Número de P_3-Carathéodory em Grafos Circulantes

Braully Rocha da Silva, Erika Morais Martins Coelho,
Hebert Coelho da Silva

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Informática

14 de novembro de 2024

Roteiro

- Motivação
- Preliminares
- Resultados
- Conclusão e trabalhos futuros

Modelo de propagação

O processo de influência pode ser modelado pelo contexto:

- Alguns indivíduos estão inicialmente influenciados;
- Os demais indivíduos são influenciados à medida que seus vizinhos também ficam influenciados.
- Novos indivíduos influenciados podem propagar a influência a outros indivíduos.

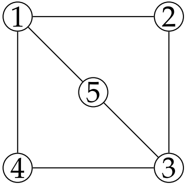
Problemas relacionados

- Propagação de informações em redes sociais
- Disseminação de notícias falsas
- Marketing viral
- Infecção e doenças contagiosas

Notações

Grafo simples: $G = (V(G)), E(G))$
Notações:

- $N(v) = \{u \in V(G) | vu \in E(G)\}$
- $d(v) = |N(v)|$



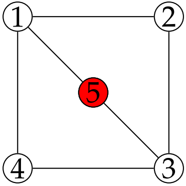
Notações

Grafo simples: $G = (V(G)), E(G))$

Notações:

- $N(v) = \{u \in V(G) | vu \in E(G)\}$
- $d(v) = |N(v)|$

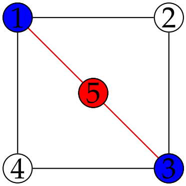
Exemplo: $v = 5$



Notações

Grafo simples: $G = (V(G)), E(G))$
Notações:

- $N(v) = \{u \in V(G) | vu \in E(G)\}$
- $d(v) = |N(v)|$



Exemplo: $v = 5$

- $N(v) = \{1, 3\}$
- $d(v) = 2$

Convexidade em Grafos

A *convexidade* em um grafo G é dada por uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $V(G)$ tal que:

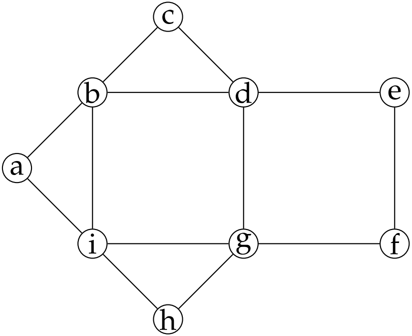
- $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}$ é um conjunto fechado em relação a operação de intersecção
- Cada elemento de $\mathcal{C}$ é um *conjunto convexo*

Convexidade P_3

Convexidades definidas por um conjunto $\mathcal{P}$ de caminhos em grafos.

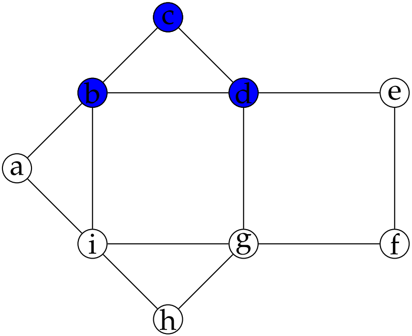
Convexidade P_3 é quando $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os caminhos com três vértices.

Convexidade P_3



Seja $G = (V, E)$ um grafo, um conjunto S é convexo na convexidade P_3 quando todo vértice em $V \setminus S$ tem no máximo um vizinho em S.

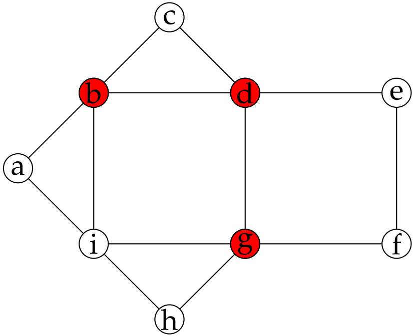
Convexidade P_3



Seja $G = (V, E)$ um grafo, um conjunto S é convexo na convexidade P_3 quando todo vértice em $V \setminus S$ tem no máximo um vizinho em S.

- $S_1 = \{b, c, d\}$ é convexo

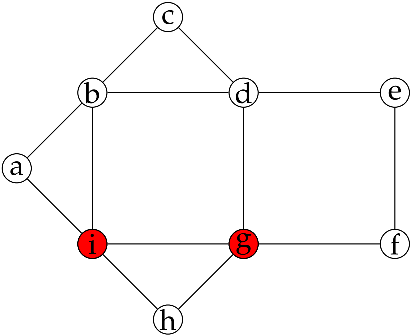
Convexidade P_3



Seja $G = (V, E)$ um grafo, um conjunto S é convexo na convexidade P_3 quando todo vértice em $V \setminus S$ tem no máximo um vizinho em S.

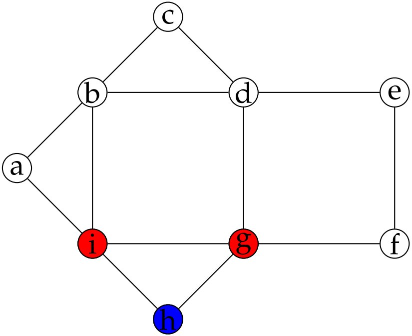
- $S_1 = \{b, c, d\}$ é convexo
- $S_2 = \{b, d, g\}$ não é convexo

Convexidade P_3



Intervalo fechado: para $u, v \in V(G)$ é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a todo caminho P_3 entre u e v.

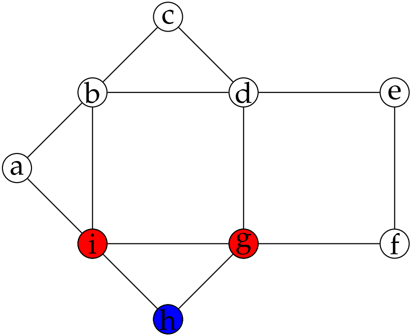
Convexidade P_3



Intervalo fechado: para $u, v \in V(G)$ é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a todo caminho P_3 entre u e v.

- $I[i, g] = \{i, g, h\}$

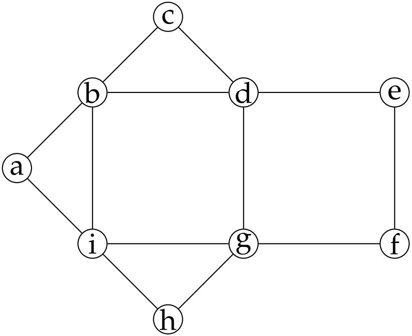
Convexidade P_3



Intervalo fechado: para $u, v \in V(G)$ é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a todo caminho P_3 entre u e v.

- $I[i, g] = \{i, g, h\}$
- Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S]$ é a união de todos $I[u, v]$ para $u, v \in S$.

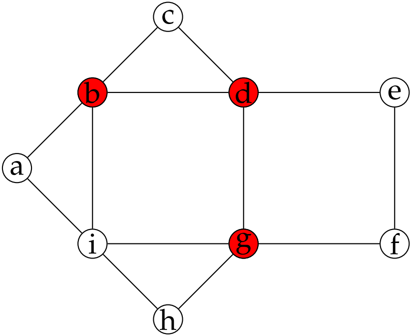
Envoltória e percolação



Envoltória convexa: $H(S) = I^k[S]$ tal que $I^k[S] = I^{k-1}[S]$ para $k \geq 2$.

Percolação: O processo de computar a envoltória convexa de um conjunto não convexo.

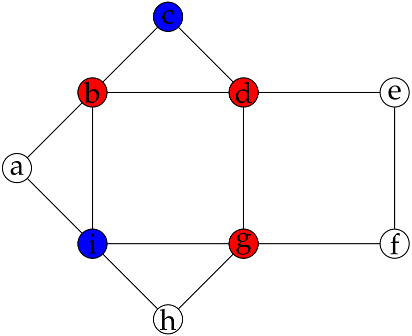
Envoltória e percolação



Envoltória convexa: $H(S) = I^k[S]$ tal que $I^k[S] = I^{k-1}[S]$ para $k \geq 2$.
Percolação: O processo de computar a envoltória convexa de um conjunto não convexo.

- $S = \{b, d, g\}$

Envoltória e percolação

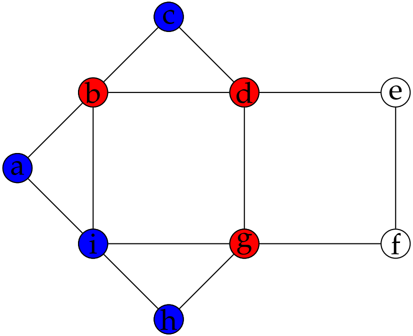


Envoltória convexa: $H(S) = I^k[S]$ tal que $I^k[S] = I^{k-1}[S]$ para $k \geq 2$.

Percolação: O processo de computar a envoltória convexa de um conjunto não convexo.

- $S = \{b, d, g\}$
- $I^1[S] = S \cup \{c, i\}$.

Envoltória e percolação

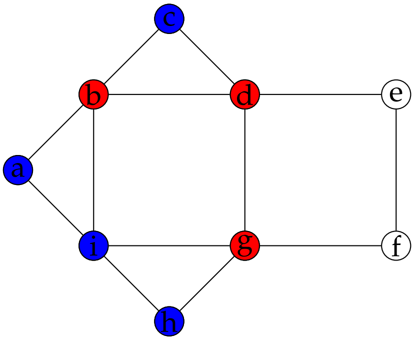


Envoltória convexa: $H(S) = I^k[S]$ tal que $I^k[S] = I^{k-1}[S]$ para $k \geq 2$.

Percolação: O processo de computar a envoltória convexa de um conjunto não convexo.

- $S = \{b, d, g\}$
- $I^1[S] = S \cup \{c, i\}$.
- $I^2[S] = I^1[S] \cup \{a, h\}$.

Envoltória e percolação

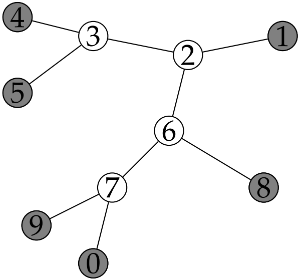


Envoltória convexa: $H(S) = I^k[S]$ tal que $I^k[S] = I^{k-1}[S]$ para $k \geq 2$.

Percolação: O processo de computar a envoltória convexa de um conjunto não convexo.

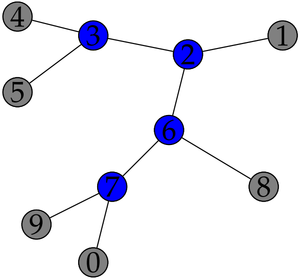
- $S = \{b, d, g\}$
- $I^1[S] = S \cup \{c, i\}$.
- $I^2[S] = I^1[S] \cup \{a, h\}$.
- $I^3[S] = I^2[S]$.
- $H(S) = I^3[S] = I^2[S]$.

Conjunto de Carathéodory



Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

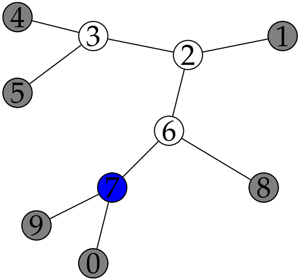
Conjunto de Carathéodory



Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

- $H(S) = V(G)$

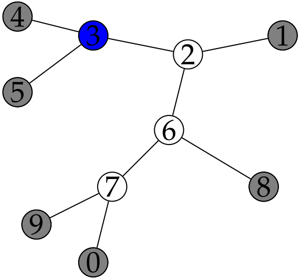
Conjunto de Carathéodory



Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

- $H(S) = V(G)$
- Se $v = 7$, então $v \in H(\{9, 0\})$

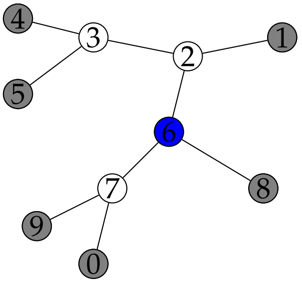
Conjunto de Carathéodory



- $H(S) = V(G)$
- Se $v = 7$, então $v \in H(\{9, 0\})$
- Se $v = 3$, então $v \in H(\{4, 5\})$

Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

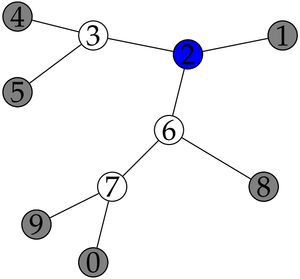
Conjunto de Carathéodory



Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

- $H(S) = V(G)$
- Se $v = 7$, então $v \in H(\{9, 0\})$
- Se $v = 3$, então $v \in H(\{4, 5\})$
- Se $v = 6$, então $v \in H(\{8, 9, 0\})$

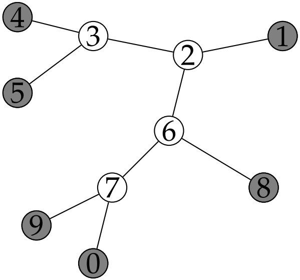
Conjunto de Carathéodory



Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

- $H(S) = V(G)$
- Se $v = 7$, então $v \in H(\{9,0\})$
- Se $v = 3$, então $v \in H(\{4,5\})$
- Se $v = 6$, então $v \in H(\{8,9,0\})$
- Se $v = 2$, então $v \in H(\{1,4,5\})$

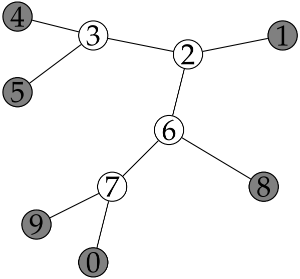
Conjunto de Carathéodory



- $H(S) = V(G)$
- Se $v = 7$, então $v \in H(\{9, 0\})$
- Se $v = 3$, então $v \in H(\{4, 5\})$
- Se $v = 6$, então $v \in H(\{8, 9, 0\})$
- Se $v = 2$, então $v \in H(\{1, 4, 5\})$
- Então, $c_s(G) = 3$

Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

Conjunto de Carathéodory



Qual o minimo do $|S|$ tal que $v \in H(S)$, para todo $v \in H(S) \setminus S$.

- $H(S) = V(G)$
- Se $v = 7$, então $v \in H(\{9, 0\})$
- Se $v = 3$, então $v \in H(\{4, 5\})$
- Se $v = 6$, então $v \in H(\{8, 9, 0\})$
- Se $v = 2$, então $v \in H(\{1, 4, 5\})$
- Então, $c_s(G) = 3$
- Para calcular o $c(G)$, é necessário calcular o $c_s(G)$ para todo $S \subseteq V(G)$ e pegar o maior valor.

Nº de Carathéodory

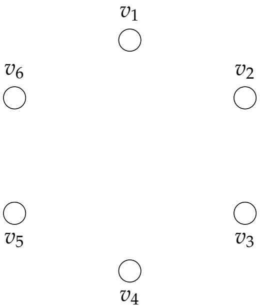
- O *número de Carathéodory* $c(G)$ é o menor inteiro c, para o qual todo $u \in H(S)$, existe um conjunto $F \subseteq S$, com $|F| \leq c$ e $u \in H(F)$
- Se $\partial H(S) = H(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H(S \setminus \{u\})$, é não vazio, então S é um *conjunto de Carathéodory*
- Esta definição permite uma forma alternativa, o número de Carathéodory é a maior cardinalidade de um conjunto de Carathéodory

Grafos circulantes

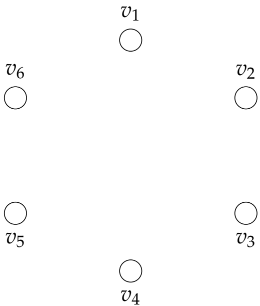
Definição: Os grafos circulantes $C_n(L)$ são grafos circulares com n vértices e lista de inteiros L, tal que $C_n(L)$ tem vértices $V(C_n(L)) = \{1, 2, ..., n\}$ e arestas
$st \in E(C_n(L)) | (s + t) \bmod n \in L$

Exemplo de grafos circulantes

Construção simplificada: Para cada $j \in L$ o i-ésimo vértice é adjacente ao $(i+j)$-ésimo e ao $(i-j)$-ésimo vértice.



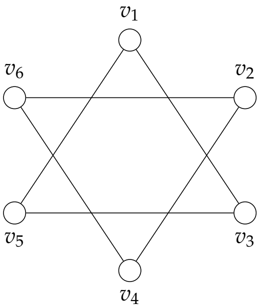
$C_6(2)$

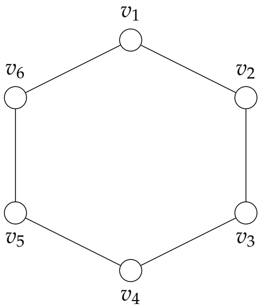


$C_6(1,2)$

Exemplo de grafos circulantes

Construção simplificada: Para cada $j \in L$ o i-ésimo vértice é adjacente ao $(i+j)$-ésimo e ao $(i-j)$-ésimo vértice.

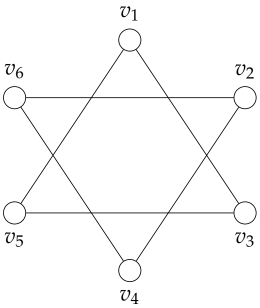


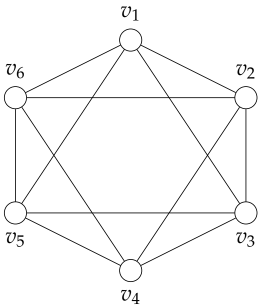


$C_6(\mathbf{2}) = \{v_1v_3, v_2v_4, v_4v_6, v_6v_2\}$ $C_6(\mathbf{1}, 2) = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_6v_1\}$

Exemplo de grafos circulantes

Construção simplificada: Para cada $j \in L$ o i-ésimo vértice é adjacente ao $(i+j)$-ésimo e ao $(i-j)$-ésimo vértice.

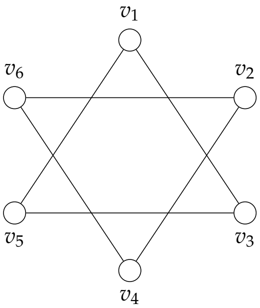




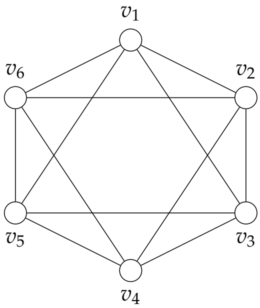
$C_6(2)$ $\quad$ $C_6(1,\mathbf{2}) = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_6v_1, v_1v_3, v_2v_4, v_4v_6, v_6v_2\}$

Exemplo de grafos circulantes

Construção simplificada: Para cada $j \in L$ o i-ésimo vértice é adjacente ao $(i+j)$-ésimo e ao $(i-j)$-ésimo vértice.



$C_6(2)$



$C_6(1,2)$

Trabalhos Relacionados

- NP-difícil: Determinar se um grafo G tem um conjunto Carathéodory de tamanho k [Barbosa et al. (2012)].
- Algoritmo de tempo polinomial para árvores, co-grafos [Barbosa et al. (2012)] e cordais [Coelho et al. (2014)]
- Limite superior para número envoltória de grafos circulantes [Shaheen et al.(2022)].

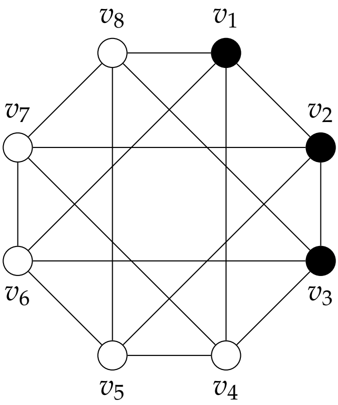
Propriedades envoltória circulante

Shaheen et al. (2022) apresentam algumas propriedades de grafos circulantes que podem concluir a seguinte proposição.

Proposição 1

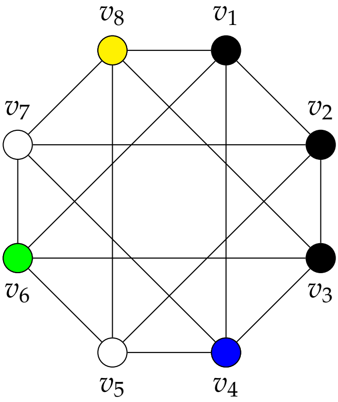
Seja G um grafo circulante $C_n(1,r)$ e S um conjunto de vértices tal que $S = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, ..., v_{i+(r-1)}\}$, então S é um conjunto envoltório.

Exemplo Proposição 1



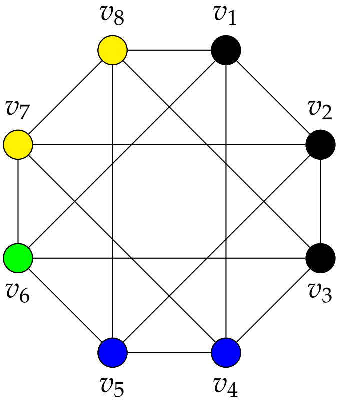
$$C_8(1,3) \text{ e } S = \{v_1, v_2, v_3\}$$

Exemplo Proposição 1



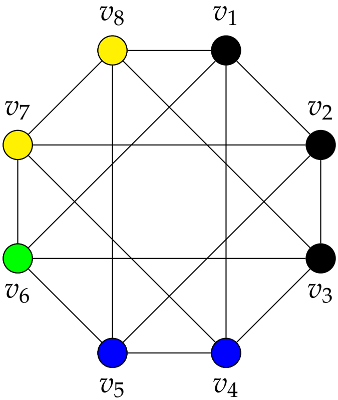
$$I^1[S] = I[S] \cup \{v_4, v_6, v_8\}$$

Exemplo Proposição 1



$$I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_5, v_7\}$$

Exemplo Proposição 1



$$I^3[S] = I^2[S] = H(S)$$

Para um grafo circulante $C_n(1,2)$

Fato 1

Seja G um grafo e S um conjunto de Carathéodory de G, então S possui pelo menos dois vértices u e v tal que $w \in N(u) \cap N(v)$, onde $w \in V(G)$.

Lema 1

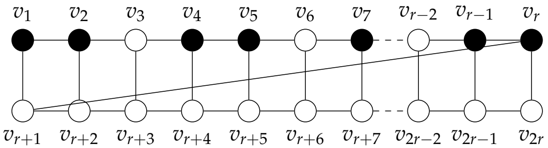
Seja $G = C_n(1,2)$, então $c(G) = 2$.

Proposição 2

Seja C_n^k um grafo potência de ciclo, então $c(C_n^k) = 2$.

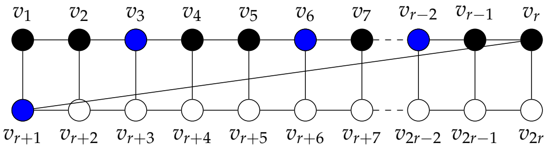
Lema 2

Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3|(r+1)$ *e* $S \subseteq V(G)$*. Se* $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ *então* $v_{2r} \in H(S)$*.*



Lema 2

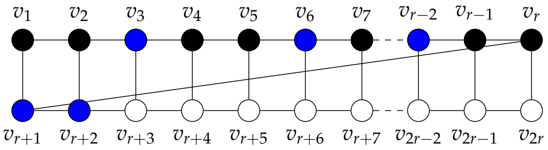
Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3|(r+1)$ *e* $S \subseteq V(G)$. *Se* $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ *então* $v_{2r} \in H(S)$.



- $\{v_i \mid 3 \mid i\} \in I^1[S]$.

Lema 2

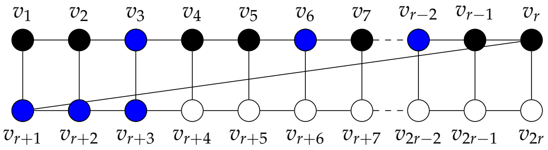
Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3 | (r+1)$ *e* $S \subseteq V(G)$*. Se* $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ *então* $v_{2r} \in H(S)$*.*



- $\{v_i \mid 3 \mid i\} \in I^1[S]$.
- $v_{r+2} \in I^2[S]$.

Lema 2

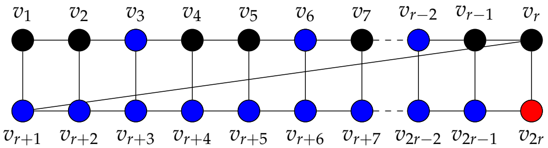
Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3|(r+1)$ *e* $S \subseteq V(G)$*. Se* $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ *então* $v_{2r} \in H(S)$*.*



- $\{v_i \mid 3 \mid i\} \in I^1[S]$.
- $v_{r+2} \in I^2[S]$.
- $v_{r+3} \in I^3[S]$.

Lema 2

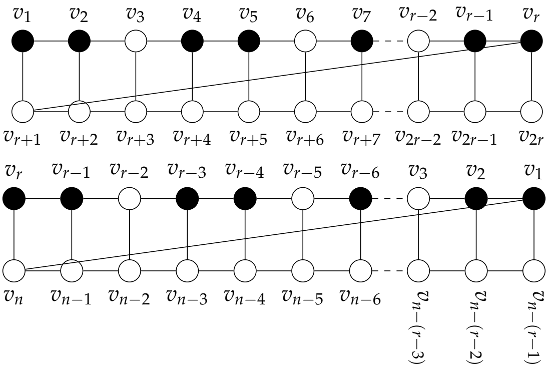
Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3 | (r+1)$ *e* $S \subseteq V(G)$. *Se* $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ *então* $v_{2r} \in H(S)$.



- $\{v_i \mid 3 \mid i\} \in I^1[S]$.
- $v_{r+2} \in I^2[S]$.
- $v_{r+3} \in I^3[S]$.
- ...
- $v_{2r} \in H(S)$.

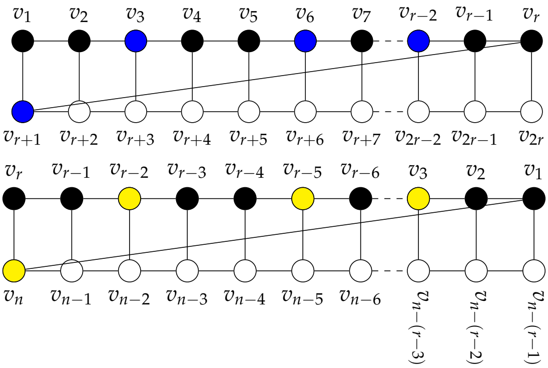
Lema 3

Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 | (r+1)$ e $S = \{v_i \in V(G) \mid 3 \nmid i$ para $1 \le i \le r\}$. Se $n \ge 4r - 2$ então $v_{2r} \in \partial H(S)$.



Lema 3

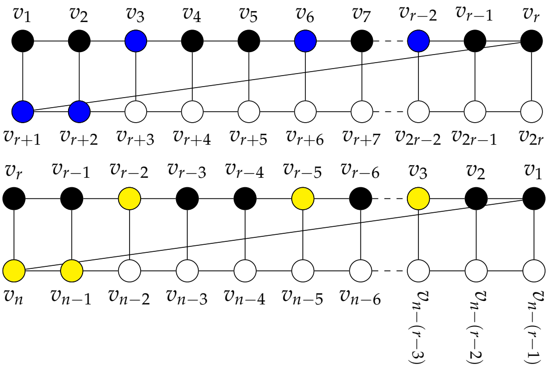
Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 | (r+1)$ e $S = \{v_i \in V(G) \mid 3 \nmid i$ para $1 \leq i \leq r\}$. Se $n \geq 4r - 2$ então $v_{2r} \in \partial H(S)$.



- $I^1[S] = S \cup \{v_i \mid 3 \mid i\} \cup \{v_{r+1}, v_n\}$

Lema 3

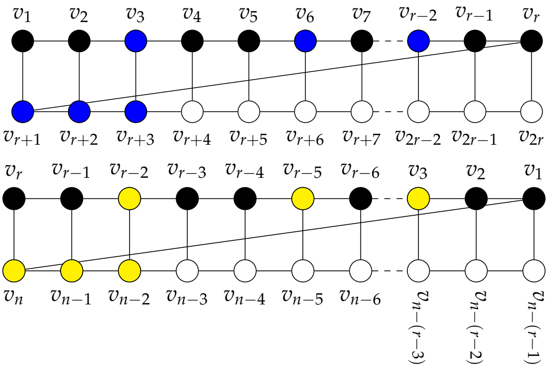
Seja $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3|(r+1)$ *e* $S = \{v_i \in V(G) \mid 3 \nmid i$ *para* $1 \leq i \leq r\}$. *Se* $n \geq 4r - 2$ *então* $v_{2r} \in \partial H(S)$.



- $I^1[S] = S \cup \{v_i \mid 3 \mid i\} \cup \{v_{r+1}, v_n\}$
- $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$

Lema 3

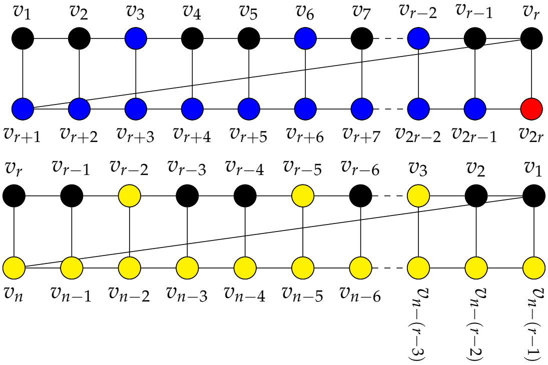
Seja $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3 | (r+1)$ *e* $S = \{v_i \in V(G) \mid 3 \nmid i$ *para* $1 \leq i \leq r\}$. *Se* $n \geq 4r - 2$ *então* $v_{2r} \in \partial H(S)$.



- $I^1[S] = S \cup \{v_i \mid 3 \mid i\} \cup \{v_{r+1}, v_n\}$
- $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$
- $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$

Lema 3

Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 | (r+1)$ e $S = \{v_i \in V(G) \mid 3 \nmid i$ para $1 \leq i \leq r\}$. Se $n \geq 4r - 2$ então $v_{2r} \in \partial H(S)$.



- $I^1[S] = S \cup \{v_i \mid 3 \mid i\} \cup \{v_{r+1}, v_n\}$
- $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$
- $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$
- $I^r[S] = I^{r-1}[S] \cup \{v_{2r}, v_{n-(r-1)}\}$

Para $G = C_n(1, r)$ tal que $3|(r+1)$

Teorema 1

Seja $G = C_n(1, r)$ *tal que* $3|(r+1)$ *e* $n \geq 4 \times r - 2$ *então* $c(G) \geq \frac{2(r+1)}{3}$.

Exemplo

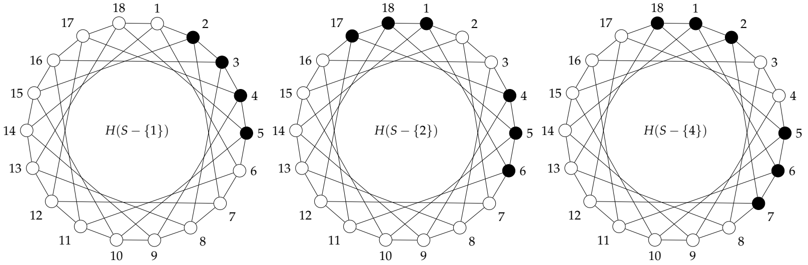


Figura: Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1, 5)$

Exemplo

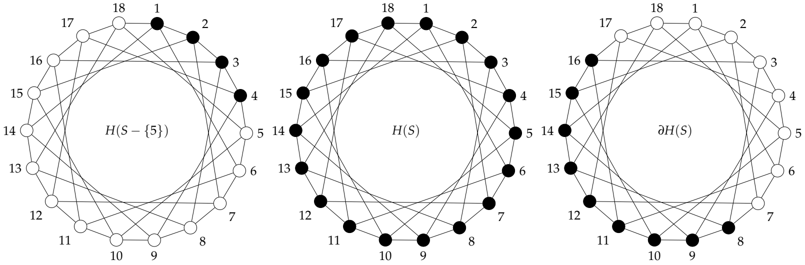


Figura: Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1,5)$

Para $C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r+1)$

De forma análoga vamos concluir um limite inferior para o número de Carathéodory para $C_n(1, r)$, onde $r + 1$ não é múltiplo de 3.

Para $C_n(1,r)$ tal que $3 \nmid (r+1)$

Lema 4

Seja $G = C_n(1,r)$ *tal que* $3 \nmid (r+1)$ *e* $S \subseteq V(G)$. *Se* $S = \{v_r\} \cup \{v_i | 3 \nmid i \text{ tal que } 1 \leq i < r-1\}$ *então* $v_{2r} \in H(S)$.

Lema 5

Seja $G = C_n(1,r)$ *tal que* $3 \nmid (r+1)$ *e* $S = \{v_i | 3 \nmid i \text{ tal que } 1 \leq i < r-1\} \cup \{v_r\}$. *Se* $n \geq 4r-2$ *então* $v_{2r} \in \partial H(S)$.

Teorema 2

Seja $G = C_n(1,r)$ *tal que* $3 \nmid (r+1)$ *e* $n \geq 4 \times r - 2$ *então* $c(G) \geq \lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$.

Conclusão

- Para grafos circulantes $C_n(1,2)$ o número de Carathéodory é 2.
- Para grafos circulantes $C_n(1,r)$ com $r > 2$ e $n \geq 4r-2$:
  - $c(C_n(1,r)) \geq \lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$ se $3 \nmid (r+1)$
  - $c(C_n(1,r)) \geq \frac{2(r+1)}{3}$ caso contrário.

Trabalhos Futuros

- Determinar limite superior para o número de Carathéodory em grafos circulantes na convexidade P_3.
- Estender os resultados para outros tipos de grafos de Cayley: Hipercubos, Hamming e Kneser.

Referências

- Barbosa et al. (2012): **On the Carathéodory Number for the Convexity of Paths of Order Three**. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 26(3):929–939. ISSN 0895-4801.
- Coelho et al. (2014): **The Carathéodory number of the convexity of chordal graphs**. Discrete Applied Mathematics, vol. 172, 2014 p.104–108.
- Shaheen et al.(2022): **Irreversible k -Threshold Conversion Number of Circulant Graphs**. Journal of Applied Mathematics, 2022(1):1250951. ISSN 16870042.

Fim

Dúvidas e sugestões?

Obrigado!