ESERCIZIO

Dimensionare la sezione di un'asta cava cilindrica in Avional 2024 ($E = 72594\ N/mm^2$ e $\sigma_s = 240\ N/mm^2$), facente parte di un sistema di comando rigido di un timone di profondità, sapendo che essa è lunga 1,7 m e che il carico di compressione che si esercita su essa, per effetto della forza che il pilota esercita sulla barra di comando è $P = 3150\ N$.

SVOLGIMENTO

Poichè l'asta di comando è lunga $l = 1700\ mm$, si tratta di un corpo snello soggetto a un carico di compressione; per dimensionarlo useremo la teoria di Eulero per il carico di punta.

N.B. La nostra asta essendo parte di un sistema di comando rigido, nel quale le aste sono collegate tra di loro mediante cerniere, dovrà essere $K = 1$ e $l_0 = L$ ovvero:

$$P_{cr} = \frac{E \cdot J_{min}\, \pi^2}{L^2} = 1{,}5 * P$$

Risulta:

$$J_{min} = \frac{1{,}5 * P * L^2}{E * \pi^2} = 19060\ mm^4$$

Si tratta di una asta a sezione circolare cava, per cui è:

$$J_{min} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

ovvero

$$D^4 - d^4 = \frac{64}{\pi} * J_{min} = \frac{64}{\pi} * 19060 = 388298\ mm^4$$

Ipotizzando per l'asta un rapporto tra i diametri del 95%, ovvero:

$$\frac{d}{D} = 0.95 \rightarrow d = 0.95\, D$$

si ottiene:

$$D^4 - (0.95\, D)^4 = 388298 \rightarrow D^4(1 - 0.81) = 388298$$

e quindi:

$$D = \sqrt[4]{\frac{388298}{1-0.81}} = 37.81 \text{ mm}$$

$$d = 35.92 \text{ mm}$$

ESERCIZIO – Determinare il carico critico di punta di un'asta tubolare in Avional ($E = 72500 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_s = 240 \text{ N/mm}^2$) incernierata agli estremi, di lunghezza 1m, avente sezione circolare con diametro esterno 30mm e interno 28mm. Di quanto sarebbe stato maggiore il valore del carico massimo assiale se si fosse realizzata una semplice verifica a compressione?

SVOLGIMENTO –

$$P_{cr} = \frac{E \cdot \pi^2 \cdot J_{min}}{l_0^2}$$

$l_0 = L$ essendo gli estremi incernierati. $L = 1\text{m} = 1000 \text{ mm}$

$$J_{min} = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(30^4 - 28^4\right) = 9584.1 \text{ mm}^4$$

Per cui

$$P_{cr} = \frac{72500 \times \pi^2 \times 9584.1}{1000^2} = 6850,92 \text{ N}$$

Una semplice verifica a compressione, invece, ponendo $\sigma_s = 240 \text{ N/mm}^2$ fornirebbe:

$$\sigma = \frac{N}{A} \rightarrow N = \sigma_s A = 240 \cdot \left[\frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\right] = 240 \cdot \left[\frac{\pi}{4}\left(30^2 - 28^2\right)\right] = 21854,4$$

ovvero

$$N = 3.19 \, P_{cr}$$

ESERCIZIO - Calcolare il rapporto di snellezza λ di una trave a sezione circolare di diametro esterno $D = 6$ cm, spessore $t = 5$ mm, lunga 2 m, incastrata al piede e libera alla sommità.
Se la trave fosse stata incastrata al piede e incernierata alla sommità, quale sarebbe stata la sua lunghezza a parità di rapporto di snellezza λ?

SVOLGIMENTO - Risulta:

$$\lambda = l_0 \sqrt{\frac{A}{J_{min}}}$$

$D = 6\ cm = 60\ mm$

$d = 60\ mm - 5\ mm = 55\ mm$

$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(60^2 - 55^2) = 451,4\ mm^2$

$l_0 = 2\ l = 2 * 2000 = 4000\ mm$ (piede incastrato e sommità libera)

$J_{min} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(60^4 - 55^4) = 186\,897,5\ mm^4$

$$\lambda = 4000 \sqrt{\frac{451,4}{186897,5}} = 196,6$$

Nel caso in cui il piede fosse incastrato e la sommità incernierata, è : $l_0 = 0.7\ l^*$

$$\lambda = 0.7\ l^* \sqrt{\frac{A}{J_{min}}} \rightarrow l^* = \frac{\lambda}{0.7} \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \frac{196,6}{0.7} \sqrt{\frac{186897,5}{451,4}} = 5715\ mm$$

ESERCIZIO - Dimensionare un'asta a sezione circolare di acciaio ($E = 206\,000\ N/mm^2$), incastrata a un estremo e incernierata nell'altro, lunga 2,80 m e compressa assialmente con un carico $P = 65\ kN$. Assumere $d/D = 0.80$.

SVOLGIMENTO - Per la trave data è $l_0 = 0.7\ L = 0.7 * 2800 = 1960\ mm$
Risulta

$$P_{cr} = 1,5 * P = 97\,500\ N$$

Si ha:

$$J_{min} = \frac{l_0^2}{\pi^2} \frac{P_{cr}}{E} = \left(\frac{1960}{\pi}\right)^2 \frac{97500}{206\,000} = 184412\ mm^4$$

Risulta:

$$J_{min} = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = 184412 \text{ mm}^4$$

ovvero:

$$D^4 - d^4 = \frac{64}{\pi}\, 184412$$

Poiché $d = 0.80\, D$ è: $D^4\left(1 - 0.41\right) = \frac{64}{\pi} \times 184412$

$$D = \sqrt[4]{\frac{64}{\pi}\,\frac{184412}{1-0.41}} = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$$

$d = 4$ cm

ESERCIZIO – Determinare il peso di un'asta di alluminio ($E_{Al} = 71000$ N/mm², $\gamma_{Al} = 2.7$ kg/dm³) a sezione circolare cava, lunga 2 m, incernierata agli estremi, caricata con una forza di compressione di 2 t. Si assuma il diametro interno della sezione $d = 0.90\, D$.
Quindi, confrontare il peso calcolato dell'asta di alluminio con quello di un'asta in acciaio avente pari lunghezza ed equivalente resistenza al carico di punta ($E_{Ac} = 210000$ N/mm²; $\gamma_{Ac} = 7.85$ kg/dm³).

SVOLGIMENTO

- Calcolo del momento di inerzia min della sezione dell'asta in Al usando la formula P_{cr}:

$$J_{min.Al} = \frac{l_0^2}{\pi^2}\,\frac{P_{cr}}{E_{Al}} = \frac{2000^2}{\pi^2}\,\frac{20000}{71000} = 114280 \text{ mm}^4$$

- Calcolo delle dimensioni trasversali della sezione dell'asta in alluminio:

$$D^4 = J_{min}\,\frac{64}{\pi} + d^4 \Rightarrow D^4\left(1 - 0.90^4\right) = J_{min}\,\frac{64}{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_{Al} = \sqrt[4]{J_{min}\,\frac{64}{\pi\left(1-0.90^4\right)}} = 51 \text{ mm}$$

$d_{Al} = 0.90 \times 51 = 46$ mm

□ Calcolo del volume e del peso dell'asta di alluminio.

$$V_{Al} = l \times A_{Al} = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \times l = 761450 \text{ mm}^3 = 0,762 \text{ dm}^3$$

$$W_{Al} = \gamma_{Al} \cdot V_{Al} = 2,77 \text{ kg/dm}^3 \times 0,762 = 2,11 \text{ kg}$$

□ Calcolo del volume e del peso dell'asta di acciaio.

Per l'asta in acciaio:

$$J_{min,Ac} = \frac{l^2}{\pi^2} \frac{P_{cr}}{E_{Ac}} = \frac{2000^2}{3,14^2} \frac{20000}{210000} = 38697,70 \text{ mm}^4$$

$$D_{Ac} = \sqrt[4]{J_{min} \frac{64}{\pi(1 - 0,90^4)}} \simeq 38 \text{ mm} \quad \text{e} \quad d_{Ac} = 0,90 \times D_{Ac} = 35 \text{ mm}$$

$$V_{Ac} = l \times A_{Ac} = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \cdot l = \frac{\pi (39^2 - 35^2)}{4} \cdot 2000 =$$

$$= 0,46472 \times 10^6 \text{ mm}^3 = 0,465 \text{ dm}^3$$

$$W_{Ac} = \gamma_{Ac} \times V_{Ac} = 7,85 \text{ kg/dm}^3 \times 0,465 \text{ dm}^3 = 3,65 \text{ kg}$$

Si ha:

$$\frac{W_{Al}}{W_{Ac}} = \frac{2,11}{3,65} = 0,58 \rightarrow$$

A parità di resistenza al carico di punta, un'asta di alluminio permette di ottenere, rispetto a un'asta di acciaio di pari lunghezza, un vantaggio di circa 40% in termini di peso a discapito di maggiore aumento delle sue dimensioni trasversali.