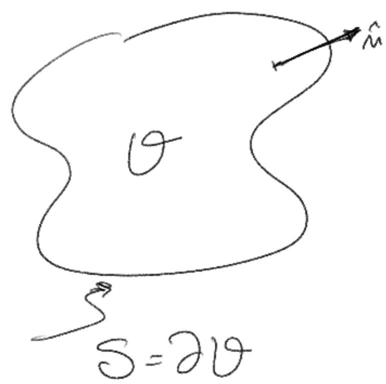
$$\boxed{\oint_C \underline{A}\cdot d\underline{s} = \iint_S \underline{\nabla}\times\underline{A}\, dS} \quad \text{TEOREMA DI STOKES}$$



$$\boxed{\oiint_S \underline{A}\cdot d\underline{S} = \iiint_V \underline{\nabla}\cdot\underline{A}\, dV} \quad \text{TEOREMA DELLA DIVERGENZA}$$

$$\boxed{\oiint_S p\, d\underline{S} = \iiint_V \nabla p\, dV} \quad \text{TEOREMA DEL GRADIENTE}$$

TEOREMA DI GAUSS



$$\oiiint_\vartheta \underline{\nabla}\cdot\underline{A}\, d\vartheta = \oiint_S \underline{n}\cdot\underline{A}\, dS$$

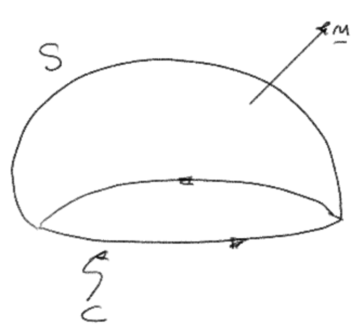
$$\oiiint_\vartheta \underline{\nabla}\times A\, d\vartheta = \oiint_S \underline{n}\times A\, dS$$

$$\oiiint_\vartheta \underline{\nabla}\underline{A}\, d\vartheta = \oiint_S n\underline{A}\, dS$$

Sia f una f.ne scalare e continua, allora

$$\oiiint_\vartheta \underline{\nabla} f\, d\vartheta = \oiint_S \underline{n} f\, dS$$

TEOREMA DI STOCKES



Data S delimitata dal circuito C e dato $\underline{v}$ un campo vettoriale continuo in $S \cup C$, allora

$$\oiint_S \underline{n}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{v})\, dS = \oint_C \underline{v}\cdot d\underline{l}$$

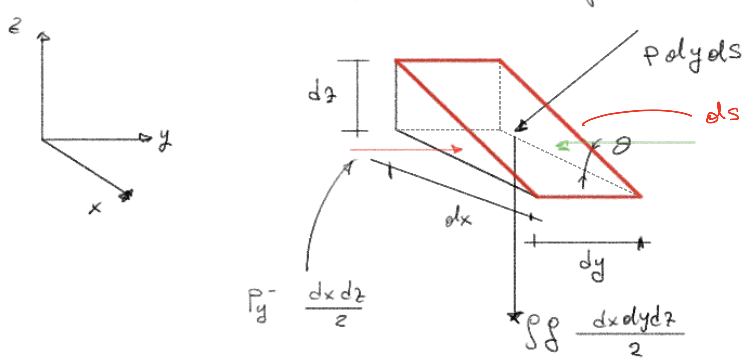
il teorema di Stockes lega il flusso del rotore alla circolazione

STATICA DEI FLUIDI

Una importante categoria di problemi della fluidodinamica è costituita da quei fenomeni in cui il fluido si trova in quiete oppure si muove senza generare sforzi di taglio.

Statica dei fluidi $\longrightarrow$ Quali azioni è in grado di esercitare un fluido quando si trova in una condizione statica, i.e. fermo o, nel caso in cui si muova, non si deformi durante il moto

☒ PRESSIONE IN UN FLUIDO – la pressione è l'azione più importante che esercitano i fluidi in condizioni statiche.
Volendo determinare la risultante delle forze di pressione su una superficie immersa in un fluido, ci si chiede come la pressione dipende dall'orientamento dell'elemento di superficie su cui agisce.



$$P_y^- \frac{dz\,dx}{2} - P_y^+ \frac{dz\,dx}{2} = 0$$

$$\longrightarrow \quad P_y^- = P_y^+$$

per l'equilibrio lungo l'asse z:

$$p_z\,dx\,dy - p\cos\theta\,dy\,ds = \rho g \frac{dx\,dy\,dz}{2}$$

per l'equilibrio lungo l'asse x:

$$P_x\,dz\,dy - p\,dy\,ds\sin\theta = 0$$

N.B. $ds\cos\theta = dx$ e $ds\sin\theta = dz$

$$P_z\,\cancel{dx\,dy} - p\,\cancel{dy\,dx} = \rho g \frac{\cancel{dx\,dy}\,dz}{2} \longrightarrow \boxed{P_z - p = \frac{\rho g}{2}\,dz}$$

$$P_x\,dz\,dy - p\,dy\,dz = 0 \longrightarrow \boxed{P_x = p}$$

☐ poiché siamo interessati alla pressione in un punto, possiamo far tendere a zero le dimensioni del prisma, $dx \to 0$, $dy \to 0$ e $dz \to 0$, e otteniamo:

lasciando inalterato il rapporto tra essi

$$P_z - p = 0 \to \boxed{p = P_z = P_x}$$

i.e. la pressione in un punto è indipendente dalla direzione in cui agisce* $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ LEGGE DI PASCAL.

* la pressione dà origine a un tensore degli sforzi isotropo.

Se indichiamo con L l'ordine di grandezza dei lati del prisma si ha che le forze di pressione sono proporzionali a L^2, mentre la forza peso è proporzionale a L^3. Questa stima è generale e si può applicare a tutte le forze di superficie e di volume.

⟶ al diminuire delle dimensioni del corpo, le forze di volume e di superficie NON diminuiscono allo stesso modo ⟶ le forze di volume tendono più velocemente a zero rispetto a quelle di superficie.

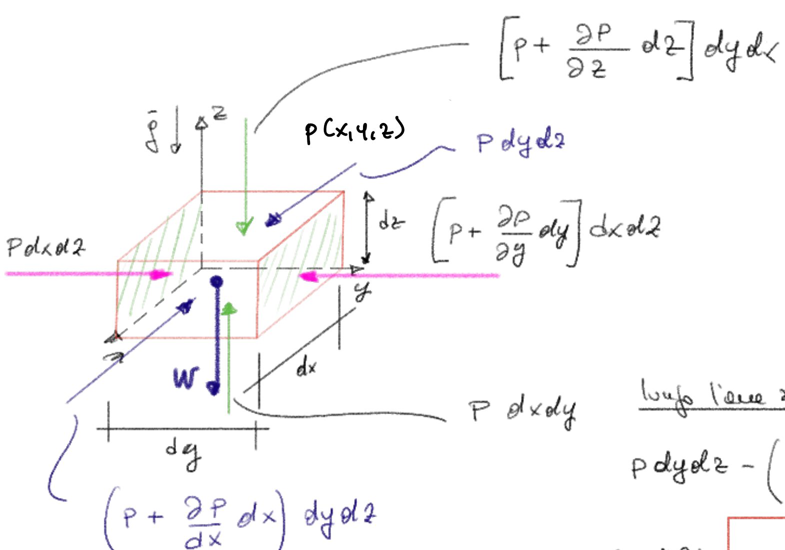
⟶ EFFETTO SCALA ed è il motivo per cui quando si costruisce un modello non basta ridurre in scala tutte le dimensioni ma bisogna anche cambiare la curvatura dei profili alari per avere un giusto bilanciamento fra peso e portanza.

EFFETTO SCALA ⟶ forze di volume e forze di superficie non crescono allo stesso modo al variare delle dimensioni di un oggetto

DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN FLUIDO

Dopo aver stabilito che la pressione in un punto agisce in egual modo in tutte le direzioni, bisogna ora capire in che modo la pressione varia all'interno di un fluido in quiete o in moto ma sempre sotto la condizione che NON vi siano presenti sforzi tangenziali interni al fluido.

⟶ EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA FLUIDOSTATICA



$$\underline{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

$$\nabla p = \left[\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right]$$

$$\underline{f} = [0, 0, -g]$$

lungo l'asse x

$$p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz = \rho\,dx\,dy\,dz\,a_x$$

ovvero: $\boxed{-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x}$

lungo l'asse y

$$p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz = \rho\,dx\,dy\,dz\,a_y \longrightarrow \boxed{-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y}$$

lungo l'asse z

$$p\,dx\,dy - \left[p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right]dy\,dx = \rho g\,dx\,dy\,dz + \rho\,dx\,dy\,dz\,a_z \longrightarrow \boxed{-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = \rho a_y}$$

Se osserviamo che

$$\underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}$$

dove $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ sono i versori degli assi, e indicando con $\underline{f}$ il vettore contenente tutte le forze di volume , l'eq.io dell'elemento di fluido si scrive:

$$\boxed{-\underline{\nabla} p + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}} \qquad (*)$$

che ha validità generale qualunque siano $\underline{f}$ e $\underline{a}$. La (*) è la eq.ne <u>fondamentale della fluidostatica</u>

N.B. Scritta in termini vettoriali, la (*) vale in qualunque sistema di riferimento

La (*) ci permette di affermare che se l'elemento fluido non si deforma, il bilancio delle forze è dato dal gradiente di pressione (che genera le forze di superficie) e le forze di volume; tali forze generano l'accelerazione.

□ VARIAZIONE DI PRESSIONE IN UN FLUIDO IN QUIETE

La relazione

$$\boxed{-\underline{\nabla} p + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}} \rightsquigarrow \text{Legge fondamentale della fluidostatica}$$

nelle ipotesi:

1- Fluido fermo $\longrightarrow \underline{a} = 0$
2- forze di volume: solo gravità $\longrightarrow \underline{f} = -g\underline{k}$

ci permette di determinare la variazione di pressione con la quota per un fluido soggetto soltanto alla forza peso

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0$$

ovvero:

la pressione non dipende dalla x, i.e. $p = p(y,z)$

la pressione non dipende dalla y $p = p(x,z)$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \qquad (*)$$

la pressione è f.ne solo della z, i.e. $p = p(z)$

La possibilità di integrare la (*) dipende da come ρ può variare con z.

☐ La comprimibilità di un fluido è definita come

$$\boxed{E = \frac{dP}{d\rho/\rho}}$$

→ Cosa significa dire che la ρ è costante e dunque un fluido è incomprimibile? Significa dire che per una qualunque differenza di pressione si ottiene una variazione di densità nulla.

→ Un materiale incomprimibile è un materiale per cui $E \to +\infty$

$E_{H_2O} \simeq 2 \cdot 10^9$ Pa
$E_{Hg} \simeq 2 \cdot 10^{10}$ Pa

→ Nel caso dei liquidi il modulo di comprimibilità ha valori estremamente elevati $[\mathcal{O}[GPa]]$ e dunque la variazione di densità può ritenersi costante.

Quindi, per $\rho = \text{cost}$ → $\boxed{p(z) = p(0) - \rho g z}$ → LEGGE DI STEVINO

partendo da una pressione di riferimento, la pressione cresce sempre di più, man mano che aumenta la z per valori negativi.

PER I LIQUIDI

$\boxed{p(z) = p(0) - \rho g z \quad z \leq 0}$

$\rho = 1000 \, kg/m^3$

N.B. per ogni 10 m di immersione, la pressione ambiente aumenta di 1 atm ovvero 100'000 Pa $= 10^5$ Pa

Per $\rho = \rho(P)$ → GAS Per integrare l'equazione della fluidostatica scriviamo:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$E = \dfrac{dP}{d\rho/\rho}$ e per i gas sottoposti a una trasformazione politropica del tipo $\dfrac{P}{\rho^k} = C$ → $\boxed{E = kP}$ le variazioni di pressione non sono mai trascurabili e dunque la ρ non può considerarsi costante – come per i liquidi.

Supponiamo che il GAS obbedisca alla legge dei GAS PERFETTI

$$\frac{P}{\rho} = RT \longrightarrow \rho = \frac{P}{RT}$$

N.B. $R = \dfrac{\mathcal{R}}{P.M._{gas}}$

☒ supponiamo che la T non vari i.e. la trasformazione sia isoterma

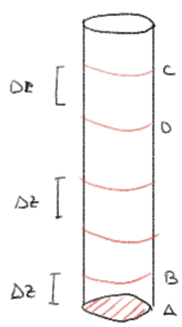
$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{RT} g \longrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT} dz \longrightarrow \ln \frac{P(z)}{P(0)} = -\frac{g}{RT} z$$

$$\longrightarrow \boxed{P(z) = P(0) \, e^{-\frac{g}{RT} z}}$$

ovvero, la diminuzione di pressione con la quota è un esponenziale decrescente.

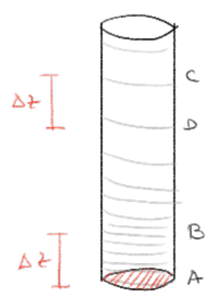
VARIAZIONE DELLA PRESSIONE CON LA QUOTA	→ STEVINO →	Liquidi →	relazione lineare con la quota.
	→	GAS →	relazione esponenziale con la quota

Il fatto che la p diminuisca esponenzialmente, implica che per salendo in quota, prendendo dei Δz costanti, si ottengono dei decrementi di pressione sempre più piccoli

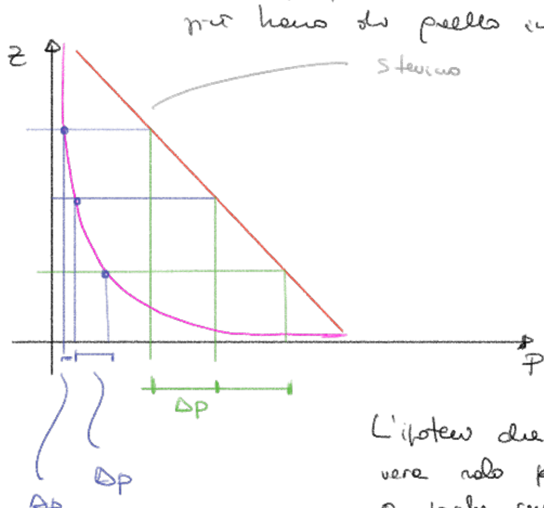


La pressione è data dal peso della colonna di fluido diviso la superficie su cui insiste.

- Se il fluido ha $\rho = cost$ e lo affettiamo in cilindri di uguale altezza, ogni cilindro contribuirà al peso proporzionalmente alla sua altezza.
  Se passo da $A \to B$ o da $D \to C$ la variazione di pressione sarà sempre la stessa, perché ho tolto la stessa parte di "peso" della colonna di fluido.



- Se invece $\rho = \rho(P)$ - caso dei gas - la pressione a una certa quota è data sempre dalla colonna di fluido sovrastante diviso la superficie stessa, ma mano che ci avviciniamo più alla superficie, il peso del gas "comprime" il fluido e quindi aumenta la densità in prossimità della superficie → Se passo da $A \to B$ tolgo una parte di p maggiore rispetto al caso $D \to C$, perché al suolo la ρ ha un valore più basso di quello in quota.



$$\boxed{p(z) = p(0)\, e^{-\frac{g}{RT} z}}$$

vale per un GAS PERFETTO e ISOTERMO

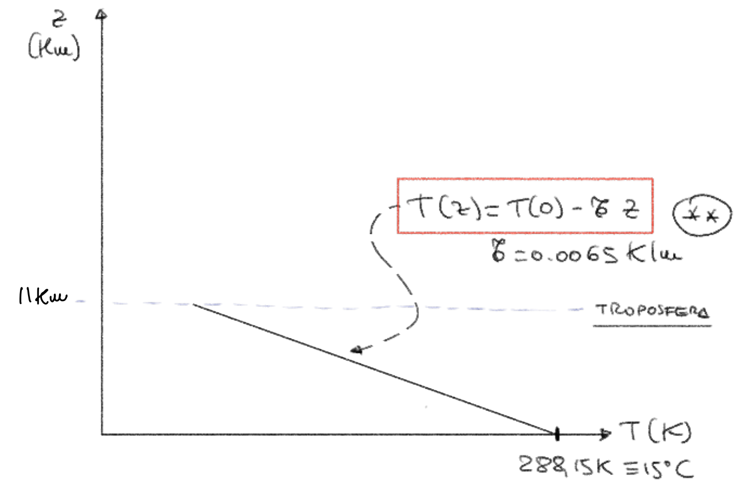
i.e. $T = cost$

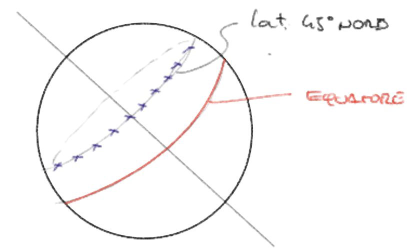
L'ipotesi che $T = cost$ con la quota è vera solo per intervalli $\Delta z \approx$ decine o poche centinaia di metri.

→ BISOGNA QUANTIFICARE IN CHE MODO LA TEMPERATURA VARIA CON LA QUOTA E VEDERE COME USARE QUESTA VARIAZIONE DI TEMPERATURA PER INTEGRARE LA

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{RT} g$$

ATMOSFERA STANDARD





per un anno intero sono state misurate, T, p, ρ per le varie quote. Esperimenti ripetuti diversi anni (1966, '67...)

> Fino a 11000 m, la temperatura diminuisce con la quota con un fattore costante di 6,5° ogni km di quota)

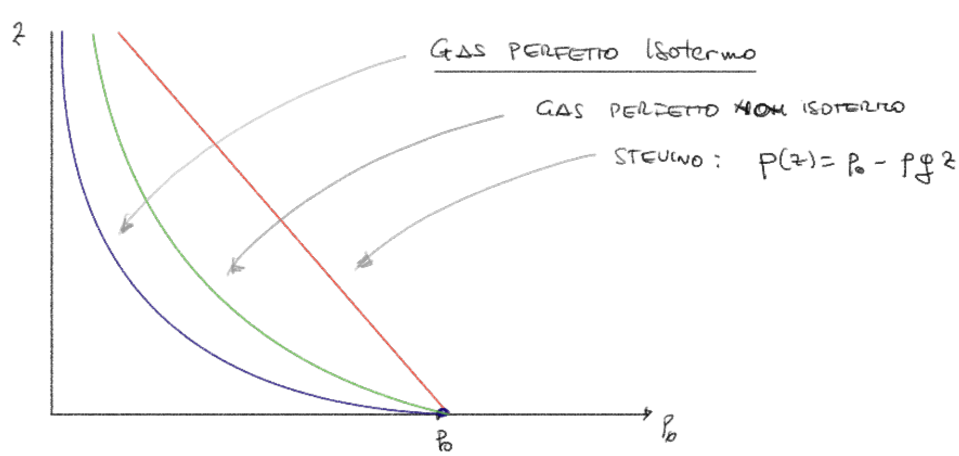
$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{RT} g \longrightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{gP}{R(T_0 - \gamma z)}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T_0 - \gamma z} \longrightarrow \ln \frac{P}{P_0} = +\frac{1}{\gamma}\frac{g}{R} \int_0^z \frac{d(T_0 - \gamma z)}{T_0 - \gamma z}$$

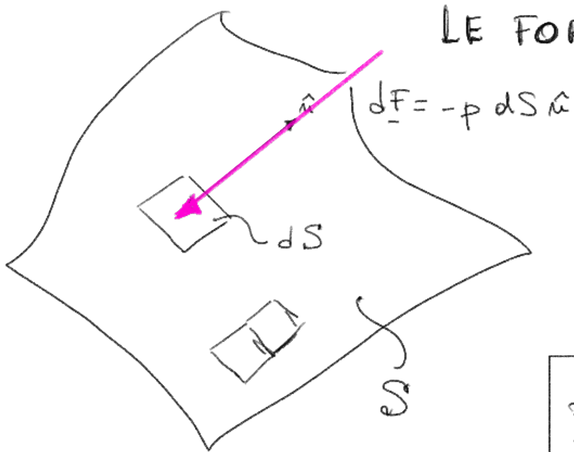
$$\longrightarrow \ln \frac{P}{P_0} = \frac{g}{\gamma R} \ln \frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \longrightarrow \boxed{\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\right)^{g/\gamma R}} \quad (*)$$

GAS PERFETTO NON ISOTERMO

(*) Ci fornisce l'andamento della pressione con la quota nell'atmosfera tra 0 e fino a 11'000 m.
(**) Ci fornisce l'andamento della temperatura con la quota nell'atmosfera tra 0 e fino a 11'000 m
→ Dall'eq. dei gas perfetti si ricava la densità in funzione della quota.



LE FORZE DI PRESSIONE



Calcoliamo il sistema delle forze di pressione che un fluido in quiete esercita su una superficie di forma qualsiasi

$$\underline{F} = \int_S dS = -\int_S p\, dS\, \hat{n}$$

$$\boxed{\underline{F} = -\int_S p\, \hat{n}\, dS} \qquad (*)$$

N.B. Mentre per l'elemento infinitesimo la normale è una e la pressione è costante perché agente su un elemento infinitesimo, su un oggetto di dimensioni finite le cose si complicano notevolmente:

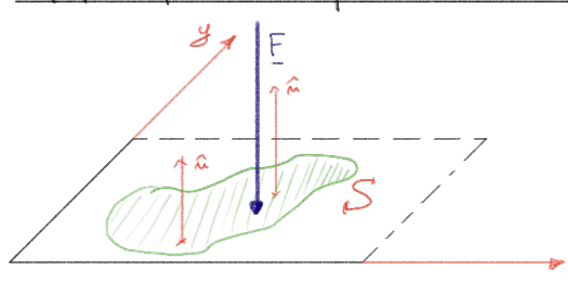
1- la normale cambia punto a punto e così non possiamo una espressione analitica di come vari la normale.

2- la pressione, in generale, varia punto a punto e può variare per svariati motivi

La (*) è estremamente potente, ammesso di poterla utilizzare; spesso non conosciamo né un'espressione analitica per S, né una espressione analitica per la normale la superficie, né una espressione per p.

È possibile, poi, ridurre la (*) a espressioni più semplici per alcuni casi comuni.

☑ Superficie piana e pressione costante



1. Ip. superficie piana
2. Ip pressione costante

$$\underline{F} = -\int_S p\, \hat{n}\, dS = -p\, \hat{n} \int_S dS$$

$$= -p\, \hat{n}\, S$$

☑ Dove va applicata $\underline{F}$? In questo caso, occorre riferirsi alla espressione del momento

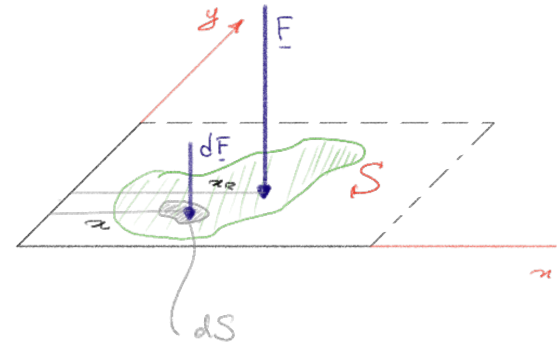
$$\underline{M} = \int_S -p\, \underline{x} \times \underline{n}\, dS$$

Calcoliamo il momento di ciascuna forza elementare rispetto all'asse y:

$$dM = p\, dS\, x$$

$$M = \int_S p\, x\, dS$$ momento delle forze distribuite

$$M = x_R \cdot F$$ momento delle forze risultante.



$$x_R F = \int_S p\, x\, dS \longrightarrow p\, S\, x_R = \int_S p\, x\, dS$$

$$\cancel{p} \int_S x\, dS = \cancel{p}\, S\, x_R \longrightarrow \boxed{x_R = \frac{\int_S x\, dS}{S}}$$

Centroide di superficie

Il centroide di superficie è una p.ta puramente geometrica - da non confondere con il baricentro che è invece legato alla distribuzione delle masse.

- Occorre chiedersi se ha senso ridurre un sistema di forze a un'unica risultante. In generale la risposta è NO, i.e. non è sempre possibile ridurre un sistema di forze a un'unica forza. I casi in cui ciò è possibile sono DUE:
  - I vettori sono tutti paralleli
  - I vettori convergono tutti in un'unica posizione nello spazio.

- Nel caso in cui la superficie sia piana e la pressione abbia un valore costante su tale superficie, il sistema di forze di pressione è equivalente a un'unica forza il cui modulo è dato dal prodotto della pressione per la superficie mentre il punto di applicazione si trova nel centroide della superficie stessa.

DISTRIBUZIONE LINEARE DI PRESSIONE

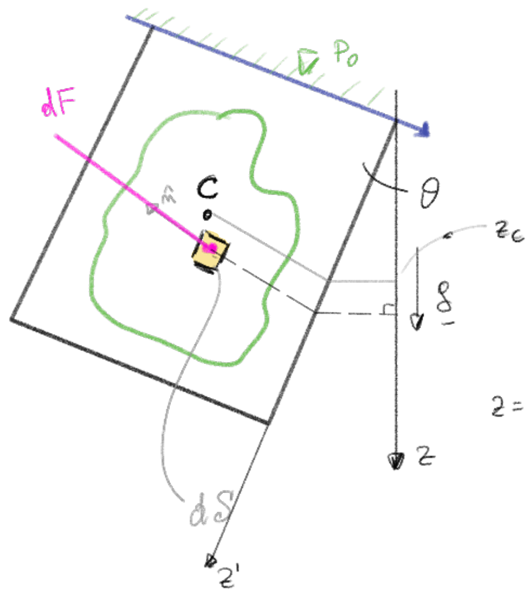
Per i liquidi, come si è visto, vale la LEGGE DI STEVINO

$$\boxed{p(z) = P_0 - \rho g z}$$

L'ipotesi che facciamo sono:

1- superficie piana

2- p varia linearmente con la quota



$$P(z) = P_0 + \rho g z \longrightarrow P(z') = P_0 + \rho g z' \cos\theta$$

$$dF = -n\, p(z)\, dS$$

$$F = -\hat{n} \int_S (P_0 + \rho g z' \cos\theta)\, dS =$$

$z = z' \cos\theta$

$$= -\hat{n} P_0 \int_S dS - \hat{n} \rho g \cos\theta \int_S z' dS$$

$$= -\hat{n} P_0 S - \hat{n} \rho g \cos\theta \int_S z' dS$$

$$z'_c = \frac{\int_S z' dS}{S} \longrightarrow \int_S z' dS = z'_c S$$

ovvero:

$$\underline{F} = -\hat{n} P_0 S - \hat{n} \rho g \cos\theta\, z'_c S =$$

$$= \boxed{\underline{F}_0} - \boxed{\hat{n} \boxed{\rho g\, z_c} S}$$

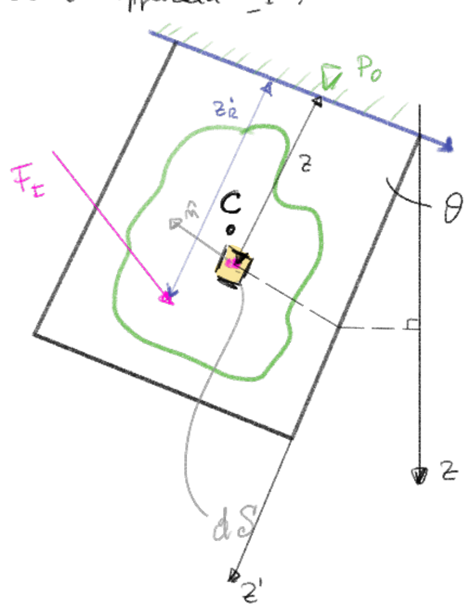
dobbiamo valutarne θ p.to di applicazione

pressione di inversione del centroide

è applicato nel centroide della figura

$$\boxed{\underline{F} = \underline{F}_0 + \underline{F}_I}$$

Dov'è applicata $\underline{F}_I$?



$$\underline{F}_I = -\hat{n} \rho g z_c S = -\int_S \rho g z\, dS$$

$$dM = \rho g z' \cos\theta \cdot z'\, dS$$

$$M = \int_S \cancel{\rho g}\, \underbrace{z' \cos\theta}_{z} \cdot z'\, dS = F_I\, z'_R$$

$$= \cancel{\rho g}\, z_c S z'_R$$

Il p.to di applicazione NON dipende dalle proprietà del fluido

$$\int_S z' z\, dS = z_c S z'_R$$

$$\int_S z'^2 \cancel{\cos\theta}\, dS = z'_c \cancel{\cos\theta}\, S\, z'_R \longrightarrow z'_R = \frac{\int_S z'^2 dS}{z'_c S}$$

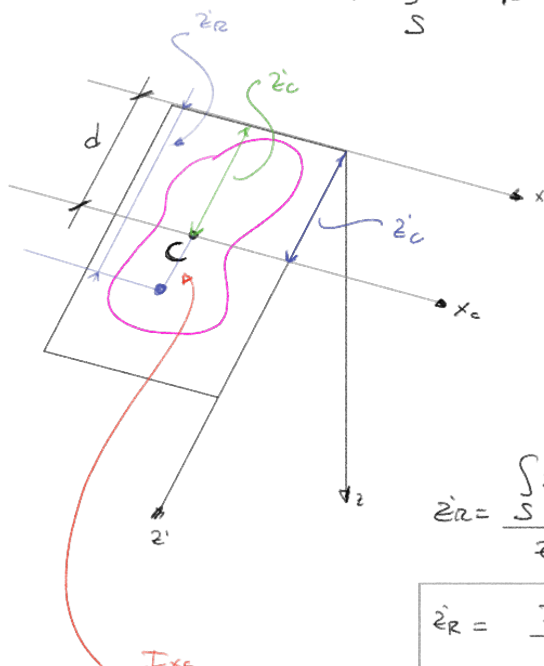
I_x ~ momento del secondo ordine di figura.

$$I_x = \int_S z'^2 dS$$

Teorema di Huygens.

$$\boxed{I_x = I_{x_c} + d^2 S}$$

momento del secondo ordine minimo per la figura in esame.



$\frac{I_{xc}}{z'_c S}$

$$I_x = I_{x_c} + z'^2_c S$$

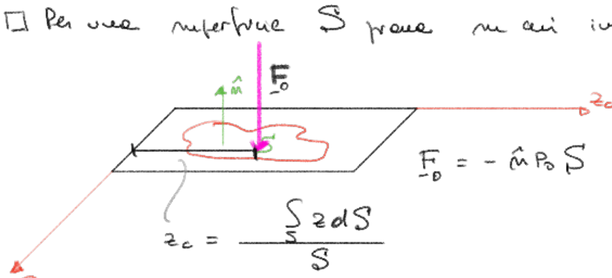
$$z'_R = \frac{\int_S z'^2 dS}{z'_c S} = \frac{I_x}{z'_c S} = \frac{I_{xc} + z'^2_c S}{z'_c S} =$$

$$\boxed{z'_R = \frac{I_{xc}}{z'_c S} + z'_c}$$

La F'_I NON SI TROVA APPLICATA NEL CENTROIDE, ma si trova in un p.to più in basso ed è tanto più in basso quanto ci dice il contributo $\frac{I_{xc}}{z'_c S}$

FORZE DI PRESSIONE SU UNA SUPERFICIE CURVA

□ Per una superficie S piana su cui insiste una forza di pressione costante



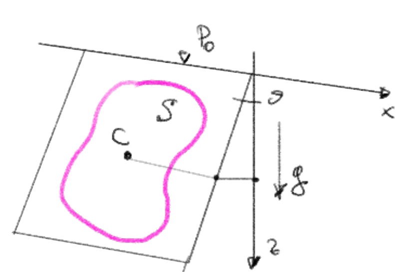
$$F_0 = -\hat{n}\, p_0 S \rightsquigarrow \text{applicata nel centroide}$$

$$z_c = \frac{\int_S z\, dS}{S}$$

□ Per una superficie S piana su cui insiste una forza di pressione lineare - caso tipico di superficie piana in un liquido - allora su S agiscono DUE forze:

1- prodotta da p_0 e applicata nel centroide

2- $F_I = -\hat{n}\, \underbrace{\rho g z_c}_{p_c} S$



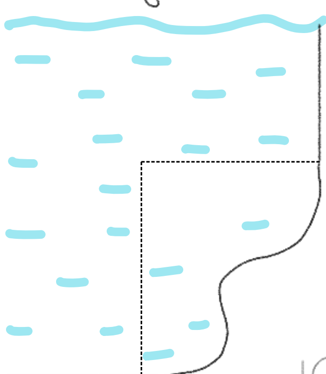
$P_c :=$ pressione idrostatica del centroide

N.B. $\underline{F_I}$ NON è applicata nel centroide, ma in un p.to più basso, R:

$$z'_R = z'_c + \frac{I_{xc}}{z'_c S}$$

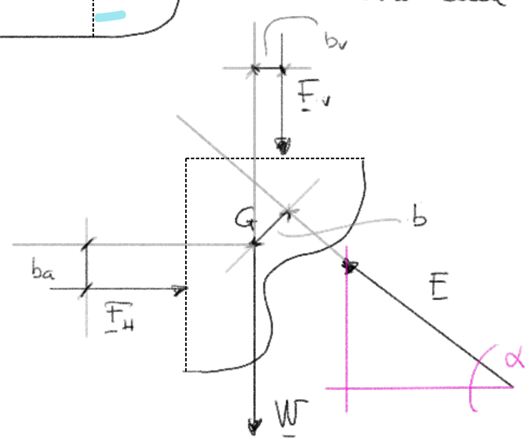
momento di figura calcolato rispetto un asse parallelo a x ma passante per il centroide

Immaginiamo di avere un contenitore della forma irregolare.



$$\underline{E} = -\int_S p\,\underline{n}\, dS \longrightarrow$$ la difficoltà è legata alla variazione della normale $\hat{n}$ alla superficie.

In questo caso, isolando la parte tratteggiata. Se il sistema è in equilibrio, allora la risultante delle forze e dei momenti applicati a questo volume di fluido devono essere nulli



La E è l'opposto della forza che ci interessa, perché noi abbiamo l'azione delle forze di pressione sulla parete curva.

$$F\cos\alpha = F_H$$

$$F_{vert} = F_v + W$$

$$F^2 = F_H^2 + (F_v + W)^2$$

$$\longrightarrow \boxed{F = \sqrt{F_H^2 + (F_v + W)^2}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{F_v + W}{F_H} \longrightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{atan} \frac{F_v + W}{F_H}}$$

□ Per determinare il p.to di applicazione di $\underline{E}$ occorre usare l'equilibrio dei momenti.

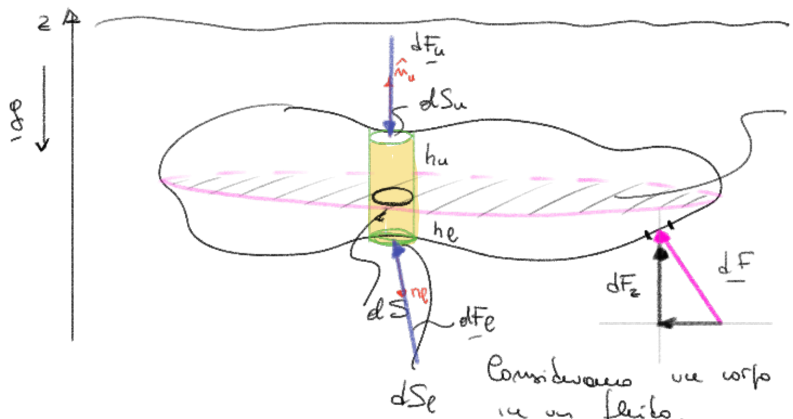
Scelto G come polo, è:

$$F b + F_H b_H = F_v b_v \longrightarrow \boxed{b = \frac{F_v b_v - F_H b_H}{F}}$$

N.B. Per calcolare le forze agenti su una superficie curva con parete curvata occorre determinare il peso e la posizione del baricentro del fluido estratto dal contenitore.
Calcolare il Volume richiede però valutare un integrale sulla superficie curva, calcolo NON banale $\longrightarrow$ CALCOLO NUMERICO

SPINTA DI ARCHIMEDE

Vogliamo ora calcolare la forza esercitata da un fluido che circonda un corpo a causa delle variazioni di pressione.



Consideriamo, per la circonferenza nel piano S, dS, le generatrici parallele all'asse z, sì da formare un cilindro, le cui altezze sono h_u e h_e (*)

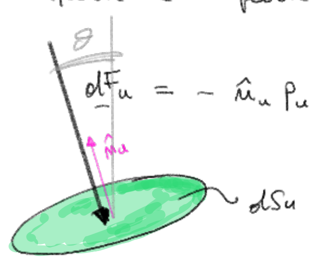
Consideriamo un corpo di forma qualunque immerso in un fluido.
Ogni elemento di superficie sarà sottoposto a una forza di pressione

Ci chiediamo: quanto vale la risultante di tutte le forze di pressione proiettate nella direzione z.

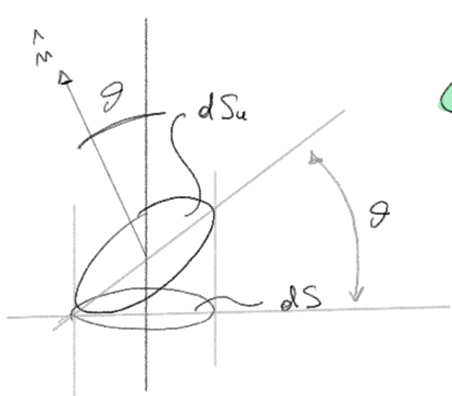
Delimitiamo il PERIMETRO MASSIMO DELL'OGGETTO che circoscrive il corpo in un piano orizzontale. Individuiamo con S la superficie delimitata

(*) N.B. h_u e h_e dipendono dalla posizione scelta per dS.

Il cilindro interatterà nella superficie inferiore e superiore del corpo due elementi che chiameremo dS_e e dS_u



$$d\underline{F}_u = -\hat{n}_u P_u \, dS_u$$



$$dF_{zu} = -dF_u \cos\theta = -P_u \, dS_u \cos\theta$$

N.B. θ è anche l'angolo di inclinazione di dS_u rispetto a dS, i.e.

$$dS_u \cos\theta \equiv dS$$

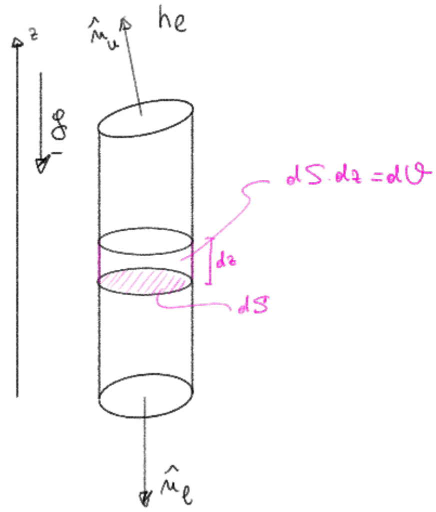
$$dF_{zu} = -P_u \, dS$$

$$dF_{ze} = P_e \, dS$$

$$\longrightarrow \quad dF_z = (P_e - P_u)\, dS = dF_{zu} + dF_{ze}$$

$$F_z = \int_S dF_z = \int_S (P_e - P_u)\, dS$$

$$P_e - P_u = -\int_{h_e}^{h_u} \frac{dP}{dz}\, dz \longrightarrow F_z = -\int_S \int_{h_e}^{h_u} \frac{dP}{dz}\, dz\, dS = -\int_V \frac{dP}{dz}\, dV \quad (*)$$



$-\nabla p + \underline{f} = \rho \underline{a}$ eq.ne fondamentale dell'idrostatica

$$\underline{a} = \underline{0}$$

$$\underline{f} = (0, 0, -g)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \; ; \; -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \; ; \; -\frac{dP}{dz} = g \rho_{liq}$$

ovvero

$$F_z = \int_V \rho_{liq}\, g\, dV = \rho_{liq}\, g\, V$$

peso del volume di fluido spostato.

(*) affinché esista una forza verticale c'è bisogno che la pressione vari lungo z $\frac{dP}{dz}$

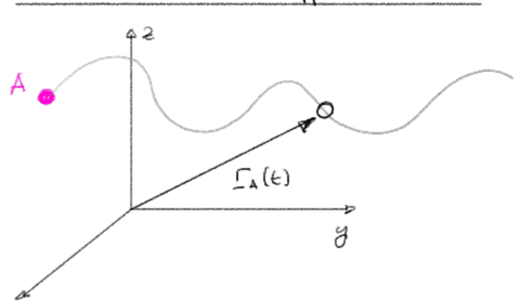
CINEMATICA DEI FLUIDI

In questo contesto vengono definite alcune proprietà del moto di un fluido come posizione, velocità e accelerazione. La cinematica studia quindi la posizione occupata, nel tempo, da un oggetto, la sua velocità e la sua accelerazione indipendentemente dalle forze necessarie a generare il moto.

□ DESCRIZIONE LAGRANGIANA ED EULERIANA

Quando si analizza il moto di un solido si considera solamente il moto del suo baricentro e il suo orientamento (angoli di Eulero) descrivendo la loro evoluzione nel tempo. La descrizione del moto di un fluido risulta in qualche modo più complessa in quanto il sistema è composto da particelle fluide in continuo moto relativo e le sole informazioni nel baricentro e negli angoli di Eulero NON sono sufficienti a caratterizzare la distribuzione del fluido dello spazio.

Occorre usare un approccio diverso ⟶ DESCRIZIONE EULERIANA



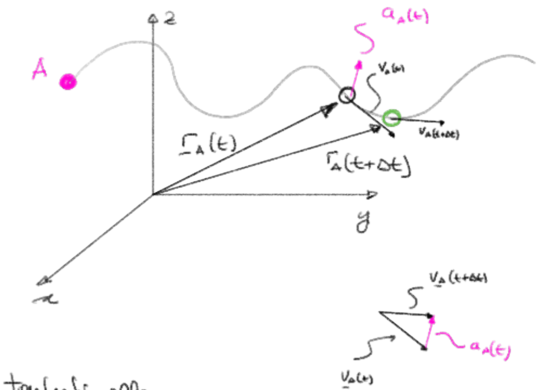
Supponiamo di definire un riferimento (O,x,y,z) rispetto al quale definiamo gli spostamenti, le posizioni delle nostre particelle. Sia A la nostra particella fluida.

La particella A si sposterà nel tempo e occuperà una serie di posizioni. In un certo istante t avrò che la particella si trova a occupare la posizione $\underline{r}_A(t)$. Tutte le quantità relative alla particella A dipendono solo dal tempo. — Il tempo è l'ascissa curvilinea che fa scorrere la sequenza delle posizioni occupate nel tempo dalla particella A ⟶ Questa sequenza è la TRAIETTORIA.

VELOCITÀ DI UNA PARTICELLA –

$$\underline{V}_A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}_A(t+\Delta t) - \underline{r}_A(t)}{\Delta t}$$

$$\underline{a}_A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{V}_A(t+\Delta t) - \underline{V}_A(t)}{\Delta t}$$

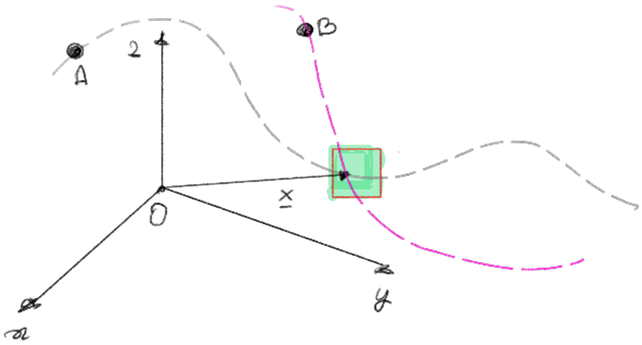


Si può notare che le velocità sono tangenti alla traiettoria, mentre la accelerazione ha una componente centripeta dovuta alla curvatura e una componente tangenziale causata dall'aumento della velocità lungo la traiettoria.

⟶ È bene notare che le definizioni date sono delle definizioni lagrangiane in quanto seguono le variazioni di una particella fluida lungo la sua traiettoria.

Fissiamo un p.to di osservazione

che è un p.to nello spazio che non è legato a nessuna particella. Indichiamo $\underline{x}$ la posizione di questo punto e chiediamoci "quanto vale la velocità in $\underline{x}$"?



Domanda: la velocità di chi? la velocità della particella che, all'istante t, occupa la posizione $\underline{x}$, i.e.

$$\underline{r}_A(t) \equiv \underline{x}$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{V}_A(t)$$

velocità in un p.to $\underline{x}$ del campo all'istante t.

Velocità di un oggetto

La velocità in un p.to $\underline{x}$ del campo, all'istante t, è la velocità della particella, i.g. A, che, all'istante t, si trova a transitare in $\underline{x}$

Similmente: $\underline{a}_A(t) = \underline{a}(\underline{x}, t)$

In un istante t', per $\underline{x}$, transiterà un'altra particella, diciamo B, che avrà una velocità $\underline{V}_B(t')$, allora:

$$\underline{V}(\underline{x}, t') = \underline{V}_B(t')$$

$$\underline{a}(\underline{x}, t') = \underline{a}_B(t')$$

⟶ Vogliamo, ora, calcolare la $\underline{a}(\underline{x}, t)$ i.e. a partire dalla $\underline{u}(\underline{x}, t)$ – definita nella posizione – vogliamo calcolare la $\underline{a}(\underline{x}, t)$.

$$\underline{a}_A = \frac{d}{dt}\underline{V}_A = \frac{d}{dt}\underline{u}(\underline{x},t) = \underline{a}(\underline{x},t)$$

$$\underline{a}(\underline{x},t) = \frac{d}{dt}\underline{u}(\underline{x},t) = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{r}_A}{dt} =$$

N.B. $\underline{x} \equiv r_A(t)$ i.e. $\underline{x}$ è la posizione della particella

$$= \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{u}$$

$$= \boxed{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}\underline{u} = \frac{D\underline{u}}{Dt}} \rightsquigarrow \text{ derivata materiale.}$$

- Se il fenomeno è stazionario, allora $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; ma anche sotto l'ipotesi di stazionarietà rimane un altro termine che è legato al gradiente di velocità. Quindi, <u>tutte le volte che la velocità non è uniforme nello spazio, allora il $\underline{\nabla}\underline{u}$ è non nullo e dunque può esserci un'accelerazione.</u>

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \boxed{\underline{u} \cdot \underline{\nabla}\underline{u}} \qquad (*)$$

ACCELERAZIONE CONVETTIVA
perché è legata al trasporto

$\longrightarrow$ L'accelerazione è <u>una f.ne NON lineare della velocità</u>.

$\longrightarrow$ Nella soluzione delle eqq differenziali, solitamente si cerca di costruire delle soluzioni tipo e poi costruire qualsiasi altra soluzione per combinazione lineare; questa tecnica funziona solo se le eqq. sono lineari e questo non è il caso della (*)

Risulta:

$$\boxed{\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}(\cdot)} \qquad (**)$$

N.B.

$$\frac{DT(\underline{x},t)}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T$$

La (**) è l'operatore <u>derivata materiale</u>

Fisicamente, la derivata materiale ci dice come sta variando la <u>grandezza posseduta dalla particella nello stato in cui si trova e pensare per il punto di osservazione uno muovendosi lungo la traiettoria</u>

☐ <u>l'accelerazione osservata in un punto dipende dal gradiente di velocità</u>. Se una grandezza dipende dal gradiente allora NON è possibile valutare la grandezza osservabile rilevante in un punto ⟶ è fondamentale, i.e., capire cosa accade nell'intorno del punto

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial t}\underline{\sigma}_i + \underline{\sigma}_J u_J \cdot \underline{\sigma}_K \frac{\partial u_i}{\partial x_K}\underline{\sigma}_i$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial t}\underline{\sigma}_i + u_J\,\delta_{JK}\frac{\partial u_i}{\partial x_K}\underline{\sigma}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}\underline{\sigma}_i + u_J\frac{\partial u_i}{\partial x_J}\underline{\sigma}_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}}$$

N.B. Tutte le componenti sono accoppiate, i.e. nella componente di accelerazione a_x entrano anche le componenti di velocità in y e z e lo stesso accade per le altre direzioni. ⟶ Questo fatto implica che LE EQUAZIONI DELLA FLUIDODINAMICA (che non sono altro che $\underline{F} = m\,\underline{a}$ scritte per un fluido) sono ACCOPPIATE SPAZIALMENTE, i.e. NON È possibile avere informazioni nell'evoluzione in una direzione senza conoscere ciò che accade nelle altre direzioni.

$$\underline{\nabla}\,\underline{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

□ Analisi del moto intorno a un p.to

Consideriamo una particella fluida il cui baricentro al tempo t coincide con l'origine di un sistema di assi cartesiani e immaginiamo che dopo un tempo Δt la stessa particella si sia portata in una posizione P sufficientemente vicina da poter ritenere accurato uno sviluppo in serie di Taylor troncato al prim'ordine

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_0 + \underline{\nabla}\underline{u}\big|_0 \cdot \underline{x} + O(\underline{x}^2)$$

$$Tr(\underline{\nabla}\,\underline{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \underline{\nabla}\cdot\underline{u}$$

$$\underline{\nabla}\,\underline{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix} = (\underline{\nabla}\cdot\underline{u})\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}}$$

dove :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} - \dfrac{\nabla \cdot \underline{u}}{3} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} - \dfrac{\nabla \cdot \underline{u}}{3} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} - \dfrac{(\nabla \cdot \underline{u})}{3} \end{vmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Tr}(\underline{\underline{A}}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + - \frac{1}{3}\left[3 \nabla \cdot \underline{u}\right] = \nabla \cdot \underline{u} - \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$\underline{\underline{A}}$ è la parte deviatorica di $\nabla \underline{u}$. Scriviamo $\underline{\underline{A}}$ come una parte simmetrica e una antisimmetrica

$$\mathrm{sym}(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T\right) = \underline{\underline{E}}$$

$$\mathrm{skw}(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\right) = \underline{\underline{\Omega}}$$

ovvero $\quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}} \longrightarrow \nabla \underline{u} = (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}$

Allora:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_0 + \nabla \underline{u} \cdot \underline{x} = \underline{u}_0 + \left[(\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}\right] \cdot \underline{x}$$

$$= \underline{u}_0 + (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{x} + \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{x}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\right) = \begin{vmatrix} 0 & \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ -\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & 0 & \left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ -\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & -\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

un tensore antisimmetrico in 3D ha solo tre informazioni indipendenti, i.e. è isomorfo a un vettore – l'informazione contenuta nel tensore è equivalente a quella contenuta in un vettore.

Si può definire

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} \longrightarrow \text{VORTICITÀ}$$

Si dimostra che:

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{x} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \times \underline{x}$$

i.e.

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underbrace{\underline{u}_0}_{\text{velocità di traslazione}} + \underbrace{\boxed{(\nabla \cdot \underline{u}) \underline{x}}}_{\substack{\text{parte isotropa} \\ \text{(compressione e/o trazione)}}} + \underbrace{\boxed{\underline{\underline{E}} \cdot \underline{x}}}_{\text{DEFORMAZIONE ANGOLARE}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\omega} \times \underline{x}}_{\text{velocità di rotazione rigida}}$$

* * *

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\underline{u} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{\nabla}\underline{u}^2 + \underline{\omega}\times\underline{u}$$

essendo

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla}\times\underline{u} \quad \text{la vorticità}$$

Rotore di un vettore

$$\underline{\nabla}\times\underline{V} = \begin{vmatrix} \underline{\sigma}_1 & \underline{\sigma}_2 & \underline{\sigma}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{v} = \frac{\partial}{\partial x_i}\underline{\sigma}_i \times v_J\,\underline{\sigma}_J = \underline{\sigma}_i\times\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v_J\,\underline{\sigma}_J\right) = \underline{\sigma}_i\times\frac{\partial v_J}{\partial x_i}\underline{\sigma}_J =$$

$$= \frac{\partial v_J}{\partial x_i}(\underline{\sigma}_i\times\underline{\sigma}_J) = \varepsilon_{iJk}\frac{\partial v_J}{\partial x_i}\underline{\sigma}_k$$

$\longrightarrow$ un campo vettoriale $\underline{V}$ con rotore nullo è detto IRROTAZIONALE.

▨ OPERATORI DIFF.LI DI ORDINE SUPERIORE

$\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}f = 0 \longrightarrow$ Il rotore del gradiente di uno scalare è nullo

$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\wedge\underline{v}) = 0 \longrightarrow$ La divergenza del rotore di un vettore è nulla

$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}f) = \nabla^2 f \longrightarrow$ la divergenza del gradiente di uno scalare è detta LAPLACIANO

Le f.ni scalari con laplaciano identicamente nullo si dicono ARMONICHE

Vale la seguente identità

$$\boxed{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{V}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{V}) - \nabla^2\underline{V}}$$

Campi potenziale

▨ Un campo vettoriale $\underline{V}(\underline{r})$ si dice **POTENZIALE** se esiste una f.ne scalare $\phi(\underline{r})$ tale che:

$$\underline{V} = \underline{\nabla}\phi$$

Se un campo è potenziale allora

$$\int_{P_1}^{P_2}\underline{V}\cdot d\underline{\ell} = \int_{P_1}^{P_2}\underline{\nabla}\phi\cdot d\underline{\ell} = \phi(P_2) - \phi(P_1)$$

i.e. un qualsiasi integrale di linea dipende solo dagli estremi di integrazione.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\underline{V}$ sia a potenziale è che $\underline{V}$ sia irrotazionale,

$$\underline{\nabla} \times \underline{V} = 0 \iff \underline{V} = \underline{\nabla} \phi$$

Se $\underline{V}(\underline{r})$ è a potenziale, allora

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi$$

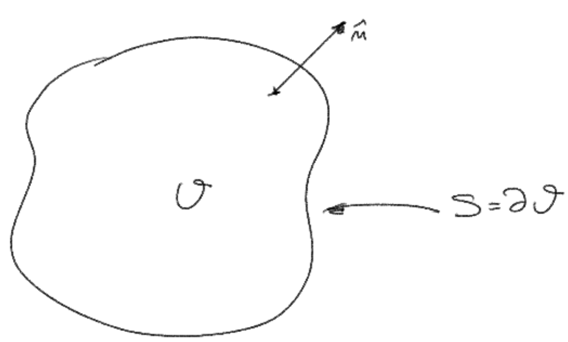
CAMPI SOLENOIDALI

Un campo vettoriale $\underline{V}(\underline{r})$ si dice SOLENOIDALE se esiste un altro campo vettoriale $\underline{A}$ (potenziale vettore) tale che:

$$\underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\underline{V}$ sia solenoidale è $\underline{\nabla} \cdot \underline{V} = 0$

EQUAZIONI DI BILANCIO



$\mathcal{V}$:= volume di controllo fisso rispetto a un riferimento inerziale
⟶ è il volume che contiene il sistema che vogliamo studiare.

S := superficie di controllo

$\hat{n}$:= versore normale uscente la superficie di controllo orientato verso l'esterno del volume.

Una grandezza <u>G si dice ESTENSIVA</u> quando è associata (è proporzionale) alla massa.
Una grandezza <u>G è detta INTENSIVA</u> quando non è associata alla massa

- Massa, q.d.m., energia, entropia sono esempi di grandezze estensive.
- Temperatura, pressione, viscosità sono esempi di grandezze intensive.

Per una grandezza ESTENSIVA è possibile formulare un'equazione di bilancio all'interno del volume di controllo.

$$\boxed{\text{Variazione di } G \text{ nel tempo}} = \boxed{\text{Scambio di } G \text{ con l'ambiente}} + \boxed{\text{Produzione di } G \text{ nel volume di controllo}}$$

Se M è la massa all'interno di $\mathcal{V}$

$$g = \lim_{V \to 0} \frac{G}{M} \longrightarrow$$ grandezza specifica per unità di massa

$$g^+ = \lim_{V \to 0} \frac{G}{V} \longrightarrow$$ grandezza specifica per unità di volume

$$\boxed{g^+ = \frac{G}{V} = \frac{G}{M}\,\frac{M}{V} = g\,\rho} \quad \text{per } V \to 0$$

- <u>Il flusso di una grandezza</u> — Il flusso φ_G di una grandezza G dà, in intensità e direzione, la quota di G che attraversa S, per l'unità di tempo e di superficie

$\underline{\varphi}_G \longrightarrow$ è un vettore se G è scalare

$\underline{\underline{\varphi}}_G \longrightarrow$ è un tensore se G è vettore

$$\boxed{[\varphi_G] = \frac{[G]}{[L^2][t]} = \frac{[G]}{[L^3]}\,\frac{[L]}{[t]}}$$

$\longrightarrow$

$$\underline{\varphi}_G = g^+ \underline{w} = \rho\, g\, \underline{w}$$ con $\underline{w}$ velocità opportuna

- Se $G = M$ allora $g = 1$ e $g^+ = \rho$, allora $\underline{\varphi}_M = \rho\,\underline{v}$

$$\boxed{\Phi_M = \int_S \underline{n} \cdot \underline{\varphi}_G \, dS} \longrightarrow$$ Scambio di G con l'esterno

PRODUZIONE

$$\dot{g}^+ = \frac{[G]}{[L^3][t]}$$ → produzione di G nell'unità di volume e di tempo

$$\dot{g} = \frac{[G]}{[M][t]}$$ → produzione specifica di G

$$\dot{g}^+ = \frac{[G]}{[L^3][t]} = \frac{[G]}{[M][t]}\,\frac{[M]}{[L^3]} = \rho\,\dot{g}$$

Produzione di G nel volume di controllo

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{g} \, d\mathcal{V}$$

EQUAZIONE DI BILANCIO INTEGRALE

$$\boxed{\text{Variazione di } G \text{ nel tempo}} = \boxed{\text{Scambio di } G \text{ con l'ambiente}} + \boxed{\text{Produzione di } G \text{ nel volume di controllo}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho g \, d\mathcal{V} = -\int_S \underline{n} \cdot \varphi_G + \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{g} \, d\mathcal{V}$$

ovvero

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho g) \, d\mathcal{V} = -\int_S \underline{n} \cdot \underline{\varphi}_G + \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{g} \, d\mathcal{V}$$

per Gauss

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho g) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla} \cdot \underline{\varphi}_G = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{g} \, d\mathcal{V}}$$

Ovvero:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \underline{\nabla} \cdot \underline{\varphi}_G - \rho \dot{g} \right] d\mathcal{V} = 0 \qquad \forall \mathcal{V}$$

Questo integrale dev'essere nullo indipendentemente dal volume $\mathcal{V}$, i.e.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \underline{\nabla} \cdot \underline{\varphi}_G - \rho \dot{g} = 0}$$

<u>La fisica del problema è racchiusa nella determinazione dell'espressione del flusso e della produzione.</u>

DINAMICA DEI FLUIDI

Affronteremo ora il problema del moto dei fluidi come risposta del sistema alle forze applicate, ma eternamente che generate all'interno del fluido stesso.

$\longrightarrow$ Deriveremo le equazioni del bilancio e di conservazione (rispettivamente della p.d.m., massa ed energia) e la loro applicazione a volumi di fluido finiti (formulazione integrale) o infinitesimi (differenziale).

TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS

Nella descrizione di un fenomeno è possibile scegliere due punti di vista:

- uno legato alle singole particelle fluide $\longrightarrow$ DESCRIZIONE LAGRANGIANA
- uno legato a posizioni fisse nello spazio $\longrightarrow$ DESCRIZ. EULERIANA

▨ Ricordiamo che la DERIVATA MATERIALE permette di determinare l'accelerazione di una particella fluida che, a un certo istante t, passa in un p.to fisso $\underline{x}$ nello spazio, i.e.

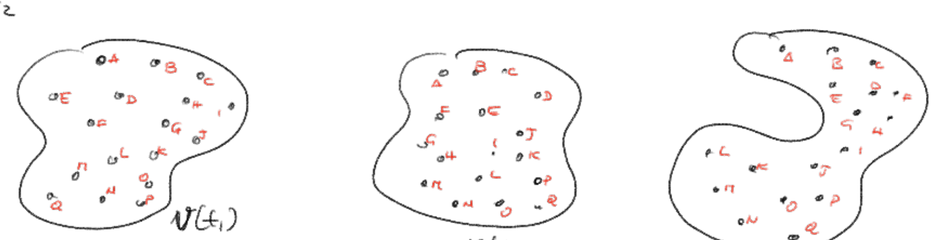
$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v}$$

▨ Se invece di considerare le singole particelle fluide si considera un SISTEMA FLUIDO, ci si pone il problema di determinare la variazione nel tempo di una grandezza B per un sistema finito

$\longrightarrow$ teorema del trasporto di Reynolds permette di legare le quantità calcolate per un sistema composto sempre dalle stesse particelle a quelle per un volume fisso nello spazio.

▨ Volume materiale e Volume di controllo

Immaginiamo in un istante t_1 di delimitare il volume $V(t_1)$ contenente delle particelle fluide che identifichiamo in qualche modo. Se fossimo in grado di seguire il moto di TUTTE le particelle fluide, a un tempo $t_2 > t_1$ avremo che il volume avrà cambiato posizione e forma ($V(t_2)$) e lo stesso accadrà in un tempo $t_3 > t_2$

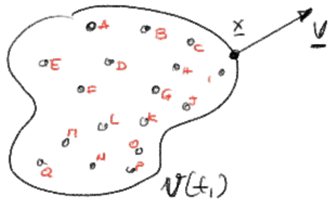


$V(t_1)$ $V(t_2)$ $V(t_3)$

Un volume così definito è detto VOLUME MATERIALE $\longrightarrow$ è composto per qualunque tempo t dalle particelle fluide che lo componevano inizialmente.

Un Volume materiale è un volume composto sempre e per sempre dalle stesse particelle fluide $\longrightarrow$ nessuna particella fluida contenuta inizialmente nel volume può uscire e nessuna particella che inizialmente non faceva parte del volume può entrare in $V(t)$.

La superficie del volume materiale è detta SUPERFICIE MATERIALE ed ha una proprietà fondamentale $\longrightarrow$ si muove sempre alla stessa velocità del fluido in quel punto.



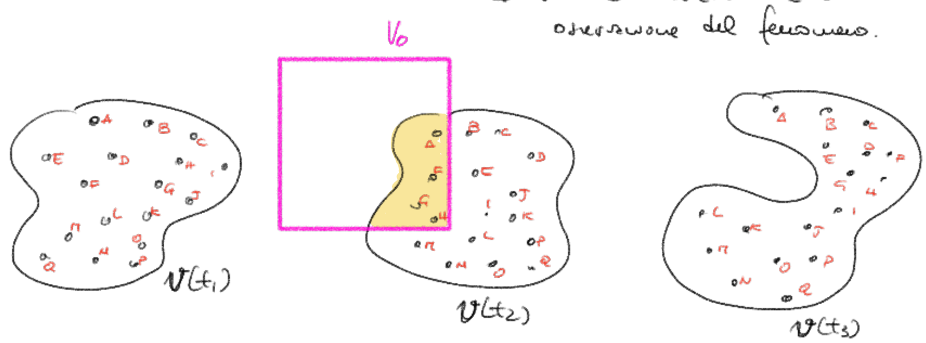
Se nel p.to $\underline{x}$ la superficie ha velocità $\underline{v}$ ciò implica che la particella che occupa quel punto deve avere anche lei velocità $\underline{v}$

▨ L'analogo del punto di controllo è il concetto di <u>VOLUME DI CONTROLLO</u>

Il volume di controllo è un volume, V_0, costituito da una REGIONE DI SPAZIO che scegliamo a nostro punto di osservazione finito.

Il volume materiale, nella sua evoluzione, può trovarsi, in un certo istante a occupare parte del volume di controllo V_0

▨ Volume di controllo è una stazione di osservazione del fenomeno.



□ Vogliamo scrivere delle relazioni legate al volume materiale, i.e. allo oggetto, in termini di volume di controllo.

$\longrightarrow$ $V(t)$ evolve come decide la dinamica (che noi vogliamo determinare) mentre il volume di controllo lo scegliamo noi ed è fisso nello spazio.

▨ <u>Grandezze intensive ed estensive</u>

* GRANDEZZA ESTENSIVA B una q.tà il cui valore dipende dalla estensione del volume $\mathcal{V}$ considerato.

* GRANDEZZA INTENSIVA b è una q.tà indipendente dal volume $\mathcal{V}$.

E.g. se si misura la temperatura di 1, 2 o 100 m^3 d'aria questa sarà sempre la stessa $\longrightarrow$ TEMPERATURA È UNA GRANDEZZA INTENSIVA

La massa di 1, 2 o 100 m^3 d'aria, invece, varia in f.ne del volume $\longrightarrow$ MASSA È UNA GRANDEZZA ESTENSIVA.

Se b è una grandezza intensiva è:

$$\boxed{B = \int_{\mathcal{V}} \rho\, b \, d\mathcal{V}} \qquad (*)$$

B è coniugata a b, i.e. B è una grandezza coniugata alla grandezza intensiva b.

$$B = M \longrightarrow b = 1$$

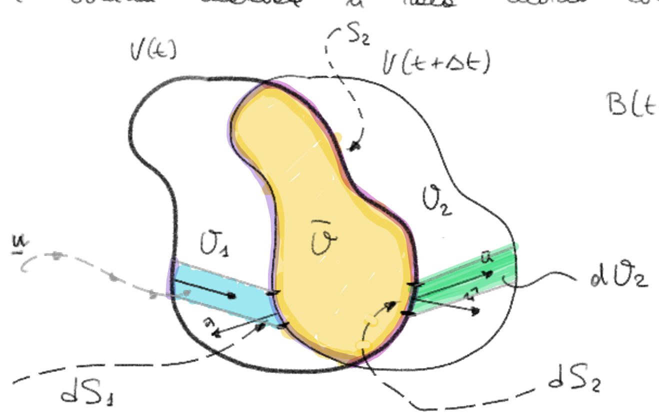
$$B = M\underline{V} \longrightarrow b = \underline{V}$$

La (*) è la relazione che lega la grandezza estensiva B alla sua intensiva coniugata. Nella (*), ρ è la densità del fluido nel volume $\mathcal{V}$.

<u>TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS</u> – Il nostro obiettivo è valutare

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\underline{x},t)\, b(\underline{x},t)\, d\mathcal{V}$$

Consideriamo, allo scopo, un volume di controllo V_0 fisso che al tempo t viene preso coincidente con il volume materiale $V(t)$; dopo un tempo Δt il volume materiale si sarà mosso come in figura



$$B(t+\Delta t) = \int_{V(t+\Delta t)} \rho b \big|_{t+\Delta t}\, d\mathcal{V}$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} \rho b\big|_{t+\Delta t} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \rho b\big|_t d\mathcal{V}}{\Delta t}$$

$$V(t) = \mathcal{V}_1 + \bar{\mathcal{V}} \qquad \text{mentre} \qquad V(t+\Delta t) = \bar{\mathcal{V}} + \mathcal{V}_2$$

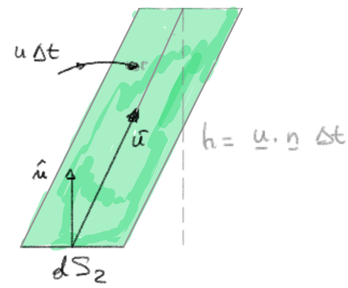
$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Bigg(\underbrace{\int_{\bar{\mathcal{V}}} \rho b\big|_{t+\Delta t} d\mathcal{V}}_{(*)} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_2} \rho b\big|_{t+\Delta t} d\mathcal{V}}_{(\#)} - \underbrace{\int_{\bar{\mathcal{V}}} \rho b\big|_t d\mathcal{V}}_{(*)} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}_1} \rho b\big|_t d\mathcal{V}}_{(\#\#)} \Bigg)$$

$$(*) \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\int_{\bar{\mathcal{V}}} \left(\rho b\big|_{t+\Delta t} - \rho b\big|_t\right) d\mathcal{V} \right) = \int \frac{\partial}{\partial t} \rho b \, d\mathcal{V}$$

N.B. per $\Delta t \to 0$ $\quad \bar{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{V}(t)$

Sull'interfaccia tra $\bar{\vartheta}$ e ϑ_2, S_2, prendiamo un elemento di superficie qualsiasi, dS_2, e andiamo a capire come dS_2 ha generato l'elemento di volume $d\vartheta_2$. dS ha una normale $\hat{n}$ e una velocità $\bar{u}$, nell'intervallo Δt, dS si sarà spostato come in figura. Nella sua traslazione, dS, spazza il volume

$$d\vartheta_2 = dS_2 \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, \Delta t$$



(#)

$$\int_{\vartheta_2} \rho b \big|_{t+\Delta t} \, d\vartheta = \int_{S_2} \rho b \big|_{t+\Delta t} \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, \Delta t \, dS$$

(##) $\quad dV_1 = - dS_1 \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, \Delta t \quad$ ovvero

$$\int_{\vartheta_1} \rho b \big|_t \, d\vartheta = - \int_{S_1} \rho b \big|_t \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, \Delta t \, dS$$

Quindi

$$\frac{dB(t)}{dt} = \int_{\vartheta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho b \, d\vartheta + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\cancel{\Delta t}} \left(\int_{S_2} \rho b \big|_{t+\Delta t} \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, \cancel{\Delta t} \, dS + \int_{S_1} \rho b \big|_t \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, \cancel{\Delta t} \, dS \right)$$

$$= \int_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial t} \rho b \, d\vartheta + \int_{S(t)} \rho b \big|_t \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS$$

N.B. per $\Delta t \to 0$
$S_1 + S_2 \longrightarrow S(t)$

i.e.

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \int_{\vartheta(t)} \frac{\partial \rho b}{\partial t} \, d\vartheta + \int_{S(t)} \rho b \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS} \qquad \text{[Rey]}$$

Nulla ci impedisce di considerare $\vartheta(t)$ e $S(t)$ coincidenti con il <u>volume di controllo</u>, ϑ_0 e S_0, i.e.:

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \int_{\vartheta_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} \, d\vartheta + \int_{S_0} \rho b \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS} \qquad (**)$$

Il teorema di Reynolds ci permette di mettere in relazione la funzione B calcolata su un volume materiale con quantità calcolate su un volume di controllo.

La (**) ci dice che le variazioni di B hanno due cause, una interna al sistema stesso e quindi dovuta a variazioni di b all'interno del volume $\mathcal{V}$; l'altra possibilità è causata da scambi del sistema attraverso la sua superficie, i.e. il FLUSSO di b attraverso S

Note: - Il teorema di Reynolds ci permette di portare la derivata nel tempo all'interno dell'integrale nel quale dipendono dal tempo sia la f.ne integranda che il volume di controllo.
- Il teorema di Reynolds ci permette di passare da una descrizione su volumi materiali, i.e. a una descrizione su oggetti, a una descrizione su volumi di controllo, i.e. sulle stazioni di osservazione.

Se la f.ne $\rho b \underline{u}$ è continua e differenziabile, allora il secondo membro della (**) si può trasformare utilizzando il TEOREMA DELLA DIVERGENZA e scrivere:

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t}\, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_0} \nabla \cdot (\rho b \underline{u})\, d\mathcal{V}}$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

- Forma integrale

$$B(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} b(\underline{x},t)\, \rho(\underline{x},t)\, d\mathcal{V}$$

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, d\mathcal{V} + \int_{S(t)} \rho b\, \underline{u} \cdot \underline{n}\, dS}$$

$$b(\underline{x},t) = 1 \longrightarrow B(t) = M(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\underline{x},t)\, d\mathcal{V} = \text{cost.}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho\, d\mathcal{V} = 0$$ i.e. in base al teorema di Reynolds:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho\, d\mathcal{V} = \boxed{\int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathcal{V} + \int_{S_0} \rho\, \underline{u} \cdot \underline{n}\, dS = 0} \qquad (A)$$

La (A) esprime la conservazione della massa in forma integrale e risulta particolarmente utile nelle applicazioni quando il fenomeno in esame è stazionario

$$\longrightarrow \quad \boxed{\int_{S_0} \rho\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dS = 0}$$

Forma differenziale

$$\int_{\vartheta_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\vartheta + \int_{S_0} \rho\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dS = 0 \longrightarrow \int_{\vartheta_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\vartheta + \int_{\vartheta_0} \underline{\nabla}\cdot \rho\underline{u}\, d\vartheta = 0$$

i.e.

$$\int_{\vartheta_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot \rho\underline{u} \right] d\vartheta = 0 \qquad (*)$$

dobbiamo a questo punto notare che la scelta del volume di controllo V_0 è assolutamente arbitraria, mentre la (*) impone l'uguaglianza per qualunque scelta di V_0. L'unica possibilità affinché ciò si verifichi è che sia identicamente nulla la funzione integranda, i.e.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot \rho\underline{u} = 0} \qquad (**)$$

La (**) è L'EQ.NE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA in forma differenziale.

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot \rho\underline{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, \underline{\nabla}\cdot\underline{u} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\rho = 0$$

N.B.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\rho$$

i.e. nel caso particolare di flusso incomprimibile $D\rho/Dt = 0$ è:

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0}$$

La derivata materiale di ρ misura la variazione di ρ, nel tempo, seguendo la particella lungo una linea di corrente – osservatore solidale alla particella.

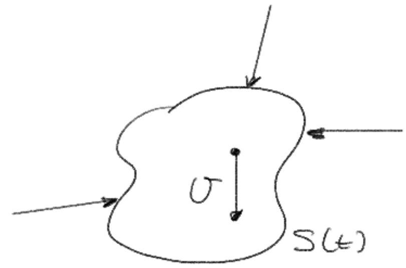
EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

→ FORMA INTEGRALE. Definiamo

$$\underline{Q} = \int_{V_0} \rho\, \underline{u}\, dV$$

i.e. $\underline{b} = \underline{u}$. In questo caso:

$$\underline{F} = \frac{d\underline{Q}}{dt}$$



in cui $\underline{F}$ rappresenta TUTTE le forze che agiscono sul volume materiale in esame.

$$\frac{d}{dt}\int_{V} \rho\, \underline{u}\, dV = \underline{F} = \underline{F_V} + \underline{F_S}$$

N.B. $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$
$\rho = \rho(\underline{x}, t)$

ovvero, per il teorema del trasporto di Reynolds, è:

$$\frac{dB}{dt} = \int_{V} \frac{\partial \rho b}{\partial t}\, dV + \int_{S} \rho b\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dS$$

i.e.

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \int_{V} \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t}\, dV + \int_{S} \rho\, \underline{u}\; \underline{u}\cdot\underline{n}\, dS = \underline{F_S} + \underline{F_V}$$

$$\underline{F_S} = -\int_{S_0} \underline{n}\, p\, dS + \underline{F_S'}$$

tra le forze di contatto possiamo ulteriormente distinguere l'azione della pressione da quella delle altre forze di contatto (come l'attrito)

$\underline{F_S}$:= le forze di contatto, i.e. quelle che agiscono solo attraverso azioni di contatto sulla superficie S del volume materiale

$\underline{F_V}$:= le forze di volume che agiscono sulle particelle fluide interne al volume materiale

$$\boxed{\int_{V_0} \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t}\, dV + \int_{S_0} \rho\, \underline{u}\,\underline{u}\cdot\underline{n}\, dS + \int_{S_0} p\,\underline{n}\, dS = \underline{F_S'} + \underline{F_V}}$$

Forma differenziale

$$\underline{F}_S = \int_{S_0} \underline{\underline{T}} \cdot n \, dS \qquad e \qquad \underline{F}_V = \int_{V_0} \rho \, \underline{f} \, d\mathcal{V}$$

in cui $\underline{f}$ è la densità delle forze di volume mentre $\underline{\underline{T}}$ è il tensore degli sforzi di superficie.

$$\underline{\underline{T}} = -p \, \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

p := pressione
$\underline{\underline{I}}$:= tensore identità
$\underline{\underline{\tau}}$:= parte deviatorica degli sforzi viscosi.

$$\boxed{\int_{V_0} \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{S_0} \rho \, \underline{u} \, \underline{u} \cdot n \, dS = -\int_{S_0} p \, \underline{\underline{I}} \cdot \underline{n} \, dS + \int_{S_0} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} \, dS + \int_{V_0} \rho \underline{f} \, d\mathcal{V}}$$

rappresenta il bilancio di quantità di moto in forma integrale.

Se è possibile applicare il teorema della divergenza, questa relazione può essere trasformata in:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{V_0} \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{u} \, \underline{u} \, d\mathcal{V} = -\int_{V_0} \underline{\nabla} p \, d\mathcal{V} + \int_{V_0} \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} \, d\mathcal{V} + \int_{V_0} \rho \underline{f} \, d\mathcal{V}$$

i.e.

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{u} \, \underline{u} + \underline{\nabla} p \right] d\mathcal{V} = \int_{V_0} \left[\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{f} \right] d\mathcal{V}$$

dove si può osservare che, dovendo sussistere l'identità dei due membri per qualunque scelta del volume di controllo V_0, devono necessariamente risultare uguali le funzioni integrande, i.e.

$$\boxed{\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{u} \, \underline{u} + \underline{\nabla} p = \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{f}} \qquad (*)$$

che è l'eq.ne di bilancio della q.d.m. in forma differenziale.

Combiniamo la (*) con la eq.ne di conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{u} = 0 \qquad [\cdot]$$

ovvero

$$\underline{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \, \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{u} = \underline{0} \qquad [:]$$

La q.tà scalare [°] moltiplicata per $\underline{u}$ rimane valida. La (*) è:

$$\cancel{\boxed{u \frac{\partial \rho}{\partial t}}} + \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \cancel{\boxed{\underline{u}\ \underline{\nabla}\cdot\rho \underline{u}}} + \rho \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{f}$$

ovvero

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{f}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u}\right] = -\underline{\nabla} p + \rho \underline{f} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}$$

Quindi

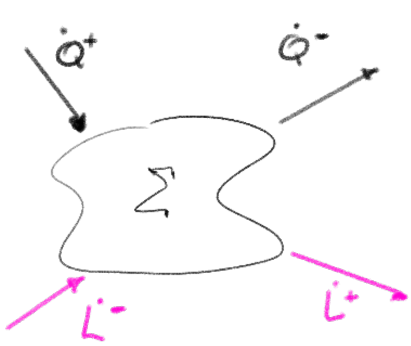
$$\boxed{\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \rho \underline{f} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}} \qquad [*]$$

- La [*] ci dice che per la particella fluida, la variazione della q.d.m. della particella fluida lungo la sua traiettoria è "provocata" da un gradiente di pressione, i.e. la particella si deve muovere lungo una traiettoria in cui la pressione sta cambiando – in particolare se vogliamo che la q.d.m. aumenti, il $\underline{\nabla} p$ dev'essere negativo, i.e. la particella si deve muovere da zone a pressione maggiore a zone a pressione minore. Inoltre, sempre la [*] ci dice che dovranno esserci delle forze di volume per avere un aumento di q.d.m. nel tempo

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

- forma integrale

Per la formulazione dell'eq.ne di conservazione dell'energia per un fluido partiamo dal PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA che, di fatto, sancisce la equivalenza tra le varie forme di energia.
Se E è il contenuto totale di energia del volume materiale, e con $\dot{L}$ e $\dot{Q}$ indichiamo con $\dot{L}$ e $\dot{Q}$ rispettivamente il lavoro e il calore fatto sul sistema e introdotto nel sistema, per unità di tempo – i.e. la potenza meccanica fatta dal sistema e quella termica immessa nel sistema:



$$\frac{dE}{dt} = \dot{L} + \dot{Q}$$

Se $\mathcal{E}$ è l'energia, i.e. la grandezza intensiva coniugata a E, scriviamo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V} \rho\, \mathcal{E}\, dV = \dot{L} + \dot{Q}$$

Usando il teorema del trasporto di Reynolds si ha:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E})\, d\mathcal{V} + \int_S \rho\, \mathcal{E}\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dS = \dot{L} + \dot{Q}} \qquad (*)$$

che è l'eq.ne dell'energia in forma integrale.

■ forma differenziale

Ricordando che $\dfrac{dQ}{dt} = \underline{F}_v + \underline{F}_S = \int_{\mathcal{V}} \rho\, \underline{f}\, d\mathcal{V} + \int_S \underline{n}\cdot\underline{\underline{T}}\, dS$

e tenendo conto che

$$\underline{\underline{T}} = -p\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

allora

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \rho\, \underline{f}\, d\mathcal{V} - \int_S \underline{n}\, p\, dS + \int_S \underline{n}\cdot\underline{\underline{\tau}}\, dS$$

Quindi

$$\dot{L}_s = \int_{S_0} (\underline{\underline{T}}\cdot\underline{n})\cdot\underline{u}\, dS \quad e \quad \dot{L}_v = \int_{V_0} \rho\underline{f}\cdot\underline{u}\, dS$$

potenza meccanica introdotta/estratta dal sistema a causa delle forze di superficie.

potenza meccanica introdotta/estratta dal sistema a causa delle forze di volume.

$$\boxed{\dot{L}_s = -\int_{S_0} p\,\underline{n}\cdot\underline{u}\, dS + \int_{S_0} (\underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{n})\cdot\underline{u}\, dS} \qquad \boxed{\dot{L}_v = \int_{\mathcal{V}} \rho\underline{f}\cdot\underline{u}\, dS}$$

Per il calore, poniamo $\dot{q}$ il calore per unità di volume generato internamente al sistema e $\underline{k}$ il flusso di calore per unità di superficie che entra nel sistema attraverso la superficie esterna. Poiché – postulato di Fourier –

$$\underline{k} = -\lambda\, \nabla T$$

λ := conducibilità termica del materiale

∇T := gradiente di temperatura.

$$\dot{Q}_v = \int_{\mathcal{V}_0} \rho\, \dot{q}\, d\mathcal{V}$$

$$\dot{Q}_s = -\int_{S_0} \underline{k}\cdot\underline{n}\, dS = \int_{S_0} \lambda\, \nabla T\cdot\underline{n}\, dS$$

☒ Il segno meno nella definizione di $\underline{k}$ deriva dal fatto che naturalmente il calore va da punti a temperatura maggiori a punti a temperatura minore, i.e.

si muove in verso opposto rispetto al gradiente di temperatura. Il segno negativo in $\dot{Q}_s$ è invece causato dall'orientamento di $\hat{n}$ che è positiva se punta esternamente al sistema. Poiché $\underline{K}$ è positivo se è entrante nel sistema, allora $\underline{K}\cdot n$ risulterebbe negativo per flussi di calore entranti nel sistema, da cui il segno negativo.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\vartheta} \rho\, \mathcal{E}\, d\vartheta = \dot{L}_s + \dot{L}_v + \dot{Q}_s + \dot{Q}_v$$

e quindi

$$\int_{\vartheta_0} \frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} d\vartheta + \int_{S_0} \rho \mathcal{E}\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dS = -\int_{S_0} p(\underline{I}\cdot\underline{n})\cdot\underline{u}\, dS + \int_{S_0} (\underline{\tau}\cdot\underline{u})\cdot\underline{u}\, dS + \int_{\vartheta_0} \rho \underline{f}\cdot\underline{u}\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{S_0} \lambda\, \underline{\nabla} T\cdot\underline{n}\, dS + \int_{\vartheta_0} \rho \dot{q}\, d\vartheta$$

che è l'eq.ne dell'energia in forma integrale.

Usando il teorema della divergenza si ha:

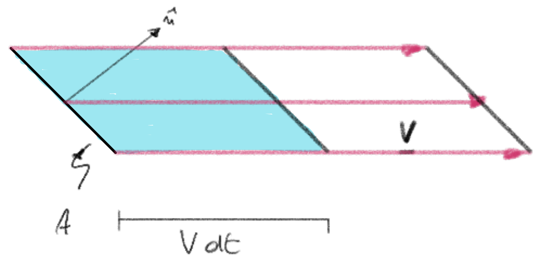
$$\int_{\vartheta_0}\left[\frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho \mathcal{E}\underline{u})\right] d\vartheta = \int_{\vartheta}\Big(-\underline{\nabla}\cdot(p\underline{u}) + \underline{\nabla}\cdot(\underline{\tau}\cdot\underline{u}) + \rho\underline{f}\cdot\underline{u} + \underline{\nabla}\cdot(\lambda\underline{\nabla}T) +$$
$$+ \rho\dot{q}\Big)\, d\vartheta$$

ovvero:

$$\frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\mathcal{E}\underline{u}) = -\underline{\nabla}\cdot p\underline{u} + \underline{\nabla}\cdot(\underline{\tau}\cdot\underline{u}) + \rho\underline{f}\cdot\underline{u} + \underline{\nabla}\cdot(\lambda\underline{\nabla}T) + \rho\dot{q}$$

CONSERVAZIONE DELLA MASSA

FLUSSO e PORTATA



Si consideri una superficie infinitesima, dA, arbitrariamente orientata in un fluido. Sia A piccola in modo che $\underline{V}$ possa considerarsi costante attraverso dA. Nel tempo dt, le particelle fluide avranno percorso uno spazio Vdt e spazzato un volume

$$d\vartheta = V_n \, dt \, A \quad \text{ovvero} \quad (\underline{V} \cdot \underline{n}) \, dt \, A$$

Dunque, in un tempo dt, transiterà una q.tà di massa pari a

$$dm = \rho \, d\vartheta = \rho \, (\underline{V} \cdot \underline{n}) \, dt \, A$$

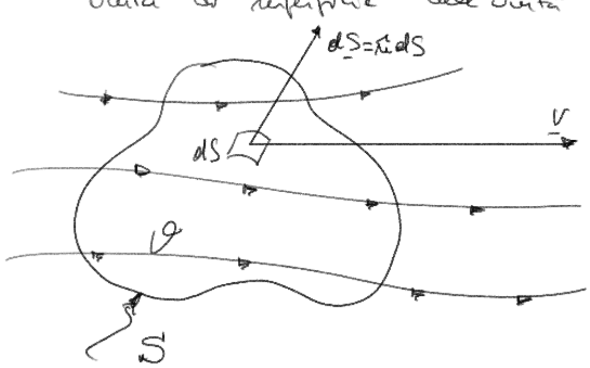
ovvero una portata pari a:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho (\underline{V} \cdot \underline{n}) A$$

Il flusso di massa è la portata per unità di area:

$$\boxed{\frac{\dot{m}}{A} = \rho (\underline{V} \cdot \underline{n})}$$

Il flusso di massa rappresenta la q.tà di massa che transita per unità di superficie nell'unità di tempo



PRINCIPIO FISICO: La massa si conserva.

Considerato un fluido in cui tutte le proprietà variano nello spazio e nel tempo. In questo fluido, si consideri un volume di controllo fisso

$\Downarrow$

il flusso di massa netto attraverso la superficie S è legato alla variazione nel tempo della massa all'interno del volume di controllo ϑ.

$$\boxed{\int_S \rho \, \underline{V} \cdot \underline{n} \, dS = - \frac{d}{dt} \int_{\vartheta} \rho \, d\vartheta}$$

$\longrightarrow$ Eq.ne di continuità in forma integrale

Si ha:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \, d\mathcal{V} + \int_S \underline{n} \cdot \rho \underline{V} \, dS = 0$$

ovvero

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{V} \, d\mathcal{V} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{V}) = 0} \longrightarrow$$ eq.ne di continuità in forma integrale.

Osserviamo che l'unica assunzione fatta per derivare le eq.ni di continuità (in forma integrale e differenziale) è quella della natura continua del fluido. Quindi le eq. ricavate sono valide per un fluido 3-D, instazionario, viscoso e non-viscoso, comprimibile e incomprimibile.

Per un flusso stazionario $\longrightarrow$ $\boxed{\int_S \rho \underline{n} \cdot \underline{V} \, dS = 0} \longrightarrow \int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{V}) d\mathcal{V} = 0$

i.e. $\boxed{\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{V}) = 0}$

BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Seconda legge di Newton $\longrightarrow \underline{F} = m \underline{a} \longrightarrow \underline{F} = \frac{d}{dt}(m \underline{V})$

Principio fisico $\longrightarrow$ Forza = variazione nel tempo della q.d.m.

Forze $\longrightarrow$ forze di volume : Body forces $\longrightarrow$ gravità, forze elettromagnetiche, o ogni altro tipo di forza che agisce a distanza nel fluido all'interno di $\mathcal{V}$.

$\longrightarrow$ forze di superficie : Surface forces $\longrightarrow$ pressione e sforzi di taglio agenti nel volume di controllo.

$$\text{Body force} = \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{f} \, d\mathcal{V}$$ con $\underline{f}$:= le forze di volume agenti per unità di massa

$$\text{Pressure force} = -\int_S \underline{n} \, p \, dS$$ il segno meno indica che la forza è in direzione opposta alla normale $\hat{n}$.

$F_{viscous}$ denota le forze totali viscose esercitate nel volume di controllo.

$$\underline{F} = \int_{\vartheta} \rho \underline{f}\, d\vartheta - \int_{S} \underline{n}\, p\, dS + \underline{F}_{viscose}$$

$\boxed{\dfrac{d}{dt}(m \underline{v})}$ La variazione nel tempo della q.d.m. del fluido entro attraverso il volume di controllo è somma di due termini

- Flusso netto di q.d.m. in uscita dal volume di controllo attraverso $\underline{S}$
- La variazione nel tempo della q.d.m. dovuta alle fluttuazioni istantanee delle proprietà del fluido interno a ϑ.

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \underline{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho \underline{v}\, d\vartheta + \int_{S} (\underline{n} \cdot \rho \underline{v}\, \underline{v})\, dS$$

Ovvero:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho \underline{v}\, d\vartheta + \int_{S} (\underline{n} \cdot \rho \underline{v}\, \underline{v})\, dS = -\int_{S} \underline{n}\, p\, dS + \int_{\vartheta} \rho \underline{f}\, d\vartheta + \underline{F}_{viscose}}$$

⟶ Eq.ne della q.tà di moto in forma integrale

$$-\int_{S} \underline{n}\, p\, dS = -\int_{\vartheta} \underline{\nabla} p\, d\vartheta \quad ; \quad \int_{S} (\underline{n} \cdot \rho \underline{v})\underline{v}\, dS = \int_{\vartheta} \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v})\underline{v}\, d\vartheta$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v})\underline{v} = -\underline{\nabla} p + \rho \underline{f}}$$

⟶ Eq.ne della q.tà di moto in forma differenziale.

<u>Specializziamo le eq.ni per un flusso stazionario e non viscoso e senza forze di volume</u>

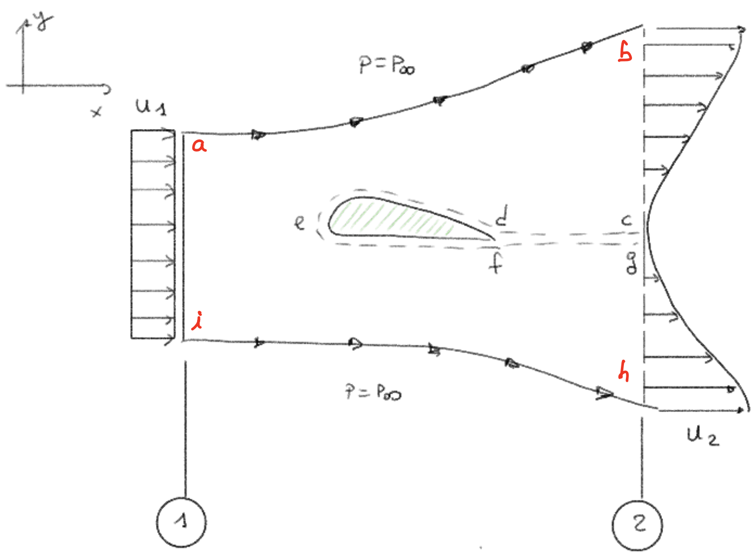
$$\boxed{\int_{S} (\underline{n} \cdot \rho \underline{v})\underline{v}\, dS = -\int_{S} p \underline{n}\, dS}$$

▨ Un'applicazione dell'eq.ne della q.d.m. → resistenza di un corpo bidimensionale.

Durante il periodo che va dal 1930 al 1940, la NACA fece una campagna di test per valutare la portanza e la resistenza di una serie di profili alari. Queste misure furono condotte in una galleria del vento appositamente progettata dove il modello dell'ala era bloccato tra le due pareti della galleria del vento stessa. → i.e., the wing tips were butted against the sidewall of the wind tunnel. In tal modo si veniva a valutare il flusso bidimensionale attorno all'ala.

→ il p.to importante che si vuole qui sottolineare è che poiché l'ala era montata tra le due superfici della galleria del vento non poteva essere usata una bilancia per misurare le forze.

→ La portanza fu ottenuta dalla distribuzione di pressione sul soffitto e sul pavimento della galleria del vento (al di sopra e al di sotto dell'ala); la resistenza è stata ricavata da misurazioni della velocità del flusso a valle dell'ala.



- Volume di controllo è abcdefghi
- Lungo z il volume di controllo si estende per 1 unità
- ① e ② sono le stazioni di inflow e outflow, rispettivamente.

→ Si assume che il contorno abhi sia lontano dal corpo in modo tale che la pressione sia la stessa su abhi e pari alla pressione indisturbata p_∞

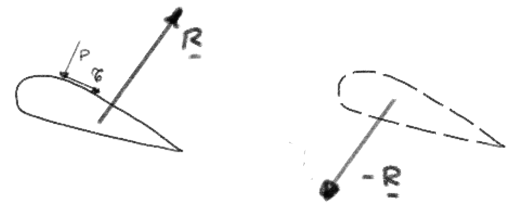
- la pressione all'inflow si assume uniforme e pari a u_1; la velocità alla stazione ② sia $u_2 = u_2(y)$

Le forze di superficie nel volume di controllo:

- forze di pressione: $$-\int_S p\,\underline{n}\,dS = -\int_{abhi} p\,\underline{n}\,dS$$
- forze di superficie su def dovute al corpo.

▨ Osserviamo che i tagli cd e fg sono però adiacenti gli uni con gli altri; qualunque sforzo di taglio o distribuzione di pressione su uno è uguale e opposto a quello sull'altro

N.B. Se $\underline{R}$ è il risultante delle forze di superficie (p e τ) del fluido sul profilo, allora $-\underline{R}$ è la risultante delle forze superficiali esercitate dal corpo sul contorno del volume di controllo



$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} \rho \underline{V}\, d\mathcal{V}} + \int_S (\rho \underline{V}\cdot\underline{n})\underline{V}\, dS = -\int_{abhi} p\underline{n}\, dS - \underline{R}$$

steady flow

$$\boxed{\underline{R} = -\int_S (\rho\underline{V}\cdot\underline{n})\underline{V}\, dS - \int_{abhi} p\underline{n}\, dS}$$

→ Eq.ne vettoriale.

Lungo x:
$$D = -\int_S (\rho\underline{V}\cdot\underline{n})\, u\, dS - \int_{abhi} (p\, dS)_x$$

N.B. $\displaystyle\int_{abhi} p\, dS\Big|_x = 0$ → indipendentemente dalla forma di abhi, poiché p uguale costante lungo la superficie

Quindi:
$$D = -\int_S (\rho\underline{V}\cdot\underline{n})\, u\, dS$$

Si osservi: ab, hi e def sono streamlines, i.e. $\underline{V}\cdot\underline{n}=0$
i contributi attraverso cd e fg si annullano vicendevolmente

$$D = -\int_S (\rho\underline{V}\cdot\underline{n})\, u\, dS = \int_i^a \rho_1 u_1^2\, dy - \int_h^b \rho_2 u_2^2\, dy$$

Scriviamo, ora, l'eq.ne della continuità applicata al volume di controllo

$$-\int_i^a \rho_1 u_1\, dy + \int_h^b \rho_2 u_2\, dy = 0 \longrightarrow \int_i^a \rho_1 u_1\, dy = \int_h^b \rho_2 u_2\, dy$$

ovvero, moltiplicando per u_1 ambo i membri:

$$\int_{i}^{a} \rho_1 u_1^2 \, dy = \int_{h}^{b} \rho_2 u_2 u_1 \, dy \longrightarrow$$

$$D = -\int_S (\rho \underline{V} \cdot \underline{n}) u \, dS = \int_{h}^{b} \rho_2 u_2 u_1 \, dy - \int_{h}^{b} \rho_2 u_2^2 \, dy$$

ovvero

$$\boxed{D = \int_{h}^{b} \rho_2 u_2 (u_1 - u_2) \, dy} \longrightarrow$$

Questa relazione esprime la resistenza di un corpo in termini di u_1, u_2 e ρ_2: proprietà che possono essere facilmente determinate sperimentalmente.

BILANCIO DELL'ENERGIA

Osserviamo che per un fluido incomprimibile, ρ è costante, e le variabili del campo fluidodinamico sono p e $\underline{V}$, i.e. le variabili. Le eq.ni di conservazione della massa e quella del bilancio della q.d.m. sono sufficienti per risolvere il problema. Per un flusso comprimibile, invece, ρ non è costante e quindi occorre introdurre un'ulteriore equazione per completare il sistema.

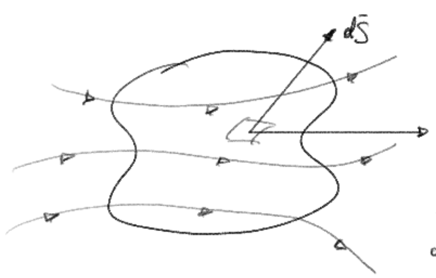
Energia non può né crearsi né distruggersi ma si trasforma.

$$\boxed{\delta q + \delta w = de}$$

$\longrightarrow$ Prima legge della termodinamica

- $\delta q :=$ incremento di calore del sistema dall'ambiente
- $\delta w :=$ lavoro fatto nel sistema dall'ambiente esterno

Entrambe queste forme di energia quando aggiunte al sistema ne cambiano l'energia interna.



$$B_1 + B_2 = B_3$$

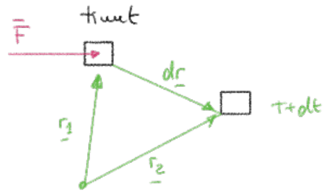
B_1: rateo di calore addotto al fluido contenuto nel volume di controllo dall'ambiente esterno

B_2: rateo di lavoro fatto nel fluido contenuto nel volume di controllo

B_3: rateo di variazione di energia del fluido contenuto nel volume di controllo

$$B_1 = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{q} \, d\mathcal{V} + \dot{Q}_{viscoso}$$

N.B.



per definizione $\mathcal{L} = \underline{F}\cdot d\underline{r}$

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \underline{F}\cdot\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{F}\cdot\underline{V}$$

ovvero, la variazione, nel tempo, del lavoro è il prodotto della forza F per la velocità $\underline{V}$, i.e.

$$B_2 = -\int_S p\,\underline{n}\cdot\underline{V}\,dS + \int_\vartheta \rho\,\underline{f}\cdot\underline{V}\,d\vartheta + \dot{W}_{viscous}$$

$$B_3 = \int_S (\rho\,\underline{V}\cdot n)\,dS\left(e + \frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\int_\vartheta \rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)d\vartheta$$

Quindi:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_\vartheta \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)d\vartheta + \int_S \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\underline{V}\cdot\underline{n}\,dS = \int_\vartheta \rho\,\dot{q}\,d\vartheta - \int_S p\underline{V}\cdot\underline{n}\,dS + \dot{Q}_{viscous} + \int_\vartheta \rho(\underline{f}\cdot\underline{V})\,d\vartheta + \dot{W}_{viscous}.}$$

eq.ne energia in forma integrale.

In forma differenziale

adiabatic inviscid

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]} + \nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\underline{V}\right] = \cancel{\rho\dot{q}} - \nabla\cdot(p\underline{V}) + \cancel{\dot{q}'_{visc}} + \cancel{\rho(\underline{f}\cdot\underline{V})} + \cancel{\dot{W}'_{viscous}}.$$

steady flow

without body forces

inviscid

$$\boxed{\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\underline{V}\right] = -\nabla\cdot(p\underline{V})}$$

Basic Flow Equations

Continuity equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \rho\, d\mathcal{V} + \oiint_S \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dS} = 0 \tag{2.48}$$

or

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0 \tag{2.52}$$

or

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{2.108}$$

Momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \oiint_S (\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dS})\mathbf{V} = -\oiint_S p\,\mathbf{dS} + \oiiint_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{f}\, d\mathcal{V} + \mathbf{F}_{\text{viscous}} \tag{2.64}$$

or

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u\mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (\mathcal{F}_x)_{\text{viscous}} \tag{2.70a}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v\mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (\mathcal{F}_y)_{\text{viscous}} \tag{2.70b}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho w\mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (\mathcal{F}_z)_{\text{viscous}} \tag{2.70c}$$

or

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (\mathcal{F}_x)_{\text{viscous}} \tag{2.113a}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (\mathcal{F}_y)_{\text{viscous}} \tag{2.113b}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (\mathcal{F}_z)_{\text{viscous}} \tag{2.113c}$$

(*continued*)

Energy equation

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right) d\mathcal{V} + \oiint_S \rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\mathbf{V}\cdot\mathbf{dS}\\ = \oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q}\rho\, d\mathcal{V} + \dot{Q}_{\text{viscous}} - \oiint_S p\mathbf{V}\cdot\mathbf{dS}\\ + \oiiint_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{V})\, d\mathcal{V} + \dot{W}_{\text{viscous}}\end{aligned} \tag{2.95}$$

or

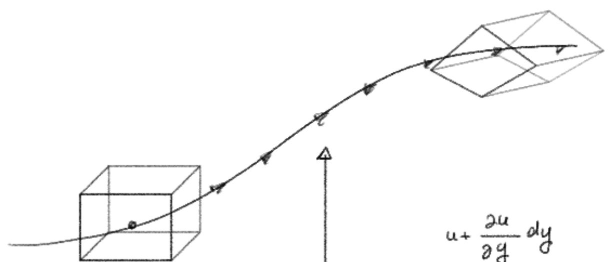
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \nabla\cdot\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\mathbf{V}\right] = \rho\dot{q} - \nabla\cdot(p\mathbf{V}) + \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{V})\\ + \dot{Q}'_{\text{viscous}} + \dot{W}'_{\text{viscous}}\end{aligned} \tag{2.96}$$

or

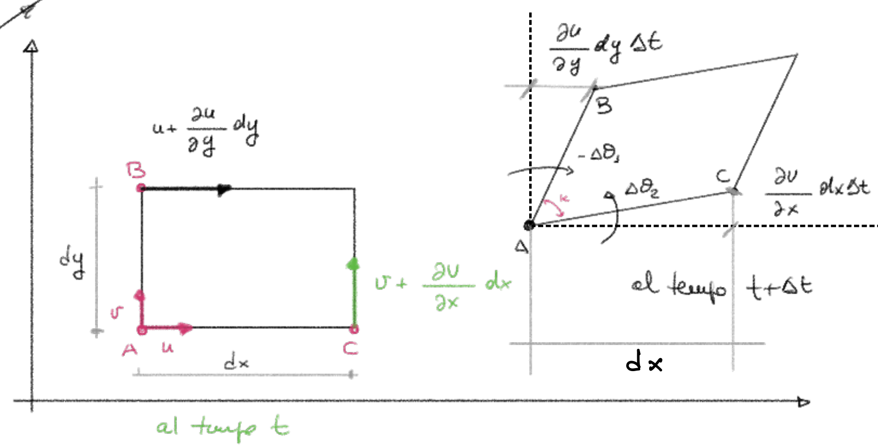
$$\rho\frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \rho\dot{q} - \nabla\cdot(p\mathbf{V}) + \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}) + \dot{Q}'_{\text{viscous}} + \dot{W}'_{\text{viscous}} \tag{2.114}$$

VELOCITÀ ANGOLARE, VORTICITÀ E SFORZO

Si consideri un elemento fluido infinitesimo che si muove nel campo. Durante il suo moto, può traslare, può ruotare e può deformarsi.



La deformazione e la rotazione dipendono dal campo di velocità → valuteremo queste p.tà.



Nell'intervallo Δt

p.to A si sposta, in direzione y, dl una q.tà $v \Delta t$

p.to C si sposta, in direzione y, una q.tà $\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \Delta t$

→ spost.to relativo, nella direzione y, di C rispetto ad A $\frac{\partial v}{\partial x} dx \Delta t$

Per angoli piccoli è

- $$\Delta\theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} dx \Delta t / dx = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t$$

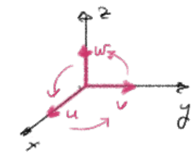
- $$\Delta\theta_1 = - \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t$$

Valutiamo le velocità angolari delle linee AB e AC:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} = - \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Per definizione, la velocità angolare dell'elemento fluido nel piano xy è la media delle velocità angolari delle linee AB e AC, ovvero:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$



Quindi.

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Ovvero

$$\boxed{\underline{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}\right]}$$

⟶ velocità angolare della particella fluida

⟶ VORTICITÀ È IL DOPPIO DELLA VELOCITÀ ANGOLARE

$$\underline{\xi} = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

$$= \underline{\nabla} \times \underline{V}$$ ⟶ In un campo di velocità, il rotore della velocità è uguale alla vorticità

Se indichiamo con κ l'angolo tra i lati AB e AC, notiamo che al tempo t è $\kappa_1 = \pi/2$

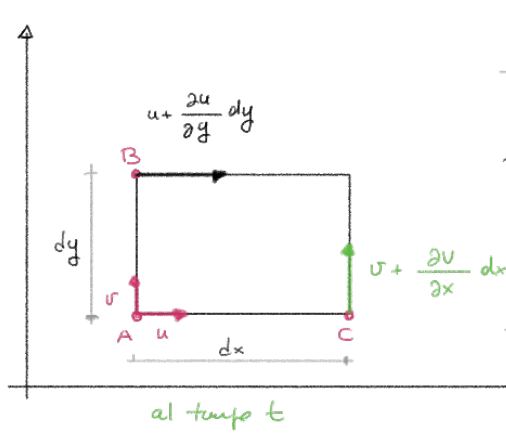
mentre al tempo $t+\Delta t$ è $\kappa_2 = \frac{\pi}{2} - \left(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1\right)$

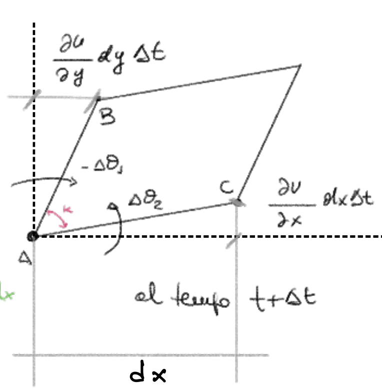
ovvero

$$\Delta\kappa = \frac{\pi}{2} - \left(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1\right) - \frac{\pi}{2} = -\left(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1\right)$$

Per definizione la DEFORMAZIONE è l'opposto della variazione $\Delta\kappa$

$$\text{STRAIN} = -\Delta\kappa = \Delta\theta_2 - \Delta\theta_1$$





$$\varepsilon_{xy} = -\frac{d\kappa}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Similmente

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad e \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

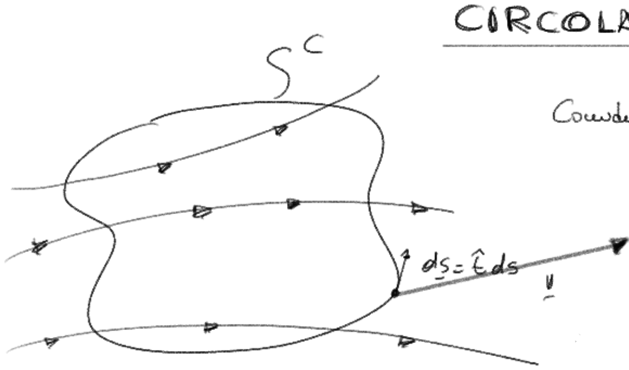
Organizziamo le derivate in una matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La somma dei termini nella diagonale è $\nabla \cdot V$ $\longrightarrow$ DILATAZIONE DELL'ELEMENTO FLUIDO.

I termini fuori diagonale sono associati alla rotazione e alla deformazione dell'elemento fluido.

CIRCOLAZIONE



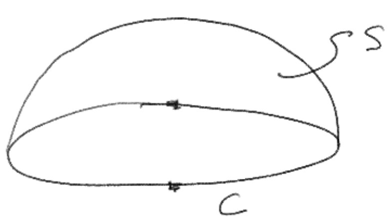
Consideriamo una curva chiusa C

$$\boxed{\Gamma = -\oint_C \underline{V} \cdot d\underline{s}}$$

i.e. la circolazione è semplicemente l'integrale di linea della velocità intorno alla curva chiusa

La circolazione è collegata alla vorticità attraverso il teorema di Stokes:

$$\Gamma \equiv -\oint_C \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = \int_S (\nabla \times \underline{V}) \cdot \underline{n}\, dS$$



i.e. la circolazione intorno a una curva C è uguale al flusso di vorticità attraverso S

POTENZIALE DI VELOCITÀ

Se

$$\xi = \nabla \times \underline{V} = \underline{0}$$

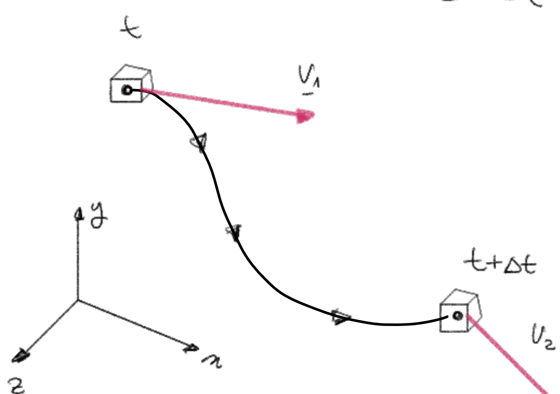
il campo è, per definizione, IRROTAZIONALE. Sia ϕ una funzione scalare, poiché

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \longrightarrow \text{per un campo irrotazionale } \underline{V} = \nabla \phi$$

i.e. per un campo irrotazionale esiste una funzione scalare ϕ tale che $\underline{V}$ sia il gradiente di ϕ. ϕ è detta funzione potenziale di velocità

DERIVATA MATERIALE

$$B = B(x, y, z, t)$$



$$B_2 = B_1 + \left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_1 (x_2 - x_1) + \left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_1 (y_2 - y_1) + \left.\frac{\partial B}{\partial z}\right|_1 (z_2 - z_1) + \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_1 (t_2 - t_1) +$$

Termini del 2° ordine

$$\frac{B_2 - B_1}{t_2 - t_1} = \left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_1 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_1 \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left.\frac{\partial B}{\partial z}\right|_1 \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_1$$

facendo il limite per $t_2 \to t_1$ è:

$$\frac{DB}{Dt} = \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_1 + \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{\partial B}{\partial y} v + \frac{\partial B}{\partial z} z$$

i.e.

$$\boxed{\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \underline{V} \cdot \underline{\nabla} \bullet}$$

Derivata materiale

derivata locale

derivata convettiva